КВАНТУВАННЯ СИГНАЛІВ В ЦИФРОВИХ СИСТЕМАХ

1. **Представлення і кодування чисел**
2. **Квантування чисел і сигналів**
3. **Шум аналого-цифрового перетворення**

Цифрова система обробки сигналів – це дискретна система, яка описується різницевим рівнянням і може бути реалізована програмно-апартним шляхом (наприклад на цифрових сигнальних процесорах) або ж апаратним шляхом в вигляді спеціалізованого цифрового обчислювача.

Для представлення коефіцієнтів системи (різницевого рівняння або системної функції) та відліків сигналу, що опрацьовується, в цифровій системі використовуються елементи пам'яті (регістри, комірки пам'яті), розрядність яких скінчена. Операційні пристрої (суматори, помножувачі) також мають обмежену розрядність. Відповідно, коефіцієнти системи та відліки сигналу представляються з обмеженою точністю. Обмеженість розрядності елементів пам'яті та операційних пристроїв системи приводять до операції квантування.

Квантування - це нелінійна операція, що викликає появу помилок в реалізації алгоритму. Сукупність цих помилок називаються помилками (шумами) квантування.

Представлення та кодування чисел

Форми представлення чисел

Дискретний сигнал представляє собою послідовність відліків (чисел), що можуть отримувати довільні значення в деякому діапазоні.

Цифровий сигнал - це квантований по рівню дискретний сигнал, тобто квантована послідовність відліків, які можуть приймати лише кінцевий ряд дискретних по величині значень - рівнів квантування. Значення відліків цифрового сигналу представляються числами в обраній системі числення.

Як правило, в пристроях цифрової обробки сигналів числа представляються в двійковій системі числення, яка має дві основні форми:

- з фіксованою точкою;
- з плаваючою точкою.

Представлення та кодування чисел

Форми представлення чисел. Формат з фіксованою точкою

Представлення чисел в формі з фіксованою точкою (ФТ) означає, що в межах заданого формату для всіх чисел логічно фіксуються однакове місцезнаходження точки, яка розділяє цілу та дробові частини числа. Старший розряд числа використовується, як знаковий, всі інші розряди рахуємо, як значні. Після старшого знакового розряду логічно фіксується точка.

Символьне значення формату, в якому представлене двійкове число А має вигляд 2^b, де b– кількість розрядів числа А. (див. рис.1.)

7	6	5	4	3	2	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1
Знак	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}

Рис.1

Діапазон абсолютних значень чисел А в формі з ФТ складає $0 \le |A| \le 1 - z^{-b}$

Для усунення переповнення в системах ЦОС з ФТ вводиться масштабування даних, при цьому всі математичні операції виконуються з числами А, по абсолютному значенні меншими одиницями: $0 \le |A| \le 1$

Представлення та кодування чисел

Форми представлення чисел. Формат з плаваючою точкою

Представлення числа А в формі з плаваючою точкою (ПТ) основане на записі:

$$A = \mu s^{\pm\gamma}$$

де s – основа системи числення; μ – мантиса, а γ – порядок числа А.

Для усунення неоднозначності та спрощення математики чисел з ПТ з всіх можливих варіантів представлення числа А обирають один, так званою нормалізованою формою. Нормалізована форма відповідає такому представленню числа, коли ціла частина мантиси рівна нулю, перша значуща цифра дробової частини відмінна від нуля.

Представлення та кодування чисел

Кодування чисел

Для кодування чисел з ФТ застосовують два основні способи: прямий та додатковий.

Прямий код числа А формується по наступному правилу. В знаковий розряд записується нуль (для додатніх чисел) та 1 (для від’ємних), значущі розряди відповідають дробовій частині числа. Після старшого знакового розряду логічно фіксується точка, яка відокремлює цілу частину від дробової.

Це правило має вигляд:

$$[A]_{пр} = \begin{cases} 0,a_1,a_2..a_b \text{ при } A \geq 0 \\ 1,a_1,a_2..a_b \text{ при } A < 0 \end{cases}$$

Додатковий код більш часто використовується в системах ЦОС, оскільки арифметичні дії над числами із знаком, представленими в додатковому коді, виконуються як над беззнаковими (беззнаковими називаються числа, що мають позитивний знак по замовчанню).

Представлення та кодування чисел

Кодування чисел

Додатковий код числа А формується за наступним правилом. Якщо число позитивне, то додатковий код співпадає з прямим кодом, тобто

$$[A]_{дод} = [A]_{пр}$$

Для негативних чисел в знаковий розряд записується 1, а значущі розряди початкового числа інвертуються (0 замінюється 1 і навпаки) і до молодшого значущого розряду отриманого числа додається 1 з дотриманням правил складання двійкових чисел, тобто

$$[A]_{дод} = \begin{cases} 0, a_1, a_2 .. a_b \text{ при } A \geq 0 \\ 1, \bar{a}_1, \bar{a}_2 .. \bar{a}_b + 2^{-b} \text{ при } A < 0 \end{cases}$$

Квантування чисел та сигналів

Способи квантування чисел

Принциповою відмінністю дискретної системи від цифрової є введення в алгоритм обробки цифрової системи, операції квантування відліків сигналів і коефіцієнта системи.

Розглянемо способи квантування чисел, джерело помилок квантування та гіпотези про властивості помилок квантування.

Квантування числа – це його представлення за допомогою кінцевої кількості (b) значущих розрядів. Операція квантування є нелінійною та вносить в представлене число помилку

$$\varepsilon = F(A) - A$$

де A – число до квантування;

F(A)– число після квантування.

Кроком квантування називається відстань між двома сусідніми рівнями квантування.

Розглянемо операцію квантування з постійним кроком Q=const.

Квантування чисел та сигналів

Способи квантування чисел

Наглядно процес квантування відліків дискретної послідовності показано на рис.2. На рис.2,*а* пунктирною лінією зображено аналоговий сигнал, із якого отримані відліки дискретної послідовності. На рис.2,*б* зображено квантований сигнал, значення якого розміщені на рівнях квантування.

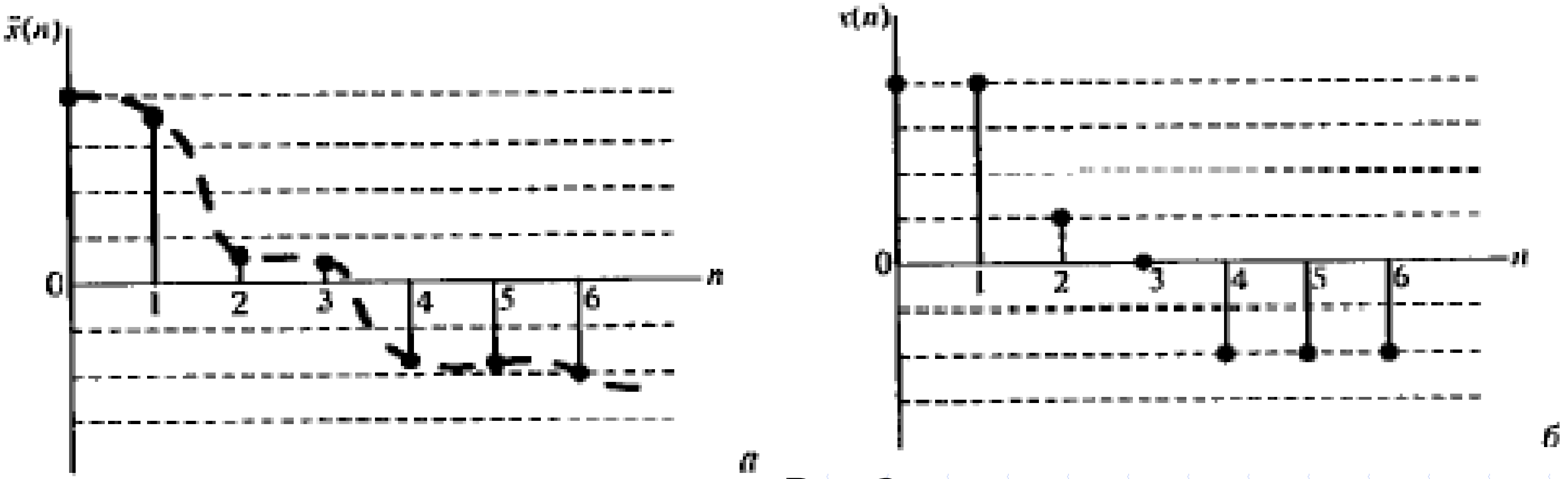

Рис.2

Квантування виконується двома способами: за допомогою округлювання та урізання.

Квантування чисел та сигналів

Способи квантування чисел

При округленні числа до значущих розрядів вихідне k-розрядне число заміняється на саме близьке b-розрядне. Характеристика нелінійності, відповідає операції квантування показана на рис.3,*а* числам A, модулі яких менші ніж Q/2, відповідають квантовані числа $A_{квант}=Q$.

При урізанні k-розрядного числа до значущих розрядів молодші розряди вихідного числа урізаються.

На рис.3,*б* показано графік щільності ймовірності похибки квантування при округлені, а на рис.4 - при урізанні.

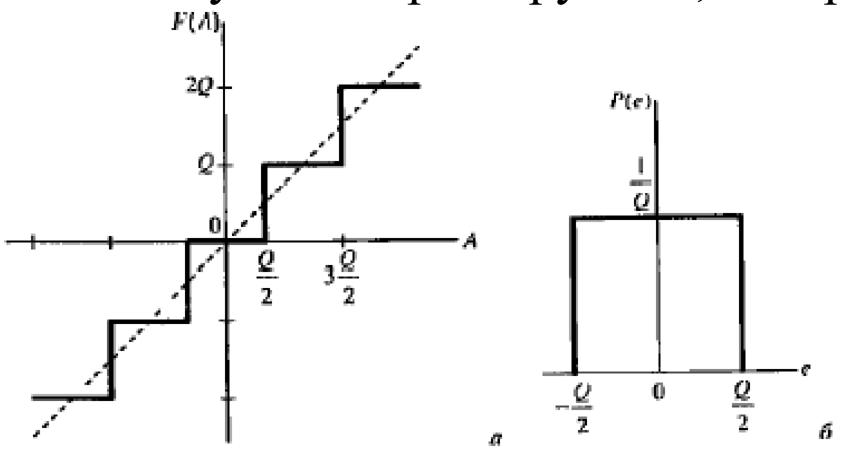

Рис.3

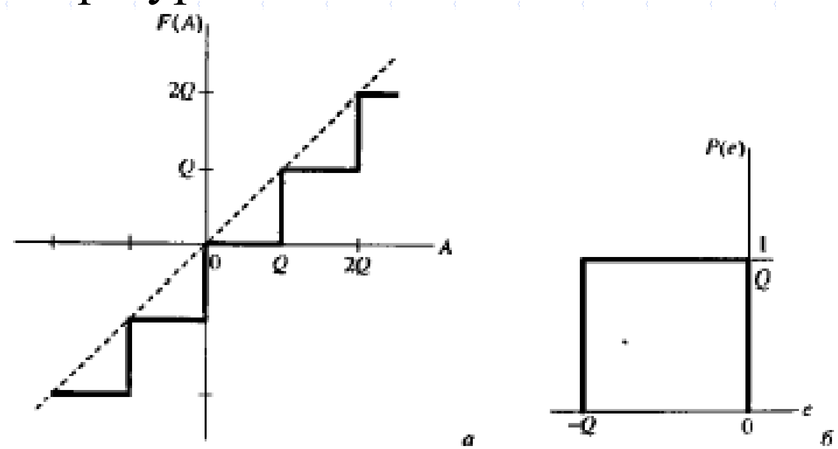

Рис.4

Квантування чисел та сигналів

Моделі процесу квантування

Джерелами помилок квантування в ЦОС є:

- аналого-цифрові перетворення, при яких квантуються дискретні сигнали;
- множення цифрових сигналів, результат якого є округлення або урізання;
- квантування коефіцієнтів цифрової системи.

Нелінійна модель процесу квантування показана на рисунку 5,*а*, де
d(n) - квантований сигнал (дискретний або k– розрядний цифровий);
p(n) - квантований сигнал (b–розрядний цифровий, b<k).

Лінійна модель процесу квантування представлена на рис.5,*б*, де e(n) - шум квантування (помилка квантування), тобто адитивний дискретний сигнал виду:

$$e(n) = F\{d(n)\} - d(n)$$

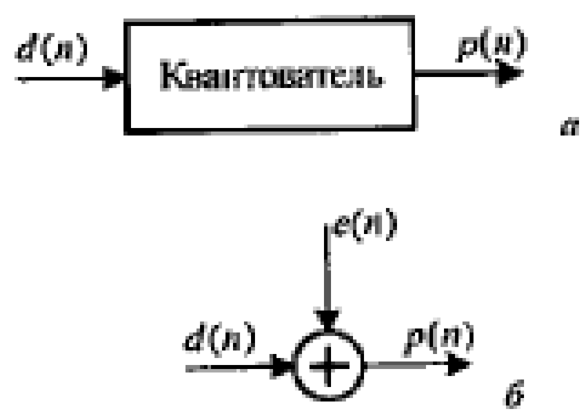

Рис.5

Квантування чисел та сигналів

Гіпотези про властивості квантування

Для сигналу помилки квантування вводяться наступні припущення:

- послідовність *e(n)* є стаціонарним і ергодичним дискретним випадковим процесом (стаціонарний процес володіє властивістю ергодичності, якщо середнє за часом випадкового процесу співпадає з середнім по безлічі реалізацій випадкового процесу);
- розподіл ймовірності помилок є рівномірним по діапазону помилок квантування (див. рис.3,*б* та рис.4,*б*).
- будь-які два відліки послідовності *e(n)* некорельовані, тобто послідовність *e(n)* є випадковим процесом типу «білий шум»;
- послідовність *e(n)* некорельована з квантованою послідовністю *d(n)*.

Введення вказаних допущень дозволяє спростити аналіз ефектів квантування сигналів в цифрових системах.

Шум аналого–цифрового перетворення

Лінійна модель процесу квантування

На практиці вхідний сигнал цифрової системи формується в аналого–цифровому перетворювачі (АЦП). Даний пристрій виконує дискретизацію та квантування значущих розрядів вхідного аналогового сигналу. Помилку квантування вхідного сигналу, яка з'являється, називають шумом АЦП.

Для приблизного опису нелінійної операції квантування вхідного сигналу при аналізі цифрових систем використовується лінійна модель процесу квантування вхідного сигналу (див. рис.6).

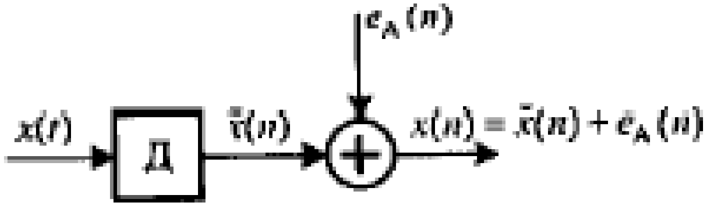

Рис.6

Дискретизатор Д перетворює аналоговий сигнал в послідовність, до якої додається шум АЦП, який враховує помилку квантування. Чим більша розрядність АЦП тим менший його шум, а сам пристрій стає складніше та дорожче. Вихідний сигнал лінійної моделі – квантований (цифровий) сигнал *x(n)*.

Шум аналого–цифрового перетворення

Лінійна модель процесу квантування

Ймовірністні оцінки (математичне сподівання та дисперсія) шуму АЦП при операціях округлення та урізання чисел знаходяться за наступними формулами:

$$\mu_A = E[e_A(n)] = \int_{-\infty}^{\infty} e_A(n)\rho_A(e)de_A(n)$$

$$\sigma_A^{\ 2} = E\left[(e_A(n) - \mu_A)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e_A^{\ 2}(n)\rho_A(e)de_A(n) = E\left[e_A^{\ 2}(n)\right] - \mu^2{}_A$$

де ρ_A- густина ймовірності шуму квантування;

E[ ]– оператор математичного сподівання.

Шум аналого–цифрового перетворення

Шум АЦП, приведений до виходу цифрової системи

Розглянемо цифрову систему з передаточною функцією H(z) та імпульсною характеристикою h(n). Будемо вважати, що коефіцієнти системи та арифметичні операції, які виконуються в ній, реалізуються точно. Лінійна модель оцінки шуму АЦП, приведеного до виходу цифрової системи, показана на рис.7.

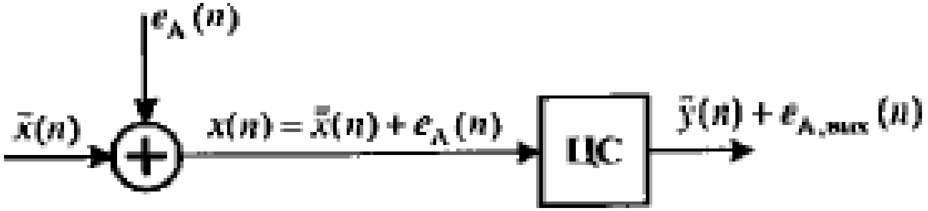

Рис.7

де ЦС – цифрова система,

$\bar{x}(n)$ - відліки дискретного вхідного сигналу,

$e_A(n)$ - шум АЦП,

$x(n)$ - квантований вхідний сигнал,

$\bar{y}(n)$ - складова вихідного сигналу,

$e_{А,вих}(n)$ - вихідний шум обумовлений квантуванням вхідного сигналу (шум АЦП, приведений до виходу цифрової системи).

Шум аналого–цифрового перетворення

Шум АЦП, приведений до виходу цифрової системи

Зазначаючи, що математичне сподівання $\mu_{A=0}$ та дисперсія $\sigma_A{}^2=Q_A{}^2/12$ вхідного шуму квантування отримаємо математичне сподівання та дисперсію вихідного шуму :

$$\mu_{A.вих} = E[e_{A.вих}] = E\left[\sum_{m=0}^{\infty} h(m)e_A(n-m)\right] = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)E[e_A(n-m)] = 0$$

$$\sigma^2{}_{A.вих} = E\left[(e_{A.вих}(n)-\mu_{A.вих})^2\right] = E\left[e^2{}_{A.вих}(n)\right] = E\left[\left(\sum_{m=0}^{\infty} h(m)e_A(n-m)\right)^2\right] =$$

$$= E\left[\sum_{m=0}^{\infty} h^2(m)e_A{}^2(n-m) + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} h(m)h(k)e_A(n-m)e_A(n-k)\right] =$$

$$= E\left[\sum_{m=0}^{\infty} h^2(m)e_A{}^2(n-m)\right] + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\substack{k=0\\ m\neq k}}^{\infty} h(m)h(k)E[e_A(n-m)e_A(n-k)] =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} h^2(m)E\left[e_A{}^2(n-m)\right] = \frac{Q^2{}_A}{12}\sum_{m=0}^{\infty} h^2(m)$$

Шум аналого–цифрового перетворення

Шум АЦП, приведений до виходу цифрової системи

Потужність вихідного шуму визначається наступним чином:

$$P_{A.вих} = 10\lg(\sigma^2{}_{A.вих}) = 10\lg(\sigma^2{}_{A}) + 10\lg\left(\sum_{m=0}^{\infty} h^2(m)\right)$$

Детермінована оцінка (абсолютна межа) вихідного шуму з урахуванням отриманих співвідношень має вигляд:

$$E_{A.вих} = \max_n \left|e_{A.вих}(n)\right| = \max_n \left|\sum_{m=0}^{\infty} h(m)e_A(n-m)\right| \le \sum_{m=0}^{\infty} \left|h(m)\right| \max_n \left|e_A(n-m)\right| = \frac{Q_A}{2}\sum_{m=0}^{\infty} \left|h(m)\right|$$

Таким чином, абсолютна межа помилки квантування вихідного сигналу залежить від імпульсної характеристики системи та не залежить від статистичних характеристик вхідного сигналу.