МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ ПЕРЕТВОРЕНЬ В ЦОС

1. Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ).
2. Z - перетворення.

Дискретне перетворення Фур'є

$$X(k)=X(k\Omega)=\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)\,e^{-jkn\Omega T},\ k=0,\ 1\ldots N-1;$$ - пряме ДПФ

$$x(n)=x(nT)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega)\,e^{jkn\Omega T},\ n=0,\ 1\ldots N-1,$$ - обернене ДПФ

$$e^{-j\Omega T}=e^{-j2\pi/N}=W_N,$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,W_N^{kn},\ k=0,\ 1\ldots N-1;$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\,W_N^{-kn},\ n=0,\ 1\ldots N-1$$

Згортка дискретних сигналів на основі ДПФ

$$y(nT)=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(mT)\,x_2(nT-mT)=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(nT-mT)\,x_2(mT)$$

- кругова (періодична) згортка

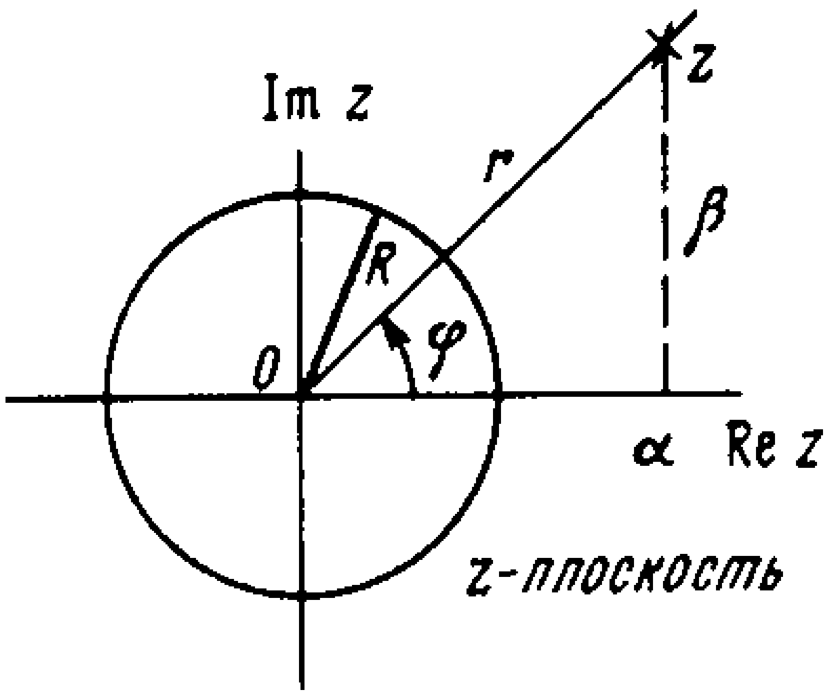
$$Y(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\Big(\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)\,x_2(n-m)\Big)W_N^{nk}=$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)\underbrace{\Big(\sum_{n=0}^{N-1}x_2(n-m)\,W_N^{(n-m)k}\Big)W_N^{mk}}_{X_2(k)}=X_2(k)\underbrace{\sum_{m=0}^{N-1}X_1(m)\,W_N^{mk}}_{X_1(k)}=X_1(k)\,X_2(k).$$

Z - перетворення

$$X(z) = Z\{x(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\, z^{-n},$$

- пряме однобічне Z-перетворення



Z - перетворення

$$x(nT)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)\,z^{n-1}\,dz,$$

- обернене Z-перетворення

$$X(z)=\sum_{k=1}^{N}\beta_k/(1-\alpha_k z^{-1}).$$

$$\Updownarrow$$

$$x(nT)=\sum_{k=1}^{N}\beta_k(\alpha_k)^n.$$

$x(nT),\ n=0,1,2,\ldots$	$X(z)$
$\tilde{\delta}(nT)$	1
$u_0(nT)$	$1/(1-z^{-1})$
a^n	$1/(1-az^{-1}),\ \lvert a\rvert<1$
n	$z^{-1}/(1-z^{-1})^2$
na^n	$z^{-1}/(1-az^{-1})^2$
$\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m!}{(n-m)!\,n!}$	$(1+z^{-1})^m,\ m\leqslant n$
$\sum_{m=1}^{n} m^{-1}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}\ln\frac{1}{1-z^{-1}}$
$e^{j\omega nT}$	$1/(1-e^{j\omega T}z^{-1})$
$\sin\omega nT$	$\frac{(\sin\omega T)\,z^{-1}}{z^{-2}-(2\cos\omega T)\,z^{-1}+1}$
$\cos n\omega T$	$\frac{(1-\cos\omega T)\,z^{-1}}{z^{-2}-(2\cos\omega T)\,z^{-1}+1}$