

# ЦИФРОВІ МЕТОДИ ПЕРЕТВОРЕННЯ СПЕКТРІВ СИГНАЛІВ

1. Перенос й інверсія спектра сигналу.
2. Формування сигналу з однією бічною смугою.

При обробці сигналів у галузі телекомунікації та радіотехніки виникає ряд задач, пов'язаних з перетворенням спектрів сигналів. Деякі з них вирішуються за допомогою цифрової фільтрації.

В окрему групу можна виділити задачі, що вимагають переміщення спектра сигналу на осі частот. Такі перетворення сигналу є типовими в техніці багатоканального зв'язку при формуванні групового сигналу із частотним розділенням каналів (ЧРК) або при виділенні окремих канальних сигналів із групового сигналу з ЧРК. Особливістю зазначеної обробки є те, що амплітудний спектр сигналу практично не змінюється. Міняється лише положення спектра на осі частот

# 1. Перенос й інверсія спектра сигналу

Розглянемо дискретний дійсний сигнал  $x(nT)$  із частотою дискретизації  $f_d = 1/T$ , спектр якого в основній смузі нормованих частот  $[0; 0,5]$  займає смугу  $[w_1; w_2]$ .

Модуль спектра сигналу  $x(nT)$  умовно показана на рис.1,а.

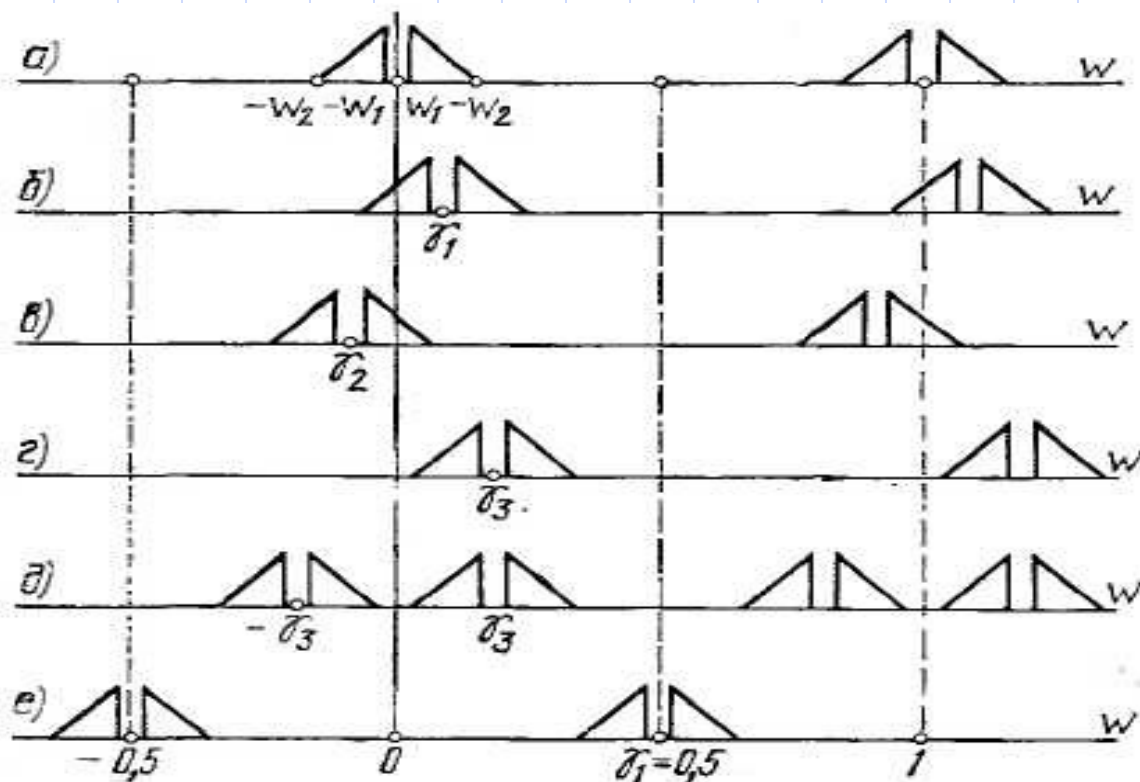


Рис.1

## Перенос спектра дійсного сигналу

Перенос спектра по осі частот на величину  $\gamma$  здійснюється шляхом множення відліків сигналу  $x(nT)$  на відліки дискретної експоненти (рис.2,а), причому  $0 < |\gamma| < 0,5$ .

Спектр сигналу  $y(nT) = x(nT) * e^{-j2\pi n\gamma}$  дорівнює

$$Y(e^{j2\pi w}) = X(e^{j2\pi(w-\gamma)}).$$

Якщо  $\gamma = \gamma_1 > 0$  спектр зміщується по осі частот вправо. На рис.1,б вказаний модуль спектра зміщено вправо. Нижня бокова смуга основного спектра розташована на осі частот симетрично щодо частоти  $w=0$ . Якщо  $\gamma = \gamma_2 < 0$ , спектр зміщується вліво (рис.1,в).

## Перенос спектра дійсного сигналу

Сигнал  $y(nT)$  в загальному випадку є комплексним. Операція множення дійсного сигналу  $x(nT)$  на  $e^{-j2\pi\gamma n}$  виконується схемою, показаною на рис.2,б, де  $y_1(nT)$  і  $y_2(nT)$  - відповідно дійсна й уявна складові вихідного сигналу  $y(nT)$  схеми рис.2,а.

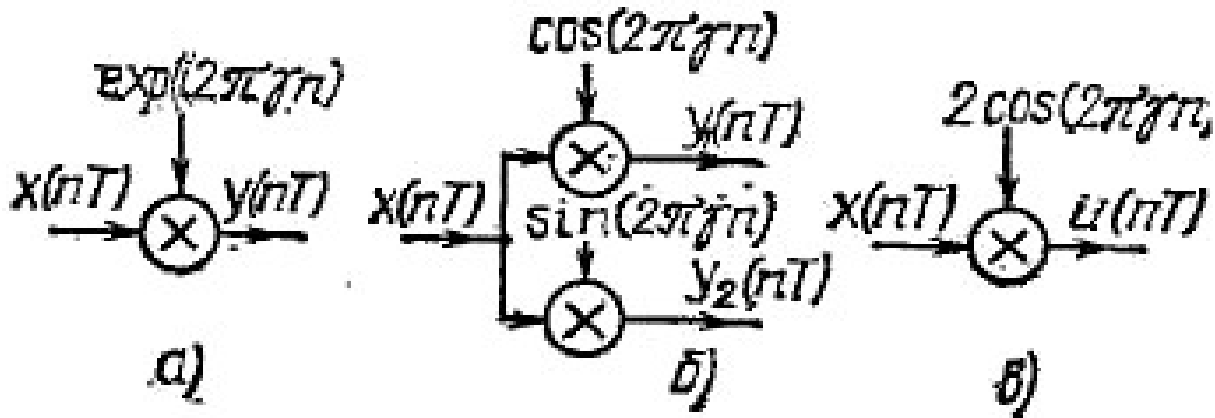


Рис.2

## Перенос спектра дійсного сигналу

Для отримання дійсного сигналу  $u(nT)$ , спектр  $U(e^{j2\pi w})$  якого являє собою спектр вихідного сигналу  $x(nT)$  з бічними смугами, розташованими симетрично щодо певної частоти

$$\gamma_3 \quad (\omega_2 \leq |\gamma_3| \leq 0,5 - \omega_2),$$

необхідно помножити відліки сигналу  $x(nT)$  на відліки дискретної косинусоїди (рис.1,з).

$$\begin{aligned} u(nT) &= x(nT) 2 \cos 2\pi n \gamma_3 = x(nT) e^{j2\pi n \gamma_3} + x(nT) e^{-j2\pi n \gamma_3} = \\ &= u_1(nT) + u_2(nT). \end{aligned}$$

Спектр сигналу  $u_1(n)$  дорівнює спектру вхідного сигналу, зміщеному по осі частот на величину  $\gamma_3$  вправо, а спектр сигналу  $u_2(n)$  дорівнює спектру вхідного сигналу, зміщеному на величину  $\gamma_3$  вліво. Оскільки  $U(e^{j2\pi w}) = U_1(e^{j2\pi w}) + U_2(e^{j2\pi w})$

то результуючий сигнал  $u(n)$  має необхідний спектр (рис.2.1,д).

## Інверсія спектра дійсного сигналу

Інверсія спектра дійсного сигналу  $x(nT)$ , тобто одержання сигналу  $y(nT)$  зі спектром

$$Y(e^{j2\pi\omega}) = X(e^{j2\pi(0,5-\omega)}),$$

здійснюється шляхом простої зміни знака кожного другого відліку сигналу  $x(nT)$ :

$$y(nT) = (-1)^n x(nT), \quad n = 0, 1, \dots$$

Дійсно, сигнал  $y(nT)$  зі спектром (рис.1,е) утворюється шляхом множення відліків сигналу  $x(nT)$  на відліки дискретної експоненти  $e^{j2\pi n\gamma_4}$

де  $|\gamma_4| = 0,5$ , а  $\exp(j2\pi n\gamma_4) = \exp(j\pi n) = (-1)^n$ .

## Перенос спектра комплексного сигналу

Розглянемо дискретний комплексний сигнал  $x(n) = x_1(n) + jx_2(n)$  із частотою дискретизації  $f_d = 1/T$

Перенос спектра  $X(e^{j2\pi w})$  по осі частот на  $\gamma$  здійснюється (як й у випадку дійсного сигналу) множенням відліків сигналу  $x(nT)$  на відліки дискретної експоненти  $e^{j2\pi n\gamma}$

Відповідна схема показана на рис.3,  $y_1(nT)$  і  $y_2(nT)$  - відповідно дійсна й мніма складові вихідного сигналу  $y(nT)$ .

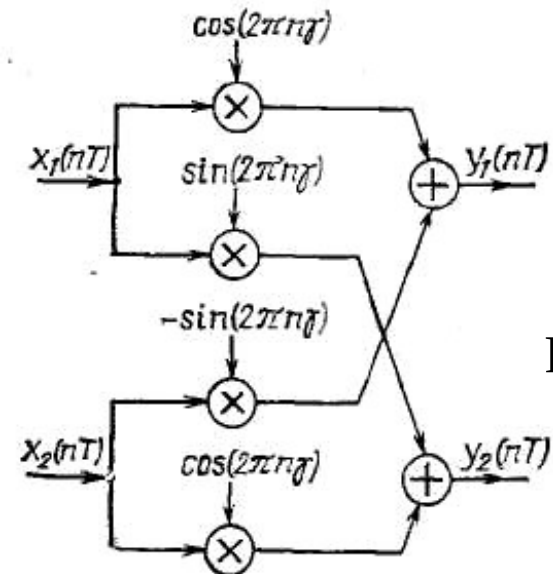


Рис.3

## 2. Формування сигналу з однією бічною смугою (ОБС)

Розглянемо дискретний дійсний сигнал  $x(nT)$ , спектр якого в основній смузі нормованих частот  $[0; 0,5]$  займає смугу  $[w1; w2]$ .

Схема формування комплексного сигналу  $y(nT)$  з ОБС показана на рис.4,а, а модуль спектра вихідного сигналу — на рис.5,а.

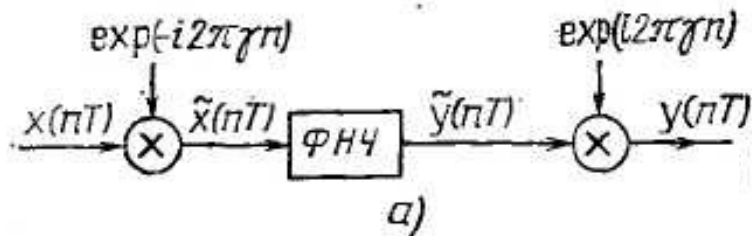
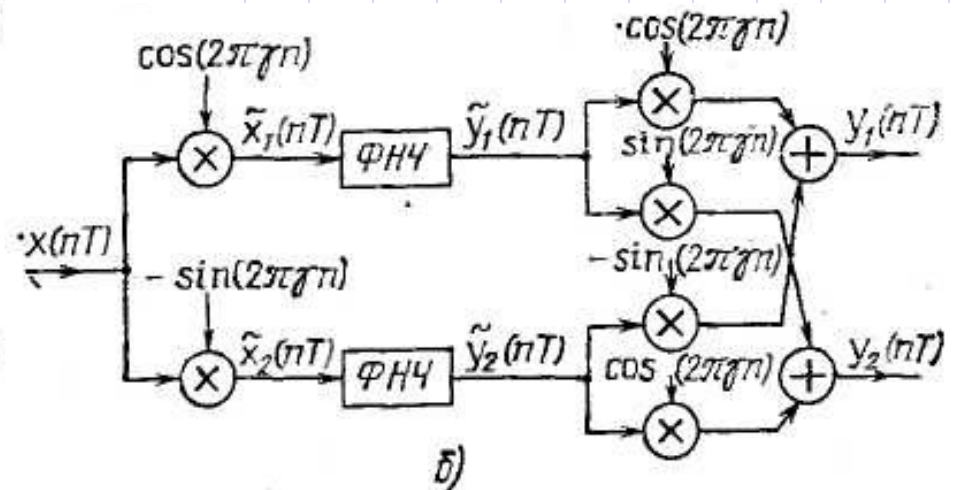


Рис.4





## Перенос спектра комплексного сигналу

Принцип роботи схеми полягає в тому, що сигнал  $x(nT)$  множиться на дискретну експоненту  $e^{j2\pi\gamma}$

Припустимо, що  $\gamma = -(\omega_1 + \omega_2)/2$

При цьому спектр сигналу зміщується на величину  $\gamma$  вліво, верхня бічна смуга спектра розташовується симетрично відносно 0 і займає смугу від  $-(\omega_2 - \omega_1)/2$  до  $(\omega_2 - \omega_1)/2$ .

Модуль спектра такого сигналу показаний на рис.5,б. Далі права бічна смуга виділяється фільтром нижніх частот, ширина нормованої смуги пропущення якого дорівнює  $(\omega_2 - \omega_1)/2$ ,

а ширина нормованої проміжної смуги дорівнює  $\min(2\omega_1, 1 - 2\omega_2)$ .

## Перенос спектра комплексного сигналу

Ідеалізована амплітудно-частотна характеристика ФНЧ показана на рис.5,в, а модуль спектра сигналу  $y(nT)$  на виході ФНЧ — на рис.5,г. Зворотній зсув верхньої бічної смуги спектра в область частот  $[0; 0,5]$  здійснюється множенням сигналу  $y(nT)$  на дискретну експоненту  $e^{-j2\pi\gamma}$

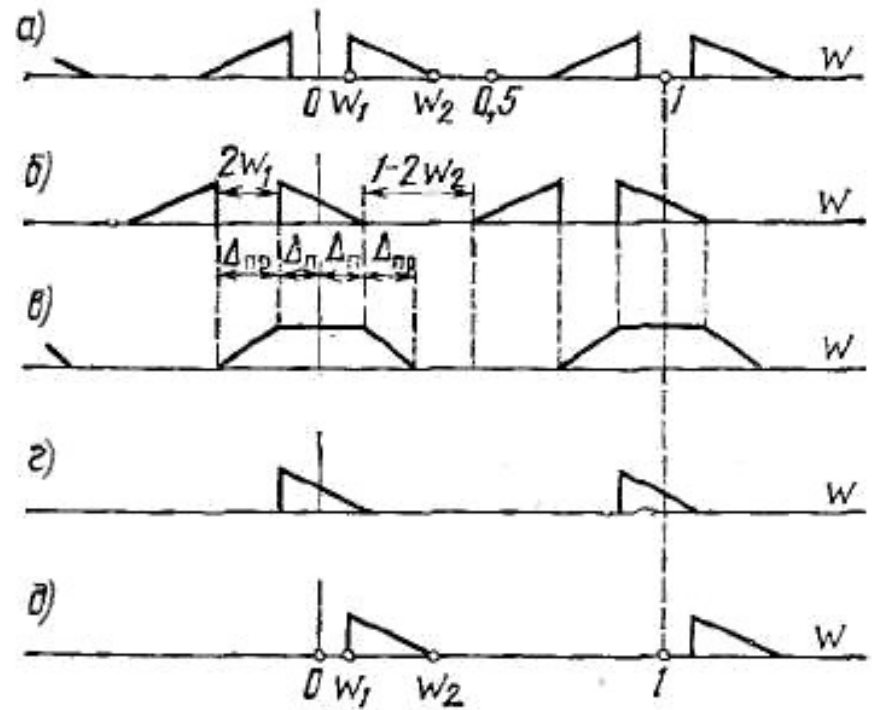


Рис.5

## Перенос спектра комплексного сигналу

Коефіцієнт  $y$  визначає зсув спектра й, отже, параметри ФНЧ, що формує сигнал з ОБС. Оскільки АЧХ дійсного ФНЧ симетрична щодо частоти  $\omega=0$  (див. рис.5,в), граничні частоти смуги пропускання  $\omega_{г.п.}$  і смуги затримування  $\omega_{г.з.}$  повинні задовольняти умовам:

$$\begin{aligned}\omega_{г.п.} &\geq \max(\gamma - \omega_1, \omega_2 - \gamma); \\ \omega_{г.з.} &\leq \min(\gamma + \omega_1, 1 - \omega_2 - \gamma).\end{aligned}$$

Оскільки сигнали  $x(nT)$  і  $y(nT)$  є комплексними, їхня обробка здійснюється «комплексною» схемою (див. рис.4,б), у якій існують окремі гілки для обробки дійсної й мнімої складових сигналу  $x(nT)$ .