

# ЕФЕКТИ КВАНТУВАННЯ В ЦИФРОВИХ СИСТЕМАХ

1. Власний та загальний шум цифрової системи
2. 'Ефекти переповнення в суматорах
3. Ефекти квантування коефіцієнтів цифрової системи
4. Граничні цикли роботи цифрової системи

Для спрощення аналізу ефектів квантування в цифрових системах припускається, що помилки в вихідному сигналі, викликані квантуванням вхідного сигналу, та помилки, викликані квантуванням результатів арифметичних операцій в цифровій системі, не залежать одна від одної.

Враховуючи припущення, можна розглядати вказані складові вихідного шуму незалежно одне від одного. Відокремлений розгляд є корисним також для того, щоб оцінити вклад в повний вихідний шум кожної складової.

# Власний шум цифрової системи

Власний шум цифрової системи – це вихідний шум квантування, зумовлений округленням результатів множення.

Аналіз власних шумів в цифровій системі набагато складніший, ніж аналіз ефектів квантування вхідного сигналу. При аналізі власних шумів необхідно знати:

- точки системи, в яких виконуються операції квантування;
- оцінки (математичне сподівання, дисперсію, абсолютну межу) шумових сигналів, які генеруються власними джерелами;
- структуру системи (шлях, який проходить кожний шумовий сигнал від свого джерела шуму до виходу системи);
- архітектуру та параметри цифрового пристрою.

# Власний шум цифрової системи

Власний шум та його оцінки знаходяться в 3 етапи:

- 1) Складається модель цифрової системи, яка враховує шуми квантування в тих точках системи, в яких виконується операція квантування.
- 2) Знаходяться реакції системи на кожний шумовий сигнал (складові власного шуму).
- 3) На основі отриманих складових формується власний шум цифрової системи, знаходяться його ймовірності та детерміновані оцінки.

# Власний шум цифрової системи

## Лінійна модель помножувача

Джерелами шуму квантування в цифрових системах являються помножувачі.

Дійсно помножувачі значень з  $b_y$  значущими розрядами послідовності  $x(n)$  на коефіцієнт  $a$  дає значення  $ax(n)$ , маюче точне значення з  $2b_y$  значущими розрядами. Однак, розрахунок значення повинно бути представлено послідовністю значень з  $b_y$  значущими розрядами. При формування результатів з'являються помилки квантування, викликані скороченням кількості розрядів.

Лінійна модель помножувача показана на рис.1.

Модель помножувача с кінцевим числом розрядів представлена в вигляді послідовного з'єднання ідеального помножувача та суматора, на вхід якого подається помилка квантування  $e_y(n)$ . На виході моделі формується послідовність квантованих значень розрахунку з  $b_y$  значущими розрядами.

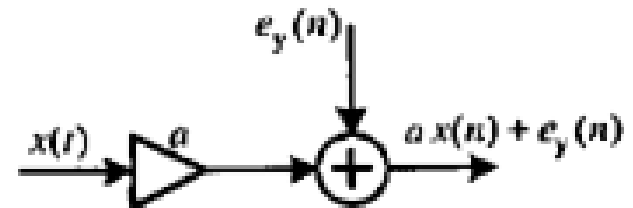


Рис.1

# Власний шум цифрової системи

## Лінійна модель цифрової системи

Вважається, що припущення про властивості помилок квантування, діють в випадку шумового сигналу  $e_y(n)$ . Тоді, при використанні округлення, маємо наступні імовірнісні оцінки (математичне сподівання, дисперсію) та детерміновану оцінку (абсолютну межу) шуму квантування на виході помножувача:

- математичне сподівання:  $\mu_y = 0$
- дисперсія:  $\sigma_y^2 = Q_y^2 / 12$  , де  $Q_y = 2^{-b_y}$  – крок квантування;
- абсолютна межа:  $E_y = \max_n |e_y(n)| \leq Q_y / 2 = 2^{-b_y-1}$

Лінійна цифрова система випадкової структури може бути описана за допомогою лінійної моделі, яка являє собою дискретну систему з адитивним впливом, який враховує ефекти квантування сигналів.

# Власний шум цифрової системи

## Знаходження складових власного шуму

Складові власного шуму – це реакція цифрової системи на шумові сигнали від кожного джерела шуму.

Використаємо модель помножувача (рис.1) для опису кожного джерела шуму. На основі властивості лінійної цифрової системи помилка квантування на виході системи (власний шум) знаходиться, як суперпозиція помилок, зумовлених всіма  $L$  джерелами квантування:

$$e_{y.vux}(n) = \sum_{i=1}^L e_{yi.vux}(n)$$

При цьому  $i$ -та складова вихідного сигналу помилки (власного шуму) викликана  $i$ -им джерелом шуму, знаходиться за допомогою імпульсної характеристики  $h_i(m)$  частини системи від точки прикладення  $i$ -го джерела шуму до виходу системи по формулі згортки:

$$e_{yi.vux}(n) = \sum_{m=1}^{\infty} h_i(m) e_{yi}(n-m)$$

# Власний шум цифрової системи

## Знаходження результуючого власного шуму

Відповідно до останнього виразу власний шум системи розраховується сумою всіх шумових складових, отриманих в результаті аналізу проходження шумів квантування від точок їх появи до виходу цифрової системи.

Ймовірні та детерміновані оцінки власного шуму системи знаходяться наступним чином:

- математичне сподівання  $\mu_{y_i.vux} = \sum_{i=1}^L \mu_{y_i.vux} = 0$
- дисперсія  $\sigma^2_{y.vux} = \sum_{i=1}^L \sigma^2_{y_i.vux} = \frac{Q_y^2}{12} \sum_{i=1}^L \sum_{m=0}^{\infty} h_i^2(m)$
- абсолютна межа  $E_{y.vux} = \sum_{i=1}^L E_{y_i.vux} \leq \frac{Q_y}{2} \sum_{i=1}^L \sum_{m=0}^{\infty} |h_i(m)|$

Слід відмітити, що чим більше помножувачів містить цифрова система, тим більший її власний шум. Таким чином, власний шум системи залежить від форми реалізації системи. На практиці доцільно використовувати таку форму реалізації, яка б генерувала менший власний шум, тобто містила в собі меншу кількість помножувачів.

# Загальний вихідний шум системи

Помилки в вихідному сигналі, викликані квантуванням вхідного сигналу, та помилки, зумовлені квантуванням результатів арифметичних операцій в цифровій системі, не залежать одна від одної. На основі цього припущення повний вихідний шум системи, зумовлений квантуванням вхідного сигналу та квантуванням результатів арифметичних операцій помножувача, знаходиться сумою відповідних помилок:  $e_{\text{вих}}(n) = e_{A.\text{вих}}(n) + e_{Y.\text{вих}}(n)$

де

$e_{\text{вих}}(n)$  - повний вихідний шум системи;

$e_{A.\text{вих}}(n)$  - шум квантування вхідного сигналу (шум АЦП), приведений до виходу системи;

$e_{Y.\text{вих}}(n)$  - власний шум системи .



# Загальний вихідний шум системи

Шумові сигнали, зумовлені квантуванням в випадковій точці системи, являються стаціонарними випадковими процесами типу «білий шум», вони некорельовані з квантованим сигналом, а будь-які два джерела шуму утворюють некорельовані шуми. Тоді з урахуванням лінійності моделі системи отримаємо оцінки повного вихідного шуму системи, як суми відповідних параметрів шумів АЦП і власної системи:

- математичне сподівання  $\mu_{вих} = \mu_{A.вих} + \mu_{Y.вих}$
- дисперсія  $\sigma^2_{вих} = \sigma^2_{A.вих} + \sigma^2_{Y.вих}$
- абсолютна межа  $E_{вих} = \max_n |\varepsilon_{вих}(n)| = E_{A.вих} + E_{Y.вих}$

# Ефекти переповнення в суматорах

При сумуванні чисел з фіксованою точкою помилки квантування не виникає, якщо акумулятор має розрядність не меншу ніж розрядність доданків.

Але при сумуванні чисел можливе переповнення, яке означає, що результат арифметичних операцій виходить за межі допустимого діапазона представлення чисел. В цьому випадку результат сумування істотно змінюється. Щоб не допустити цього переповнення в суматорах вводиться масштабування сигналів з використанням коефіцієнтів масштабування.

Масштабування сигналів можна виконувати різними способами:

# Ефекти переповнення в суматорах

## Автоматичне масштабування

1. Для запобігання переповнення можна ввести масштабування, що зводиться до зсуву двійкових кодів доданків на входах кожного суматора вправо на один розряд (або більше при додаванні більше чим двох чисел); при цьому має місце автоматичне масштабування. У результаті можлива поява помилки масштабування.

При представленні чисел у прямому або зворотному коді помилка масштабування  $e_m = 2^{-b}$

$b$  - число розрядів у регістрі числа) відбувається з імовірністю  $p=1/2$ .

Зазначені помилки масштабування можуть бути враховані в лінійній моделі фільтра точно так само, як і помилки округлення.

# Ефекти переповнення в суматорах

## Масштабуючі коефіцієнти

2. Інший спосіб усунення можливого переповнення зводиться до масштабування вхідних сигналів. Якщо імпульсна характеристика ЦФ (або деякої його частини) дорівнює  $h_i(n)$ , то вихідний сигнал фільтра (або його частини)  $y_i(nT)$  обмежений величиною

$$|y_i(nT)|_{\max} \leq |x(nT)|_{\max} \sum_{n=0}^{\infty} |h_i(nT)|,$$

де  $|x(nT)|_{\max}$  — верхня границя вхідного сигналу фільтра.

Якщо  $|x(nT)|_{\max} \leq 1$ , то необхідною умовою відсутності переповнення є

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h_i(nT)| \leq 1.$$

# Ефекти переповнення в суматорах

## Масштабуючі коефіцієнти

Якщо фільтр заданий (тобто  $h_i(n)$  задані), те, для того щоб не було переповнень, тобто щоб вихідний сигнал будь-якого вузла підсумовування не перевищував одиниці ( $|y_i(nT)| < 1$ ), необхідно відповідним чином обмежити величини вхідного сигналу й вихідних сигналів помножувачів. Із цією метою вводиться таке масштабування, щоб сигнали

$$|y_i(nT)| = \left| \sum_{m=0}^{\infty} h_i(nT) \gamma_i x(nT - mT) \right| \leq 1,$$

де  $\gamma_i$  - масштабуючий коефіцієнт.

Масштабуючі множники включають на входах фільтра або на виходах помножувачів. Якщо  $|x(nT)| \leq 1$ , то достатньою умовою відсутності переповнення є вибір масштабуючих коефіцієнтів

$$\gamma_i < 1 / \left( \sum_{n=0}^{\infty} |h_i(nT)| \right).$$

# Ефекти переповнення в суматорах

## *Масштабуючі коефіцієнти*

Коефіцієнти  $\gamma_i$ , вибирають, як й у випадку автоматичного масштабування, звичайно рівними ступеням числа 2, і масштабуюче множення зводиться до зрушень. При цьому варто мати на увазі, що при істотному зменшенні амплітуд сигналів, що проходять через фільтр, буде зменшуватися відношення сигнал-шум на виході фільтра в порівнянні з відношенням сигнал-шум на вході. Тим часом обчислення  $\gamma_i$  за наведеною формулою часто приводе до завищених результатів й, отже, до погіршення ефективності роботи фільтра. Тому розрахунок масштабних коефіцієнтів у складних структурах виконують за методикою, заснованою на використанні спектрального аналізу й апарату нормованих просторів.

# Ефекти квантування коефіцієнтів цифрової системи

При реалізації цифрової системи значення її коефіцієнтів квантуються, оскільки вони представляють обмежену кількість розрядів. Змінення коефіцієнтів призводить до більшої чи меншої зміни значень нулів чи полюсів передаточної функції та до зміни частотних характеристик системи.

Важливо підкреслити, що операція квантування коефіцієнтів, нелінійна по своїй природі, не впливає на лінійність самої системи, лише змінює її частотні та часові характеристики. Іншими словами, виконав операцію квантування коефіцієнтів, переходимо від лінійної системи до іншої з характеристиками, які відрізняються від характеристик вихідної системи. Таким чином, квантування призводить до появи помилок АЧХ:

# Ефекти квантування коефіцієнтів цифрової системи

$$\nabla A(\omega) = A(\omega) - \bar{A}(\omega)$$

де  $A(\omega) = |H(\varepsilon^{j\omega T})|$  - АЧХ системи з неквантованими коефіцієнтами;  
 $\bar{A}(\omega)$  - АЧХ системи з квантованими коефіцієнтами;

Слід відмітити, що при синтезі необхідно знайти коефіцієнти таким чином, щоб не тільки ідеальні частотні та часові характеристики вихідної системи, а й її характеристики з квантованими коефіцієнтами задовольняли заданим вимогам. Для оцінки впливу операцій квантування коефіцієнтів на параметри системи використовуються функції чутливості. Функція чутливості виступає в ролі коефіцієнта пропорційності в співвідношенні, зв'язуючи відносні зміни величини  $k$ -го коефіцієнта з відносною зміною певного параметра системи.



# Граничні цикли роботи цифрової системи

При розгляді ефектів квантування, були зроблені певні припущення відносних помилок, які вносились в опрацьований сигнал.

По-перше, було прийнято, що відліки шуму квантування не корельовано між собою, а також з відліками вхідного сигналу. По-друге, при опрацюванні сигналу в цифровій системі не відбувається переповнення акумулятора. Разом з тим, і ті і інші припущення можуть бути порушеними. Це призводить в рекурсивних системах до появи специфічних ефектів, які отримали назву граничних циклів.

Розрізняють 2 види граничних циклів:

- граничні цикли низького рівня, пов'язані з квантуванням відліків опрацьованого сигналу;
- граничні цикли високого рівня, пов'язані з переповненням регістрів суматорів.

# Граничні цикли роботи цифрової системи

Граничними циклами низького рівня називаються постійні або періодичні сигнали, які можуть виникати в рекурсивних системах при відсутності дії та нульових початкових умовах в системі. Поява цих сигналів зумовлена помилками округлення при квантуванні сигналів на виходах помножувачів.

Граничними циклами високого рівня можуть виникати в рекурсивних системах, якщо при складанні відліків сигналів в аккумулятора відбувається переповнення. В цьому випадку система набуває суттєвої нелінійності, в вихідному сигналі з'являються значні помилки, тобто система фактично є недієздатною. В більшості випадків при переповненні аккумулятора вихідний сигнал системи приймає вид періодичного коливання з граничними значеннями амплітуди, рівному одиниці. Часто граничні цикли високого рівня називають «коливанням переповнення». В зв'язку з цим приймають заходи для усунення переповнення регістрів суматорів, тобто відбувається масштабування сигналів.