5. Muestre que el operador $D^4 f$ está dado por:

$$D^4 f(x_j) \cong \frac{f(x_{j+2}) - 4f(x_{j+1}) + 6f(x_j) - 4f(x_{j-1}) + f(x_{j-2})}{h^4}$$

¿Cuál es el orden de la aproximación de este operador?

Primero hacemos los siguientes desarrollos del polinomio de Taylor.

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2} f''(x) + \frac{8h^3}{3!} f^{(3)}(x) + \frac{16h^4}{4!} f^{(4)}(x) + O(h^5)$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2} f''(x) - \frac{8h^3}{3!} f^{(3)}(x) + \frac{16h^4}{4!} f^{(4)}(x) + O(h^5)$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) + O(h^5)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) + O(h^5)$$

Ahora sumamos términos:

$$f(x+2h) + f(x-2h) = 2f(x) + 4h^2 f''(x) + \frac{4}{3} h^4 f^{(4)}(x) + \frac{8}{45} h^6 f^{(6)}(x) + O(h^8)$$

$$4f(x+h) + 4f(x-h) = 8f(x) + 4h^2 f''(x) + \frac{1}{3} h^4 f^{(4)}(x) + \frac{1}{90} h^6 f^{(6)}(x) + O(h^8)$$

Restamos:

$$f(x+2h) + f(x-2h) - 4f(x+h) - 4f(x-h) = -6f(x) + h^4 f^{(4)}(x) + \frac{17}{90} h^6 f^{(6)}(x) + O(h^8)$$

Despejando $f^{(4)}(x)$ y reorganizando se tiene:

$$f^{(4)}(x) = \frac{f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{h^4} \underbrace{- \frac{17}{90} h^2 f^{(6)}(x) + \dots}_{O(h^2)}$$

Para algún punto de la partición:

$$f^{(4)}(x_j) \cong \frac{f(x_{j+2}) - 4f(x_{j+1}) + 6f(x_j) - 4f(x_{j-1}) + f(x_{j-2})}{h^4}$$

El orden de la estimación es $O(h^2)$