

1. Método del trapecio simple

Se tiene el conjunto $\Omega = \{(a, f(a)), (b, f(b))\}$

Su polinomio interpolador sea:

$$p(x) = f(a) \frac{x-b}{a-b} + f(b) \frac{(x-a)}{(b-a)}$$

$$p(x) = \frac{f(a)(b-x) + f(b)(x-a)}{b-a}$$

Se sabe que

$f(x) \approx p(x)$, entonces

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b p(x) dx = \frac{b((f(b) - f(a)) \cdot b - 2a f(b) + 2b f(a))}{2(b-a)} \\ &= \left(\frac{a((f(b) - f(a)) \cdot a - 2a f(b) + 2b f(a))}{2(b-a)} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{(b-a)}{2} (f(b) + f(a))$$

2. Encuentre el error del trapecio simple

Se sabe que $f(x) = p(x) + e(x)$ y

$$e(x) = \frac{f''(\xi)}{2} (x-a)(x-b) \quad a \leq \xi \leq b$$

$$= \frac{f''(\xi)}{2} (x^2 - xb - xa + ab)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_a^b e(x) &= \frac{f''(\xi)}{2} \cdot \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2 b}{2} - \frac{x^2 a}{2} + abx \right) \Big|_a^b \\ &= \frac{f''(\xi)}{2} \cdot \left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{2} - \frac{b^2 a}{2} + \frac{b^2 a}{1} \right) - \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} - \frac{a^2 b}{2} + a^2 b \right) \\ &= \frac{f''(\xi)}{2} \cdot \left(\frac{-b^3}{6} + \frac{b^2 a}{2} \right) - \left(\frac{-a^3}{6} + \frac{a^2 b}{2} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{f''(\xi)}{2} \cdot \left(\frac{a^3 - 3a^2b + 3b^2a - b^3}{6} \right)$$

$$= \frac{f''(\xi)}{2} \cdot \left(\frac{a-b}{6} \right)^3$$

$$= -f''(\xi) \cdot \left(\frac{b-a}{12} \right)^3$$