



Indicadores de desigualdad, pobreza y desarrollo humano



Técnicas de medición económica

Eduardo Lora & Sergio Iván Prada Asistente de investigación y edición: Ana Melissa Pérez

Diseño y diagramación: Sandra Marcela Moreno Bolaños

2016 Quinta edición: versión impresa y en línea

Cómo citar este libro:

Recurso en línea:

Lora, Eduardo; Prada, Sergio. Técnicas de Medición Económica, Metodología y Aplicaciones en Colombia [en línea]. Quinta Edición. http://www.icesi. edu.co/medicion-economica-Colombia-Eduardo-Lora-Sergio-Prada[Consulta: día mes año].

Versión impresa:

Lora, Eduardo & Prada, Sergio (5ta Ed.)(2016). Técnicas de Medición Económica, Metodología y Aplicaciones en Colombia. Cali, Colombia: Universidad Icesi

ISBN:978-958-8936-14-7 Universidad Icesi



Introducción al libro

El propósito de este libro es estudiar de manera integrada las bases conceptuales y la metodología de las estadísticas que usan los economistas y otros científicos sociales para describir y analizar los fenómenos económicos y sociales. Las estadísticas que se estudian en este texto han sido seleccionadas por su utilidad y aplicación corriente. El libro no está dirigido a especialistas, su nivel es introductorio y su enfoque eminentemente práctico. Esta edición electrónica es gratuita y con ello aspira a llegar a un público más amplio. De ahí su estructura modular y los numerosos recursos didácticos y de consulta que contiene.

Estructura del libro

El libro está compuesto por 17 capítulos, de los cuales éste es el Capítulo 04: "Indicadores de desigualdad, pobreza y desarrollo humano". El esquema de la página 5 presenta la estructura del libro, que se explica a continuación. En los primeros cuatro capítulos se estudian los indicadores sociales más importantes en las áreas de demografía, mercado laboral, salud, educación, distribución de ingreso, pobreza y desarrollo humano. Los tres capítulos siguientes estudian los métodos de construcción y las aplicaciones más frecuentes de los indicadores económicos. Se empieza con un capítulo sobre índices de precios y cantidades, se estudian después los principales agregados macroeconómicos y se dedica luego un capítulo a los indicadores de coyuntura que se utilizan en Colombia para medirle el pulso a la actividad económica. Los capítulos restantes se dedican al estudio y manejo de diversos modelos de descripción económica. El análisis se aborda a partir de sistemas muy simplificados de cuentas nacionales, pasando después a los que se utilizan en la práctica en Colombia, para detenerse luego en algunas de sus aplicaciones y extensiones. Se concede una gran importancia al uso de las matrices de insumo-producto, no sólo por constituir la columna vertebral de los sistemas actuales de cuentas nacionales, sino también por sus inmensas posibilidades en numerosas áreas del análisis económico. La metodología y la interpretación de las estadísticas financieras y monetarias, de balanza de pagos y fiscales ocupan los tres últimos capítulos del libro.

Conocimientos requeridos

El lector debe tener en cuenta que algunos capítulos se construyen a partir de los temas desarrollados en capítulos anteriores, como se indica en el diagrama. Las flechas indican qué capítulos se necesitan para

abordar los demás capítulos. Los únicos que no tienen ningún prerrequisito son el Capítulo 1 (indicadores de población), el Capítulo 5 (índices de precios y cantidades) y el Capítulo 6 (conceptos de agregación económica).

Para abordar la mayoría de los capítulos se necesita un conocimiento muy elemental de álgebra y comprender el concepto y la notación de sumatoria (Σ). Éste es el nivel básico de conocimientos matemáticos a que se refiere el diagrama. El Capítulo 8 (medición de la productividad y fuentes de crecimiento económico) y el 17 (contabilidad de finanzas públicas) requieren conocimientos intermedios de matemáticas, debido a que utilizan nociones básicas de cálculo diferencial. Únicamente dos capítulos requieren nociones básicas de algebra lineal (es a lo que nos referimos con conocimientos avanzados de matemáticas): el Capítulo 13 (matriz insumo-producto) y el Capítulo 14 (aplicaciones de la matriz insumo-producto). El recuadro inicial de cada capítulo le recuerda al lector los prerrequisitos y el nivel de matemáticas en cada caso.

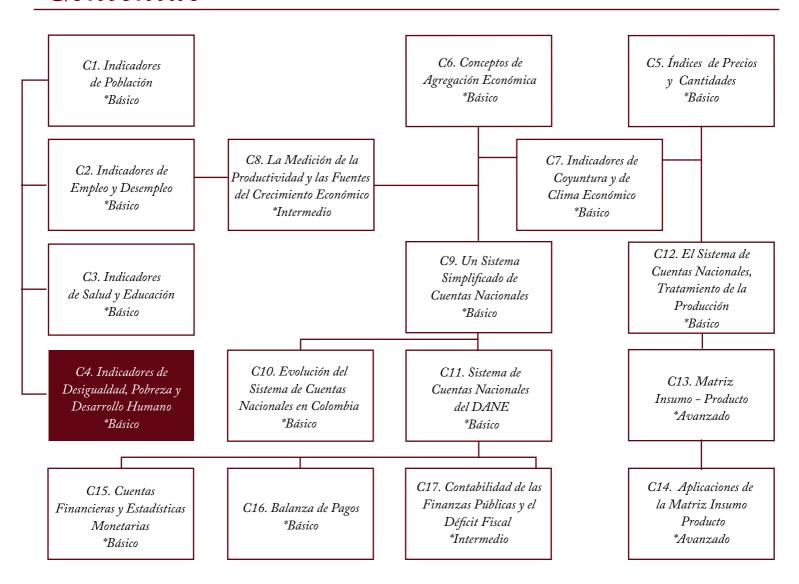
Enfoque y recursos didácticos

Cada capítulo incluye pequeños bocadillos en el margen izquierdo que resumen las ideas más importantes, y un cuadro al final que lista los conceptos clave que el estudiante debe dominar al terminar. Las ecuaciones que es preciso entender y manejar a la perfección están señaladas con el símbolo ⊚. Con el ánimo de inducir al estudiante a utilizar las estadísticas a lo largo de cada capítulo aparecen ejemplos sencillos, y al final se incluyen ejercicios y preguntas adicionales. Separadamente, para cada capítulo hay una hoja de Excel que contiene las soluciones a todos los ejercicios. El recurso didáctico que los profesores encontrarán más útil son las presentaciones en Power Point capítulo por capítulo.

Utilidad

Esperamos que esta versión electrónica del libro sea útil para todas aquellas personas interesadas en entender las estadísticas económicas y sociales más allá de los espacios académicos: periodistas, columnistas, políticos, líderes empresariales y sindicales, dirigente de gremios o funcionarios públicos. Entre mayor sea la compresión de las estadísticas, mayor será la calidad del debate público sobre los problemas y políticas económicos y sociales.

Contenido



Contenido

04 INDICADORES DE DESIGUALDAD, POBREZA Y DESARROLLO HUMANO

- 4.1 Indicadores de desigualdad
 - 4.1.1 La curva de Lorenz
 - 4.1.2 El coeficiente de Gini
 - 4.1.3 El coeficiente de desigualdad de Theil
- 4.2 Indicadores de pobreza
 - 4.2.1 Pobreza monetaria
 - 4.2.2 Índices de pobreza
 - 4.2.2 Pobreza multidimensional
- 4.3 Índice de desarrollo humano
- 4.4 Encuesta nacional de calidad de vida

Conceptos clave

Preguntas y ejercicios

Soluciones a ejercicios seleccionados (*)

Bibliografía

Capítulo 04

INDICADORES DE DESIGUALDAD, POBREZA Y DESARROLLO HUMANO

ste capítulo se concentra en estudiar los indicadores más utilizados para analizar las condiciones de pobreza, desigualdad y desarrollo humano. Se describen los conceptos en que se basan los indicadores y se explican las metodologías de cálculo.

En la primera parte del capítulo se presentan los indicadores de desigualdad, donde por su universalidad se destacan la curva de Lorenz y los coeficientes de Gini y de Theil. Conviene precisar que en la literatura especializada se utilizan, además de los indicadores mencionados, el rango de variación, la desviación media relativa, la varianza, el coeficiente de variación, la desviación típica de los logaritmos y otras medidas más complejas como los índices de bienestar sugeridos por Dalton y Atkinson. Tales medidas no se estudian en este libro porque han tenido muy poca aplicación en Colombia, aun cuando desde un punto de vista teórico algunas de ellas tienen propiedades más convenientes que la curva de Lorenz o los coeficientes de Gini y Theil.

En la segunda parte del capítulo se introducen los principales indicadores de pobreza y su aplicación en Colombia. Después de introducir el concepto de línea de pobreza, se discuten diversos índices de pobreza monetaria y se presenta el indicador de pobreza multidimensional desarrollado por el DANE. Mientras que la pobreza monetaria mide la capacidad adquisitiva de los hogares respecto de una canasta de consumo básico, la pobreza multidimensional busca medir la privación en diversos aspectos que se consideran esenciales para el bienestar de los individuos.

Como complemento a los indicadores de pobreza y desigualdad, la tercera sección se ocupa de los indicadores más conocidos para medir el desarrollo humano. Se presta especial atención al *Índice de Desarrollo Humano (IDH)* producido por el Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo, que es el indicador

más utilizado internacionalmente para comparar los niveles de vida de los países. El *IDH* sintetiza información de salud, educación e ingreso monetario, con base en la cual se clasifican los países en niveles de desarrollo humano (muy alto, alto, medio y bajo).

Finalmente, para incentivar a los lectores a descubrir otros indicadores sociales que son calculados regularmente por el DANE, en la cuarta sección del capítulo se explica brevemente el contenido de la encuesta de calidad de vida, fuente principal de información a nivel de los hogares en Colombia.

4.1 Indicadores de desigualdad

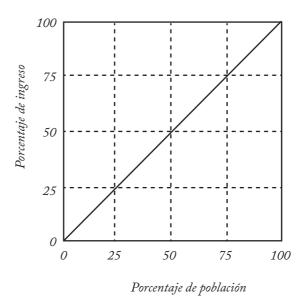
A nivel mundial, la distribución del ingreso ha adquirido una gran importancia como tema de discusión pública, pues hay un reconocimiento creciente de que los resultados del crecimiento económico de las últimas décadas no se han distribuido equitativamente. Aunque en el pasado los economistas prestaban poca atención a los temas distributivos, en la actualidad se consideran centrales en cualquier diagnóstico sobre la situación económica de un país y en cualquier análisis sobre los efectos de las principales políticas económicas y sociales. En esta sección se describen los tres indicadores más importantes de desigualdad: la curva de Lorenz, y los coeficientes de Gini y de Theil.

4.1.1 La curva de Lorenz

La curva de Lorenz

representa la distribución del ingreso entre la población. Entre más cerca esté de la diagonal, más equitativa es la distribución. Puede aceptarse que el ingreso (u otra variable) se encuentra distribuido equitativamente entre los miembros de la población cuando a cada uno corresponde una fracción proporcional del total del mismo. Así, en una población de 100 miembros, si el ingreso se encuentra distribuido equitativamente, cada uno percibirá un 1% del total. Por tanto, en una distribución equitativa, un porcentaje cualquiera de la población recibe ese mismo porcentaje de ingreso. La "equidistribución" puede representarse, entonces, como una diagonal que relaciona los valores porcentuales de la variable del eje de las abscisas con sus correspondientes valores porcentuales de la variable del eje de las ordenadas (*véase* Gráfico 4.1).

Diagonal de equidistribución

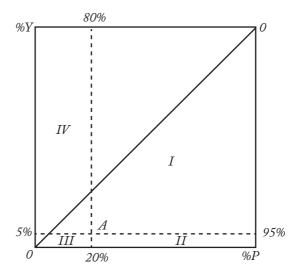


Para construir dicha línea de distribución o *curva de Lorenz* se comienza por organizar la información de ingresos en sentido ascendente, a partir de los individuos que reciben menos ingresos. En la práctica, es posible que no se tenga información para cada individuo, sino para rangos de ingresos, en cada uno de los cuales aparecerá un cierto número de individuos. Una vez organizada de este modo la información, se obtienen los porcentajes acumulados de individuos y sus correspondientes ingresos para un número suficiente de rangos. Cada par de porcentajes acumulados, como por ejemplo 20% para población y 5% para ingresos, puede ubicarse como un punto en el gráfico (A en el Gráfico 4.2). Este punto indica que el 20% más pobre de la población percibe el 5% del ingreso o, alternativamente, si se lee desde el extremo opuesto del gráfico, que el 80% más rico recibe el 95% del ingreso. Puede hacerse una lectura semejante para cualquier otro punto.

Debido a que los porcentajes que se representan son acumulativos, cualquier otro punto de la misma distribución debe estar colocado en los cuadrantes I o III, con respecto a A, y no en los cuadrantes II o IV en el Gráfico 4.2. En otras palabras, los diferentes puntos que van graficándose podrán conectarse mediante trazos ascendentes a la derecha, los cuales conforman la curva de Lorenz. Naturalmente, la "curva" tendrá un trazo más continuo y definido entre mayor sea el número de puntos utilizados.

Gráfico 4.2

Construcción de una curva de Lorenz



Ejemplo 4.1

Construcción de una curva de Lorenz

Para construir la curva de Lorenz se ordenan primero de menor a mayor los ingresos, luego se calculan las participaciones del número de individuos y de sus ingresos y finalmente se calcula el porcentaje acumulado de los individuos y del ingreso.

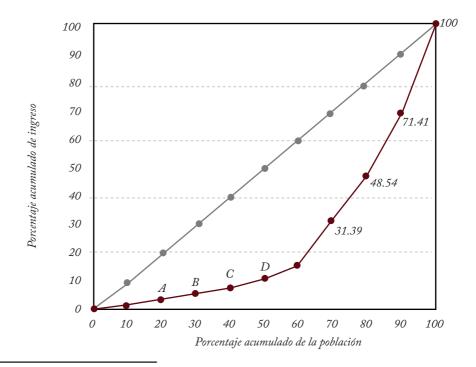
Individuo	Ingreso	Individuos	Porcentaje la población	Porcentaje ingreso
			$O^{1}\%$	0%
1	25	1	10%	1%
2	34	1	20%	3%
3	40	1	30%	6%
4	50	1	40%	9%
5	50	1	50%	11%
6	80	1	60%	16%
7	270	1	70%	31%
8	300	1	80%	49%
9	400	1	90%	71%
10	500	1	100%	100%
Total	1,749	10		

¹ Este valor se utiliza para que la curva de Lorenz inicie desde el origen.

Los resultados muestran, por ejemplo, que el 40% más pobre de la población tiene el 9% de los ingresos, resultado que se representa en el punto C del Gráfico 4.3. De igual manera, el punto D refleja que el 50% más pobre de la población tiene el 11% de los ingresos, y así sucesivamente. Entre más alejada esté la curva de la diagonal mayor es la concentración del ingreso.

Gráfico 4.3

Curva de Lorenz

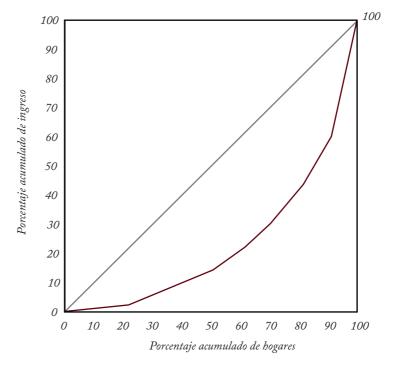


Debido a que la información ha sido organizada de manera gradual y acumulativa con respecto a la variable distribuida, empezando por los grupos de menores ingresos, la curva de Lorenz tendrá una inclinación que aumentará gradualmente a lo largo de su recorrido, sin mostrar sinuosidades. Tal es el caso de la curva de Lorenz del Gráfico 4.4, que representa aproximadamente la distribución del ingreso de los hogares en Colombia en 2006-2007. No obstante, puede ser de utilidad organizar la información de manera gradual y acumulativa con respecto a una variable diferente a la que está siendo distribuida. Por ejemplo, si la

variable objeto de distribución son los subsidios, puede resultar interesante analizar su distribución de acuerdo con los niveles de ingreso de los beneficiarios. En tal caso, la curva puede mostrar cambios de inclinación en diferente sentido y aun cortar la diagonal de equidistribución, como sucede con las curvas del Gráfico 4.5, que representan la distribución de los subsidios en educación según los niveles de ingreso de la población.

Gráfico 4.4

Distribución del ingreso de los hogares en Colombia en 2006-2007²



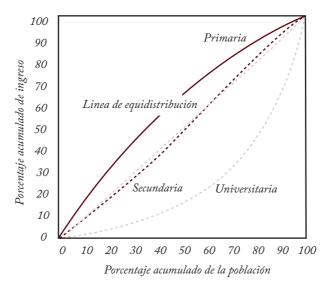
Fuente: DANE, Encuesta de Ingresos y Gastos 2006-2007.

² Esta curva de Lorenz está construida con los ingresos de los hogares, sin embargo, para evitar los sesgos que resultan de diferencias en el tamaño de los hogares, se puede también construir una curva con el ingreso per cápita del hogar, ya que no es lo mismo un hogar de cinco personas con ingresos totales de un millón de pesos que un hogar de una sola persona con ese ingreso.

Las tres curvas del Gráfico 4.5 corresponden a tres casos de subsidio, según la primera investigación que se hizo en Colombia sobre el impacto distributivo del gasto público en educación: gasto progresivo (primaria), aproximadamente equitativo (secundaria) y regresivo (universitaria), respecto a la distribución del ingreso. En el primer caso, el subsidio está corrigiendo sustancialmente la concentración del ingreso: la curva por encima de la diagonal indica que los estratos más pobres de la población reciben una mayor parte del subsidio. Lo contrario sucede con el subsidio en educación universitaria, el cual puede agravar la concentración del ingreso (lo que ocurre si la curva está totalmente a la derecha de la curva Lorenz del ingreso, que no está graficada). En cuanto al subsidio en educación secundaria, si bien mejora la distribución del ingreso (pues sin duda está a la izquierda de la curva Lorenz del ingreso), la curva corta la diagonal, indicando que resulta levemente regresivo dentro del grupo que constituye el 60% más pobre, y levemente progresivo dentro del 40% más rico.

Gráfico 4.5

Curva de Lorenz de los subsidios en educación



Fuente: M. Selowsky, Who Benefits from Government Expenditure? A Case Study of Colombia, Oxford University Press, 1979.

4.1.2 El coeficiente de Gini

La distancia entre una curva de Lorenz y la diagonal de equidistribución es indicativa del grado de concentración. Una curva de Lorenz que se encuentre por debajo de otra para todos los porcentajes de población (excepto, por supuesto, 0 y 100), indica indudablemente una mayor concentración. Sin embargo, cuando dos curvas de Lorenz se cortan no puede establecerse claramente en cuál caso es mayor la concentración. De esta forma, la curva de Lorenz provee un criterio de ordenamiento incompleto, o cuasi-ordenamiento, que no puede aplicarse a cualquier par de curvas. Para suplir esta deficiencia puede tomarse una medida de la distancia de la diagonal a la curva de Lorenz en todo su recorrido. Esto es lo que hace el *coeficiente de Gini*, que se define como el cociente que relaciona el área entre la curva de Lorenz y la diagonal con el área total bajo la diagonal. Un coeficiente igual a cero representa perfecta igualdad mientras que el valor de uno implica perfecta desigualdad.

Si llamamos X el área entre la diagonal y la curva de Lorenz y Z el área total bajo la diagonal, el coeficiente de concentración de Gini es igual a X/Z. A fin de deducir un método práctico para calcular el coeficiente de Gini, es conveniente notar que el área bajo la curva de Lorenz puede descomponerse en una serie de trapecios a partir de los puntos iniciales de construcción (Gráfico 4.6). Puesto que el coeficiente de Gini se define como X/Z, se requiere calcular el área X del gráfico, sabiendo que el área Z, que es la total bajo la diagonal, es 0.5 (pues cada lado del cuadrado mide 1). Por tanto, llamando W al área bajo la curva, se tiene que

$$X + W = 0.5$$

$$X = 0.5 - W$$

Por consiguiente, puesto que

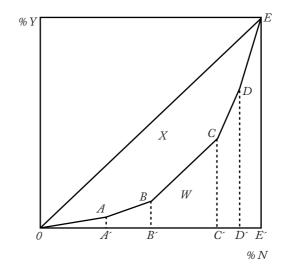
$$G = \frac{X}{Z}$$

$$G = \frac{0.5 - W}{0.5}$$

$$G = 1 - 2W$$

Gráfico 4.6

Método de cálculo del coeficiente de Gini



El coeficiente de Gini parte de la curva de Lorenz. Es el área entre la diagonal y la curva multiplicado por 2. A mayor Gini, mayor desigualdad. Pero *W* es el área total de los trapecios del gráfico. Para calcularla, obsérvese que las distancias *AA*', *BB*', *CC*', etcétera, del gráfico son los porcentajes acumulados de ingreso y que las distancias *OA*', *A'B*', *B'C*', son los rangos porcentuales de la población (o sea, la diferencia entre el porcentaje acumulado y el que se tenía hasta el rango anterior). Así,

$$\Theta W = \sum_{i} \frac{(Y_{i-1} + Y_{i})}{2} (N_{i} - N_{i-1})$$

donde Y_i y N_i son porcentajes acumulados de ingreso y perceptores, respectivamente. Por tanto, la fórmula de cálculo del coeficiente de Gini es

$$\Theta = 1 - \sum_{i} (Y_{i-1} + Y_{i}) (N_{i} - N_{i-1})$$

Utilizando el mismo método, el coeficiente de Gini puede calcularse para la distribución de una variable diferente a la que ordena los datos, como en el caso de los subsidios a la educación ya mencionado. En este caso, se denomina coeficiente cuasi-Gini.

Existen otras formas más exactas, aunque menos operativas, para definir el coeficiente de Gini. Sin embargo, algunas de ellas son de utilidad conceptual. Considérese la expresión siguiente:

$$G = 1 + \left(\frac{1}{n}\right) - \left(\frac{2}{n^2 \bar{y}}\right) (y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n) para y_1 \ge y_2 \ge \dots y_n$$

donde n es el número de miembros de la población, y_i son los ingresos corrientes para cada individuo i, y donde \overline{y} es el ingreso promedio de toda la población.

Esta expresión muestra que el coeficiente de Gini depende de la suma ponderada de los ingresos de todos los individuos, siendo las ponderaciones la posición en el orden de rango de más rico a más pobre de cada uno de los individuos. Cuando el coeficiente de Gini se utiliza como indicador de bienestar, esta propiedad implica una función de bienestar colectiva con tales ponderaciones.

Esta última definición es útil para mostrar algunas de las características del coeficiente de Gini como indicador de distribución. El coeficiente es más sensible a aumentos en el ingreso de los individuos más pobres que a aumentos iguales en el ingreso de los individuos más ricos, dado que la ponderación que se asigna al ingreso de éstos es menor. En consecuencia, el valor del coeficiente de concentración se reduce cuando se eleva el ingreso de todos los individuos en igual magnitud absoluta y también cuando se presenta una transferencia de ingreso de un individuo más rico a otro más pobre.

De otra parte, como las ponderaciones dependen de la posición en el orden de rango, la ponderación asignada a un individuo cualquiera puede cambiar como resultado de una mejoría o un empeoramiento en su posición de orden aun cuando su ingreso absoluto no se haya modificado.

Ejemplo 4.2

Cálculo del coeficiente de Gini

Con los datos utilizados para construir la curva de Lorenz en el Ejercicio 4.1, el coeficiente de Gini se calcula de la siguiente manera:

En la columna 1 se encuentra la participación acumulada de los individuos, que han sido previamente ordenados según su ingreso. Cada individuo corresponde al 0.1 del total. De igual manera, en la columna 2 se tiene la participación acumulada de los ingresos. Nótese que a diferencia del Ejemplo 4.1, estamos utilizando coeficientes en lugar de porcentajes, para facilitar los cálculos.

La columna 3 es igual al valor de cada individuo en la columna anterior más el valor del renglón anterior de esta misma columna. Para el primer individuo, $Y_{i-1} = 0$. De igual manera, la columna 4 se construye como la diferencia de la participación acumulada de los individuos (de la columna 1).

Personas	N_{i} (1)	Y _i (2)	$Y_{i-1}+Y_{i}$ (3)	$N_{i}^{-}N_{i-1}$ (4)	(3)*(4)=(5)
1	0.100	0.014	0.014	0.100	0.001
2	0.200	0.034	0.048	0.100	0.005
3	0.300	0.057	0.090	0.100	0.009
4	0.400	0.085	0.142	0.100	0.014
5	0.500	0.114	0.199	0.100	0.020
6	0.600	0.160	0.273	0.100	0.027
7	0.700	0.314	0.473	0.100	0.047
8	0.800	0.485	0.799	0.100	0.080
9	0.900	0.714	1.200	0.100	0.120
10	1.000	1.000	1.714	0.100	0.171

Total 0.495

La última columna corresponde a la multiplicación de las columnas 3 y 4. Para poder hallar el coeficiente de Gini, a la unidad se le resta la suma de todos los valores de la columna 5:

$$G = 1 - (0.001 + 0.005 + ... + 0.171)$$

$$G = 0.505$$

El coeficiente de Gini para esas 10 personas es de 0.505. Un coeficiente de esta magnitud implica una gran concentración del ingreso.

4.1.3 El coeficiente de desigualdad de Theil

El coeficiente de Theil es una medida de desigualdad que permite descomponer las fuentes de desigualdad. En las últimas décadas ha ganado mucha aceptación el coeficiente de desigualdad desarrollado por Henry Theil como una aplicación de la teoría de información. Aunque se basa en el principio de desorden, o "entropía", propio de la teoría termodinámica, no se requiere entender este concepto para manejar este indicador de desigualdad. En esencia, se trata de una medida que es conveniente porque permite efectuar ejercicios de descomposición, como veremos más adelante, y porque reúne las propiedades (que también tiene el coeficiente de Gini) de ser invariante con respecto a la escala de medición del ingreso y de ser sensible a las transferencias de ingreso entre individuos de diferentes niveles de ingreso. La fórmula del coeficiente de desigualdad de Theil, T, es

donde n es el número de individuos i receptores de ingreso, y x_i son sus participaciones en el ingreso total.

Cuando el ingreso se distribuye de manera totalmente equitativa, todos los x_i toman el valor de 1/n. Por consiguiente, todos los $ln(x_i n)$ se hacen iguales a cero (recuérde que el logaritmo de uno es cero). Así, cuando hay perfecta distribución del ingreso el coeficiente de Theil toma el valor de cero.

Otra forma de expresar el índice de Theil, tal como fue propuesto originalmente por Henry Theil, es:

$$\Theta T = \frac{1}{n} \sum_{i} \left(\frac{y_i}{\overline{y}} \right) ln\left(\frac{y_i}{\overline{y}} \right)$$

donde,

n = número total de individuos

 y_i = ingreso del individuo i

 \overline{y} = ingreso promedio de los individuos

La enorme ventaja del coeficiente de Theil radica en que puede ser fácilmente descompuesto por grupos de individuos. La desigualdad total se puede expresar como el resultado de las desigualdades *dentro* de los grupos, T_{i} , y las desigualdades *entre* los grupos, T_{i} ,

$$T = T_1 + T_2$$

siendo,

$$T_{I} = \sum_{j} v_{j} \sum_{i} z_{ij} ln (z_{ij} n_{j})$$

$$T_{2} = \sum_{j} v_{j} ln (\frac{v_{j} n}{n_{j}})$$

con la siguiente simbología

 v_i = participación del grupo j en el ingreso total

 z_{ii} = participación del individuo i en el ingreso del grupo j

 n_i = número de individuos del grupo j

n = número total de individuos.

Para entender el sentido de esta descomposición, obsérvese que el término T_2 corresponde a la expresión inicial de T en el caso en que cada grupo está conformado por un solo individuo (porque, entonces los v_j son nuestros x_i iniciales y todos los n_j son unos). En este caso, obviamente, sólo puede haber desigualdad entre grupos y no dentro de cada grupo. Por consiguiente, el término T_I debe ser cero, como en efecto se comprueba fácilmente (puesto que todos los n_j son unos y hay un solo z_{ij} en cada grupo j, el cual toma el valor de uno, haciendo así que todos los elementos $\ln(z_{ij}\,n_j)$ sean cero).

Considérese ahora el caso en el que hay un solo grupo que reúne a todos los individuos. La desigualdad entre grupos (T_2) no puede existir, como en efecto se comprueba por el hecho de que el quebrado v_{jn}/n_j toma el valor de uno (y su logaritmo es cero). Por su parte, la desigualdad dentro del único grupo queda medida por T_1 como en nuestra expresión original de T, porque hay un solo v_j que toma el valor de uno, los z_{ij} son los mismos x_i de nuestra expresión original y n_j es el mismo n.

De forma general, cualquiera que sea la agrupación que se haga de los individuos, el término T_1 mide la contribución al coeficiente de desigualdad total de la desigualdad *dentro* de los grupos, y el término T_2 la contribución de la desigualdad *entre* los grupos. Ahora bien, puesto que T_1 es la suma ponderada de las desigualdades dentro de cada grupo, puede a su vez descomponerse en j elementos, cada uno de los cuales mide la contribución a la desigualdad total de la desigualdad existente al interior de cada grupo j.

Ejemplo 4.3

Coeficiente de desigualdad de Theil

Hay cinco personas que devengan los siguientes ingresos: \$500,000; \$700,000; \$890,000; \$1,000,000 y \$4,300,000. Calcule el índice de Theil de acuerdo a las dos fórmulas explicadas anteriormente.

Como primera medida, se debe calcular la participación del ingreso, que para el individuo 1 sería:

$$x_{_{1}} = \frac{500,000}{(500,000+700,000+890,000+1,000,000+4,300,00)}$$

$$x_1 = 0.068$$

Para este mismo individuo se tendría:

$$x_1 ln(x_1 n) = 0.068 \times ln (0.068 \times 5)$$

 $x_2 ln(x_1 n) = -0.073$

Realizando el mismo ejercicio para las otras cuatro personas, el índice de Theil vendría dado por:

$$T = (-0.073 - 0.071 - 0.061 - 0.053 + 0.621)$$

 $T = 0.363$

Utilizando la segunda fórmula del cálculo, se tendría:

Para el primer individuo,

$$\left(\frac{y_i}{\overline{y}}\right) = \frac{500,000}{1,478,00} = 0.338$$

Y el logaritmo,

$$ln(\frac{y_i}{\overline{y}}) = ln(0.338) = -1.084$$

Multiplicando los dos resultados anteriores

$$\frac{y_i}{\overline{y}} \times \ln\left(\frac{y_i}{\overline{y}}\right) = -0.367$$

Repitiendo el ejercicio para los demás, el índice vendría dado por:

$$T = \frac{(-0.367 - 0.354 - 0.305 - 0.264 + 3.107)}{5}$$
$$T = 0.363^{3}$$

Calculo del coeficiente de Theil

Individuo	Ingreso	$oldsymbol{x}_i$	$x_i ln(x_i n)$	$\frac{\mathcal{Y}_i}{\overline{\mathcal{Y}}}$	$ln\left(\frac{y_i}{\overline{y}}\right)$	$\frac{y_i}{\overline{y}} \ln \left(\frac{y_i}{\overline{y}} \right)$
1	500,000	0.068	-0.073	0.338	-1.084	-0.367
1	700,000	0.095	-0.071	0.474	-0.747	-0.354
1	890,000	0.120	-0.061	0.602	-0.507	-0.305
1	1,000,000	0.135	-0.053	0.677	-0.391	-0.264
1	4,300,000	0.582	0.621	2.909	1.068	3.107
5	7,390,000		0.363			0.363

El resultado anterior refleja que existe desigualdad en el ingreso de esas personas. Entre más se acerque a uno el índice, mayor la desigualdad entre los individuos. Conviene advertir que los índices de Gini y Theil no producen los mismos resultados. En este caso el Gini sería 0.428.

³ Nótese que las dos formas de calcular el índice de Theil llegan al mismo resultado.

La utilidad de descomponer la desigualdad dentro y entre grupos es muy grande no sólo por razones descriptivas, sino también para fines de política económica. Por ejemplo, en Colombia el ingreso urbano está muy mal distribuido, pero los ejercicios de descomposición basados en el índice de Theil muestran que ello se debe básicamente a la desigualdad en la distribución del ingreso dentro de cada ciudad y sólo muy poco a las diferencias de ingreso promedio entre las ciudades. Por consiguiente, para disminuir la desigualdad no resultan muy apropiados los esfuerzos de acelerar el desarrollo de las ciudades relativamente más pobres. En cambio, cuando se considera la desigualdad de los ingresos por niveles de educación de los perceptores de ingresos, se aprecia que gran parte de la concentración del ingreso se origina en las diferencias de los ingresos promedios de las personas con y sin educación secundaria y universitaria (aunque también hay una alta concentración al interior de cada uno de los grupos). Por tanto, las políticas educativas pueden tener un efecto muy apreciable sobre la distribución del ingreso.

4.2 Indicadores de pobreza

La pobreza puede medirse de forma indirecta o directa. El método indirecto busca medir la capacidad adquisitiva de los hogares respecto de una canasta que incluye todos los bienes y servicios considerados mínimos vitales. El método directo busca medir la privación en ciertos aspectos de la vida de las personas que se consideran esenciales para el bienestar. *La pobreza monetaria* es el método indirecto y la *pobreza multidimensional* el método directo. Ambas miden aspectos diferentes de las condiciones de vida de los hogares y por ende son complementarias.

4.2.1 Pobreza monetaria

La línea de pobreza es un criterio basado en el ingreso para definir quiénes son pobres. Aunque algunos indicadores sociales pueden reflejar ciertas consecuencias del problema de la pobreza, la dimensión central de la pobreza es la carencia de ingresos para satisfacer las necesidades básicas de consumo. Según este criterio, una persona se considera pobre si su ingreso es inferior al nivel mínimo necesario para satisfacer sus necesidades básicas. Este nivel mínimo es el que usualmente se denomina *línea de pobreza*. La definición de estas necesidades varía con el tiempo y el lugar. Cada país construye líneas apropiadas a su nivel de desarrollo, normas sociales y valores.

Por supuesto, la condición de pobreza no se restringe a la insuficiencia de ingresos; usualmente implica también falta de acceso a servicios básicos, vulnerabilidad económica y exclusión política. Entre más amplia es una definición de pobreza puede ser más completa para entender las diferentes dimensiones del fenómeno, pero es menos práctica para propósitos de medición. Por eso, las mediciones más utilizadas de pobreza son las más sencillas. En 2012, unos 2,100 millones de personas, o cerca de 35% de la población mundial, subsistían con base en ingresos diarios per cápita de menos de 3.10 dólares (de paridad de poder adquisitivo de 2015), y de estas, 896 millones de personas, o sea 12.7% de la población mundial, vivían con menos de 1.90 dólares diarios. Los valores diarios de 3.10 y 1.90 dólares de paridad de compra de 2015 constituyen las líneas de referencia establecidas por el Banco Mundial en 2015 para comparar los niveles de *pobreza y pobreza extrema*, respectivamente, a nivel internacional (en sustitución de las líneas de 2 y 1.25 dólares de paridad de 2005 utilizadas hasta entonces). Obsérvese que las mediciones no se refieren a dólares corrientes, sino a dólares de paridad de poder de compra, que se calculan actualmente con los precios internacionales de 2015 (*véase* el Capítulo 5).

La línea de indigencia mide el costo de una canasta de alimentos que corresponde a los requisitos nutricionales mínimos. En Colombia, y en otros países, se utilizan límites absolutos de pobreza diferentes a los de estas convenciones internacionales. El criterio general para definir tales límites consiste en establecer el valor de una canasta mínima de consumo per cápita, que se supone permite satisfacer las necesidades más básicas. En el 2011, por ejemplo, una persona era considerada pobre si vivía con menos de \$187,063 mensuales, variando de acuerdo al lugar de residencia, cabecera o centro poblado (*véase* Cuadro 4.1). La línea de pobreza es actualizada con el Índice de Precios al Consumidor total de ingresos bajos. La forma tradicional de cálculo parte del valor de una canasta de alimentos que contiene los requerimientos mínimos de calorías, proteínas y otros nutrientes. Luego identifica la proporción que dentro del gasto total tienen los alimentos en el presupuesto de los hogares de ingresos bajos y, finalmente, divide el costo de la canasta mínima por esta proporción. Al costo de la canasta de alimentos que corresponde a los requisitos nutricionales mínimos diarios se le llama *línea de indigencia*.

Cuadro 4.1

Línea de pobreza monetaria en Colombia

Dominio	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Nacional	187,063	194,696	202,083	206,091	211,807	223,638
Cabeceras	207,005	215,216	223,151	227,367	233,530	246,336
Centros poblados y rural disperso	123,502	128,593	133,522	136,192	139,792	147,752

Fuente: DANE, Indicadores de Pobreza Monetaria, 2016.

Ejemplo 4.4

Cálculo con el método de pobreza monetaria

Una mujer madre soltera que devenga mensualmente \$644,350 (correspondientes a un salario mínimo de 2015), tiene tres hijos que estudian y no trabajan. La familia reside en un municipio rural de Colombia. Luego, para saber si los integrantes de este hogar están por debajo de la línea de pobreza, simplemente se debe dividir los ingresos familiares entre el número de personas y obtener el valor correspondiente mensual.

Ingreso por persona =
$$\frac{$644,350}{4}$$
 = \$161,088

Si se tiene en cuenta que la línea de pobreza en los centros poblados y el área rural dispersa para 2015 eran \$147,752 por persona, resulta que esta familia no se encuentra bajo la línea de pobreza. En cambio, si esta misma familia viviera en una cabecera municipal, sí sería considerada como pobre, pues allí la línea de pobreza era de \$246,336.

El concepto de límite de pobreza no está exento de problemas. De una parte, es difícil establecer unos requerimientos nutricionales mínimos al margen de las condiciones geográficas, el tipo de actividad de los individuos y aun sus propias costumbres alimentarias. Por otra, es discutible si el cálculo del gasto mínimo debe basarse en los patrones de consumo de los individuos o, más bien, en unos patrones ideales u óptimos según los contenidos nutricionales y los precios de los diferentes alimentos. Igualmente, se puede argumentar que el límite de pobreza no debe establecerse en términos de ingresos corrientes sino permanentes, dependiendo de que existan o no mercados para ciertas formas de riqueza y de acuerdo con el grado de integración de las familias en la economía de mercado.

Aparte de los problemas en definir cuál es el valor de la línea de pobreza, también se encuentran dificultades para saber en la práctica quién cae por debajo de esta línea para ser considerado como pobre. Es difícil captar en las encuestas de hogares el valor de los ingresos en especie y transferencias en términos de servicios gratuitos o subsidiados. Usualmente hay, además, deficiencias de reporte que hacen que las encuestas de hogares tiendan a subvaluar el ingreso de los individuos.

Por las dificultades para medir adecuadamente el ingreso, y por el hecho de que el ingreso que debería importar es el permanente y no el corriente, que puede variar por razones totalmente caprichosas, algunos estudios en Colombia y en otros países han optado por medir directamente el consumo, en vez del ingreso. La medición del consumo presenta sus propias dificultades pero es una medida más directa de la capacidad de satisfacción de las necesidades básicas. Medido el valor del consumo de una familia en un período, puede compararse ese valor con el límite absoluto de pobreza para establecer si se trata o no de una familia pobre. En la práctica, los métodos de medición del ingreso y del consumo son complementarios y conjuntamente pueden ofrecer un panorama más completo sobre la incidencia de la pobreza.

A pesar de esta diversidad de críticas, la definición de uno o varios límites absolutos de pobreza es de gran utilidad para hacer comparaciones a través del tiempo en una misma región o ciudad y, con mayor cautela, para hacer comparaciones interregionales o internacionales.

4.2.2 Índices de pobreza

Como hemos visto, la tasa de pobreza es sencillamente el porcentaje de personas cuyos ingresos están por debajo del límite de pobreza. Esta forma de medir la pobreza no nos dice qué tan pobres son los pobres: la tasa de pobreza es la misma si los pobres no tienen ningún ingreso o si les faltan apenas unos centavos para alcanzar la línea de pobreza. Para superar esta deficiencia se utilizan los *índices de pobreza* (IP) propuestos por Foster, Greer y Thorbecke en 1984, que se definen en forma genérica así:

donde:

N es el número total de personas

H es el número de pobres (con ingresos por debajo de la línea de pobreza z)

z es la línea de pobreza

 y_i es el ingreso del individuo i

 α es un factor exponencial para darle más o menos peso a los individuos más pobres.

Cuando el factor exponencial α es cero el paréntesis toma el valor de 1 y la sumatoria es sencillamente el número de pobres. Por consiguiente, el índice de pobreza en este caso es la *tasa de pobreza* que ya conocemos:

$$IP_0 = \frac{H}{N}$$

Si el factor exponencial es 1, entonces tendremos el índice de brecha de la pobreza:

$$IP_{1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{H} \frac{(z - y_{i})}{z}$$

Como su nombre lo sugiere, este índice mide cuál es el déficit de ingresos que tienen en promedio los pobres. Si los pobres no tuvieran ningún ingreso sería igual a la tasa de pobreza (porque, nuevamente, el paréntesis para cada persona pobre tendría el valor de 1). Si el factor exponencial es mayor de 1 tendrán más peso en el índice los individuos más pobres.

El factor exponencial del IP puede tomar varios valores, convirtiéndose en diferentes indicadores:

- -Tasa de pobreza, $\alpha = 0$
- -Brecha de la pobreza, α = 1
- -Índice de severidad de pobreza, α = 2

Si el factor exponencial toma el valor de 2, se obtiene el *índice de severidad de la pobreza:*

$$IP_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{H} \left(\frac{z - y_i}{z} \right)^2$$

El índice de severidad capta tanto la intensidad de la pobreza como la desigualdad entre los pobres.

Ejemplo 4.5

Cálculo de la tasa y brecha de pobreza

Suponga que para el año 2015, existen 5 personas que devengan los siguientes ingresos: \$120,000; \$160,000; \$210,000; \$1,000,000 y \$1,200,000. Calcule la tasa y brecha de pobreza suponiendo que la línea de pobreza es de \$ 223,638.

La tasa de pobreza vendría dada por:

$$IP_0 = \frac{3}{5} = 0.60$$

Y la brecha de pobreza:

$$IP_{1} = \frac{1}{5} \left[\left(\frac{223,638-120,000}{223,638} \right) + \left(\frac{223,638-160,000}{223,638} \right) + \left(\frac{223,638-210,000}{223,638} \right) \right]$$

$$IP_{1} = 0.162$$

De acuerdo al ejercicio, el 60% de las personas se encontraba en situación de pobreza y el déficit de ingreso de los individuos en situación de pobreza era 16,2%.

Los índices de pobreza ofrecen por consiguiente un panorama más completo de la pobreza, porque resumen en un solo indicador la incidencia y la severidad o la distribución de la misma. Sin embargo, la pobreza no solo puede verse como la carencia de ingresos para suplir una canasta básica, sino que es la combinación de carencias en varias dimensiones como salud, educación, servicios públicos, entre otras. Por estas razones, aunque con mayor dificultad para su cálculo, se han creado indicadores que reúnen varias de estas condiciones y estudian de manera más completa la pobreza. En este sentido se destaca el índice de pobreza multidimensional que explicamos enseguida.

4.2.3 La pobreza multidimensional

La metodología de la pobreza multidimensional para Colombia fue diseñada inicialmente por el Departamento Nacional de Planeación (DNP) con base en la metodología propuesta por Alkire y Foster del Oxford Poverty & Human Development Initiative (OPHI). Desde 2012 el DANE es el encargado de realizar la medición utilizando una metodología que presenta algunas modificaciones frente a la original y cuya información proviene de la Encuesta Nacional de Calidad de Vida.

El método de cálculo de la pobreza multidimensional es bastante sencillo, aunque debe advertirse que hay un cambio de unidad en el momento de hacer los cálculos que puede confundir a primera vista. La unidad de análisis es el hogar, y la base de medición es un listado de 15 condiciones agrupadas en cinco dimensiones: educación, salud, primera infancia, empleo y servicios básicos. Para cada condición se establece un criterio para decidir si un hogar y todas las personas en él cumplen o no. Un hogar se define como pobre multidimensional cuando incumple el 33% o más de estas condiciones teniendo en cuenta la ponderación de cada criterio (Cuadro 4.2). Por ejemplo, si un hogar incumple las primeras cinco condiciones, la suma de las ponderaciones daría 35%, clasificando como pobres a todos los miembros de ese hogar. Nótese el cambio de hogar a persona. Es decir, cuando un hogar presenta privación en un indicador, automáticamente todos los miembros del hogar son considerados como privados en ese indicador. Con base en la clasificación de hogares entre pobres o no según esta metodología se calcula luego una tasa de incidencia simple, dividiendo el número de personas de todos los hogares considerados como pobres sobre el total de los individuos para los que se está haciendo la medición.

La incidencia de la pobreza multidimensional mide el número de personas pobres sobre el total de la población.

De esta manera, la incidencia de la pobreza multidimensional se define como:

$$\Theta$$
 $H = \frac{q}{n}$

Donde, q representa el número de personas pobres (de manera multidimensional) y n el total de la población.

Cuadro 4.2

Criterios para determinar pobreza multidimensional en Colombia

Dimensión	Indicador	Ponderación
Condiciones educativas	1. Analfabetismo (en el hogar una o más personas con 15 años o más no saben leer y escribir)	0.10
del hogar	2. Bajo logro educativo (el promedio educativo para las personas del hogar de 15 o más es inferior a 9 años de escolaridad)	0.10
	3. Inasistencia escolar (al menos un niño del hogar entre 6 y 16 años no asiste a la escuela)	0.05
Condiciones de la niñez y juventud	4. Rezago escolar⁴ (uno o más niños del hogar entre 7 y 17 años tiene rezago escolar)	0.05
	5. Barreras a servicios para cuidado de la primera infancia (al menos un niño del hogar entre 0 y 5 años no tiene acceso simultaneo ⁵ a nutrición, salud, cuidado y educación inicial)	0.05
	6. Trabajo infantil (uno o más niños del hogar entre 12 y 17 años están ocupados)	0.05
	7. Desempleo de larga duración (al menos una persona del hogar que está desempleada lleva más de 12 meses buscando trabajo)	0.10
Trabajo	8. Trabajo informal (una o más personas de la PEA del hogar no está afiliada a pensiones)	0.10

⁴ El rezago escolar se define como la diferencia entre los años normativos estipulados por Ministerio de Educación y los años de escolaridad aprobados del estudiante. Por ejemplo, si un niño de 7 años no ha ingresado al colegio, y debería tener un año normativo aprobado, el rezago sería de un año.

⁵ Se presenta privación si al menos uno de los niños entre 0 y 5 años del hogar no tiene acceso a todos los servicios para el cuidado integral de la primera infancia.

Dimensión	Indicador	Ponderación
Salud	9. Sin aseguramiento en salud (al menos una persona del hogar no se encuentra afiliada al sistema general de seguridad social en salud)	0.10
	10. Barreras de acceso a servicios de salud (alguna persona del hogar no asistió al servicio de salud teniendo una necesidad sentida)	0.10
	11. La vivienda no tiene acceso a fuente de agua mejorada (urbano: la vivienda no cuenta con servicio público de acueducto; rural: el agua que utilizan para consumo proviene de pozo, río, lluvia, etc.)	0.04
Servicios públicos	12. Inadecuada eliminación de excretas (no hay conexión pública de alcantarillado)	0.04
domiciliarios y condiciones	13. Material inadecuado de pisos (la vivienda tiene pisos en tierra)	0.04
de la vivienda	14. Material inadecuado de paredes exteriores (urbano: paredes exteriores en: madera burda, tabla, tablón,guadua, zinc, tela, cartón, otro vegetal o sin paredes; rural: los mismos que en urbano excluyendo las derivaciones de madera)	0.04
	15. Hacinamiento crítico (urbano: duermen tres o más personas en un cuarto; rural: más de tres personas por cuarto).	0.04

Fuente: DANE y DNP, Documento Conpes Social 150, 2012

Con el fin de refinar el anterior indicador, se estima también la tasa de incidencia ajustada, la cual tiene en cuenta tanto la incidencia como las privaciones que presentan las personas.

$$\bigcirc$$
 $M_0 = A \times H$

Donde, H representa la tasa de incidencia y A el promedio de la proporción de las privaciones que tienen las personas que son consideradas como pobres multidimensionales. Así por ejemplo, en 2015 la incidencia de la pobreza multidimensional para el total nacional fue de 20.2% y el promedio de carencias de las personas en pobreza multidimensional fue de 41.2%, dando como resultado una incidencia ajustada de 8.5%. El Ejemplo 4.6 explica en mayor detalle la forma de calcular estos indicadores.

Ejemplo 4.6

Cálculo de la pobreza multidimensional

Considere la información que muestra la privación de las carencias de cuatro hogares para calcular la incidencia e incidencia ajustada de la pobreza multidimensional.

***	D 1 1	Hogar	Hogar	Hogar	Hogar
Variable	Ponderación	1	2	3	4
Número de personas en el hogar		4	7	5	4
Analfabetismo	0,10	1	0	1	1
Bajo logro educativo	0,10	1	0	0	1
Inasistencia escolar	0,05	0	0	0	1
Rezago escolar	0,05	0	0	0	0
Barreras a servicios para cuidado de la primera infancia	0,05	0	1	0	1
Trabajo infantil	0,05	0	0	0	1
Desempleo de larga duración	0,10	0	1	0	0
Trabajo informal	0,10	1	1	1	0
Sin aseguramiento en salud	0,10	0	1	1	1
Barreras de acceso a servicios de salud	0,10	0	1	1	1
Sin acceso a fuente de agua mejorada	0,04	0	0	1	0
Inadecuada eliminación de excretas	0,04	0	0	1	0
Material inadecuado de pisos	0,04	0	0	1	0
Material inadecuado de paredes exteriores	0,04	0	0	1	0
Hacinamiento crítico	0,04	0	1	1	0
Suma de ponderadores		0.30	0.49	0.60	0.55

El valor de 1 en el hogar 1 en analfabetismo significa que en ese hogar una o más personas con 15 años o más no saben leer y escribir. El valor de 0 en el hogar 2 significa que todos los miembros con 15 años o más saben leer y escribir. Para calcular la privación o carencia, se suman los ponderadores de todos los indicadores que tienen un 1 (existe la carencia). Si este valor es mayor o igual a 0.33, se considera como pobre el hogar y todos sus miembros. En el ejemplo, tres de los hogares son pobres (hogares 2, 3 y 4). El hogar 2, por ejemplo, tiene carencias en seis variables cuyos ponderadores suman 0.49.

La incidencia de la pobreza vendría dada por:

$$H = \frac{q}{n} = \frac{(0+7+5+4)}{(4+7+5+4)} = 0.80$$

Recuerde que según la metodología, la incidencia se calcula sobre el número de personas y no sobre la cantidad de hogares.

Y el promedio de la proporción de las privaciones también medido sobre el número de personas es:

$$A = \frac{(0.49 \times 7) + (0.60 \times 5) + (0.55 \times 4)}{7 + 5 + 4} = 0.539$$

La incidencia ajustada sería:

$$M_0 = A \times H = 0.432$$

Los resultados obtenidos son diferentes debido a que en la incidencia ajustada se tiene en cuenta además de la incidencia, el promedio de las privaciones de las personas pobres.

El Cuadro 4.3 muestra el porcentaje de hogares que presentan privación en Colombia por tipo de privación para los años 2013 a 2015. De acuerdo con estos datos la menor privación es "Material inadecuado de paredes exteriores" y la mayor "trabajo informal". De igual forma el "aseguramiento en salud" es la carencia que más ha disminuido entre 2013 y 2015, donde el porcentaje de hogares con esta privación pasó de 17.1% a 11.2%, una disminución de 5.1 puntos porcentuales.

Cuadro 4.3

Porcentaje de hogares que enfrentan privaciones en Colombia por tipo de privación

Variable	2013	2014	2015
Sin aseguramiento en salud	17.1	12.2	11.2
Bajo logro educativo	51.6	50.7	48.2
Trabajo informal	78.1	76.8	74.5
Rezago escolar	31.7	32.0	29.5
Hacinamiento crítico	12.4	10.8	10.6
Analfabetismo	11.7	10.7	10.2
Barreras a servicios para cuidado de la primera infancia	9.7	9.4	9.1
Inadecuada eliminación de excretas	11.8	10.5	10.1
Sin acceso a fuente de agua mejorada	11.2	11.5	9.8
Material inadecuado de pisos	5.8	5.2	4.6
Inasistencia escolar	3.8	3.3	3.0
Trabajo infantil	3.6	3.4	3.2
Material inadecuado de paredes exteriores	2.1	1.8	1.7
Barreras de acceso a servicios de salud	7.2	6.3	6.5
Desempleo de larga duración	9.7	10.4	10.2

Fuente: DANE, Boletín técnico: Pobreza Monetaria y Multidimensional en Colombia, 2016.

4.3 Índice de desarrollo humano

El IDH es una medida sintética que combina información de cuatro indicadores:

- -Esperanza de vida al nacer
- -Años promedios de educación
- -Años esperados de escolaridad
- -Nivel de ingresos per cápita.

El Índice de Desarrollo Humano, IDH creado en 1990 por PNUD, es el indicador más utilizado internacionalmente para comparar los niveles de vida de los países. El IDH es una medida sintética que combina información de cuatro indicadores: la esperanza de vida al nacer, los años promedio de educación, los años esperados de escolaridad, y el nivel de ingreso per cápita.

Cada uno de los cuatro indicadores mencionados viene expresado en unidades diferentes (años en el caso de la esperanza de vida y la escolaridad, y dólares en el caso del ingreso per cápita), razón por la cual deben ser transformados en índices. Utilizando valores de referencia establecidos por el PNUD cada año (ver Cuadro 4.4), el valor de cada componente se convierte a una escala entre 0 y 1, aplicando una sencilla formula:

dónde M es el valor máximo, m es el valor mínimo, y x es el valor del indicador para el país en cuestión.

Cuadro 4.4

Componentes del Índice de Desarrollo Humano

Indicador	Valor máximo	Valor mínimo
Esperanza de vida al nacer (años)	85	20
Años esperados de escolaridad	18	0
Años promedio de escolaridad	15	0
Ingreso per cápita en dólares de paridad de poder adquisitivo	75,000	100

Fuente: PNUD, Technical notes of Human Development Report, 2015.

Así, para 2014, en el caso de la esperanza de vida, la escala va desde los 85 años (correspondientes a límite superior) hasta los 20 años (límite inferior). Si la esperanza de vida para Colombia es de 74 años, se hace la siguiente transformación para calcular el índice de esperanza de vida:

$$\frac{x-m}{M-m} = \frac{74-20}{85-20} = 0.83$$

El valor 0.83 significa que el país tiene el 83% del rango establecido para la variable. De acuerdo con el PNUD existen cuatro niveles de desarrollo humano: bajo (0-0.54), medio (0.55-0.69), alto (0.70-0.79) y muy alto (0.80-1). Estas categorías no son exclusivas para el *IDH* total, también aplican para cada uno de los componentes. Por ejemplo, en materia de expectativa de vida Colombia estaría en un nivel muy alto a nivel mundial.

En el caso de los dos indicadores de educación, primero se calculan los índices por separado y posteriormente se promedian de manera simple para sacar un solo índice. El indicador de años esperados de escolaridad es análogo al concepto de esperanza de vida al nacer, es decir es una estimación (dadas las tasas actuales de escolaridad, retención, y deserción) del número de años promedio de educación que alcanzaría una cohorte de niños nacida hoy en ese país.

En el caso del ingreso, el indicador base para el cálculo escogido por PNUD es el *Ingreso Nacional Bruto (YNB) per capita en dólares de paridad de poder adquisitivo*. Es importante anotar aquí que el *YNB* difiere del *PIB*, lo que es explicado en detalle en el Capítulo 6. Adicionalmente la valoración del *YNB* se hace en dólares de poder de paridad adquisitiva, lo cual se explica en el Capítulo 5. Una particularidad de este indicador es que dadas las disparidades en el ingreso de los países, el rango (estadísticamente hablando) es muy amplio, pues va desde 100 hasta 75,000 dólares. Sin ninguna transformación, la mayoría de los países del mundo tendrían un valor del índice muy bajo. Por esta razón se utiliza la escala logarítmica para reducir el rango a la vez que se respetan las distancias relativas entre los países. En la práctica, la fórmula para llegar al índice es igual, pero en lugar de usar las unidades observadas se usa el logaritmo natural de cada una.

Finalmente, mediante una media geométrica de los tres índices se obtiene el Índice de Desarrollo Humano:

Ejemplo 4.7

Cálculo del Índice de Desarrollo Humano, IDH

En Colombia en 2014 se tenía una esperanza de vida al nacer de 74 años, un promedio esperado de escolaridad de 13.5 años, 7.3 años promedios de educación y un ingreso per cápita de paridad de poder adquisitivo de US\$ 12,040.

El cálculo de los sub-índices es como sigue:

1. La esperanza de vida

I. Esperanza de vida =
$$\frac{x-m}{M-m} = \frac{74-20}{85-20} = 0.83$$

2. Educación

I. Años esperados de escolaridad =
$$\frac{x-m}{M-m} = \frac{13.5-0}{18-0} = 0.75$$

I. Años promedio de escolaridad =
$$\frac{x-m}{M-m} = \frac{7.3-0}{15-0} = 0.49$$

Promediando los dos índices se obtiene el índice de educación:

I. Educación =
$$\frac{0.75 + 0.49}{2}$$
 = 0.62

3. Ingreso per cápita

I. de ingreso =
$$\frac{\ln(x) - \ln(m)}{\ln(M) - \ln(m)} = \frac{\ln(12,040) - \ln(100)}{\ln(75,000) - \ln(100)} = 0.72$$

El *IDH* vendría dado por:

$$IDH = (0.83 \times 0.62 \times 0.72)^{1/3}$$

IDH = 0.72

El IDH para Colombia en 2014 fue de 0.72, lo cual le permitió al país ubicarse en un nivel de desarrollo humano alto.

El PNUD ha diseñado índices alternativos de desarrollo humano, tratando de introducir bajo las mismas dimensiones otros aspectos relevantes en el análisis como la equidad entre los sexos y la desigualdad. Es así como en el año 2014, desarrollaron el *Índice de Desarrollo Relativo al Género, IDG*, que toma los mismos componentes del *IDH* pero evaluando bajo la misma estructura las desigualdades de género. También desarrollaron el *Índice de Desigualdad de Género, GII* (por sus siglas en inglés) el cual adopta una estructura que mezcla componentes de salud, empoderamiento y poder económico tomando indicadores de mortalidad materna, tasas de fecundidad (adolescentes), proporción de mujeres en el Congreso, y tasas laborales de participación. Estos índices han sido aplicados en Colombia y en otros países a niveles más detallados permitiendo comparaciones en el tiempo o entre regiones.

Adicionalmente, en 2010 el PNUD introdujo el *IDH ajustado por desigualdad, IDH-D.* El *IDH-D* tiene en cuenta no sólo los logros promedio de un país en materia de salud, educación e ingresos, sino también cómo esos logros se distribuyen entre su población, "ajustando" el valor promedio de cada dimensión de acuerdo a su nivel de desigualdad. En condiciones de igualdad perfecta el IDH-D es igual al IDH, pero cae por debajo del IDH cuando aumenta la desigualdad. La diferencia entre el IDH tradicional y el IDH-D es la pérdida de desarrollo humano debido a la desigualdad. Como se observa en el Cuadro 4.5, mientras que un país muy igualitario como es Noruega pierde solo 0.051 puntos en el índice por cuenta de la desigualdad, un país bastante desigual como Colombia pierde 0.178 puntos. De igual manera sucede con los Estados Unidos, que pierde 0.155 puntos a causa de sus grandes niveles de desigualdad, lo que baja su calificación de un país con IDH muy alto a uno con IDH alto. Estos resultados indican que los rankings de países pueden diferir sustancialmente después de tener en cuenta la distribución de oportunidades entre sus pobladores.

Cuadro 4.5

Comparación del Índice de Desarrollo Humano tradicional y el ajustado por desigualdad, 2014

País	IDH	IDH-D	
Desarr	ollo humano muy	alto	
Noruega	0.944	0.893	
Estados Unidos	0.915	0.760	
Desa	errollo humano al	to	
Uruguay	0.793	0.678	
Colombia	0.720	0.542	
Desar	rollo humano me	dio	
Paraguay	0.679	0.529	
Nicaragua	0.631	0.480	
Desa	rrollo humano ba	jo	
Haití	0.483	0.296	
Nigeria	0.514	0.320	

Fuente: PNUD, Human Development Report 2015.

4.4 La Encuesta Nacional de Calidad de Vida

Las encuestas de calidad de vida tienen por objetivo obtener información de las condiciones socieconómicas de los hogares de un país o región, con el fin de caracterizar la población, y a partir de la identificación de necesidades diseñar políticas públicas para mejorar las condiciones de vida. En la medida en que se aplique para varios periodos, la encuesta permite identificar los avances o retrocesos de las políticas gubernamentales. Para este fin son más adecuadas las encuestas de panel, que hacen seguimiento a los mismos individuos a través del tiempo, que las encuestas de corte transversal, en las que cada vez se entrevistan hogares distintos tomados al azar.

La primera Encuesta Nacional de Calidad de Vida (ECV) del DANE se realizó en 1993, con un antecedente sólo para Bogotá y sus localidades en 1991. Luego se realizaron las encuestas nacionales de 1993, 1997, 2003, y 2008, y desde 2010 se han aplicado con frecuencia anual. La representatividad ha variado de una encuesta a otra. La ECV 2015 fue representativa para el total nacional, las cabeceras y centros poblados-rural disperso, y para nueve regiones colombianas más Bogotá. La unidad de análisis es el hogar, y en 2015 se tomó información a 23,005 hogares y a 76,026 personas con información completa. La ECV es una encuesta de corte transversal, no de panel. Cubre los siguientes temas:

- 1. Vivienda: tipo de vivienda, material predominante en paredes exteriores, pisos y techos; acceso a servicios públicos y afectaciones por contaminación.
- 2. Tenencia y financiación de la vivienda: tipo de tenencia de la vivienda, arrendamientos, o cuotas de amortización a créditos, acceso a subsidios de vivienda.
- 3. Servicios: disponibilidad de cuartos en el hogar (para medir hacinamiento), descripción de los servicios públicos (tipo de alumbrado, de servicio sanitario, de recolección de basuras, de agua potable, de combustible, etc.).
- 4. Características del hogar: parentesco, estado civil, movilidad residencial, educación de los padres, reconocimiento étnico.
- 5. Salud: afiliación a salud, tipo de afiliación y beneficiarios, percepción sobre la calidad del servicio de salud y sobre el estado de salud del individuo, prevención, fuentes de financiación de la enfermedad.
- 6. Atención integral a niños menores de 5 años: cuidado de los menores, asistencia escolar, vacunación.
- 7. Educación: analfabetismo, asistencia escolar, nivel educativo, tiempo de desplazamiento al centro educativo, acceso a subsidios, becas o créditos de estudio.
- 8. Fuerza de trabajo: ocupación, rama de actividad del empleador, informalidad, ingresos, medio y tiempo de desplazamiento al trabajo, horas laboradas, búsqueda de empleo, seguridad social, remesas.
- 9. Trabajo infantil (para niños entre 5 y 11 años): ocupación de los menores, actividad del empleador, tipo de actividad desempeñada, remuneración, horas de trabajo, trabajo familiar.

- 10. Tecnologías de información y comunicación, TIC: frecuencia en el uso del computador e internet, funcionalidad del internet en el hogar, tenencia y usos del celular, usos de la señal de radio.
- 11. Condiciones de vida: percepción de seguridad y pobreza, acceso a subsidios del gobierno, seguridad alimentaria, tenencia de electrodomésticos, medios de transporte y TIC, percepción sobre salud, educación, trabajo, felicidad, etc.
- 12. Uso energético del hogar: tipo y frecuencia en el uso de lavadora, secadora, lavadora de platos, televisor, aire acondicionado, ventilador, computador, nevera, calentador, plancha, bombillos.

La información de la ECV es pública y los microdatos pueden ser descargados de la página de internet del DANE.

Como se mencionó, la ECV no es una encuesta de panel, pue no hace seguimiento a las mismas familias un año tras otro. Idealmente, una encuesta de calidad de vida debería seguir a una muestra constante, estadísticamente representativa de hogares del país. El costo de realizar este tipo de encuestas impide su realización a nivel nacional en países con recursos públicos escasos. En Colombia, sin embargo, gracias a una iniciativa privada de la Universidad de Los Andes liderada por el Centro de Estudios sobre Desarrollo Económico (CEDE) de la Facultad de Economía, se aplica la llamada Encuesta Longitudinal Colombiana (ELCA), que con recursos públicos y privados ha tomado datos de panel en 2010 y en 2013.

Indicadores de nivel de vida, desigualdad y pobreza Conceptos clave

Indicadores de desigualdad

Curva de Lorenz Coeficiente de Gini Coeficiente de desigualdad de Theil

Indicadores de pobreza

Líneas de pobreza
Pobreza extrema
Línea de indigencia
Índices de pobreza
Tasa de pobreza
Incidencia de la pobreza
Brecha de la pobreza
Necesidades básicas insatisfechas, NBI
Índice de pobreza multidimensional, IPM

Índices de desarrollo humano

Índice de Desarrollo Humano, *IDH* Índice de desarrollo relativo al género, *IDG* Índice de desigualdad de género, *GII* Índice de Desarrollo Humano ajustado por desigualdad, *IDH-D*

Preguntas y ejercicios

4.1*

De acuerdo al siguiente cuadro, obtenga:

- a) Porcentaje acumulado de hogares y de ingresos
- b) Una gráfica de la curva de Lorenz
- c) El coeficiente de Gini

Decil	Hogares	Ingreso				
1	2,687	\$ 0				
2	2,686	\$ 41,456,572				
3	2,686	\$ 908,822,528				
4	2,686	\$ 1,638,424,320				
5	2,686	\$ 2,043,056,256				
6	2,687	\$ 2,685,678,848				
7	2,686	\$ 3,509,100,544				
8	2,686	\$ 4,492,759,040				
9	2,686	\$ 6,254,575,616				
10	2,686	\$ 14,206,971,904				
Total	26,862	\$ 35,780,845,628				

4.2

Suponga que el ingreso de todos los individuos aumenta en igual proporción. Partiendo de que

$$Y_i = \frac{y_i}{y}$$

donde Y_i es la participación acumulada del sector i más pobre en el total de ingreso y, demuestre que el coeficiente de Gini no se altera.

Preguntas y ejercicios

4.3

4.4*

4.5

4.6

Suponga ahora que el ingreso de todos los individuos aumenta en un valor constante X. Demuestre que esto reduce el valor del coeficiente de Gini.

Calcule el índice de concentración total de Theil a partir de los siguientes datos:

Individuo No.	Sexo	Educación	Ingreso	
1	M	Primaria	10	
2	M	Primaria	13	
3	F	Primaria	8	
4	F	Primaria	9	
5	M	Secundaria	46	
6	M	Secundaria	53	
7	F	Secundaria	34	
8	F	Secundaria	18	

Compruebe que puede obtener los mismos resultados con las dos fórmulas con las que comienza la sección sobre el índice de Theil.

Calcule ahora la descomposición del índice anterior agrupando a la población por nivel educativo. ¿Qué importancia relativa tienen los diferenciales educativos en el grado de concentración del ingreso?

Repita el ejercicio anterior clasificando ahora la población por sexo. Compare sus resultados con los del ejercicio anterior.

Preguntas y ejercicios

4.7	Deduzca una ecuación para calcular el coeficiente de concentración total de Theil a partir de los coeficientes de Theil calculados por grupos, los tamaños de las poblaciones grupales y los ingresos totales por grupos.
4.8*	Calcule la tasa de pobreza y el índice de brecha de la pobreza de una comunidad de 10 habitantes cuyos ingresos mensuales en dólares son 3, 7, 9, 13, 24, 49, 57, 85, 120 y 335: (a) suponiendo que la línea de pobreza es 20, y (b) suponiendo que la línea de pobreza es 50.
4.9*	Con los mismos datos del ejercicio anterior, ¿qué porcentaje del ingreso de los que no son pobres tendría que recaudarse como impuesto para financiar un subsidio para cubrir las brechas de ingreso de los pobres?
4.10*	Calcule ahora el índice de pobreza con los mismos datos del ejercicio anterior, suponiendo que el coeficiente exponencial es 2. Interprete los resultados comparándolos con los del ejercicio anterior.
4.11*	Calcule el índice de desarrollo humano de Alemania en 2014 con los siguientes datos:
	-Esperanza de vida al nacer: 80.9 -Años esperados de escolaridad: 16.5

- -El YNB es de 43,919 dólares de paridad de poder adquisitivo
- ¿Qué puede inferir de los resultados?

-Años promedio de escolaridad: 13.1

4.1R *a)*

Decil	Hogares	Ingreso	Coeficiente acumulado de hogares	Coeficiente acumulado del ingreso	(a)	(b)	(a)*(b)
			0	0			
1	2,687	0	0.10	0.00	0.10	0.00	0.000
2	2,686	41,456,572	0.20	0.00	0.10	0.00	0.000
3	2,686	908,822,528	0.30	0.03	0.10	0.03	0.003
4	2,686	1,638,424,320	0.40	0.07	0.10	0.10	0.010
5	2,686	2,043,056,256	0.50	0.13	0.10	0.20	0.020
6	2,687	2,685,678,848	0.60	0.20	0.10	0.33	0.033
7	2,686	3,509,100,544	0.70	0.30	0.10	0.51	0.051
8	2,686	4,492,759,040	0.80	0.43	0.10	0.73	0.073
9	2,686	6,254,575,616	0.90	0.60	0.10	1.03	0.103
10	2,686	14,206,971,904	1.00	1.00	0.10	1.60	0.160
Total	26,862	35,780,845,628					0.454

c) El coeficiente de Gini es 0.546 (=1-0.454)

4.4R

Ingreso	$x_{_{1}}$	$x_1 ln(x_1 n)$	$\frac{y_i}{\overline{y}}$	$ln(\frac{y_i}{\overline{y}})$	$\frac{y_i}{\overline{y}}\ln(\frac{y_i}{\overline{y}})$
10	0.052	-0.046	0.419	-0.870	-0.365
13	0.068	-0.041	0.545	-0.608	-0.331
8	0.042	-0.046	0.335	-1.093	-0.366
9	0.047	-0.046	0.377	-0.976	-0.368
46	0.241	0.158	1.927	0.656	1.264
53	0.277	0.221	2.220	0.797	1.770
34	0.178	0.063	1.424	0.354	0.503
18	0.094	-0.027	0.754	-0.282	-0.213
191		0.237			0.237

Donde, \bar{y} se obtiene como el promedio simple de los ingresos de los individuos:

$$\bar{y} = \frac{(10+13+8+9+46+53+34+18)}{8} = 23.875$$

Los dos métodos dan como resultado un coeficiente de concentración de 0.237

4.8R

Por simple conteo se encuentra que las tasas de pobreza son 0.4 y 0.6, respectivamente para las líneas de pobreza de 20 y 50 dólares mensuales.

El índice de la brecha de pobreza (para la línea de pobreza de 20 dólares) puede obtenerse calculando primero la suma de las brechas de ingreso en proporción a la línea de pobreza para los individuos pobres:

$$\frac{(20-3)}{20} + \frac{(20-7)}{20} + \frac{(20-9)}{20} + \frac{(20-13)}{20} = 2.4$$

y luego dividiendo ese total por la población total:

$$\frac{2.4}{10} = 0.24$$

Siguiendo el mismo procedimiento se encuentra que el índice de la brecha de pobreza cuando la línea de pobreza es 50 es 0.39. Obsérvese que estos índices son menores que las tasas de pobreza, porque estamos teniendo en cuenta que los pobres tienen algún ingreso.

4.9R

Si la línea de pobreza es 20 (50) dólares, las brechas de ingreso de los pobres son 48 (195) dólares, como puede deducirse fácilmente de los cálculos del ejercicio anterior. Puesto que los no pobres tienen un ingreso total de 670 (597) dólares, se necesitaría un impuesto de 7.2% (32.7%).

4.10R

El cálculo es semejante al del ejercicio 4.8, pero elevando al cuadrado cada término de la sumatoria:

$$\left[\frac{(20-3)}{20}\right]^2 + \left[\frac{(20-7)}{20}\right]^2 + \left[\frac{(20-9)}{20}\right]^2 + \left[\frac{(20-13)}{20}\right]^2 = 1.57$$

Y luego dividiendo ese total por la población total:

$$\frac{1.57}{10} = 0.157$$

Cuando la línea de pobreza es de 50 dólares, el resultado es 0.3114.

Nótese que estos índices de pobreza son menores que los encontrados en el ejercicio 4.8, porque estamos elevando al cuadrado valores que son menores que 1. Por lo tanto, no son comparables unos y otros. Lo que importa es la comparación para distintas líneas de pobreza en cada caso por separado.

4.11R

El *IDH* de Alemania para el año 2014 se calcula de la siguiente manera:

1. Esperanza de vida

I.Esperanza de vida =
$$\frac{x-m}{M-m} = \frac{80.9-20}{85-20} = 0.937$$

2. Educación

I. Años esperados de escolaridad =
$$\frac{x-m}{M-m} = \frac{16.5-0}{18-0} = 0.917$$

I. Años promedio de escolaridad =
$$\frac{x-m}{M-m} = \frac{13.1-0}{15-0} = 0.873$$

Promediando los dos índices se obtiene el índice de educación:

I.
$$Educación = \frac{0.917 + 0.873}{2} = 0.895$$

3. Ingreso per cápita

I.
$$Ingreso = \frac{ln(x) - ln(m)}{ln(M) - ln(m)} = \frac{ln(43,919) - ln(100)}{ln(75,000) - ln(100)} = 0.919$$

El *IDH* vendría dado por:

$$IDH = (0.937 \times 0.895 \times 0.919)^{1/3}$$

 $IDH = 0.917$

El *IDH* para Alemania en 2014 fue de 0.917, lo cual le permitió al país ubicarse en un nivel muy alto de desarrollo humano.

Informes e investigaciones

- Bourguignon, F. The Globalization of Inequality, Princeton and Oxford, 2015. Una excelente explicación de los conceptos, los métodos de medición y las causas de la creciente desigualdad en el mundo.
- DANE, "Pobreza monetaria y multidimensional en Colombia 2015". Boletín técnico. Bogotá D.C., 2016. Una buena guía metodológica sobre los indicadores de pobreza en el país.
- DNP, "Metodologías oficiales y arreglos institucionales para la medición de la pobreza en Colombia". Documento Conpes 150. Bogotá D.C., 2012. Este documento describe los indicadores utilizados para medir la pobreza multidimensional en Colombia.
- Ferranti, D., Perry, G. y Ferreira F. H. G., Walton, M. Desigualdad en América Latina y el Caribe: ¿Ruptura con la Historia?, 2003. Estudios del Banco Mundial sobre América Latina. Explora las razones por las cuales la región sufre de desigualdad persistente, identifica sus efectos en el desarrollo y sugiere formas para mejorar la distribución de la riqueza, los ingresos y las oportunidades. Puede consultarse en: http://www.alternativasycapacidades.org/sites/default/files/biblioteca_file/David%20de%20Ferranti,%20 et%20al,%20Desigualdad%20en%20Am%C3%A9rica%20Latina.pdf
- Lustig, N., López-Calva, L.F. y Ortiz-Juárez, E. "Los determinantes de la disminución de la desigualdad en América Latina". En Devlin, R., Echevarría, O. y Machinea, J.L. (eds.) *América Latina en una Era de Globalización*. CAF, 2014. Una excelente explicación de por qué la distribución del ingreso mejoró en América Latina en la primera década del siglo XX.
- Piketty, T. Capital in the Twenty-First Century, Belknap Press, 2014. Sin duda alguna, el libro más aclamado sobre distribución del ingreso. Muy didáctico y a la vez estadísticamente riguroso, discute las tendencias de la distribución del ingreso y las razones del aumento de la desigualdad en las últimas décadas, especialmente en los países desarrollados.
- Ramírez, M.T. y Téllez, J.P. "La educación primaria y secundaria en Colombia en el siglo XX", en Robinson, J. y Urrutia, M., Economía Colombiana del Siglo XX. Un Análisis Cuantitativo. Fondo de Cultura Económica y Banco de la República, 2007.

Bibliografía

Fuentes regulares de información y análisis de indicadores de pobreza, desigualdad y desarrollo humano

- Banco Mundial, Informe sobre el Desarrollo Mundial. Contiene información anual para todos los países del mundo de los principales indicadores de pobreza y desigualdad: http://data.worldbank.org/data-catalog/world-development-indicators
- >> Cepal. Indicadores sociales. La Cepal publica informes anuales y numerosos estudios sobre desarrollo social en los países latinoamericanos, incluyendo indicadores de pobreza: http://www.cepal.org/es/publicaciones/selecciones/desarrollo-social
- PNUD, Human Development Report. Presenta resultados anuales del Índice de Desarrollo Humano y otros indicadores de calidad de vida. Puede consultarse en: http://hdr.undp.org/en .También puede consultar la forma de construir los indicadores en las notas técnicas del informe: http://hdr.undp.org/sites/default/files/hdr2015_technical_notes.pdf

Recurso fotográfico

>> Fotografía portada tomada de: https://pixabay.com/