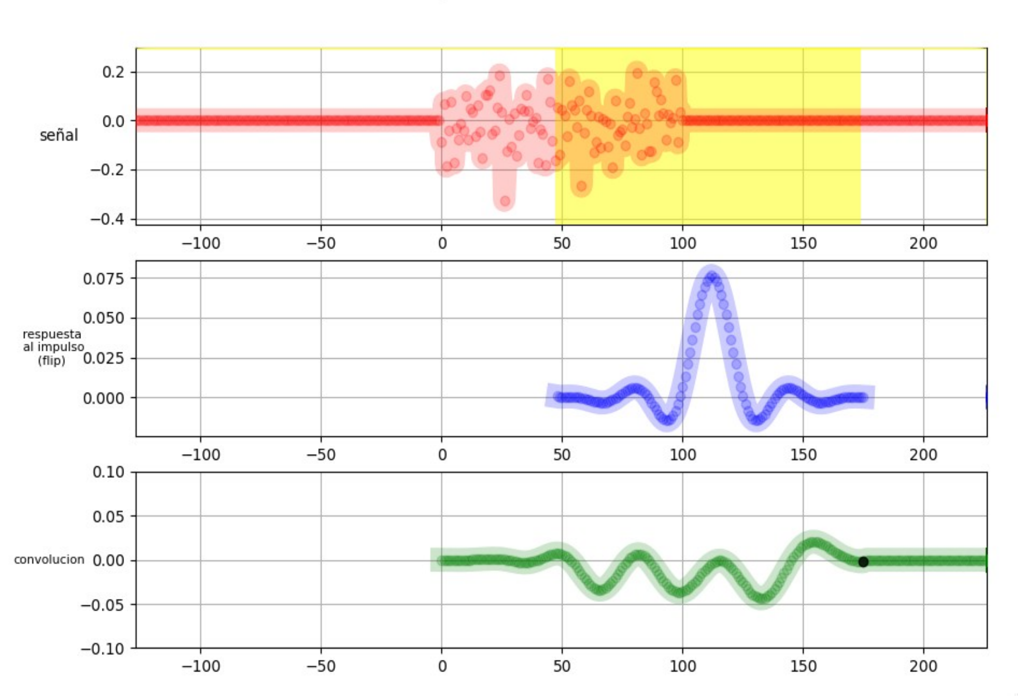
Procesamiento de señales. Fundamentos

Clase 5 – Respuesta al impulso | Convolución

- Respuesta al impulso
  - Repaso sistemas LTI
  - Descomposición en deltas
  - Repaso al impulso unitario
- Convolución
  - Input side
  - Output side
  - Multiplicación
  - Polinomios
- Teorema de la convolución
- Propiedades de la convolución
- Convolución con numpy
- Convolución con CMSIS-DSP



Impulso $\delta[n]$

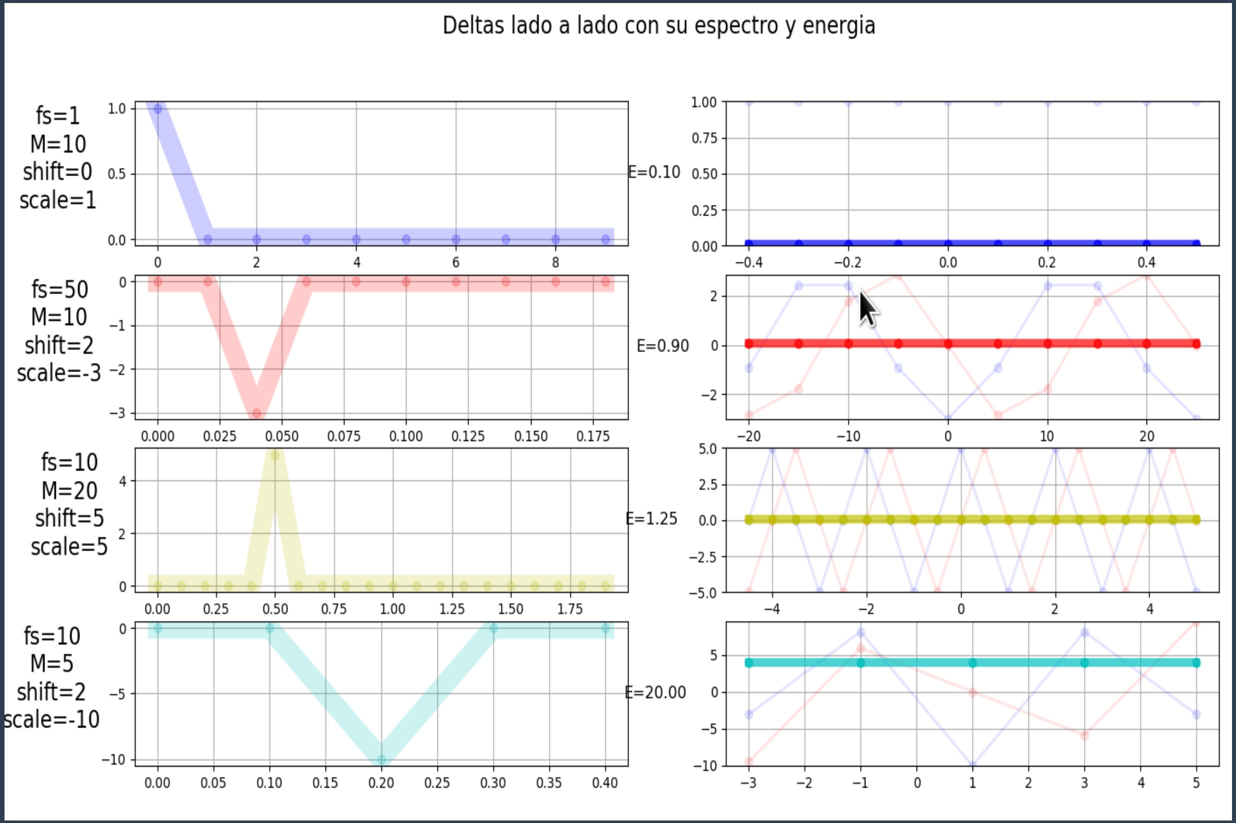
Impulso en la panza de Homero

- El impulso es una señal de cualquier forma pero de una duración ordenes de magnitud menor a la duración de la salida del sistema como consecuencia de este impulso.
- En un sistema LTI, si el impulso se demora, es mas fuerte o mas débil la respuesta es siempre la misma demorada y escalada los mismos factores que el propio impulso.
- En el video se puede ver como el golpe del medico es de una duración mucho menor que la consecuencia, y la medición del tiempo de esta salida parece ser un indicador del estado de Homero.

- Ver video: homero_panza.mp4

La función delta δ[n] (impulso unitario)

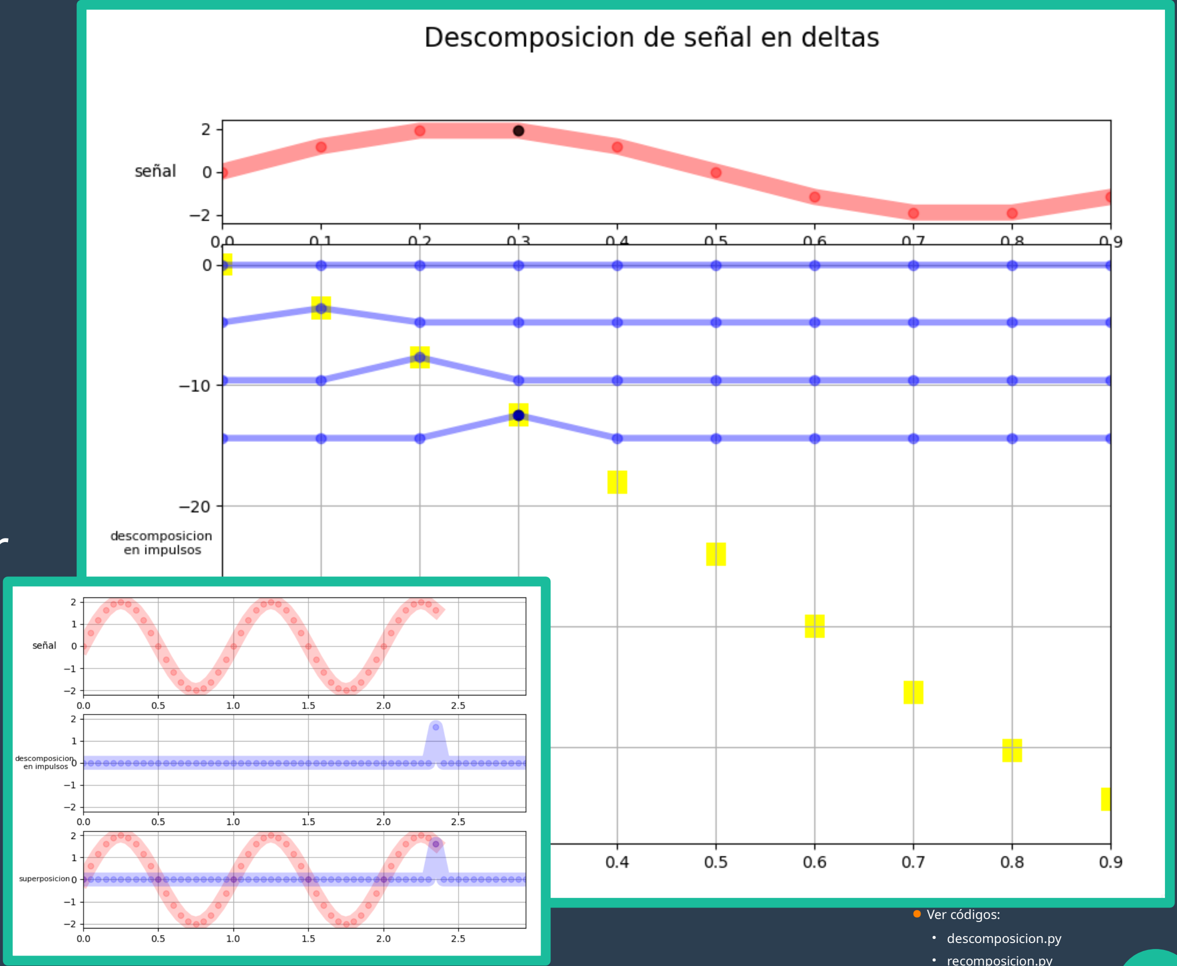
- δ [n]
  - 1 para n=0
  - 0 para n !=0
- A * δ [n-x]
  - A para n=x
  - 0 para n !=x
- El impulso normalizado tiene área 1
- El contenido espectral de una delta es una constante. Tiene todas las frecuencias con igual amplitud (aunque con diferente fase)



- Ver código: delta.py

Descomposición en deltas

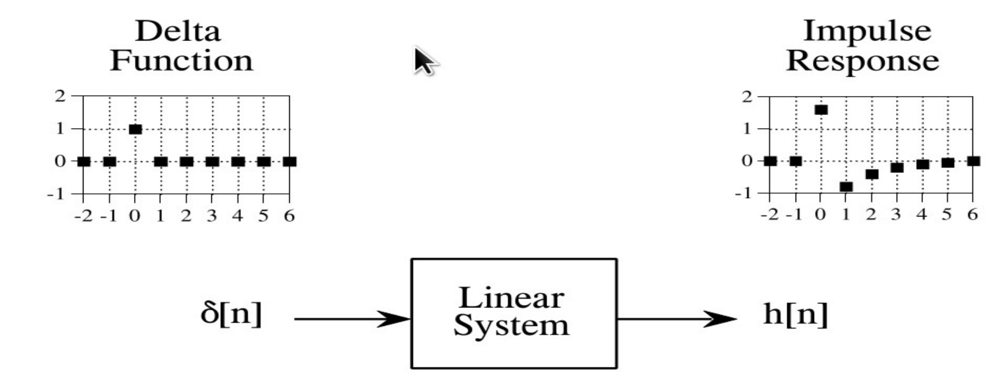
- Porque es importante la función delta?
- Porque se puede descomponer cualquier señal en sumatoria de deltas escaladas y shifteadas
- Si el sistema es LTI, podríamos calcular la respuesta a impulsos escalados y shifteados y superponer las respuestas de cada uno, o no?
- Así la respuesta de un sistema al impulso es todo lo que hace falta para conocer la respuesta del sistema a cualquier otra señal

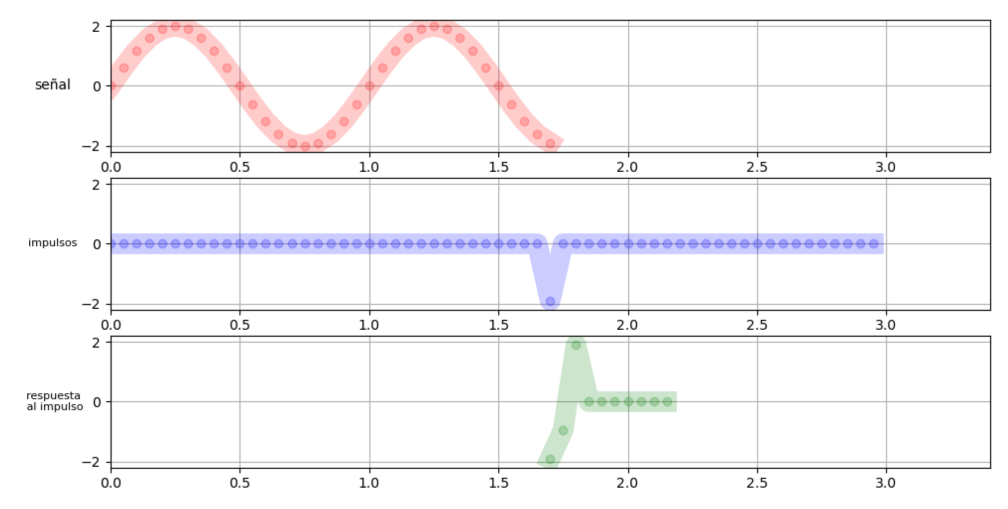


- Ver códigos:
  - descomposicion.py
  - recomposicion.py

La respuesta al impulso unitario

- La respuesta al impulso unitario de un sistema es una nueva señal que permite caracterizar completamente al sistema
- Permite ademas calcular la respuesta del sistema a cualquier otra señal de cualquier forma y amplitud
- Es una característica intrínseca de cada sistema
- Un sistema solo puede tener una y solo una respuesta al impulso unitario
- Notar que en el ultimo punto de la señal x[N-1], la respuesta al impulso se extiende en el tiempo exactamente el largo de la misma menos 1 unidad de tiempo
- Largo resultante = N + lengh(h) - 1



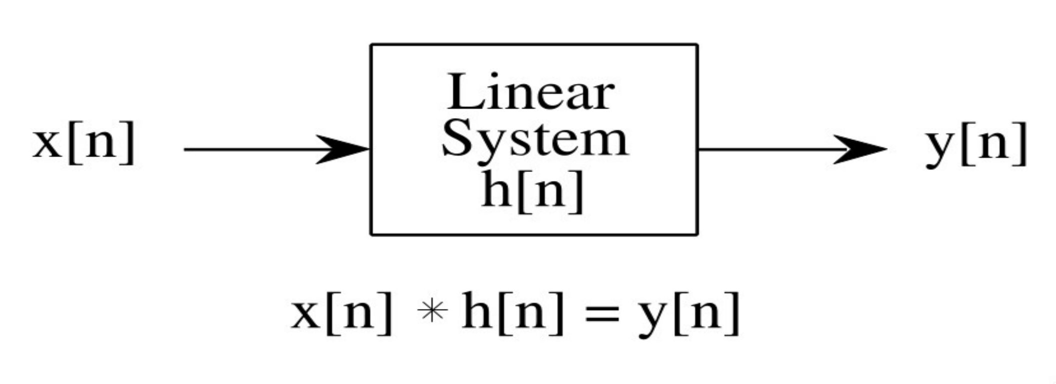


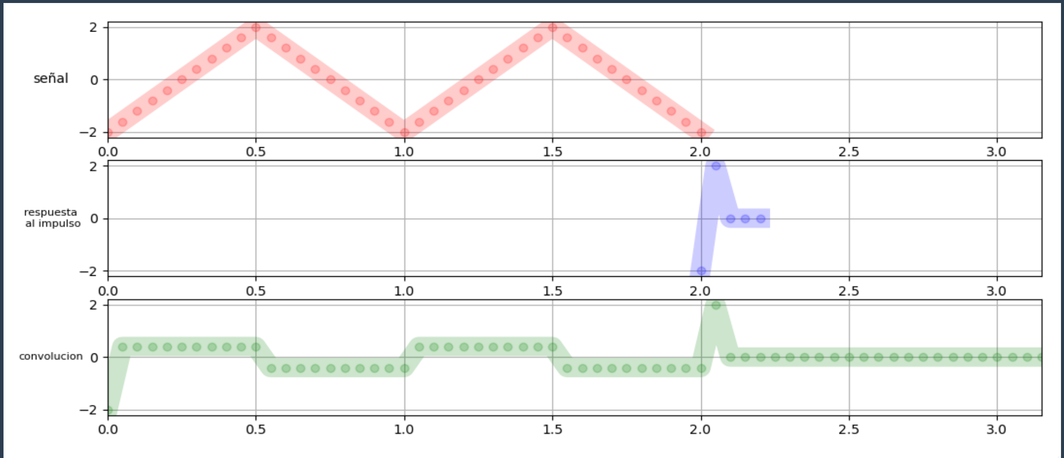
- Ver código: respuesta_impulsp.py

Convolución

Convolución

- Es una operación matemática, se simboliza con *
- Relaciona la señal de entrada, la de salida y la respuesta al impulso
- Como el sistema es LTI, puedo aplicar el principio de superposición y sumar la respuesta al impulso unitario de la descomposición en impulsos escalados y shifteados de la señal.
- Se obtiene la respuesta del sistema cuando la entrada es dicha señal.
- Dicha superposición **es la convolución entre la señal y la respuesta al impulso**



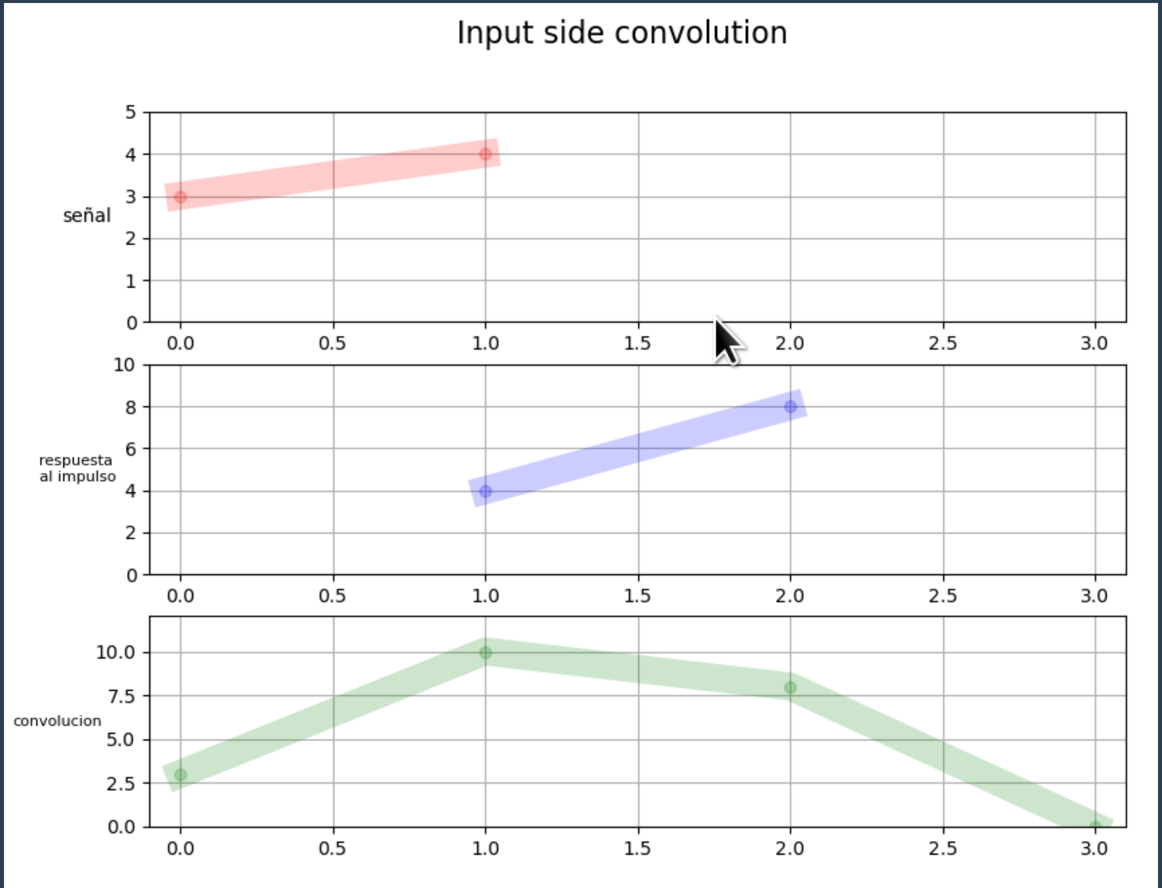


- Ver códigos: convolucion.py

Convolución – Input side

Convolución – Input side

- Para cada punto de entrada x[n], tomo la h[n] y acumulo en y[n:n+M-1]
- Cada punto de la entrada x[n] modifica varios puntos de la salida
- y[n]=x[n]*h[n]



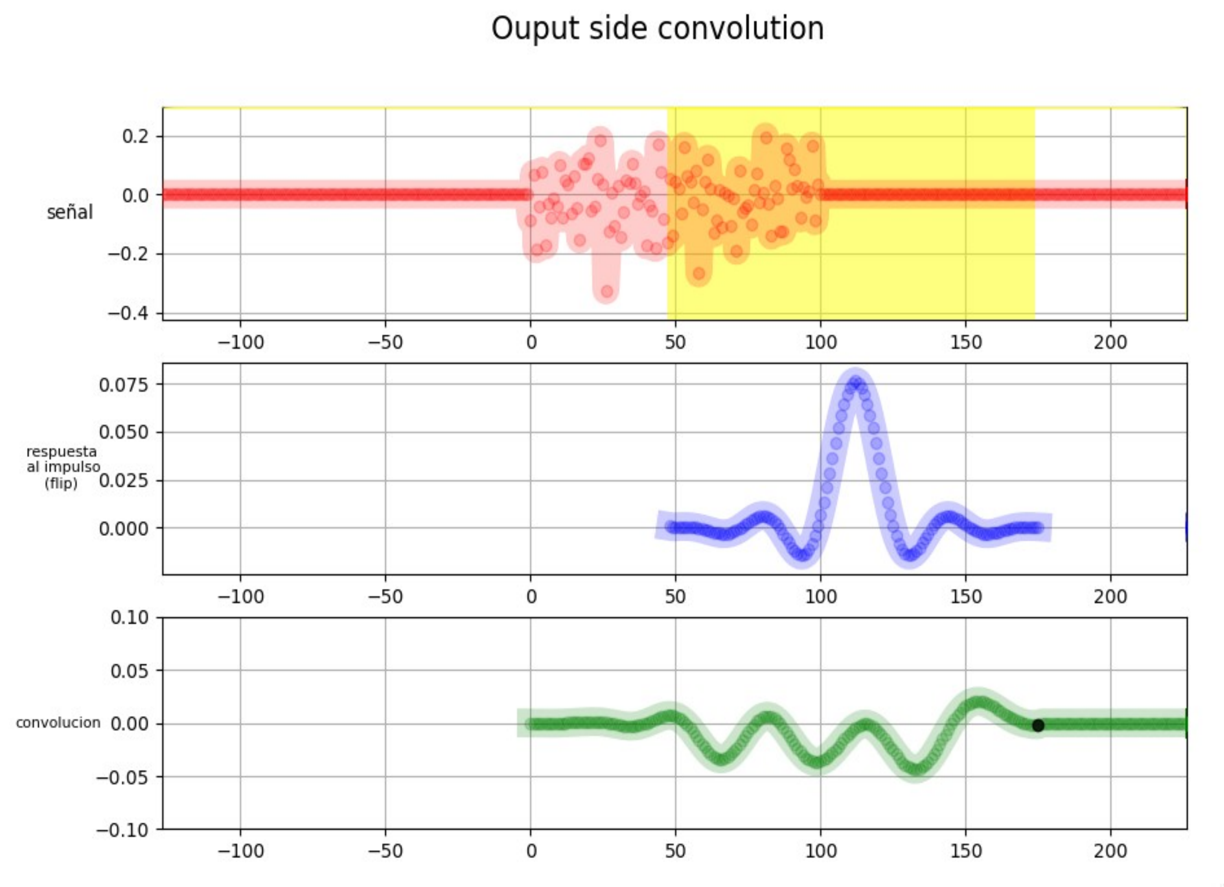
- Ver códigos: conv_input_side.py

Convolución – Output side

Convolución – Output side

- Para cada punto de la salida y[n], tomo la sumatoria de la multiplicación de los puntos que afectan a dicho y[n]
- Cada punto de la entrada x[n] modifica varios puntos de la salida desde n a n+M-1
- Como resultado la convolución se calcula como la sumatoria de la multiplicación de la señal con la respuesta al impulso invertida en tiempo:

$$y[i] = \sum_{j=0}^{M-1} h[j]\,x[i-j]$$



- Ver códigos: conv_output_side.py

Convolución vs Fourier

- Notan algún parecido con la transformada de Fourier ???
- Notan algún parecido con la anti-transformada de Fourier ???
- Al final del día, Fourier correlaciona una función circular con la señal.
- Notar que al avanzar k, el e^j... devuelve la siguiente posición del circulo que termina siendo un número (complejo), al igual que x [i – j]

$$y[i] = \sum_{j=0}^{M-1} h[j]\, x[i-j]$$

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j 2\pi k n / N}$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{j 2\pi k n / N}$$

Convolución – Como multiplicación

Convolución – Como multiplicación

- Recordar la técnica de multiplicación aprendida en primaria
- Considerar que
  - h[n] = [1 , 2]
  - x[n] = [3, 4]
- Suponer que tenemos infinitos símbolos, no solo 10 para representar el resultado, con lo que no hace falta acarreo
- Entran 2 números de 2 cifras y sale 1 de 3. (2 + 2 -1 = 3)
- y[n] = [3 , 10 , 8]

	1	2
	3	4
	4	8
3	6	0
3	10	8

Convolución – Multiplicación polinomial

Convolución – Producto de polinomios

- Considerar cada elemento de h[n] y x[n] como coeficientes de un polinomio.
- Multiplicar los 2 polinomios respetando exponentes
- Entran 2 vectores de 2 elementos y sale 1 de 3
- Notar la complejidad de la operación, los productos cruzados.
- Se puede ver que el grado del algoritmo computacional seria de O(2)

$$\left(1x10^1 + 2x10^0\right) * \left(3x10^1 + 4x10^0\right) =$$

$$\left(3x10^2 + 4x10^1 + 6x10^1 + 8x10^0\right) =$$

$$\left(3x10^2 + 10x10^1 + 8x10^0\right)$$

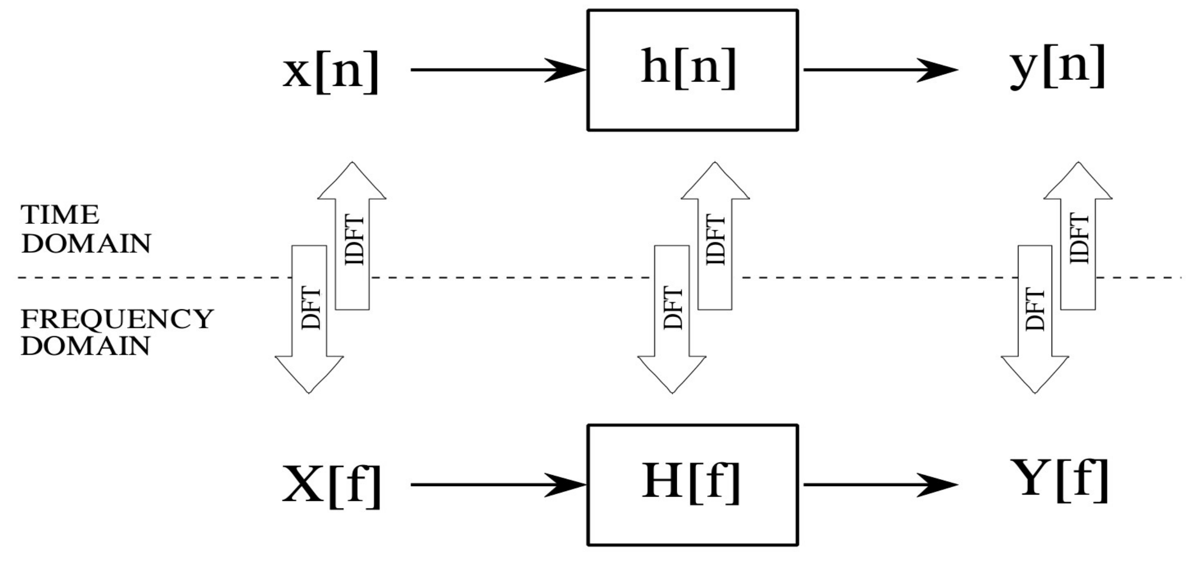
Teorema de convolución

Teorema de convolución

- La convolución de dos señales es equivalente a la antitransformada del producto de sus transformadas.
- La multiplicación de dos señales es equivalente a la antitranformada de la convolución de sus transformadas.
- Permite convertir la convolución en tiempo en una simple multiplicación en frecuencia.
- A partir de cierto numero de N (~64) realizar la convolución de esta manera (FFT/IDFT) es computacionalmente mas eficiente (en términos generales).
- Hay que prestar especial cuidado de que la cantidad de puntos de f y g sean menor que la cantidad de puntos utilizados para calcular la transformada.
- En caso contrario se rellena con ceros f y/o g para completar N.

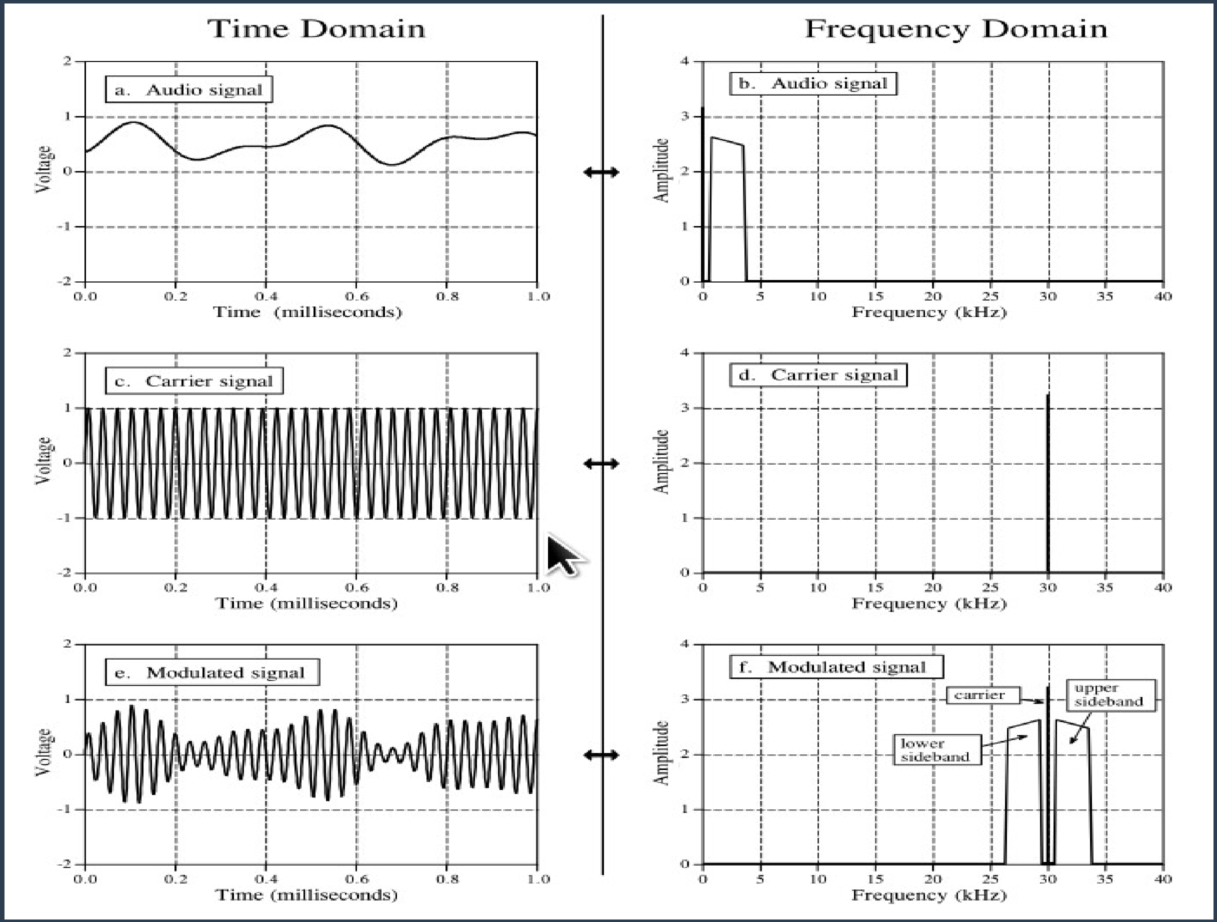
$$\{g_N * h\}[n] = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{g\} \cdot \mathcal{F}\{h\}\}$$

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{F}\{g\}$$
$$\mathcal{F}\{\alpha \cdot g\} = \mathcal{F}\{\alpha\} * \mathcal{F}\{g\}$$



Teorema de convolución – Ejemplo AM

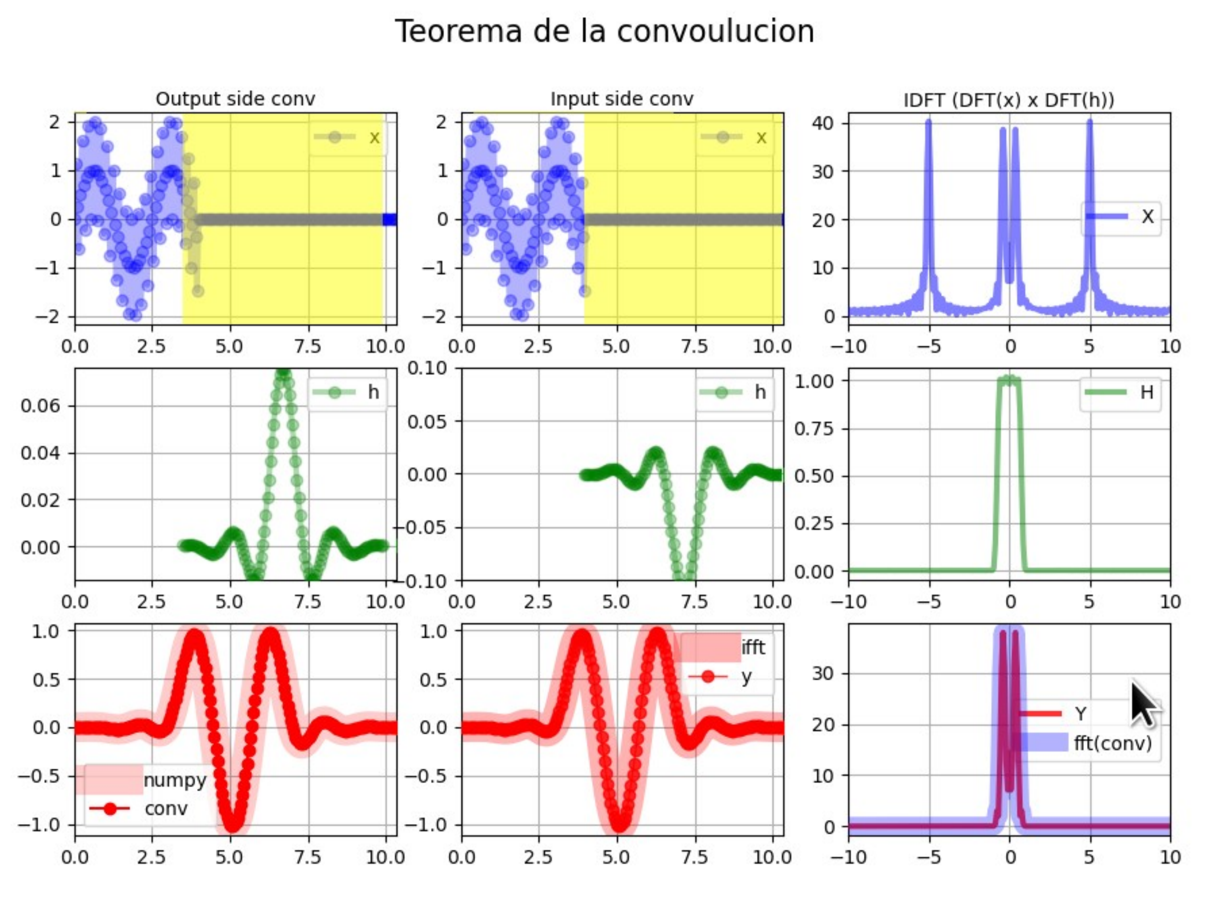
- Se puede ver en el caso de una modulación AM que implica multiplicar en t una portadora con la señal de interés
- Si se analiza en frecuencia se puede ver como la convolución en frecuencia revela las dos bandas, banda lateral inferior y superior (LSB y USB) a ambos lados de de la portadora.



Convolución con Numpy

Convolución con numpy

- Modulo np.fft
- Función np.fft.dft
- Función np.fft.idft
- Función np.convolve
- En el ejemplo se puede validar el teorema de la convolución dado que se compara:
  - Output side conv
  - Input side con
  - IDFT(FFT() x FFT())
  - FFT(input side conv)

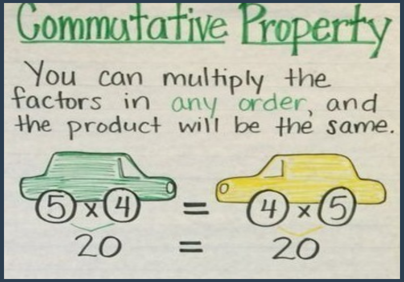


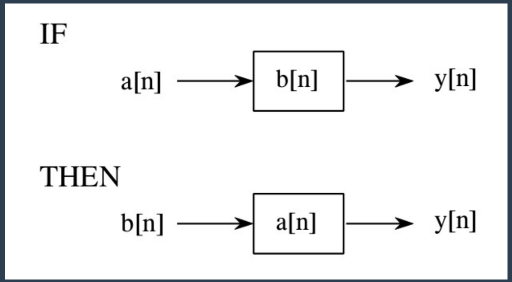
- Ver código: teorema_convolucion.py

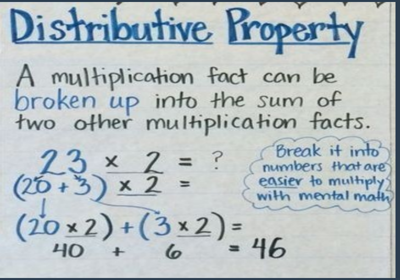
Convolución propiedades

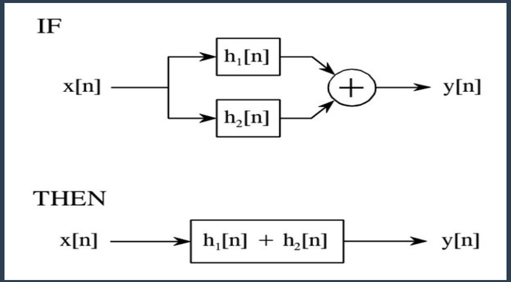
Propiedades de la convolución

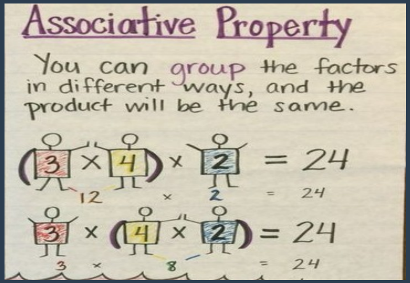
- Se destacan las propiedades matemáticas de la convolución
- Notar la similitud y correspondencia con las de la multiplicación extraídas del manual de primaria
- Notar las consecuencias que tienen estas propiedades a la hora de interconectar sistemas y señales y como aprovecharlas a la hora de codificar los algoritmos

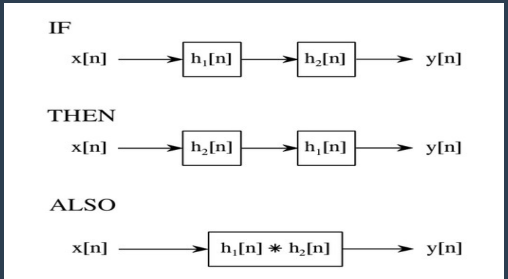












Convolución con la CMSIS-DSP

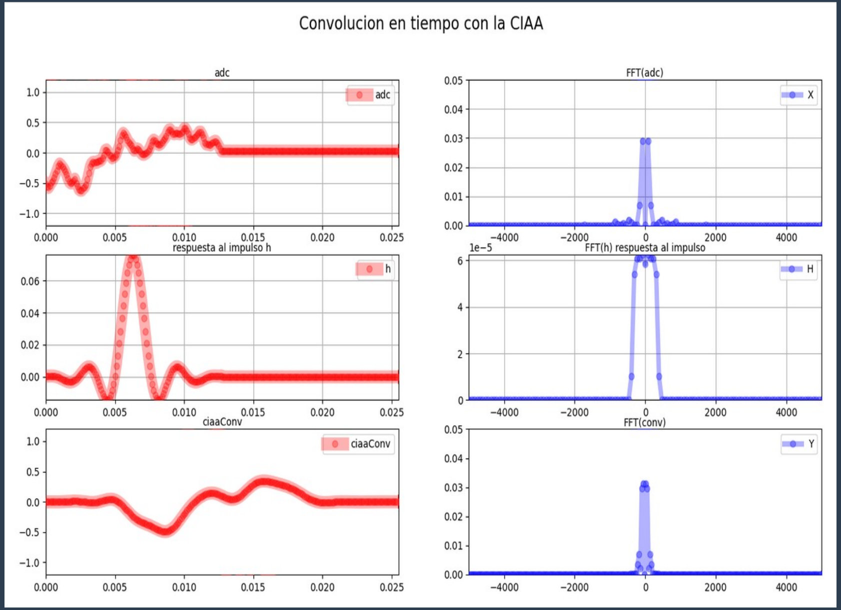
Convolución en la CIAA

- Calcula la convolución en tiempo usando arm_conv_q15 o arm_conv_fast_q15 (ver documentación)
- Se utilizar opcionalmente un conversor de npy a .h para generar el h a partir de una lista de python que a su vez luego se obtendrá de la plantilla de un filtro.
- Recordar que la convolución de N con M genera N+M-1 datos. Reservar espacio en memoria para el arreglo resultante "y".
- Observar la zona útil de la convolución.

```
   if ( ++sample==header.N ) {
      gpioToggle ( LEDR );                          // este led
      sample = 0;

------------CONVOLUCION-----------------
      arm_conv_q15       ( adc,header.N,h,h_LENGTH,y);
      arm_conv_fast_q15  ( adc,header.N,h,h_LENGTH,y);

-----------ENVIO DE TRAMA-----------------
      header.id++;
      uartWriteByteArray ( UART_USB ,(uint8_t*)&header ,sizeof
      for (int i=0;i<(header.N+h_LENGTH-1 );i++) {
         uartWriteByteArray ( UART_USB ,(uint8_t* )(i<header.N
         uartWriteByteArray ( UART_USB ,(uint8_t* )(i<h_LENGTH
         uartWriteByteArray ( UART_USB ,(uint8_t* )(
      }
      adcRead(CH1); //why?? hay algun efecto minimo en el 1er
   }
```



- Ver carpeta clase5/psf1