



Université de Nouakchott
Faculté des Sciences et Techniques

Filière :
Statistiques et Sciences des Données

Projet SSD

Sous le thème :

Débruitage d'images par régularisation L1 et “ISTA”
(précis et académique)

Réalisé par :

Saad Bouh Aboubakar Hamar(C19871)

Encadrant :

Dr. EL BENANY MED MAHMOUD

Année Universitaire : 2025–2026

Table des matières

1	Introduction	3
2	Fondements théoriques	4
2.1	Régularisation ℓ_1 et parcimonie	4
2.2	Soft-thresholding	4
3	TP1 : ISTA pour le Lasso	4
3.1	Données synthétiques	4
3.2	Algorithme	4
3.3	Résultats et analyse	4
4	TP2 : ISTA pour le débruitage d'images	4
4.1	Dataset	4
4.2	Algorithme ISTA pour le débruitage	5
4.3	Résultats	5
4.4	Analyse	5
5	Conclusion générale	5
6	Références	5

1 Introduction

L'algorithme ISTA (*Iterative Soft-Thresholding Algorithm*) est un outil fondamental pour résoudre des problèmes d'optimisation avec régularisation ℓ_1 . Il est largement utilisé dans deux contextes principaux :

- La régression parcimonieuse (**Lasso**), pour sélectionner un petit nombre de variables explicatives.
- Le débruitage d'images, où la parcimonie des coefficients permet de réduire le bruit tout en conservant les détails.

Ce rapport présente deux TP distincts :

1. TP1 : ISTA appliqué à des données synthétiques pour la régression Lasso.
2. TP2 : ISTA appliqué au débruitage d'une image de visage (dataset Olivetti Faces).

2 Fondements théoriques

2.1 Régularisation ℓ_1 et parcimonie

La régularisation ℓ_1 favorise la parcimonie des solutions, c'est-à-dire que beaucoup de coefficients deviennent exactement nuls. La fonction objectif générale pour un problème régularisé ℓ_1 est :

$$\min_w f(w) + \lambda \|w\|_1$$

où $f(w)$ est la fonction de perte (quadratique dans nos TP) et $\lambda > 0$ contrôle l'importance de la régularisation.

2.2 Soft-thresholding

Le cœur de l'algorithme ISTA est l'opérateur de **soft-thresholding** :

$$\text{SoftThreshold}(v, \gamma) = \text{sign}(v) \cdot \max(|v| - \gamma, 0)$$

Il réduit les petites valeurs vers zéro, supprimant le bruit ou les coefficients faibles, tout en conservant les valeurs importantes.

3 TP1 : ISTA pour le Lasso

3.1 Données synthétiques

- $n = 100$ observations et $d = 50$ variables.
- Vecteur de coefficients w_{true} avec $k = 5$ coefficients non nuls.
- Sortie $y = Xw_{\text{true}} + \epsilon$, avec $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$

3.2 Algorithme

- Calcul du gradient : $\nabla f(w) = \frac{1}{n}X^\top(Xw - y)$
- Détermination de la constante de Lipschitz : $L = \frac{1}{n}\lambda_{\max}(X^\top X)$
- Boucle ISTA :
$$w^{(k+1)} = \text{SoftThreshold}\left(w^{(k)} - \frac{1}{L}\nabla f(w^{(k)}), \frac{\lambda}{L}\right)$$
- Suivi de la fonction objectif à chaque itération pour observer la convergence.

3.3 Résultats et analyse

- La fonction objectif décroît rapidement et converge.
- Les coefficients estimés sont majoritairement nuls, illustrant la parcimonie.
- Le choix de λ influence directement le nombre de coefficients non nuls.

4 TP2 : ISTA pour le débruitage d'images

4.1 Dataset

Nous utilisons le dataset **Olivetti Faces** (400 images de visages en niveaux de gris, 64×64 pixels). Pour ce TP, nous sélectionnons la première image et lui ajoutons un bruit gaussien ($\sigma = 0.2$).

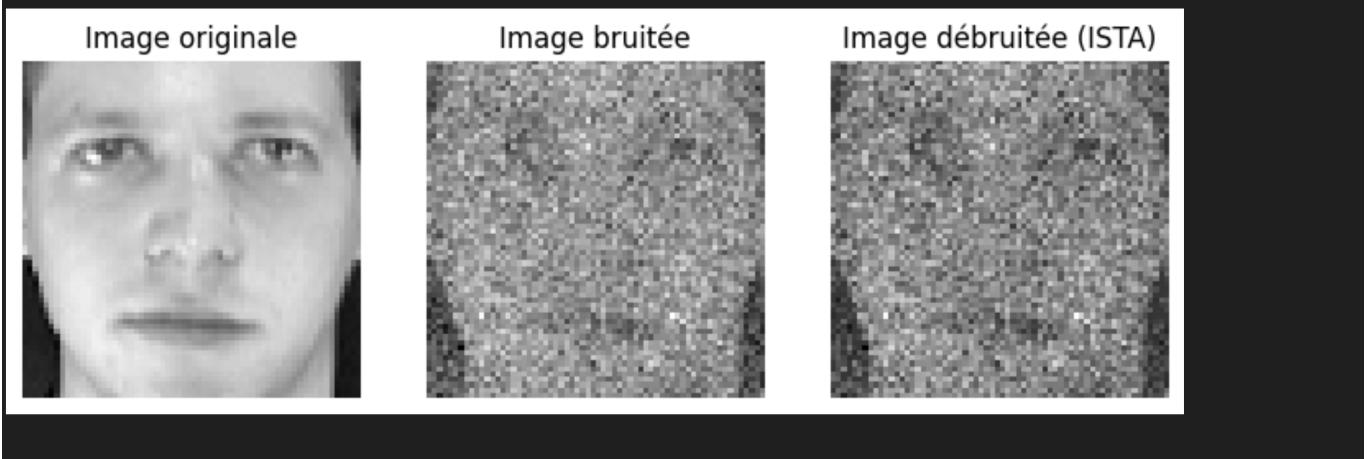


FIGURE 1 – Résultats du débruitage pour TP2

4.2 Algorithme ISTA pour le débruitage

La fonction objectif pour le débruitage est :

$$\min_w \frac{1}{2} \|w - y\|_2^2 + \lambda \|w\|_1$$

avec le gradient $\nabla f(w) = w - y$. La mise à jour ISTA est :

$$w^{(k+1)} = \text{SoftThreshold}(w^{(k)} - \nabla f(w^{(k)}), \lambda)$$

4.3 Résultats

L'image débruitée conserve les contours et réduit significativement le bruit.

4.4 Analyse

- L'algorithme ISTA est simple et efficace pour le débruitage.
- La valeur de λ contrôle le compromis entre suppression du bruit et préservation des détails.
- Des améliorations possibles : utiliser FISTA ou des transformations sparsifiantes (ondelettes) pour un meilleur débruitage.

5 Conclusion générale

Les deux TP illustrent l'efficacité de l'algorithme ISTA dans des contextes différents :

- TP1 : récupération d'un vecteur parcimonieux dans le Lasso.
- TP2 : débruitage d'image en exploitant la parcimonie des coefficients.

Dans les deux cas, le **soft-thresholding** joue un rôle central pour imposer la sparsité. Ces TP démontrent comment une même méthodologie peut s'appliquer à des problèmes linéaires et de traitement d'images.

6 Références

1. Beck, A., & Teboulle, M. (2009). A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2(1), 183–202.

2. Hastie, T., Tibshirani, R., & Wainwright, M. (2015). Statistical Learning with Sparsity. CRC Press.
3. Scikit-learn Documentation : https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.datasets.fetch_olivetti_faces.html