TP PageRank

Aymane El Otmani
Saad Ztouti

January 2023

1 Travail Préparatoire

2-1)
on a $\forall x \in R^*, f(x) = \frac{1}{2}\|Mx - x\|^2 + \frac{\gamma}{2}(e^T x - 1)^2$
$tel\ que\ e = ((1, ..., 1)\ et\ \gamma > 0\ et\ M \in Mn(R)$
1)
Le premier terme de la fonction est

$$\frac{1}{2}\left|Mx - x\right|^2$$

Le gradient de ce terme est: $(Mx - x) * (M - I)^T$
Le deuxième terme de la fonction est

$$\frac{\gamma}{2}(e^T x - 1)^2$$

Le gradient de ce terme est: $\gamma e(e^T x - 1)$
Pour trouver le gradient global de f(x) par rapport à x, on additionne simplement les gradients des deux termes ensemble:

$$\nabla f(x) = (Mx - x) * (M - I)^T + \gamma e(e^T x - 1)$$

2)
$||\nabla f(b) - \nabla f(a)|| = ||(M - I) * (M - I)^T * (b - a) + \gamma e * e^T (b - a)||$
$||\nabla f(b) - \nabla f(a)|| \leq ||(M - I) * (M - I)^T|| * ||b - a|| + ||\gamma e * e^T|| * ||(b - a)||$
$||\nabla f(b) - \nabla f(a)|| \leq ||(M - I)^T * (M - I)|| + \gamma||e|| * ||e^T||) * ||b - a||$
$e = (1, .., 1)$n fois 1. Par conséquent sa norme est egale à $\sqrt{n}$
M est une matrice stochastique donc $\|M\| \leq 1$
$\|M - I\| \leq \|M\| + \|I\| \leq 2$ $||(M - I)^T * (M - I)|| \leq 4$
(Parceque la norme euclidienne de la transposée d'une matrice N est la même que la matrice N)
$||(M - I)^T * (M - I)|| + \gamma||e|| * ||e^T||) * ||b - a|| \leq (4 + n * \gamma)||b - a||$
$Donc\ ||\nabla f(b) - \nabla f(a)|| \leq (4 + n * \gamma)||b - a||$
Donc

$$\beta = \gamma * n + 4$$