Hypothesis testing on one parameter
Test d'hypothèse sur un paramètre

Advanced Statistical Analysis

Feryal WINDAL

Introduction

Ces tests répondent essentiellement à la question suivante :

These tests essentially answer the following question:

Ces observations ont-elles réellement eu lieu par hasard ?

Did these observations really happen by chance?

governments

companies

sociology

Pharmaceutical laboratory

Medical research

Illustration in the justice field

➡Plusieurs jugements ont été remis en cause dans le sud des USA entre 1960 et 1980. Des témoins experts présentèrent des de biais radicaux dans la sélection du jury.

➡Several judgments were challenged in the southern United States between 1960 and 1980. Expert witnesses presented radical biases in the selection of the jury.

➡Les panels de jurés sont théoriquement composés aléatoirement à partir d'une liste de citoyens éligibles. Cependant, dans les USA du sud des années (50-60, il n'y avait que peu d'Afro-Américains dans ces jurys).

➡Jury panels are theoretically composed at random from a list of eligible citizens. However, in the southern US of the years (50-60s, there were few African Americans on those juries).

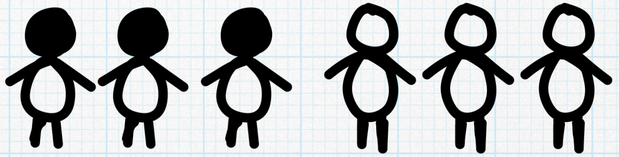
➡Certains avocats contestent donc le verdict. En appel, un témoin expert en statistique fournit cette preuve

➡Some lawyers therefore dispute the verdict. On appeal, a statistical expert witness provides this evidence

Illustration in the justice field

➡50% des citoyens éligibles étaient Afro-Américains

➡50% of eligible citizens were African-Americans



➡Sur un panel de 80 jurés potentiels, seulement 4 étaient Afro-américains

➡Out of a panel of 80 potential jurors, only 4 were African-American

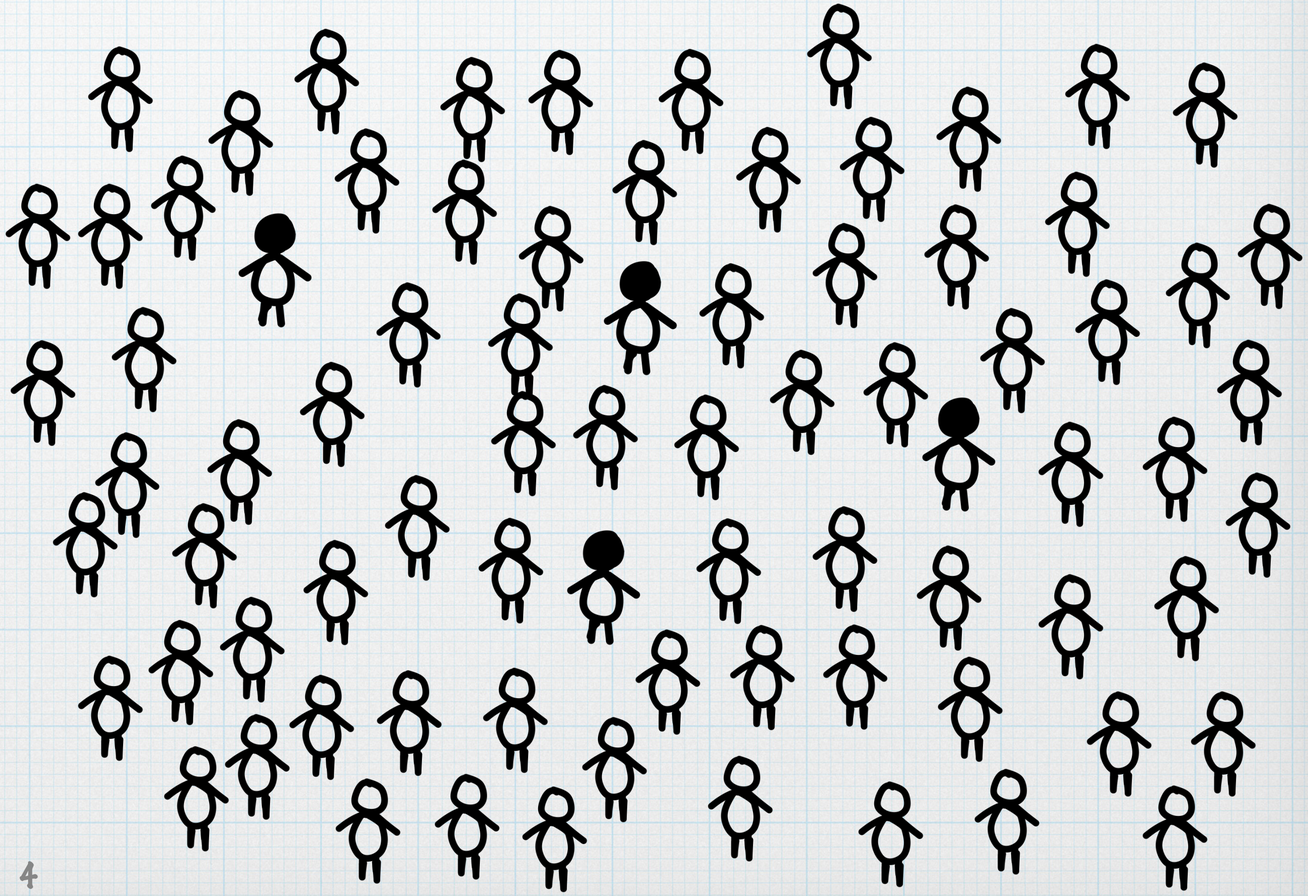


Illustration in the justice field

➡Supposons que la sélection parmi les jurés potentiels soit aléatoire.

➡Suppose the selection from among the potential jurors is random.

➡Le nombre d'Afro-américains sur un panel de 80 personnes sera une variable aléatoire X avec $n = 80$ tirages et $p = \frac{1}{2}$

➡The number of African Americans in a panel of 80 people will be a random variable X with $n = 80$ draws and $p = \frac{1}{2}$

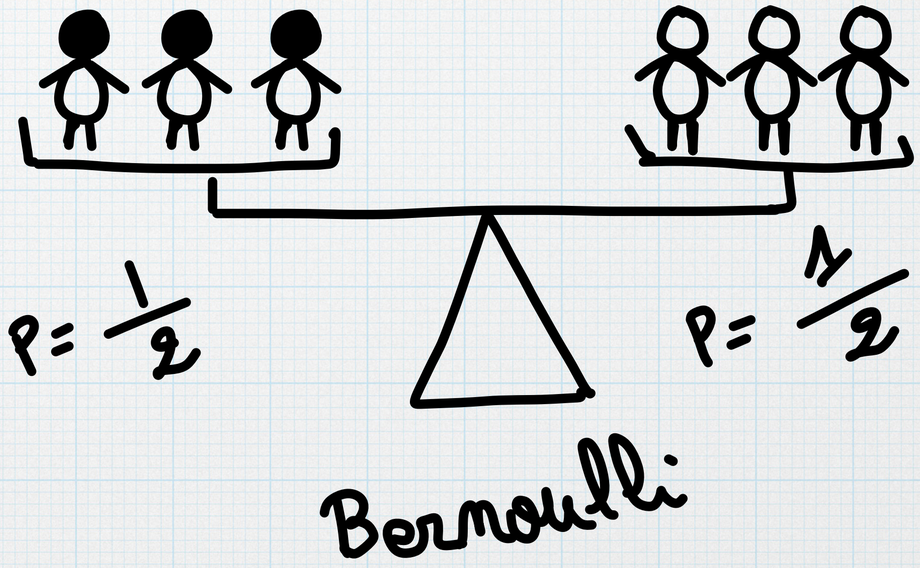
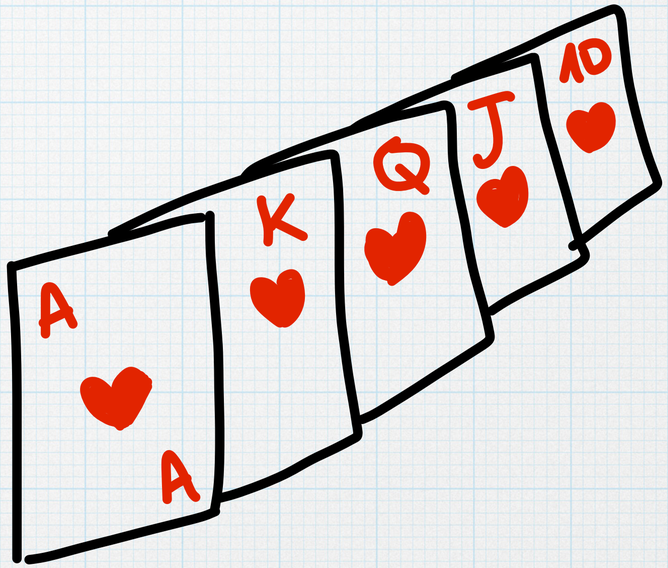


Illustration in the justice field

➡La proba d'obtenir un jury de moins de 4 Afro-américains est de

➡The probability of getting a jury of less than 4 African Americans is

$$\mathbb{P}(X \leq 4) = 0{,}000000000000000014 = 1{,}4 \times 10^{-18}$$



➡Cette probabilité est plus faible que celle d'obtenir un trois quintes flush royales consécutives au poker !!

➡This probability is lower than that of obtaining a three consecutive royal flush in poker !!

We have a better chance of winning the lotto !!

The hypothesis testing steps

Nous allons présenter 5 étapes permettant de réaliser un test d'hypothèses:

1. La formulation des hypothèses
2. Le choix du seuil de significativité du test
3. La définition de la région d'acceptation et de la région de rejet
4. Le calcul de la statistique de test (rapport critique)
5. La règle de décision.

We will present 5 steps to perform a hypothesis test:

1. Formulation of hypotheses
2. The significance threshold test choice
3. The definition of the acceptance region and the rejection region
4. The statistic test calculation (critical report)
5. The decision rule.

1. Formulation of hypotheses

- Dans cette première étape de formulation des hypothèses, il s'agit de spécifier la valeur présumée ou attendue du paramètre avant de procéder à l'échantillonnage.
- L'hypothèse nulle, notée H_0, exprime cette valeur
- L'hypothèse alternative, notée H_1, fait état de l'ensemble ou d'une partie seulement des négations envisageables de l'hypothèse nulle.

- In this first step of the hypotheses formulating, it is a matter to specify the presumed or expected value of the parameter before proceeding to the sampling.
- The null hypothesis, denoted by H_0, expresses this value.
- The alternative hypothesis, denoted by H_1, reports all or only some of the possible negations of the null hypothesis.

1. Formulation of hypotheses

- H_0: L'hypothèse nulle est généralement que les observations sont strictement le résultat du hasard.
- H_1: L'hypothèse alternative indique qu'il y a un effet réel, que les observations sont le résultat de cet effet et d'une composante aléatoire.

- H_0: Stipule que le jury était choisi au hasard dans la population globale. Les Afro-américains ont une probabilité $p = 0{,}5$ d'être choisis.
- H_1:Stipule que les afro- américains sont moins sélectionnés dans les jurys que leur proportion dans la population : $p < 0{,}5$

- H_0: The null hypothesis is generally that the observations are strictly the result of chance.
- H_1: The alternative hypothesis indicates that there is a real effect, that the observations are the result of that effect and a random component.

- H_0: Stipulates that the jury was chosen at random from the global population. African Americans have a probability $p = 0{,}5$ of being chosen.
- H_1: Stipule que les afro- américains sont moins sélectionnés dans les jurys que leur proportion dans la population : $p < 0{,}5$

1. Formulation of hypotheses

De façon générale, le test est composé des hypothèses suivantes :

In general, the test is made up of the following assumptions:

- Pour un pourcentage
- For a percentage

$$\begin{cases} H_0 : p = p_{H_0} \\ H_1 : p \neq p_{H_0} \end{cases} \quad \begin{cases} H_0 : p = p_{H_0} \\ H_1 : p < p_{H_0} \end{cases} \quad \begin{cases} H_0 : p = p_{H_0} \\ H_1 : p > p_{H_0} \end{cases}$$

- Pour une moyenne
- For an average

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_{H_0} \\ H_1 : \mu \neq \mu_{H_0} \end{cases} \quad \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_{H_0} \\ H_1 : \mu < \mu_{H_0} \end{cases} \quad \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_{H_0} \\ H_1 : \mu > \mu_{H_0} \end{cases}$$

Two-tailed test

One-sided test

2. The significance threshold test choice

➡Le seuil de significativité détermine la taille maximale de l'écart tolérable entre la valeur échantillonnale obtenue et la valeur attendue du paramètre étudié.

➡Le seuil de significativité, ou risque α, ou encore risque de première espèce exprime le risque de rejeter l'hypothèse nulle du test alors-même que cette dernière est vraie. En d'autres termes, le risque α exprime la probabilité de rejeter à tort l'hypothèse nulle du test.

➡The significance threshold determines the maximum size of the tolerable difference between the sample value obtained and the expected value of the parameter studied.

➡The significance threshold, or risk α, or even risk of the first kind expresses the risk of rejecting the null hypothesis of the test even though the latter is true. In other words, the risk α expresses the probability of wrongly rejecting the null hypothesis of the test.

3. The definition of the acceptance region and the rejection region

➡Au seuil de signification déterminé à la 2e étape, on identifie la valeur critique (test unilatéral) ou les valeurs critiques (test bilatéral) permettant de délimiter la région d'acceptation et la région de rejet de l'hypothèse nulle.

➡At the significance level determined in step 2, we identify the critical value (one-sided test) or the critical values (two-tailed test) to define the acceptance region and the rejection region of the null hypothesis.

➡La recherche de ces valeurs aboutit à l'identification des mêmes valeurs que celles utilisées dans l'estimation d'un paramètre par intervalle :

★si σ est connu, les valeurs sont à chercher dans la table de la distribution de probabilités normale

➡The search for these values leads to the identification of the same values as those used in the estimation of a parameter by interval :

★if σ is known, the values are to be found in the table of the normal probability distribution

3. The definition of the acceptance region and the rejection region

➡La recherche de ces valeurs aboutit à l'identification des mêmes valeurs que celles utilisées dans l'estimation d'un paramètre par intervalle :

★si σ n'est pas connu

- Les valeurs sont à chercher dans la table de la distribution de probabilités normale si la taille de l'échantillon utilisé est supérieure ou égale à 30
- Dans la table de la distribution de probabilités de Student si la taille de l'échantillon utilisé est inférieure à 30.

➡The search for these values leads to the identification of the same values as those used in the estimation of a parameter by interval :

★if σ is unknown,

- The values are to be found in the table of the normal probability distribution if the size of the sample used is greater than or equal to 30
- In the Student's probability distribution table if the sample size used is less than 30.

3. The definition of the acceptance region and the rejection region

➡Les valeurs identifiées dans la table de la distribution de probabilités normale ou de Student pour un seuil de significativité α sont les mêmes que celles retenues dans le chapitre précédent pour un niveau de confiance $1 - \alpha$.

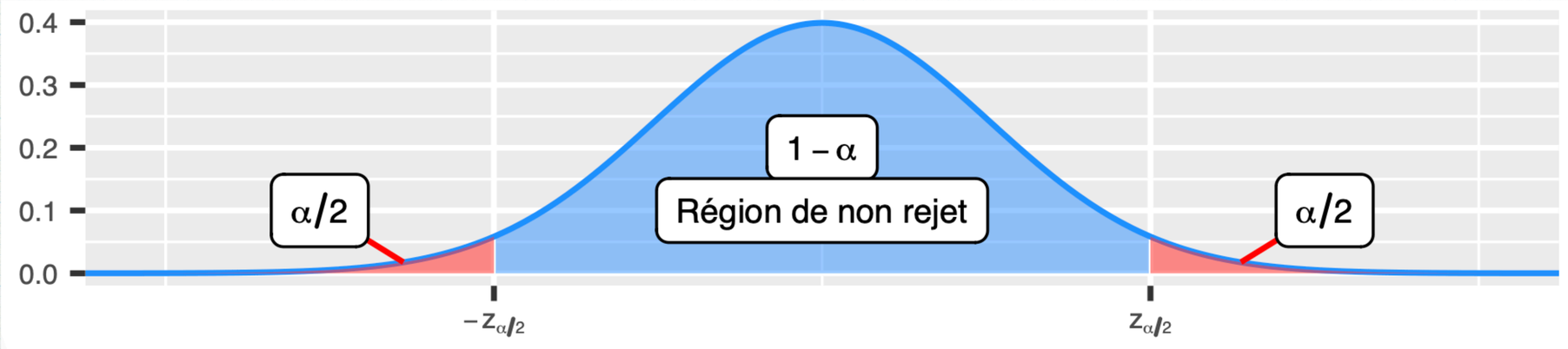
➡The values identified in the table of the normal or Student probability distribution for a significance level α are the same as those used in the previous chapter for a confidence level $1 - \alpha$

3. The definition of the acceptance region and the rejection region

Two-tailed test $\begin{cases} H_0 : p = p_{H_0} \\ H_1 : p \neq p_{H_0} \end{cases}$ $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_{H_0} \\ H_1 : \mu \neq \mu_{H_0} \end{cases}$

➡La "région d'acceptation", ou plus précisément de non-rejet de l'hypothèse nulle est bornée par $-z_{\alpha/2}$ et $z_{\alpha/2}$ (ou $-t_{\alpha/2}$ et $t_{\alpha/2}$ dans une table de Student).

➡The "acceptance region", or more precisely non-rejection region of the null hypothesis is bounded by $-z_{\alpha/2}$ and $z_{\alpha/2}$ (or $-t_{\alpha/2}$ and $t_{\alpha/2}$ in a Student table).



The rejection region is evenly distributed to the left and right of the non-rejection region

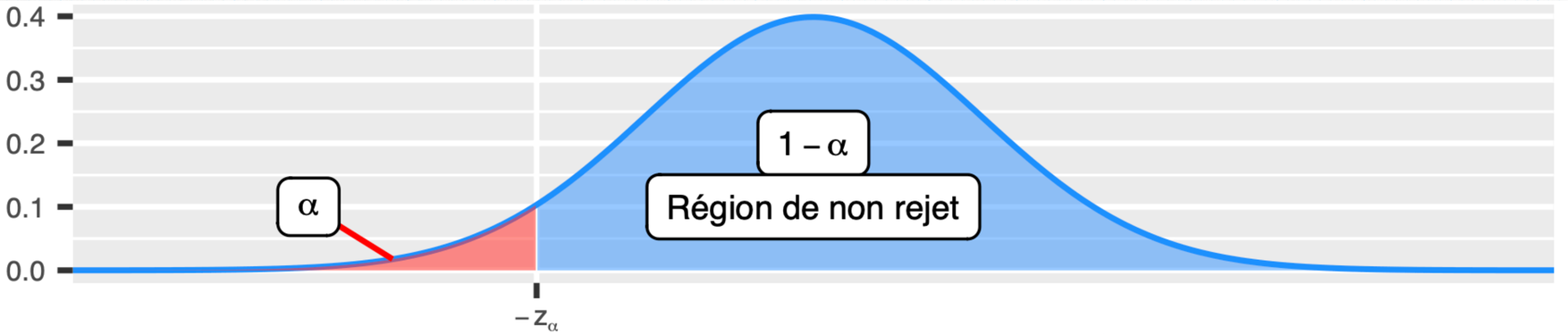
If $\alpha = 5\,\%$, AR $= [-1{,}96; 1{,}96]$ (In Strudent's table for 20 fd for example, AR $= [-2{,}086; 2{,}086]$)

3. The definition of the acceptance region and the rejection region

One-sided test $\begin{cases} H_0 : p = p_{H_0} \\ H_1 : p < p_{H_0} \end{cases}$ $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_{H_0} \\ H_1 : \mu < \mu_{H_0} \end{cases}$

➡La "région d'acceptation", ou plus précisément de non-rejet de l'hypothèse nulle est bornée par $-z_\alpha$ (ou $-t_\alpha$ dans une table de Student).

➡The "acceptance region", or more precisely non-rejection region of the null hypothesis is bounded by $-z_\alpha$ (or $-t_\alpha$ in a Student table).



The rejection region is concentrated to the left of the non-rejection region.

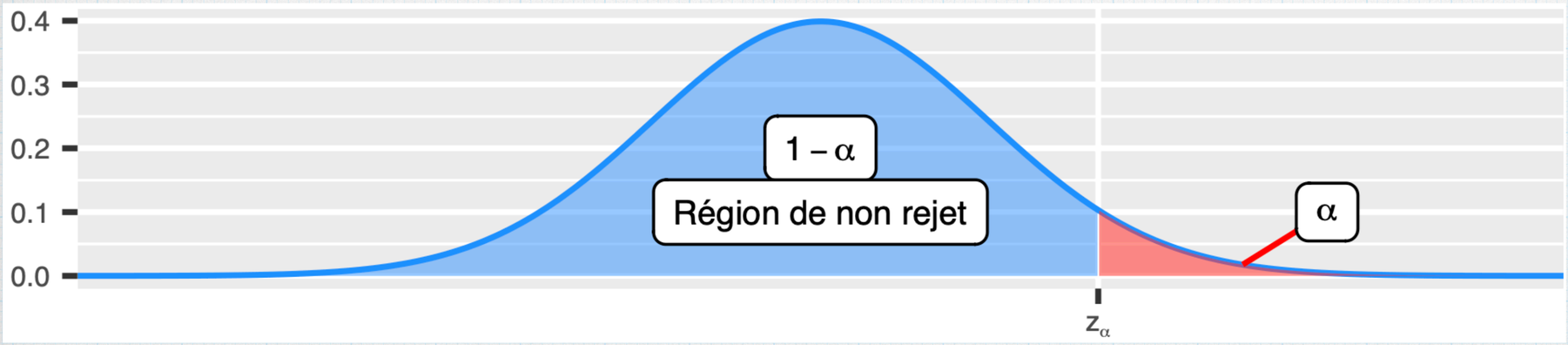
If $\alpha = 5\,\%$, AR $= [-1{,}64; +\infty[$ (In Strudent's table for 20 fd for example, AR $= [-1{,}725; +\infty[$)

3. The definition of the acceptance region and the rejection region

One-sided test $\begin{cases} H_0 : p = p_{H_0} \\ H_1 : p > p_{H_0} \end{cases}$ $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_{H_0} \\ H_1 : \mu > \mu_{H_0} \end{cases}$

➡La "région d'acceptation", ou plus précisément de non-rejet de l'hypothèse nulle est bornée par $+z_\alpha$ (ou $+t_\alpha$ dans une table de Student).

➡The "acceptance region", or more precisely non-rejection region of the null hypothesis is bounded by $+z_\alpha$ (or $+t_\alpha$ in a Student table).



The rejection region is concentrated to the right of the non-rejection region.

If $\alpha = 5\,\%$, AR $=]-\infty; +1{,}64]$ (In Strudent's table for 20 fd for example, AR $=]-\infty; +1{,}725]$)

4. The statistic test calculation (critical report)

Le rapport critique, c'est-à-dire la statistique de test s'écrit :

The critical report CR, i.e. the test statistic is written:

★pour un test portant sur une moyenne :

★for an average test:

➡quand σ est connu

➡when σ is known

$$CR = \frac{\overline{X} - \mu_{H_0}}{\sigma_{\overline{X}}}, \text{ with } \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

➡quand σ est inconnu

➡when σ is unknown

$$CR = \frac{\overline{X} - \mu_{H_0}}{\hat{\sigma}_{\overline{X}}}, \text{ with } \hat{\sigma}_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

★pour un test portant sur un pourcentage:

★for a pourcentage test:

$$CR = \frac{F - p_{H_0}}{\sigma_F}, \text{ with } \sigma_F = \sqrt{\frac{p_{H_0}(1-p_{H_0})}{n-1}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

5. The decision rule.

Il reste alors, en fonction de la valeur de la statistique que l'on observe, soit en fonction de la valeur du rapport critique, à prendre une décision :

It then remains, depending on the value of the statistic observed, or depending on the value of the critical report, to make a decision:

★si $CR \in AR$, alors l'hypothèse nulle du test ne peut pas être rejetée : au seuil de significativité retenue, les résultats échantillonnaux ne permettent pas de rejeter l'hypothèse nulle en faveur de l'hypothèse alternative.

★if $CR \in AR$, then the null hypothesis of the test cannot be rejected: at the significance level selected, the sample results do not allow the null hypothesis to be rejected in favor of the alternative hypothesis.

5. The decision rule.

Il reste alors, en fonction de la valeur de la statistique que l'on observe, soit en fonction de la valeur du rapport critique, à prendre une décision :

It then remains, depending on the value of the statistic observed, or depending on the value of the critical report, to make a decision:

★si $CR \notin AR$ alors l'hypothèse nulle du test peut être rejetée : au seuil de significativité retenue, les résultats échantillonnaux permettent de rejeter l'hypothèse nulle en faveur de l'hypothèse alternative.

★if $CR \notin AR$, then the null hypothesis of the test can be rejected: at the significance level selected, the sample results make it possible to reject the null hypothesis in favor of the alternative hypothesis.

5. The decision rule.

Important note

Lorsque $CR \in AR$, on ne dit pas que l'on accepte l'hypothèse nulle. On ne la rejette pas, car le résultat est contingent à l'échantillon dont on dispose.

When $CR \in AR$, we do not say that we accept the null hypothesis. We do not reject it, because the result is contingent on the available sample.

Percentage hypothesis test

Percentage hypothesis test

Nous allons à présent nous pencher sur des tests d'hypothèses sur un pourcentage. Deux cas seront présentés :

We are now going to look at testing percentage hypotheses. Two cases will be presented:

1. Test bilatéral
2. Test unilatéral

Avec région critique (c.-à-d. zone de rejet) à droite

Avec région critique à gauche

1. Two-tailed test
2. One-sided test

With critical region (i.e. rejection zone) on the right

With critical region on the left

Two-tailed test

Two-tailed test

Ce test se présente sous la forme :

This test takes the form:

$$\begin{cases} H_0 : p = p_{H_0} \\ H_1 : p \neq p_{H_0} \end{cases}$$

Example

Allo Mairies

Le service Allô Mairie fait l'objet d'un audit sur l'efficacité de ses interventions. La maire considère que le taux de satisfaction des administrés ayant recours au service doit être égal au moins à 90%.
Sur 100 appels sélectionnés au hasard, 87 se révèlent avoir été satisfaits.

Au seuil de signification $\alpha = 5\,\%$, que doit en conclure le maire ?

The Allô Mairie service is subject to an audit on its interventions effectiveness. The mayor considers that the satisfaction rate of citizens using the service must be equal to at least 90%.
Out of 100 calls selected at random, 87 were found to have been satisfied.

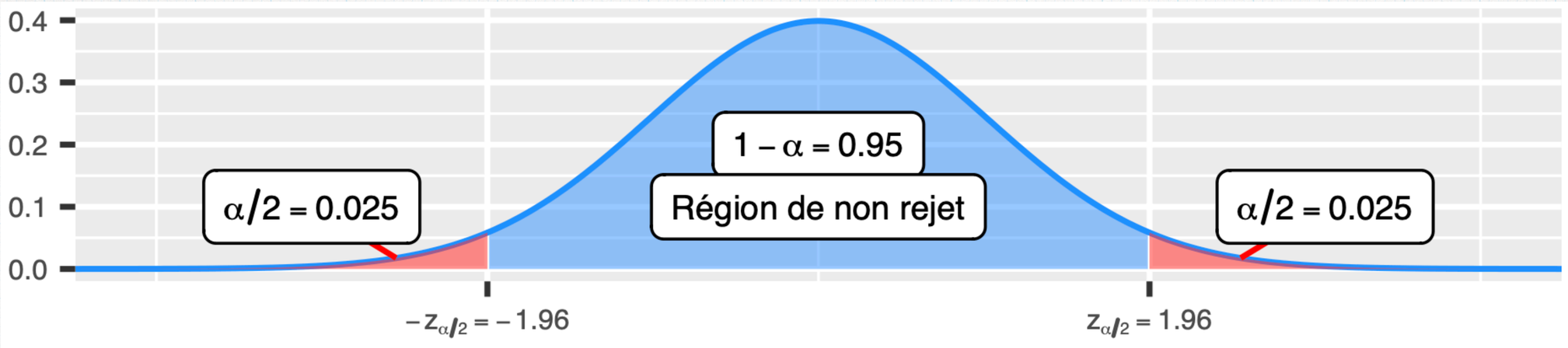
At the significance level $\alpha = 5\,\%$, what should the mayor conclude?

Example

La maire doit effectuer le test suivant :

The mayor must perform the following test:

$$\begin{cases} H_0 : p = 90\,\% \\ H_1 : p \neq 90\,\% \end{cases}$$



At the threshold $\alpha = 5\,\%$, the non-rejection region of the null hypothesis is written:

AR $= [-1{,}96; 1{,}96]$ (we read the quantiles values in a normal distribution table)

Example

Le rapport critique s'écrit :

The critical report is written:

$$CR = \frac{F - p_{H_0}}{\sigma_F}$$

La taille de la population est supposée grande.

The size of the population is assumed to be large.

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{p_{H_0}(1 - p_{H_0})}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}9(1 - 0{,}9)}{100}} = \frac{0{,}09}{100} = \frac{0{,}3}{10} = 3\,\%$$

Then: $$CR = \frac{87\% - 90\,\%}{3\,\%} = \frac{-3\,\%}{3\,\%} = -1$$

soit $CR \in AR \Rightarrow H_0$ non-rejetée.

either $CR \in AR \Rightarrow H_0$ not rejected.

Ainsi, au seuil $\alpha = 5\,\%$ et sur la base des informations disponibles, la maire ne peut pas considérer que l'objectif de 90% de taux de satisfaction n'est pas atteint.

Thus, at the $\alpha = 5\,\%$ threshold and on the basis of the information available, the mayor cannot consider that the objective of 90% satisfaction rate has not been reached.

One-sided test

Two-tailed test

Ce test se présente sous la forme :

This test takes the form:

$$\begin{cases} H_0 : p = p_{H_0} \\ H_1 : p < p_{H_0} \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : p = p_{H_0} \\ H_1 : p > p_{H_0} \end{cases}$$

Example 1

Les industriels de l'agro-alimentaire redoutent particulièrement les effets de l'affaire de la contamination à la salmonelle du lait infantile sur leurs ventes.
Un premier sondage réalisé par une association de consommateurs atteste que 60% des consommateurs ne veulent plus consommer les produits de ces industriels .
Les industriels espèrent que c'est moins.
Dans un échantillon de 2 000 personnes constitué par leurs soins, 1100 ont dit ne plus vouloir consommer de ces produits.
Au seuil $\alpha = 5\%$, cela est-il rassurant pour les industriels ?

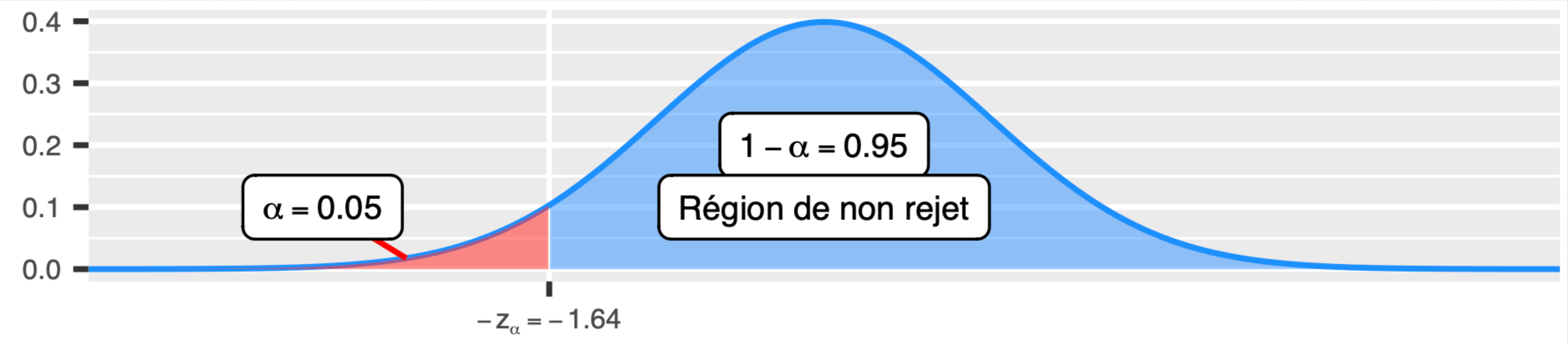
The food industry is particularly concerned about the effects of the case of the salmonella contamination of infant milk on their sales.
A first survey carried out by a consumer association attests that 60% of consumers of these products don't want to consume them. Manufacturers hope it is less.
In a sample of 2,000 people made up by themselves, 1,100 said they no longer wanted to consume these products.
At threshold $\alpha = 5\%$, is this reassuring for manufacturers?

Example 1

On doit effectuer le test:

We must perform the test:

$$\begin{cases} H_0 : p = 60\,\% \\ H_1 : p < 60\,\% \end{cases}$$



At the threshold $\alpha = 5\,\%$, the non-rejection region of the null hypothesis is written:

AR $= [-1{,}64; +\infty[$

Example 1

Le rapport critique s'écrit : $CR = \dfrac{F - p_{H_0}}{\sigma_F}$

The critical report is written:

La taille de la population est supposée grande.

The size of the population is assumed to be large.

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{p_{H_0}(1 - p_{H_0})}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}6(1 - 0{,}6)}{2000}} = 1{,}09\,\%$$

soit $CR \notin AR \Rightarrow H_0$ rejetée.

Then: $CR = \dfrac{55\% - 60\,\%}{1{,}09\,\%} = \dfrac{-5\,\%}{1{,}09\,\%} = -4{,}59$

either $CR \notin AR \Rightarrow H_0$ rejected.

Ainsi, au seuil $\alpha = 5\,\%$ et sur la base des informations disponibles, les industriels peuvent considérer les résultats du nouveau sondage encourageants: ils ne peuvent pas accepter l'idée que 60% des consommateurs de leurs produits ne les achèteront plus.

Thus, at the threshold $\alpha = 5\,\%$ and based on the information available, manufacturers can consider the results of the new survey encouraging: they cannot accept the idea that 60% of consumers of their products will no longer buy them.

Example 2

Douze pour cent (12%) de la population serait gauchère. Pourtant, dans votre entourage, vous avez identifié 130 gauchers sur 1 000 individus mesurés, ce qui vous dispose à penser que cette proportion est en réalité supérieure.

Au seuil $\alpha = 1\,\%$, que pouvez-vous en déduire ?

Twelve percent (12%) of the population is said to be left-handed. However, in your entourage, you have identified 130 left-handers out of 1000 measured individuals, which makes you think that this proportion is actually higher.

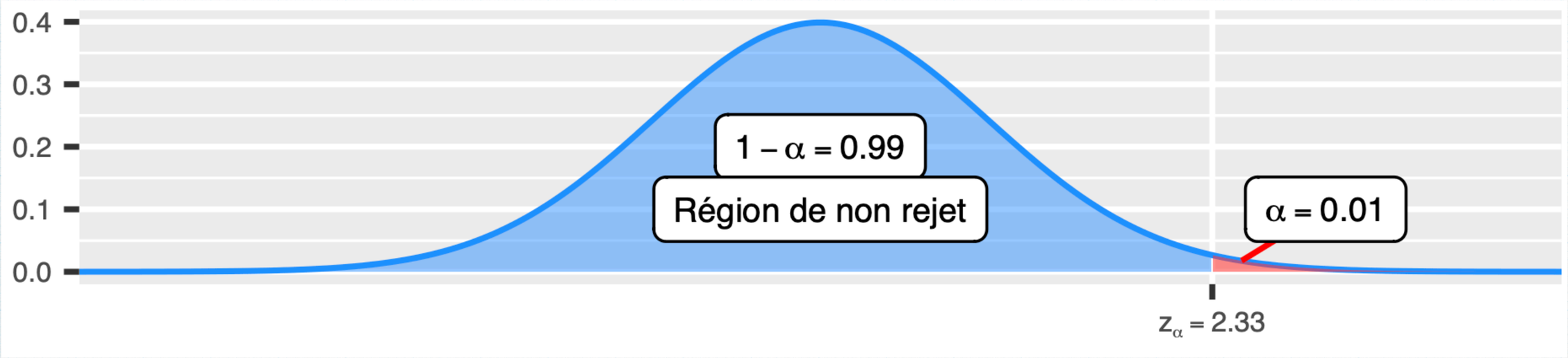
At the threshold $\alpha = 1\,\%$, what can you deduce?

Example 2

On doit effectuer le test:

We must perform the test:

$$\begin{cases} H_0 : p = 12\,\% \\ H_1 : p > 12\,\% \end{cases}$$



At the threshold $\alpha = 1\,\%$, the non-rejection region of the null hypothesis is written:

AR $=]-\infty; 2{,}33]$

Example 2

Le rapport critique s'écrit :

The critical report is written:

$$CR = \frac{F - p_{H_0}}{\sigma_F}$$

La taille de la population est supposée grande.

The size of the population is assumed to be large.

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{p_{H_0}(1 - p_{H_0})}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}12(1 - 0{,}12)}{1000}} = 1{,}03\,\%$$

Then: $$CR = \frac{13\% - 12\,\%}{1{,}03\,\%} = \frac{1\,\%}{1{,}03\,\%} = 0{,}97$$

soit $CR \in AR \Rightarrow H_0$ non-rejetée.

either $CR \in AR \Rightarrow H_0$ not rejected.

Ainsi, au seuil $\alpha = 1\,\%$ et sur la base des informations disponibles, vous ne pouvez pas réfuter l'hypothèse que la population compte 12% de gauchers.

Thus, at the threshold $\alpha = 1\,\%$ and based on the information available, you cannot refute the hypothesis that the population is 12% left-handed.

Illustration in the justice field

Ici, la statistique de test est la variable binomiale X avec $p = 0{,}5$ et $n = 80$.

Here, the test statistic is the binomial variable X with $p = 0{,}5$ and $n = 80$.

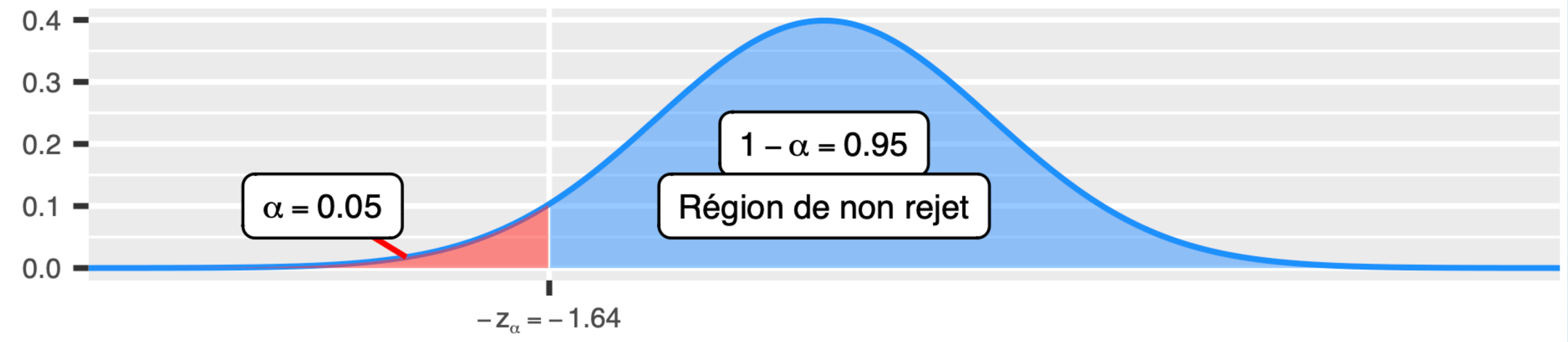
$$F = \mathbb{P}(X \leq 4/p = 0{,}5 \text{ et } n = 80) = 1{,}4 \times 10^{-18}$$

Illustration in the justice field

On doit effectuer le test:

We must perform the test:

$$\begin{cases} H_0 : p = 50\,\% \\ H_1 : p < 50\,\% \end{cases}$$



At the threshold $\alpha = 5\,\%$, the non-rejection region of the null hypothesis is written:

AR $= [-1{,}64; +\infty[$

Illustration in the justice field

Le rapport critique s'écrit :

The critical report is written: $$CR = \frac{F - p_{H_0}}{\sigma_F}$$

La taille de la population est supposée grande.

The size of the population is assumed to be large.

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{p_{H_0}(1 - p_{H_0})}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}5(1 - 0{,}5)}{80}} = 0{,}31\,\%$$

Then: $$CR = \frac{1{,}4 \times 10^{-16}\% - 50\,\%}{0{,}31\,\%} = 2{,}25 \times 10^{-17}$$

soit $CR \notin AR \Rightarrow H_0$ rejetée.

either $CR \notin AR \Rightarrow H_0$ rejected.

Ainsi, au seuil $\alpha = 5\,\%$ et sur la base des informations disponibles, les afro-américans sont moins sélectionnés dans les jurys que leur proportion dans la population

Thus, at the threshold $\alpha = 5\,\%$ and based on the information available, African Americans are less selected on juries than their proportion in the population

The average hypothesis test

Average hypothesis test

Nous allons à présent pouvoir présenter dans le détail chacun des cas suivants lorsqu'il s'agit d'effectuer un test d'hypothèses sur une moyenne :

1. Test bilatéral avec écart-type connu
2. Test unilatéral avec écart-type connu
3. Test bilatéral avec écart-type inconnu
4. Test unilatéral avec écart-type inconnu
5.

We will now be able to present in detail each of the following cases when it comes to performing a hypothesis test on an average

1. Two-tailed test with known standard deviation
2. One-sided test with known standard deviation
3. Two-tailed test with unknown standard deviation
4. One-sided test with unknown standard deviation

Two-tailed test with known standard deviation

Two-tailed test

Ce test se présente sous la forme :

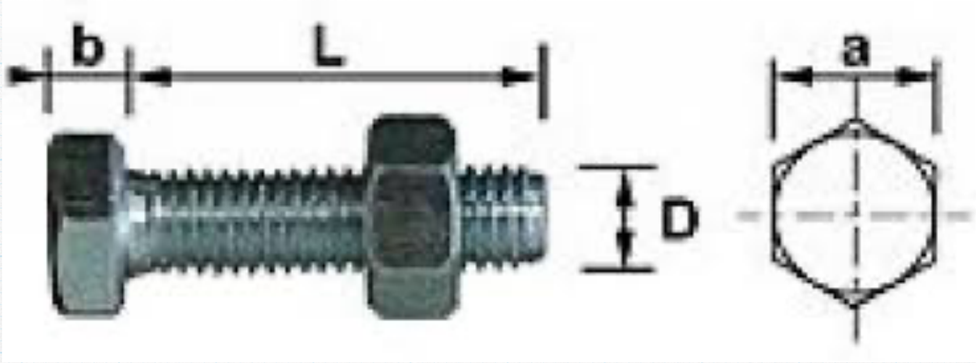
This test takes the form:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_{H_0} \\ H_1 : \mu \neq \mu_{H_0} \end{cases}$$

Example 1

Un industriel de la métallurgie veut déterminer si le diamètre des boulons qu'il fabrique est égal à 12mm en moyenne. Sur un lot de 10 000 boulons, il obtient un diamètre moyen de 11,8mm. Il sait par ailleurs que σ est égal à 2mm.

Au seuil $\alpha = 5\,\%$, que peut-il en conclure ?



A metalworker wants to determine if the diameter of the bolts he manufactures is equal to 12mm on average. On a batch of 10,000 bolts, it obtains an average diameter of 11.8mm. He also knows that σ is equal to 2mm.

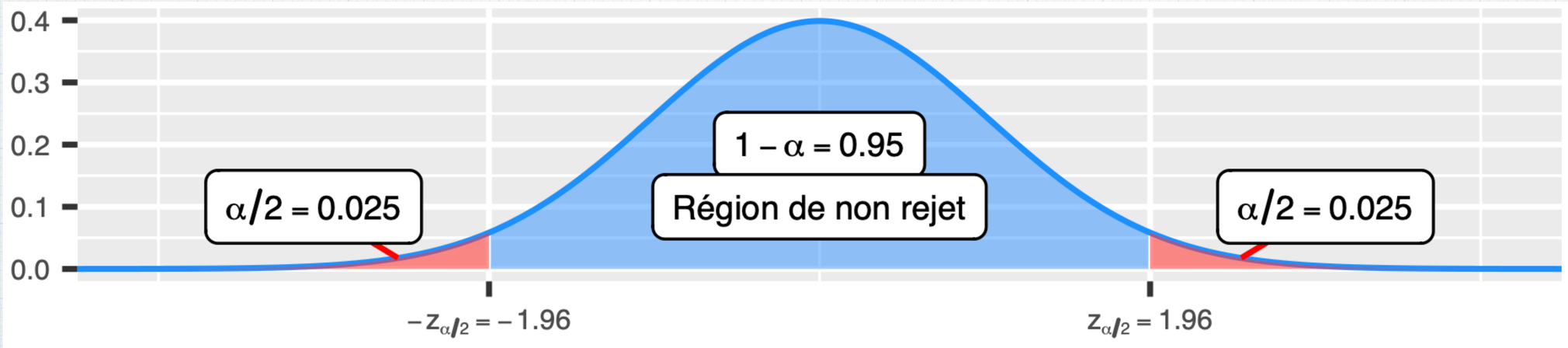
At threshold $\alpha = 5\,\%$, what can he conclude?

Example 1

On doit effectuer le test:

We must perform the test:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 12 \\ H_1 : \mu \neq 12 \end{cases}$$



At the threshold $\alpha = 5\,\%$, the non-rejection region of the null hypothesis is written:

AR $= [-1{,}96; 1{,}96]$ (we read the quantiles values in a normal distribution table)

Example 1

Le rapport critique s'écrit :

The critical report is written:

$$CR = \frac{\overline{X} - \mu_{H_0}}{\sigma_{\overline{X}}}$$

La taille de la population est supposée infinie.

The size of the population is assumed to be infinite.

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{10000}} = \frac{2}{100} = 0{,}02$$

Then: $$CR = \frac{11{,}8 - 12}{0{,}02} = \frac{-0{,}2}{0{,}02} = -10$$

soit $CR \notin AR \Rightarrow H_0$ rejetée.

either $CR \notin AR \Rightarrow H_0$ rejected.

Ainsi, au seuil $\alpha = 5\,\%$ et sur la base des informations disponibles, l'industriel peut rejeter l'hypothèse que le diamètre des boulons vaut en moyenne 12mm.

Thus, at the $\alpha = 5\,\%$ threshold and on the basis of the information available, the manufacturer can reject the hypothesis that the diameter of the bolts is on average 12mm.

Example 2

Un pêcheur prétend qu'un thon pèse en moyenne 85kg. Il part à la pêche et attrape 25 thons dont le poids moyen est de 79kg.

Au seuil $\alpha = 1\%$, doit-il changer d'avis ? (On suppose $\sigma = 30$kg.)

A fisherman claims that an average tuna weighs 85kg. He goes fishing and catches 25 tunas with an average weight of 79kg.

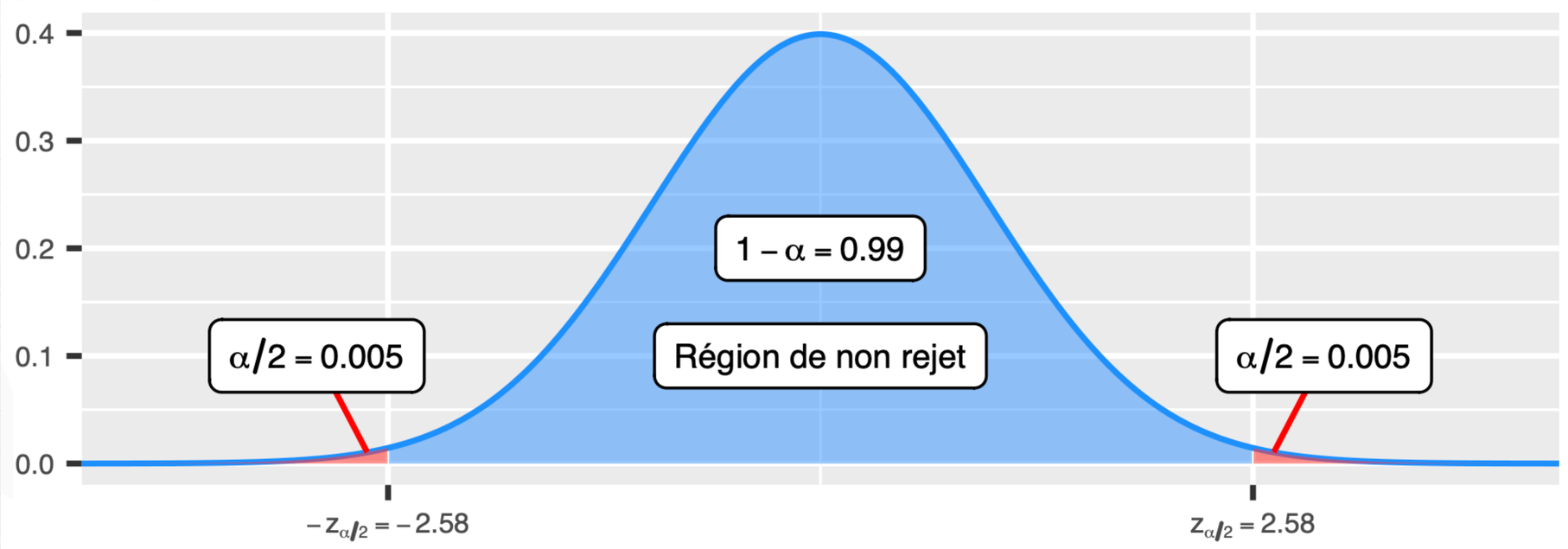
At threshold $\alpha = 1\%$, should he change his mind? (We assume $\sigma = 30$kg.)

Example 2

On doit effectuer le test:

We must perform the test:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 85 \\ H_1 : \mu \neq 85 \end{cases}$$



At the threshold $\alpha = 1\,\%$, the non-rejection region of the null hypothesis is written:

AR $= [-2{,}33; 2{,}33]$ Student's distribution with 24 df.

Example 2

Le rapport critique s'écrit :

The critical report is written:

$$CR = \frac{\overline{X} - \mu_{H_0}}{\sigma_{\overline{X}}}$$

La taille de la population est supposée infinie.

The size of the population is assumed to be infinite.

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{30}{\sqrt{25}} = \frac{30}{5} = 6$$

Then: $$CR = \frac{79 - 85}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

soit $CR \in AR \Rightarrow H_0$ non-rejetée.

either $CR \in AR \Rightarrow H_0$ not rejected.

Ainsi, au seuil $\alpha = 1\,\%$ et sur la base des informations disponibles, le pêcheur ne peut pas rejeter l'idée selon laquelle les thons pèsent en moyenne 85 kg.

Thus, at the $\alpha = 1\,\%$ threshold and on the basis of the information available, the fisherman cannot reject the idea that the average tuna weighs 85 kg.

One-sided test with known standard deviation

Two-tailed test

Ce test se présente sous la forme :

This test takes the form:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_{H_0} \\ H_1 : \mu < \mu_{H_0} \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_{H_0} \\ H_1 : \mu > \mu_{H_0} \end{cases}$$

Example

Le responsable de la production d'une enseigne fabriquant des sodas a reçu des plaintes de consommateurs prétendant que le volume de boisson contenu dans les bouteilles est inférieur à celui indiqué sur l'étiquette (330ml).
Sur un échantillon de 25 bouteilles, il obtient un volume moyen de 325 ml (on suppose σ = 10ml).
Au seuil α = 5%, que doit-il en déduire ?

The production manager of a soda brand has received complaints from consumers claiming that the volume of beverage in the bottles is less than that stated on the label (330ml).
On a sample of 25 bottles, he obtains an average volume of 325 ml (we assume σ = 10ml).

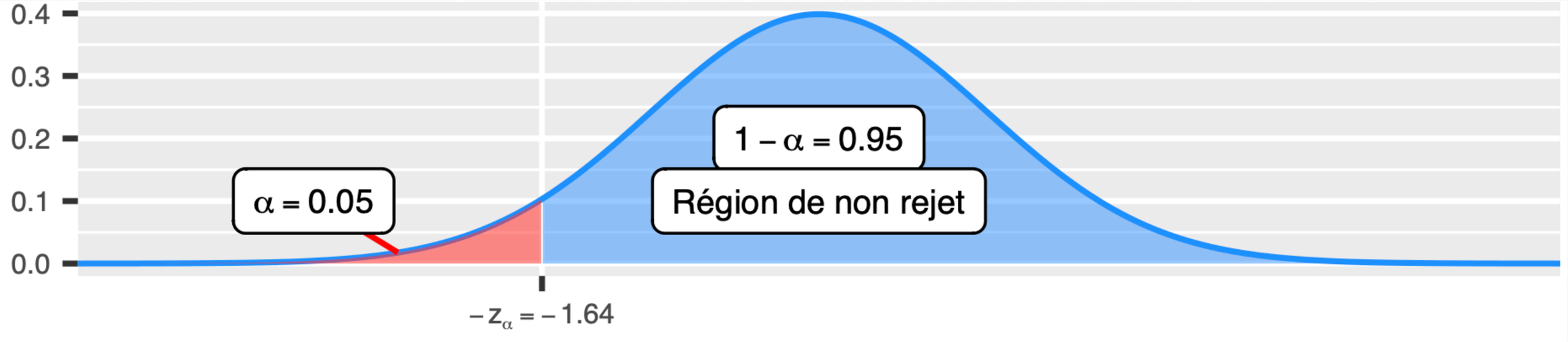
At the threshold α = 5%, what should he deduce?

Example 1

On doit effectuer le test:

We must perform the test:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 330 \\ H_1 : \mu < 330 \end{cases}$$



At the threshold $\alpha = 5\,\%$, the non-rejection region of the null hypothesis is written:

AR $= [-1{,}64; +\infty[$ Student's

Example 1

Le rapport critique s'écrit :

The critical report is written:

$$CR = \frac{\overline{X} - \mu_{H_0}}{\sigma_{\overline{X}}}$$

La taille de la population est supposée infinie.

The size of the population is assumed to be infinite.

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$

Then: $$CR = \frac{325 - 330}{2} = \frac{-5}{2} = -2{,}5$$

soit $CR \notin AR \Rightarrow H_0$ rejetée.

either $CR \notin AR \Rightarrow H_0$ rejected.

Ainsi, au seuil $\alpha = 5\,\%$ et sur la base des informations disponibles, le responsable doit rejeter l'hypothèse selon laquelle ses bouteilles contiennent en moyenne 330ml et convenir qu'en réalité, elles contiennent moins.

Thus, at the $\alpha = 5\,\%$ threshold and on the basis of the information available, the manager must reject the assumption that his bottles contain an average of 330ml and agree that in reality, they contain less.

Example 2

Une compagnie de transport possède 100 camions. Le gestionnaire des coûts de l'entreprise a des doutes quant à la consommation d'essence des camions, supposée égale à 150 litres en moyenne par jour et craint que les chauffeurs n'en consomment plus.
Sur un échantillon de 64 camions, il trouve une consommation moyenne de 152 litres.
Que peut-il déduire au seuil $\alpha = 1\%$? (On suppose σ égal à 20 litres.)

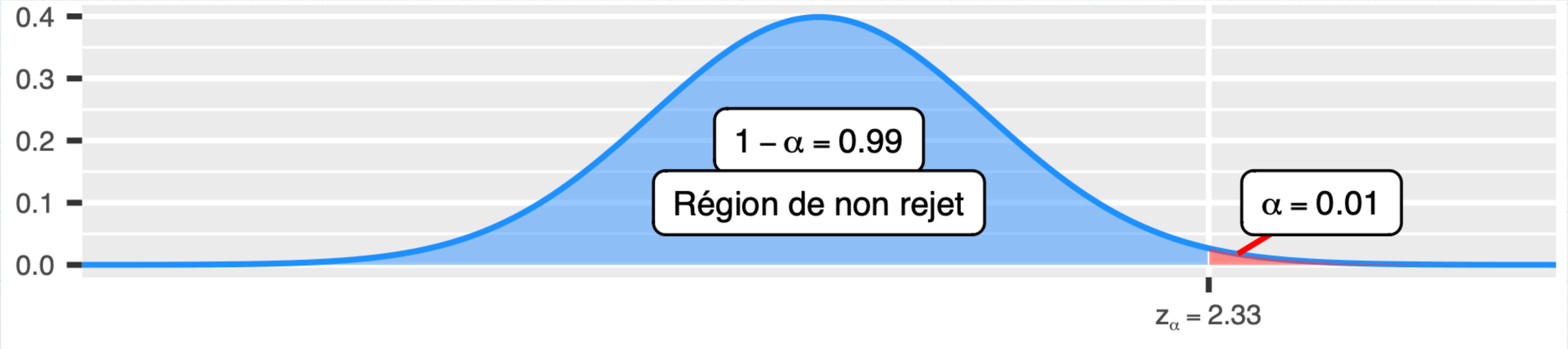
A transport company owns 100 trucks. The company's cost manager has doubts about the trucks' gas mileage, which is assumed to be 150 liters on average per day, and fears that the drivers consume more.
On a sample of 64 trucks, he found an average consumption of 152 liters.
What can he deduce at the threshold $\alpha = 1\%$? (Assume σ equal to 20 liters.)

Example 2

On doit effectuer le test:

We must perform the test:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 150 \\ H_1 : \mu > 150 \end{cases}$$



At the threshold $\alpha = 1\,\%$, the non-rejection region of the null hypothesis is written:

AR $=]-\infty; 2{,}33]$

Example 2

Le rapport critique s'écrit :

The critical report is written:

$$CR = \frac{\overline{X} - \mu_{H_0}}{\sigma_{\overline{X}}}$$

La taille de la population est finie (100 camions).

The size of the population is finite (100 trucks).

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{20}{\sqrt{64}}\sqrt{\frac{100-64}{100-1}} = 1.51$$

Then: $$CR = \frac{152 - 150}{1{,}51} = \frac{2}{1{,}51} = 1{,}32$$

soit $CR \in AR \Rightarrow H_0$ non-rejetée.

either $CR \in AR \Rightarrow H_0$ not rejected.

Ainsi, au seuil $\alpha = 1\,\%$ et sur la base des informations disponibles, le gestionnaire ne peut pas rejeter l'hypothèse que les camions consomment en moyenne 150 litres de carburant par jour.

Thus, at the $\alpha = 1\,\%$ threshold and on the basis of the information available, the manager cannot reject the hypothesis that trucks consume an average of 150 liters of fuel per day.

Two-tailed test with unknown standard deviation

Example 1

Le président du Conseil Régional d'une région française est persuadé que le revenu annuel net moyen des habitants de sa région est égal à 18 688€.
La Commission Economique du Conseil Régional entend vérifier cette assertion en réalisant un sondage auprès de 401 administrés.
Il en ressort que le revenu annuel net moyen est égal à 16 860€, avec un écart-type échantillonnal s = 14 624€.
Au seuil α = 5%, la Commission Economique a-t-elle suffisamment d'éléments pour réfuter l'affirmation du président ?

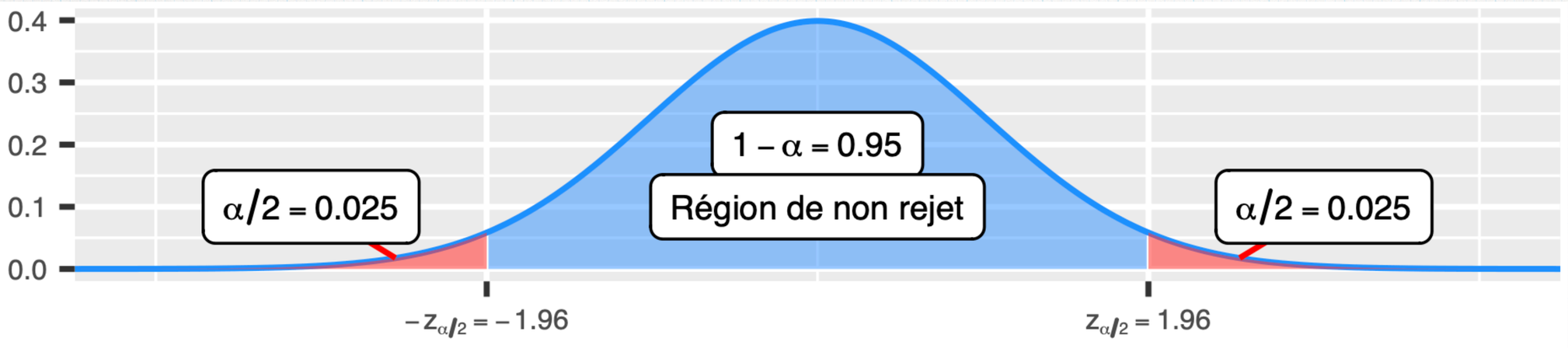
The president of the Regional Council of a French region is convinced that the average net annual income of the inhabitants of his region is equal to € 18688.
The Economic Commission of the Regional Council intends to verify this assertion by carrying out a survey of 401 citizens.
It shows that the average annual net income is equal to 16860 €, with a sample standard deviation s = 14624 €.
At the α = 5% threshold, does the Economic Commission have sufficient information to refute the president's assertion?

Example 1

On doit effectuer le test:

We must perform the test:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 18688 \\ H_1 : \mu \neq 18688 \end{cases}$$



At the threshold $\alpha = 5\,\%$, the non-rejection region of the null hypothesis is written:

AR $= [-1{,}96; +1{,}96]$

Example 1

Le rapport critique s'écrit :

The critical report is written:

$$CR = \frac{\overline{X} - \mu_{H_0}}{\hat{\sigma}_{\overline{X}}}$$

La taille de la population est supposée infinie.

The size of the population is assumed to be infinite.

$$\hat{\sigma}_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{14624}{\sqrt{401-1}} = 731{,}2$$

Then: $$CR = \frac{16860 - 18688}{731{,}2} = -2{,}5$$

soit $CR \notin AR \Rightarrow H_0$ rejetée.

either $CR \notin AR \Rightarrow H_0$ rejected.

Ainsi, au seuil $\alpha = 5\,\%$ et sur la base des informations disponibles, la Commission peut rejeter l'hypothèse selon laquelle les habitants de la région perçoivent un revenu annuel égal en moyenne à 18 688€.

Thus, at the $\alpha = 5\,\%$ threshold and on the basis of the information available, the Commission can reject the hypothesis that the inhabitants of the region have an average annual income of € 18,688.

Example 2

Au Groland, depuis des siècles, les habitants sont supposés boire 5 litres de bière par jour en moyenne.
Gronenbourg, la brasserie nationale, veut savoir si ces chiffres de consommation méritent d'être révisés. Elle diligente une enquête auprès de 17 grolandais, dont la consommation est évaluée à 7 litres, avec un écart-type échantillonnal égal à 1 litre.
Au seuil $\alpha = 5\%$, que peut-elle en déduire ?
On considèrera que la population du Groland est grande.

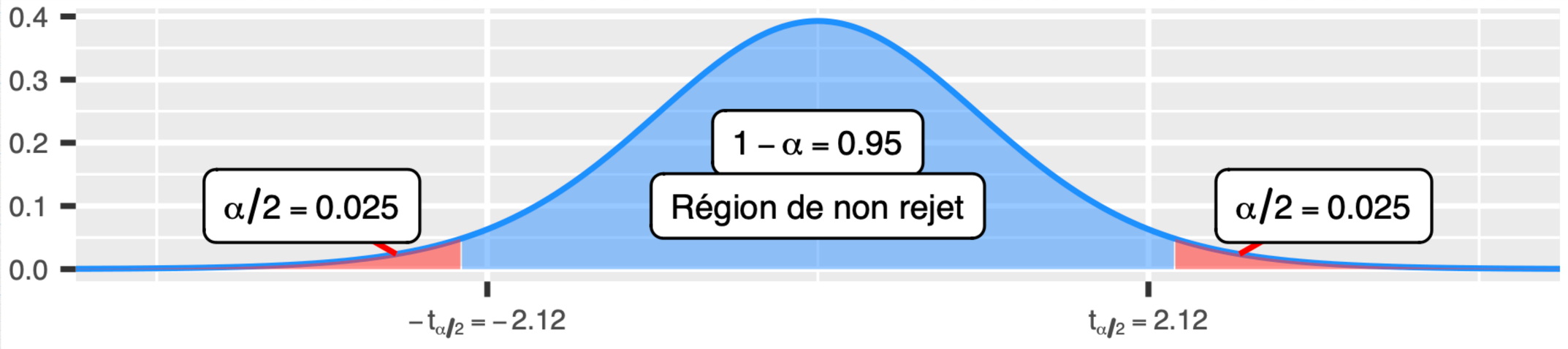
In Groland, for centuries people have been expected to drink 5 liters of beer per day on average.
Gronenbourg, the national brewery, wants to know if these consumption figures deserve to be revised. It is carrying out a survey of 17 Grolandais, whose consumption is estimated at 7 liters, with a sample standard deviation equal to 1 liter.
At threshold $\alpha = 5\%$, what can it deduce from it?
We will consider that the population of Groland is large.

Example 2

On doit effectuer le test:

We must perform the test:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 5 \\ H_1 : \mu \neq 5 \end{cases}$$



At the threshold $\alpha = 5\,\%$, the non-rejection region of the null hypothesis is written:

AR $= [-2{,}12; +2{,}12]$ (quantiles read from the Student's distribution table at 16 df, because n = 17 <30

Example 2

Le rapport critique s'écrit :

The critical report is written:

$$CR = \frac{\overline{X} - \mu_{H_0}}{\hat{\sigma}_{\overline{X}}}$$

La taille de la population est supposée infinie.

The size of the population is assumed to be infinite.

$$\hat{\sigma}_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{17-1}} = 0{,}25$$

Then:

$$CR = \frac{7-5}{0{,}25} = 8$$

soit $CR \notin AR \Rightarrow H_0$ rejetée.

either $CR \notin AR \Rightarrow H_0$ rejected.

Ainsi, au seuil $\alpha = 5\,\%$ et sur la base des informations disponibles, la brasserie Gronenbourg ne peut pas soutenir l'idée selon laquelle les grolandais consommeraient en moyenne 5 litres de bière par jour en moyenne.

Thus, at the $\alpha = 5\,\%$ threshold and on the basis of the information available, the Gronenbourg brewery cannot support the idea that Grolandais consume on average 5 liters of beer per day.

One-sided test with unknown standard deviation

Example 1

Deux amateurs de golf ont une vive dispute au sujet de leur joueur de golf préféré, Tiger Woods. L'un prétend que le célèbre golfeur a une moyenne de coups par trou en carrière officielle égale à 4 (en d'autres termes, il parvient à mettre dans le trou en quatre coups en moyenne). L'autre prétend que c'est plus.
Sur la base de 1 000 trous joués dans la carrière de Tiger Woods (on supposera que le nombre de trous dans lesquels Woods aura *putté* dans sa carrière est infini) donnés dans le tableau suivant, que doit-on en déduire au seuil α = 10% ?

Two golf enthusiasts have a heated argument over their favorite golf player, Tiger Woods. One claims the famous golfer has an official career strokes per hole average of 4 (in other words, he manages to put in the hole in four strokes on average). The other claims it's more. On the basis of 1000 holes played in the career of Tiger Woods (we will assume that the number of holes in which Woods will have putted in his career is infinite) given in the following table, what should be deduced at the threshold α = 10 %?

Example 1

Number of strokes to put the ball in the hole	Effectif
1	10
2	90
3	200
4	400
5	200
6	90
7	10
Total	**1000**

From the table, we first calculate the sample statistics:

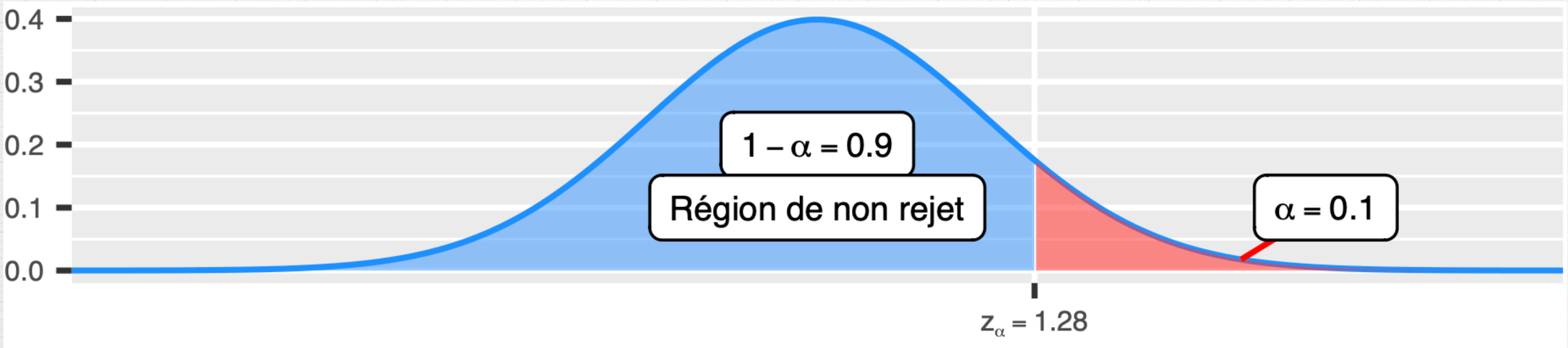
$\bar{x} = 4$ and $s = 1{,}14$

Example 1

On doit effectuer le test:

We must perform the test:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 4 \\ H_1 : \mu > 4 \end{cases}$$



At the threshold $\alpha = 10\,\%$, the non-rejection region of the null hypothesis is written:

AR $=]-\infty; 1{,}28]$

Example 1

Le rapport critique s'écrit :

The critical report is written:

$$CR = \frac{\overline{X} - \mu_{H_0}}{\hat{\sigma}_{\overline{X}}}$$

La taille de la population est supposée infinie.

The size of the population is assumed to be infinite.

$$\hat{\sigma}_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{1{,}14}{\sqrt{1000-1}} = 0{,}04$$

Then: $CR = \dfrac{4-4}{0{,}04} = 0$

soit $CR \in AR \Rightarrow H_0$ non-rejetée.

either $CR \in AR \Rightarrow H_0$ not rejected.

Ainsi, au seuil $\alpha = 10\,\%$ et sur la base des informations disponibles, on ne peut pas rejeter l'hypothèse selon laquelle Tiger Woods parvient à mettre dans le trou après quatre coups en moyenne.

Thus, at the $\alpha = 10\,\%$ threshold and on the basis of the information available, one cannot reject the hypothesis that Tiger Woods manages to put in the hole after four hits on average.

Example 2

Votre voisin a décidé de construire lui-même sa maison. Il soupçonne que le vendeur de matériaux auquel il s'est adressé le trompe dans ses livraisons de mélange à béton dont le poids moyen est supposé égal à 2 000 kg et qu'il pense être inférieur.
Il demande à un huissier de justice de peser 26 livraisons successives (dans un total de 50 commandes), dont le poids moyen se révèle égal à 1 980 kg, avec un écart-type échantillonnal égal à 110kg.
Au seuil α = 5%, doit-il poursuivre le vendeur pour tromperie sur la marchandise ?

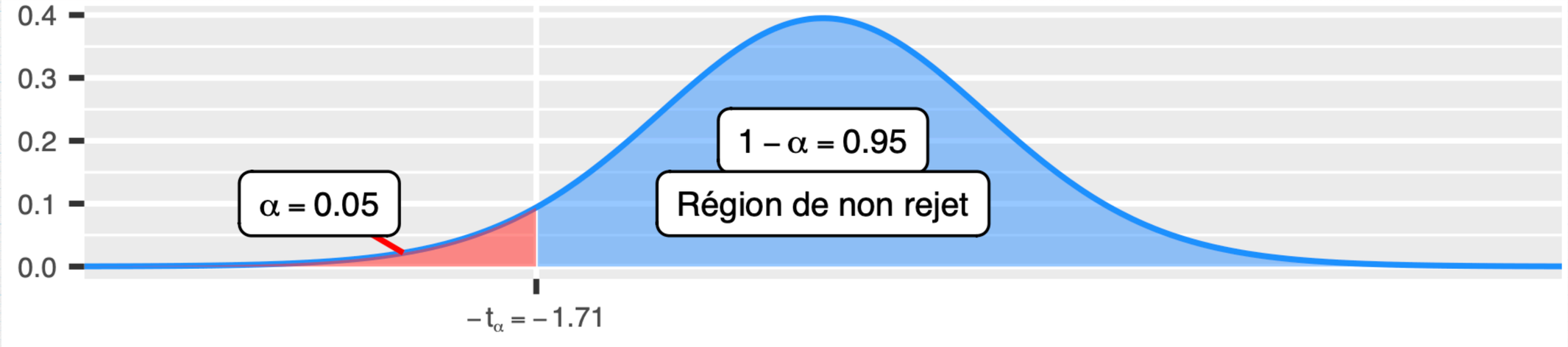
Your neighbor has decided to build his own house. He suspects that the materials vendor he has approached is deceiving him in his deliveries of concrete mix which is assumed to average 2,000 kg in weight and which he believes is less.
He asks a judicial officer to weigh 26 successive deliveries (in a total of 50 orders), the average weight of which turns out to be equal to 1,980 kg, with a sample standard deviation of 110 kg.
At threshold α = 5%, should he sue the seller for deception on the goods?

Example 2

On doit effectuer le test:

We must perform the test:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 2000 \\ H_1 : \mu < 2000 \end{cases}$$



At the threshold $\alpha = 5\,\%$, the non-rejection region of the null hypothesis is written:

AR $= [-1{,}71; +\infty[$ (quantiles read from the Student's distribution table at $n - 1 = 25$ df, because $n = 26 < 30$

Example 2

Le rapport critique s'écrit :

The critical report is written:

$$CR = \frac{\overline{X} - \mu_{H_0}}{\hat{\sigma}_{\overline{X}}}$$

La taille de la population est finie (50 commandes).

The size of the population is finite (50 orders).

$$\hat{\sigma}_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{110}{\sqrt{25}}\sqrt{\frac{50-26}{50-1}} = 15{,}39$$

Then: $$CR = \frac{1980 - 2000}{15{,}39} = -1{,}29$$

soit $CR \in AR \Rightarrow H_0$ non-rejetée.

either $CR \in AR \Rightarrow H_0$ not rejected.

Ainsi, au seuil $\alpha = 10\,\%$ et sur la base des informations disponibles, votre voisin ne peut pas prouver que les livraisons reçues ne respectent pas le poids indiqué sur les factures en sa possession.

Thus, at the $\alpha = 10\,\%$ threshold and on the basis of the information available, your neighbor cannot prove that the received deliveries do not respect the weight indicated on the invoices in his possession.

Notes

Test on one parameter and estimation by interval

Test on one parameter and estimation by interval

➡Dans ce chapitre, nous avons utilisé pour la réalisation de tests d'hypothèses :

- les estimateurs échantillonnaux de la moyenne et du pourcentage
- l'écart-type (estimé) de la distribution d'échantillonnage des moyennes ou des pourcentages
- les valeurs critiques lues dans la table de la distribution Normale ou de Student

➡On note que ces mesures qui ont été utilisées sont exactement les mêmes que celles utilisées dans le chapitre précédent dans le cadre des estimations par intervalle.

➡Le risque de 1ère espèce α s'y présente comme le complément du niveau de confiance utilisé alors.

➡In this chapter, we have used for carrying out hypothesis tests :

- the sample estimators of the mean and the percentage
- the (estimated) standard deviation of the sampling distribution of averages or percentages
- the critical values read in the Normal distribution table or by Student

➡Note that these used measures t are exactly the same as those used in the previous chapter for the interval estimates.

➡The risk of 1st species α is presented as the complement of the used confidence level.

Test on one parameter and estimation by interval

➡L'estimation par intervalle d'un paramètre consiste à définir l'intervalle de valeurs parmi lesquelles la vraie valeur du paramètre a une probabilité $1 - \alpha$ de se trouver.

➡Un test d'hypothèses détermine si on peut admettre que la vraie valeur du paramètre soit égale à une valeur donnée avec au plus une probabilité α de se tromper.

➡Ces deux méthodes aboutissent à des conclusions de même nature.

➡Interval estimation of a parameter consists of defining the range of values among which the true value of the parameter has a probability of $1 - \alpha$ of to be there.

➡A hypothesis test determines whether we can admit that the true value of the parameter is equal to a given value with at most a probability α of being wrong.

➡These two methods lead to the same conclusion

Example

D'après la MEL (Métropole Européenne Lilloise), le temps moyen de déplacement domicile-travail de la population lilloise est supposé égal à 20 minutes.
Un relevé statistique réalisé par une association d'usagers de transports en commun sur 10 000 actifs aboutit à une moyenne de 22 minutes et un écart-type de 10 minutes.
Au seuil $\alpha = 5\%$, que peut-on en déduire ?

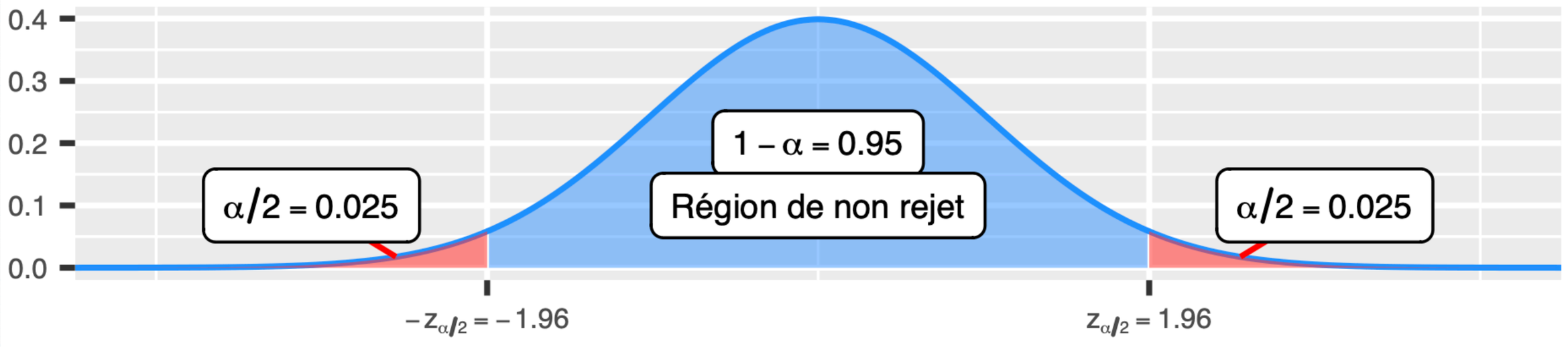
According to MEL (Métropole Européenne Lille), the average commuting time for the population of Lille is assumed to be 20 minutes.
A statistical survey carried out by an association of public transport users out of 10000 active workers results in an average of 22 minutes and a standard deviation of 10 minutes.
At the threshold $\alpha = 5\%$, what can be deduced from it?

Example

On doit effectuer le test:

We must perform the test:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 20 \\ H_1 : \mu \neq 20 \end{cases}$$



At the threshold $\alpha = 5\,\%$, the non-rejection region of the null hypothesis is written:

AR $= [-1{,}96; +1{,}96]$

Example

Le rapport critique s'écrit :

The critical report is written:

$$CR = \frac{\overline{X} - \mu_{H_0}}{\hat{\sigma}_{\overline{X}}}$$

La taille de la population lilloise est supposée très grande.

The size of the Lille population is assumed to be very large.

$$\hat{\sigma}_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{10}{\sqrt{10000-1}} = 0{,}1$$

Then:

$$CR = \frac{22-20}{0{,}1} = 20$$

soit $CR \notin AR \Rightarrow H_0$ rejetée.

either $CR \notin AR \Rightarrow H_0$ rejected.

Example

Les mêmes éléments permettent de construire l'estimation par intervalle au niveau de confiance de 95%. En effet, on a :

The same elements are used to construct the interval estimate at the 95% confidence level. Indeed, we have:

$$\overline{X} - 1{,}96 \times \hat{\sigma}_{\overline{X}} < \mu < \overline{X} + 1{,}96 \times \hat{\sigma}_{\overline{X}}$$

Or: $\mathbb{P}\left(\overline{X} - 1{,}96 \times \hat{\sigma}_{\overline{X}} < \mu < \overline{X} + 1{,}96 \times \hat{\sigma}_{\overline{X}}\right) = 0{,}95$

$$\bar{x} - 1{,}96 \times \hat{\sigma}_{\overline{X}} < \mu < \bar{x} + 1{,}96 \times \hat{\sigma}_{\overline{X}}$$

$$22 - 1{,}96 \times 0{,}10 < \mu < 22 + 1{,}96 \times 0{,}10$$

$$22 - 0{,}20 < \mu < 22 + 0{,}20$$

$$21{,}8 < \mu < 22{,}2$$

Or: $\mathbb{P}(21{,}8 < \mu < 22{,}2) = 0{,}95$

Example

- L'estimation par intervalle donne
- The interval estimate gives

$$\mathbb{P}(21{,}8 < \mu < 22{,}2) = 0{,}95$$

- Le test d'hypothèse donne
- The hypothesis test gives

$$CR = 20 \textbf{ and } AR = [-1{,}96; 1{,}96]$$

➡20 minutes ne figure pas dans l'intervalle de valeurs qui a 95% de chances de contenir la vraie valeur du paramètre μ.

➡20 minutes is not in the range of values that is 95% to contain the true value of the μ parameter.

Dans les deux approches, on ne peut pas retenir l'idée selon laquelle la durée moyenne de trajet est égale à 20 minutes.

In both approaches, we cannot retain the idea that the commuting time average is equal to 20 minutes.

The poor specification effect in the alternative hypothesis

The poor specification effect in the alternative hypothesis

➡ La réalisation des tests d'hypothèses demande la spécification d'une hypothèse nulle et d'une hypothèse alternative (étape 1). En statistique classique, l'hypothèse nulle exprime toujours une égalité.

➡Dans un test bilatéral, la spécification de l'hypothèse alternative ne pose pas de problème particulier et prend la forme d'une inégalité.

➡Dans un test unilatéral, l'hypothèse alternative exprime « a priori » sur la valeur attendue du paramètre au cas où l'hypothèse nulle est rejetée.

➡Performing the hypothesis tests requires specifying a null hypothesis and an alternative hypothesis (step 1). In classical statistics, the null hypothesis always expresses equality.

➡In a two-tailed test, the specification of the alternative hypothesis in not a particular problem and takes the form of an inequality.

➡In a one-sided test, the alternative hypothesis expresses « a priori » on the expected value of the parameter in the case that, null hypothesis is rejected.

The poor specification effect in the alternative hypothesis

➡En cas de mauvaise spécification de l'hypothèse alternative, le test présente un risque important de sur-acceptation de l'hypothèse nulle.

- Un moyen efficace de contrôler la survenue d'un tel risque est de situer l'estimateur échantillonal par rapport à la valeur attendue sous l'hypothèse nulle.

➡If the alternative hypothesis is incorrectly specified, the test presents a significant risk of over-acceptance of the null hypothesis.

- An effective way to control the occurrence of such a risk is to situate the sample estimator relative to the expected value under the null hypothesis.

Example

Dans un article du Monde du 16 février 2013*, on peut lire : “Selon une enquête de l’Insee, publiée en décembre 2012, 7% de la population active ne maîtrise pas suffisamment l’écriture et la lecture pour se faire comprendre ou pour assimiler un texte”.
Vous pensez qu’en réalité c’est moins.
Une enquête que vous avez réalisée autour de vous auprès de 10000 actifs en emploi retrouve 800 personnes éprouvant des problèmes graves pour écrire ou s’exprimer.
Au seuil α = 5%, que pouvez-vous en déduire?

In an article in Le Monde dated February 16, 2013*, we can read: “According to an INSEE survey, published in December 2012, 7% of the working population does not have sufficient command of writing and reading to make themselves understood or to assimilate a text ”.
You actually think it's less.
A survey you conducted around 10,000 working people. 800 people having serious problems writing or expressing themselves.
At the threshold α = 5%, what can you deduce?

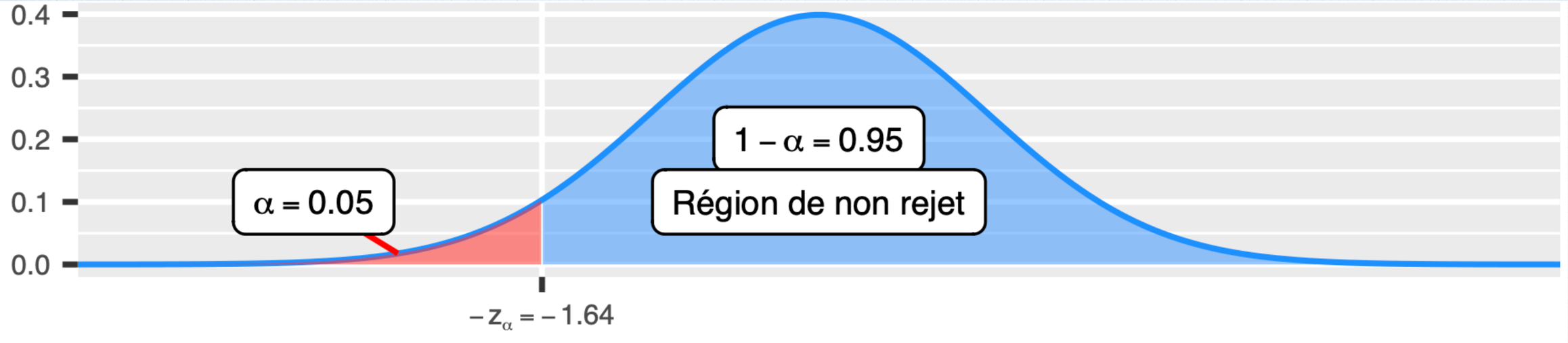
* Article by Shahzad Abdul from February 16, 2013.

Example

On doit effectuer le test:

We must perform the test:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 7\,\% \\ H_1 : \mu < 7\,\% \end{cases}$$



At the threshold $\alpha = 5\,\%$, the non-rejection region of the null hypothesis is written:

AR $= [-1{,}64; +\infty[$

Example

Le rapport critique s'écrit :

The critical report is written:

$$CR = \frac{F - p_{H_0}}{\sigma_F}$$

Le nombre d'actifs en emploi est très grand, d'où

The number of active workers is very large, hence

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{p_{H_0}(1 - p_{H_0})}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}07(1 - 0{,}07)}{10000}} = 0{,}46\,\%$$

Then: $$CR = \frac{8\% - 7\,\%}{0{,}46\,\%} = \frac{1\,\%}{0{,}46\,\%} = 2{,}17$$

soit $CR \in AR \Rightarrow H_0$ non-rejetée.

either $CR \in AR \Rightarrow H_0$ not rejected.

Ainsi, au seuil $\alpha = 5\,\%$ et sur la base des informations disponibles, on doit donc conclure au non-rejet de l'hypothèse nulle.

Thus, at the threshold $\alpha = 5\,\%$ and based on the information available, we must therefore conclude that the null hypothesis is not rejected.

Example

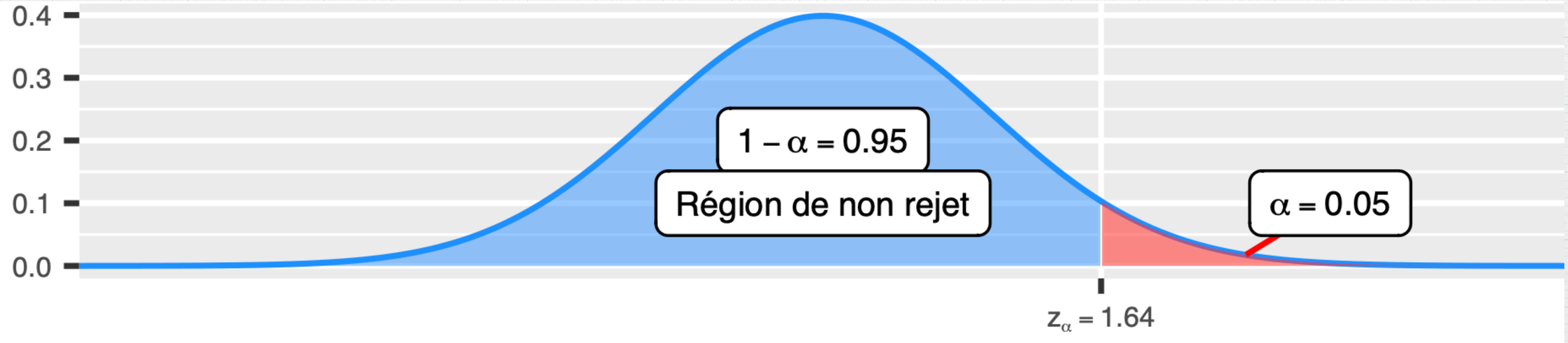
Que se serait-il passé si l'hypothèse alternative avait exprimé une inégalité dans l'autre sens (c'est-à-dire un test unilatéral droit) ?

What would have happened if the alternative hypothesis had expressed an inequality in the other direction (i.e. a right unilateral test)?

Le test aurait pris la forme :

The test would have taken the form:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 7\,\% \\ H_1 : \mu > 7\,\% \end{cases}$$



At the threshold $\alpha = 5\,\%$, the non-rejection region of the null hypothesis is written:

$\text{AR} =]-\infty; +1{,}64]$

Example

Le rapport critique s'écrit :

The critical report is written:

$$CR = \frac{F - p_{H_0}}{\sigma_F}$$

Comme précédemment :

Like before :

$$CR = \frac{8\% - 7\,\%}{0{,}46\,\%} = \frac{1\,\%}{0{,}46\,\%} = 2{,}17$$

soit $CR \notin AR \Rightarrow H_0$ rejetée.

either $CR \notin AR \Rightarrow H_0$ rejected.

On conclut ainsi au rejet de l'hypothèse nulle si l'hypothèse alternative était spécifiée en accord avec les relevés échantillonaux.

We thus conclude that the null hypothesis is rejected if the alternative hypothesis was specified in agreement with the sample records.

On court après le risque de sur-accepter l'hypothèse nulle alors-même qu'on devrait la rejeter.

We run the risk of over-accepting the null hypothesis even though we should reject it.