Rapport du Projet FMD

9- Front Pareto:

On remarque que nos sacs dominés sont distribués selon une droite, ce qui signifie que pour chaque unité d'augmentation de l'utilité, le coût GES augmente de manière constante. Donc il existe une relation linéaire entre l'utilité et le coût pour ces sacs non dominés. De plus cela s'explique par le fait que PD est une relation d'ordre strict (ce qu'on verra à la question 12) et donc on peut ordonner ses éléments jusqu'à obtenir une frontière en escalier juste au-dessus de la diagonale.

12- Relation 1: Pareto Dominance

- Asymétrique, irréflexive et transitive.

Irréflexive: $\forall k$ (sac à dos) tq $k = (c_1, u_1)$, on a que $c_1 = c_1$ et $u_1 = u_1 \Rightarrow \neg(c_1 < c_1 \land u_1 \geq u_1) \land \neg(c_1 \leq c_1 \land u_1 > u_1)$ donc $\neg(k \text{ PD } k)$.

Asymétrie: Soient k_1 et k_2 deux sacs à dos tels que k_1 PD k_2. D'abord définissons ce qu'est $\neg(k_2 \text{ PD } k_1)$:

$$
\begin{aligned}
\neg(k_2 \text{ PD } k_1) &\Rightarrow \neg(c_2 < c_1 \land u_2 \geq u_1) \lor (c_2 \leq c_1 \land u_2 > u_1) \\
&\Rightarrow (c_2 \geq c_1 \lor u_2 < u_1) \land (c_2 > c_1 \lor u_2 \leq u_1) \\
&\Rightarrow (c_2 > c_1) \lor (c_2 \geq c_1 \land u_2 \leq u_1) \lor (u_2 < u_1 \land c_2 > c_1) \lor (u_2 < u_1)
\end{aligned}
$$

On a k_1 PD k_2 si:

1. $c_1 < c_2$ et $u_1 \geq u_2 \Rightarrow c_1 < c_2 \Rightarrow \neg(k_2 \text{ PD } k_1)$
2. $c_1 \leq c_2$ et $u_1 > u_2 \Rightarrow u_1 > u_2 \Rightarrow \neg(k_2 \text{ PD } k_1)$

On a donc démontré que $k_1 \text{ PD } k_2 \Rightarrow \neg(k_2 \text{ PD } k_1)$.

Transitive: Soient k_1, k_2, k_3 trois sacs à dos tels que $(k_1 \text{ PD } k_2) \land (k_2 \text{ PD } k_3)$.

$$
\begin{aligned}
k_1 \text{ PD } k_2 \Rightarrow &\ \text{(a) } c_1 < c_2 \text{ et } u_1 \geq u_2 \text{ ou (b) } c_1 \leq c_2 \text{ et } u_1 > u_2 \\
k_2 \text{ PD } k_3 \Rightarrow &\ \text{(c) } c_2 < c_3 \text{ et } u_2 \geq u_3 \text{ ou (d) } c_2 \leq c_3 \text{ et } u_2 > u_3 \\
\text{si (a) et (c)} &\Rightarrow c_1 < c_3 \text{ et } u_1 \geq u_3 \text{ donc } k_1 \text{ PD } k_3 \text{ par déf} \\
\text{si (a) et (d)} &\Rightarrow c_1 < c_3 \text{ et } u_1 > u_3 \Rightarrow c_1 < c_3 \text{ et } u_1 \geq u_3 \text{ donc } k_1 \text{ PD } k_3 \\
&\text{(si on a que } a > b, a \geq b \text{ reste vrai)} \\
\text{si (b) et (c)} &\Rightarrow c_1 < c_3 \text{ et } u_1 > u_3 \Rightarrow c_1 < c_3 \text{ et } u_1 \geq u_3 \text{ donc } k_1 \text{ PD } k_3 \\
\text{si (b) et (d)} &\Rightarrow c_1 \leq c_3 \text{ et } u_1 > u_3 \text{ donc } k_1 \text{ PD } k_3
\end{aligned}
$$

Il s'agit d'une relation d'ordre stricte.

Lex U:

- **Irreflexive:**

$$\forall k \text{ (sac à dos) tel que } k = (c_1, u_1),$$
$$(u_1 = u_1) \text{ et } (c_1 = c_1) \Rightarrow \neg(u_1 > u_1)$$
$$\text{et } \neg(u_1 = u_1 \land c_1 < c_1) \Rightarrow \neg(k \text{ RU } k).$$

- **Asymétrie:** Soient k_1 RU k_2,
  - Soit (a) $(u_1 > u_2)$ ou (b) $(u_1 = u_2) \land (c_1 < c_2)$.
  - Pour avoir k_2 RU k_1 on doit avoir soit (c) $(u_2 > u_1)$ ou (d) $(u_1 = u_2) \land (c_1 > c_2)$.
  - C impossible: dans (a) ou (b) $\Rightarrow (u_1 \geq u_2)$ donc $\neg(u_2 > u_1)$ et on pourrait jamais obtenir la situation (c) .
  - D impossible: si on est dans (b) $\Rightarrow (u_1 = u_2) \land (c_1 < c_2) \Rightarrow (c_1 < c_2) \Rightarrow \neg(c_2 < c_1) \Rightarrow$ on pourrait jamais obtenir la situation (d) .
  - Si on est dans (a) $\Rightarrow (u_1 > u_2) \Rightarrow \neg(u_1 = u_2)$ donc $\neg$ (d) .
  - On a alors $(k_1$ RU $k_2) \Rightarrow \neg(k_2$ RU $k_1)$.
- **Transitivité:** Soient k_1, k_2, k_3 tq $(k_1$ RU $k_2) \land (k_2$ RU $k_3)$,
  - k_1 RU $k_2 \Rightarrow$ (a) $(u_1 > u_2)$ ou (b) $u_1 = u_2 \land c_1 < c_2$.
  - k_2 RU $k_3 \Rightarrow$ (c) $(u_2 > u_3)$ ou (d) $u_2 = u_3 \land c_2 < c_3$.
  - Si (a) et (c) $\Rightarrow (u_1 > u_3) \Rightarrow k_1$ RU k_3.
  - (a) et (d) $\Rightarrow (u_1 > u_3) \Rightarrow k_1$ RU k_3.
  - (b) et (c) $\Rightarrow (u_1 > u_3) \Rightarrow k_1$ RU k_3.
  - (b) et (d) $\Rightarrow (u_1 = u_3) \land (c_1 < c_3) \Rightarrow k_1$ RU k_3.
  - Dans tous les cas possibles, on a k_1 RU k_3 donc relation transitive.
- **Neg transitivité:** Soient k_1, k_2, k_3 tq $\neg(k_1$ RU $k_2)$ et $\neg(k_2$ RU $k_3)$,
  - $\neg(k_1$ RU $k_2) \Rightarrow \neg(u_1 > u_2) \land \neg(u_1 = u_2 \land c_1 \leq c_2)$.
  - $\Rightarrow (u_1 \leq u_2) \land (u_1 \neq u_2 \lor c_1 > c_2)$.
  - $\Rightarrow ((u_1 \leq u_2) \land (u_1 \neq u_2)) \lor ((u_1 \leq u_2) \land (c_1 > c_2))$.
  - $\Rightarrow$ (a) $(u_1 < u_2)$ ou (b) $(u_1 \leq u_2) \land c_1 > c_2$.
  - $\neg(k_2$ RU $k_3) \Rightarrow$ (c) $(u_2 < u_3)$ ou (d) $(u_2 \leq u_3) \land (c_2 > c_3)$.
  - $\Rightarrow$ (a) et (c) ; (a) et (d) ; (b) et (c) $\Rightarrow (u_1 < u_3) \Rightarrow \neg(k_1$ RU $k_3)$.
  - (b) et (d) $\Rightarrow (u_1 \leq u_3) \land (c_1 > c_3) \Rightarrow \neg(k_1$ RU $k_3)$.
  - Donc la relation est neg transitive.

Lex C:

Mêmes propriétés que Lex U et même démonstration en échangeant u et c et en échangeant $>$ par $<$. Il s'agit alors d'une relation d'ordre strict et une relation d'ordre fort.

SR borné:

En ce qui concerne la relation bornée de borne B; nous ne pouvons pas lister des propriétés générales car les propriétés satisfaites par ce système vont dépendre de la valeur de B qu'on choisit à chaque fois.

14- Les distances entre relations:

Calculer les distances entre les différents systèmes relationnels définis, en faisant varier la borne B pour la relation bornée. Expliquer les résultats.

- Lorsqu'on augmente la borne B, les couples (k_1, k_2) de la relation bornée satisferont généralement $c_1 \leq B$, $c_2 \leq B$ et $u_1 > u_2$ (puisque c_1 et c_2 ne prennent pas de valeurs trop grandes). La majorité des couples dans la relation bornée satisferont $u_1 > u_2$ et seront également dans la relation Lex U, ce qui explique pourquoi la distance entre Lex U et cette relation bornée diminuera lorsque B augmente.

- Pour Lex C, c'est l'inverse. Plus B est de petite valeur, plus il est probable de rencontrer des cas tels que $c_1 \leq B$ et $c_2 \geq B$ pour un couple de la relation bornée. Ainsi, nous aurions $c_1 \leq c_2$, et donc ce couple appartiendrait également à Lex C, ce qui explique pourquoi la distance entre les deux relations est petite lorsque B est petit.

- Les distances entre Lex U et PD, et Lex C et PD sont égales. Explication : on voit bien que si $(k_1, k_2) \in PD$, alors $(k_1, k_2) \in LexC$ si (k_1, k_2) respecte (i) de PD $c_1 < c_2$ et $u_1 \geq u_2 \Rightarrow c_1 < c_2 \Rightarrow (k_1, k_2) \in LexC$, si (k_1, k_2) respecte (ii) de PD : $c_1 \leq c_2$ et $u_1 > u_2$.

  De manière équivalente, si $(k_1, k_2) \in PD$, alors $(k_1, k_2) \in LexU$ si (k_1, k_2) respecte (ii) de PD $c_1 \leq c_2$ et $u_1 > u_2 \Rightarrow u_1 > u_2 \Rightarrow (k_1, k_2)$ respecte (i) de Lex U $\Rightarrow (k_1, k_2) \in LexU$. Si (k_1, k_2) respecte (i) de PD $c_1 < c_2$ et $u_1 \geq u_2$.

  Ce qui signifie que la distance entre Lex C et PD est le nombre de paires de sacs dans Lex C et non dans PD, donc ce sont les couples (k_1, k_2) tels que $c_1 < c_2$ et $u_1 < u_2$. De même, la distance entre Lex U et PD est le nombre de paires de sacs dans PD et non dans Lex U, donc ce sont les couples (k_1, k_2) tels que $c_2 < c_1$ et $u_2 > u_1$.

  Pour Kendall-Tau, on a que $(k_1, k_2) \neq (k_2, k_1)$. Donc, si (k_1, k_2) est comptabilisé dans le calcul de la distance entre Lex C et PD, (k_2, k_1) serait comptabilisé dans le calcul de la distance entre Lex U et PD.

16- Niveau d'utilité:

On remarque que le niveau d'utilité maximale augmente lorsqu'on augmente notre borne B, ce qui est logique : les consommations les plus utiles sont souvent celles les plus coûteuses en termes de coût GES. Cependant, on remarque qu'à partir d'une borne $B = 10$, l'utilité maximale n'augmente plus, elle stagne à 30, ce qui est l'utilité maximale de toutes les combinaisons de sacs GES possibles.

17- PL:

Proposer un programme linéaire permettant de déterminer si un sac à dos k_1 est préféré à un sac à dos k_2 pour tous les ensembles de valeurs d'utilité dans FeasU(P).

Programme Linéaire (PL) :

- **Variables :**
  - u_c : utilité pour chaque consommation c
  - P : ensemble de préférences c
- **Maximiser :** $\sum_{c \in k_2} u_c - \sum_{c \in k_1} u_c$
- **Sous contraintes :**
  - $\sum_{c \in k_1} u_c > \sum_{c \in k_2} u_c$ pour tout $(k_1', k_2') \in P$
  - $u_c \geq 0$

19-

D'après nos tests, on remarque plusieurs choses:

- Pour toutes les préférences, plus la valeur de B augmente, plus on a de sacs non ordinalement dominés. Cela est logique puisqu'à chaque itération de la boucle `for` dans la méthode `estOrdDomine`, on teste plus de sacs lorsque B augmente, et donc il est plus probable de trouver des sacs non ordinalement dominés.

- On a un seul sac non ordinalement dominé pour les préférences du prix, et cela serait le sac le moins cher. Dans `preferences_prix`, ce sac le moins cher (dont le coût est inférieur à B) serait préféré à tous les autres, donc on ne pourrait jamais trouver un jeu de valeurs d'utilité dans lequel il serait dominé.

- Lorsque la taille des préférences augmente, le polytope des sacs non ordinalement dominés se rétrécit et on devrait s'attendre à une sortie (*output*) qui devient de plus en plus petit à mesure que la taille des préférences augmente. Cela est compatible avec les résultats qu'on observe.