Prepared by: ISRAFIL SHARDER AVEEK

১. O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB ও CD দুইটি সমান জ্যা। O থেকে AB ও CD এর উপর যথাক্রমে OP ও OQ লম্ব।

[ঢাকা বোর্ড ২০২৪]

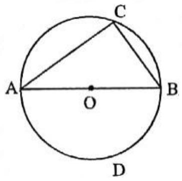
(ক) প্রমাণ কর অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

(খ) প্রমাণ কর যে; P, AB এর মধ্যবিন্দু।

(গ) প্রমাণ কর যে, OP = OQ.

১ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB একটি ব্যাস এবং $\angle ACB$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ACB$ = এক সমকোণ।



অঙ্কন : AB এর যে পাশে C বিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পাশে বৃত্তের উপর একটি বিন্দু D নিই।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : ADB চাপের উপর দণ্ডায়মান

বৃত্তস্থ $\angle ACB = \frac{1}{2}$ (কেন্দ্রস্থ সরলকোণ $\angle AOB$)

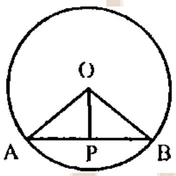
[∵ বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক]

ধাপ-২ : কিন্তু সরলকোণ $\angle AOB$ = দুই সমকোণ।

∴ $\angle ACB = \frac{1}{2}$ (দুই সমকোণ)

∴ $\angle ACB$ = এক সমকোণ। (প্রমাণিত)

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB জ্যার উপর OP লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, P, AB এর মধ্যবিন্দু।



অঙ্কন : A, O ও B, O যোগ করি।

প্রমাণ :

Δ AOP ও Δ BBOP-এ

AO = BO [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

OP = OP [সাধারণ বাহু]

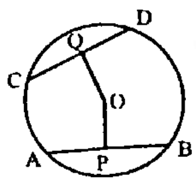
$\angle APO = \angle BPO$ [প্রত্যেকে সমকোণ]

∴ ΔAOP ≅ Δ BOP

∴ AP = BP

অতএব, P, AB এর মধ্যবিন্দু। (প্রমাণিত)

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB ও CD দুইটি সমান জ্যা। AB এবং CD জ্যা এর উপর যথাক্রমে OP এবং OQ লম্ব। O, A এবং O, C যোগ করি।



প্রমাণ করতে হবে যে, OP = OQ.

প্রমাণ :

ধাপ ১ : OP ⊥ AB ও OQ ⊥ CD.

সুতরাং AP = BP এবং CQ = DQ. [কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

∴ $AP = \frac{1}{2}AB$ এবং $CQ = \frac{1}{2}CD$.

ধাপ ২ : কিন্তু AB = CD [কল্পনা]

∴ AP = CQ.

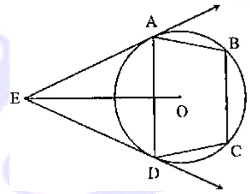
ধাপ ৩ : এখন OAP এবং OCQ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে,

অতিভুজ OA = অতিভুজ OC [উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ] [ধাপ ২ হতে] এবং AP = CQ

∴ Δ OAP ≅ Δ OCQ [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

∴ OP = OQ. **(প্রমাণিত)**

২.



চিত্রে, O বৃত্তের কেন্দ্র।

[রাজশাহী বোর্ড ২০২৪]

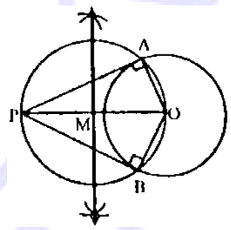
(ক) কোনো বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু থেকে বৃত্তটিতে একটি স্পর্শক আঁক। [অঙ্কনের বিবরণ নিষ্প্রয়োজন]

(খ) প্রমাণ কর যে, $\angle ABC + \angle ADC = 180°$.

(গ) প্রমাণ কর যে, OE সরলরেখা স্পর্শ জ্যা AD এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক।

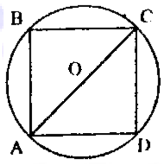
২ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক)



চিত্রে, AP, BP উভয়ই নির্ণেয় স্পর্শক।

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ABCD চতুর্ভূজটি অন্তর্লিখিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ABC + \angle ADC = 180°$.



অঙ্কন : O, C এবং O, A যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : একই চাপ ADC এর উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle AOC$ = 2 (বৃত্তস্থ $\angle ABC$)

[একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

অর্থাৎ, $\angle AOC = 2\angle ABC$

ধাপ ২ : আবার, একই চাপ ABC এর উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC$ = 2 (বৃত্তস্থ $\angle ADC$)

[একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

অর্থাৎ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC = 2\,\angle ADC$

∴ $\angle AOC$ + প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC = 2(\angle ABC + \angle ADC)$

কিন্তু $\angle AOC$ + প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC = 4$ সমকোণ

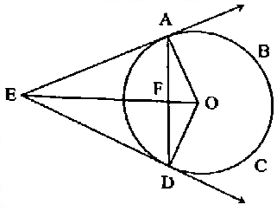
$\therefore$ $2(\angle ABC + \angle ADC) = 4$ সমকোণ

বা, $\angle ABC + \angle ADC = 2$ সমকোণ।

$\therefore$ $\angle ABC + \angle ADC = 180°$. **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু E থেকে বৃত্তে AE ও DE দুইটি স্পর্শক এবং AD হচ্ছে স্পর্শ জ্যা। OE রেখাংশ AD জ্যাকে F বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, OE সরলরেখা স্পর্শ জ্যা AD এর লম্ব সমদ্বিখন্ডক।



অঙ্কন : O, A এবং O, D যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : Δ OAE এবং Δ ODE এর মধ্যে,

OA = OD [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

AE = DE [বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় সমান]

এবং OE = OE [সাধারণ বাহু]

$\therefore$ OAE $\cong$ ODE [বাহু-বাহু-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

$\therefore$ $\angle AOE = \angle DOE$

অর্থাৎ, $\angle AOF = \angle DOF$

ধাপ-২ : এখন, Δ OAF ও Δ ODF-এ

OA = OD [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

OF = OF [সাধারণ বাহু]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AOF$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle DOF$ [ধাপ (১) হতে]

$\therefore$ Δ OAF $\cong$ Δ ODF [বাহু-কোণ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

AF = DF

এবং $\angle AFO = \angle DFO$

ধাপ-৩ : এখন, $\angle AFD = 1$ সরলকোণ

বা, $\angle AFO + \angle DFO = 2$ সমকোণ [$\because$ এক সরলকোণ = 2 সমকোণ]

বা, $\angle AFO + \angle AFO = 2$ সমকোণ [ধাপ (২) হতে]

বা, $2\angle AFO = 2$ সমকোণ

বা, $\angle AFO = 1$ সমকোণ

$\therefore$ $\angle DFO = \angle AFO = 1$ সমকোণ

$\therefore$ $OF \perp AD$

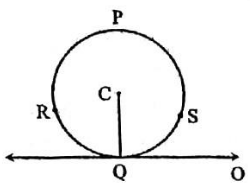
অর্থাৎ $OE \perp AD$

আবার, AF = DF

$\therefore$ OE, AD কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

অতএব, OE সরলরেখা স্পর্শ জ্যা AD এর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক। **(প্রমাণিত)**

৩.



চিত্রে QO স্পর্শক এবং CQ স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

[যশোর বোর্ড ২০২৪]

(ক) চিত্র হতে CQ = 3.5 cm হলে বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\angle RCS = 2/RPS$.

(গ) প্রমাণ কর যে, $QO \perp CQ$.

৩ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, CQ = 3.5 cm

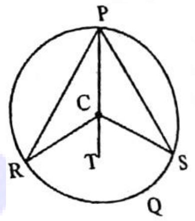
অর্থাৎ, বৃত্তের ব্যাসার্ধ r = 3.5 cm

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$

$= 3.1416 \times (3.5)^2 = 38.4846$ cm^2 (প্রায়)

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 38.4846 cm^2 (প্রায়)।

(খ) এখানে, C কেন্দ্রবিশিষ্ট PRQS বৃত্তে RQS উপচাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ $\angle RPS$ এবং কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle RCS$। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle RCS = 2\angle RPS$।



অঙ্কন : চ এবং ঈ যোগ করে পর্যন্ত বর্ধিত করি। জ

প্রমাণ :

ধাপ ১ : Δ PRC এর বহিস্থ কোণ $\angle RCT = \angle CPR + \angle CRP$

ধাপ ২ : Δ PRC এ CP = CR [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

অতএব, $\angle CPR = \angle CRP$

[$\because$ ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সমান]

ধাপ ৩ : ধাপ (১) ও (২) থেকে পাই $\angle RCT = 2\angle CPR$

ধাপ ৪ : একইভাবে Δ PCS থেকে পাই $\angle SCT = 2\angle SPC$

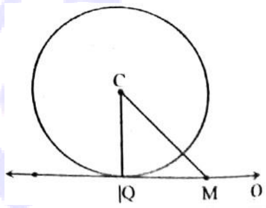
ধাপ ৫ : ধাপ (৩) ও (৪) থেকে পাই,

$\angle RCT + \angle SCT = 2\angle CPR + 2\angle SPC$

বা, $\angle RCS = 2(\angle CPR + \angle SPC)$

অর্থাৎ $\angle RCS = 2\angle RPS$. **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করে, C কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের ওপরস্থ Q বিন্দুতে QO একটি স্পর্শক এবং CQ স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ। প্রমাণ করতে হবে যে, $QO \perp CQ$.



অঙ্কন : QO স্পর্শকের ওপর যেকোনো একটি বিন্দু M নিই এবং C, M যোগ করি।

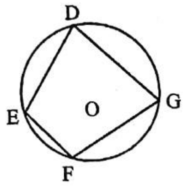
প্রমাণ :

ধাপ ১ : যেহেতু বৃত্তের Q বিন্দুতে QO একটি স্পর্শক, সুতরাং ঐ Q বিন্দু ব্যতীত QO এর ওপরস্থ অন্য সকল বিন্দু বৃত্তের বাইরে থাকবে। সুতরাং M বিন্দুটি বৃত্তের বাইরে অবস্থিত।

ধাপ-২ : CM বৃত্তের ব্যাসার্ধ CQ এর চেয়ে বড়, অর্থাৎ, CM > CQ এবং তা স্পর্শ বিন্দু ব্যতীত QO এর ওপরস্থ M বিন্দুর সকল অবস্থানের জন্য সত্য।

$\therefore$ কেন্দ্র C থেকে QO স্পর্শকের ওপর CQ হলো ক্ষুদ্রতম দূরত্ব। সুতরাং $QO \perp CQ$. **(প্রমাণিত)**

৪.



চিত্রে, O বৃত্তের কেন্দ্র।

[কুমিল্লা বোর্ড ২০২৪]

(ক) দুইটি বৃত্তের ব্যাস যথাক্রমে 8 সে.মি. এবং 6 সে.মি.। বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করলে কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

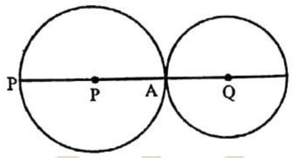
(খ) প্রমাণ কর যে, $\angle EDG + \angle EFG$ = দুই সমকোণ।

(গ) DF এবং EG কর্ণদ্বয় পরস্পর T বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\angle DOE + \angle FOG = 2\angle DTE$।

৪ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) চিত্রে, P ও Q কেন্দ্রবিশিষ্ট দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে।

P কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাস = 8 সেমি অর্থাৎ ৮ ব্যাসার্ধ $r_1 = PA = \frac{8}{2} = 4$ সেমি।



Q কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাস = 6 সেমি

অর্থাৎ ব্যাসার্ধ $P_2 = QA = \frac{6}{3} = 3$ সেমি।

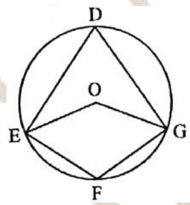
∴ বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব = PQ

$= r_1 + r_2$

$= 4 + 3 = 7$ সেমি

নির্ণেয় দূরত্ব 7 সেমি।

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে EFGD চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle EDG + \angle EFG = 2$ সমকোণ।



প্রমাণ :

ধাপ-১ : একই চাপ EFG এর উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle EOG = 2$ (বৃত্তস্থ $\angle EDG$)

[বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

অর্থাৎ $\angle EOG = 2\angle EDG$.

ধাপ-২ : আবার, একই চাপ EDG এর উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ $\angle EOG = 2$ (বৃত্তস্থ $\angle EFG$) অর্থাৎ, প্রবৃদ্ধ $\angle EOG = 2\angle EFG$

[বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

কিন্তু, $\angle EOG$ + প্রবৃদ্ধ $\angle EOG = 360°$

বা, $2\angle EDG + 2\angle EFG = 360°$

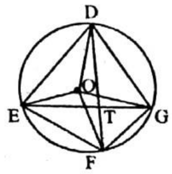
বা, $2(\angle EDG + \angle EFG) = 360°$

বা, $\angle EDG + \angle EFG = 180°$

বা, $\angle EDG + \angle EFG = 2 \times 90°$

∴ $\angle EDG + \angle EFG = 2$ সমকোণ। **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে DEFG চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত। DEFG চতুর্ভুজের DF ও EG কর্ণদ্বয় পরস্পর T বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle DOE + \angle FOG = 2\angle DTE$.



অঙ্কন : O, D; O, E; O, F এবং O, G যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : DE চাপের উপর অবস্থিত।

$\angle DOE = 2\angle DGE$ [কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

ধাপ ২ : FG চাপের উপর অবস্থিত

$\angle FOG = 2\angle GDF$ [একই কারণে]

ধাপ ৩ : $\angle DOE + \angle FOG$

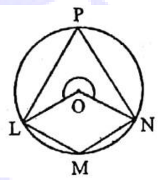
$= 2(\angle DGE + \angle GDF)$ [ধাপ (১) ও (২) থেকে]

$=2(\angle DGT + \angle GDT)$

ধাপ ৪ : Δ GDT এর বহিঃস্থ $\angle DTE$ = অন্তঃস্থ $(\angle DGT + \angle GDT)$

∴ $\angle DOE + \angle FOG = 2\angle DTE$. **(প্রমাণিত)** [ধাপ (৩) থেকে]

৫.



চিত্রে O কেন্দ্রবিশিষ্ট PLMN বৃত্তে OL = 5 সে.মি.।

[চট্টগ্রাম বোর্ড ২০২৪]

(ক) চিত্রের বৃত্তটির পরিধি ও ব্যাসের অন্তর নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\angle LMN = \frac{1}{2}$ প্রবৃদ্ধ $\angle LON$.

(গ) উদ্দীপকের বৃত্তস্থ চতুর্ভুজটির PM ও LN কর্ণদ্বয় পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\angle MON + \angle LOP = 2\angle MEN$.

৫ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট PLMN বৃত্তের OL = 5 সে.মি.

অর্থাৎ ব্যাসার্ধ r = 1 সে.মি.

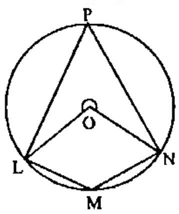
∴ চিত্রের বৃত্তটির পরিধি $= 2\pi r$

$= 2 \times 3.1416 \times 5 = 31.416$ সে.মি.

ব্যাস $= 2r = 2 \times 5 = 10$ সে.মি.

∴ পরিধি ও ব্যাসের অন্তর $= 31.416 - 10 = 21.416$ সে.মি.

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PLMN চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle LMN = \frac{1}{2}$ প্রবৃদ্ধ $\angle LON$.



প্রমাণ :

ধাপ ১ : LMN চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle LPN$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle LON$.

∴ $\angle LON = 2\angle LPN$ [কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

ধাপ ২ : আবার, বৃত্তের কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ 360°

অর্থাৎ, প্রবৃদ্ধ $\angle LON + \angle LON = 360°$

বা, প্রবৃদ্ধ $\angle LON = 360° - \angle LON$

বা, প্রবৃদ্ধ $\angle LON = 360° - 2\angle LPN$

ধাপ ৩ : PLMN বৃত্তস্থ চতুর্ভুজে,

$\angle LMN + \angle LPN = 180°$

[বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি 180°]

বা, $2\angle LMN + 2\angle LPN = 360°$

বা, $2\angle LMN = 360° - 2\angle LPN$

বা, $2\angle LMN =$ প্রবৃদ্ধ $\angle LON$

$\therefore$ $\angle LMN = \frac{1}{2} \times$ প্রবৃদ্ধ $\angle LON$. **(প্রমাণিত)**

(গ) এখানে, PLMN চতুর্ভুজটি O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে অন্তর্লিখিত। PM ও LN কর্ণদ্বয় পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle MON + \angle LOP = 2\angle MEN$

প্রমাণ :

ধাপ ১ : PL চাপের উপর অবস্থিত $\angle LOP = 2\angle PNL$

[বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

ধাপ ২ : MN চাপের উপর অবস্থিত

$\angle MON = 2\angle NPM$ [একই কারণে]

ধাপ ৩ : $\angle LOP + \angle MON = 2(\angle PNL + \angle NPM)$ [ধাপ (১) ও (২) থেকে]

$= 2(\angle PNE + \angle NPE)$

ধাপ ৪ : Δ NPE এর বহিঃস্থ $\angle MEN =$ অন্তঃস্থ $(\angle PNE + \angle NPE)$

$\therefore$ $\angle MON + \angle LOP = 2\angle MEN$. [ধাপ (৩) থেকে]

(প্রমাণিত)

৬. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3.5 সে.মি., 4 সে.মি. এবং 4.5 সে.মি.।

[চট্টগ্রাম বোর্ড ২০২৪]

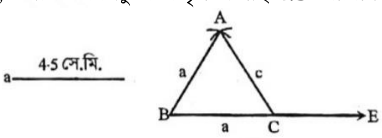
(ক) উদ্দীপকের বৃহত্তম বাহুর সমান বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

(খ) উদ্দীপকের ত্রিভুজটির অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন কর। [অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক]

(গ) উদ্দীপকের ক্ষুদ্রতম বাহুকে ব্যাসার্ধ ধরে অঙ্কিত বৃত্তে এমন দুটি স্পর্শক আঁক যেন তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 90° হয়। [অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক]

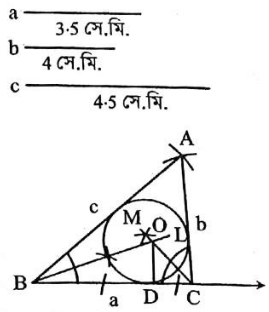
৬ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, উদ্দীপকের ত্রিভুজটির বৃহত্তম বাহু 4.5 সে.মি.।



ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁকা হলো। যার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য a = 4.5 সে.মি.

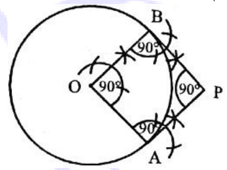
(খ) মনে করি, ত্রিভুজের তিনটি বাহু a = 3.5 সে.মি., b = 4 সে.মি. এবং c = 4.5 সে.মি. দেওয়া আছে। এর অন্তর্বৃত্ত আঁকতে হবে।



অঙ্কন : যেকোনো রশ্মি BE হতে a এর সমান করে BC কেটে নিই। BC রেখাংশের B ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে যথাক্রমে c ও b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BC এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ, আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে। A, B এবং A, C যোগ করি। তাহলে Δ ABC অঙ্কিত হলো যার অন্তর্বৃত্ত আঁকতে হবে।

এখন, Δ ABC এর $\angle ABC$ ও $\angle ACB$ এর সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে BL ও CM আঁকি। মনে করি, তারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। O থেকে BC এর উপর OD লম্ব আঁকি এবং মনে করি, তা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। O কে কেন্দ্র করে OD এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। তাহলে এই বৃত্তটিই নির্ণেয় অন্তর্বৃত্ত।

(গ) মনে করি, r = 3.5 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট ABC একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র O, উক্ত বৃত্তে এমন দুইটি স্পর্শক আঁকতে হবে যাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 90°।

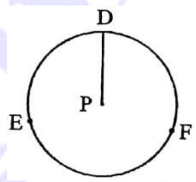


অঙ্কন :

১. OA যেকোনো ব্যাসার্ধ নিই এবং $\angle AOB = 90°$ আঁকি। OB রশ্মি বৃত্তটিকে B বিন্দুতে ছেদ করেছে।

২. এখন, OA এর A বিন্দুতে AP এবং OB এর B বিন্দুতে BP লম্ব আঁকি। AP ও BP লম্বদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। তাহলে AP ও BP-ই উদ্দীষ্ট স্পর্শকদ্বয় যাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 90°.

৭.



চিত্রে P বৃত্তের কেন্দ্র।

[সিলেট বোর্ড ২০২৪]

(ক) DP = 4.5 cm হলে, বৃত্তটির পরিধি নির্ণয় কর।

(খ) DE = DF হলে, প্রমাণ কর যে, DE ও DF, P বিন্দু হতে সমদূরবর্তী।

(গ) Δ DEF-এর অন্তবৃত্ত আঁক। অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক]

৭ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) ধরি, DEF বৃত্তে ব্যাসার্ধ, DP = r = 4.5 cm

$\therefore$ বৃত্তটির পরিধি $= 2\pi r$

$= 2 \times 3.1416 \times 4.5$ cm $= 28.274$ cm

(খ) মনে করি, P কেন্দ্রবিশিষ্ট DEF বৃত্তের DE = DF। প্রমাণ করতে হবে যে, DE ও DF, P বিন্দু হতে সমদূরবর্তী।

অঙ্কন : কেন্দ্র P হতে DE ও DF জ্যা এর উপর যথাক্রমে PR ও PQ লম্ব আঁকি। P. E এবং P, F যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : PR ⊥ DE এবং PQ ও DF

∴ DR = RE এবং DQ = QF [∵ বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

বা, $RE = \frac{1}{2}DE$

এবং $QF = \frac{1}{2}DF$

ধাপ-২ : যেহেতু DE = DF

বা, $\frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}DF$

∴ RE = QF [ধাপ ১ হতে]

ধাপ-৩ : এখন, Δ EPR এবং Δ FPQ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে অতিভুজ PE = অতিভুজ PF [উভয়ই একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

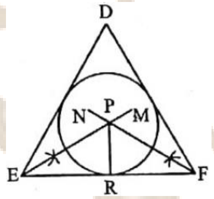
এবং RE = QF [ধাপ-২ হতে]

Δ EPR ≅ Δ FPQ [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

∴ PR = PQ

ধাপ-৪ : কিন্তু PR এবং PQ কেন্দ্র P হতে যথাক্রমে জ্যা DE এবং DF এর দূরত্ব। সুতরাং DE ও DF কেন্দ্র P বিন্দু হতে সমদূরবর্তী। **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, DEF একটি ত্রিভুজ। এর অন্তবৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ Δ DEF এর ভিতর এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে, যা DE; EF এবং DF বাহু তিনটির প্রত্যেকটিকে স্পর্শ করে।



অঙ্কন : ∠DEF এবং ∠DFE এর সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EM এবং FN আঁকি। মনে করি, তারা P বিন্দুতে ছেদ করে। P হতে EF এর উপর PR লম্ব আঁকি। PR রেখা EF কে R বিন্দুতে ছেদ করে। এখন P কে কেন্দ্র করে PR এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। তাহলে অঙ্কিত বৃত্তই Δ DEF এর অন্তবৃত্ত।

8. a = 4 সে.মি., b = 6.5 সে.মি., ∠x = 30°.

[বরিশাল বোর্ড ২০২৪]

(ক) 12 সে.মি. পরিসীমাবিশিষ্ট একটি বর্গ অঙ্কন কর। [শুধুমাত্র অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক]

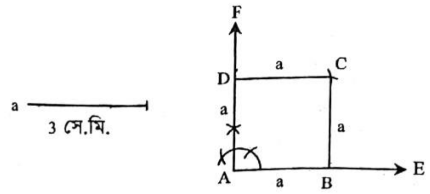
(খ) একটি ত্রিভুজের ভূমি b, ভূমি সংলগ্ন ∠x এবং অপর দুই বাহুর অন্তর $\frac{a}{2}$ হলে ত্রিভুজটি আঁক। [অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক]

(গ) a ব্যাসবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু হতে উক্ত বৃত্তের দুইটি স্পর্শক আঁক যেন তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 2∠x হয়। [অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক]

৮ নং প্রশ্নের উত্তর

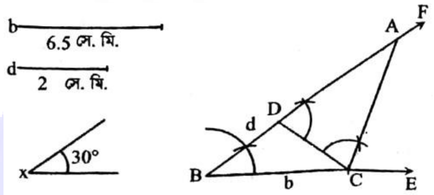
(ক) দেওয়া আছে, বর্গের পরিসীমা = 12 সে.মি.

∴ বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্য $a = \frac{12}{4} = 3$ সে.মি.



ABCD বর্গ অঙ্কন করা হলো যার বাহু = 3 সে.মি.।

(খ) এখানে, ত্রিভুজের ভূমি b = 6.5 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন কোণ ∠x = 30° এবং অপর দুই বাহুর অন্তর $d = \frac{a}{2} = \frac{d}{2} = 2$ সে.মি.। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

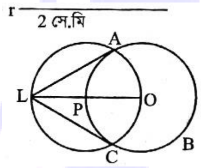


অঙ্কন :

১. যেকোনো একটি রশ্মি BE থেকে ভূমি a এর সমান করে BC রেখাংশ কেটে নিই।
২. BC রেখাংশের B বিন্দুতে ∠x এর সমান ∠CBF আঁকি।
৩. BF রশ্মি থেকে d এর সমান BD অংশ কাটি।
৪. C, D যোগ করি।
৫. DC রেখাংশের যে পাশে F বিন্দু আছে সেই পাশে C বিন্দুতে ∠FDC এর সমান ∠DCA আঁকি। CA রশ্মি BF রশ্মিকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, Δ ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট অইঈ বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = \frac{a}{2} = \frac{4}{2} = 2$ সে.মি.। ABC বৃত্তে এরূপ দুইটি স্পর্শক আঁকতে হবে যেন তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 2 ∠x = 2 × 30° = 60° হয়।



ABC বৃত্তের পরিধির উপর P যেকোনো একটি বিন্দু নিই। O, P যোগ করি এবং OP কে L পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন OP = PL হয়।

P কে কেন্দ্র করে OP বা PL এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি।

এ বৃত্তটি ABC বৃত্তকে C ও A বিন্দুতে ছেদ করে। C, L এবং A, L যোগ করি।

তাহলে, CL এবং AL উদ্দীষ্ট স্পর্শকদ্বয় যাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60°।

৯. O কেন্দ্রবিশিষ্ট EFHG বৃত্তের FHG চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ ∠FEG এবং কেন্দ্রস্থ ∠FOG।

[বরিশাল বোর্ড ২০২৪]

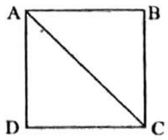
(ক) প্রমাণ কর যে, কোনো বর্গক্ষেত্র তার কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের অর্ধেক।

(খ) প্রমাণ কর যে, 2∠FEG = ∠FOG.

(গ) যদি ∠FEH + ∠HEG = 90° হয়, তবে প্রমাণ কর যে, F, O, G বিন্দু তিনটি সমরেখ।

৯ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) মনে করি, ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। এর AC কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = \frac{1}{2}AC^2$.



প্রমাণ :

ধাপ ১ : Δ ABC-এ $\angle B$ = এক সমকোণ

[বর্গক্ষেত্রের সকল কোণ সমকোণ]

$\therefore$ Δ ABC সমকোণী এবং AC এর অতিভুজ।

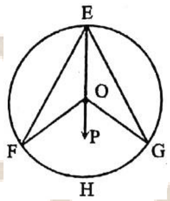
ধাপ ২ : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী]

বা, $AC^2 = AB^2 + AB^2$ [বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলো পরস্পর সমান]

বা, $2AB^2 = AC^2$

$\therefore$ $AB = \frac{1}{2} AC^2$. **(প্রমাণিত)**

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট EFHG বৃত্তের FHG চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle FEG$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle FOG$. প্রমাণ করতে হবে যে, $2\angle FEG = \angle FOG$.



অঙ্কন : ধরি, EG রেখাংশ কেন্দ্রগামী নয়। এক্ষেত্রে E বিন্দু দিয়ে কেন্দ্রগামী রেখাংশ EP আঁকি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : Δ EOF এর বহিঃস্থ কোণ

$\angle FOP = \angle FOE + \angle EFO$

[বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]

ধাপ-২ : Δ EOF-এ OE = OF [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\therefore$ $\angle FEO = \angle EFO$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটি সমান]

ধাপ-৩ : $\angle FOP = 2\angle FEO$ [ধাপ ১ ও ধাপ-২ হতে]

ধাপ-৪ : একইভাবে Δ EOG থেকে পাই, $\angle GOP = 2\angle GEO$

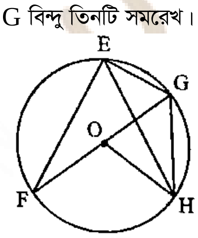
ধাপ-৫ : $\angle FOP + \angle GOP = 2\angle FEO + 2\angle GEO$ [ধাপ-(৩) ও (৪) হতে]

বা, $\angle FOG = 2(\angle FEO + \angle GEO)$

বা, $\angle FOG = 2\angle FEG$

$\therefore$ $2\angle FEG = \angle FOG$. **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট EFHG বৃত্তে $\angle FEH + \angle HEG = 90°$। প্রমাণ করতে হবে যে, F, O, G বিন্দু তিনটি সমরেখ।



অঙ্কন : O, H যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : যেহেতু কেন্দ্রস্থ $\angle FOH$ এবং বৃত্তস্থ $\angle FEH$ একই চাপ FH এর উপর দন্ডায়মান। সেহেতু $\angle FOH = 2\angle FEH$

[$\because$ বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

ধাপ-২ : অনুরূপভাবে, HG চাপের উপর দণ্ডায়মান $\angle HOG = 2\angle HEG$

ধাপ-৩ : $\angle FOH + \angle HOG = 2\angle FEH + 2\angle HEG$

$= 2(\angle FEH + \angle HEG)$

$= 2 \times 90°$ [$\because$ $\angle FEH + \angle HEG = 90°$]

$= 180°$

যেহেতু $\angle FOH$ এবং $\angle HOG$ সন্নিহিত কোণ।

সুতরাং F, O. G বিন্দু তিনটি সমরেখ। **(প্রমাণিত)**

১০. (i) O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQRS একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

(ii) M কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ABCD চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত। AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

[দিনাজপুর বোর্ড ২০২৪]

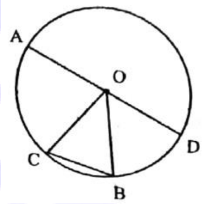
(ক) প্রমাণ কর যে, বৃত্তের ব্যাসই বৃহত্তম জ্যা।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\angle PQR + \angle PSR$ = দুই সমকোণ।

(গ) দেখাও যে, $\angle AMB + \angle CMD = 2\angle AEB$.

১০ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ADBC বৃত্তে AD ব্যাস। BC ব্যাস ভিন্ন যেকোনো একটি জ্যা নিই। O, C এবং O, B যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তের ব্যাসই বৃহত্তম জ্যা অর্থাৎ AD > BC.



প্রমাণ : ধাপ ১ : OA = OB = OC = OD [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

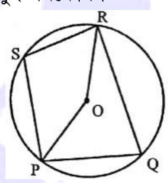
ধাপ ২ : এখন, Δ OCB এ OC + OB > BC

[$\because$ ত্রিভুজের দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]

বা, OA + OD > BC [ধাপ (১) হতে]

$\therefore$ AD > BC [$\because$ OA + OD = AD] **(প্রমাণিত)**

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQRS একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle PQR + \angle PSR$ = দুই সমকোণ।



অঙ্কন : O, P এবং O, R যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : একই চাপ PSR এর উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle POR$ = 2 (বৃত্তস্থ $\angle PQR$)

[একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

অর্থাৎ, $\angle POR = 2\angle PQR$

ধাপ ২ : আবার, একই চাপ PQR এর উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle POR$ = 2 (বৃত্তস্থ $\angle PSR$)

[একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

অর্থাৎ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle POR = 2\angle PSR$

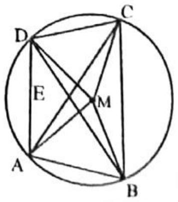
$\therefore$ $\angle POR$ + প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle POR = 2(\angle PQR + \angle PSR)$

কিন্তু $\angle POR$ + প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle POR$ = 4 সমকোণ

$\therefore$ $2(\angle PQR + \angle PSR)$ = 4 সমকোণ

$\therefore$ $\angle PQR + \angle PSR$ = 2 সমকোণ। **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, M কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ABCD চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত। ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। M, A; M, B; M, C এবং M, D যোগ করি। দেখাতে হবে যে, $\angle AMB + \angle CMD = 2\angle AEB$.



প্রমাণ :

ধাপ ১ : AB চাপের উপর অবস্থিত

$\angle AMB = 2\angle ADB$

[∵ বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

ধাপ ২ : CD চাপের উপর অবস্থিত

$\angle CMD = 2\angle DAC$ [একই কারণে]

ধাপ ৩ : $\angle AMB + \angle CMD = 2(\angle ADB + \angle DAC)$

[ধাপ (১) ও (২) থেকে]

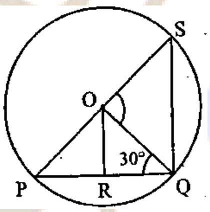
$= 2(\angle ADE + \angle DAE)$

ধাপ ৪ : Δ DAE এর বহিঃস্থ $\angle AEB$ = অন্তঃস্থ $(\angle ADE + \angle DAE)$

$\therefore \angle AMB + \angle CMD = 2\angle AEB$. [ধাপ (৩) থেকে]

(দেখানো হলো)

১১.



O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQ ব্যাসভিন্ন জ্যা এবং $OR \perp PQ$.

[ময়মনসিংহ বোর্ড ২০২৪]

(ক) $\angle OQS$ কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, PR = QR.

(গ) দেখাও যে, Δ QOS ও বৃত্তকলা QOS এর ক্ষেত্রফলের অনুপাত $3\sqrt{3} : 2\pi$.

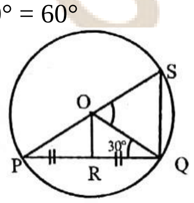
১১ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) এখানে, $\angle OQP = 30°$

$\angle PQS$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলে $\angle PQS = 90°$

$\angle OQS = 90° - \angle OQP$

$= 90° - 30° = 60°$



আবার, OP = OQ = OS

[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\therefore \angle OSQ = \angle OQS = 60°$ [সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণ]

$\therefore \angle QOS = 180° - (\angle OQS + \angle OSQ)$

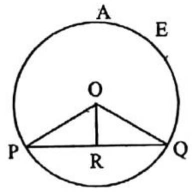
$= 180° - (60° + 60°)$

$= 180° - 120°$

$= 60°$.

নির্ণেয় $\angle QOS = 60°$.

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQ ব্যাস ভিন্ন জ্যা এবং $OR \perp PQ$। প্রমাণ করতে হবে যে, PR = QR.



প্রমাণ :

ধাপ-১ : যেহেতু $OR \perp PQ$

সেহেতু $\angle ORP = \angle ORQ$ এক সমকোণ।

$\therefore \Delta$ OPR ও অ Δ OQR দুইটি সমকোণী ত্রিভুজ।

ধাপ-২ : Δ OPR এবং Δ OQR সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে

OP = OQ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং OR = OR [সাধারণ বাহু]

$\therefore \Delta OPR \cong OQR$ [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

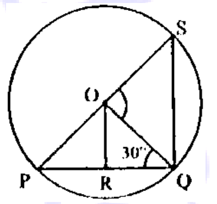
$\therefore$ PR = QR. **(প্রমাণিত)**

(গ) 'ক' হতে পাই,

$\angle OSQ = \angle QOS = \angle OQS = 60°$

$\therefore$ OQ = OS = QS

$\therefore \Delta$ QOS সমবাহু ত্রিভুজ।



ধরি, সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য = a একক

$\therefore \Delta$ QOS এর ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ বর্গ একক

এবং বৃত্তকলা QOS এর ক্ষেত্রফল $= \frac{\theta}{360°} \times \pi a^2$

$= \frac{60°}{360} \times \pi a^2$

$= \frac{\pi a^2}{6}$ বর্গ একক

$\therefore \Delta$ QOS এর ক্ষেত্রফল : বৃত্তকলা QOS এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 : \frac{\pi a^2}{6}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} : \frac{\pi}{6}$

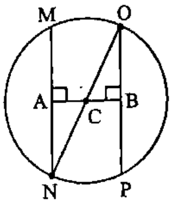
$= 12 \times \frac{\sqrt{3}}{4} : 12 \times \frac{\pi}{6}$ [12 দ্বারা গুণ করে]

$= 3\sqrt{3} : 2\pi$

$\therefore \Delta$ QOS এর ক্ষেত্রফল : বৃত্তকলা QOS এর ক্ষেত্রফল

$= 3\sqrt{3} : 2\pi$ **(দেখানো হলো)**

১২.



চিত্রে C বৃত্তের কেন্দ্র এবং MN = OP.

[ঢাকা বোর্ড ২০২৩]

(ক) বৃত্তের পরিধি 25 সে.মি. হলে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।
(খ) প্রমাণ কর যে, AC = BC.
(গ) যদি MN > OP হয়, তবে প্রমাণ কর যে, AC < BC.

১২ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ = r

∴ বৃত্তের পরিধি = $2\pi r$ একক

দেওয়া আছে, বৃত্তের পরিধি = 25 সে. মি.

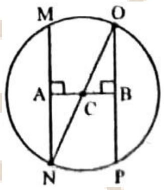
অর্থাৎ, $2\pi r$ = 25 সে. মি.

বা, $r = \frac{25}{2\pi}$ সে. মি. $= \frac{25}{2 \times 3.1416}$ সে. মি.

∴ r = 3.979 সে. মি. (প্রায়)

নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ 3.979 সে. মি. (প্রায়)।

(খ) মনে করি, C কেন্দ্রবিশিষ্ট MNPO বৃত্তে MN ও OP ব্যাস ভিন্ন দুইটি জ্যা যেখানে MNOP, AC ⊥ MN এবং BC ⊥ OP. প্রমাণ করতে হবে যে, AC = BC।



প্রমাণ :

ধাপ ১ : AC ⊥ MN এবং BC ⊥ OP

সুতরাং, MA = NA এবং OB = PB [∵ বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

∴ $NA = \frac{1}{2}MN$ এবং $OB = \frac{1}{2}OP$.

ধাপ ২ : কিন্তু MN = OP

বা, $\frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}OP$

∴ NA = OB [ধাপ (১) হতে]

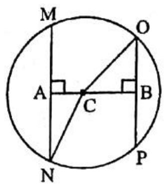
ধাপ ৩ : এখন, ΔACN এবং ΔBCO সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে অতিভুজ CN = অতিভুজ CO [উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং NA = OB [ধাপ (২) হতে]

∴ ΔACN ≅ ΔBCO [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

অতএব, AC = BC **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, C কেন্দ্রবিশিষ্ট MNPO বৃত্তে MN ও OP ব্যাস ভিন্ন দুইটি জ্যা যেখানে MN > OP, AC ⊥ MN এবং BC ⊥ OP। প্রমাণ করতে হবে যে, AC < BC



প্রমাণ : ধাপ ১ : AC ⊥ MN এবং BC ⊥ OP

সুতরাং MA = NA এবং OB = PB [∵ বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

∴ $NA = \frac{1}{2}MN$ এবং $OB = \frac{1}{2}OP$

ধাপ ২ : ACN সমকোণী ত্রিভুজে

$NA^2 + AC^2 = CN^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $NA^2 = CN^2 - AC^2$

ধাপ ৩ : আবার, BCO সমকোণী ত্রিভুজে

$OB^2 + BC^2 = CO^2$

বা, $OB^2 = CO^2 - BC^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

ধাপ ৪ : এখন, MN > OP

বা, $\frac{1}{2}MN > \frac{1}{2}OP$

বা, NA > OB [ধাপ (১) হতে]

বা, $NA^2 > OB^2$

বা, $CN^2 - AC^2 > CO^2 - BC^2$

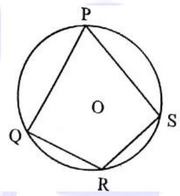
বা, $CN^2 - AC^2 > CN^2 - BC^2$ [∵ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ CN = CO]

বা, $-AC^2 > -BC^2$

বা, $AC^2 < BC^2$

∴ AC < BC. **(প্রমাণিত)**

১৩.



চিত্রে PQRS বৃত্তের কেন্দ্র O এবং OP = 4.5 সে.মি.।

[ঢাকা বোর্ড ২০২৩]

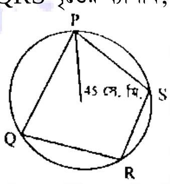
(ক) উদ্দীপকের বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\angle QPS = \frac{1}{2}\angle QOS$.

(গ) যদি PR এবং QS কর্ণদ্বয় পরস্পর M বিন্দুতে ছেদ করে তবে প্রমাণ কর যে, ∠POQ + ∠ROS = 2∠PMQ.

১৩ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) এখানে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট PQRS বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r = OP = 4.5 সে. মি.।



∴ PQRS বৃত্তের ক্ষেত্রফল

$= \pi r^2$ বর্গ একক

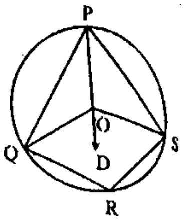
$= 3.1416 \times (4.5)^2$ বর্গ সে. মি.

$= 3.1416 \times 20.25$ বর্গ সে. মি.

= 63.617 বর্গ সে. মি. (প্রায়)

নির্ণেয় বৃত্তের ক্ষেত্রফল 63.617 বর্গ সে. মি. (প্রায়)।

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQRS একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। O, Q এবং O, S যোগ করি। বৃত্তটির একই উপচাপ QRS এর উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ ∠QPS এবং কেন্দ্রস্থ কোণ ∠QOS। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle QPS = \frac{1}{2}\angle QOS$।



অঙ্কন : P বিন্দু দিয়ে কেন্দ্রগামী রেখাংশ PD আঁকি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : Δ POQ এর বহিঃস্থ কোণ ∠QOD = ∠QPO + ∠PQO

[∵ ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]

ধাপ ২ : ∵ POQ এ OP = OQ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

অতএব, ∠QPO = ∠PQO [সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণ দুইটি সমান]

ধাপ ৩ : ধাপ (১) ও (২) থেকে ∠QOD = 2∠QPO

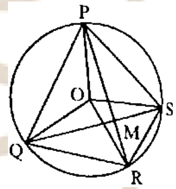
ধাপ ৪ : একইভাবে Δ POS থেকে ∠SOD = 2∠SPO

ধাপ ৫ : ধাপ (৩) ও (৪) থেকে ∠QOD + ∠SOD = 2∠QPO + 2∠SPO

বা, ∠QOS = 2∠QPS [∴ ∠QOD + ∠SOD = ∠QOS]

∴ $\angle QPS = \frac{1}{2}\angle QOS$. **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQRS একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। PQRS চতুর্ভুজের PR ও QS কর্ণদ্বয় পরস্পর M বিন্দুতে ছেদ করেছে। O, P; O, Q; O R এবং O, S যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, ∠POQ + ∠ROS = 2 ∠PMQ



প্রমাণ :

ধাপ ১ : একই চাপ PQ এর উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ ∠POQ এবং বৃত্তস্থ কোণ ∠PSQ।

∴ ∠POQ = 2∠PSQ [∵ বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

ধাপ ২ : আবার, একই চাপ RS এর উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ ∠ROS এবং বৃত্তস্থ কোণ ∠SPR।

∴ ∠ROS = 2 ∠SPR [∵ বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

ধাপ ৩ : Δ PMS-এর বহিঃস্থ ∠PMQ = অন্তঃস্থ বিপরীত (∠PSM + ∠SPM)

ধাপ ৪ : এখন, ∠POQ + ∠ROS = 2 (PSQ + ∠SPR)

[ধাপ (১) ও (২) হতে]

= 2 (∠PSM + ∠SPM)

= 2 ∠PMQ (ধাপ (৩) হতে]

∴ ∠POQ + ∠ROS = 2∠PMQ **(প্রমাণিত)**

১৪. ABC সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O এবং পরিবৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P হতে বৃত্তটিতে PM ও PN দুইটি স্পর্শক।

[রাজশাহী বোর্ড ২০২৩]

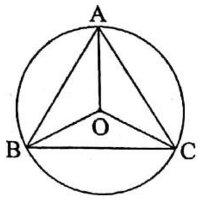
(ক) ∠AOB এর মান নির্ণয় কর।

(খ) পরিবৃত্তটি অঙ্কন কর। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)

(গ) প্রমাণ কর যে, PM = PN.

১৪ নং প্রশ্নের উত্তর

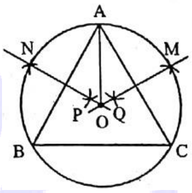
(ক) এখানে, ABC সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র O। পরিকেন্দ্র O বিন্দুতে উৎপন্ন কোণ = 360°



∴ ∠AOB এর মান $= \frac{360°}{3} = 120°$

নির্ণেয় ∠AOB এর মান 120°.

(খ) মনে করি, ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। এর এর পরিবৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে যা, ABC ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু A, B ও C বিন্দু দিয়ে যায়।



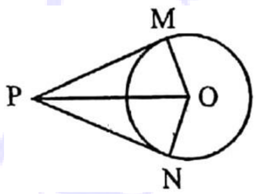
অঙ্কন :

১. AB ও AC রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডক যথাক্রমে NQ ও MP আঁকি। মনে করি, এরা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে।

২. O, A যোগ করি। O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। তাহলে বৃত্তটি A, B ও C বিন্দুগামী হবে এবং-এ বৃত্তটিই Δ ABC এর নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

(গ) মনে করি, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র O এবং পরিবৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু P। P হতে PM ও PN দুইটি স্পর্শক।

প্রমাণ করতে হবে যে, PM = PN



অঙ্কন : O, M ও O, N এবং O, P যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : যেহেতু PM স্পর্শক, OM স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

সুতরাং, PM ⊥ OM [∵ স্পর্শক, স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব]

∴ ∠PMO = এক সমকোণ

অনুরূপভাবে, ∠PNO = এক সমকোণ

অর্থাৎ, Δ PMO ও Δ PNO সমকোণী ত্রিভুজ।

ধাপ ২ : Δ PMO ও Δ PNO সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে,

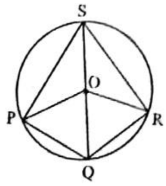
অতিভুজ PO = অতিভুজ PO [সাধারণ বাহু]

OM = ON [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

∴ ΔPMO ≅ Δ PNO [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা]

∴ PM = PN. **(প্রমাণিত)**

১৫.



চিত্রে O কেন্দ্র এবং SQ, ∠PSR এর সমদ্বিখন্ডক।

[রাজশাহী বোর্ড ২০২৩]

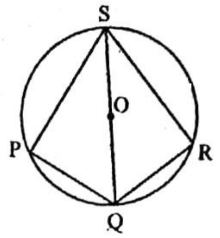
(ক) S, O, Q সমরেখ হলে ∠SPQ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, ∠PSR + ∠PQR = 180°.

(গ) প্রমাণ কর যে, PQ = QR.

১৫ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) এখানে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQRS একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।



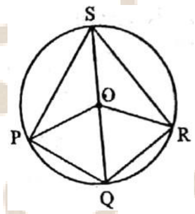
S, O, Q সমরেখ অর্থাৎ SOQ একটি সরল রেখা। SQ সরল রেখা কেন্দ্র O বিন্দুগামী হওয়ায় বৃত্তটির ব্যাস হবে SQ।

অতএব, ∠SPQ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

∴ ∠SPQ = এক সমকোণ [∵ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ]

নির্ণেয় ∠SPQ = 90°.

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQRS একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ এবং ∠PSR এর সমদ্বিখন্ডক SQ। SQ সরলরেখাটি কেন্দ্র O বিন্দুগামী। প্রমাণ করতে হবে যে, ∠PSR + ∠PQR = 180°।



প্রমাণ :

ধাপ ১ : একই চাপ PQR এর উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ ∠POR = 2 (বৃত্তস্থ ∠PSR)

[∵ বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

অর্থাৎ ∠POR = 2∠PSR

ধাপ ২ : আবার একই চাপ PSR এর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ কোণ ∠POR = 2(বৃত্তস্থ ∠PQR)

অর্থাৎ প্রবৃদ্ধ কোণ ∠POR = 2 ∠PQR

এখন, ∠POR + প্রবৃদ্ধ ∠POR = 2(∠PSR + ∠PQR)

কিন্তু, ∠POR + প্রবৃদ্ধ ∠POR = 4 সমকোণ = 360°

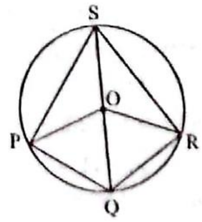
∴ 2(∠PSR + ∠PQR) = 360°

বা, $\angle PSR + \angle PQR = \dfrac{360°}{2}$

অতএব ∠PSR + ∠PQR = 180° **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQRS একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ এবং ∠PSR এর সমদ্বিখন্ডক SQ প্রমাণ করতে হবে যে, PQ = QR।

প্রমাণ : ধাপ ১ : PQ চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ ∠POQ এবং বৃত্তস্থ কোণ ∠PSQ।



∴ $\angle PSQ = \dfrac{1}{2}\angle POQ$

[∵ একই চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক]

একইভাবে, QR চাপের ক্ষেত্রে পাই,

$\angle RSQ = \dfrac{1}{2}$ ROQ

ধাপ ২ : যেহেতু ∠PSR এর সমদ্বিখন্ডক SQ

সেহেতু ∠PSQ = ∠RSQ

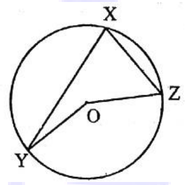
বা, $\dfrac{1}{2}\angle POQ = \dfrac{1}{2}\angle ROQ$

বা, ∠POQ = ∠ROQ

বা, চাপ PQ = চাপ QR [∵ কেন্দ্রস্থ কোণ চাপের সমানুপাতিক]

∴ PQ = QR **(প্রমাণিত)**

১৬.



চিত্রে, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং জ্যা XY > জ্যা XZ.

[যশোর বোর্ড ২০২৩]

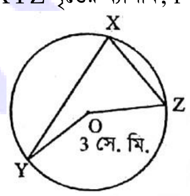
(ক) OZ =3 সে.মি. হলে, XYZ বৃত্তের পরিধি কত সে.মি. হবে?

(খ) প্রমাণ কর যে, ∠YOZ = 2∠YXZ.

(গ) যদি OE ⊥ XY এবং OF ⊥ XZ হয় তবে প্রমাণ কর যে, OE < OF.

১৬ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) এখানে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট XYZ বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r = OZ = 3 সে. মি.।



∴ XYZ বৃত্তের পরিধি = $2\pi r$ একক

= 2 × 3.1416 × 3 সে. মি.

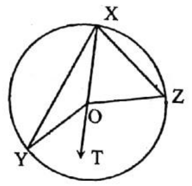
= 18.85 সে. মি. (প্রায়)

নির্ণেয় বৃত্তের পরিধি 18.85 সে. মি. (প্রায়)।

(খ) মনে করি,

O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে জ্যা XY > জ্যা XZ। বৃত্তের একই উপচাপ YZ এর উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ ∠YOZ এর বৃত্তস্থ কোণ ∠YXZ.

প্রমাণ করতে হবে যে, ∠YOZ = 2∠YXZ



অঙ্কন : X বিন্দু দিয়ে কেন্দ্রগামী রেখাংশ XT আঁকি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : ΔXOY এর বহিঃস্থ $\angle YOT$ = অন্তঃস্থ বিপরীত $(\angle YXO + \angle XYO)$

[∵ ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]

ধাপ-২ : ΔXOY-এ, $OX = OY$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

∴ $\angle XYO = \angle YXO$

[∵ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটি সমান]

ধাপ-৩ : ধাপ (১) ও (২) থেকে পাই,

$\angle YOT = 2\angle YXO$

ধাপ-৪ : একইভাবে ΔXOZ থেকে পাই,

$\angle ZOT = 2\angle ZXO$

ধাপ-৫ : ধাপ (৩) ও (৪) থেকে পাই,

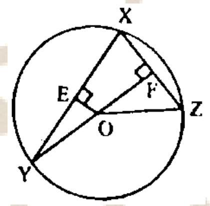
$\angle YOT + \angle ZOT = 2\angle YXO + 2\angle ZXO$ [যোগ করে]

বা, $\angle YOZ = 2(\angle YXO + \angle ZXO)$ [∵ $\angle YOT + \angle ZOT = \angle YOZ$]

বা, $\angle YOZ = 2\angle YXZ$ [∵ $\angle YXO + \angle ZXO = \angle YXZ$]

অতএব, $\angle YOZ = 2\angle XYZ$. **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে জ্যা XY > জ্যা XZ, $OE \perp XY$ এবং $OF \perp XZ$। প্রমাণ করতে হবে যে, OE < OF।



ধাপ-১ :

যেহেতু $XY \perp PQ$ এবং $OF \perp XZ$

∴ $YE = \frac{1}{2}XY$ এবং $ZF = \frac{1}{2}XZ$ [বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

ধাপ-২ : ΔOYE ও ΔOZF সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

$OY^2 = YE^2 + OE^2$ এবং $OZ^2 = ZF^2 + OF^2$

[পিথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্যে]

ধাপ-৩ : কিন্তু OY = OZ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

বা, $OY^2 = OZ^2$

বা, $YE^2 + OE^2 = ZF^2 + OF^2$ [ধাপ (২) হতে]

বা, $YE^2 - ZF^2 = OF^2 - OE^2$

ধাপ-৪ : আবার, XY > XZ

বা, $\frac{1}{2}XY > \frac{1}{2}XZ$

বা, YE > ZF [ধাপ (১) হতে]

বা, $YE^2 > ZF^2$

বা, $YE^2 - ZF^2 > 0$

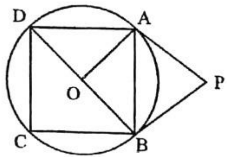
বা, $OF^2 - OE^2 > 0$ [ধাপ (৩) হতে]

বা, $OF^2 > OE^2$

বা, OF > OE

∴ OE < OF. **(প্রমাণিত)**

১৭.



চিত্রে, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং BD ব্যাস, PA ও PB দুইটি স্পর্শক।

[যশোর বোর্ড ২০২৩]

(ক) AB = 6 সে.মি. এবং OB = 5 সে.মি. হলে, AD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\angle ADC + \angle ABC$ = 2 সমকোণ।

(গ) প্রমাণ কর যে, OP স্পর্শক জ্যা AB এর লম্ব-দ্বিখন্ডক।

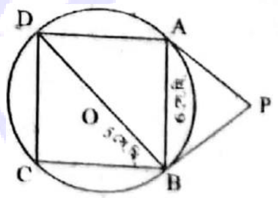
১৭ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) এখানে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD বৃত্তে BD ব্যাস।

জ্যা AB = 6 সে. মি.,

ব্যাসার্ধ r = OB = 5 সে. মি.

∴ BD = 2.0 = 2 × 5 সে. মি. = 10 সে. মি.



BD ব্যাস হওয়ায় $\angle BAD$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

∴ $\angle BAD$ = সমকোণ [∵ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ]

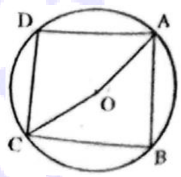
BAD সমকোণী ত্রিভুজে $AD^2 = BD^2 - AB^2$

$= (10)^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$

∴ $AD = \sqrt{64} = 8$ সে. মি.

নির্ণেয় AD এর দৈর্ঘ্য 8 সে. মি.।

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ABCD চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ADC + \angle ABC$ = 2 সমকোণ।



অঙ্কন : O, C যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : একই চাপ ADC এর উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle AOC$ = 2 (বৃত্তস্থ $\angle ABC$)

[একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

অর্থাৎ, $\angle AOC = 2\angle ABC$

ধাপ ২ : আবার, একই চাপ ABC এর উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC$ = 2 (বৃত্তস্থ $\angle ADC$)

[একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

অর্থাৎ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC = 2\angle ADC$

∴ $\angle AOC$ + প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC = 2(\angle ABC + \angle ADC)$

কিন্তু $\angle AOC$ + প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC$ = 4 সমকোণ

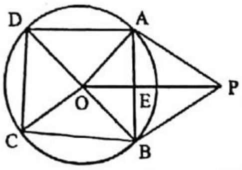
∴ $2(\angle ABC + \angle ADC)$ = 4 সমকোণ

∴ $\angle ABC + \angle ADC$ = 2 সমকোণ।

একইভাবে, প্রমাণ করা যায় যে, $\angle BAD + \angle BCD$ = 2 সমকোণ

অতএব, $\angle ADC + \angle ABC = 2$ সমকোণ। **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ABCD চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত। বৃত্তটির ব্যাস BD, ব্যাসার্ধ OA এবং বহিঃস্থ P বিন্দু হতে PA ও PB দুইটি স্পর্শক। O, P যোগ করি। OP স্পর্শ জ্যা AB কে E বিন্দুতে ছেদ করে।



প্রমাণ করতে হবে যে, OP স্পর্শ জ্যা AB এর লম্ব-দ্বিখণ্ডক।

ধাপ ১. যেহেতু OA এবং OB উভয়ই স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

সুতরাং $\angle PAO$ = এক সমকোণ

এবং $\angle PBO$ এক সমকোণ [PA ও PB যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শক]

সমকোণী Δ PAO ও সমকোণী Δ PBO-এর মধ্যে

অতিভুজ PO = অতিভুজ PO

OA = OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\therefore$ $\Delta PAO \cong \Delta PBO$ [অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

$\therefore$ $\angle POA = \angle POB$

$\angle AOE = \angle BOE$

avc 2. এখন Δ OAE ও Δ OBE-এর মধ্যে

OA = OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

OE = OE [সাধারণ বাহু]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AOE$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle BOE$

অতএব, $\Delta OAE \cong \Delta OBE$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

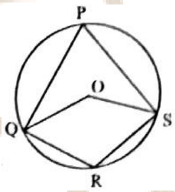
$\therefore$ AE = BE এবং $\angle AEO = \angle BEO$

কিন্তু কোণদ্বয় সন্নিহিত বলে প্রত্যেকে এক সমকোণ।

সুতরাং OE, AB-এর লম্বদ্বিখণ্ডক।

অর্থাৎ OP রেখাংশ স্পর্শ জ্যা AB-এর লম্বদ্বিখণ্ডক। **(প্রমাণিত)**

১৮.



চিত্রে, PQRS চতুর্ভুজটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত যার কেন্দ্র O।

[কুমিল্লা বোর্ড ২০২৩]

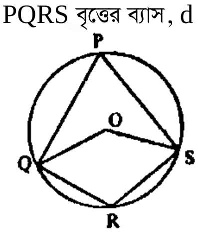
(ক) বৃত্তটির ব্যাস 8.4 সে.মি. হলে বৃত্তটির পরিধি নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $2\angle QPS = \angle QOS$.

(গ) PR এবং QS কর্ণদ্বয় পরস্পরকে M বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\angle POQ + \angle ROS = 2\angle PMQ$.

১৮ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) এখানে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট PQRS বৃত্তের ব্যাস, d = 8.4 সে. মি.



$\therefore$ PQRS বৃত্তের পরিধি = πd

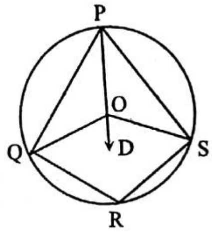
= 3.1416 × 8.4 সে. মি.

= 26.389 সে. মি. (প্রায়)

নির্ণেয় বৃত্তের পরিধি 26.389 সে. মি. (প্রায়)

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQRS চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত। বৃত্তটির একই উপচাপ QRS এর উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ $\angle QPS$ এবং কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle QOS$।

প্রমাণ করতে হবে যে, $2\angle QPS = \angle QOS$।



অঙ্কন : P বিন্দু দিয়ে কেন্দ্রগামী রেখাংশ PD আঁকি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : Δ POQ এর বহিঃস্থ কোণ $\angle QOD = \angle QPO + \angle PQO$

[$\because$ ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]

ধাপ ২ : Δ POQ এ OP = OQ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

অতএব, $\angle QPO = \angle PQO$ [সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণ দুইটি সমান]

ধাপ ৩ : ধাপ (১) ও (২) থেকে $\angle QOD = 2\angle QPO$

ধাপ ৪ : একইভাবে Δ POS থেকে $\angle SOD = 2\angle SPO$

ধাপ ৫ : ধাপ (৩) ও (৪) থেকে $\angle QOD + \angle SOD = 2\angle QPO + 2\angle SPO$

বা, $\angle QOS = 2(\angle QPO + \angle SPO)$ [$\because \angle QOD + \angle SOD = \angle QOS$]

বা, $\angle QOS = 2\angle QPS$ [$\because \angle QPO + \angle SPO = \angle QPS$]

$\therefore$ $2\angle QPS = \angle QOS$. **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQRS চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত। PQRS চতুর্ভুজের PR ও QS কর্ণদ্বয় পরস্পর M বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle POQ + \angle ROS = 2\angle PMQ$

অঙ্কন : O, P এবং O, R যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : PQ চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle POQ$ এবং বৃত্তস্থ কোণ $\angle PSQ$।

$\therefore$ $\angle POQ = 2\angle PSQ$ [কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

ধাপ ২ : RS চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle ROS$ এবং বৃত্তস্থ কোণ $\angle SPR$।

$\therefore$ $\angle ROS = 2\angle SPR$ [একই কারণে]

ধাপ ৩ : $\angle POQ + \angle ROS$

$= 2(\angle PSQ + \angle SPR)$ [ধাপ (১) ও (২) থেকে]

$= 2(\angle PSM + \angle SPM)$

ধাপ ৪ : Δ SPM এর বহিঃস্থ $\angle PMQ$ অন্তঃস্থ $(\angle PSM + \angle SPM)$

$\therefore$ $\angle POQ + \angle ROS = 2\angle PMQ$. [ধাপ (৩) থেকে]

(প্রমাণিত)

১৯. DEFG চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক।

[কুমিল্লা বোর্ড ২০২৩]

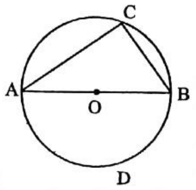
(ক) প্রমাণ কর যে, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

(খ) প্রমাণ কর যে, D, E, F ও G বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

(গ) DF রেখা যদি $\angle EDG$ এর সমদ্বিখণ্ডক হয়, তবে প্রমাণ কর যে, EF = FG.

১৯ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB একটি ব্যাস এবং $\angle ACB$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ACB$ = এক সমকোণ।



অঙ্কন : AB এর যে পাশে C বিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পাশে বৃত্তের উপর একটি বিন্দু D নিই।

প্রমাণ : ধাপ-১ : ADB চাপের উপর দণ্ডায়মান

বৃত্তস্থ $\angle ACB = \frac{1}{2}$ (কেন্দ্রস্থ সরলকোণ $\angle AOB$)

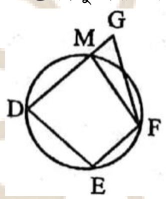
[∵ বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক]

ধাপ-২ : কিন্তু সরলকোণ $\angle AOB$ = দুই সমকোণ।

∴ $\angle ACB = \frac{1}{2}$ (দুই সমকোণ)

∴ $\angle ACB$ = এক সমকোণ। **(প্রমাণিত)**

(খ) মনে করি, DEFG চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় সম্পূরক অর্থাৎ $\angle DEF + \angle DGF$ = দুই সমকোণ এবং $\angle EDG + \angle EFG$ = দুই সমকোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, D, E, F ও G বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।



অঙ্কন : যেহেতু D, E, F বিন্দু তিনটি সমরেখ নয়। সুতরাং, বিন্দু তিনটি দিয়ে যায় এরূপ একটি ও কেবল একটি বৃত্ত আছে। মনে করি, বৃত্তটি DG রেখাংশকে M বিন্দুতে ছেদ করে। F.M যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : অঙ্কন অনুসারে উউঋগ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

সুতরাং $\angle DEF + \angle DMF$ = দুই সমকোণ

[∵ বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ]

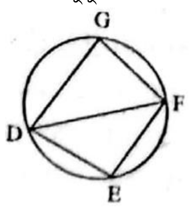
ধাপ ২ : কিন্তু $\angle DEF + \angle DGF$ = দুই সমকোণ [দেওয়া আছে]

∴ $\angle DMF = \angle DGF$

কিন্তু তা অসম্ভব। কারণ ΔFMG এর বহিঃস্থ $\angle DMF$ > বিপরীত অন্তঃস্থ $\angle DGF$ সুতরাং M এবং G বিন্দুদ্বয় ভিন্ন হতে পারে না। M বিন্দু অবশ্যই G বিন্দুর সাথে মিলে যাবে।

অতএব D, E, F ও G বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, DEFG চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক অর্থাৎ DEFG একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। DF রেখা, $\angle EDG$-এর সমদ্বিখণ্ডক।



প্রমাণ করতে হবে যে, EF = FG.

প্রমাণ :

ধাপ ১ : DF রেখা $\angle EDG$ এর সমদ্বিখন্ডক হওয়ায়

$\angle FDE = \angle FDG$.

EF চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle FDE$ এবং FG চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle FDG$ উভয়ই সমান হওয়ায় চাপ EF = চাপ FG

[চাপদ্বয় সমান হলে চাপের উপর অবস্থিত জ্যাগুলো পরস্পর সমান]

∴ EF = FG. **(প্রমাণিত)**

২০. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a = b = 5 সে.মি., c = 6 সে.মি. এবং একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 4.5 সে.মি.।

[কুমিল্লা বোর্ড ২০২৩]

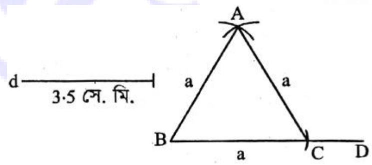
(ক) 3.5 সে.মি. দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

(খ) উদ্দীপকের আলোকে ত্রিভুজটি আঁক এবং ত্রিভুজটির অন্তঃবৃত্ত অঙ্কন কর। [অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক]

(গ) উদ্দীপকের তথ্য অনুসারে বৃত্তটি অঙ্কন কর এবং উক্ত বৃত্তে এমন দুইটি স্পর্শক অঙ্কন কর যেন তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 50° হয়। [অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক]

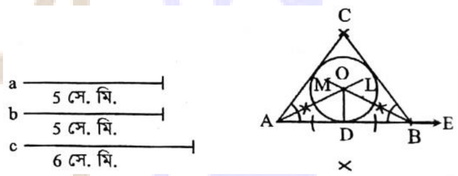
২০ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক)



ABC সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করা হলো যার বাহু d = AB = BC = AC = 3.5 সে. মি.।

(খ)



মনে করি, ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a = 5 সে. মি., b = 5 সে. মি. ও c = 6 সে. মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্ক করে এর অর্ন্তবৃত্ত আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

(১) যেকোনো রশ্মি AE থেকে এর সমান করে AB অংশ কেটে নিই।

(২) AB রেখাংশের A ও B বিন্দুকে কেন্দ্র করে যথাক্রমে b ও a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে AB এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করে।

(৩) A, C এবং B, C যোগ করি। তাহলে, ΔABC-ই উদ্দীষ্ট ত্রিভুজ যার অন্তর্বৃত্ত আঁকতে হবে।

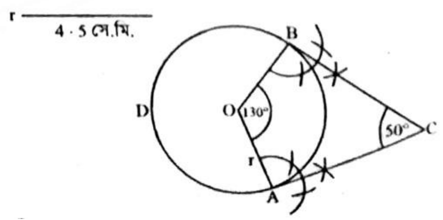
(৪) $\angle BAC$ ও $\angle ABC$ এর সমদ্বিখন্ডক যথাক্রমে AL ও BM আঁকি। মনে করি, তারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে।

(৫) O থেকে AB এর উপর OD লম্ব আঁকি এবং মনে করি, তা AB কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

(৬) O কে কেন্দ্র করে OD এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি।

তাহলে, এই বৃত্তটিই নির্ণেয় অন্তর্বৃত্ত।

(গ)



মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r = 4.5 সে. মি. দেওয়া আছে। বৃত্তটি অঙ্কন করে বৃত্তটিতে এমন দুইটি স্পর্শক আঁকতে হবে যেন এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 50° হয়।

অঙ্কন :

১. যেকোনো বিন্দু O নিই। O কে কেন্দ্র করে r এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে ABD বৃত্ত অঙ্কন করি।

২. ABD বৃত্তে যেকোনো ব্যাসার্ধ OA = r নিই। OA এর O বিন্দুতে ∠AOB = 130° আঁকি। OB রেখাংশ বৃত্তটিকে B বিন্দুতে ছেদ করে।

৩. OA এর A বিন্দুতে AC এবং OB এর B বিন্দুতে BC লম্ব আঁকি। AC ও BC লম্বদ্বয় পরস্পর C বিন্দুতে মিলিত হয়।

তাহলে, AC ও BC-ই নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয় যাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ, ∠ACB = 50°।

২১. a = 4 সে.মি., b = 4.5 সে.মি. ও c = 5.5 সে.মি.। a ও b ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুটি বৃত্তের কেন্দ্র যথাক্রমে M ও N.

[চট্টগ্রাম বোর্ড ২০২৩]

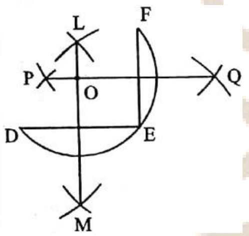
(ক) DEF একটি বৃত্তচাপ হলে, এর কেন্দ্র নির্ণয় কর।

(খ) M ও N কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করলে, প্রমাণ কর যে, M, P ও N বিন্দু তিনটি একটি সরলরেখায় অবস্থিত।

(গ) অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণসহ a, b ও c বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন কর।

২১ নং প্রশ্নের উত্তর

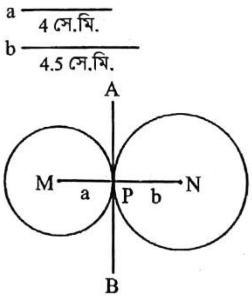
(ক)



DEF বৃত্তচাপের কেন্দ্র নির্ণয় করা হলো।

(খ) মনে করি, a = 4 সে.মি. ও b = 4.5 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র যথাক্রমে M ও N এবং বৃত্তদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, M, P ও N বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত।



অঙ্কন : যেহেতু বৃত্তদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। সেহেতু P বিন্দুতে এদের একটি সাধারণ স্পর্শক থাকবে। এখন, P বিন্দুতে সাধারণ স্পর্শক APB অঙ্কন করি। P, M এবং P, N যোগ করি।

প্রমাণ : M কেন্দ্রগামী বৃত্তে PM স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ এবং APB স্পর্শক।

সুতরাং ∠APM = এক সমকোণ।

অনুরূপভাবে, ∠APN = এক সমকোণ।

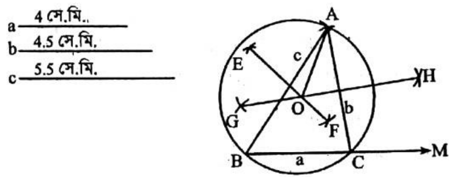
এখন, ∠APM + ∠APN = এক সমকোণ + এক সমকোণ
= দুই সমকোণ

বা, MPN = দুই সমকোণ [∵ ∠APM + ∠APN = ∠PMN]

অর্থাৎ, ∠MPN একটি সরলকোণ।

∴ M, P ও N বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত। **(প্রমাণিত)**

(গ)



মনে করি, একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য a = 4 সে.মি., b = 4.5 সে.মি. ও c = 5.5 সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কন :

যেকোনো রশ্মি BM থেকে a এর সমান করে BC অংশ কেটে নিই।

BC রেখাংশের B ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে যথাক্রমে c ও b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BC এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে। B, A এবং C, A যোগ করি। তাহলে ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ যার পরিবৃত্ত আঁকতে হবে।

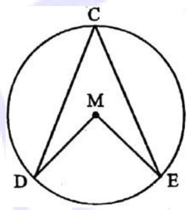
AB ও AC বাহুর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EF ও GH অঙ্কন করি। মনে করি, তারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

O, A যোগ করি।

O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। বৃত্তটি A, B ও C বিন্দু দিয়ে যায়।

তাহলে, এই বৃত্তটির উদ্দিষ্ট ত্রিভুজের পরিবৃত্ত।

২২.



চিত্রে, CDE বৃত্তের কেন্দ্র M এবং CD = CE.

[চট্টগ্রাম বোর্ড ২০২৩]

(ক) PQRS একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ এবং ∠PQR = 2∠PSR হলে, ∠PQR এর মান নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\angle DCE = \frac{1}{2}\angle DME$.

(গ) প্রমাণ কর যে, CD ও CE জ্যাদ্বয় কেন্দ্র হতে সমদূরবর্তী।

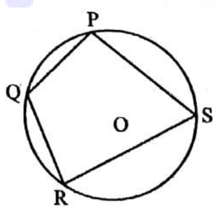
২২ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) এখানে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQRS একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ

∠PQR = 2 ∠PSR

বা, $\angle PSR = \frac{1}{2}\angle PQR$

PQRS চুর্ভুজে ∠PQR এর বিপরীত কোণ ∠PSR।



∴ ∠PQR + ∠PSR = 180°

[∵ বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ বা 180°]

বা, $\angle PQR + \angle PQR = 180°$ [∵ $\angle PSR = \frac{1}{2}\angle PQR$]

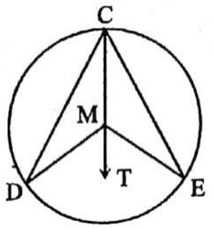
বা, $\frac{3}{2}\angle PQR = 180°$

বা, $\angle PQR = \frac{2 \times 180°}{3}$

$\therefore$ $\angle PQR = 120°$

নির্ণেয় $\angle PQR$ এর মান $120°$.

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট CDE বৃত্তে DE চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle DCE$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle DME$। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle DCE = \frac{1}{2}$ $\angle DME$.



অঙ্কন : C বিন্দু দিয়ে কেন্দ্রগামী রেখাংশ CT আঁকি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : Δ CMD এর বহিঃস্থ $\angle DMT$ = অন্তঃস্থ বিপরীত ($\angle DCM + \angle CDM$)

[$\because$ ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]

ধাপ-২ : Δ CMD-এ, MC = MD [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\therefore$ $\angle CDM = \angle DCM$

[$\because$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটি সমান]

ধাপ-৩ : ধাপ (১) ও (২) থেকে পাই,

$\angle DMT = 2\angle DCM$

ধাপ-৪ : একইভাবে Δ CME থেকে পাই,

$\angle EMT = 2\angle ECM$

ধাপ-৫ : ধাপ (৩) ও (৪) থেকে পাই,

$\angle DMT + \angle EMT = 2\ \angle DCM + 2\angle ECM$ [যোগ করে]

বা, $\angle DME = 2(\angle DCM + \angle ECM)$

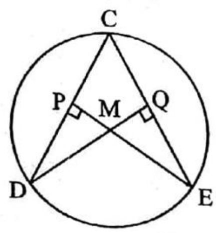
[$\because$ $\angle DMT + \angle EMT = \angle DME$]

বা, $\angle DME = 2\angle DCE$ [$\because$ $\angle DCM + \angle ECM = \angle DCE$]

বা, $2\angle DCE = \angle DME$

$\therefore$ $\angle DCE = \frac{1}{2} \angle DME$. **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, M কেন্দ্রবিশিষ্ট CDE বৃত্তের জ্যা CD = জ্যা CE।
প্রমাণ করতে হবে যে, CD ও CE জ্যাদ্বয় কেন্দ্র M হতে সমদূরবর্তী।



অঙ্কন : কেন্দ্র M হতে CD ও CE জ্যা এর উপর যথাক্রমে MP ও MQ লম্ব রেখাংশ আঁকি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : $MP \perp CD$ এবং $MQ \perp CE$

সুতরাং, CP = DP এবং CQ = EQ

[$\because$ বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

$\therefore$ $DP = \frac{1}{2}CD$ এবং $EQ = \frac{1}{2}CE$

ধাপ ২ : কিন্তু CD = CE [ধরে নেওয়া]

বা, $\frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}CE$

$\therefore$ DP = EQ [ধাপ (১) হতে]

ধাপ ৩ : এখন, ΔDMP এবং Δ EMQ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে অতিভুজ DM = অতিভুজ EM [উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং DP = EQ [ধাপ (২) হতে]

$\therefore$ $\Delta DMP \cong \Delta EMQ$

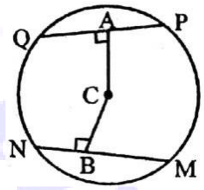
[সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

$\therefore$ MP = MQ

ধাপ ৪ : কিন্তু MP এবং MQ কেন্দ্র M হতে যথাক্রমে CD জ্যা এবং CE জ্যা এর দূরত্ব।

অতএব, CD ও CE জ্যাদ্বয় বৃত্তের কেন্দ্র হতে সমদূরবর্তী। **(প্রমাণিত)**

২৩.



চিত্রে C বৃত্তের কেন্দ্র।

[সিলেট বোর্ড ২০২৩]

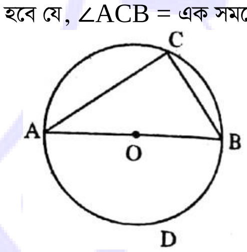
(ক) প্রমাণ কর যে, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

(খ) PQ = MN হলে প্রমাণ কর যে, AC = BC।

(গ) বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু E হতে দুইটি স্পর্শক PE ও ME; প্রমাণ কর যে, PE = ME।

২৩ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB একটি ব্যাস এবং $\angle ACB$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ACB$ = এক সমকোণ।



অঙ্কন : AB এর যে পাশে C বিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পাশে বৃত্তের উপর একটি বিন্দু D নিই।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : ADB চাপের উপর দন্ডায়মান

বৃত্তস্থ $\angle ACB = \frac{1}{2}$ (কেন্দ্রস্থ সরলকোণ $\angle AOB$)

[$\because$ বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক]

ধাপ-২ : কিন্তু সরলকোণ $\angle AOB$ দুই সমকোণ।

$\therefore$ $\angle ACB = \frac{1}{2}$ (দুই সমকোণ)

$\therefore$ $\angle ACB$ = এক সমকোণ। **(প্রমাণিত)**

(খ) মনে করি, C কেন্দ্রবিশিষ্ট PQNM বৃত্তে জ্যা PQ = জ্যা MN, $AC \perp PQ$ এবং $BC \perp MN$

প্রমাণ করতে হবে যে, AC = BC।

অঙ্কন : C, P এবং C, M যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : $AC \perp PQ$ এবং $BC \perp MN$

সুতরাং, $AP = AQ$ এবং $BM = BN$

[∵ বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

∴ $AP = \frac{1}{2}PQ$ এবং $BM = \frac{1}{2}MN$

ধাপ ২ : কিন্তু $PQ = MN$ [ধরে নেওয়া]

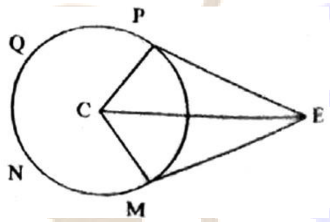
বা, $\frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}MN$

∴ $AP = BM$ [ধাপ (১) হতে]

ধাপ ৩ : এখন, $\Delta ACP \cong \Delta BCM$ [সমকোণী অতিভুজ বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

অতএব, $AC = BC$ **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, C কেন্দ্রবিশিষ্ট PQNM বৃত্তের E একটি বহিঃস্থ বিন্দু এবং PE ও ME রেখাংশদ্বয় বৃত্তের P ও M বিন্দুতে দুইটি স্পর্শক। প্রমাণ করতে হবে যে, PE = ME।



অঙ্কন : C, P; C, M এবং C, E যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : যেহেতু EP স্পর্শক এবং CP স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

সেহেতু $EP \perp CP$ [∵ বৃত্তের স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব]

∴ $\angle EPC$ = এক সমকোণ

অনুরূপে, $\angle EMC$ = এক সমকোণ

∴ ΔEPC ও ΔEMC উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ।

ধাপ-২ : এখন, ΔEPC ও ΔEMC সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে অতিভুজ EC = অতিভুজ EC [সাধারণ বাহু]

এবং CP = CM [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

∴ $\Delta EPC \cong EMC$ [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা]

∴ PE = ME. **(প্রমাণিত)**

২৪. সমকোণী ত্রিভুজ BCD এর BC = 5 সে.মি. এবং BC ও CD বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ 45°।

[সিলেট বোর্ড ২০২৩]

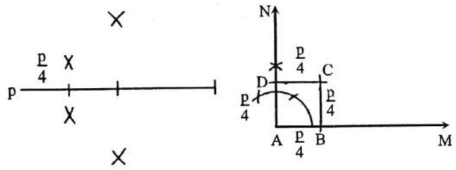
(ক) 16 সে.মি. পরিসীমাবিশিষ্ট একটি বর্গ অঙ্কন কর।

(খ) BC ব্যাসবিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র হতে 7 সে.মি. দূরে বহিঃস্থ বিন্দু F হতে দুইটি স্পর্শক অঙ্কন কর। [অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক]

(গ) Δ BCD এর অন্তঃবৃত্ত অঙ্কন কর। [অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক]

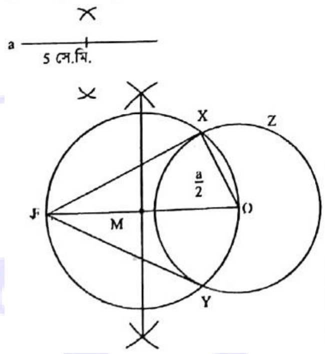
২৪ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক)



ABCD বর্গ অঙ্কন করা হলো যার পরিসীমা P = 16 সে. মি.।

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাস a = BC = 5 সে.মি. এবং বৃত্তের কেন্দ্র হতে 7 সে. মি. দূরে বহিঃস্থ একটি বিন্দু F। বহিঃস্থ বিন্দু F হতে উক্ত বৃত্তে দুইটি স্পর্শক আঁকতে হবে।



অঙ্কন :

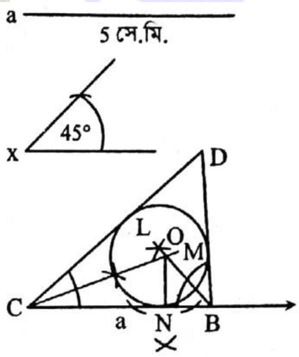
(১) O, F যোগ করি। OF রেখাংশের মধ্যবিন্দু M নির্ণয় করি।

(২) এখন M কে কেন্দ্র করে MO এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। মনে করি, নতুন অঙ্কিত বৃত্তটি প্রদত্ত বৃত্তকে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে।

(৩) X, F ও Y, F যোগ করি।

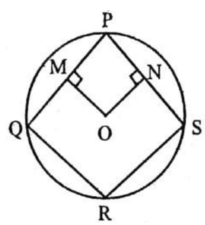
তাহলে, XF ও YF উভয়েই নির্ণেয় দুইটি স্পর্শক।

(গ) মনে করি, BCD সমকোণী ত্রিভুজের একটি বাহু a = BC = 5 সে. মি. এবং BC ও CD বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle x = \angle BCD = 45°$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটির অন্তবৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ ΔBCD এর ভিতরে এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে যা BC, CD ও BD বাহু তিনটির প্রত্যেকটিকে স্পর্শ করে।



অঙ্কন : Δ BCD এর $\angle CBD$ ও $\angle BCD$ এর সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে BL ও CM আঁকি। মনে করি, তারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। O থেকে BC এর উপর ON লম্ব আঁকি এবং মনে করি, তা BC কে N বিন্দুতে ছেদ করে। O কে কেন্দ্র করে ON এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। তাহলে এই বৃত্তটিই নির্ণেয় অন্তবৃত্ত।

২৫.



চিত্রে PQRS বৃত্তের কেন্দ্র O এবং OM = ON.

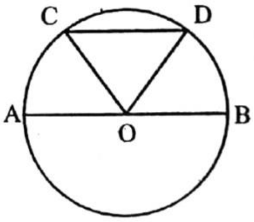
[বরিশাল বোর্ড ২০২৩]

(ক) প্রমাণ কর যে, বৃত্তের ব্যাসই বৃহত্তম জ্যা।
(খ) প্রমাণ কর যে, PQ = PS.
(গ) প্রমাণ কর যে, $\angle QPS + \angle QRS = 180^\circ$.

২৫ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABDC একটি বৃত্ত। AB ব্যাস এবং CD ব্যাস ভিন্ন যেকোনো একটি জ্যা।

প্রমাণ করতে হবে যে, AB > CD অর্থাৎ, বৃত্তের ব্যাসই বৃহত্তম জ্যা।



অঙ্কন : O, C এবং O, D যোগ করি।

প্রমাণ : OA = OB = OC = OD [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এখন, ΔOCD-এ, OC + OD > CD

[$\because$ ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]

বা, OA + OB > CD [$\because$ OA = OB = OC = OD]

$\therefore$ AB > CD.

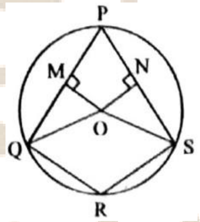
অর্থাৎ, বৃত্তের ব্যাসই বৃহত্তম জ্যা। **(প্রমাণিত)**

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQRS চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত।

$OM \perp PQ$, $ON \perp PS$

এবং OM = ON।

প্রমাণ করতে হবে যে, PQ = PS।



অঙ্কন : O, Q এবং O, S যোগ করি।

প্রমাণ : ধাপ ১ : যেহেতু $OM \perp PQ$ এবং $ON \perp PS$

সুতরাং $\angle OMQ = \angle ONS$ = এক সমকোণ।

ধাপ ২ : এখন, ΔOMQ এবং ΔONS সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে অতিভুজ OQ = অতিভুজ OS [উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং OM = ON [ধরে নেওয়া]

$\therefore$ $\Delta OMQ \cong \Delta ONS$

[সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

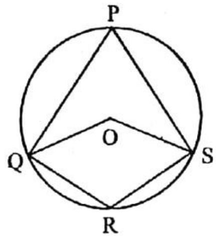
$\therefore$ QM = SN

ধাপ ৩ : $QM = \frac{1}{2}PQ$ এবং $SN = \frac{1}{2}PS$ [$\because$ বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

ধাপ ৪ : সুতরাং, $\frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}PS$

$\therefore$ PQ = PS **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQRS চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle QPS + \angle QRS = 180^\circ$.



অঙ্কন : O, Q ও O, S যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : একই চাপ QRS এর উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle QOS$ = 2 (বৃত্তস্থ $\angle QPS$)

[একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

অর্থাৎ $\angle QOS = 2\angle QPS$

ধাপ ২ : আবার একই চাপ QPS এর উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle QOS$ = 2(বৃত্তস্থ $\angle QRS$) [একই কারণে]

অর্থাৎ প্রবৃদ্ধ $\angle QOS = 2\angle QRS$

$\therefore$ $\angle QOS$ + প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle QOS = 2(\angle QPS + \angle QRS)$

কিন্তু $\angle QOS$ + প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle QOS = 360^\circ$

$\therefore$ $2(\angle QPS + \angle QRS) = 360^\circ$

বা, $\angle QPS + \angle QRS = \frac{360^\circ}{2}$

$\therefore$ $\angle QPS + \angle QRS = 180^\circ$. **(প্রমাণিত)**

২৬. (i) O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু R থেকে ঐ বৃত্তে RL ও RK দুইটি স্পর্শক।

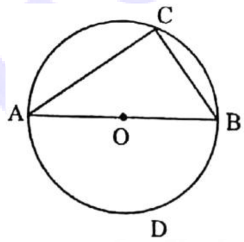
(ii) O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তে MNTS একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। MT ও NS কর্ণদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করে।

[বরিশাল বোর্ড ২০২৩]

(ক) প্রমাণ কর যে, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।
(খ) প্রমাণ কর যে, RL = RK;
(গ) প্রমাণ কর যে, $\angle MON + \angle TOS = 2\angle MPN$.

২৬ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB একটি ব্যাস এবং $\angle ACB$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ACB$ = এক সমকোণ।



অঙ্কন : AB এর যে পাশে C বিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পাশে বৃত্তের উপর একটি বিন্দু D নিই।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : অউই চাপের উপর দণ্ডায়মান

বৃত্তস্থ $\angle ACB = \frac{1}{2}$ (কেন্দ্রস্থ সরলকোণ $\angle AOB$)

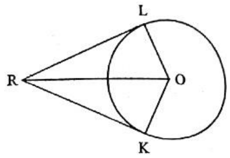
[$\because$ বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক]

ধাপ-২ : কিন্তু সরলকোণ $\angle AOB$ = দুই সমকোণ।

$\therefore$ $\angle ACB = \frac{1}{2}$(দুই সমকোণ)

$\therefore$ $\angle ACB$ = এক সমকোণ। **(প্রমাণিত)**

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু R হতে L ও K বিন্দুতে RL ও RK দুইটি স্পর্শক। প্রমাণ করতে হবে যে, RL = RK.



অঙ্কন : O, R; O, L এবং O, K যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : যেহেতু RL স্পর্শক এবং OL স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ। সেহেতু $RL \perp OL$। [∵ স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব]

∴ $\angle OLR = 1$ সমকোণ।

অনুরূপভাবে, $\angle OKR = 1$ সমকোণ

∴ Δ OLR এবং Δ OKR উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ।

ধাপ-২ : এখন, Δ OLR ও Δ OKR সমকোণী ত্রিভুজে,

অতিভুজ OR = অতিভুজ OR [সাধারণ বাহু]

OL = OK [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

∴ $\Delta OLR \cong \Delta OKR$ [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা]

সুতরাং, RL = RK **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে MNTS চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত। MT ও NS কর্ণদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle MON + \angle TOS = 2\angle MPN$.

অঙ্কন : O, M; O, N, O, T ও O, S যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : MN চাপের দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle MON$ এবং বৃত্তস্থ $\angle MSN$.

∴ $\angle MON = 2\angle MSN$

[∵ বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

ধাপ-২ : TS চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle TOS$ এবং বৃত্তস্থ $\angle TMS$.

∴ $\angle TOS = 2\angle TMS$ [একই কারণে]

ধাপ-৩ : ধাপ (১) ও (২) হতে পাই,

$\angle MON + \angle TOS = 2\angle MSN + 2\angle TMS$ [যোগ করে]

বা, $\angle MON + \angle TOS = 2(\angle MSP + \angle SMP)$

ধাপ-৪ : ΔMPS-এ বহিঃস্থ $\angle MPN$ অন্তঃস্থ বিপরীত $(\angle MSP + \angle SMP)$

[∵ ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]

ধাপ-৫ : ধাপ (৩) ও (৪) হতে পাই,

$\angle MON + \angle TOS = 2\angle MPN$. **(প্রমাণিত)**

২৭. (i) একটি ত্রিভুজের ভূমি a = 6 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ $\angle x = 30°$, অপর দুই বাহুর অন্তর d = 2 সে.মি.।

(ii) Δ ABC এর AB = 5 সে.মি., BC = 6 সে.মি. এবং AC = 4 সে.মি.।

[বরিশাল বোর্ড ২০২৩]

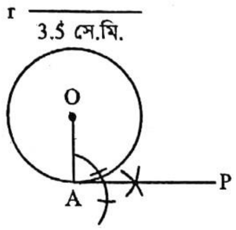
(ক) একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 3.5 সে.মি., বৃত্তটির কোনো বিন্দুতে একটি স্পর্শক আঁক। (অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক)

(খ) (i) নং তথ্যের আলোকে ত্রিভুজটি আঁক। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)

(গ) (ii) নং তথ্যের আলোকে ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত আঁক। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)

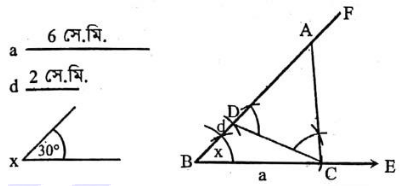
২৭ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) মনে করি, একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ r = 3.5 সে.মি. দেওয়া আছে। বৃত্তটির কোনো বিন্দুতে একটি স্পর্শক আঁকতে হবে।



এখানে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ OA = r = 3.5 সে.মি.। বৃত্তটির A বিন্দুতে AP স্পর্শক আঁকা হলো।

(খ) মনে করি, একটি ত্রিভুজের ভূমি a = 6 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন একটি সূক্ষ্মকোণ $\angle x = 30°$ ও অপর বাহুদ্বয়ের অন্তর d = 2 সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

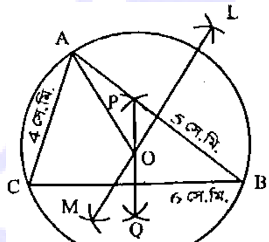


অঙ্কন :

১. যেকোনো একটি রশ্মি BE থেকে ভূমি a এর সমান করে BC রেখাংশ কেটে নিই।
২. BC রেখাংশের B বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান করে $\angle CBF$ আঁকি।
৩. BF রশ্মি থেকে d এর সমান BD অংশ কেটে নিই।
৪. C, D যোগ করি।
৫. DC রেখাংশের যে পাশে F বিন্দু আছে সেই পাশে C বিন্দুতে $\angle FDC$ এর সমান $\angle DCA$ আঁকি। CA রশ্মি BF রশ্মিকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

(গ) মনে করি, ABC ত্রিভুজের তিনটি বাহু AB = 5 সে.মি., BC = 6 সে.মি. এবং AC = 4 সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত আঁকতে হবে।

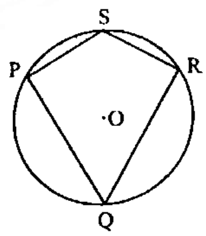


অঙ্কন :

১. BC বাহুর লম্বদ্বিখণ্ডক PQ এবং AB বাহুর লম্বদ্বিখণ্ডক LM অঙ্কন করি। PQ ও LM পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে।
২. O, A যোগ করি।
৩. এখন, O কে কেন্দ্র করে OA বা OB বা OC এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। বৃত্তটি A, B, C বিন্দু দিয়ে যাবে।

তাহলে এই বৃত্তটি ABC ত্রিভুজের নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

২৮.



চিত্রে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQRS একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ যার PQ = QR.

[দিনাজপুর বোর্ড ২০২৩]

(ক) 5 সে.মি. ও 6 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত পরস্পরকে অন্তঃস্পর্শ করলে, তাদের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।
(খ) প্রমাণ কর যে, PQ ও QR জ্যাদ্বয় বৃত্তটির কেন্দ্র হতে সমদূরবর্তী।
(গ) প্রমাণ কর যে, $\angle PQR$ ও এর বিপরীত কোণ $\angle PSR$-এর সমষ্টি দুই সমকোণ।

২৮ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) প্রথম বৃত্তের ব্যাস = 5 সে. মি.

প্রথম বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r_1 = \frac{5}{2}$ সে. মি. = 2.5 সে. মি.

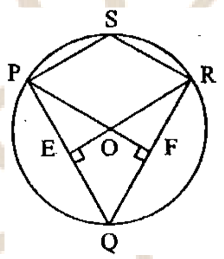
দ্বিতীয় বৃত্তের ব্যাস = 6 সে. মি.

∴ দ্বিতীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r_2 = \frac{6}{2}$ সে. মি. = 3 সে. মি.

আমরা জানি, দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে অন্তঃস্পর্শ করলে, তাদের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব হবে বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের অন্তরের সমান।
এখন, বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে অন্তঃস্পর্শ করলে,
তাদের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব = $r_2 - r_1$
= (3 – 2.5) সে. মি.
= 0.5 সে. মি.

∴ বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 0.5 সে. মি.

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQRS একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ যার PQ = QR। প্রমাণ করতে হবে যে, PQ ও QR জ্যাদ্বয় বৃত্তটির O কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।



অঙ্কন : O থেকে PQ এবং QR জ্যা এর উপর যথাক্রমে OE এবং OF লম্ব রেখাংশ আঁকি। O, P এবং O, R যোগ করি।
প্রমাণ :
ধাপ ১ : $OE \perp PQ$ এবং $OF \perp QR$
সুতরাং, PE = QE এবং QF = RF [∵ বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

∴ $PE = \frac{1}{2}PQ$ এবং $RF = \frac{1}{2}QR$

ধাপ ২ : কিন্তু PQ = QR [ধরে নেওয়া]

বা, $\frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}QR$

∴ PE = RF (ধাপ (১) হতে]

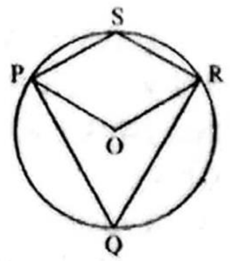
ধাপ ৩ : এখন, ΔPOE এবং ΔROF সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে অতিভুজ OP = অতিভুজ OR [উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
এবং PE = RF ধাপ (২) হতে]

∴ $\Delta POE \cong \Delta ROF$ [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য।]

∴ OE = OF

ধাপ ৪ : কিন্তু OE এবং OF কেন্দ্র O থেকে যথাক্রমে PQ ও QR জ্যা এর দূরত্ব।
সুতরাং PQ ও QR জ্যাদ্বয় বৃত্তটির কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী। **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQRS একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ যার PQ = QR। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle PQR$ ও এর বিপরীত কোণ $\angle PSR$ এর সমষ্টি দুই সমকোণ অর্থাৎ $\angle PQR + \angle PSR$ = 2 সমকোণ।



অঙ্কন : O, P এবং O, R যোগ করি।
প্রমাণ :
ধাপ ১. PSR চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle POR$ এবং বৃত্তস্থ $\angle PQR$।

∴ POR = 2 (বৃত্তস্থ $\angle PQR$) [বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]
বা, $\angle POR = 2\angle PQR$
ধাপ ২. আবার, PQR চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ $\angle POR$ এবং বৃত্তস্থ $\angle PSR$।

∴ প্রবৃদ্ধ $\angle POR$ = 2 (বৃত্তস্থ $\angle PSR$) [বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]
বা, প্রবৃদ্ধ $\angle POR = 2\angle PSR$
ধাপ ৩. ধাপ (১) ও ধাপ (২) হতে পাই,
$\angle POR$ + প্রবৃদ্ধ $\angle POR = 2(\angle PQR + \angle PSR)$
কিন্তু $\angle POR$ + প্রবৃদ্ধ $\angle POR$ = 4 সমকোণ
অর্থাৎ, $2(\angle PQR + \angle PSR)$ = 4 সমকোণ

∴ $\angle PQR + \angle PSR$ = 2 সমকোণ। **(প্রমাণিত)**

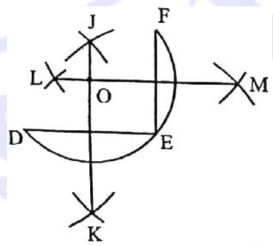
২৯. একটি রেখাংশের দৈর্ঘ্য a = 3.5 সে.মি.। a এর সমান ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্র C এবং বৃত্তটির বহিঃস্থ A বিন্দু হতে এর P এবং Q বিন্দুতে যথাক্রমে AP ও AQ দুইটি স্পর্শক।

[দিনাজপুর বোর্ড ২০২৩]

(ক) যেকোনো বৃত্তচাপ DEF এর কেন্দ্র নির্ণয় কর।
(খ) প্রমাণ কর যে, AP = AQ.
(গ) a এর সমান বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন কর। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)

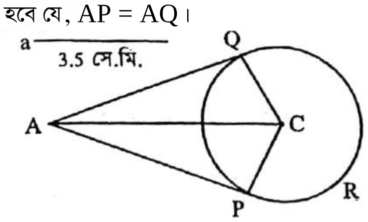
২৯ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক)



DEF বৃত্তচাপের কেন্দ্র O নির্ণয় করা হলো।

(খ) মনে করি, C কেন্দ্রবিশিষ্ট PQR বৃত্তের ব্যাসার্ধ a = 3.5 সে. মি.। PQR বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু A। A বিন্দু হতে বৃত্তের P ও Q বিন্দুতে যথাক্রমে AP ও AQ দুইটি স্পর্শক।
প্রমাণ করতে হবে যে, AP = AQ।



অঙ্কন : C, P; C, Q এবং A, C যোগ করি।

প্রমাণ : ধাপ ১ : যেহেতু AP স্পর্শক এবং CP স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ

$\therefore$ AP $\perp$ CP [$\because$ স্পর্শক, স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব]

$\therefore$ $\angle$APC = 1 সমকোণ

অনুরূপভাবে, $\angle$AQC = 1 সমকোণ

$\therefore$ Δ ACP ও Δ ACQ উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ।

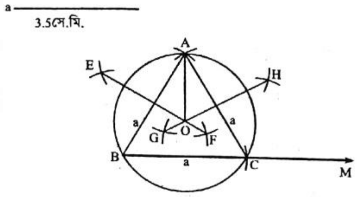
ধাপ ২ : Δ ACP ও Δ ACQ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে অতিভুজ AC = অতিভুজ AC [সাধারণ বাহু]

CP = CQ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\therefore$ Δ ACP $\cong$ Δ ACQ [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ বাহু সর্বসমতা]

$\therefore$ AP = AQ. **(প্রমাণিত)**

(গ)



মনে করি, একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য a = 3.5 সে. মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

১. যেকোনো রশ্মি BM থেকে BC = a নিই।

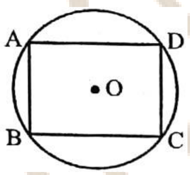
২. B ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BC এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে।

৩. A, B ও A, C যোগ করি। ফলে ΔABC-ই উদ্দিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ যার পরিবৃত্ত আঁকতে হবে।।

৪. AB ও AC এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EF ও GH আঁকি। এরা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

৫. A, O যোগ করি। O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। তাহলে, বৃত্তটি A, B ও C বিন্দুগামী হবে এবং এই বৃত্তটিই Δ ABC এর নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

30.



চিত্রে, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AD || BC.

[ময়মনসিংহ বোর্ড ২০২৩]

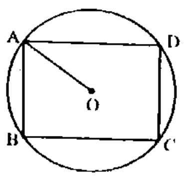
(ক) বৃত্তটির পরিধি 12π হলে, ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, AB = CD।

(গ) যদি $\angle$ADB + $\angle$BDC = 90° হয়, প্রমাণ কর যে, A, O এবং C একই সরলরেখায় অবস্থিত।

৩০ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) এখানে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের পরিধি = 12π একক



ধরি, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ, r = OA

$\therefore$ বৃত্তটির পরিধি = 2πr

শর্তমতে, $2\pi r = 12\pi$

বা, r = $\frac{12\pi}{2\pi}$ = 6 বর্গ একক

$\therefore$ বৃত্তটির ক্ষেত্রফল = πr^2 বর্গ একক = $\pi \times 6^2$ বর্গ একক

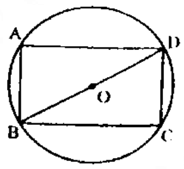
= 3.1416 × 36 বর্গ একক

= 113.0976 বর্গ একক (প্রায়)

নির্ণেয় বৃত্তের ক্ষেত্রফল 113.0976 বর্গ একক।

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABCD চতুর্ভুজে AD || BC এবং অপর দুইটি বাহু AB ও CD।

প্রমাণ করতে হবে যে, AB = CD।



অঙ্কন : B, D যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১. যেহেতু AD || BC এবং BD এদের ছেদক।

$\therefore$ $\angle$ADB = $\angle$CBD [একান্তর কোণ]

ধাপ ২. AB চাপের উর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ $\angle$ADB এবং CD চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ $\angle$CBD.

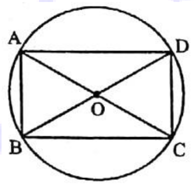
এখন, $\angle$ADB = $\angle$CBD হওয়ায় চাপ AB = চাপ DC

[$\because$ সমান সমান চাপ বৃত্তে সমান কোণ উৎপন্ন করে]

$\therefore$ AD = BC. [বৃত্তে সমান সমান চাপ সমান সমান জ্যা ছিন্ন করে]

অতএব, AD = BC **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ABCD একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। B, D যোগ করি। $\angle$ADB + $\angle$BDC = 90°। প্রমাণ করতে হবে যে, A, O এবং C এক সরলরেখায় অবস্থিত।



অঙ্কন : O, A এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১. যেহেতু কেন্দ্রস্থ $\angle$AOB এবং বৃত্তস্থ $\angle$ADB একই চাপ AB-এর উপর দন্ডায়মান, সেহেতু $\angle$AOB = 2 $\angle$ADB [একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

ধাপ ২. অনুরূপভাবে, BC চাপের ওপর দণ্ডায়মান $\angle$BOC = 2$\angle$BDC

ধাপ ৩. $\angle$AOB + $\angle$BOC = 2($\angle$ADB + $\angle$BDC) [ধাপ (১) ও (২) হতে)

= 2 × 90° [$\because$ $\angle$ADB + $\angle$BDC = 90°]

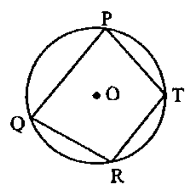
= 180°

$\therefore$ $\angle$AOB + $\angle$BOC = 1 সরলকোণ।

যেহেতু $\angle$AOB এবং $\angle$BOC সন্নিহিত কোণ।

সুতরাং A, O এবং C একই সরলরেখায় অবস্থিত। **(প্রমাণিত)**

৩১.



চিত্রে বৃত্তের কেন্দ্র O.

[ময়মনসিংহ বোর্ড ২০২৩]

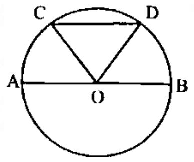
(ক) প্রমাণ কর যে, বৃত্তের ব্যাসই বৃহত্তম জ্যা।

(খ) বৃত্তটির বহিঃস্থ একটি বিন্দু S হতে PS এবং RS দুইটি স্পর্শক হলে, প্রমাণ কর যে, PS = RS.

(গ) প্রমাণ কর যে, $\angle QPT + \angle QRT = 180°$.

৩১ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABDC একটি বৃত্ত। AB ব্যাস এবং CD ব্যাস ভিন্ন যেকোনো একটি জ্যা।
প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তের ব্যাসই বৃহত্তম জ্যা; অর্থাৎ AB > CD.



অঙ্কন : O, C এবং O, D যোগ করি।

প্রমাণ : OA = OB = OC = OD [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

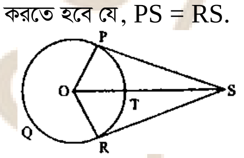
এখন, ΔOCD-এ, OC + OD > CD

[∵ ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]

বা, OA + OB > CD [∵ OA = OB = OC = OD]

∴ AB > CD. **(প্রমাণিত)**

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি PQRT বৃত্তে বহিঃস্থ S বিন্দু থেকে PS ও RS দুইটি স্পর্শক। প্রমাণ করতে হবে যে, PS = RS.



অঙ্কন : O, P; O, R এবং S, O যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : যেহেতু PS স্পর্শক এবং OP স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ

∴ $PS \perp OP$ [∵ স্পর্শক, স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব]

∴ $\angle SPO$ = 1 সমকোণ

অনুরূপভাবে, $\angle SRO$ = 1 সমকোণ,

∴ Δ SOP ও Δ SOR উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ।

ধাপ ২ : Δ SOP ও Δ SOR সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে

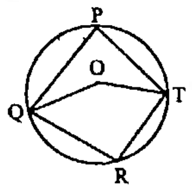
অতিভুজ SO = অতিভুজ SO [সাধারণ বাহু]

OP = OR [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

∴ $\Delta SOP \cong \Delta SOR$ [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ বাহু সর্বসমতা]

∴ PS = RS. **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQRT চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle QPT + \angle QRT = 180°$.



অঙ্কন : O, Q ও O, T যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : একই চাপ QRT এর উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle QOT$ = 2 (বৃত্তস্থ $\angle QPT$)

[একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

অর্থাৎ $\angle QOT = 2\angle QPT$

ধাপ ২ : আবার একই চাপ QPT এর উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle QOT$ = 2 (বৃত্তস্থ $\angle QRT$) [একই কারণে]

অর্থাৎ প্রবৃদ্ধ $\angle$ QOT = $2\angle QRT$

∴ $\angle QOT$ + প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle QOT = 2(\angle QPT + \angle QRT)$

কিন্তু, $\angle QOT$ + প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle QOT = 360°$

∴ $2(\angle QPT + \angle QRT) = 360°$

বা, $\angle QPT + \angle QRT = 360°$

∴ $\angle QPT + \angle QRT = 180°$. **(প্রমাণিত)**

৩২. O কেন্দ্রবিশিষ্ট PQRS বৃত্তে QS চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle QPS$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle QOS$।

[ঢাকা বোর্ড ২০২২]

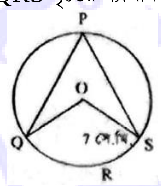
(ক) OS = 7 সে.মি. হলে, বৃত্তটির পরিধি নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\angle QOS = 2\angle OPS$.

(গ) প্রমাণ কর যে. $\angle PRQ = \angle PSQ$.

৩২ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) এখানে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট PQRS বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r = OS = 7 সে.মি.



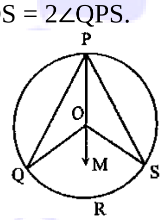
∴ বৃত্তটির পরিধি $= 2\pi r$

= 2 × 3.1416 × 7 সে.মি.

= 43.9824 সে.মি. (প্রায়)

নির্ণেয় বৃত্তের পরিধি 43.9824 সে.মি. (প্রায়)।

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট PQRS বৃত্তে QRS চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle QPS$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle QOS$।
প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle QOS = 2\angle QPS$.



অঙ্কন : মনে করি, PS রেখাংশ কেন্দ্রগামী নয়। এক্ষেত্রে P বিন্দু দিয়ে কেন্দ্রগামী রেখাংশ PM আঁকি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : ΔPOQ এর বহিঃস্থ $\angle QOM = \angle QPO + \angle PQO$

[∵ ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]

ধাপ-২ : ΔPOQ-এ OQ = OP [∵ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

∴ $\angle QPO = \angle PQO$

[∵ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটি সমান]

ধাপ-৩ : ধাপ (১) ও (২) থেকে, $\angle QOM = 2\angle QPO$

ধাপ-৪ : একইভাবে ΔPOS থেকে, $\angle SOM = 2\angle SPO$

ধাপ-৫ : ধাপ (৩) ও (৪) থেকে,

$\angle QOM + \angle SOM = 2\angle QPO + 2\angle SPO$ [যোগ করে]

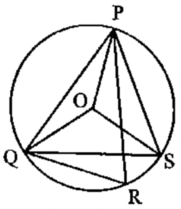
বা, $\angle QOS = 2(\angle QPO + \angle SPO)$ [∵ $\angle QOM + \angle SOM = \angle QOS$]

∴ $\angle QOS = 2\angle QPS$ [∵ $\angle QPO + \angle SPO = \angle QPS$]

(প্রমাণিত)

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট PQRS বৃত্তে QS চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle QPS$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle QOS$। P, R; Q, R এবং Q, S যোগ করি। PQ চাপের উপর দণ্ডায়মান $\angle PRQ$ এবং $\angle PSQ$ দুইটি বৃত্তস্থ কোণ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle PRQ = \angle PSQ$.



অঙ্কন : O, P যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : এখানে PQ চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle POQ$।

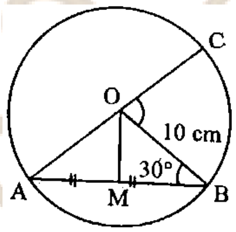
সুতরাং $\angle POQ = 2\angle PRQ$ এবং $\angle POQ = 2\angle PSQ$

[$\because$ একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

অর্থাৎ, $2\angle PRQ = 2\angle PSQ$

$\therefore$ $\angle PRQ = \angle PSQ$. **(প্রমাণিত)**

৩৩.



O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে জ্যা AB = y সে.মি. এবং $OM \perp AB$।

[ঢাকা বোর্ড ২০২২]

(ক) $\angle BOC$ এর পরিমাণ কত ডিগ্রী?

(খ) $OM = \left(\frac{y}{2} - 2\right)$ সে.মি. হলে, y এর মান নির্ণয় কর।

(গ) বহিঃস্থ একটি বিন্দু T থেকে C বিন্দুতে স্পর্শক আঁক।

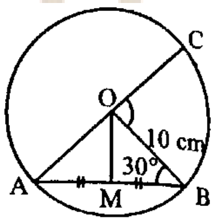
৩৩ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) ΔAOB-এ, OA = OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\angle OAB = \angle OBA$

[সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সমান]

$\therefore$ $\angle OAB = \angle OBA = 30°$ [$\because$ চিত্র হতে, $\angle OBA = 30°$]



আবার, ΔAOB-এ,

বহিঃস্থ $\angle BOC = \angle OAB + \angle OBA$

[ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি সমান]

$= 30° + 30°$

$= 60°$

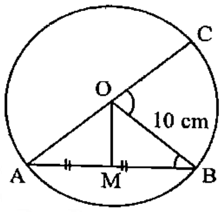
$\therefore$ $\angle BOC$ এর পরিমাণ 60°.

(খ) এখানে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে জ্যা AB = y সে.মি., ব্যাসার্ধ OB = 10 সে.মি.,

$OM = \left(\frac{y}{2} - 2\right)$ সে.মি.।

$OM \perp AB$

$\therefore$ $AM = BM = \frac{1}{2} AB = \frac{y}{2}$ সে.মি.



এখন, OBM সমকোণী ত্রিভুজে

$OM^2 + BM^2 = OB^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $\left(\frac{y}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = (10)^2$

বা, $\left(\frac{y}{2}\right)^2 - 2.\frac{y}{2}.2 + 2^2 + \frac{y^2}{4} = 100$

বা, $\frac{y^2}{4} - 2y + 4 + \frac{y^2}{4} = 100$

বা, $\frac{2y^2}{4} - 2y + 4 - 100 = 0$

বা, $\frac{y^2}{2} - 2y - 96 = 0$

বা, $y^2 - 4y - 192 = 0$

বা, $y^2 - 16y + 12y - 192 = 0$

বা, $y(y - 16) + 12(y - 16) = 0$

বা, $(y - 16)(y + 12) = 0$

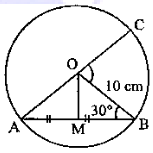
হয়, $y - 16 = 0$ আবার, $y + 12 = 0$

বা, $y = 16$ বা, $y = -12$; যা গ্রহণযোগ্য নয় কারণ দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore$ y এর মান 16.

দ্রষ্টব্য : উপরোক্ত সমস্যাটির সমাধান করার ক্ষেত্রে $\angle OBM = 30°$ কে বিবেচনা করা হয়নি। এক্ষেত্রে $\angle OBM = 30°$ বিবেচনা করলে অসঙ্গতি লক্ষ করা যায়।

সমস্যাটি সমাধানের ক্ষেত্রে বাহু ও কোণের মধ্যে অসঙ্গতি লক্ষ করা যায়। তাই সমস্যাটির আরও কয়েকভাবে সমাধান দেওয়া হলো :



এখানে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে জ্যা AB = y সে.মি., ব্যাসার্ধ OB = 10 সে.মি.,

$OM = \left(\frac{y}{2} - 2\right)$ সে.মি.

$OM \perp AB$

$\therefore$ $AM = BM = \frac{1}{2} AB = \frac{y}{2}$ সে.মি.

$\angle OBM = 30°$

*** OM এবং BM বাহুর সম্পর্ক বিবেচনা করে :**

এখন, OBM সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$\tan \angle OBM = \frac{OM}{BM}$

*** OM এবং OB বাহুর সম্পর্ক বিবেচনা করে :**

OBM সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$\sin \angle OBM = \frac{OM}{BM}$

বা, $\sin 30° = \frac{\frac{y}{2} - 2}{10}$

বা, $\tan 30° = \dfrac{\frac{y}{2} - 2}{\frac{y}{2}}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\frac{y-4}{2}}{\frac{y}{2}}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{y-4}{2} \times \dfrac{2}{y}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{y-4}{y}$

বা, $\sqrt{3}(y-4) = y$

বা, $\sqrt{3}y - 4\sqrt{3} = y$

বা, $\sqrt{3}y - y = 4\sqrt{3}$

বা, $y(\sqrt{3}-1) = 4\sqrt{3}$

বা, $y = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

$= \dfrac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$= \dfrac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2}$

$= 2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$

$\therefore y = 6 + 2\sqrt{3}.$

বা, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\frac{y-4}{2}}{10}$

বা, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{y-4}{20}$

বা, $1 = \dfrac{y-4}{10}$

বা, $y - 4 = 10$

বা, $y = 10 + 4$

$\therefore y = 14$

BM এবং OB বাহুর সম্পর্ক বিবেচনা করে :

OBM সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$\cos \angle OBM = \dfrac{BM}{OB}$

বা, $\cos 30° = \dfrac{\frac{y}{2}}{10}$

বা, $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{y}{20}$

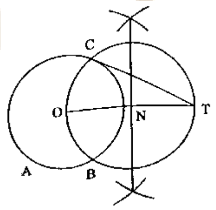
বা, $2y = 20\sqrt{3}$

বা, $y = \dfrac{20\sqrt{3}}{2}$

$\therefore 2y = 10\sqrt{3}$

নির্ণেয় মান : $y = 6 + 2\sqrt{3}$.

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের T একটি বহিঃস্থ বিন্দু। T বিন্দু থেকে ঐ বৃত্তে C বিন্দুতে স্পর্শক আঁকতে হবে।



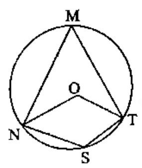
অঙ্কন :

(১) O, T যোগ করি। OT রেখাংশের মধ্যবিন্দু N নির্ণয় করি।

(২) N কে কেন্দ্র করে ON এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। মনে করি, নতুন অঙ্কিত বৃত্তটি প্রদত্ত বৃত্তকে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে।

(৩) C, T যোগ করি, তাহলে CT-ই নির্ণেয় স্পর্শক।

৩৪.



চিত্রে, O বৃত্তের কেন্দ্র।

[রাজশাহী বোর্ড ২০২২]

(ক) প্রমাণ কর যে, বৃত্তের ব্যাসই বৃহত্তম জ্যা।

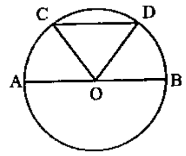
(খ) প্রমাণ কর যে, $\angle NMT = \frac{1}{2} \angle NOT$.

(গ) প্রমাণ কর যে, $\angle MNS + \angle MTS = 180°$.

৩৪ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABDC একটি বৃত্ত। AB ব্যাস এবং CD ব্যাস ভিন্ন যেকোনো একটি জ্যা।

প্রমাণ করতে হবে যে, AB > CD.



অঙ্কন : O, C এবং O, D যোগ করি।

প্রমাণ : OA = OB = OC = OD [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এখন, ΔOCD-এ, OC + OD > CD

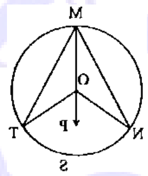
[∵ ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]

বা, OA + OB > CD [∵ OA = OB = OC = OD]

∴ AB > CD. **(প্রমাণিত)**

(খ) এখানে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট MNST বৃত্তে NST চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle NOT$ ও বৃত্তস্থ কোণ $\angle NMT$.

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle NMT = \frac{1}{2} \angle NOT$.



অঙ্কন : M বিন্দু দিয়ে O কেন্দ্রগামী রেখাংশ MP আঁকি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : Δ MON-এর বহিঃস্থ $\angle NOP = \angle NMO + \angle MNO$

[∵ ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]

ধাপ-২ : Δ MON-এ, OM = ON [∵ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

∴ $\angle MNO = \angle NMO$

[∵ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটি সমান]

ধাপ-৩ : ধাপ (১) ও (২) থেকে পাই,

$\angle NOP = \angle NMO + \angle NMO$

বা, $\angle NOP = 2\angle NMO$

ধাপ-৪ : একইভাবে, Δ MOT থেকে পাই,

$\angle TOP = 2\angle TMO$

ধাপ-৫ : ধাপ (৩) ও (৪) থেকে পাই,

$\angle NOP + \angle TOP = 2\angle NMO + 2\angle TMO$ [যোগ করে]

বা, $\angle NOT = 2(\angle NMO + \angle TMO)$

[∵ $\angle NOP + \angle TOP = \angle NOT$]

বা, $\angle NOT = 2\angle NMT$ [∵ $\angle NMO + \angle TMO = \angle NMT$]

বা, $2\angle NMT = \angle NOT$

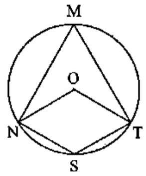
∴ $\angle NMT = \frac{1}{2}$ NOT. **(প্রমাণিত)**

(গ) এখানে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে MNST চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle MNS + \angle MTS = 180°$.

প্রমাণ :

ধাপ-১ : একই চাপ NMT এর উপর দণ্ডায়মান প্রবৃদ্ধ কেন্দ্রস্থ $\angle NOT$ = 2(বৃত্তস্থ $\angle NST$)

[∵ বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]



অর্থাৎ, প্রবৃদ্ধ $\angle NOT = 2\angle NST$.

ধাপ-২ : আবার, একই চাপ NST এর উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle NOT = 2$(বৃত্তস্থ $\angle NMT$)

অর্থাৎ, $\angle NOT = 2\angle NMT$.

ধাপ-৩ : প্রবৃদ্ধ $\angle NOT + \angle NOT = 2\angle NST + 2\angle NMT$ [ধাপ (১) ও (২) যোগ করে]

বা, $360° = 2(\angle NST + \angle NMT)$ [∵ প্রবৃদ্ধ $\angle NOT + \angle NOT = 360°$]

বা, $\angle NST + \angle NMT = \frac{360°}{2}$

∴ $\angle NST + \angle NMT = 180°$

ধাপ-৪ : আবার, MNST বৃত্ত চতুর্ভুজে,

$\angle MNS + \angle MTS + \angle NST + \angle NMT = 360°$ [∵ চতুর্ভুজের চার কোণের সমষ্টি 360°]

বা, $\angle MNS + \angle MTS + 180° = 360°$ [ধাপ (৩) থেকে]

বা, $\angle MNS + \angle MTS = 360° - 180°$

∴ $\angle MNS + \angle MTS = 180°$. **(প্রমাণিত)**

৩৫. p = 3 সে.মি. ও q = 3.5 সে.মি.।

[রাজশাহী বোর্ড ২০২২]

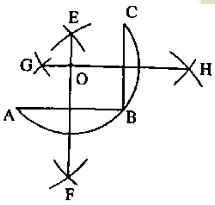
(ক) একটি বৃত্তচাপের কেন্দ্র নির্ণয় কর। [অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক]

(খ) q ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু T থেকে উক্ত বৃত্তে দুইটি স্পর্শক আঁক। [অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক]

(গ) p ও q কে একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহু ধরে উক্ত ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন কর। [অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক]

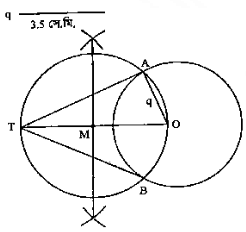
৩৫ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক)



ABC বৃত্তচাপের কেন্দ্র O নির্ণয় করা হলো।

(খ)



মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ q = 3.5 সে.মি. দেওয়া আছে। বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু T থেকে উক্ত বৃত্তে দুইটি স্পর্শক আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

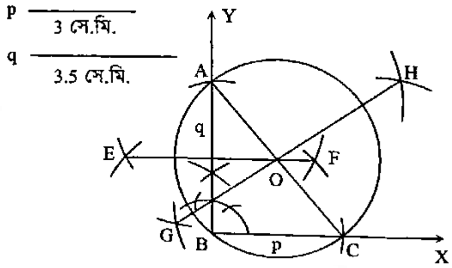
(১) O, T যোগ করি। OT রেখাংশের মধ্যবিন্দু M নির্ণয় করি।

(২) এখন M কে কেন্দ্র করে MO এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। মনে করি, নতুন অঙ্কিত বৃত্তটি প্রদত্ত বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।

(৩) A, T ও B, T যোগ করি।

তাহলে, AT ও BT উভয়েই নির্ণেয় দুইটি স্পর্শক।

(গ)



মনে করি, একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় p = 3 সে.মি. ও q = 3.5 সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত আঁকতে হবে।

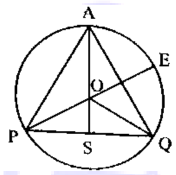
অঙ্কন :

(১) যেকোনো রশ্মি BX থেকে BC = p নিই। BC রেখাংশের B বিন্দুতে BY লম্ব আঁকি। BY থেকে BA = q নিই। A, C যোগ করি। ফলে ΔABC পাওয়া যাবে যার পরিবৃত্ত অঙ্কন করতে হবে।

(২) AB ও AC এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক EF ও GH আঁকি। এরা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

(৩) O কে কেন্দ্র করে OA বা OC এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। তাহলে, বৃত্তটি A, B ও C বিন্দুগামী হবে এবং এই বৃত্তটিই Δ ABC এর নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

৩৬.



[যশোর বোর্ড ২০২২]

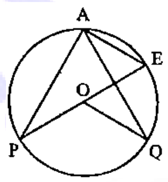
(ক) প্রমাণ কর যে, $\angle POE$ = এক সরলকোণ।

(খ) OS ⊥ PQ হলে দেখাও যে, PS = QS.

(গ) প্রমাণ কর যে, $\angle POQ = 2\angle PAQ$.

৩৬ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট PQEA একটি বৃত্ত। O কেন্দ্রগামী PE একটি রেখাংশ। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle POE$ = এক সরলকোণ।



অঙ্কন : অ, উ যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : $\angle PAE = 90°$ [∵ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ = 90°]

∴ $\angle PAQ + \angle QAE = 90°$ [∵ $\angle PAE = \angle PAQ + \angle QAE$]

ধাপ-২ : PQ চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle POQ$ ও বৃত্তস্থ $\angle PAQ$.

∴ $\angle POQ = 2\angle PAQ$ [∵ কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

ধাপ-৩ : QE চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle QOE$ ও বৃত্তস্থ $\angle QAE$.

∴ $\angle QOE = 2\angle QAE$

ধাপ-৪ : ধাপ (২) ও (৩) থেকে,

$\angle POQ + \angle QOE = 2\angle PAQ + 2\angle QAE$ [যোগ করে]

বা, $\angle POE = 2(\angle PAQ + \angle QAE)$ [∵ $\angle POQ + \angle QOE = \angle POE$]

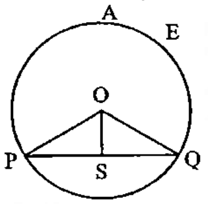
বা, $\angle POE = 2 \times 90^\circ$ [ধাপ (১) হতে]

বা, $\angle POE = 180^\circ$

$\therefore$ POE = এক সরলকোণ। [$\because$ এক সরলকোণ $= 180^\circ$]

(প্রমাণিত)

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট PQEA বৃত্তে ব্যাস নয় এমন একটি জ্যা PQ এবং $OS \perp PQ$। দেখাতে হবে যে, PS = QS.



প্রমাণ :

ধাপ-১ : যেহেতু $OS \perp PQ$

সেহেতু $\angle OSP = \angle OSQ$ এক সমকোণ।

$\therefore$ ΔOPS ও ΔOQS দুইটি সমকোণী ত্রিভুজ।

ধাপ-২ : ΔOPS এবং ΔOQS সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে

OP = OQ [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং OS = OS [সাধারণ বাহু]

$\therefore$ $\Delta OPS \cong \Delta OQS$

[সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

$\therefore$ PS = QS. **(দেখানো হলো)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট PQEA বৃত্তে PQ চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle POQ$ ও বৃত্তস্থ $\angle PAQ$। A বিন্দু দিয়ে কেন্দ্রগামী রেখাংশ AS। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle POQ = 2\angle PAQ$.

প্রমাণ :

ধাপ-১ : ΔAOP এর বহিঃস্থ $\angle POS = \angle PAO + \angle APO$

[ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ তার অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি সমান]

ধাপ-২ : ΔAOP-এ OP = OA [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\therefore$ $\angle PAO = \angle APO$

[$\because$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটি পরস্পর সমান]

ধাপ-৩ : ধাপ (১) ও ধাপ (২) থেকে, $\angle POS = \angle PAO + \angle PAO$

বা, $\angle POS = 2\angle PAO$

ধাপ-৪ : একইভাবে ΔAOQ থেকে $\angle QOS = 2\angle QAO$

ধাপ-৫ : ধাপ (৩) ও (৪) থেকে,

$\angle POS + \angle QOS = 2\angle PAO + 2\angle QAO$ [যোগ করে]

বা, $\angle POQ = 2(\angle PAO + \angle QAO)$

[$\because \angle POS + \angle QOS = \angle POQ$]

$\therefore$ $\angle POQ = 2\angle PAQ$ [$\because \angle PAO + \angle QAO = \angle PAQ$]

(প্রমাণিত)

৩৭. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4 সে.মি., 5 সে.মি. এবং 6 সে.মি.।

[যশোর বোর্ড ২০২২]

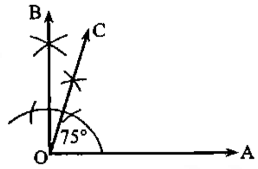
(ক) পেন্সিল কম্পাসের সাহায্যে 75° কোণ অঙ্কন কর।

(খ) উদ্দীপকের বাহু তিনটি নিয়ে একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করে ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন কর। [অঙ্কনের চিহ্ন এবং বিবরণ আবশ্যক]

(গ) উদ্দীপকের বৃহত্তম বাহুকে কোনো বৃত্তের ব্যাস ধরে উক্ত বৃত্তে এমন, দুইটি স্পর্শক অঙ্কন কর যেন এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° হয়। [অঙ্কনের চিহ্ন এবং বিবরণ আবশ্যক]

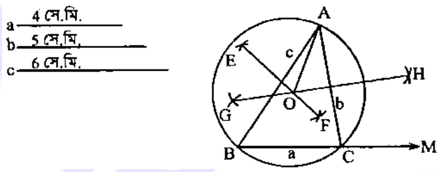
৩৭ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক)



পেন্সিল কম্পাসের সাহায্যে $\angle AOC = 75^\circ$ কোণ অঙ্কন করা হলো।

(খ)



মনে করি, একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য a = 4 সে.মি., b = 5 সে.মি. ও c = 6 সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কন :

যেকোনো রশ্মি BM থেকে a এর সমান করে BC অংশ কেটে নিই।

BC রেখাংশের B ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে যথাক্রমে c ও b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BC এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে। B, A এবং C, A যোগ করি। তাহলে ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ যার পরিবৃত্ত আঁকতে হবে।

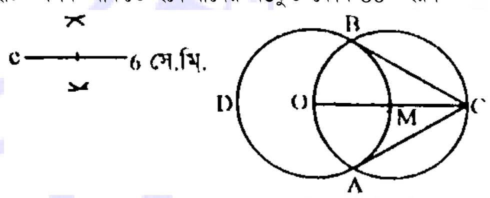
AB ও AC বাহুর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EF ও GH অঙ্কন করি। মনে করি, তারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

O, A যোগ করি।

O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। বৃত্তটি A, B ও C বিন্দু দিয়ে যায়।

তাহলে, এই বৃত্তটির উদ্দিষ্ট ত্রিভুজের পরিবৃত্ত।

(গ) মনে করি O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABD বৃত্তের ব্যাস, c = 6 সে.মি.। ABD বৃত্তে এরূপ দুইটি স্পর্শক আঁকতে হবে যাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° হয়।



অঙ্কন : ABD বৃত্তের পরিধির উপর M যেকোনো একটি বিন্দু নিই। O, M যোগ করি এবং OM কে C পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন OM = MC হয়। M কে কেন্দ্র করে OM বা MC এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। এ বৃত্তটি ABD বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। A, C ও B, C যোগ করি।

তাহলে AC ও BC উদ্দীষ্ট স্পর্শকদ্বয় যাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60°।

৩৮. P কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB ও CD দুইটি জ্যা।

[যশোর বোর্ড ২০২২]

(ক) 4 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) যদি AB = CD হয়, তবে প্রমাণ কর যে, P থেকে AB ও CD এর দূরত্ব সমান।

(গ) যদি AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে কোনো বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে তবে প্রমাণ কর যে, $\angle APC + \angle BPD = 2$ সমকোণ।

৩৮ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) এখানে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r = 4 সে.মি.

∴ বৃত্তের ক্ষেত্রফল = πr^2

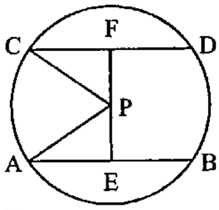
$= 3.1416 \times 4^2$ বর্গ সে.মি.

$= 3.1416 \times 16$ বর্গ সে.মি.

$= 50.2656$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

নির্ণেয় বৃত্তের ক্ষেত্রফল 50.2656 বর্গ সে.মি. (প্রায়)।

(খ) মনে করি, P কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB ও CD দুইটি সমান জ্যা অর্থাৎ AB = CD। প্রমাণ করতে হবে যে, P থেকে AB ও CD এর দূরত্ব সমান।



অঙ্কন : P থেকে AB ও CD জ্যা এর উপর যথাক্রমে PE ও PF লম্ব রেখাংশ আঁকি। P, A ও P, C যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : $PE \perp AB$ এবং $PF \perp CD$

সুতরাং AE = BE এবং CF = DF

[∵ কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

∴ $AE = AB$ এবং $CF = \frac{1}{2} CD$

ধাপ-২ : কিন্তু AB = CD [ধরে নেওয়া]

বা, $\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} CD$

∴ AE = CF

ধাপ-৩ : এখন ΔPAE এবং ΔPCF সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে অতিভুজ AP = অতিভুজ CP [উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং AE = CF [ধাপ (২) হতে]

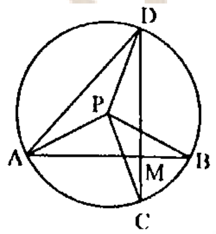
∴ $\Delta PAE \cong \Delta PCF$ [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

∴ PE = PF

ধাপ-৪ : কিন্তু PE এবং PF কেন্দ্র P থেকে যথাক্রমে AB জ্যা এবং CD জ্যা এর দূরত্ব নির্দেশ করে।

সুতরাং P থেকে AB ও CD এর দূরত্ব সমান। **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, P কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে M বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করেছে। P, A; P, B; P, C ও P, D যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle APC + \angle BPD = 2$ সমকোণ।



অঙ্কন : A, D যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : AC চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle APC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle ADC$.

∴ $\angle APC = 2\angle ADC$

[∵ বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

ধাপ-২ : BD চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle BPD$ এবং বৃত্তস্থ $\angle BAD$.

$\angle BPD = 2\angle BAD$

ধাপ-৩ : ধাপ (১) ও ধাপ (২) হতে,

$\angle APC + \angle BPD = 2(\angle ADC + \angle BAD)$ [যোগ করে]

ধাপ-৪ : ΔAMD-এ; $\angle AMD$ এক সমকোণ

∴ $\angle ADM + \angle DAM = 1$ সমকোণ

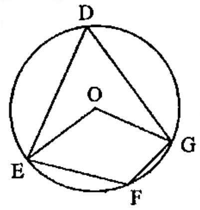
বা, $\angle ADC + \angle BAD = 1$ সমকোণ

ধাপ-৫ : ধাপ (৩) ও ধাপ (৪) হতে পাই,

$\angle APC + \angle BPD = 2 \times 1$ সমকোণ

∴ $\angle APC + \angle BPD = 2$ সমকোণ। **(প্রমাণিত)**

৩৯.



[কুমিল্লা বোর্ড ২০২২]

(ক) বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 4.5 সে.মি. হলে ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\angle EDG + \angle EFG = 180°$.

(গ) DF ও EG কর্ণদ্বয় পরস্পরকে বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\angle DOE + \angle FOG = 2\angle DPE$.

৩৯ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) এখানে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r = 4.5 সে.মি.

∴ বৃত্তের ক্ষেত্রফল = πr^2

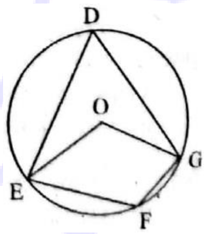
$= 3.1416 \times (4.5)^2$ বর্গ সে.মি.

$= 3.1416 \times 20.25$ বর্গ সে.মি.

$= 63.6174$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 63.6174 বর্গ সে.মি. (প্রায়)।

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে DEFG চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle EDG + \angle EFG = 180°$.



প্রমাণ :

ধাপ-১ : একই চাপ EFG এর উপর দন্ডায়মান E কেন্দ্রস্থ $\angle EOG$ এবং বৃত্তস্থ $\angle EDG$.

∴ $\angle EOG = 2\angle EDG$

[∵ বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

ধাপ-২ : একই চাপ EDG এর উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ প্রকৃস্থ $\angle EOG$ এবং বৃত্তস্থ $\angle EFG$.

∴ প্রবৃদ্ধ $\angle EOG = 2\angle EFG$ [একই কারণে]

ধাপ-৩ : ধাপ (১) ও (২) হতে পাই,

$\angle EOG +$ প্রবৃদ্ধ $\angle EOG = 2\angle EDG + 2\angle EFG$

বা, $2(\angle EDG + \angle EFG) = 360°$ [∵ $\angle EOG +$ প্রবৃদ্ধ $\angle EOG = 360°$]

∴ $\angle EDG + \angle EFG = 180°$. **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে DEFG চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত। DF ও EG কর্ণদ্বয় পরস্পর বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle DOE + \angle FOG = 2\angle DPE$.

অঙ্কন : O. D; O, E; O, F ও O, G যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : DE চাপের দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle DOE$ এবং বৃত্তস্থ $\angle DGE$.

$\therefore\ \angle DOE = 2\angle DGE$

[∵ বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

ধাপ-২ : FG চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle FOG$ এবং বৃত্তস্থ $\angle FDG$.

$\therefore\ FOG = 2\angle FDG$ [একই কারণে]

ধাপ-৩ : ধাপ (১) ও (২) হতে পাই,

$\angle DOE + \angle FOG = 2\angle DGE + 2\angle FDG$ [যোগ করে]

বা, $\angle DOE + \angle FOG = 2(\angle DGP + \angle GDP)$

ধাপ-৪ : ΔDPG-এ বহিঃস্থ $\angle DPE$ = অন্তঃস্থ $(\angle DGP + \angle GDP)$

ধাপ-৫ : ধাপ (৩) ও (৪) হতে পাই,

$\therefore\ \angle DOE + \angle FOG = 2\angle DPE$. **(প্রমাণিত)**

৪০. 'O' কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQ এবং RS দুইটি সমান জ্যা। $OM \perp PO$ এবং $ON \perp RS$. MN এর একই পাশে 'P' ও 'R' অবস্থিত। [কুমিল্লা বোর্ড ২০২২]

(ক) PQ = 16 সে.মি., OM = 6 সে.মি. হলে OP এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

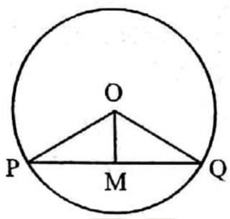
(খ) প্রমাণ কর যে, OM = ON.

(গ) $PQ \parallel RS$ এবং $\angle MPO = 30°$ হলে প্রমাণ কর যে, Δ POR একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

৪০ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) এখানে, PQ = 16 সে.মি. এবং OM = 6 সে.মি.।

যেহেতু $OM \perp PQ$ সেহেতু PM = QM.



[∵ বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

$\therefore\ PM = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2} \times 16$ সে.মি. = 8 সে.মি.

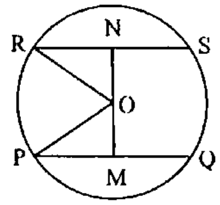
এখন, OPM সমকোণী ত্রিভুজে,

$OP^2 = OM^2 + PM^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

$\therefore\ OP = \sqrt{100} = 10$

$\therefore$ OP এর দৈর্ঘ্য 10 সে.মি.।

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQ ও RS দুইটি সমান জ্যা। $OM \perp PQ$ এবং $ON \perp RS$. প্রমাণ করতে হবে যে, OM = ON.



অঙ্কন : O, P এবং O, R যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : $OM \perp PQ$ এবং ওঘ জঝ.

সুতরাং PM = QM এবং RN = SN

[∵ বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

$\therefore\ PM = \frac{1}{2}PQ$ এবং $RN = \frac{1}{2}RS$

ধাপ-২ : কিন্তু PQ = RS [ধরে নেওয়া]

$\therefore\ PM = RN$

ধাপ-৩ : এখন, Δ OPM এবং Δ ORN সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে অতিভুজ OP = অতিভুজ OR [উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং PM = RN [ধাপ (২) হতে]

$\therefore\ \Delta OPM \cong \Delta ORN$

[সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

$\therefore$ OM = ON. **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQ ও RS দুইটি সমান জ্যা। $OM \perp PQ$ এবং $ON \perp RS$। O, P; O, R ও P, R যোগ করি। $PQ \parallel RS$ এবং $\angle MPO = 30°$ হলে, প্রমাণ করতে হবে যে, ΔPOR একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : ΔOPM-এ, $\angle MPO = 30°$ [দেওয়া আছে]

এবং $\angle OMP = 90°$ [∵ $OM \perp PQ$]

$\therefore\ \angle POM + \angle MPO + \angle OMP = 180°$

[∵ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°]

বা, $\angle POM + 30° + 90° = 180°$

[∵ $\angle MPO = 30°$ এবং $\angle OMP = 90°$]

বা, $\angle POM + 120° = 180°$

বা, $\angle POM = 180° - 120°$

$\therefore\ \angle POM = 60°$

ধাপ-২ : Δ OMP ও Δ ONR সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে

অতিভুজ OP = অতিভুজ OR [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

OM = ON [∵ PQ = RS]

$\therefore\ \Delta OMP \cong \Delta ONR$

[সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

$\therefore\ \angle POM = \angle RON$

$\therefore\ \angle RON = 60°$ [ধাপ (১) হতে]

ধাপ-৩ : $\angle POM + \angle POR + \angle RON$ = এক সরলকোণ

বা, $60° + \angle POR + 60° = 180°$ [∵ এক সরলকোণ = 180°]

বা, $\angle POR + 120° = 180°$

বা, $\angle POR = 180° - 120° = 60°$

ধাপ-৪ : Δ POR-এ,

OP = OR [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

∴ $\angle OPR = \angle ORP$

[∵ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয় পরস্পর সমান]

এবং $\angle OPR + \angle POR + \angle ORP = 180°$

[ত্রিভুজের তিন, কোণের সমষ্টি 180°]

বা, $\angle OPR + \angle POR + \angle OPR = 180°$ [∵ $\angle OPR = \angle ORP$]

বা, $2\angle OPR + 60° = 180°$ [ধাপ (৩) হতে]

বা, $2\angle OPR = 180° - 60° = 120°$

∴ $\angle OPR = \frac{120°}{2} = 60°$

∴ $\angle ORP = \angle OPR = 60°$

ধাপ-৫ : Δ POR-এ,

$\angle POR = \angle OPR = \angle ORP = 60°$

∴ Δ POR একটি সমবাহু ত্রিভুজ। **(প্রমাণিত)**

৪১. 'O' কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQ ও RS ব্যাস ভিন্ন দুইটি জ্যা। $OM \perp PQ$ এবং $ON \perp RS$.

[চট্টগ্রাম বোর্ড ২০২২]

(ক) প্রমাণ কর যে, বৃত্তের ব্যাসই বৃহত্তম জ্যা।

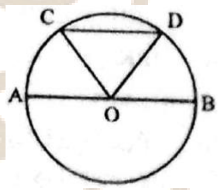
(খ) যদি OM = ON হয়, তবে প্রমাণ কর যে, PQ = RS.

(গ) যদি PQ ও RS জ্যাদ্বয় বৃত্তের অভ্যন্তরে E বিন্দুতে পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, $\angle POS + \angle QOR$ = দুই সমকোণ।

৪১ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABDC একটি বৃত্ত। AB ব্যাস এবং CD ব্যাস ভিন্ন যেকোনো একটি জ্যা।

প্রমাণ করতে হবে যে, AB > CD.



অঙ্কন : O, C এবং O, D যোগ করি।

প্রমাণ : OA = OB = OC = OD [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

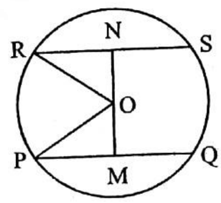
এখন, ΔOCD-এ, OC + OD > CD

[∵ ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]

বা, OA + OB > CD [∵ OA = OB = OC = OD]

∴ AB > CD. **(প্রমাণিত)**

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQ ও RS ব্যাস ভিন্ন দুইটি জ্যা। O থেকে PQ ও RS এর উপর যথাক্রমে OM ও ON লম্ব। OM = ON হলে প্রমাণ করতে হবে যে, PQ = RS.



অঙ্কন : O, P এবং O, R যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : যেহেতু $OM \perp PQ$ ও $ON \perp RS$

সুতরাং $\angle OMP = \angle ONR$ = এক সমকোণ।

ধাপ-২ : এখন, ΔOPM এবং ΔORN সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে অতিভুজ OP = অতিভুজ OR [উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং OM = ON [ধরে নেওয়া]

∴ $\Delta OPM \cong \Delta OPN$

[সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

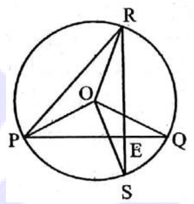
∴ PM = RN

ধাপ-৩ : $PM = \frac{1}{2}PQ$ এবং $RN = \frac{1}{2}RS$ [∵ কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

ধাপ-৪ : সুতরাং $\frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}RS$

∴ PQ = RS. **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQ ও RS ব্যাস ভিন্ন জ্যাদ্বয় বৃত্তের অভ্যন্তরে E বিন্দুতে পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করেছে। O, P; O, Q; O, R ও O, S যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle POS + \angle QOR$ = দুই সমকোণ।



অঙ্কন : P, R যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : PS চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle POS$ এবং বৃত্তস্থ $\angle PRS$.

∴ $\angle POS = 2\angle PRS$

[∵ বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

ধাপ-২ : QR চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle QOR$ এবং বৃত্তস্থ $\angle QPR$.

∴ $\angle QOR = 2\angle QPR$ [একই কারণে]

ধাপ-৩ : ধাপ (১) ও (২) থেকে পাই,

∴ $\angle POS + \angle QOR = 2\angle PRS + 2\angle QPR$ [যোগ করে]

$= 2(\angle PRS + \angle QPR)$............ (i)

ধাপ-৪ : ΔPER-এ, $\angle PER$ = 1 সমকোণ

∴ $\angle PRE + \angle RPE$ = 1 সমকোণ

বা, $\angle PRS + \angle QPR$ = 1 সমকোণ

ধাপ-৫ : ধাপ (৩) ও (৪) নং থেকে পাই,

$\angle POS + \angle QOR = 2 \times 1$ সমকোণ

∴ $\angle POS + \angle QOR$ = 2 সমকোণ। **(প্রমাণিত)**

৪২. O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু L থেকে উক্ত বৃত্তে LM ও LN দুইটি স্পর্শক।

[চট্টগ্রাম বোর্ড ২০২২]

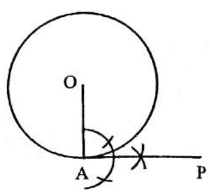
(ক) 2.0 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে একটি স্পর্শক আঁকতে হবে। [শুধুমাত্র অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক]

(খ) প্রমাণ কর যে, LM = LN.

(গ) প্রমাণ কর যে, OL রেখাংশ MN স্পর্শ জ্যা এর লম্ব দ্বিখন্ডক।

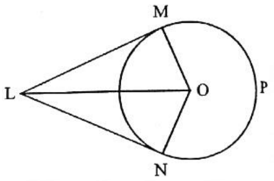
৪২ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক)



এখানে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ OA = 2.0 সে.মি.। বৃত্তটির A বিন্দুতে AP স্পর্শক আঁকা হলো।

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট MPN বৃত্তের L একটি বহিঃস্থ বিন্দু এবং LM ও LN রেখাংশদ্বয় বৃত্তের M ও N বিন্দুতে দুইটি স্পর্শক। প্রমাণ করতে হবে যে, LM = LN.



অঙ্কন : O, M; O, N এবং O, L যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : যেহেতু LM স্পর্শক এবং OM স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

সেহেতু $LM \perp OM$ [∵ স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব]

∴ $\angle LMO$ = এক সমকোণ

অনুরূপভাবে, $\angle LNO$ = এক সমকোণ।

∴ ΔLMO এবং ΔLNO উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ।

ধাপ-২ : এখন, ΔLMO এবং ΔLNO সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে

অতিভুজ LO = অতিভুজ LO [সাধারণ বাহু]

এবং OM = ON [∵ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

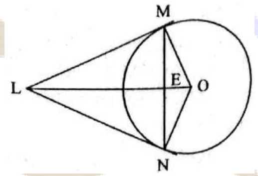
∴ $\Delta LMO \cong \Delta LNO$

[সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

∴ LM = LN. **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু L থেকে বৃত্তে LM ও LN দুইটি স্পর্শক M, N এবং O, L যোগ করি। MN হচ্ছে স্পর্শ জ্যা। OL রেখাংশ MN জ্যাকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, OL রেখাংশ MN স্পর্শ জ্যা-এর লম্বদ্বিখণ্ডক।



অঙ্কন : O, M এবং O, N যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : Δ OML এবং Δ ONL এর মধ্যে

OM = ON [∵ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

LM = LN [বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় সমান]

এবং OL = OL [সাধারণ বাহু]

∴ $\Delta OML \cong \Delta ONL$ [বাহু-বাহু-বাহু উপপাদ্য]

∴ $\angle MOL = \angle NOL$

অর্থাৎ, $\angle MOE = \angle NOE$

ধাপ-২ : এখন, Δ OME ও Δ ONE-এ,

OM = ON [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

OE = OE [সাধারণ বাহু]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle MOE$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle NOE$ [ধাপ (১) হতে]

∴ $\Delta OME \cong \Delta ONE$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

ME = NE

এবং $\angle MEO = \angle NEO$

ধাপ-৩ : এখন, $\angle MEN$ = 2 সমকোণ [সরলকোণ বলে]

বা, $\angle MEO + \angle NEO$ = 2 সমকোণ

বা, $\angle MEO + \angle MEO$ = 2 সমকোণ [ধাপ (২) হতে]

বা, $2\angle MEO$ = 2 সমকোণ

∴ $\angle MEO$ = 1 সমকোণ

∴ $\angle NEO = \angle MEO$ = 1 সমকোণ

∴ $OE \perp MN$

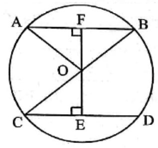
অর্থাৎ, $OL \perp MN$

আবার, ME = NE

∴ OL, MN কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

অতএব, OL রেখাংশ MN স্পর্শ জ্যা-এর লম্বদ্বিখণ্ডক। **(প্রমাণিত)**

৪৩.



AB = CD

[সিলেট বোর্ড ২০২২]

(ক) বৃত্তের ব্যাসার্ধ 3 সে.মি. হলে, পরিধির মান বের কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, OE = OF.

(গ) প্রমাণ কর যে, $\angle AOC = 2\angle ABC$.

৪৩ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r = 3 সে.মি.

বৃত্তের পরিধি = $2\pi r$

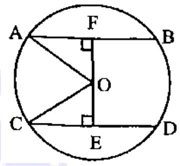
= $2 \times 3.1416 \times 3$ সে.মি.

= 18.8496 সে.মি. (প্রায়)

নির্ণেয় পরিধি 18.8496 সে.মি. (প্রায়)।

(খ) মনে করি, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB = CD অর্থাৎ AB ও CD বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা। O থেকে AB এবং CD জ্যা এর উপর যথাক্রমে OF ও OE লম্ব রেখাংশ।

প্রমাণ করতে হবে যে, OE = OF



প্রমাণ :

ধাপ-১ : $OF \perp AB$ এবং $OE \perp CD$

∴ $AF = \frac{1}{2}AB$ এবং $CE = \frac{1}{2}CD$. [∵ বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

ধাপ-২ : কিন্তু AB = CD [দেওয়া আছে]

∴ AF = CE.

ধাপ-৩ : এখন, ΔOAF এবং ΔOCE সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে অতিভুজ OA = অতিভুজ OC [উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং AF = CE [ধাপ (২) হতে]

∴ $\Delta OAF \cong \Delta OCE$

[সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ বাহু-সর্বসমতা উপপাদ্য]

∴ OE = OF. **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে BC রেখাংশ কেন্দ্রগামী। বৃত্তের একই উপচাপ AC এর উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle AOC$ এবং বৃত্তস্থ কোণ $\angle ABC$।

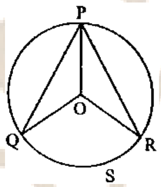
প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOC = 2\angle ABC$।

ধাপ ১ : Δ AOB এ OA = OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
$\angle OBA = \angle OAB$
[∵ ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সমান]
ধাপ ২ : আবার, Δ AOB এর বহিঃস্থ $\angle AOC = \angle OAB + \angle OBA$
[∵ ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]
$= \angle OBA + \angle OBA$ [ধাপ (১) হতে]
বা, $\angle AOC = 2\angle OBA$
∴ $\angle AOC = 2\angle ABC$ [∵ $\angle OBA = \angle ABC$] **(প্রমাণিত)**

৪৪. O কেন্দ্রবিশিষ্ট PQSR বৃত্তে QR চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle QPR$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle QOR$.
[সিলেট বোর্ড ২০২২]
(ক) OP = 7 সে.মি. হলে, বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
(খ) প্রমাণ কর যে, $\angle QPR = \frac{1}{2}\angle QOR$
(গ) যদি $\angle QPS + \angle SPR = 90°$ হয় তবে, প্রমাণ কর যে, Q, O এবং R একই সরলরেখায় অবস্থিত।

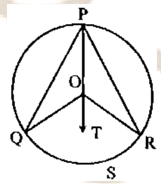
৪৪ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) এখানে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r = OP = 7 সে.মি.



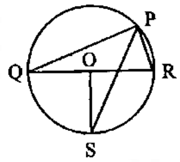
∴ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$
$= 3.1416 \times 7^2$ বর্গ সে.মি.
$= 3.1416 \times 49$ বর্গ সে.মি.
$= 153.9384$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)
নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 153.9384 বর্গ সে.মি. (প্রায়)।

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট PQSR বৃত্তে QR চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle QPR$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle QOR$। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle QPR = \frac{1}{2}\angle QOR$.



অঙ্কন : O, P যোগ করি। O কেন্দ্রগামী Q রেখাংশ PT আঁকি।
প্রমাণ :
ধাপ-১ : ΔPOQ এর বহিঃস্থ $\angle QOT$ অন্তঃস্থ $(\angle QPO + \angle PQO)$
[∵ ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]
ধাপ-২ : ΔPOQ-এ, OP = OQ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
∴ $\angle PQO = \angle QPO$
[∵ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটি সমান]
ধাপ-৩ : ধাপ (১) ও (২) থেকে পাই,
$\angle QOT = 2\angle QPO$
ধাপ-৪ : একইভাবে অচঙজ থেকে পাই,
$\angle ROT = 2\angle RPO$
ধাপ-৫ : ধাপ (৩) ও (৪) থেকে পাই,
$\angle QOT + \angle ROT = 2\angle QPO + 2\angle RPO$ [যোগ করে]
বা, $\angle QOR = 2(\angle QPO + \angle RPO)$
[∵ $\angle QOT + \angle ROT = \angle QOR$]
বা, $\angle QOR = 2\angle QPR$ [∵ $\angle QPO + \angle RPO = \angle QPR$]
বা, $2\angle QPR = \angle QOR$
∴ $\angle QPR = \frac{1}{2}\angle QOR$. **(প্রমাণিত)**

(গ) O কেন্দ্রবিশিষ্ট PQSR বৃত্তে $\angle QPS + \angle SPR = 90°$। প্রমাণ করতে হবে যে, Q, O এবং R একই সরলরেখায় অবস্থিত।

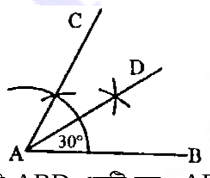


অঙ্কন : O, S যোগ করি।
প্রমাণ :
ধাপ ১ : যেহেতু কেন্দ্রস্থ $\angle QOS$ এবং বৃত্তস্থ $\angle QPS$ একই চাপ QS- এর উপর দন্ডায়মান, সেহেতু $\angle QOS = 2\angle QPS$
[∵ বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]
ধাপ ২ : অনুরূপভাবে, SR চাপের ওপর দণ্ডায়মান $\angle SOR = 2\angle SPR$
ধাপ ৩ : ∴ $\angle QOS + \angle SOR = 2(\angle QPS + \angle SPR)$
[ধাপ (১) ও (২) থেকে]
$= 2 \times 90°$ [$\angle QPS + \angle SPR = 90°$]
$= 2 \times 1$ সমকোণ
∴ $\angle QOS + \angle SOR = 2$ সমকোণ।
যেহেতু $\angle QOS$ এবং $\angle SOR$ সন্নিহিত কোণ।
সুতরাং Q, O এবং R একই সরলরেখায় অবস্থিত। **(প্রমাণিত)**

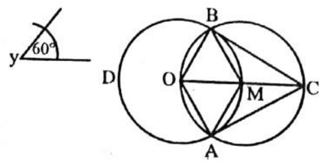
৪৫. Δ ABC এর a = 3.5 সে.মি., b = 4 সে.মি., c = 4.6 সে.মি. এবং $\angle y = 60°$.
[সিলেট বোর্ড ২০২২]
(ক) পেন্সিল কম্পাস ব্যবহার করে 30° কোণ অঙ্কন কর।
(খ) কোনো বৃত্তে এমন দুইটি স্পর্শক আঁক যেন এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle y$ এর সমান হয়।
(গ) ΔABC এর পরিবৃত্ত আঁক। [অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক]

৪৫ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) পেন্সিল কম্পাসের সাহায্যে $\angle BAD = 30°$ অঙ্কন করা হলো।



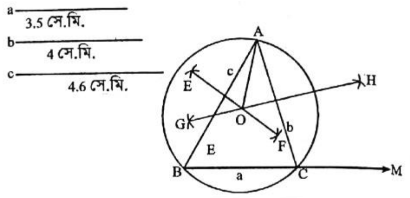
(খ) মনে করি O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABD একটি বৃত্ত। ABD বৃত্তে এরূপ দুইটি স্পর্শক আঁকতে হবে যাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle y = 60°$ হয়।



অঙ্কন :
১. ABD বৃত্তের পরিধির উপর M যেকোনো একটি বিন্দু নিই। O, M যোগ করি এবং OM কে C পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন OM = MC হয়।
২. M কে কেন্দ্র করে OM বা MC এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। এ বৃত্তটি ABD বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। A, C ও B, C যোগ করি।

তাহলে AC এবং BC উদ্দীষ্ট স্পর্শকদ্বয় যাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle y = 60°$।

(গ)



মনে করি, Δ ABC এর তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য a = 3.5 সে.মি., b = 4 সে.মি. c = 4.6 সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত আঁকতে হবে।

১. যেকোনো রশ্মি BM থেকে BC = a নিই।

২. B ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে যথাক্রমে c ও b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BC এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে।

৩. A, B ও A, C যোগ করি। ফলে Δ ABC পাওয়া যাবে যার পরিবৃত্ত অঙ্কন করতে হবে।

৪. AB ও AC এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EF ও GH আঁকি। এরা পরস্পরকে বিন্দুতে ছেদ করে।

৫. A, O যোগ করি। O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। তাহলে, বৃত্তটি A, B ও C বিন্দুগামী হবে এবং এই বৃত্তটি ΔABC এর নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

46. O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটির PQ এবং RS দুইটি জ্যা। OE $\perp$ PQ এবং OF $\perp$ RS.

[বরিশাল বোর্ড ২০২২]

(ক) প্রমাণ কর : PE = QE.

(খ) যদি PQ = RS হয় তবে প্রমাণ কর : OE = OF.

(গ) যদি PQ > RS হয় তবে প্রমাণ কর : OE < OF.

৪৬ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ব্যাস নয় এমন একটি জ্যা PQ এবং OE $\perp$ PQ। প্রমাণ করতে হবে যে, PE = QE.

প্রমাণ :

ধাপ-১ : যেহেতু OE $\perp$ PQ সেহেতু $\angle$OEP = $\angle$OEQ এক সমকোণ। অতএব, ΔOPE ও ΔOQE দুইটি সমকোণী ত্রিভুজ।

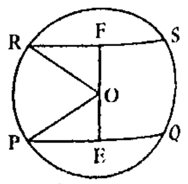
ধাপ-২ : ΔOPE ও ΔOQE-সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে

অতিভুজ OP = অতিভুজ OQ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

OE = OE [সাধারণ বাহু]

$\therefore$ ΔOPE $\cong$ ΔOOE [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য] $\therefore$ PE = QE. **(প্রমাণিত)**

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQ ও RS দুইটি জ্যা এবং PQ $\perp$ RS। OE $\perp$ PQ এবং OF $\perp$ RS। প্রমাণ করতে হবে যে, OE = OF.



অঙ্কন : O, P ও O, R যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : যেহেতু OE $\perp$ PQ এবং OF $\perp$ RS.

সুতরাং PE = QE এবং RF = SF [$\because$ বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

$PE = \frac{1}{2}PQ$ এবং $RF = \frac{1}{2}RS$.

ধাপ-২ : কিন্তু PQ = RS [দেওয়া আছে]

বা, $\frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}RS$

$\therefore$ PE = RF

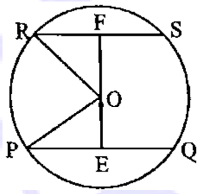
ধাপ-৩ : এখন, ΔOPE এবং ΔORF সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে অতিভুজ OP = অতিভুজ OR [উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং PE = RF [ধাপ (২) হতে]

$\therefore$ ΔOPE $\cong$ ΔORF [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

$\therefore$ OE = OF. **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQ এবং RS দুইটি জ্যা এবং PQ > RS। OE $\perp$ PQ এবং OF $\perp$ RS। প্রমাণ করতে হবে যে, OE < OF.



অঙ্কন : O, P এবং O, R যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : যেহেতু OE $\perp$ PQ এবং OF $\perp$ RS

$\therefore$ $PE = \frac{1}{2}PQ$ এবং $RF = \frac{1}{2}RS$ [বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

ধাপ-২ : ΔOPE ও ΔORF সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

$OP^2 = PE^2 + OE^2$ এবং $OR^2 = RF^2 + OF^2$

[পিথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্যে]

ধাপ-৩ : কিন্তু OP = OR [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

বা, $OP^2 = OR^2$

বা, $PE^2 + OE^2 = RF^2 + OF^2$ [ধাপ (২) হতে]

বা, $PE^2 - RF^2 = OF^2 - OE^2$

ধাপ-৪ : আবার, যেহেতু PQ > RS

বা, $\frac{1}{2}PQ > \frac{1}{2}RS$

বা, PE > RF [ধাপ (১) হতে]

বা, $PE^2 > RF^2$

বা, $PE^2 - RF^2 > 0$

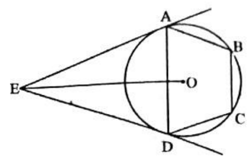
বা, $OF^2 - OE^2 > 0$ [ধাপ (৩) হতে]

বা, $OF^2 > OE^2$

বা, OF > OE

$\therefore$ OE < OF. **(প্রমাণিত)**

৪৭.



চিত্রে O বৃত্তটির কেন্দ্র।

[বরিশাল বোর্ড ২০২২]

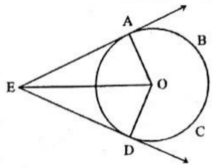
(ক) প্রমাণ কর : AE = DE.

(খ) প্রমাণ কর যে, $\angle BAD + \angle BCD = 180°$.

(গ) প্রমাণ কর যে, OE সরলরেখা স্পর্শ জ্যা AD এর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক।

৪৭ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD বৃত্তের E একটি বহিঃস্থ বিন্দু এবং AE ও DE রশ্মিদ্বয় বৃত্তের A ও B বিন্দুতে দুইটি স্পর্শক। প্রমাণ করতে হবে যে, AE = DE.



অঙ্কন : O, A ও O, D যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : যেহেতু EA স্পর্শক এবং OA স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ। সেহেতু EA ⊥ OA [∵ বৃত্তের স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব]

∴ $\angle EAO$ = এক সমকোণ

∴ ΔEAO ও ΔEDO উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ।

ধাপ-২ : এখন, ΔEAO ও ΔEDO সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে অতিভুজ EO = অতিভুজ EO [সাধারণ বাহু]

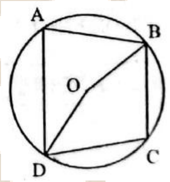
অনুরূপে, $\angle EDO$ = এক সমকোণ

এবং OA = OD [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

∴ $\Delta EAO \cong$ EDO [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা]

∴ AE = DE. **(প্রমাণিত)**

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ABCD চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BAD + \angle BCD = 180°$.



অঙ্কন : O, B এবং O, D যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : একই চাপ BCD এর উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle BOD$ এবং বৃত্তস্থ $\angle BAD$.

∴ $\angle BOD = 2\angle BAD$

[∵ বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

ধাপ-২ : একই চাপ BAD এর উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ $\angle BOD$ এবং বৃত্তস্থ $\angle BCD$.

∴ প্রবৃদ্ধ $\angle BOD = 2\angle BCD$ [একই কারণে]

ধাপ-৩ : ধাপ (১) ও (২) হতে,

$\angle BOD$ + প্রবৃদ্ধ $\angle BOD = 2\angle BAD + 2\angle BCD$ [যোগ করে]

বা, $2(\angle BAD + \angle BCD) = 360°$

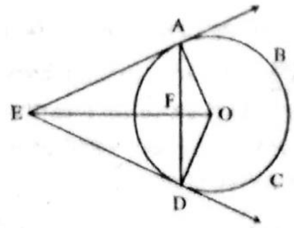
[∵ $\angle BOD$ + প্রবৃদ্ধ $\angle BOD = 360°$]

বা, $\angle BAD + \angle BCD = \frac{360°}{2}$

∴ $\angle BAD + \angle BCD = 180°$. **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু E থেকে বৃত্তে AE ও DE দুইটি স্পর্শক এবং AD হচ্ছে স্পর্শ জ্যা। OE রেখাংশ AD জ্যাকে F বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, OE সরলরেখা স্পর্শ জ্যা AD এর লম্ব সমদ্বিখন্ডক।



অঙ্কন : O, A এবং O, D যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : ΔOAE এবং ΔODE এর মধ্যে,

OA = OD [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

AE = DE [বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় সমান]

এবং OE = OE [সাধারণ বাহু]

∴ OAE ≅ AODE [বাহু-বাহু-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

∴ $\angle AOE = \angle DOE$

অর্থাৎ, $\angle AOF = \angle DOF$

ধাপ-২ : এখন, ΔOAF ও ΔODF-এ

OA = OD [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

OF = OF [সাধারণ বাহু]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AOF$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle DOF$ [ধাপ (১) হতে]

∴ $\Delta OAF \cong \Delta ODF$ [বাহু-কোণ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

AF = DF

এবং $\angle AFO = \angle DFO$

ধাপ-৩ : এখন, $\angle AFD = 1$ সরলকোণ

বা, $\angle AFO + \angle DFO = 2$ সমকোণ [∵ এক সরলকোণ = 2 সমকোণ]

বা, $\angle AFO + \angle AFO = 2$ সমকোণ [ধাপ (২) হতে]

বা, $2\angle AFO = 2$ সমকোণ

বা, $\angle AFO = 1$ সমকোণ

∴ $\angle DFO = \angle AFO = 1$ সমকোণ

∴ OF ⊥ AD

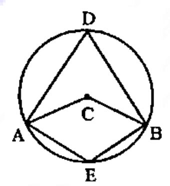
অর্থাৎ OE ⊥ AD

আবার, AF = DF

∴ OE, AD কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

অতএব, OE সরলরেখা স্পর্শ জ্যা AD এর লম্ব-সমদ্বিখন্ডক। **(প্রমাণিত)**

৪৮.



চিত্রে বৃত্তের কেন্দ্র C.

[দিনাজপুর বোর্ড ২০২২]

(ক) 2 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\angle ADB = \frac{1}{2}\angle ACB$.

(গ) প্রমাণ কর যে, $\angle ADB + \angle AEB = 2$ সমকোণ।

৪৮ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) এখানে, সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য, a = 2 সে.মি.

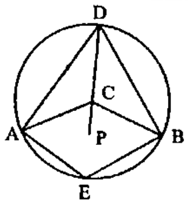
∴ সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \sqrt{3}$ বর্গ সে.মি.।

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $\sqrt{3}$ বর্গ সে.মি.।

(খ) মনে করি, C কেন্দ্রবিশিষ্ট AEBD বৃত্তে AEB চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ ∠ACB এবং বৃত্তস্থ কোণ ∠ADB।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ADB = \frac{1}{2}\angle ACB$



অঙ্কন : C কেন্দ্রগামী রেখাংশ DP আঁকি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : ΔADC এর বহিঃস্থ কোণ ∠ACP = ∠ADC + ∠CAD
[ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ এর অন্তস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]

ধাপ-২ : ΔADC-এ AC = CD [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

∴ ∠ADC = ∠CAD [সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটি সমান]

ধাপ-৩ : ধাপ (১) ও (২) হতে পাই, ∠ACP = 2∠ADC।

ধাপ-৪ : একইভাবে, ΔBCD থেকে, ∠BCP = 2∠BDC।

ধাপ-৫ : ধাপ (৩) ও (৪) হতে পাই,

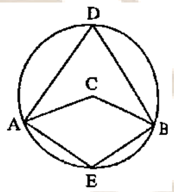
∠ACP + ∠BCP = 2∠ADC + 2∠BDC

বা, ∠ACB = 2(∠ADC + ∠BDC)
[∵ ∠ACP + ∠BCP = ∠ACB]

বা, ∠ACB = 2∠ADB [∵ ∠ADC + ∠BDC = ∠ADB]

∴ ∠ADB = ∠ACB. (**প্রমাণিত**)

(গ) মনে করি, C কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AEBD চতুর্ভুজটি অন্তলিখিত হয়েছে। প্রমাণ করতে। হবে যে, ∠ADB + ∠AEB = 2 সমকোণ।



প্রমাণ :

ধাপ-১ : একই চাপ AEB এর উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ ∠ACB = 2 (বৃত্তস্থ ∠ADB)
[বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

অর্থাৎ ∠ACB = 2∠ADB

ধাপ-২ : আবার, একই চাপ ADB এর উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ ∠ACB = 2 (বৃত্তস্থ ∠AEB) অর্থাৎ, প্রবৃদ্ধ ∠ACB = 2∠AEB
[বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

কিন্তু, ∠ACB + প্রবৃদ্ধ ∠ACB = 360°

বা, 2∠ADB + 2∠AEB = 360°

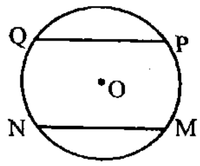
বা, 2(∠ADB + ∠AEB) = 360°

বা, ∠ADB + ∠AEB = 180°

বা, ∠ADB + ∠AEB = 2 × 90°

∴ ∠ADB + ∠AEB = 2 সমকোণ। (**প্রমাণিত**)

৪৯.



চিত্রে বৃত্তের কেন্দ্র O, PQ ও MN জ্যায়ের মধ্যবিন্দু A, B.
[দিনাজপুর বোর্ড ২০২২]

(ক) 10 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) OA ⊥ PQ, OB ⊥ MN এবং OA = OB হলে প্রমাণ কর যে, PQ = MN.

(গ) বৃত্তের বহিঃস্থ D বিন্দু হতে Q ও N বিন্দুতে দুইটি স্পর্শক টানা হলো, প্রমাণ কর যে, DQ = DN.

৪৯ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) এখানে, বৃত্তের ব্যাস, 2r = 10 সে.মি.

∴ বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = \frac{10}{2} = 5$ সে.মি.

বৃত্তটির ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$

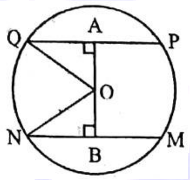
$= 3.1416 \times 5^2$ বর্গ সে.মি.

$= 3.1416 \times 25$ বর্গ সে.মি.

$= 78.54$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)।

নির্ণেয় বৃত্তের ক্ষেত্রফল 78.54 বর্গ সে.মি. (প্রায়)।

(খ) এখানে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQ ও MN দুইটি জ্যা। OA ⊥ PQ, OB ⊥ MN এবং OA = OB. প্রমাণ করতে হবে যে, PQ = MN.



অঙ্কন : O, Q ও O, N যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : যেহেতু, OA ⊥ PQ এবং OB ⊥ MN

∴ ∠OAQ = ∠OBN = এক সমকোণ।

অর্থাৎ, Δ OAQ এবং Δ OBN উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ।

ধাপ-২ : ΔOAQ ও ΔOBN সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে,

অতিভুজ OQ = অতিভুজ ON [উভয়ে একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং OA = OB [দেওয়া আছে]

∴ ΔOAQ ≅ ΔOBN

[সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

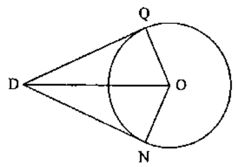
∴ AQ = BN

ধাপ-৩ : $AQ = \frac{1}{2}PQ$ এবং $BN = \frac{1}{2}MN$ [∵ বৃত্তের কেন্দ্র হতে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

ধাপ-৪ : সুতরাং, $\frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}MN$

∴ PQ = MN. (**প্রমাণিত**)

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু D হতে Q ও N বিন্দুতে DQ ও DN দুইটি স্পর্শক। প্রমাণ করতে হবে যে, DQ = DN.



অঙ্কন : O, D; O, Q এবং O, N যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : যেহেতু DQ স্পর্শক এবং OQ স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ। সেহেতু DQ ⊥ OQ। [∵ স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব]

∴ ∠OQD = 1 সমকোণ।

অনুরূপভাবে, ∠OND = 1 সমকোণ

∴ Δ OQD এবং Δ OND উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ।

ধাপ-২ : ΔOQD ও ΔOND সমকোণী ত্রিভুজে,

অতিভুজ OD = অতিভুজ OD [সাধারণ বাহু]

OQ = ON [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

∴ ΔOQD ≅ ΔOND [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা]

সুতরাং, DQ = DN. **(প্রমাণিত)**

৫০. (i) O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের PQ এবং RS দুইটি জ্যা। OM ⊥ PQ এবং ON ⊥ RS.

(ii) C কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের EF এবং GH দুইটি জ্যা বৃত্তের অভ্যন্তরে T বিন্দুতে ছেদ করেছে।

[ময়মনসিংহ বোর্ড ২০২২]

(ক) 4 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) যদি PQ = RS হয় তবে প্রমাণ কর যে, OM = ON.

(গ) প্রমাণ কর : ∠ECH + ∠FCG = 2 ∠ETH.

৫০ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) এখানে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r = 4 সে.মি.

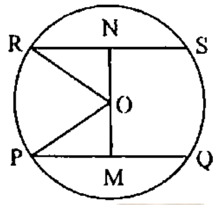
∴ বৃত্তের ক্ষেত্রফল = πr^2 = 3.1416 × 4^2 বর্গ সে.মি.

= 3.1416 × 16 বর্গ সে.মি.

= 50.2656 বর্গ সে.মি. (প্রায়)

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 50.2656 বর্গ সে.মি. (প্রায়)।

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQ ও RS দুইটি সমান জ্যা। OM ⊥ PQ এবং ON ⊥ RS. প্রমাণ করতে হবে যে, OM = ON.



অঙ্কন : O, P এবং O, R যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : OM ⊥ PQ এবং ঙঘ জঝ.

সুতরাং PM = QM এবং RN = SN

[∵ বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

∴ PM = $\frac{1}{2}$ PQ এবং RN = $\frac{1}{2}$ RS

ধাপ-২ : কিন্তু PQ = RS [ধরে নেওয়া]

∴ PM = RN

ধাপ-৩ : এখন, Δ OPM এবং Δ ORN সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে অতিভুজ OP = অতিভুজ OR [উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

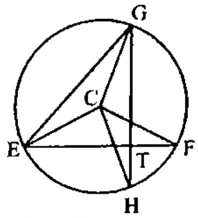
এবং PM = RN [ধাপ (২) হতে]

∴ Δ OPM ≅ ΔORN

[সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

∴ OM = ON. **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, C কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের EF এবং GH দুইটি জ্যা বৃত্তের অভ্যন্তরে T বিন্দুতে ছেদ করেছে। C, E, C, F, C, G ও C, H যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, ∠ECH + ∠FCG = 2 ∠ETH.



অঙ্কন : G, E যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : EH চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ ∠ECH এবং বৃত্তস্থ ∠EGH.

∴ ∠ECH = 2∠EGH

[∵ বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

ধাপ-২ : GF চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ ∠FCG এবং বৃত্তস্থ ∠FEG.

∴ ∠FCG = 2∠FEG [একই কারণে]

ধাপ-৩ : ধাপ (১) ও (২) হতে,

∠ECH + FCG = 2∠EGH + 2∠FEG

= 2(∠EGT + ∠FEG)

= 2(∠EGT + ∠TEG)

[∵ ∠EGH ∠ EGT এবং ∠FEG = ∠TEG]

ধাপ-৪ : Δ ETG-এ, বহিঃস্থ ∠ETH অন্তঃস্থ (∠EGT + ∠TEG)

[∵ ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি সমান]

ধাপ-৫ ধাপ (৩) ও (৪) হতে পাই,

∠ECH + ∠FCG = 2∠ETH. **(প্রমাণিত)**

৫১. (i) M কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

(ii) O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P হতে PE এবং PF দুইটি স্পর্শক।

[ময়মনসিংহ বোর্ড ২০২২]

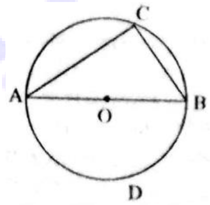
(ক) প্রমাণ কর যে, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

(খ) প্রমাণ কর যে, ∠BAD + ∠BCD = দুই সমকোণ।

(গ) প্রমাণ কর যে, OP রেখাংশ স্পর্শ জ্যা EF এর সমদ্বিখন্ডক।

৫১ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB একটি ব্যাস এবং ∠ACB একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, ∠ACB = এক সমকোণ।



অঙ্কন : AB এর যে পাশে C বিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পাশে বৃত্তের উপর একটি বিন্দু D নিই।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : ADB চাপের উপর দণ্ডায়মান

বৃত্তস্থ ∠ACB = $\frac{1}{2}$ (কেন্দ্রস্থ সরলকোণ ∠AOB)

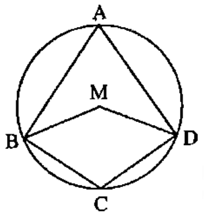
[∵ বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক]

ধাপ-২ : কিন্তু সরলকোণ ∠AOB দুই সমকোণ।

∴ ∠ACB = $\frac{1}{2}$ (দুই সমকোণ)

∴ ∠ACB এক সমকোণ। **(প্রমাণিত)**

(খ) মনে করি, M কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BAD + \angle BCD$ = দুই সমকোণ।



অঙ্কন : B, M এবং D, M যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : একই চাপ BCD এর উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle BMD$ এবং বৃত্তস্থ $\angle BAD$.

[∵ বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

ধাপ-২ : একই চাপ BAD এর উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ $\angle BMD$ এবং বৃত্তস্থ $\angle BCD$.

∴ প্রবৃদ্ধ $\angle BMD = 2\angle BCD$ [একই কারণে]

ধাপ-৩ : ধাপ (১) ও (২) থেকে,

$\angle BMD$ + প্রবৃদ্ধ $\angle BMD = 2\angle BAD + 2\angle BCD$ [যোগ করে]

বা, $2(\angle BAD + \angle BCD) = 360°$

[∵ $\angle BMD$ + প্রবৃদ্ধ $\angle BMD = 360°$]

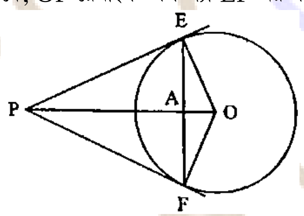
বা, $\angle BAD + \angle BCD = \frac{360°}{2}$

বা, $\angle BAD + \angle BCD = 180°$

∴ $\angle BAD + \angle BCD$ = দুই সমকোণ। **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P হতে PE এবং PF দুইটি স্পর্শক। E, F এবং O, P যোগ করি। OP রেখাংশ EF স্পর্শ জ্যাকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, OP রেখাংশ স্পর্শ জ্যা EF এর সমদ্বিখণ্ডক।



অঙ্কন : O, E এবং O, F যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১ : ΔOEP এবং ΔOFP এর মধ্যে

OE = OF [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

PE = PF

[বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান]

এবং OP = OP [সাধারণ বাহু]

∴ $\Delta OEP \cong \Delta OFP$ [বাহু-বাহু-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

∴ $\angle EOP = \angle FOP$

অর্থাৎ $\angle EOA = \angle FOA$

ধাপ-২ : ΔAOE ও ΔAOF-এ,

OE = OF [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

OA = OA [সাধারণ বাহু]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle EOA$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle FOA$ [ধাপ (১) হতে]

∴ $\Delta AOE \cong \Delta AOF$ [বাহু-কোণ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

∴ AE = AF

∴ OP, EF কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

অতএব, OP রেখাংশ স্পর্শ জ্যা EF এর সমদ্বিখণ্ডক। **(প্রমাণিত)**

৫২. O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তে PQ ও RS দুইটি সমান জ্যা।

[ঢাকা বোর্ড ২০২০]

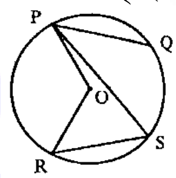
(ক) উদ্দীপকের বৃত্তে $\angle POR = 120°$ হলে, $\frac{1}{2}\angle PSR$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) বৃত্তের কেন্দ্র O থেকে OE ও OF যথাক্রমে PQ ও RS এর উপর লম্ব হলে প্রমাণ কর যে, OE = OF.

(গ) PQ ও RS জ্যাদ্বয় বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ M বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করলে, প্রমাণ কর যে, $\angle POR + \angle QOS = 180°$.

৫২ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQ ও RS দুইটি সমান জ্যা। PR চাপের উপর অঙ্কিত কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle POR$ এবং বৃত্তস্থ কোণ $\angle PSR$.



আমরা জানি, একই চাপের উপর অঙ্কিত কেন্দ্রস্থ কোণ, বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ।

অর্থাৎ, $\angle POR = 2\angle PSR$

বা, $\angle PSR = \frac{120°}{2}$ [∵ $\angle POR = 120°$]

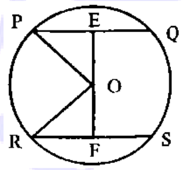
বা, $\angle PSR = 60°$

বা, $\frac{1}{2}\angle PSR = \frac{1}{2} \times 60°$

∴ $\frac{1}{2}$ PSR = 30°

নির্ণেয় মান 30°.

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তে PQ ও RS দুইটি সমান জ্যা $OE \perp PQ$ এবং $OF \perp RS$। প্রমাণ করতে হবে যে, OE = OF।



অঙ্কন : O, P এবং O, R যোগ করি।

প্রমাণ : ধাপ ১ : যেহেতু $OE \perp PQ$ এবং $OF \perp RS$

∴ $PE \perp QE$, RF = SF [কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা'র উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যা'টিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

∴ $PE = \frac{1}{2}PQ$

এবং $RF = \frac{1}{2}RS$

ধাপ ২ : PQ = RS [প্রদত্ত]

∴ PE = RF

ধাপ ৩ : ΔOPE ও ΔORF সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে,

অতিভুজ OP = অতিভুজ OR [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

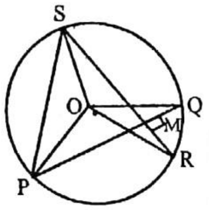
PE = RF [ধাপ (২) হতে]

∴ $\Delta OPE \cong \Delta ORF$

[সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

∴ OE = OF. **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের PQ ও RS জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত M বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle POR + \angle QOS = 180°$.



অঙ্কন : P, S যোগ করি।

প্রমাণ : ধাপ ১ : একই চাপ PR-এর উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle POR$ এবং বৃত্তস্থ $\angle PSR$

$\therefore \angle POR = 2\angle PSR$

[একই চাপের উপর কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

ধাপ ২ : তদ্রূপ $\angle QOS = 2\angle QPS$

ধাপ ৩ : $\therefore \angle POR + \angle QOS = 2(\angle PSR + \angle QPS)$ [(১) ও (২) থেকে]

কিন্তু Δ PMS-এ, $\angle PMS = 90°$

$\angle SPM + \angle PSM = 90°$ [কল্পনা]

বা, $\angle SPQ + \angle PSR = 90°$

ধাপ ৪ : $\angle POR + \angle QOS = 2 \times 90°$ [(৩) থেকে]

$\therefore \angle POR + \angle QOS = 180°$

অতএব, $\angle POR + \angle QOS = 180°$. **(প্রমাণিত)**

৫৩. a = 5 সে. মি., b = 4 সে. মি. দুইটি রেখাংশ এবং $\angle x = 45°$ একটি কোণ। [ঢাকা বোর্ড ২০২০]

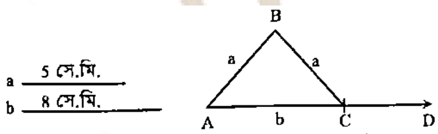
(ক) এমন একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ আঁক যার ভূমির দৈর্ঘ্য b এবং সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য a এর সমান।
(অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক)

(খ) এমন একটি ত্রিভুজ আঁক যার ভূমির দৈর্ঘ্য a, ভূমি সংলগ্ন কোণ $\angle x$ এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি b এর সমান।
(অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)

(গ) $\frac{b}{2}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত এঁকে এতে এমন দুইটি স্পর্শক আঁক যাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 90° হয়।
(অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)

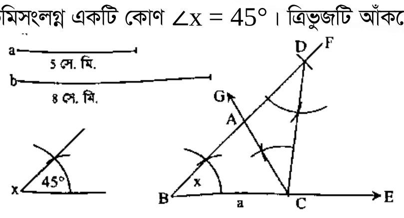
৫৩ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক)



চিত্রে, ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার ভূমির দৈর্ঘ্য AC = b = 8 সে.মি. এবং সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য AB = BC = a = 5 সে.মি.।

(খ) এখানে, কোনো ত্রিভুজের ভূমি a = 5 সে. মি., অপর দুই বাহুর সমষ্টি b = 8 সে. মি. এবং ভূমিসংলগ্ন একটি কোণ $\angle x = 45°$। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



অঙ্কন :

১. যেকোনো একটি রশ্মি BE থেকে ভূমি a এর সমান করে BC রেখাংশ কেটে, নিই। BC রেখাংশের B বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle CBF$ আঁকি।

২. BF রশ্মি থেকে b এর সমান BD অংশ কাটি।

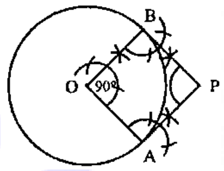
৩. C, D যোগ করি। C বিন্দুতে CD রেখাংশের যে পাশে B বিন্দু আছে সেই পাশে $\angle BDC$ এর সমান $\angle DCG$ আঁকি।

৪. CG রশ্মি BD কে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

(গ) এখানে, b = 4 সে.মি.

$\therefore \frac{b}{2} = \frac{8}{2} = 4$ সে.মি.

মনে করি, $\frac{b}{2} = 4$ সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট ABC একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র O, উক্ত বৃত্তে এমন দুইটি স্পর্শক আঁকতে হবে যাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 90°।



অঙ্কন :

১. OA যেকোনো ব্যাসার্ধ নিই এবং $\angle AOB = 90°$ আঁকি। OB রশ্মি বৃত্তটিকে B বিন্দুতে ছেদ করেছে।

২. এখন, OA এর A বিন্দুতে AP এবং OB এর B বিন্দুতে BP লম্ব আঁকি। AP ও BP লম্বদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। তাহলে AP ও BP-ই উদ্দীষ্ট স্পর্শকদ্বয় যাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 90°.

৫৪. (i) O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের PQ ও RT দুটি জ্যা। $OA \perp PQ$ ও $OB \perp RT$.

(ii) C কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু D এবং DE ও DF উহার দুইটি স্পর্শক। [রাজশাহী বোর্ড ২০২০]

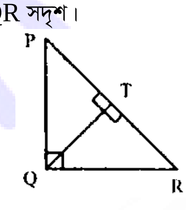
(ক) Δ PQR এ $\angle Q = 90°$ এবং $QT \perp PR$ হলে, দেখাও যে, Δ PQT ও Δ PQR সদৃশ।

(খ) প্রমাণ কর যে, DE = DF.

(গ) PQ > RT হলে, প্রমাণ কর যে, OA < OB.

৫৪ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) মনে করি, Δ PQR-এ $\angle Q = 90°$ এবং $QT \perp PR$। প্রমাণ করতে হবে যে, Δ PQT ও Δ PQR সদৃশ।



প্রমাণ :

ধাপ ১ : যেহেতু $QT \perp PR$

$\therefore \angle PTQ = 1$ সমকোণ

ধাপ ২ : Δ PQR ও Δ PQT-এ,

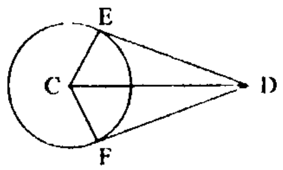
$\angle PQR = \angle PTQ$ [উভয়েই সমকোণ]

$\angle RPQ = \angle TPQ$ [সাধারণ কোণ]

এবং অবশিষ্ট $\angle PRQ$ = অবশিষ্ট $\angle PQT$

$\therefore \Delta$ PQT ও ΔPQR সদৃশ। **(দেখানো হলো)**

(খ) মনে করি, C কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত যার বহিঃস্থ বিন্দু D থেকে DE ও DF দুইটি স্পর্শক। প্রমাণ করতে হবে যে, DE = DF.



অঙ্কন : C, D ও C, E এবং C, F যোগ করি।

প্রমাণ : ধাপ ১ : $DE \perp CE$ ও $DF \perp CF$

[স্পর্শক, স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব]

$\therefore$ $\angle DEC = \angle DFC = 1$ সমকোণ

ধাপ ২ : Δ DEC ও Δ DFC সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে,

CE = CF [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

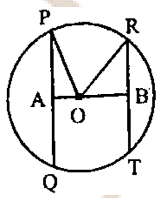
অতিভুজ, CD = অতিভুজ CD [সাধারণ বাহু]

$\therefore$ $\Delta DEC \cong \Delta DFC$ [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ বাহু সর্বসমতা]

$\therefore$ DE = DF. **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQ ও RT দুটি জ্যা।

$OA \perp PQ$, $OB \perp RT$ এবং $PQ > RT$ হলে, প্রমাণ করতে হবে যে, $OA < OB$.



অঙ্কন : O, P ও O, R যোগ করি।

প্রমাণ : ধাপ ১ : $OA \perp PQ$, $OB \perp RT$

$PA = \frac{1}{2}PQ$, $RB = \perp RT$ [কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা'র উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যা'টিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

ধাপ ২ : Δ PAO সমকোণী ত্রিভুজে,

$OP^2 = AP^2 + OA^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

বা, $AP^2 = OP^2 - OA^2$

আবার, Δ ROB সমকোণী ত্রিভুজে,

$OR^2 = OB^2 + RB^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

বা, $RB^2 = OR^2 - OB^2$

ধাপ ৩ : $PQ > RT$

বা, $\frac{1}{2}PQ > \frac{1}{2}RT$

বা, $PA > RB$ [ধাপ (১) হতে]

বা, $PA^2 > RB^2$

বা, $OP^2 - OA^2 > OR^2 - OB^2$ [ধাপ (২) হতে]

বা, $- OA^2 - OB^2$ [OP = OR একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে $OP^2 = OR^2$]

বা, $OA^2 < OB^2$

$\therefore$ $OA < OB$. **(প্রমাণিত)**

৫৫. (i) XYZ একটি ত্রিভুজ যার $XD = \frac{1}{2}XY$ এবং $XE = \frac{1}{2}XZ$.

(ii) O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQRS চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত। PR এবং QS কর্ণদ্বয় পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করে।

[যশোর বোর্ড ২০২০]

(ক) কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ 4 সে. মি. হলে, বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের মধ্যে পার্থক্য নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $DE \parallel YZ$ এবং $DE = \frac{1}{2}YZ$.

(গ) প্রমাণ কর যে, $\angle POQ + \angle ROS = 2\angle PEQ$.

৫৫ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ = 4 সে.মি.

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাস = (2×4) সে.মি. = 8 সে.মি.

বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে,

বৃত্তের পরিধি = $2\pi r$ একক = $2\pi \times 4$ সে.মি. = 8π সে.মি.

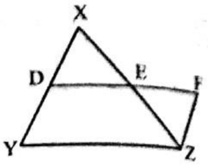
= 8×3.1416 সে.মি. = 25.13 সে.মি. (প্রায়)

$\therefore$ বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের পার্থক্য = $(25.13 - 8)$ সে.মি.

= 17.13 সে.মি. (প্রায়)

নির্ণেয় বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের মধ্যে পার্থক্য 17.13 সে.মি. (প্রায়)।

(খ) এখানে, XYZ ত্রিভুজের $XD = \frac{1}{2}XY$ এবং $XE = \frac{1}{2}XZ$ অর্থাৎ, XYZ ত্রিভুজের D এবং E যথাক্রমে XY এবং XZ এর মধ্যবিন্দু।



D, E যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $DE \parallel YZ$ এবং $DE = \frac{1}{2}YZ$.

অঙ্কন : DE কে F পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন EF = DE হয়। Z, F যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : Δ XDE ও Δ ZEF এর মধ্যে

XE = EZ [XZ এর মধ্যবিন্দু E]

DE = EF [অঙ্কনানুসারে]

$\Delta XED = \angle ZEF$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\Delta XDE \cong \Delta ZEF$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

$\therefore$ XD = ZF

$\angle XDE = \angle EFZ$ এবং $\angle DXE = \angle EZF$ [একান্তর কোণ]

$\therefore$ $XD \parallel ZF$ বা, $XY \parallel ZF$

আবার, YD = XD = ZF এবং $YD \parallel ZF$

সুতরাং YDFZ একটি সমান্তরিক

$\therefore$ $DF \parallel YZ$ বা $DE \parallel YZ$

ধাপ ২ : আবার, DF = YZ

বা, DE + EF = YZ [$\because$ DFDE + EF]

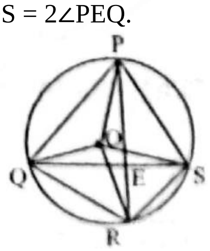
বা, DE + DE = YZ [ধাপ (১) থেকে]

বা, 2DE = YZ

$\therefore$ $DE = \frac{1}{2}YZ$

সুতরাং $DE \parallel YZ$ এবং DE = YZ. **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQRS চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত। PQRS চতুর্ভুজের PR ও QS কর্ণদ্বয় পরস্পর B বিন্দুতে ছেদ করেছে। দেখাতে হবে যে, $\angle POQ + \angle ROS = 2\angle PEQ$.



অঙ্কন : O, P; O, Q; O, R এবং O, S যোগ করি।

প্রমাণ :

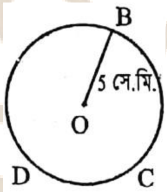
ধাপ ১ : PQ চাপের উপর অবস্থিত

$\angle POQ = 2\angle PSQ$ [কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]
ধাপ ২ : RS চাপের উপর অবস্থিত
$\angle ROS = 2\angle SPR$ [একই কারণে]
ধাপ ৩ : $\angle POQ + \angle ROS$
$= 2(\angle PSQ + \angle SPR)$ [ধাপ (১) ও (২) থেকে]
$= 2(\angle PSE + \angle SPE)$
ধাপ ৪ : Δ SPE এর
বহিঃস্থ $\angle PEQ$ = অন্তঃস্থ $(\angle PSE + \angle SPE)$
$\therefore \angle POQ + \angle ROS = 2\angle PEQ$. [ধাপ (৩) থেকে]
(প্রমাণিত)

৫৬. O কেন্দ্রবিশিষ্ট BCD বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু A থেকে বৃত্তে AB ও AC দুটি স্পর্শক।
[কুমিল্লা বোর্ড ২০২০]
(ক) OB = 5 সে.মি. হলে, BCD বৃত্তের পরিধি নির্ণয় কর।
(খ) প্রমাণ কর যে, AB = AC.
(গ) প্রমাণ কর যে, $AO \perp BC$.

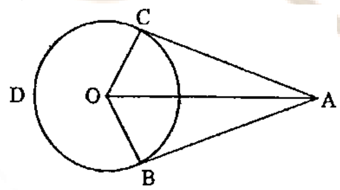
৫৬ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) আমরা জানি,
বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r$ [যেখানে বৃত্তের ব্যাসার্ধ r]
BCD বৃত্তে বৃত্তের ব্যাসার্ধ, OB = 5 সে.মি.



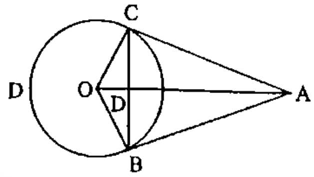
$\therefore$ বৃত্তের পরিধি $= 2\pi \times 5$ সে.মি.
$= 10\pi$ সে.মি.
$= 10 \times 3.1416$ সে.মি.
$= 31.416$ সে.মি. (প্রায়)
নির্ণেয় বৃত্তের পরিধি 31.416 সে.মি. (প্রায়)।

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি BCD বৃত্তে বহিঃস্থ A বিন্দু থেকে AB ও AC দুইটি D স্পর্শক।
প্রমাণ করতে হবে যে, AB = AC.



অঙ্কন : O, B; O, C এবং A, O যোগ করি।
প্রমাণ :
ধাপ ১ : যেহেতু AB স্পর্শক এবং OB স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ
$\therefore$ AB ও OB [$\because$ স্পর্শক, স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব]
$\therefore \angle ABO = 1$ সমকোণ
অনুরূপভাবে, $\angle ACO = 1$ সমকোণ
$\therefore \Delta AOB$ ও ΔAOC উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ।
ধাপ ২ : ΔAOB ও ΔAOC সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে অতিভুজ AO = অতিভুজ AO [সাধারণ বাহু]
OB = OC [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
$\therefore \Delta AOB \cong \Delta AOC$ [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ বাহু সর্বসমতা]
$\therefore$ AB = AC. **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট BCD বৃত্তে বহিঃস্থ A বিন্দু থেকে AB ও AC দুইটি স্পর্শক। B, C যোগ করা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, $AO \perp BC$.

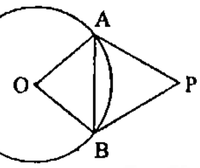


অঙ্কন : A, O যোগ করি যা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। O, B ও O, C যোগ করি।
প্রমাণ :
ধাপ ১ : Δ OBC-এ OB = OC [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
$\angle OCB = \angle OBC$ [সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণ সমান]
ধাপ ২ : Δ OBD ও Δ OCD-এ
OB = OC [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
OD = OD [সাধারণ বাহু]
অন্তর্ভুক্ত $\angle OBD$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle OCD$ [ধাপ (১)]
$\therefore \Delta OBD \cong \Delta OCD$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]
$\therefore \angle ODB = \angle ODC$
কিন্তু এরা রৈখিক যুগল কোণ।
$\therefore \angle ODB = \angle ODC = 1$ সমকোণ
$\therefore OD \perp BC$
অতএব, $AO \perp BC$. [OA, OD এরই বর্ধিতাংশ]
$\therefore AO \perp BC$. **(প্রমাণিত)**

57. ABCD একটি চতুর্ভুজ যার $\angle ABC + \angle ADC = 180°$.
[চট্টগ্রাম বোর্ড ২০২০]
(ক) O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P হতে PA এবং PB দুইটি স্পর্শক। $\angle PAB = 35°$ হলে, $\angle AOB$ এর মান কত?
(খ) প্রমাণ কর যে, A, B, C, D বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।
(গ) AC রেখা $\angle BAD$ এর সমদ্বিখণ্ডক হলে, প্রমাণ কর যে, BC = CD.

৫৭ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তে বহিঃস্থ P বিন্দু থেকে PA ও PB দুটি স্পর্শক। $\angle PAB = 35°$.



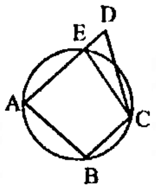
এখানে, $\angle$PAOB একটি চতুর্ভুজ। কিন্তু $PA \perp OA$ এবং $PB \perp OB$ [স্পর্শক, স্পর্শবি
$\therefore \angle PAO = \angle PBO = 90°$
আবার, $\angle OAB + \angle PAB = 90°$
বা, $\angle OAB + 35° = 90°$
বা, $\angle OAB = 90° - 35°$
$\therefore \angle OAB = 55°$
কিন্তু OA = OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
$\therefore \angle OBA = \angle OAB = 55°$
[সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণ সমান]
Δ AOB-এ, $\angle AOB + \angle OBA + \angle OAB = 180°$
[ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°]
বা, $\angle AOB + 55° + 55° = 180°$
বা, $\angle AOB + 110° = 180°$

বা, $\angle AOB = 180° - 110°$

$\therefore$ $\angle AOB = 70°$

নির্ণেয় $\angle AOB$ এর মান $70°$.

(খ) এখানে, ABCD চতুর্ভুজে $\angle ABC + \angle ADC = 180°$
প্রমাণ করতে হবে যে, A, B, C, D বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।



অঙ্কন : যেহেতু A, B, C বিন্দু তিনটি সমরেখ নয়।
সুতরাং, বিন্দু তিনটি দিয়ে যায় এরূপ একটি ও কেবল একটি বৃত্ত আছে। মনে করি, বৃত্তটি AD রেখাংশকে E বিন্দুতে ছেদ করে। C, E যোগ করি।

প্রমাণ :

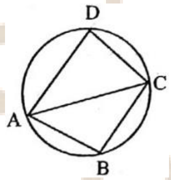
ধাপ ১ : অঙ্কন অনুসারে ABCE বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।
সুতরাং $\angle ABC + \angle AEC = 180°$
[$\because$ বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ]

ধাপ ২ : কিন্তু $\angle ABC + \angle ADC = 180°$ [দেওয়া আছে]

$\therefore$ $\angle AEC = \angle ADC$

কিন্তু তা অসম্ভব। কারণ অঙ্গউউ এর বহিঃস্থ $\angle AEC >$ বিপরীত অন্তঃস্থ $\angle ADC$
সুতরাং E এবং D বিন্দুদ্বয় ভিন্ন হতে পারে না। E বিন্দু অবশ্যই D বিন্দুর সাথে মিলে যাবে।
অতএব A, B, C, D বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক অর্থাৎ ABCD একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। AC রেখা, $\angle BAD$-এর সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ করতে হবে যে, BC = CD.

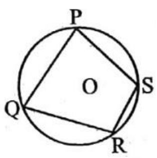


প্রমাণ :

ধাপ ১ : AC রেখা $\angle BAD$ এর সমদ্বিখন্ডক হওয়ায় $\angle CAD = \angle CAB$. CD চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle CAD$, BC চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle CAB$ উভয়ই সমান হওয়ায় চাপ CD = চাপ BC
[চাপদ্বয় সমান হলে চাপের উপর অবস্থিত জ্যাগুলো পরস্পর সমান]

$\therefore$ BC = CD. **(প্রমাণিত)**

৫৮.



O বৃত্তের কেন্দ্র।

[সিলেট বোর্ড ২০২০]

(ক) বৃত্তের পরিধি 4π হলে বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
(খ) প্রমাণ কর যে, $\angle QPS + \angle QRS = 180°$.
(গ) উদ্দীপকের চিত্রে যদি $\angle QPR + \angle RPS = 90°$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, Q, O এবং S একই সরলরেখায় অবস্থিত।

৫৮ নং প্রশ্নের উত্তর

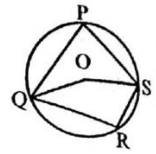
(ক) আমরা জানি,
বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r$ একক [যেখানে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ r]
বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গএকক
প্রশ্নমতে, $2\pi r = 8\pi$

বা, $r = \dfrac{8\pi}{2\pi} = 4$

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi(4)^2$ বর্গ একক
$= 16\ \pi$ বর্গ একক
$= 16 \times 3.1416$ বর্গ একক
$= 50.27$ বর্গ একক (প্রায়)

নির্ণেয় বৃত্তের ক্ষেত্রফল 50.27 বর্গ একক (প্রায়)।

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQRS চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle QPS + \angle QRS = 180°$.



অঙ্কন : O, Q ও O, S যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : একই চাপ QRS এর উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle QOS = 2$ (বৃত্তস্থ $\angle QPS$) [একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]
অর্থাৎ $\angle QOS = 2\angle QPS$

ধাপ ২ : আবার একই চাপ QPS এর উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle QOS = 2$(বৃত্তস্থ $\angle QRS$) [একই কারণে]
অর্থাৎ প্রবৃদ্ধ $\angle$ QOS $= 2\angle QRS$

$\therefore$ $\angle QOS$ + প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle QOS = 2(\angle QPS + \angle QRS)$

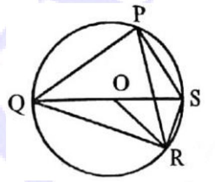
কিন্তু $\angle QOS$ + প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle QOS = 360°$

$\therefore$ $2(\angle QPS + \angle QRS) = 360°$

বা, $\angle QPS + \angle QRS = \dfrac{360°}{2}$

$\therefore$ $\angle QPS + \angle QRS = 180°$. **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তে PQRS একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। P, R যোগ করি। $\angle QPR + \angle RPS = 90°$ হলে প্রমাণ করতে হবে যে, Q, O, S একই সরলরেখায় অবস্থিত।



অঙ্কন : Q, O; R, O এবং S, O যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : QR চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle QOR = 2$ (বৃত্তস্থ $\angle QPR$)
[একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]
অর্থাৎ, $\angle QOR = 2\angle QPR$

ধাপ ২ : RS চাপের উপর দন্ডায়মান, কেন্দ্রস্থ $\angle ROS = 2$(বৃত্তস্থ $\angle RPS$)
[একই চাপের ওপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]
অর্থাৎ, $\angle ROS = 2\angle RPS$

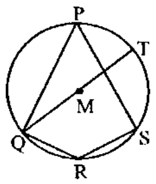
ধাপ ৩ : $\angle QOR + \angle ROS = 2(\angle QPR + \angle RPS)$
[ধাপ (১) ও (২) যোগ করে]

বা, $\angle QOR + \angle ROS = 2 \times 90°$ [প্রদত্ত]

$\therefore$ $\angle QOR + \angle ROS = 180°$

$\therefore$ Q, O, S একই সরলরেখায় অবস্থিত। **(প্রমাণিত)**

৫৯.



চিত্রে, M বৃত্তের কেন্দ্র।

[বরিশাল বোর্ড ২০২০]

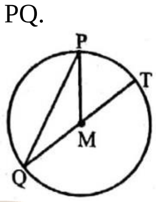
(ক) প্রমাণ কর যে, $QT > PQ$.

(খ) প্রমাণ কর যে, $\angle QPS = \frac{1}{2}\angle QMS$.

(গ) প্রমাণ কর যে, $\angle PQR + \angle PSR = 180°$.

৫৯ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) মনে করি, M কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তে QT ব্যাস ও PQ ব্যাস ভিন্ন কোনো জ্যা। প্রমাণ করতে হবে যে, $QT > PQ$.



অঙ্কন : P, M যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : $QM = MT = PM$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

ধাপ ২ : Δ PQM-এ

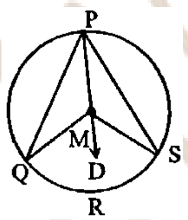
$QM + PM > PQ$

[ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর যোগফল তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]

বা, $QM + MT > PQ$ [(১) থেকে]

$\therefore$ $QT > PQ$. **(প্রমাণিত)** [$\because QM + MT = QT$]

(খ) মনে করি, M কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তে QRS চাপের ওপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle QMS$ ও বৃত্তস্থ কোণ $\angle QPS$. প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle QPS = \frac{1}{2}$ $\angle QMS$.



অঙ্কন : M, S যোগ করি। M কেন্দ্রগামী রেখাংশ PD আঁকি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : Δ PMQ এর বহিঃস্থ কোণ $\angle QMD = \angle QPM + \angle PQM$

[$\because$ ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]

ধাপ ২ : Δ PMQ এ $MP = MQ$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

অতএব, $\angle QPM = \angle PQM$ [সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণ দুইটি সমান]

ধাপ ৩ : ধাপ (১) ও (২) থেকে $\angle QMD = 2\angle QPM$

ধাপ ৪ : একইভাবে Δ PMS থেকে $\angle SMD = 2\angle SPM$

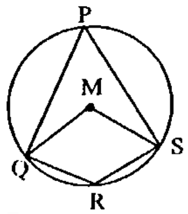
ধাপ ৫ : ধাপ (৩) ও (৪) থেকে

$\angle QMD + \angle SMD = 2\angle QPM + 2\angle SPM$

বা, $\angle QMS = 2\angle QPS$ [$\because \angle QMD + \angle SMD = \angle QMS$]

$\therefore$ $\angle QPS = \frac{1}{2}\angle QMS$. **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, M কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তে PQRS চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle PQR + \angle PSR = 180°$.



অঙ্কন : M, S যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : একই চাপ QPS এর উপর দণ্ডায়মান প্রবৃদ্ধ কেন্দ্রস্থ $\angle QMS = 2$ (বৃত্তস্থ $\angle QRS$)

[একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ, বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

অর্থাৎ, প্রবৃদ্ধ $\angle QMS = 2\angle QRS$

ধাপ ২ : আবার, একই চাপ QRS এর উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle QMS = 2$ (বৃত্তস্থ $\angle QPS$)

[একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ, বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

অর্থাৎ, $\angle QMS = 2\angle QPS$.

ধাপ ৩ : $\angle QMS$ + প্রবৃদ্ধ $\angle QMS = 2(\angle QRS + \angle QPS)$

[ধাপ (১) ও ধাপ (২) যোগ করে]

কিন্তু $\angle QMS$ + প্রবৃদ্ধ $\angle QMS = 360°$ [বৃত্তের কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ 360°]

$\therefore$ $2(\angle QRS + \angle QPS) = 360°$

বা, $\angle QRS + \angle QPS = 180$

ধাপ ৪ : আবার, PQRS বৃত্তস্থ চতুর্ভুজে,

$\angle PQR + \angle PSR + \angle QRS + \angle QPS = 360°$

[চতুর্ভুজের চারকোণের সমষ্টি 360°]

বা, $\angle PQR + \angle PSR + 180° = 360°$ [ধাপ (৩) হতে]

বা, $\angle PQR + \angle PSR = 360° - 180°$

$\therefore$ $\angle PQR + \angle PSR = 180°$. **(প্রমাণিত)**

60. $S = 12$ সে.মি., $\angle x = 75°$, $\angle y = 60°$.

[বরিশাল বোর্ড ২০২০]

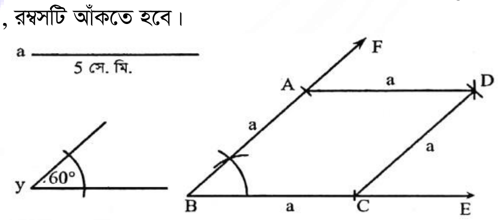
(ক) 5 সে.মি. বাহু এবং $\angle y$ কোণবিশিষ্ট একটি রম্বস অঙ্কন কর।

(খ) বিবরণসহ Δ PQR অঙ্কন কর যার পরিসীমা S এবং ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয় $\angle x$ ও $\angle y$ এর সমান।

(গ) বিবরণসহ $\frac{S}{4}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তে এমন দুইটি স্পর্শক অঙ্কন কর যেন তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle y$ এর সমান হয়।

৬০ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) মনে করি, রম্বসের একটি বাহু $a = 5$ সে.মি. ও একটি কোণ $\angle y = 60°$ দেওয়া আছে, রম্বসটি আঁকতে হবে।



অঙ্কন :

১. যেকোনো রশ্মি BE নিই।

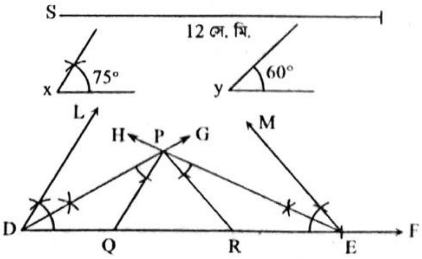
২. BE হতে a এর সমান করে BC অংশ কাটি।

৩. BC এর B বিন্দুতে $\angle y$ এর সমান $\angle CBF$ আঁকি। BF হতে a এর সমান করে BA কাটি যা BF কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

৪. A ও C কে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle CBF$ এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে ছেদ করে।

৫. A ও D; C ও D যোগ করি। তাহলেই ABCD-ই উদ্দিষ্ট রম্বস।

(খ) মনে করি, PQR ত্রিভুজের পরিসীমা S = 12 সে.মি. এবং ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ $\angle x = 75°$ এবং $\angle y = 60°$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



অঙ্কন :

১. যেকোনো একটি রশ্মি DF থেকে S এর সমান করে DE অংশ কেটে নিই।

২. D ও E বিন্দুতে DE অংশের একই পাশে $\angle x$ এর সমান $\angle EDL$ এবং $\angle y$ এর সমান $\angle DEM$ আঁকি।

৩. কোণ দুইটির দ্বিখন্ডক DG ও EH আঁকি। DG ও EH রশ্মিদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করে।

৪. P বিন্দুতে $\angle PDE$ এর সমান $\angle DPQ$ এবং $\angle PED$ এর সমান $\angle EPR$ আঁকি। PQ এবং PR রশ্মিদ্বয় DE অংশকে যথাক্রমে Q ও R বিন্দুতে ছেদ করে।

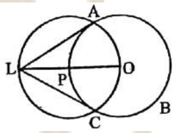
তাহলে, Δ PQR-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

(গ) দেওয়া আছে, S = 12 সে.মি.।

$\therefore \frac{S}{4} = \frac{12}{4} = 3$ সে.মি. এবং $\angle y = 60°$

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = \frac{S}{4} = 3$ সে.মি.।

ABC বৃত্তে এরূপ দুইটি স্পর্শক আঁকতে হবে যেন তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle y = 60°$ হয়।



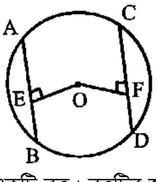
অঙ্কন :

১. ABC বৃত্তের পরিধির উপর P যেকোনো একটি বিন্দু নিই। O, P যোগ করি এবং OP কে L পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন OP = PL হয়।

২. P কে কেন্দ্র করে OP বা PL এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। এ বৃত্তটি ABC বৃত্তকে A ও C বিন্দুতে ছেদ করে। A, L এবং C, L যোগ করি।

তাহলে, AL এবং CL উদ্দীষ্ট স্পর্শকদ্বয় যাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle y = 60°$।

৬১.



চিত্রে O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত। বৃত্তটির জ্যা AB = জ্যা CD.

[দিনাজপুর বোর্ড ২০২০]

(ক) OA = 5 সে.মি. হলে, বৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, OE = OF.

(গ) বহিঃস্থ কোনো P বিন্দু থেকে ঐ বৃত্তে PM ও PN দুটি স্পর্শক টানা হলো। প্রমাণ কর যে, PM = PN.

৬১ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) আমরা জানি,

বৃত্তের ক্ষেত্রফল = πr^2 বর্গ একক [যেখানে বৃত্তের ব্যাসার্ধ r]

এখানে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r = OA = 5 সে.মি.

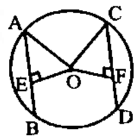
$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল = πr^2 বর্গ একক = $\pi(5)$ বর্গ সে.মি.

= 3.1416×25 বর্গ সে.মি.

= 78.54 বর্গ সে.মি. (প্রায়)

নির্ণেয় বৃত্তের ক্ষেত্রফল 78.54 বর্গ সে.মি.। (প্রায়)

(খ) দেওয়া আছে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তে জ্যা AB = জ্যা CD. $OE \perp AB$ ও $OF \perp CD$. প্রমাণ করতে হবে যে, OE = OF.



অঙ্কন : O, A এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : $OE \perp AB$ এবং $OF \perp CD$

AB = BE, CF = DF [কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা'র উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

$\therefore$ AE = $\frac{1}{2}$AB, CF = $\frac{1}{2}$CD

ধাপ ২ : AB = CD [প্রদত্ত]

$\therefore$ AE = CF

ধাপ ৩ : Δ OAE ও Δ OFC সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে,

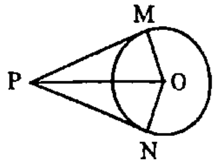
অতিভুজ OA = অতিভুজ OC [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

AE = CF [ধাপ ২]

$\therefore$ $\Delta OAE \cong \Delta OFC$ [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা]

$\therefore$ OE = OF. **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে ঐ বৃত্তে PM ও PN দুটি স্পর্শক আঁকা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, PM = PN.



অঙ্কন : O, M ও O, N এবং O, P যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : যেহেতু PM স্পর্শক, OM স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

সুতরাং, $PM \perp OM$ [$\because$ স্পর্শক, স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব]

$\therefore$ $\angle PMO$ = এক সমকোণ

অনুরূপভাবে, $\angle PNO$ = এক সমকোণ

অর্থাৎ, Δ PMO ও Δ PNO সমকোণী ত্রিভুজ।

ধাপ ২ : Δ PMO ও Δ PNO সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে,

অতিভুজ PO = অতিভুজ PO [সাধারণ বাহু]

OM = ON [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\therefore$ $\Delta PMO \cong \Delta PNO$ [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা]

$\therefore$ PM = PN. **(প্রমাণিত)**

৬২. একটি ত্রিভুজের ভূমি a = 4.2 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন সূক্ষ্মকোণ $\angle x = 30°$ এবং অপর দুই বাহুর অন্তর d = 2.2 সে.মি.।

[দিনাজপুর বোর্ড ২০২০]

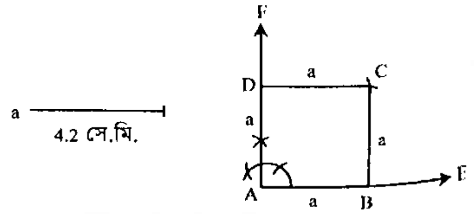
(ক) 'a' এর দৈর্ঘ্যের সমান বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গ আঁক।

(খ) ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)

(গ) অঙ্কনের বিবরণসহ ‘a’ এর সমান ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁক যেন তা কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল হয়।

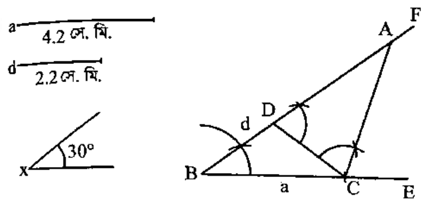
৬২ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক)



ABCD বর্গ অঙ্কন করা হলো যার বাহু $a = 4.2$ সে.মি.।

(খ) এখানে, কোনো ত্রিভুজের ভূমি $a = 4.2$ সে.মি., ভূমিসংলগ্ন কোণ $\angle x = 30°$ এবং অপর দুই বাহুর অন্তর $d = 2.২$ সে.মি.। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



অঙ্কন :

১. যেকোনো একটি রশ্মি BE থেকে ভূমি a এর সমান করে BC রেখাংশ কেটে নিই।

২. BC রেখাংশের ই বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle CBF$ আঁকি।

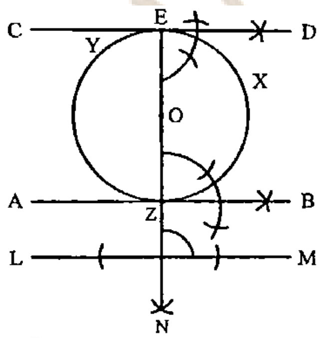
৩. BF রশ্মি থেকে d এর সমান BD অংশ কাটি।

৪. C, D যোগ করি।

৫. DC রেখাংশের যে পাশে F বিন্দু আছে সেই পাশে C বিন্দুতে $\angle FDC$ এর সমান $\angle DCA$ আঁকি। CA রশ্মি BF রশ্মিকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, Δ ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

(গ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট XYZ একটি বৃত্ত যার ব্যাসার্ধ $a = 4.2$ সে.মি.। LM একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। XYZ বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক অঙ্কন করতে হবে যা LM এর সমান্তরাল হয়।



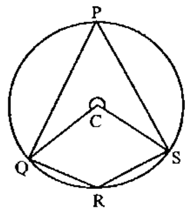
অঙ্কন :

১. O বিন্দু থেকে LM এর উপর ON লম্ব আঁকি। ON বৃত্তকে Z বিন্দুতে ছেদ করে।

২. ON কে বর্ধিত করলে তা বৃত্তটিকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

৩. ZE রেখার উপর Z ও E বিন্দুতে যথাক্রমে AB ও CD লম্ব আঁকি। তাহলে AB ও CD ই নির্ণেয় স্পর্শক হবে।

৬৩.



চিত্রে, CQ = 6 সে.মি. PQ > RS এবং $\angle QPS = 60°$.

[ময়মনসিংহ বোর্ড ২০২০]

(ক) বৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\angle QRS = \frac{1}{2}$ প্রবৃদ্ধ $\angle$ QCS.

(গ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, PQ জ্যা, RS জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর।

৬৩ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = CQ = 6$ সে.মি.

$\therefore$ বৃত্তটির ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ একক

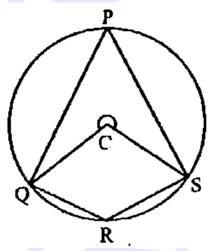
$= \pi(6)^2$ বর্গ সে.মি.

$= 3.1416 \times 36$ বর্গ সে.মি.

$= 113.098$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

নির্ণেয় বৃত্তটির ক্ষেত্রফল 113.098 বর্গ সে.মি. (প্রায়)।

(খ) মনে করি, C কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQRS চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত হয়েছে এবং $\angle QPS = 60°$। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle QRS = \frac{1}{2}$ প্রবৃদ্ধ $\angle QCS$.



প্রমাণ :

ধাপ ১ : QRS চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle QPS$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle QCS$.

$\therefore$ $\angle QCS = 2 \angle QPS$ [কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

বা, $\angle QCS = 2 \times 60°$ [$\because$ $\angle QPS = 60°$]

বা, $\angle QCS = 120°$

ধাপ ২ : আবার, বৃত্তের কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ 360°

অর্থাৎ, প্রবৃদ্ধ $\angle QCS + \angle QCS = 360°$

বা, প্রবৃদ্ধ $\angle QCS + 120° = 360°$

বা, প্রবৃদ্ধ $\angle QCS = 360° - 120°$

বা, প্রবৃদ্ধ $\angle QCS = 240°$

ধাপ ৩ : PQRS বৃত্তস্থ চতুর্ভুজে,

$\angle QRS + \angle QPS = 180°$

[বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি 180°]

বা, $\angle QRS + 60° = 180°$

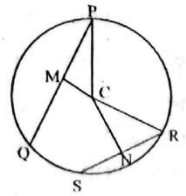
বা, $\angle QRS = 180° - 60°$

বা, $\angle QRS = 120°$

বা, $\angle QRS = \frac{1}{2} \times 240°$

$\therefore$ $\angle QRS = \frac{1}{2} \times$ প্রবৃদ্ধ $\angle QCS$. **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, C কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQ > RS. প্রমাণ করতে হবে যে, PQ জ্যা, RS জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর।



অঙ্কন : $CM \perp PQ$, $CN \perp ST$ আঁকি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : $PM = \frac{1}{2} PQ$ [বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা'র উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যা'টিকে সমদ্বিখন্ডিত করে]

এবং $RN = \frac{1}{2} RS$

ধাপ ২ : সমকোণী ত্রিভুজ PCM-এ

$PC^2 = PM^2 + MC^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

বা, $PM^2 = PC^2 - MC^2$

ধাপ ৩ : সমকোণী ত্রিভুজ RCN-এ

$RC^2 = CN^2 + NR^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

বা, $RN^2 = RC^2 - CN^2$

ধাপ ৪ : $PC = RC$

$\therefore$ $PC^2 = RC^2$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

ধাপ ৫ : $PQ > RS$ [প্রদত্ত]

বা, $\frac{1}{2} PQ > \frac{1}{2} RS$ [ধাপ (১)]

বা, $PM > RN$

বা, $PM^2 > RN^2$

বা, $PC^2 - MC^2 > R^2 - CN^2$

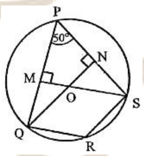
বা, $-MC^2 > -CN^2$ [ধাপ (৪) থেকে]

বা, $MC^2 < CN^2$

$\therefore$ $CM < CN$

কিন্তু CM ও CN কেন্দ্র থেকে যথাক্রমে PQ ও RS এর দূরত্ব নির্দেশ করে। অর্থাৎ PQ জ্যা, RS জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর। **(প্রমাণিত)**

৬৪.



চিত্রে, PQRS বৃত্তের কেন্দ্র o এবং $OM < ON$.

[ঢাকা বোর্ড ২০১৯]

(ক) $\angle QOS$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\angle PQR$ এবং বিপরীত কোণ $\angle PSR$ এর সমষ্টি দুই সমকোণ।

(গ) প্রমাণ কর যে, $PQ > PS$.

৬৪ নং প্রশ্নের উত্তর

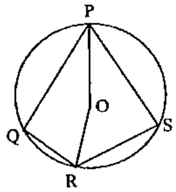
(ক) এখানে, $\angle QPS = 50°$

এখন, QS চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ $\angle QPS$ এবং কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle QOS$

$\therefore \angle QOS = 2\angle QPS = 2 \times 50° = 100°$

অতএব, $\angle QOS$ এর মান $100°$.

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQRS চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle PQR + \angle PSR$ = দুই সমকোণ।



অঙ্কন : O, P এবং O, R যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : একই চাপ PQR এর উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle POR = 2$ (বৃত্তস্থ $\angle PSR$)

অর্থাৎ $\angle POR = 2\angle PSR$ [$\because$ বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

ধাপ ২ : আবার একই চাপ PSR এর কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle POR = 2$(বৃত্তস্থ $\angle PQR$)

অর্থাৎ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle POR = 2\angle PQR$

এখন, $\angle POR$ + প্রবৃদ্ধ $\angle POR = 2(\angle PSR + \angle PQR)$

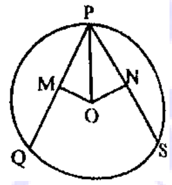
কিন্তু, $\angle POR$ + প্রবৃদ্ধ $\angle POR$ = চার সমকোণ

$\therefore$ $2(\angle PSR + \angle PQR)$ = চার সমকোণ

বা, $\angle PSR + \angle PQR$ = দুই সমকোণ

অর্থাৎ $\angle PQR + \angle PSR$ দুই সমকোণ। **(প্রমাণিত)**

(গ) মনে করি, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং PQ ও PS দুইটি ব্যাস ভিন্ন জ্যা। O থেকে PQ ও PS এর উপর OM ও ON লম্ব। তাহলে OM ও ON কেন্দ্র থেকে যথাক্রমে PQ ও PS জ্যায়ের দূরত্ব নির্দেশ করে। এখানে $OM < ON$ প্রমাণ করতে 'হবে যে, $PQ > PS$.



অঙ্কন : O, P যোগ করি।

প্রমাণ : ধাপ ১ : এখানে, $OM \perp PQ$

$\therefore$ $PM = \frac{1}{2} PQ$ [বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

অনুরূপভাবে, $PN = \frac{1}{2} PS$

ধাপ ২ : এখন সমকোণী ত্রিভুজ POM-এ

$OP^2 = OM^2 + PM^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

$\therefore$ $OM^2 = OP^2 - PM^2$

ধাপ ৩ : তদ্রুপ সমকোণী ত্রিভুজ $\angle PON$-এ

$OP^2 = ON^2 + PN^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

$\therefore$ $ON^2 = OP^2 - PN^2$

ধাপ ৪ : এখানে, $OM < ON$

বা, $OM^2 < ON^2$

বা, $OP^2 - PM^2 < OP^2 - PN^2$ [ধাপ (২) ও ধাপ (৩) হতে]

বা, $M^2 <- PN2^2$

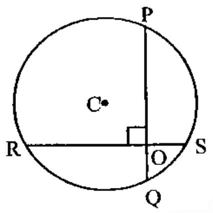
বা, $PM^2 > PN^2$

বা, $PM > PN$

বা, $\frac{1}{2} PQ > \frac{1}{2} PS$ [ধাপ (১) হতে]

$\therefore$ $PQ > PS$. **(প্রমাণিত)**

৬৫.



চিত্রে $\angle ROP = 90°$

[সকল বোর্ড ২০১৮]

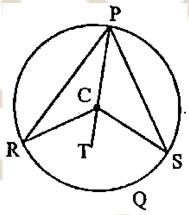
(ক) কেন্দ্রস্থ কোণ ও বৃত্তস্থ কোণের সংজ্ঞা দাও।
(খ) প্রমাণ কর যে, $\angle RCS = 2\angle RPS$.
(গ) প্রমাণ কর যে, $\angle PCR + \angle QCS = 180°$.

৬৫ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) **কেন্দ্রস্থ কোণ** : একটি কোণের শীর্ষবিন্দু কোনো বৃত্তের কেন্দ্রে অবস্থিত হলে কোণটিকে ঐ বৃত্তের একটি কেন্দ্রস্থ কোণ বলা হয় এবং কোণটি বৃত্তে যে চাপ খন্ডিত করে সেই চাপের উপর তা দন্ডায়মান বলা হয়।

বৃত্তস্থ কোণ : একটি কোণের শীর্ষবিন্দু কোনো বৃত্তের একটি বিন্দু হলে এবং কোণটির প্রত্যেক বাহুতে শীর্ষবিন্দু ছাড়াও বৃত্তের একটি বিন্দু থাকলে কোণটিকে ঐ বৃত্তের একটি বৃত্তস্থ কোণ বলা হয়।

(খ) এখানে, C কেন্দ্রবিশিষ্ট PRQS বৃত্তে RQS উপচাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ $\angle RPS$ এবং কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle RCS$। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle RCS = 2\angle RPS$।



অঙ্কন : P এবং C কে যোগ করে T পর্যন্ত বর্ধিত করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : Δ PRC এর বহিস্থ কোণ $\angle RCT = \angle CPR + \angle CRP$

ধাপ ২ : Δ PRC এ CP = CR [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

অতএব, $\angle CPR = \angle CRP$

[∵ ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সমান]

ধাপ ৩ : ধাপ (১) ও (২) থেকে পাই $\angle RCT = 2\angle CPR$

ধাপ ৪ : একইভাবে অ চঈঝ থেকে পাই $\angle SCT = 2\angle SPC$

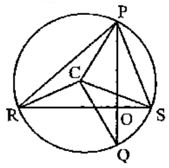
ধাপ ৫ : ধাপ (৩) ও (৪) থেকে পাই,

$\angle RCT + \angle SCT = 2\angle CPR + 2\angle SPC$

বা, $\angle RCS = 2(\angle CPR + \angle SPC)$

অর্থাৎ $\angle RCS = 2\angle RPS$. **(প্রমাণিত)**

(গ) এখানে, C কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PQ এবং RS জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে O বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করেছে। C, P; C, R; C, Q এবং C, S যোগ করায় কেন্দ্রে $\angle PCR$ ও $\angle QCS$ উৎপন্ন হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle PCR + \angle QCS = 180°$.



অঙ্কন : P, R ও P, S যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ বলে, PR চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ, $\angle PCR = 2 \times$ বৃত্তস্থ কোণ $\angle PSR$

বা, $\angle PCR = 2\ \angle PSR$

ধাপ ২ : একইভাবে, $\angle QCS = 2\angle QPS$

ধাপ ৩ : ধাপ (১) ও (২) হতে পাই,

$\angle PCR + \angle QCS = 2\angle PSR + 2\angle QPS$
$= 2(\angle PSR + \angle QPS)$
$= 2(\angle PSO + \angle OPS) = 2 \times 90° = 180°$

∴ $\angle PCR + \angle QCS = 180°$. **(প্রমাণিত)**