

১. $3 \cot^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta = P$ এবং $Q = \frac{-\sin(-\theta) + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan(-\theta)}$ [ঢাকা বোর্ড-২০২৪]

(ক) $20^\circ 12' 36''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

(খ) $P = 5$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হলে, θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

(গ) $\tan \theta = \frac{5}{12}$ এবং $\cos \theta$ ঋণাত্মক হলে, দেখাও যে, $Q = \frac{34}{39}$

১ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) $20^\circ 12' 36'' = 20^\circ + \left(\frac{12}{60}\right)^\circ + \left(\frac{36}{3600}\right)^\circ$

$= \left(20 + \frac{1}{5} + \frac{1}{100}\right)^\circ$

$= \left(\frac{2021}{100} \times \frac{\pi}{180}\right)$ রেডিয়ান

$= 0.3527$ রেডিয়ান (প্রায়) (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে, $3 \cot^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta = P$ এবং $P = 5$

$\therefore 3 \cot^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta = 5$ বা, $3 \cot^2 \theta + 1 + \cot^2 \theta = 5$

বা, $4 \cot^2 \theta = 4$ বা, $\cot^2 \theta = 1 \therefore \cot \theta = \pm 1$

ধনাত্মক মান নিয়ে পাই,

$\cot \theta = 1 = \cot \frac{\pi}{4} = \cot \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

বা, $\cot \theta = \cot \frac{\pi}{4} = \cot \frac{5\pi}{4} \therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

ঋণাত্মক মান নিয়ে পাই, $\cot \theta = -1 = -\cot \frac{\pi}{4}$

বা, $\cot \theta = \cot \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cot \left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

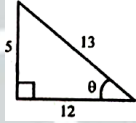
বা, $\cot \theta = \cot \frac{3\pi}{4} = \cot \frac{7\pi}{4} \therefore \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

\therefore নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ (Ans.)

(গ) দেওয়া আছে, $\tan \theta = \frac{5}{12}$

$\therefore \cos \theta = -\frac{12}{13}$ [$\because \cos \theta$ ঋণাত্মক]

$\therefore \sin \theta = -\frac{5}{13}$ এবং $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = -\frac{13}{12}$



এখন,

$Q = \frac{-\sin(-\theta) + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan(-\theta)}$

$= \frac{-(-\sin \theta) + \cos \theta}{\sec \theta + \tan(-\theta)}$

$= \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sec \theta - \tan \theta}$

$= \frac{\frac{5}{13} - \frac{12}{13}}{\frac{13}{-12} - \frac{5}{12}}$

$= \frac{-\frac{7}{13}}{\frac{-13-5}{12}} = \frac{-\frac{7}{13}}{-\frac{18}{12}}$

$= \frac{-7}{13} \times \frac{12}{-18} = \frac{34}{39}$

$\therefore Q = \frac{34}{39}$ (দেখানো হলো)

২. $P = \frac{\cot A + \operatorname{cosec} A - 1}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1}$ এবং $R = \tan \alpha + \sec \alpha$

[ময়মনসিংহ বোর্ড-২০২৪]

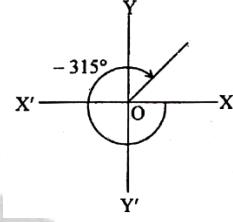
(ক) -315° কোণটি কোন চতুর্ভাগে অবস্থিত চিত্রসহ নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $P = \frac{\sec A + 1}{\sec A - 1}$.

(গ) যদি $R = \sqrt{3}$ এবং $0 < \alpha < 2\pi$ হয়, তবে α এর মান নির্ণয় কর।

২ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক)



$\therefore -315^\circ$ কোণটি প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত। (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে,

$P = \frac{\cot A + \operatorname{cosec} A - 1}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1}$

$= \frac{\cot A + \operatorname{cosec} A - (\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A)}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1}$

$= \frac{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1}{\cot A + \operatorname{cosec} A + (\cot A + \operatorname{cosec} A)(\cot A - \cot A)}$

$= \frac{\cot A - \cot A + 1}{\cot A - \cot A + 1}$

$= \frac{(\cot A + \cot A)(\cot A - \cot A + 1)}{(\cot A - \cot A + 1)}$

$= \cot A + \operatorname{cosec} A = \frac{\cos A}{\sin A} + \frac{1}{\sin A}$

$= \frac{1 + \cos A}{\sin A} = \sqrt{\frac{(1 + \cos A)^2}{\sin^2 A}}$

$= \sqrt{\frac{(1 + \cos A)^2}{1 - \cos^2 A}}$

$= \sqrt{\frac{(1 + \cos A)^2}{(1 + \cos A)(1 - \cos A)}}$

$= \sqrt{\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\sec A}}{1 - \frac{1}{\sec A}}}$

$= \sqrt{\frac{\sec A + 1}{\sec A - 1}} = \sqrt{\frac{\sec A + 1}{\sec A - 1}}$

$\therefore P = \sqrt{\frac{\sec A + 1}{\sec A - 1}}$ (প্রমাণিত)।

(গ) দেওয়া আছে, $R = \tan \alpha + \sec \alpha$

$R = \sqrt{3}$ হলে,

$\therefore \tan \alpha + \sec \alpha = \sqrt{3}$ বা, $\sec \alpha = \sqrt{3} - \tan \alpha$

বা, $\sec^2 \alpha = (\sqrt{3} - \tan \alpha)^2$ [বর্গ করে]

বা, $1 + \tan^2 \alpha = 3 - 2\sqrt{3}\tan \alpha + \tan^2 \alpha$

বা, $2\sqrt{3}\tan \alpha = 2$

বা, $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \frac{\pi}{6} = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$ [$\because 0 \leq \alpha \leq 2\pi$]

বা, $\tan \alpha = \tan \frac{\pi}{6} = \tan \frac{7\pi}{6} \therefore \alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

$\alpha = \frac{\pi}{6}$ হলে, $\tan \frac{\pi}{6} + \sec \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

এবং $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ হলে,

$\tan \frac{7\pi}{6} + \sec \frac{7\pi}{6} = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \sec \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$= \tan \frac{\pi}{6} - \sec \frac{\pi}{6}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \alpha = \frac{7\pi}{6}$ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$ (Ans.)

৩. $a = \cot \theta$ এবং $b = \operatorname{cosec} \theta$

[রাজশাহী বোর্ড-২০২৪]

(ক) $4\theta = \pi$ হলে, $a + b^2$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $a + b = x$ হলে, দেখাও যে, $\sec \theta = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

(গ) $3(a^2 + b^2) = 5$ এবং $0 < \theta < 2\pi$, হলে θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

৩ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে,

$$4\theta = \pi \therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

আবার, $a = \cot\theta$ এবং $b = \operatorname{cosec}\theta$

প্রদত্ত রাশি,

$$= a + b^2 = \cot\theta + \operatorname{cosec}^2\theta$$

$$= \cot \frac{\pi}{4} + \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{4} = 1 + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2 = 3 \text{ (Ans.)}$$

(খ) দেওয়া আছে,

$a = \cot\theta$ এবং $b = \operatorname{cosec}\theta$

প্রদত্ত সমীকরণ,

$$a + b = x$$

$$\text{বা, } \cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = x$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = x$$

$$\text{বা, } \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = x \text{ বা, } \frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = x^2 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } \frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta} = x^2 \text{ বা, } \frac{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} = x^2$$

$$\text{বা, } \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = x^2$$

$$\text{বা, } \frac{1+\cos\theta+1-\cos\theta}{1+\cos\theta-1+\cos\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1} \text{ [যোজন-বিয়োজন করে]}$$

$$\text{বা, } \frac{2}{2\cos\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1} \text{ বা, } \frac{1}{\cos\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$$\therefore \sec\theta = \frac{x^2+1}{x^2-1} \text{ (দেখানো হলো)}$$

(গ) দেওয়া আছে,

$a = \cot\theta$ এবং $b = \operatorname{cosec}\theta$

প্রদত্ত সমীকরণ,

$$3(a^2 + b^2) = 5$$

$$\text{বা, } 3\cot^2\theta + 3\operatorname{cosec}^2\theta = 5 \text{ বা, } \cot^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \frac{5}{3}$$

$$\text{বা, } \cot^2\theta + 1 + \cot^2\theta = \frac{5}{3} \text{ বা, } 2\cot^2\theta = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$$

$$\text{বা, } \cot^2\theta = \frac{1}{3} \text{ বা, } \cot\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{এখন, } \cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ থেকে পাই, } \cot\theta = \cot\frac{\pi}{3} = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \text{ [} \because 0 < \theta < 2\pi \text{]}$$

$$\text{আবার, } \cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ থেকে পাই,}$$

$$\cot\theta = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \text{ [} \because 0 < \theta < 2\pi \text{]}$$

\therefore নির্দিষ্ট সীমা $0 < \theta < 2\pi$ এর মধ্যে θ এর সম্ভাব্য মানসমূহ

$$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \text{ (Ans.)}$$

8. $a = \operatorname{cosec}\theta$ এবং $b = \cot\theta$

[দিনাজপুর বোর্ড-২০২৪]

(ক) একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত 3:5:7 হলে, বৃহত্তম কোণের বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর।

(খ) $a + b = p$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\sec\theta = \frac{p^2+1}{p^2-1}$

(গ) $3a^2 + 2b^2 = 18$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর।

৪ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) ধরি, ত্রিভুজের কোণত্রয় $3x, 5x$ ও $7x$

$$\text{শর্তমতে, } 3x + 5x + 7x = \pi^c \text{ বা, } 15x = \pi^c \therefore x = \frac{\pi^c}{15}$$

$$\therefore \text{বৃহত্তম কোণ} = 7x = \frac{7\pi^c}{15} \text{ (Ans.)}$$

(খ) দেওয়া আছে,

$$a = \cot\theta \text{ এবং } b = \operatorname{cosec}\theta$$

প্রদত্ত সমীকরণ,

$$a + b = x$$

$$\text{বা, } \cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = x$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = x$$

$$\text{বা, } \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = x \text{ বা, } \frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = x^2 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } \frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta} = x^2 \text{ বা, } \frac{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} = x^2$$

$$\text{বা, } \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = x^2$$

$$\text{বা, } \frac{1+\cos\theta+1-\cos\theta}{1+\cos\theta-1+\cos\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1} \text{ [যোজন-বিয়োজন করে]}$$

$$\text{বা, } \frac{2}{2\cos\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1} \text{ বা, } \frac{1}{\cos\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$$\therefore \sec\theta = \frac{x^2+1}{x^2-1} \text{ (দেখানো হলো)}$$

(গ) দেওয়া আছে, $a = \operatorname{cosec}\theta$ এবং $b = \cot\theta$

প্রদত্ত সমীকরণ, $3a^2 + 2b^2 = 18$

$$\text{বা, } 3\operatorname{cosec}^2\theta + 2\cot^2\theta = 18$$

$$\text{বা, } \frac{3}{\sin^2\theta} + \frac{2\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = 18$$

$$\text{বা, } 3 + 2\cos^2\theta = 18\sin^2\theta$$

$$\text{বা, } 3 + 2(1 - \sin^2\theta) = 18\sin^2\theta$$

$$\text{বা, } 3 + 2 - 2\sin^2\theta = 18\sin^2\theta$$

$$\text{বা, } 20\sin^2\theta = 5$$

$$\text{বা, } \sin^2\theta = \frac{1}{4} \therefore \sin\theta = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{হয়, } \sin\theta = \frac{1}{2} \text{ অথবা, } \sin\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \sin\theta = \sin\frac{\pi}{6} \text{ বা, } \sin\theta = -\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \text{ বা, } \sin\theta = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore \theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \text{ (Ans.)}$$

৫. $A = \sin\theta$ এবং $B = \cos\theta$

[কুমিল্লা বোর্ড-২০২৪]

(ক) $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ এবং $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ হলে, $\sec\alpha$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $\frac{A}{B} = \frac{3}{4}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{14}{5}$

(গ) $2AB = A$ এবং $0 \leq \theta \leq 2\pi$ হলে θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

(ঘ)

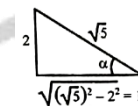
৫ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে,

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \sec\alpha = \frac{-\sqrt{5}}{1} \text{ [} \because \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ হলে } \alpha, \text{ দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত এবং}$$

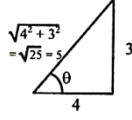
দ্বিতীয় চতুর্ভাগে $\sec\alpha$ এর মান ঋণাত্মক]



$$\therefore \sec\alpha = -\sqrt{5} \text{ (Ans.)}$$

(খ) দেওয়া আছে, $A = \sin\theta$ ও $B = \cos\theta$

$$\text{এবং } \frac{A}{B} = \frac{3}{4} \text{ বা, } \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{4}$$



$$\begin{aligned}\therefore \tan \theta &= \frac{3}{4} \\ \therefore \sin \theta &= \frac{3}{5} \quad [\because \sin \theta \text{ ঋণাত্মক}] \\ \therefore \cos \theta &= -\frac{4}{5} \text{ ধনাত্মক এবং } \sin \theta \text{ তাই } \theta \text{ তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত এবং} \\ &\text{তৃতীয় চতুর্ভাগে } \cos \theta \text{ ঋণাত্মক} \\ \therefore \sec \theta &= \frac{1}{\cos \theta} = -\frac{5}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{বামপক্ষ} &= \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\sec \theta + \tan \theta} = \frac{-\frac{4}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right)}{-\frac{5}{4} + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{\frac{-4-3}{5}}{\frac{-5+3}{4}} = \frac{-\frac{7}{5}}{-\frac{2}{4}} = \left(-\frac{7}{5}\right) \times \left(-\frac{4}{2}\right) \\ &= \frac{14}{5} = \text{ডানপক্ষ}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\sec \theta + \tan \theta} = \frac{14}{5} \quad (\text{প্রমাণিত})$$

(গ) দেওয়া আছে, $2AB = A$

$$\begin{aligned}\text{বা, } 2\sin \theta \cos \theta &= \sin \theta \text{ বা, } 2\sin \theta \cos \theta - \sin \theta = 0 \\ \text{বা, } \sin \theta (2\cos \theta - 1) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{হয়, } \sin \theta &= 0 \text{ বা, } \sin \theta = \sin 0 = \sin \pi = \sin 2\pi \\ [\because 0 \leq \theta \leq 2\pi]\end{aligned}$$

$$\therefore \theta = 0, \pi, 2\pi$$

$$\text{অথবা, } 2\cos \theta - 1 = 0$$

$$\begin{aligned}\text{বা, } \cos \theta &= \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} = \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ [\because 0 \leq \theta \leq 2\pi]\end{aligned}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

$$\therefore \text{নির্ধারিত সীমার মধ্যে } \theta \text{ এর মান} = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi \quad (\text{Ans.})$$

৬. (i) $a = \sin \theta, b = \cos \theta$

(ii) ঢাকা ও রাজশাহী পৃথিবীর কেন্দ্রে $3^\circ 2' 3''$ কোণ উৎপন্ন করে।

[চট্টগ্রাম বোর্ড-২০২৪]

$$(ক) \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8} \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

(খ) পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি. হলে ঢাকা ও রাজশাহীর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

$$(গ) \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ হলে, } \theta \text{ এর মান নির্ণয় কর, যখন } 0 < \theta < 2\pi$$

৬ নং প্রশ্নের উত্তর

$$\begin{aligned}(ক) \text{ প্রদত্ত রাশি} &= \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8} \\ &= \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \sin^2 \left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) \\ &= \sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} \\ &= 1 + 1 = 2 \quad (\text{Ans.})\end{aligned}$$

(খ) দেওয়া আছে,

পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $r = 6440$ কি.মি.

ঢাকা ও রাজশাহীর ক্ষেত্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 3^\circ 2' 3''$

$$\begin{aligned}&= 3^\circ + \left(\frac{2}{60}\right)^\circ + \left(\frac{3}{60 \times 60}\right)^\circ \\ &= \left(\frac{3641}{1200}\right)^\circ = \left(\frac{3641}{1200} \times \frac{\pi}{180}\right)^\circ \\ &= 0.053^\circ \quad (\text{প্রায়})\end{aligned}$$

\therefore ঢাকা ও রাজশাহীর মধ্যবর্তী দূরত্ব, $S = r\theta$

$$= (6440 \times 0.053) \text{ কি.মি.}$$

$$= 341.32 \text{ কি.মি. (প্রায়)} \quad (\text{Ans.})$$

(গ) দেওয়া আছে,

$$a = \sin \theta, b = \cos \theta$$

প্রদত্ত সমীকরণ,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ বা, } \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{\tan^2 \theta + 1}{\tan \theta} = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ বা, } \sqrt{3} \tan^2 \theta + \sqrt{3} = 4 \tan \theta$$

$$\text{বা, } \sqrt{3} \tan^2 \theta - 4 \tan \theta + \sqrt{3} = 0$$

$$\text{বা, } \sqrt{3} \tan^2 \theta - 3 \tan \theta - \tan \theta + \sqrt{3} = 0$$

$$\text{বা, } \sqrt{3} \tan \theta (\tan \theta - \sqrt{3}) - 1(\tan \theta - \sqrt{3}) = 0$$

$$\text{বা, } (\tan \theta - \sqrt{3})(\sqrt{3} \tan \theta - 1) = 0$$

$$\text{হয় } \tan \theta - \sqrt{3} = 0 \quad \text{অথবা, } \sqrt{3} \tan \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } \tan \theta = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \tan \theta = \tan \frac{\pi}{3}$$

$$\text{বা, } \tan \theta = \tan \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$$

$$\therefore \theta \text{ এর সম্ভাব্য সকল মান, } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{6} \quad (\text{Ans.})$$

$$৭. \sec \theta - \tan \theta = P \text{ এবং } 2\cos^2 \theta + 2\sqrt{2}\sin \theta = Q$$

[সিলেট বোর্ড-২০২৪]

(ক) $15'7''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

$$(খ) P = x \text{ হলে, প্রমাণ কর যে, } \operatorname{cosec} \theta = \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

(গ) $Q = 3$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর।

৭ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) প্রদত্ত কোণ = $15'7''$

$$= \left(\frac{15}{60}\right)^\circ + \left(\frac{7}{60 \times 60}\right)^\circ = \frac{1^\circ}{4} + \frac{7^\circ}{3600} = \frac{907^\circ}{3600}$$

$$= \left(\frac{907}{3600} \times \frac{\pi}{180}\right)^\circ \text{ রেডিয়ান}$$

$$= 0.0044 \text{ রেডিয়ান (প্রায়)} \quad (\text{Ans.})$$

(খ) দেওয়া আছে, $P = x$

$$\text{বা, } \sec \theta - \tan \theta = x \text{ বা, } \frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = x$$

$$\text{বা, } \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} = x \text{ বা, } \frac{(1 - \sin \theta)^2}{\cos^2 \theta} = x^2 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } \frac{(1 - \sin \theta)^2}{1 - \sin^2 \theta} = x^2 \text{ বা, } \frac{(1 - \sin \theta)^2}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} = x^2$$

$$\text{বা, } \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} = x^2$$

$$\text{বা, } \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{1}{x^2} \text{ বা, } \frac{1 + \sin \theta + 1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta - 1 + \sin \theta} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$$

[যোজন-বিয়োজন করে]

$$\text{বা, } \frac{2}{2\sin \theta} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2} \text{ বা, } \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$$

$$\therefore \operatorname{cosec} \theta = \frac{1 + x^2}{1 - x^2} \quad (\text{প্রমাণিত})$$

(গ) দেওয়া আছে, $Q = 3$

$$\text{বা, } 2\cos^2 \theta + 2\sqrt{2}\sin \theta = 3$$

$$\text{বা, } 2 - 2\sin^2 \theta + 2\sqrt{2}\sin \theta = 3$$

$$\text{বা, } 2\sin^2 \theta - 2\sqrt{2}\sin \theta + 1 = 0$$

$$\text{বা, } (\sqrt{2}\sin \theta)^2 - 2\sqrt{2}\sin \theta \cdot 1 + 1^2 = 0$$

$$\text{বা, } (\sqrt{2}\sin \theta - 1)^2 = 0 \text{ বা, } \sqrt{2}\sin \theta = 1$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ বা, } \sin \theta = \sin \frac{\pi}{4} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin \frac{\pi}{4} = \sin \frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore 0 < \theta < 2\pi \text{ ব্যবধিতে নির্ণেয় মান, } \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \quad (\text{Ans.})$$

$$৮. A = x\cos \theta, B = y\sin \theta$$

[যশোর বোর্ড-২০২৪]

৯.

(ক) সকাল ৪:৩০ টায় ঘড়ির ঘন্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার অন্তর্গত কোণকে ডিগ্রিতে নির্ণয় কর।

(খ) $A + B = z$ হলে, প্রমাণ কর যে,

$$x \sin \theta - y \sin \theta = \pm \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$$

(গ) $x^2 = 3, y^2 = 7$ এবং $A^2 + B^2 = 4$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর।
(যখন $0 < \theta < 2\pi$)

৮ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক)



আমরা জানি,

ঘড়িতে সর্বমোট ১২টি ঘন্টার দাগ কাঁটা থাকে।

\therefore ঘন্টার কাঁটার ক্ষেত্রে ১২ ঘন্টা কেন্দ্রে উৎপন্ন করে $= 360^\circ$

\therefore ঘন্টার কাঁটার ক্ষেত্রে ১ ঘন্টা কেন্দ্রে উৎপন্ন করে $= \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$

\therefore ঘন্টার কাঁটার ক্ষেত্রে ১ মিনিট কেন্দ্রে উৎপন্ন করে $= \frac{30^\circ}{60} = 0.5^\circ$

[\because ১ ঘন্টা = ৬০ মি.]

\therefore ঘন্টার কাঁটার ক্ষেত্রে ৩০ মিনিট কেন্দ্রে উৎপন্ন করে $= 0.5 \times 30 = 15^\circ$

\therefore সকাল ৪:৩০ টায় ঘড়ির ঘন্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার অন্তর্গত কোণ $= 2 \times 30^\circ + 15^\circ = 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ$ (Ans.)

(খ) প্রশ্নটি ত্রুটিপূর্ণ।

$x \cos \theta + y \sin \theta = z$ হলে,

$x \sin \theta - y \sin \theta = \pm \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$ প্রমাণ করা অসম্ভব।

তাই, $x \sin \theta - y \sin \theta$ এর পরিবর্তে $x \sin \theta - y \cos \theta$ বিবেচনা করে সমাধান দেওয়া হলো।

দেওয়া আছে,

$A = x \cos \theta$ ও $B = y \sin \theta$

এবং $A + B = z$ বা, $x \cos \theta + y \sin \theta = z$

বা, $(x \cos \theta + y \sin \theta)^2 = z^2$

বা, $x^2 \cos^2 \theta + 2x \cos \theta \cdot y \sin \theta + y^2 \sin^2 \theta = z^2$

বা, $x^2(1 - \sin^2 \theta) + 2xy \sin \theta \cdot \cos \theta + y^2(1 - \cos^2 \theta) = z^2$

বা, $x^2 - x^2 \sin^2 \theta + 2xy \sin \theta \cdot \cos \theta + y^2 - y^2 \cos^2 \theta = z^2$

বা, $(x \sin \theta - y \cos \theta)^2 = x^2 + y^2 - z^2$

$\therefore x \sin \theta - y \cos \theta = \pm \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$ (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে, $A = x \cos \theta, B = y \sin \theta$ এবং $x^2 = 3, y^2 = 7$

এখানে, $A^2 + B^2 = 4$

বা, $x^2 \cos^2 \theta + y^2 \sin^2 \theta = 4$

বা, $7 \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta = 4$ [মান বসিয়ে]

বা, $7 \sin^2 \theta + 3(1 - \sin^2 \theta) = 4$

বা, $7 \sin^2 \theta + 3 - 3 \sin^2 \theta = 4$

বা, $4 \sin^2 \theta = 1$ বা, $\sin^2 \theta = \frac{1}{4}$ বা, $\sin \theta = \pm \frac{1}{2}$

এখন, $\sin \theta = \frac{1}{2}$ হলে, $\sin \theta = \sin \frac{\pi}{6} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{5\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

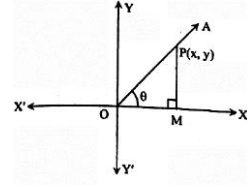
আবার, $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ হলে,

$\sin \theta = -\sin \frac{\pi}{6} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right)$

বা, $\sin \theta = \sin \frac{7\pi}{6} = \sin \frac{11\pi}{6} \therefore \theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

$\therefore 0 < \theta < 2\pi$ ব্যবধিতে নির্ণেয় মান, $\theta =$

$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ (Ans.)



[বরিশাল বোর্ড-২০২৪]

(ক) $20^\circ 24' 35''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

(খ) $\frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = a$ হলে প্রমাণ কর যে, $\cos \theta = \frac{2a}{a^2 + 1}$

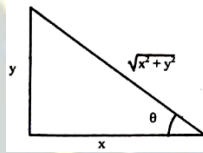
(গ) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর।

৯ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) $20^\circ 24' 35''$

$$\begin{aligned} &= 20^\circ + \left(\frac{24}{60} \right)^\circ + \left(\frac{35}{60 \times 60} \right)^\circ \\ &= \left(20 + \frac{2}{5} + \frac{7}{720} \right)^\circ = \left(\frac{14400 + 288 + 7}{720} \right)^\circ \\ &= \left(\frac{14695}{720} \right)^\circ = \left(\frac{2939}{144} \right)^\circ \\ &= \frac{2939}{144} \times \frac{\pi}{180} \\ &= 0.3562^\circ \text{ (প্রায়) (Ans.)} \end{aligned}$$

(খ)



দেওয়া আছে, $\frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = a$

বা, $\tan \theta + \sec \theta = a \dots (i)$

(i) হতে পাই,

$(\sec \theta + \tan \theta)(\sec \theta - \tan \theta) = a(\sec \theta - \tan \theta)$

বা, $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = a(\sec \theta - \tan \theta)$

বা, $1 = a(\sec \theta - \tan \theta)$

$\therefore \sec \theta - \tan \theta = \frac{1}{a} \dots (ii)$

(i) + (ii) করে পাই,

$2 \sec \theta = \frac{1}{a} + a$

বা, $2 \sec \theta = \frac{1+a^2}{a}$

বা, $\sec \theta = \frac{a^2+1}{2a}$

বা, $\frac{1}{\sec \theta} = \frac{2a}{a^2+1}$ [ব্যস্তকরণ করে]

$\therefore \cos \theta = \frac{2a}{a^2+1}$ (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে,

$a = \sin \theta, b = \cos \theta$

প্রদত্ত সমীকরণ,

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ বা, $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\tan^2 \theta + 1}{\tan \theta} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ বা, $\sqrt{3} \tan^2 \theta + \sqrt{3} = 4 \tan \theta$

বা, $\sqrt{3} \tan^2 \theta - 4 \tan \theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3} \tan^2 \theta - 3 \tan \theta - \tan \theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3} \tan \theta (\tan \theta - \sqrt{3}) - 1(\tan \theta - \sqrt{3}) = 0$

বা, $(\tan \theta - \sqrt{3})(\sqrt{3} \tan \theta - 1) = 0$

হয় $\tan \theta - \sqrt{3} = 0$ অথবা, $\sqrt{3}\tan \theta - 1 = 0$

বা, $\tan \theta = \sqrt{3}$ বা, $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan \theta = \tan \frac{\pi}{3}$ বা, $\tan \theta = \tan \frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

$\therefore \theta$ এর সম্ভাব্য সকল মান, $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}$ (Ans.)

১০. (i) $\sin \alpha + \cos \alpha = p$ এবং $\sec \alpha + \csc \alpha = q$

(ii) $a \cos \theta - b \sin \theta = c$

[ঢাকা বোর্ড-২০২৩]

(ক) $\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $q(p^2 - 1) = 2p$

(গ) যদি $a = b = c = 1$ হয়, তবে θ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $0 \leq \theta \leq 2\pi$

১০ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) $\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ = \sin^2 15^\circ + \sin^2 (90^\circ - 15^\circ)$

$= \sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ$

$= 1. [\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1]$ (Ans.)

(খ) উদ্দীপক হতে পাই,

$\sin \alpha + \cos \alpha = p$

$\sec \alpha + \csc \alpha = q$

\therefore বামপক্ষ $= q(p^2 - 1)$

$= (\sec \alpha + \cos \alpha) \{ (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1 \}$

$= \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha - 1)$

$= \left(\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \right) (1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha - 1)$

$= \left(\frac{\sin \alpha' + \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \right) \times 2 \sin \alpha \cos \alpha$

$= 2(\sin \alpha + \cos \alpha) = 2p$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore q(p^2 - 1) = 2p$ (প্রমাণিত)

(গ) উদ্দীপক (ii) হতে পাই,

$a \cos \theta - b \sin \theta = c$

দেওয়া আছে, $a = b = c = 1$

\therefore উদ্দীপকের সমীকরণটি দাঁড়ায়,

$1 \cdot \cos \theta - 1 \cdot \sin \theta = 1$ যখন $0 \leq \theta \leq 2\pi$

বা, $\cos \theta - \sin \theta = 1$ বা, $\cos \theta = 1 + \sin \theta$

বা, $\cos^2 \theta = 1 + \sin^2 \theta + 2 \sin \theta$ [বর্গ করে]

বা, $1 - \sin^2 \theta = 1 + \sin^2 \theta + 2 \sin \theta$

বা, $2 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta = 0$

$\therefore 2 \sin \theta (\sin \theta + 1) = 0$

হয়, $\sin \theta = 0$ অথবা, $\sin \theta + 1 = 0$

বা, $\sin \theta = \sin 0, \sin 2\pi$ বা, $\sin \theta = -1$

$\therefore 0 = 0, 2\pi$ বা, $\sin \theta = \sin \frac{3\pi}{2}$

$\therefore \theta = \frac{3\pi}{2}$

$\therefore 0 \leq \theta \leq 2\pi$ সীমার মধ্যে θ এর মানসমূহ $= 0, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ (Ans.)

১১. $a \cos^2 x + b \sin^2 x = c; a > c > b > 0$ এবং $\sin \theta = \frac{5}{13}$

[ময়মনসিংহ বোর্ড-২০২৩]

(ক) $\sin A + \sin^2 A = 1$ হলে দেখাও যে, $\cos^2 A + \cos^4 A = 1$

(খ) প্রমাণ কর যে, $\tan x = \pm \sqrt{\frac{c-a}{b-c}}$

(গ) $\cos \theta$ ঋণাত্মক হলে, দেখাও যে, $\frac{\tan \theta + \sec(-\theta)}{\cot \theta + \csc(-\theta)} = \frac{3}{10}$

১১ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\sin A + \sin^2 A = 1$

বা, $\sin A = 1 - \sin^2 A$ বা, $\sin A = \cos^2 A$

বা, $\sin^2 A = \cos^4 A$ বা, $1 - \cos^2 A = \cos^4 A$

$\therefore \cos^2 A + \cos^4 A = 1$ (দেখানো হলো)

(খ) দেওয়া আছে, $a \cos^2 x + b \sin^2 x = c$

বা, $a + b \tan^2 x = c \sec^2 x$ [$\cos^2 x$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $a + b \tan^2 x = c(1 + \tan^2 x)$

বা, $a + b \tan^2 x = c + c \tan^2 x$

বা, $(b - c) \tan^2 x = c - a$

বা, $\tan^2 x = \frac{c-a}{b-c}$

$\therefore \tan x = \pm \sqrt{\frac{c-a}{b-c}}$ (প্রমাণিত)

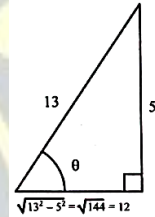
(গ) দেওয়া আছে, $\sin \theta = \frac{5}{13}$ এবং $\cos \theta$ ঋণাত্মক হওয়ায়

θ এর অবস্থান দ্বিতীয় চতুর্ভাগে $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$

$\therefore \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\frac{5}{13}} = \frac{13}{5}$

$\therefore \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ব্যবধিতে $\tan \theta = -\frac{5}{12}$

$\therefore \cot \theta = \frac{-12}{5}$ এবং $\sec \theta = \frac{-13}{12}$



বামপক্ষ $= \frac{\tan \theta + \sec(-\theta)}{\cot \theta + \csc(-\theta)}$

$= \frac{\tan \theta + \sec \theta}{\cot \theta - \csc \theta}$

$= \frac{\frac{5}{-12} - \frac{13}{12}}{\frac{-12}{5} - \frac{13}{5}} = \frac{-\left(\frac{5}{12} + \frac{13}{12}\right)}{-\left(\frac{12}{5} + \frac{13}{5}\right)}$

$= \frac{\frac{5+13}{12}}{\frac{12+13}{5}} = \frac{\frac{18}{12}}{\frac{25}{5}} = \frac{18}{12} \times \frac{5}{25}$

$= \frac{90}{300} = \frac{3}{10} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{\tan \theta + \sec(-\theta)}{\cot \theta + \csc(-\theta)} = \frac{3}{10}$ (দেখানো হলো)

১২. $M = \sin \theta$ এবং $N = \cos \theta$

[রাজশাহী বোর্ড-২০২৩]

(ক) $\cos\left(-\frac{25\pi}{3}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $12M^2 + 23N = 22$ এবং $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ হলে $\tan \theta$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $\frac{2}{N^2} + \frac{M^2}{N^2} = 3$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর।

১২ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) প্রদত্ত রাশি $= \cos\left(-\frac{25\pi}{3}\right)$

$= \cos\left(\frac{25\pi}{3}\right)$ [$\because \cos(-\theta) = \cos \theta$]

$= \cos\left(\frac{24\pi + \pi}{3}\right)$

$= \cos\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(16 \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

$= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে, $M = \sin \theta$ এবং $N = \cos \theta$

আবার, $12M^2 + 23N = 22$

বা, $12 \sin^2 \theta + 23 \cos \theta = 22$

$$\text{বা, } 12(1 - \cos^2 \theta) + 23\cos \theta - 22 = 0$$

$$\text{বা, } 12 - 12\cos^2 \theta + 23\cos \theta - 22 = 0$$

$$\text{বা, } 12\cos^2 \theta - 23\cos \theta + 10 = 0$$

$$\text{বা, } 12\cos^2 \theta - 15\cos \theta - 8\cos \theta + 10 = 0$$

$$\text{বা, } 3\cos \theta(4\cos \theta - 5) - 2(4\cos \theta - 5) = 0$$

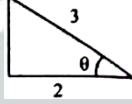
$$\therefore (4\cos \theta - 5)(3\cos \theta - 2) = 0$$

$$\text{হয়, } 4\cos \theta - 5 = 0$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \frac{5}{4}, \text{ যা গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ } -1 \leq \cos \theta \leq 1$$

$$\text{অথবা, } 3\cos \theta - 2 = 0 \quad \sqrt{3^2 - 2^2}$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \frac{2}{3} = \sqrt{5}$$



$$\therefore \tan \theta = -\frac{\sqrt{5}}{2} \quad [\because \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi \text{ সীমার মধ্যে } \tan \theta \text{ ঋণাত্মক}]$$

$$\text{নির্ণেয় মান} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ (Ans.)}$$

$$(গ) \text{ প্রদত্ত রাশি, } \frac{2}{N^2} + \frac{M^2}{N^2} = 3$$

$$\text{বা, } \frac{2+M^2}{N^2} = 3$$

$$\text{বা, } 2 + M^2 = 3N^2$$

$$\text{বা, } 2 + \sin^2 \theta = 3\cos^2 \theta$$

$$\text{বা, } 2 + \sin^2 \theta = 3 - 3\sin^2 \theta$$

$$\text{বা, } 4\sin^2 \theta = 1$$

$$\text{বা, } \sin^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin \theta = \pm \frac{1}{2}$$

ধনাত্মক মান নিয়ে পাই,

$$\sin \theta = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore 0 = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

ঋণাত্মক মান নিয়ে পাই,

$$\sin \theta = -\frac{1}{2} = -\sin \frac{\pi}{6} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin \frac{7\pi}{6} = \sin \frac{11\pi}{6}$$

$$\therefore \theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান, } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \text{ (Ans.)}$$

$$১৩. (i) \tan \alpha + \sec \alpha = A$$

$$(ii) F(\alpha) = \cos \alpha$$

[দিনাজপুর বোর্ড-২০২৩]

$$(ক) \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{7}} \text{ হলে, } \cot \beta \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

$$(খ) F\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{y^2-1}{y^2+1} \text{ হলে প্রমাণ কর যে, } y^2 - A^2 = 0$$

$$(গ) A = \sqrt{3} \text{ হলে, } \alpha \text{ এর মান নির্ণয় কর। যখন } 0 \leq \alpha \leq 2\pi$$

১৩ নং প্রশ্নের উত্তর

$$(ক) \text{ দেওয়া আছে, } \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\text{আমরা জানি, } \sin \beta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \beta}$$

$$= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{4}{7}} = \pm \sqrt{\frac{7-4}{7}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

$$\therefore \cot \beta = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\frac{2}{\sqrt{7}}}{\pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ (Ans.)}$$

$$(খ) \text{ দেওয়া আছে, } \tan \alpha + \sec \alpha = A$$

$$\text{এবং } F(\alpha) = \cos \alpha$$

$$\therefore F\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\therefore F\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{y^2-1}{y^2+1} \text{ হলে,}$$

$$\sin \alpha = \frac{y^2-1}{y^2+1} \text{ বা, } \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{y^2+1}{y^2-1}$$

$$\text{বা, } \frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha} = \frac{y^2+1+y^2-1}{y^2+1-y^2+1} = \frac{2y^2}{2} \text{ [যোজন-বিয়োজন করে]}$$

$$\text{বা, } \frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha} = y^2 \text{ বা, } \frac{1+\sin \alpha}{\frac{\cos \alpha}{1-\sin \alpha}} = y^2 \text{ বা, } \frac{\sec \alpha + \tan \alpha}{\sec \alpha - \tan \alpha} = y^2$$

$$\text{বা, } \frac{(\sec \alpha + \tan \alpha)(\sec \alpha + \tan \alpha)}{(\sec \alpha - \tan \alpha)(\sec \alpha + \tan \alpha)} = y^2$$

$$\text{বা, } \frac{(\sec \alpha + \tan \alpha)^2}{\sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha} = y^2$$

$$\text{বা, } \frac{A^2}{1} = y^2 \quad [\because \sec \alpha + \tan \alpha = A]$$

$$\text{বা, } y^2 = A^2$$

$$\therefore y^2 - A^2 = 0 \text{ (প্রমাণিত)}$$

$$(গ) \text{ দেওয়া আছে, } R = \tan \alpha + \sec \alpha$$

$$R = \sqrt{3} \text{ হলে,}$$

$$\therefore \tan \alpha + \sec \alpha = \sqrt{3} \text{ বা, } \sec \alpha = \sqrt{3} - \tan \alpha$$

$$\text{বা, } \sec^2 \alpha = (\sqrt{3} - \tan \alpha)^2 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } 1 + \tan^2 \alpha = 3 - 2\sqrt{3}\tan \alpha + \tan^2 \alpha$$

$$\text{বা, } 2\sqrt{3}\tan \alpha = 2$$

$$\text{বা, } \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \frac{\pi}{6} = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) \quad [\because 0 \leq \alpha \leq 2\pi]$$

$$\text{বা, } \tan \alpha = \tan \frac{\pi}{6} = \tan \frac{7\pi}{6} \therefore \alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \text{ হলে, } \tan \frac{\pi}{6} + \sec \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\text{এবং } \alpha = \frac{7\pi}{6} \text{ হলে,}$$

$$\tan \frac{7\pi}{6} + \sec \frac{7\pi}{6} = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) + \sec \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \tan \frac{\pi}{6} - \sec \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \alpha = \frac{7\pi}{6} \text{ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ (Ans.)}$$

$$১৪. A = \sec \theta + \tan \theta \text{ এবং } B = \sec \theta - \tan \theta$$

[কুমিল্লা বোর্ড-২০২৩]

$$(ক) \tan \left(-\frac{25\pi}{6} \right) \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

$$(খ) \text{ প্রমাণ কর যে, } \frac{A-1}{1-B} = \frac{\cos \theta}{1-\sin \theta}$$

$$(গ) B = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ এবং } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ হলে, } \theta \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

১৪ নং প্রশ্নের উত্তর

$$(ক) \tan \left(-\frac{25\pi}{6} \right) = -\tan \frac{25\pi}{6}$$

$$= -\tan \left(4\pi + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= -\tan \frac{\pi}{6}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (Ans.)}$$

$$(খ) \text{ দেওয়া আছে, } A = \sec \theta + \tan \theta, B = \sec \theta - \tan \theta$$

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{A-1}{1-B}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sec \theta + \tan \theta - 1}{1 - \sec \theta + \tan \theta} \\
 &= \frac{\sec \theta + \tan \theta - (\sec^2 \theta - \tan^2 \theta)}{1 - \sec \theta + \tan \theta} \\
 &= \frac{\sec \theta + \tan \theta - (\sec \theta + \tan \theta)(\sec \theta - \tan \theta)}{1 - \sec \theta + \tan \theta} \\
 &= \frac{(\sec \theta + \tan \theta)(1 - \sec \theta + \tan \theta)}{1 - \sec \theta + \tan \theta} \\
 &= \sec \theta + \tan \theta \\
 &= \frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\
 &= \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \\
 &= \frac{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{\cos \theta(1 - \sin \theta)} \\
 &= \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta(1 - \sin \theta)} \\
 &= \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta(1 - \sin \theta)} \\
 &= \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \\
 &= \text{ডানপক্ষ}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{A-1}{1-B} = \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \quad (\text{প্রমাণিত})$$

(গ) দেওয়া আছে, $B = \sec \theta - \tan \theta$ এবং $B = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\therefore \sec \theta - \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \sqrt{3} - \sqrt{3} \sin \theta = \cos \theta$$

$$\text{বা, } (\sqrt{3} - \sqrt{3} \sin \theta)^2 = (\cos \theta)^2 \quad [\text{উভয়পক্ষকে বর্গ করে}]$$

$$\text{বা, } 3 + 3 \sin^2 \theta - 6 \sin \theta = \cos^2 \theta$$

$$\text{বা, } 3 + 3 \sin^2 \theta - 6 \sin \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$[\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1]$$

$$\text{বা, } 3 \sin^2 \theta + \sin^2 \theta - 6 \sin \theta + 3 - 1 = 0$$

$$\text{বা, } 4 \sin^2 \theta - 6 \sin \theta + 2 = 0$$

$$\text{বা, } 2(2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta + 1) = 0$$

$$\text{বা, } 2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta + 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \sin^2 \theta - 2 \sin \theta - \sin \theta + 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \sin \theta (\sin \theta - 1) - 1(\sin \theta - 1) = 0$$

$$\therefore (\sin \theta - 1)(2 \sin \theta - 1) = 0$$

$$\text{হয়, } \sin \theta - 1 = 0$$

$$\text{অথবা, } 2 \sin \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } \sin \theta = 1$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{কিন্তু } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \theta \text{ এর মান } \frac{\pi}{6} \quad (\text{Ans.})$$

১৫. $a = \sec \theta - \tan \theta$ যেখানে $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

[চট্টগ্রাম বোর্ড-২০২৩]

(ক) 10 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট বৃত্তের যে চাপ কেন্দ্রে 32° কোণ উৎপন্ন করে, তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta = \frac{1-a}{1+a}$

(গ) $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর।

১৫ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) বৃত্তের ব্যাস = 10 সে.মি.

$$\therefore \text{ব্যাসার্ধ, } r = \frac{10}{2} \text{ সে.মি.} = 5 \text{ সে.মি.}$$

$$\text{উৎপন্ন কোণ, } \theta = 32^\circ = 32 \times \frac{\pi}{180} \text{ রেডিয়ান}$$

$$= 0.5585 \text{ রেডিয়ান}$$

$$\therefore \text{চাপের দৈর্ঘ্য, } s = r\theta = 5 \times 0.5585 \text{ সে.মি.}$$

$$= 2.7925 \text{ সে.মি.} \quad (\text{Ans.})$$

(খ) দেওয়া আছে, $a = \sec \theta - \tan \theta$

$$\text{ডান পক্ষ} = \frac{1-a}{1+a}$$

$$= \frac{1 - (\sec \theta - \tan \theta)}{1 + (\sec \theta - \tan \theta)}$$

$$= \frac{1 - \sec \theta + \tan \theta}{1 + \sec \theta - \tan \theta}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1 + \frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}$$

$$= \frac{\frac{\cos \theta - 1 + \sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\cos \theta + 1 - \sin \theta}{\cos \theta}}$$

$$= \frac{\cos \theta - 1 + \sin \theta}{\cos \theta + 1 - \sin \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta (\cot \theta - \operatorname{cosec} \theta + 1)}{\sin \theta (\cot \theta + \operatorname{cosec} \theta - 1)}$$

$$= \frac{1 - (\csc \theta - \cot \theta)}{\cos \sec \theta + \cot \theta - 1}$$

$$= \frac{(\csc^2 \theta - \cot^2 \theta) - (\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)}{(\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta - 1)}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta - 1}{(\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta - 1)}$$

$$= \operatorname{cosec} \theta - \cot \theta = \text{বামপক্ষ}$$

$$\therefore \operatorname{cosec} \theta - \cot \theta = \frac{1-a}{1+a} \quad (\text{প্রমাণিত})$$

(গ) দেওয়া আছে, $B = \sec \theta - \tan \theta$ এবং $B = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\therefore \sec \theta - \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \sqrt{3} - \sqrt{3} \sin \theta = \cos \theta$$

$$\text{বা, } (\sqrt{3} - \sqrt{3} \sin \theta)^2 = (\cos \theta)^2 \quad [\text{উভয়পক্ষকে বর্গ করে}]$$

$$\text{বা, } 3 + 3 \sin^2 \theta - 6 \sin \theta = \cos^2 \theta$$

$$\text{বা, } 3 + 3 \sin^2 \theta - 6 \sin \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$[\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1]$$

$$\text{বা, } 3 \sin^2 \theta + \sin^2 \theta - 6 \sin \theta + 3 - 1 = 0$$

$$\text{বা, } 4 \sin^2 \theta - 6 \sin \theta + 2 = 0$$

$$\text{বা, } 2(2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta + 1) = 0$$

$$\text{বা, } 2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta + 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \sin^2 \theta - 2 \sin \theta - \sin \theta + 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \sin \theta (\sin \theta - 1) - 1(\sin \theta - 1) = 0$$

$$\therefore (\sin \theta - 1)(2 \sin \theta - 1) = 0$$

$$\text{হয়, } \sin \theta - 1 = 0$$

$$\text{অথবা, } 2 \sin \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } \sin \theta = 1$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{কিন্তু } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \theta \text{ এর মান } \frac{\pi}{6} \quad (\text{Ans.})$$

১৬. $\cot \theta + \operatorname{cosec} \theta = P$ এবং $x \cos A - y \sin A = z$

[সিলেট বোর্ড-২০২৩]

(ক) $40^\circ 21' 20''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

(খ) $P = 2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{\tan \theta + \sec \theta - 1}{\tan \theta - \sec \theta + 1} = \tan \theta + \sec \theta$

(গ) যদি $x = 3, y = -2\sin A$ এবং $z = 0$ হয়, তবে A এর মান নির্ণয় কর। যেখানে $0 < A < 2\pi$

১৬ নং প্রশ্নের উত্তর

$$(ক) 40^\circ 21' 20'' = 40^\circ + \left(\frac{21}{60}\right)^\circ + \left(\frac{20}{3600}\right)^\circ$$

$$= \left(40 + \frac{7}{20} + \frac{1}{180}\right)^\circ$$

$$= \left(\frac{7200+63+1}{180}\right)^\circ$$

$$= \left(\frac{7264}{180}\right)^\circ = \left(\frac{1816}{45}\right)^\circ$$

$$= \frac{1816}{45} \times \frac{\pi}{180} \text{ রেডিয়ান}$$

$$= 0.7043 \text{ রেডিয়ান (প্রায়) (Ans.)}$$

(খ) দেওয়া আছে, $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = P$

$$\text{বা, } \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta} = 2 \quad [\because P = 2]$$

$$\text{বা, } \frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} = 2$$

$$\text{বা, } \frac{(\cos\theta + 1)^2}{\sin^2\theta} = 4 \quad [\text{উভয় পক্ষকে বর্গ করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{(1 + \cos\theta)^2}{1 - \cos^2\theta} = 4$$

$$\text{বা, } \frac{(1 + \cos\theta)(1 + \cos\theta)}{(1 + \cos\theta)(1 - \cos\theta)} = 4$$

$$\text{বা, } \frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} = 4$$

$$\text{বা, } \frac{1 + \cos\theta + 1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta - 1 + \cos\theta} = \frac{4 + 1}{4 - 1} \quad [\text{যোজন-বিয়োজন করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{2}{2\cos\theta} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

$$\text{এবং } \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{5}{3} - 1}{\frac{4}{3} - \frac{5}{3} + 1}$$

$$= \frac{\frac{4+5-3}{3}}{\frac{4-5+3}{3}} = \frac{6}{3}$$

$$= \frac{6}{3} \times \frac{3}{2} = 3$$

$$\text{ডান পক্ষ} = \tan\theta + \sec\theta = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{4+5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\therefore \frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \tan\theta + \sec\theta \quad (\text{প্রমাণিত})$$

(গ) দেওয়া আছে, $x\cos A - y\sin A = z$

$$x = 3, y = -2\sin A \text{ এবং } z = 0 \text{ হলে,}$$

$$3\cos A - (-2\sin A)\sin A = 0$$

$$\text{বা, } 3\cos A + 2\sin^2 A = 0$$

$$\text{বা, } 3\cos A + 2(1 - \cos^2 A) = 0$$

$$\text{বা, } 3\cos A + 2 - 2\cos^2 A = 0$$

$$\text{বা, } 2\cos^2 A - 3\cos A - 2 = 0$$

$$\text{বা, } 2\cos^2 A - 4\cos A + \cos A - 2 = 0$$

$$\text{বা, } 2\cos A(\cos A - 2) + 1(\cos A - 2) = 0$$

$$\therefore (\cos A - 2)(2\cos A + 1) = 0$$

$$\text{হয় } \cos A - 2 = 0$$

$$\therefore \cos A = 2 \quad [\text{গ্রহণযোগ্য নয় কারণ}]$$

$$\text{অথবা, } 2\cos A + 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2\cos A = -1$$

$$\text{বা, } \cos A = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3}$$

$$\therefore A = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \quad (\text{Ans.})$$

$$১৭. A = 7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta$$

$$B = 15\cos^2\alpha + 2\sin\alpha \text{ যখন } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

[যশোর বোর্ড-২০২০]

$$(ক) 1.532 \text{ রেডিয়ানকে ডিগ্রিতে প্রকাশ কর।}$$

$$(খ) A = 4 \text{ হলে, দেখাও যে, } \tan\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(গ) \alpha \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

১৭ নং প্রশ্নের উত্তর

$$(ক) \text{ প্রদত্ত কোণ, } = 1.532^C$$

$$= \left(1.532 \times \frac{180^\circ}{\pi}\right)^\circ \quad [\because 1 \text{ রেডিয়ান} = \frac{180^\circ}{\pi}]$$

$$= 87.78$$

$$= 87^\circ(0.78 \times 60)'$$

$$= 87^\circ 46.8'$$

$$= 87^\circ 46'(0.8 \times 60)''$$

$$= 87^\circ 46' 48'' \quad (\text{Ans.})$$

$$(খ) \text{ দেওয়া আছে, } A = 7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta$$

$$A = 4 \text{ হলে, } 7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$$

$$\text{বা, } \frac{7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{4}{\cos^2\theta}$$

$$\text{বা, } \frac{7\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{3\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = 4 \times \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\text{বা, } 7\tan^2\theta + 3 = 4\sec^2\theta$$

$$\text{বা, } 7\tan^2\theta + 3 = 4(1 + \tan^2\theta)$$

$$\text{বা, } 7\tan^2\theta - 4\tan^2\theta = 4 - 3$$

$$\text{বা, } 3\tan^2\theta = 1$$

$$\text{বা, } \tan^2\theta = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \tan\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{দেখানো হলো})$$

(গ) প্রশ্নটির তথ্য অসম্পূর্ণ। তাই প্রশ্নে $B = 7$ বিবেচনা করে $\alpha, \tan\alpha$ এবং $\cot\alpha$ এর মান নিচে নির্ণয় করে দেখানো হলো।

$$\text{দেওয়া আছে, } B = 15\cos^2\alpha + 2\sin\alpha$$

$$B = 7 \text{ হলে, } 15\cos^2\alpha + 2\sin\alpha = 7; \quad \left[-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{বা, } 15(1 - \sin^2\alpha) + 2\sin\alpha = 7$$

$$\text{বা, } 15 - 15\sin^2\alpha + 2\sin\alpha = 7$$

$$\text{বা, } 15\sin^2\alpha - 2\sin\alpha - 8 = 0$$

$$\text{বা, } 15\sin^2\alpha - 12\sin\alpha + 10\sin\alpha - 8 = 0$$

$$\text{বা, } 3\sin\alpha(5\sin\alpha - 4) + 2(5\sin\alpha - 4) = 0$$

$$\therefore (5\sin\alpha - 4)(3\sin\alpha + 2) = 0$$

$$\text{হয়, } 5\sin\alpha - 4 = 0$$

$$\text{অথবা, } 3\sin\alpha + 2 = 0$$

$$\text{বা, } \sin\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\text{বা, } \sin\alpha = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore \alpha = \sin^{-1} \frac{4}{5} = 53.13^\circ$$

$$\therefore \alpha = \sin^{-1} \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= -41.81^\circ$$

$\sin\alpha$ এর উভয়মান গ্রহণযোগ্য। কেননা $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

আবার, একই কারণে $\cos\alpha$ এর শুধু ধনাত্মক মান গ্রহণযোগ্য।

$$\therefore \sin\alpha = \frac{4}{5} \text{ হলে, } \cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\alpha = -\frac{2}{3} \text{ হলে, } = \sqrt{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\therefore \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} \quad [\text{যখন, } \sin\alpha = \frac{4}{5}]$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{এবং } \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\text{আবার, } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \text{ [যখন, } \sin \alpha = -\frac{2}{3}]$$

$$= -\frac{2}{3} \times \frac{3}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{এবং } \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{-\frac{2}{\sqrt{5}}} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ (Ans.)}$$

$$18. x = \sin \theta \text{ এবং } y = \cos \theta$$

[বরিশাল বোর্ড-২০২৩]

$$(ক) \text{ দেখাও যে, } \operatorname{cosec}^4 \theta - \operatorname{cosec}^2 \theta = \cot^4 \theta + \cot^2 \theta$$

$$(খ) 15x^2 + 2y = 7 \text{ এবং } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ হলে, } \tan \theta \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

$$(গ) 2(y^2 - x^2) - 1 = 0 \text{ হলে } \theta \text{ এর মান নির্ণয় কর; যখন } 0 < \theta < 2\pi$$

১৮ নং প্রশ্নের উত্তর

$$(ক) \text{ বামপক্ষ} = \operatorname{cosec}^4 \theta - \operatorname{cosec}^2 \theta$$

$$= \operatorname{cosec}^2 \theta (\operatorname{cosec}^2 \theta - 1)$$

$$= (1 + \cot^2 \theta) \cot^2 \theta$$

$$= \cot^4 \theta + \cot^2 \theta$$

= ডানপক্ষ

$$\therefore \operatorname{cosec}^4 \theta - \operatorname{cosec}^2 \theta = \cot^4 \theta + \cot^2 \theta \text{ (দেখানো হলো)}$$

$$(খ) \text{ দেওয়া আছে, } x = \sin \theta, y = \cos \theta$$

$$\text{এবং } 15x^2 + 2y = 7$$

$$\text{বা, } 15\sin^2 \theta + 2\cos \theta = 7$$

$$\text{বা, } 15(1 - \cos^2 \theta) + 2\cos \theta - 7 = 0$$

$$\text{বা, } 15 - 15\cos^2 \theta + 2\cos \theta - 7 = 0$$

$$\text{বা, } 15\cos^2 \theta - 2\cos \theta - 8 = 0$$

$$\text{বা, } 15\cos^2 \theta - 12\cos \theta + 10\cos \theta - 8 = 0$$

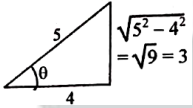
$$\text{বা, } 3\cos \theta (5\cos \theta - 4) + 2(5\cos \theta - 4) = 0$$

$$\therefore (5\cos \theta - 4)(3\cos \theta + 2) = 0$$

$$\text{হয়, } 5\cos \theta - 4 = 0$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \tan \theta = \pm \frac{3}{4} \text{ [} \because -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{]}$$



$$\text{অথবা, } 3\cos \theta + 2 = 0$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{2}{3} \text{ যা গ্রহণযোগ্য নয়।}$$

কারণ, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ সীমার মধ্যে $\cos \theta$ এর মান সর্বদা ধনাত্মক।

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান, } \tan \theta = \pm \frac{3}{4} \text{ (Ans.)}$$

$$(গ) \text{ দেওয়া আছে, } x = \sin \theta \text{ ও } y = \cos \theta$$

$$\text{এবং } 2(y^2 - x^2) - 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2(\cos^2 \theta - 1 + \cos^2 \theta) - 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2(2\cos^2 \theta - 1) - 1 = 0$$

$$\text{বা, } 4\cos^2 \theta - 2 = 1$$

$$\text{বা, } 4\cos^2 \theta = 3$$

$$\therefore \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(+) চিহ্ন নিয়ে

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} = \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

(-) চিহ্ন নিয়ে,

$$\cos \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\cos \frac{\pi}{6}$$

$$= \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore \theta = \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান, } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \text{ (Ans.)}$$

১৯. একটি পাহাড়ের উচ্চতা ৪.৮৪৮ কিলোমিটার। পাহাড়টির শীর্ষবিন্দু দূরবর্তী কোনো একটি স্থানে ২.২৫° কোণ উৎপন্ন করে। রতন সকাল ১০টা ৩৫ মিনিটে এই স্থান থেকে পাহাড়টি দেখার চেষ্টা করছিল।

[ঢাকা বোর্ড-২০২২]

$$(ক) \tan \left(\frac{7\pi}{6}\right) \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

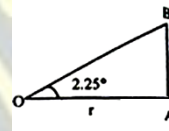
$$(খ) \text{ পাহাড় থেকে এই স্থানটির দূরত্ব নির্ণয় কর।}$$

$$(গ) \text{ উক্ত সময়ে ঘড়ির ঘন্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার অন্তর্গত কোণের মানকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।}$$

১৯ নং প্রশ্নের উত্তর

$$(ক) \tan \left(\frac{7\pi}{6}\right) = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (Ans.)}$$

$$(খ) \text{ মনে করি, AB পাহাড়টি পাদবিন্দু A থেকে r কিলোমিটার দূরে O বিন্দুতে } 2.25^\circ \text{ কোণ উৎপন্ন করে। পাহাড়ের উচ্চতা, AB = চাপ S}$$



$$\therefore AB = 8.848 \text{ কি.মি.}$$

$$\text{এখন, } S = r\theta \text{ বা, } S = r \cdot \frac{2.25 \times \pi}{180}$$

$$\text{বা, } 8.848 = r \cdot \frac{2.25\pi}{180} \therefore r = 225.31$$

$$\therefore \text{পাহাড় থেকে এই স্থানটির দূরত্ব } 225.31 \text{ (প্রায়) কিলোমিটার। (Ans.)}$$

(গ)



আমরা জানি,

ঘড়িতে সর্বমোট ১২টি ঘন্টার দাগ কাঁটা থাকে।

$$\therefore \text{ঘন্টার কাঁটার ক্ষেত্রে ১২ ঘন্টা কেন্দ্রে উৎপন্ন করে } = 360^\circ$$

$$\therefore \text{ঘন্টার কাঁটার ক্ষেত্রে ১ ঘন্টা কেন্দ্রে উৎপন্ন করে } = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

$$\therefore \text{ঘন্টার কাঁটার ক্ষেত্রে ১ মিনিটে কেন্দ্রে উৎপন্ন করে } = \frac{30^\circ}{60} = 0.5^\circ$$

$$[\because 1 \text{ ঘন্টা} = 60 \text{ মি.}]$$

$$\therefore \text{ঘন্টার কাঁটার ক্ষেত্রে ৩৫ মিনিট কেন্দ্রে উৎপন্ন করে } = 0.5 \times 35 = 17.5^\circ$$

$$\therefore \text{সকাল ১০:৩৫ টায় ঘড়ির ঘন্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার অন্তর্গত কোণ}$$

$$= 3 \times 30^\circ + 17.5^\circ = 90^\circ + 17.5^\circ = 107.5^\circ$$

$$= \frac{107.5}{180} \times \pi = 1.876 \text{ রেডিয়ান (প্রায়) (Ans.)}$$

$$20. \cot \alpha \operatorname{cosec} \alpha = P \text{ এবং } 5 \cot \theta = 12$$

[ময়মনসিংহ বোর্ড-২০২২]

$$(ক) \text{ কোনো ত্রিভুজের কোণগুলোর অনুপাত } 2:5:8 \text{ হলে, বৃহত্তম কোণের বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর।}$$

$$(খ) P = 2\sqrt{3} \text{ হলে, } \alpha \text{ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$(গ) \sin \theta \text{ ঋণাত্মক হলে প্রমাণ কর যে, } \frac{\cos \theta - \sin(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan \theta} = \frac{51}{26}$$

২০ নং প্রশ্নের উত্তর

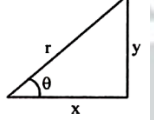
(ক) মনে করি, কোণ তিনটি যথাক্রমে $2x$, $5x$ ও $8x$ রেডিয়ান
 $\therefore 2x + 5x + 8x = \pi$ [ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি π রেডিয়ান]
 বা, $15x = \pi$
 বা, $x = \frac{\pi}{15}$
 $\therefore 8x = \frac{8\pi}{15}$
 \therefore ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণের বৃত্তীয় মান $\frac{8\pi}{15}$ রেডিয়ান (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে, $\cot \alpha \operatorname{cosec} \alpha = P$ এবং $P = 2\sqrt{3}$
 $\therefore \cot \alpha \operatorname{cosec} \alpha = 2\sqrt{3}$
 বা, $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = 2\sqrt{3}$
 বা, $\cos \alpha = 2\sqrt{3} \sin^2 \alpha$
 বা, $\cos \alpha = 2\sqrt{3} \cdot (1 - \cos^2 \alpha)$
 বা, $\cos \alpha = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \cos^2 \alpha$
 বা, $2\sqrt{3} \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 2\sqrt{3} = 0$
 বা, $2\sqrt{3} \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha - 3 \cos \alpha - 2\sqrt{3} = 0$
 বা, $2 \cos \alpha (\sqrt{3} \cos \alpha + 2) - \sqrt{3} (\sqrt{3} \cos \alpha + 2) = 0$
 $\therefore (\sqrt{3} \cos \alpha + 2)(2 \cos \alpha - \sqrt{3}) = 0$
 হয়, $\sqrt{3} \cos \alpha + 2 = 0$ অথবা, $2 \cos \alpha - \sqrt{3} = 0$
 $\therefore \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\therefore \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$
 এই মান গ্রহণযোগ্য নয়। $\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$ (Ans.)

কারণ $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

(গ) দেওয়া আছে, $5 \cot \theta = 12$
 বা, $\cot \theta = \frac{12}{5} \therefore \tan \theta = \frac{5}{12}$
 $\tan \theta$ ধনাত্মক এবং $\sin \theta$ ঋণাত্মক হওয়ায় θ কোণের অবস্থান তৃতীয় চতুর্ভাগে।
 $\therefore \cos \theta$ এর মান ঋণাত্মক এবং $\sec \theta$ মান ঋণাত্মক।

এখন, $\tan \theta = \frac{5}{12} = \frac{y}{x}$



$\therefore x = 12, y = 5$

$\therefore r = \sqrt{(12)^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

$\therefore \sin \theta = \frac{-y}{r} = \frac{-5}{13}, \cos \theta = \frac{-x}{r} = \frac{-12}{13}$

এবং $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{13}{-12}$

এখন, $\frac{\cos \theta - \sin(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan \theta} = \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\sec \theta + \tan \theta}$ [$\because \sin(-\theta) = -\sin \theta$]

এবং $\sec(-\theta) = \sec \theta$

$= \frac{-\frac{12}{13} - \frac{5}{13}}{\frac{13}{-12} + \frac{5}{12}} = \frac{-\frac{17}{13}}{\frac{-13+5}{12}} = \frac{-17}{13} \times \left(-\frac{12}{8}\right) = \frac{51}{26}$

$\therefore \frac{\cos \theta - \sin(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan \theta} = \frac{51}{26}$ (প্রমাণিত)

২১. $B = \cot \theta + \operatorname{cosec} \theta$

[রাজশাহী বোর্ড-২০২২]

(ক) $\sin(-750^\circ)$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $B = x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\sin \theta = \frac{2x}{x^2+1}$

(গ) $B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর, যেখানে $0 < \theta \leq 2\pi$

২১ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) $\sin(-750^\circ) = -\sin 750^\circ = -\sin(8 \times 90^\circ + 30^\circ)$

$= -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$ (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে, $B = \cot \theta + \operatorname{cosec} \theta$

$\therefore B = x$ হলে, $\cot \theta + \operatorname{cosec} \theta = x$

দেওয়া আছে, $\cot \theta + \operatorname{cosec} \theta = x$

বা, $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{\sin \theta} = x$ বা, $\frac{1+\cos \theta}{\sin \theta} = x$

বা, $\frac{(1+\cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} = x^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{(1+\cos \theta)(1+\cos \theta)}{1-\cos^2 \theta} = x^2$

বা, $\frac{(1+\cos \theta)(1+\cos \theta)}{(1-\cos \theta)(1+\cos \theta)} = x^2$

বা, $\frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta} = x^2$

বা, $\frac{1+\cos \theta+1-\cos \theta}{1+\cos \theta-1+\cos \theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\cos \theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ বা, $\cos \theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

বা, $\cos \theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ বা, $1 - \sin^2 \theta = \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}$

বা, $1 - \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2} = \sin^2 \theta$ বা, $\sin^2 \theta = \frac{(x^2+1)^2 - (x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}$

বা, $\sin^2 \theta = \frac{4x^2}{(x^2+1)^2}$

$\therefore \sin \theta = \frac{2x}{x^2+1}$ [বর্গমূল করে] (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে, $B = \cot \theta + \operatorname{cosec} \theta$

$B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\cot \theta + \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (i)

বা, $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ বা, $\frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{(1+\cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$ বা, $\frac{(1+\cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{(1+\cos \theta)^2}{1-\cos^2 \theta} = \frac{1}{3}$ বা, $\frac{(1+\cos \theta)(1+\cos \theta)}{(1+\cos \theta)(1-\cos \theta)} = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta} = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{1+\cos \theta+1-\cos \theta}{1+\cos \theta-1+\cos \theta} = \frac{1+3}{1-3}$

বা, $\frac{2}{2\cos \theta} = \frac{4}{-2}$ বা, $\frac{1}{\cos \theta} = -2$

বা, $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ বা, $\cos \theta = -\cos \frac{\pi}{3}$

বা, $\cos \theta = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

বা, $\cos \theta = \cos \frac{2\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

কিন্তু $\theta = \frac{4\pi}{3}$ গ্রহণযোগ্য নয়।

কেননা $\theta = \frac{4\pi}{3}$, (i) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে না।

\therefore নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (Ans.)

২২. $p \sin^2 \theta + q \cos^2 \theta = 8$

[দিনাজপুর বোর্ড-২০২২]

(ক) $\tan \theta = -\sqrt{3}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় করো; যেখানে, $0 < \theta < \pi$

(খ) $p = 11$ এবং $q = 7$ হলে, দেখাও যে, $\cot \theta = \pm \sqrt{3}$

(গ) $p = 9$ এবং $q = 5$ হলে, θ এর সম্ভাব্য মানসমূহ নির্ণয় করো: যেখানে $0 < \theta < 2\pi$

২২ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\tan \theta = -\sqrt{3}$

বা, $\tan \theta = -\tan \left(\frac{\pi}{3}\right)$ বা, $\tan \theta = \tan \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

বা, $\tan \theta = \tan \left(\frac{2\pi}{3}\right) \therefore \theta = \frac{2\pi}{3}$ (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে, $p \sin^2 \theta + q \cos^2 \theta = 8$; $p = 11$ এবং $q = 7$

$\therefore 11 \sin^2 \theta + 7 \cos^2 \theta = 8$

বা, $11 \sin^2 \theta + 7(1 - \sin^2 \theta) = 8$

বা, $11 \sin^2 \theta + 7 - 7 \sin^2 \theta = 8$

বা, $4 \sin^2 \theta = 1$ বা, $\frac{4}{\operatorname{cosec}^2 \theta} = 1$

বা, $\frac{4}{1+\cot^2 \theta} = 1$ বা, $4 = 1 + \cot^2 \theta$

বা, $\cot^2 \theta = 3 \therefore \cot \theta = \pm \sqrt{3}$ (দেখানো হলো)

(গ) $p = 9$ এবং $q = 5$ হলে, প্রদত্ত সমীকরণ:

$9 \sin^2 \theta + 5 \cos^2 \theta = 8$

বা, $9 \sin^2 \theta + 5(1 - \sin^2 \theta) = 8$

বা, $9 \sin^2 \theta + 5 - 5 \sin^2 \theta = 8$ বা, $4 \sin^2 \theta = 3$

বা, $\sin^2 \theta = \frac{3}{4}$ বা, $\sin \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ হলে,

$\sin \theta = \sin \frac{\pi}{3} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

আবার, $\sin \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ হলে,

$\sin = -\sin \left(\frac{\pi}{3} \right) = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{4\pi}{3}$

$= \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{5\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

সুতরাং $0 < \theta < 2\pi$ সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য মানসমূহ $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ (Ans.)

২৩. $7 \cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta = P$ এবং $A = \sec \theta + \tan \theta$

[কুমিল্লা বোর্ড-২০২২]

(ক) $33^\circ 12' 36''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

(খ) $P = 4$ হলে, $\cot \theta$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $A = \sqrt{3}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর, যখন $0 \leq \theta \leq 2\pi$

২৩ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) $33^\circ 12' 36'' = 33^\circ \left(12 \frac{36}{60} \right)' = 33^\circ \left(\frac{756}{60} \right)' = \left(33 \frac{756}{60 \times 60} \right)^\circ$

$= \left(\frac{119556}{3600} \right)^\circ = \left(\frac{119556}{3600} \times \frac{\pi}{180} \right)$

$= 0.5796$ রেডিয়ান (প্রায়) (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে, $7 \cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta = P = 4$

বা, $7 \cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta - 4 = 0$

বা, $7(1 - \sin^2 \theta) + 3 \sin^2 \theta - 4 = 0$

বা, $7 - 7 \sin^2 \theta + 3 \sin^2 \theta - 4 = 0$

বা, $4 \sin^2 \theta = 3$ বা, $\sin^2 \theta = \frac{3}{4}$

বা, $\operatorname{cosec}^2 \theta = \frac{4}{3}$ বা, $1 + \cot^2 \theta = \frac{4}{3}$

বা, $\cot^2 \theta = \frac{1}{3} \therefore \cot \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ (Ans.)

(গ) দেওয়া আছে, $R = \tan \alpha + \sec \alpha$

$R = \sqrt{3}$ হলে,

$\therefore \tan \alpha + \sec \alpha = \sqrt{3}$ বা, $\sec \alpha = \sqrt{3} - \tan \alpha$

বা, $\sec^2 \alpha = (\sqrt{3} - \tan \alpha)^2$ [বর্গ করে]

বা, $1 + \tan^2 \alpha = 3 - 2\sqrt{3} \tan \alpha + \tan^2 \alpha$

বা, $2\sqrt{3} \tan \alpha = 2$

বা, $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \frac{\pi}{6} = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) [\because 0 \leq \alpha \leq 2\pi]$

বা, $\tan \alpha = \tan \frac{\pi}{6} = \tan \frac{7\pi}{6} \therefore \alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

$\alpha = \frac{\pi}{6}$ হলে, $\tan \frac{\pi}{6} + \sec \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

এবং $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ হলে,

$\tan \frac{7\pi}{6} + \sec \frac{7\pi}{6} = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) + \sec \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right)$

$= \tan \frac{\pi}{6} - \sec \frac{\pi}{6}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \alpha = \frac{7\pi}{6}$ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$ (Ans.)

২৪. $M = \frac{\cot \theta + \operatorname{cosec} \theta - 1}{\cot \theta - \operatorname{cosec} \theta + 1}$ এবং $N = \cot \theta + \operatorname{cosec} \theta$

[চট্টগ্রাম বোর্ড-২০২২]

(ক) $\theta = \frac{\pi}{3}$ হলে দেখাও যে, $N = \sqrt{3}$

(খ) প্রমাণ কর যে, $M^2 - N^2 = 0$

(গ) $N = \frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং $0 < \theta \leq 2\pi$ হলে, θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

২৪ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $N = \cot \theta + \operatorname{cosec} \theta$

$= \cot \frac{\pi}{3} + \operatorname{cosec} \frac{\pi}{3} [\because \theta = \frac{\pi}{3}]$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$ হলে $N = \sqrt{3}$ (দেখানো হলো)

(খ) দেওয়া আছে, $M = \frac{\cot \theta + \operatorname{cosec} \theta - 1}{\cot \theta - \operatorname{cosec} \theta + 1}$ এবং

$N = \cot \theta + \operatorname{cosec} \theta$

এখন, $M = \frac{\cot \theta + \operatorname{cosec} \theta - 1}{\cot \theta - \operatorname{cosec} \theta + 1}$

$= \frac{\operatorname{cosec} \theta (\cos \theta + 1 - \sin \theta)}{\operatorname{cosec} \theta (\cos \theta + 1 - \sin \theta)}$

$= \frac{\cos \theta + 1 - \sin \theta}{\cos \theta + 1 - \sin \theta}$

$= \frac{(\cos \theta + 1 - \sin \theta)(\cos \theta + \sin \theta + 1)}{(\cos \theta + \sin \theta - 1)(\cos \theta + \sin \theta + 1)}$

$= \frac{(\cos \theta + 1 - \sin \theta)(\cos \theta + \sin \theta + 1)}{(\cos \theta + \sin \theta - 1)(\cos \theta + \sin \theta + 1)}$

$= \frac{(\cos \theta + 1)^2 - \sin^2 \theta}{(\cos \theta + \sin \theta)^2 - 1^2}$

$= \frac{\cos^2 \theta + 2 \cos \theta + 1 - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + 2 \cos \theta + 1 - \sin^2 \theta}$

$= \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta - 1}{\cos^2 \theta + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta}$

$= \frac{1 + 2 \sin \theta \cos \theta - 1}{2 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta}$

$= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{2 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta}$

$= \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta + \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1}$

$= \frac{\sin \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{\sin \theta}$

$= \cot \theta + \operatorname{cosec} \theta = N$

বা, $M^2 = N^2 \therefore M^2 - N^2 = 0$

(প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে, $B = \cot \theta + \operatorname{cosec} \theta$

$B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\cot \theta + \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \dots \dots \dots (i)$

বা, $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ বা, $\frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\left(\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2$ বা, $\frac{(1 + \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{(1 + \cos \theta)^2}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{1}{3}$ বা, $\frac{(1 + \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)} = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{1 + \cos \theta + 1 - \cos \theta}{2} = \frac{1 + 3}{2}$

বা, $\frac{1 + \cos \theta - 1 + \cos \theta}{2} = \frac{1 - 3}{2}$

বা, $\frac{2 \cos \theta}{2} = \frac{-2}{2}$ বা, $\frac{1}{\cos \theta} = -2$

বা, $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ বা, $\cos \theta = -\cos \frac{\pi}{3}$

বা, $\cos \theta = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right)$

বা, $\cos \theta = \cos \frac{2\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

কিন্তু $\theta = \frac{4\pi}{3}$ গ্রহণযোগ্য নয়।

কেননা $\theta = \frac{4\pi}{3}$, (i) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে না।

\therefore নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (Ans.)

২৫. $A = \operatorname{cosec} \theta$

$B = \cot \theta$

$C = \sin^2 \frac{\pi}{15} + \sin^2 \frac{13\pi}{30} + \sin^2 \frac{16\pi}{15} + \sin^2 \frac{47\pi}{30}$ [সিলেট বোর্ড-২০২২]

(ক) $35^\circ 29' 37''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $C = \sec \frac{\pi}{3}$

(গ) $3A^2 + 3B^2 = 5$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর যেখানে, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

২৫ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) $35^\circ 29' 37'' = 35^\circ \left(29 \frac{37}{60}\right)' = 35^\circ \left(\frac{1777}{60}\right)'$
 $= \left(35 + \frac{1.777}{60} \times \frac{1}{60}\right)^\circ = \left(\frac{127777}{3600}\right)^\circ$
 $= \left(\frac{127777}{3600} \times \frac{\pi}{180}\right)$ রেডিয়ান $\left[\because 1^\circ = \frac{\pi}{180}\right]$
 $= 0.6195$ রেডিয়ান (প্রায়) (Ans.)

(খ) $C = \sin^2 \frac{\pi}{15} + \sin^2 \frac{13\pi}{30} + \sin^2 \frac{16\pi}{15} + \sin^2 \frac{47\pi}{30}$
 $= \sin^2 \frac{\pi}{15} + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{15}\right) + \sin^2 \left(\pi - \frac{\pi}{15}\right) + \sin^2 \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{15}\right)$
 $= \sin^2 \frac{\pi}{15} + \cos^2 \frac{\pi}{15} + \sin^2 \frac{\pi}{15} + \cos^2 \frac{\pi}{15}$
 $= 2 \left(\sin^2 \frac{\pi}{15} + \cos^2 \frac{\pi}{15}\right) = 2.1 = 2$
 $= \sec^2 \frac{\pi}{3} \left[\because \sec^2 \frac{\pi}{3} = 2\right]$
 $\therefore c = \sec \frac{\pi}{3}$ (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে,

$a = \cot \theta$ এবং $b = \operatorname{cosec} \theta$

প্রদত্ত সমীকরণ,

$3(a^2 + b^2) = 5$

বা, $3\cot^2 \theta + 3\operatorname{cosec}^2 \theta = 5$ বা, $\cot^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta = \frac{5}{3}$

বা, $\cot^2 \theta + 1 + \cot^2 \theta = \frac{5}{3}$ বা, $2\cot^2 \theta = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$

বা, $\cot^2 \theta = \frac{1}{3}$ বা, $\cot \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

এখন, $\cot \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ থেকে পাই, $\cot \theta = \cot \frac{\pi}{3} = \cot \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \quad [\because 0 < \theta < 2\pi]$

আবার, $\cot \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ থেকে পাই,

$\cot \theta = \cot \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cot \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \quad [\because 0 < \theta < 2\pi]$

\therefore নির্দিষ্ট সীমা $0 < \theta < 2\pi$ এর মধ্যে θ এর সম্ভাব্য মানসমূহ

$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ (Ans.)

২৬. $P = \sin \theta, Q = \cos \theta$ এবং $R = \tan \theta$

[যশোর বোর্ড-২০২২]

(ক) $\frac{5\pi}{13}$ কে ডিগ্রি, মিনিট ও সেকেন্ডে প্রকাশ কর।

(খ) $8P^2 + 5Q^2 = 7$ হলে, প্রমাণ কর যে, $R = \pm \sqrt{2}$

(গ) $2P^2 + 3Q = 0$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হলে θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

২৬ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) $\frac{5\pi}{13} = \left(\frac{5\pi}{13} \times \frac{180}{\pi}\right)^\circ = \frac{900^\circ}{13} = 69 \frac{3^\circ}{13} = 69^\circ \left(\frac{3 \times 60}{13}\right)'$
 $= 690 \left(13 \frac{11}{13}\right)' = 69^\circ 13' \left(\frac{11 \times 60}{13}\right)'' = 69^\circ 13' 50.77''$ (প্রায়)

$\therefore \frac{5\pi}{13}$ রেডিয়ান $= 69^\circ 13' 50.77''$ (প্রায়) (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে, $P = \sin \theta, Q = \cos \theta, R = \tan \theta$

এবং $8P^2 + 5Q^2 = 7$

$\therefore 8 \sin^2 \theta + 5 \cos^2 \theta = 7$

বা, $8(1 - \cos^2 \theta) + 5 \cos^2 \theta = 7$

বা, $8 - 8 \cos^2 \theta + 5 \cos^2 \theta = 7$

বা, $3 \cos^2 \theta = 1$ বা, $\frac{1}{\sec^2 \theta} = \frac{1}{3}$

বা, $\sec^2 \theta = 3$ বা,

বা, $1 + \tan^2 \theta = 3$

বা, $\tan \theta = \pm \sqrt{2}$

$\therefore R = \pm \sqrt{2}$ (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে, $2P^2 + 3Q = 0$

বা, $2 \sin^2 \theta + 3 \cos \theta = 0$

বা, $2(1 - \cos^2 \theta) + 3 \cos \theta = 0$

বা, $2 - 2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta = 0$

বা, $2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta - 2 = 0$ [উভয় পক্ষকে (-1) দ্বারা গুণ করে]

বা, $2 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta + \cos \theta - 2 = 0$

বা, $2 \cos \theta (\cos \theta - 2) + 1(\cos \theta - 2) = 0$

বা, $(2 \cos \theta + 1)(\cos \theta - 2) = 0$

কিন্তু, $\cos \theta - 2 \neq 0$ কেননা $-1 \leq \cos \theta \leq 1$

অতএব, $2 \cos \theta + 1 = 0$ বা, $2 \cos \theta = -1$

বা, $\cos \theta = -\frac{1}{2} = -\cos \frac{\pi}{3}$

বা, $\cos \theta = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

[শর্তানুসারে $0 < \theta < 2\pi$]

বা, $\cos \theta = \cos \frac{2\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3} \therefore \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

\therefore নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য মানসমূহ: $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ (Ans.)

২৭. (i) $\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta = x$

(ii) $\tan \theta + \sec \theta = y$

[বরিশাল বোর্ড-২০২২]

(ক) 10.5 km দূরে একটি বিন্দুতে কোনো পাহাড় 20° কোণ উৎপন্ন করে। পাহাড়টির উচ্চতা নির্ণয় কর।

(খ) দেখাও যে, $\cos \theta = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

(গ) $y = \sqrt{3}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর; যখন $0 < \theta < 2\pi$

২৭ নং প্রশ্নের উত্তর

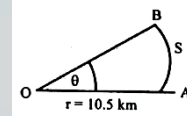
(ক) মনে করি, AB পাহাড়টি এর পাদবিন্দু A হতে 10.5 km দূরে O বিন্দুতে 20° কোণ উৎপন্ন করে।

অর্থাৎ, $r = AO = 10.5$ কি.মি.

কেন্দ্রস্থ কোণ, $\theta = 20^\circ$

$= 20 \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

$= \frac{\pi}{9}$ রেডিয়ান



আমরা জানি, $S = r\theta$

$= 10.5 \times \frac{\pi}{9} = 3.66520$ কি.মি. $= 3665.20$ মিটার (প্রায়)

\therefore পাহাড়টির উচ্চতা 3665.20 মিটার (প্রায়) (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta = x$

বা, $\frac{1}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = x$ বা, $\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = x$

বা, $\frac{(1 + \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} = x^2$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{(1 + \cos \theta)^2}{1 - \cos^2 \theta} = x^2$ বা, $\frac{(1 + \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)} = x^2$

বা, $\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} = x^2$

$$\text{বা, } \frac{1+\cos\theta+1-\cos\theta}{1+\cos\theta-1+\cos\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1} \text{ [যোজন-বিয়োজন করে]}$$

$$\text{বা, } \frac{2}{2\cos\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1} \text{ বা, } \frac{1}{\cos\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1} \text{ (দেখানো হলো)}$$

(গ) দেওয়া আছে, $R = \tan\alpha + \sec\alpha$

$$R = \sqrt{3} \text{ হলে,}$$

$$\therefore \tan\alpha + \sec\alpha = \sqrt{3} \text{ বা, } \sec\alpha = \sqrt{3} - \tan\alpha$$

$$\text{বা, } \sec^2\alpha = (\sqrt{3} - \tan\alpha)^2 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } 1 + \tan^2\alpha = 3 - 2\sqrt{3}\tan\alpha + \tan^2\alpha$$

$$\text{বা, } 2\sqrt{3}\tan\alpha = 2$$

$$\text{বা, } \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) [\because 0 \leq \alpha \leq 2\pi]$$

$$\text{বা, } \tan\alpha = \tan\frac{\pi}{6} = \tan\frac{7\pi}{6} \therefore \alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \text{ হলে, } \tan\frac{\pi}{6} + \sec\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\text{এবং } \alpha = \frac{7\pi}{6} \text{ হলে,}$$

$$\tan\frac{7\pi}{6} + \sec\frac{7\pi}{6} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \sec\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \tan\frac{\pi}{6} - \sec\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \alpha = \frac{7\pi}{6} \text{ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ (Ans.)}$$

$$২৮. a = \cot\theta \text{ এবং } b = \operatorname{cosec}\theta - 1$$

[ঢাকা বোর্ড-২০২১]

$$(ক) a = 1 \text{ হলে } \sin^2\theta \text{ এর মান নির্ণয় কর। যেখানে } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$(খ) \text{ দেখাও যে, } \frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$$(গ) a^2 + (b+1)^2 = 3 \text{ হলে, } \theta \text{ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

২৮ নং প্রশ্নের উত্তর

$$(ক) \text{ দেওয়া আছে, } a = 1 \text{ বা, } \cot\theta = 1 [\because a = \cot\theta]$$

$$\text{বা, } \cot\theta = \cot 45^\circ \therefore \theta = 45^\circ$$

$$\therefore \sin^2\theta = (\sin 45^\circ)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \text{ (Ans.)}$$

$$(খ) \text{ দেওয়া আছে, } a = \cot\theta \text{ এবং } b = \operatorname{cosec}\theta - 1$$

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{a+b}{a-b} = \frac{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta - 1}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta + 1}$$

$$= \frac{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta - 1}{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta - 1}$$

$$= \frac{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta - 1}{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta - 1}$$

$$= \frac{(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta) - (\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)}{(\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta - 1)}$$

$$= \frac{(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta - 1)}{(\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta - 1)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\sin\theta} \cos\theta} = \frac{1}{\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$= \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \text{ (দেখানো হলো)}$$

$$(গ) \text{ দেওয়া আছে, } a^2 + (b+1)^2 = 3; 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\text{বা, } \cot^2\theta + (\operatorname{cosec}\theta - 1 + 1)^2 = 3 \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$\text{বা, } \cot^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = 3 \text{ বা, } \cot^2\theta + -1 + \cot^2\theta = 3$$

$$\text{বা, } 2\cot^2\theta = 2 \text{ বা, } \cot^2\theta = 1$$

$$\cot\theta = \pm 1$$

$$\text{হয়, } \cot\theta = 1 \text{ অথবা, } \cot\theta = -1$$

$$\text{বা, } \cot\theta = 1 = \cot\frac{\pi}{4} \text{ বা, } \cot\theta = -1 = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cot\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cot\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{বা, } \cot\theta = \cot\frac{\pi}{4} = \text{বা, } \cot\theta = \cot\frac{3\pi}{4} = \cot\frac{7\pi}{4}$$

$$\cot\frac{5\pi}{4}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

$$\therefore \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$\therefore 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ ব্যবধিতে প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান,}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \text{ (Ans.)}$$

$$২৯. A = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1}, B = \frac{\sin\theta + 1}{\cos\theta}$$

[ময়মনসিংহ বোর্ড-২০২১]

$$(ক) \tan^2\frac{7\pi}{6} - \cos^2\frac{5\pi}{4} \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

$$(খ) \text{ প্রমাণ কর যে, } A^2 - B^2 = 0$$

$$(গ) B = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ হলে, } \theta \text{ এর মান নির্ণয় কর। যেখানে } 0 < \theta < 2\pi$$

২৯ নং প্রশ্নের উত্তর

$$(ক) \text{ দেওয়া আছে,}$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \tan^2\frac{7\pi}{6} - \cos^2\frac{5\pi}{4}$$

$$= \tan^2\left(\frac{6\pi+\pi}{6}\right) - \cos^2\left(\frac{4\pi+\pi}{4}\right) = \tan^2\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) - \cos^2\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \left\{\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}^2 - \left\{-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2-3}{6} = -\frac{1}{6} \text{ (Ans.)}$$

$$(খ) \text{ দেওয়া আছে,}$$

$$A = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{\cos\theta(\tan\theta - 1 + \sec\theta)}{\cos\theta(\tan\theta + 1 - \sec\theta)}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{(\sec\theta + \tan\theta) - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sec\theta + \tan\theta)}{(1 - \sec\theta + \tan\theta)}$$

$$= \sec\theta + \tan\theta = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\text{বা, } A = B \left[\because B = \frac{\sin\theta + 1}{\cos\theta} \right]$$

$$\text{বা, } A^2 = B^2$$

$$\therefore A^2 - B^2 = 0 \text{ (প্রমাণিত)}$$

$$(গ) B = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{\sin\theta + 1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \tan\theta + \sec\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \sqrt{3}\tan\theta + \sqrt{3}\sec\theta = 1$$

$$\text{বা, } \sqrt{3}\sec\theta = 1 - \sqrt{3}\tan\theta$$

$$\text{বা, } (\sqrt{3}\sec\theta)^2 = (1 - \sqrt{3}\tan\theta)^2$$

$$\text{বা, } 3\sec^2\theta = 1 - 2\sqrt{3}\tan\theta + 3\tan^2\theta$$

$$\text{বা, } 3(1 + \tan^2\theta) = 1 - 2\sqrt{3}\tan\theta + 3\tan^2\theta$$

$$\text{বা, } 3 + 3\tan^2\theta = 1 - 2\sqrt{3}\tan\theta + 3\tan^2\theta$$

$$\text{বা, } 2\sqrt{3}\tan\theta = 1 - 3 \text{ বা, } \tan\theta = \frac{-2}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ বা, } \tan\theta = -\tan\frac{\pi}{6}$$

$$\text{বা, } \tan\theta = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{বা, } \tan\theta = \tan\frac{5\pi}{6} = \tan\frac{11\pi}{6}$$

$$\therefore \theta = \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$\text{কিন্তু } \theta = \frac{5\pi}{6} \text{ গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ,}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{6} \text{ হলে, } B = \frac{\sin \frac{5\pi}{6} + 1}{\cos \frac{5\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\sqrt{3} \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore 0 < \theta < 2\pi \text{ ব্যবধিতে } \theta \text{ এর মান: } \frac{11\pi}{6} \text{ (Ans.)}$$

৩০. $\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta = a, \cos \theta + \sin \theta = x$ এবং $\cos \theta - \sin \theta = y$ তিনটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ।

[রাজশাহী বোর্ড-২০২১]

(ক) $x = 1$ হলে, দেখাও যে, $\sin \theta - \cos \theta = \pm 1$

(খ) ১ম সমীকরণ হতে প্রমাণ কর যে, $\cos \theta = \frac{1-a^2}{1+a^2}$

(গ) প্রমাণ কর যে, $\frac{y+1}{x-1} = \frac{\sin \theta}{1-\cos \theta}$

৩০ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) এখানে, $x = 1$

বা, $\cos \theta + \sin \theta = 1$

বা, $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta = 1$

বা, $1 + 2\sin \theta \cos \theta = 1$ বা, $2\sin \theta \cos \theta = 0$

বা, $-2\sin \theta \cos \theta = 0$ বা, $1 - 2\sin \theta \cos \theta = 1$

বা, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta = 1$

বা, $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1$

$\therefore \sin \theta - \cos \theta = \pm 1$ (দেখানো হলো)

(খ) দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta = a$

বা, $\frac{1}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = a$ বা, $\frac{1-\cos \theta}{\sin \theta} = a$

বা, $\frac{(1-\cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} = a^2$ বা, $\frac{(1-\cos \theta)^2}{1-\cos^2 \theta} = a^2$

বা, $\frac{(1-\cos \theta)(1+\cos \theta)}{(1-\cos \theta)(1+\cos \theta)} = a^2$ বা, $\frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta} = a^2$

বা, $\frac{1-\cos \theta + 1 + \cos \theta}{1-\cos \theta - 1 - \cos \theta} = \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{-2\cos \theta} = \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1}$ বা, $\frac{1}{\cos \theta} = \frac{1+a^2}{1-a^2}$

$\therefore \cos \theta = \frac{1-a^2}{1+a^2}$ (প্রমাণিত)

(গ) বামপক্ষ = $\frac{y+1}{x-1}$

= $\frac{\cos \theta - \sin \theta + 1}{\cos \theta + \sin \theta - 1} = \frac{\sin \theta (\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{\sin \theta})}{\sin \theta (\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\sin \theta} - \frac{1}{\sin \theta})}$

= $\frac{(\cot \theta - 1 + \operatorname{cosec} \theta)}{(\cot \theta + 1 - \operatorname{cosec} \theta)} = \frac{\cot \theta + \operatorname{cosec} \theta - 1}{\cot \theta - \operatorname{cosec} \theta + (\operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta)}$

= $\frac{(\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)(\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta) - (\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)}{(\cot \theta + \cot \theta - 1)}$

= $\frac{(\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)(\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta - 1)}{1} = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \text{ডানপক্ষ}$

$\therefore \frac{y+1}{x-1} = \frac{\sin \theta}{1-\cos \theta}$ (প্রমাণিত)

৩১. $x \sin \theta + y \cos \theta = z$ এবং $\operatorname{cosec}^2 \theta - (2 + \sqrt{2}) \operatorname{cosec} \theta + 2\sqrt{2} = 0$ দুটি সমীকরণ।

[রাজশাহী বোর্ড-২০২১]

(ক) $40^\circ 55' 45''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

(খ) ১ম সমীকরণ হতে প্রমাণ কর যে,

$x \cos \theta - y \sin \theta = \pm \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$

(গ) ২য় সমীকরণটি সমাধান কর যখন $0 < \theta < 2\pi$

৩১ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) $40^\circ 55' 45'' = 40^\circ + \left(\frac{55}{60}\right)^\circ + \left(\frac{54}{60 \times 60}\right)^\circ$

= $\left(40 + \frac{11}{12} + \frac{3}{200}\right)^\circ$

= $\left(\frac{40 \times 600 + 11 \times 50 + 3 \times 3}{600}\right)^\circ = \left(\frac{24559}{600}\right)^\circ$

= $\left(\frac{24559}{600} \times \frac{\pi}{180}\right)^\circ \left[\because 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ রেডিয়ান}\right]$

= $\left(\frac{24559 \times 3.1416}{108000}\right)^\circ$

= 0.71439° (প্রায়) (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে,

$x \sin \theta + y \cos \theta = z$

বা, $(x \sin \theta + y \cos \theta)^2 = z^2$

বা, $x^2 \sin^2 \theta + 2x \sin \theta y \cos \theta + y^2 \cos^2 \theta = z^2$

বা, $x^2(1 - \cos^2 \theta) + 2x \sin \theta y \cos \theta + y^2(1 - \sin^2 \theta) = z^2$

বা, $x^2 - x^2 \cos^2 \theta + 2x \sin \theta y \cos \theta + y^2 - y^2 \sin^2 \theta = z^2$

বা, $x^2 + y^2 - z^2 = x^2 \cos^2 \theta - 2x \cos \theta y \sin \theta + y^2 \sin^2 \theta$

বা, $(x \cos \theta - y \sin \theta)^2 = x^2 + y^2 - z^2$

$\therefore x \cos \theta - y \sin \theta = \pm \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$ (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে,

$\operatorname{cosec}^2 \theta - (2 + \sqrt{2}) \operatorname{cosec} \theta + 2\sqrt{2} = 0$; যখন $0 < \theta < 2\pi$

বা, $\operatorname{cosec}^2 \theta - 2 \operatorname{cosec} \theta - \sqrt{2} \operatorname{cosec} \theta + 2\sqrt{2} = 0$

বা, $\operatorname{cosec} \theta (\operatorname{cosec} \theta - 2) - \sqrt{2} (\operatorname{cosec} \theta - 2) = 0$

বা, $(\operatorname{cosec} \theta - 2)(\operatorname{cosec} \theta - \sqrt{2}) = 0$

হয়, $\operatorname{cosec} \theta - 2 = 0$

অথবা, $\operatorname{cosec} \theta - \sqrt{2} = 0$

বা, $\operatorname{cosec} \theta = 2$

বা, $\operatorname{cosec} \theta = \sqrt{2}$

বা, $\operatorname{cosec} \theta = \sqrt{2}$

বা, $\operatorname{cosec} \theta = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{4}$

= $\operatorname{cosec} \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

= $\operatorname{cosec} \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

$\therefore 0 < \theta < 2\pi$ ব্যবধিতে প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান,

$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$ (Ans.)

৩২. $A = \cos \theta$ এবং $B = \sin \theta$

[দিনাজপুর বোর্ড-২০২১]

(ক) 0.5273 রেডিয়ানকে ডিগ্রি এককে রূপান্তর কর।

(খ) $XA - YB = Z$, হলে প্রমাণ কর যে,

$XB + YA = \pm \sqrt{X^2 + Y^2 - Z^2}$

(গ) $\frac{1}{A^2} + \frac{B^2}{A^2} = \frac{5}{3}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর যেখানে, $0 < \theta < 2\pi$

৩২ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) প্রদত্ত কোণ = 0.5273 রেডিয়ান

= $\left(0.5273 \times \frac{180}{\pi}\right)^\circ \left[\because 1 \text{ রেডিয়ান} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ\right]$

= $\left(\frac{0.5273 \times 180}{3.1416}\right)^\circ = 30.212^\circ$ (প্রায়)

= $30^\circ + (.212 \times 60)' = 30^\circ 12.72'$

= $30^\circ 12' + (0.72 \times 60)''$

= $30^\circ 12' 43.2''$ (প্রায়) (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে, $A = \cos \theta, B = \sin \theta$

এবং $X \cos \theta - Y \sin \theta = Z$ [A ও B এর মান বসিয়ে]

বা, $(X \cos \theta - Y \sin \theta)^2 = Z^2$

বা, $X^2 \cos^2 \theta - 2X \cos \theta Y \sin \theta + Y^2 \sin^2 \theta = Z^2$

বা, $X^2(1 - \sin^2 \theta) - 2XY \sin \theta \cos \theta + Y^2(1 - \cos^2 \theta) = Z^2$

বা, $X^2 - X^2 \sin^2 \theta - 2XY \sin \theta \cos \theta + Y^2 - Y^2 \cos^2 \theta = Z^2$

বা, $X^2 \sin^2 \theta + 2XY \sin \theta \cos \theta + Y^2 \cos^2 \theta = X^2 + Y^2 - Z^2$

বা, $(X \sin \theta + Y \cos \theta)^2 = X^2 + Y^2 - Z^2$

বা, $X \sin \theta + Y \cos \theta = \pm \sqrt{X^2 + Y^2 - Z^2}$ [A ও B এর মান বসিয়ে]

$$\therefore XB + YA = \pm \sqrt{X^2 + Y^2 - Z^2} \text{ (প্রমাণিত)}$$

(গ) দেওয়া আছে, $\frac{1}{A^2} + \frac{B^2}{A^2} = \frac{5}{3}$ যেখানে, $0 < \theta < 2\pi$

$$\text{বা, } \frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{5}{3}$$

$$\text{বা, } \frac{1+\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{5}{3}$$

$$\text{বা, } 3 + 3\sin^2 \theta = 5\cos^2 \theta$$

$$\text{বা, } 3 + 3\sin^2 \theta = 5(1 - \sin^2 \theta)$$

$$\text{বা, } 3 + 3\sin^2 \theta = 5 - 5\sin^2 \theta$$

$$\text{বা, } 8\sin^2 \theta = 2 \text{ বা, } \sin^2 \theta = \frac{1}{4} \text{ বা, } \sin \theta = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{হয়, } \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{অথবা, } \sin \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = -\sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \sin \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin \frac{7\pi}{6} = \sin \frac{11\pi}{6}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore \theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$\therefore 0 < \theta < 2\pi \text{ ব্যবধিতে } \theta \text{ এর মানসমূহ: } \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \text{ (Ans.)}$$

৩৩. $P = \cot \theta$, $Q = \operatorname{cosec} \theta$ এবং $R = \cos \theta$

[কুমিল্লা বোর্ড-২০২১]

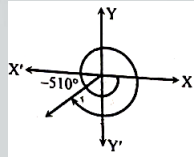
(ক) চিত্রসহ— 510° কোণের অবস্থান কোন চতুর্ভাগে নির্ণয় কর।

$$(খ) \text{ প্রমাণ কর যে, } \frac{1-P-Q}{Q-P-1} = \sqrt{\frac{1+R}{1-R}}$$

(গ) $R^2 \cdot Q - \frac{1}{Q} = 1$ হলে, θ এর মান নির্ণয় করো যেখানে, $0 \leq \theta \leq \pi$

৩৩ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) কোণের মান -510°



$$= -450^\circ - 60^\circ$$

$$= -5 \times 90^\circ - 60^\circ$$

অর্থাৎ -510° কোণটি তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত। (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে, $P = \cot \theta$, $Q = \operatorname{cosec} \theta$ এবং $R = \cos \theta$

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{1-P-Q}{Q-P-1}$$

$$= \frac{1-\cot \theta - \operatorname{cosec} \theta}{\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta - 1} \text{ [P ও Q এর মান বসিয়ে]}$$

$$= \frac{1-\cot \theta - \operatorname{cosec} \theta}{\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta - 1}$$

$$= \frac{(\cot \theta - \cot \theta) - (\operatorname{csc}^2 \theta - \cot^2 \theta)}{1 - \cot \theta - \cot \theta}$$

$$= \frac{(\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta) - (\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta)(\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)}{1 - \operatorname{cosec} \theta - \cot \theta}$$

$$= \frac{(\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)(1 - \operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)}{(\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)(1 - \operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)}$$

$$= \frac{1}{1 - \operatorname{cosec} \theta - \cot \theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1-\cos \theta}{\sin \theta}} = \frac{\sin \theta}{1-\cos \theta}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{(1-\cos \theta)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos^2 \theta}{(1-\cos \theta)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos \theta)(1-\cos \theta)}{(1-\cos \theta)(1-\cos \theta)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+R}{1-R}} \text{ [R এর মান বসিয়ে]}$$

=ডানপক্ষ

$$\therefore \frac{1-P-Q}{Q-P-1} = \sqrt{\frac{1+R}{1-R}} \text{ (প্রমাণিত)}$$

(গ) দেওয়া আছে, $R^2 \cdot Q - \frac{1}{Q} = 1$; $0 \leq \theta \leq \pi$

$$\text{বা, } \cos^2 \theta \cdot \operatorname{cosec} \theta - \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta} = 1 \text{ [Q ও R এর মান বসিয়ে]}$$

$$\text{বা, } \frac{1-\sin^2 \theta}{\sin \theta} - \sin \theta = 1$$

$$\text{বা, } \frac{1-\sin^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin \theta} = 1$$

$$\text{বা, } 1 - 2\sin^2 \theta = \sin \theta$$

$$\text{বা, } 2\sin^2 \theta + \sin \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2\sin^2 \theta + 2\sin \theta - \sin \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2\sin \theta(\sin \theta + 1) - 1(\sin \theta + 1) = 0$$

$$\text{বা, } (2\sin \theta - 1)(\sin \theta + 1) = 0$$

$$\text{হয়, } 2\sin \theta - 1 = 0$$

$$\text{অথবা, } \sin \theta + 1 = 0$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = -1$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = -\sin \frac{\pi}{2}$$

$$= \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{5\pi}{6}$$

$$= \sin \frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore \theta = \frac{3\pi}{2}$$

[গ্রহণযোগ্য নয়]

$$\therefore 0 \leq \theta \leq \pi \text{ ব্যবধিতে } \theta \text{ এর মান } = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \text{ (Ans.)}$$

৩৪. $M = \cos \theta$ এবং $N = \sin \theta$ (যখন $0 < \theta < 2\pi$)

[চট্টগ্রাম বোর্ড-২০২১]

(ক) $B = \frac{\pi}{3}$ হলে, দেখাও যে, $\sin 2B = 2\sin B \cos B$

(খ) $aN - bM = c$ হলে, দেখাও যে,

$$aM + bN = \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$$

(গ) $2M^2 + 3N = 0$ হলে, θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

৩৪ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $B = \frac{\pi}{3}$

$$\text{বামপক্ষ} = \sin 2B = \sin \frac{2\pi}{3} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ডানপক্ষ} = 2\sin B \cdot \cos B = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \sin 2B = 2\sin B \cdot \cos B \text{ (দেখানো হলো)}$$

(খ) দেওয়া আছে, $M = \cos \theta$, $N = \sin \theta$

$$\text{এবং } aN - bM = c$$

$$\text{বা, } a\sin \theta - b\cos \theta = c$$

$$\text{বা, } (a\sin \theta - b\cos \theta)^2 = c^2$$

$$\begin{aligned} \text{বা, } a^2 \sin^2 \theta - 2 \cdot a \sin \theta \cdot b \cos \theta + b^2 \cos^2 \theta &= c^2 \\ \text{বা, } a^2(1 - \cos^2 \theta) - 2 \cdot ab \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + b^2(1 - \sin^2 \theta) &= c^2 \\ \text{বা, } a^2 - a^2 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta \cdot b \sin \theta + b^2 - b^2 \sin^2 \theta &= c^2 \\ \text{বা, } a^2 + b^2 - c^2 &= a^2 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta \cdot b \sin \theta + b^2 \sin^2 \theta \\ \text{বা, } a^2 + b^2 - c^2 &= (a \cos \theta + b \sin \theta)^2 \\ \text{বা, } a^2 + b^2 - c^2 &= (aM + bN)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore aM + bN = \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2} \quad (\text{দেখানো হলো})$$

(গ) দেওয়া আছে, $M = \cos \theta, N = \sin \theta$

$$\text{এবং } 2M^2 + 3N = 0$$

$$\therefore 2\cos^2 \theta + 3\sin \theta = 0$$

$$\text{বা, } 2(1 - \sin^2 \theta) + 3\sin \theta = 0$$

$$\text{বা, } 2 - 2\sin^2 \theta + 3\sin \theta = 0$$

$$\text{বা, } 2\sin^2 \theta - 3\sin \theta - 2 = 0 \quad [(-1) \text{ দ্বারা গুণ করে}]$$

$$\text{বা, } 2\sin^2 \theta - 4\sin \theta + \sin \theta - 2 = 0$$

$$\text{বা, } 2\sin \theta(\sin \theta - 2) + 1(\sin \theta - 2) = 0$$

$$\therefore (\sin \theta - 2)(2\sin \theta + 1) = 0$$

$$\text{হয়, } \sin \theta - 2 = 0$$

$$\therefore \sin \theta = 2$$

ইহা গ্রহণযোগ্য নয়

$$\text{কারণ, } -1 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$\text{অথবা, } 2\sin \theta + 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2\sin \theta = -1$$

$$\text{বা, } \sin \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = -\sin \frac{\pi}{6}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin \frac{7\pi}{6} = \sin \frac{11\pi}{6}$$

$$\therefore \theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \quad (\text{Ans.})$$

$$৩৫. (i) 2\cos \left(\frac{\pi}{2} - D \right) = \sqrt{3}$$

$$(ii) \tan^2 \theta + \cot^2 \theta - \frac{10}{3} = 0.$$

[সিলেট বোর্ড-২০২১]

(ক) -1465° কোণটি কোন চতুর্ভাগে অবস্থিত তা চিত্রসহ নির্ণয় কর।

(খ) (i) নং এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $3\sin D - 4\sin^3 D - \sin 3D = 0$

(গ) (ii) নং হতে θ এর মান নির্ণয় কর: যেখানে, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

৩৬ নং প্রশ্নের উত্তর

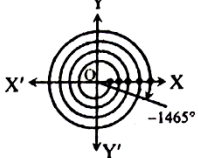
(ক) প্রদত্ত কোণ,

$$= -1465^\circ$$

$$= -1440^\circ - 25^\circ$$

$$= -16 \times 90^\circ - 25^\circ$$

$$= -4 \times 360^\circ - 25^\circ$$



অর্থাৎ, কোণটি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত। (Ans.)

$$(খ) \text{ দেওয়া আছে, } 2\cos \left(\frac{\pi}{2} - D \right) = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } 2\sin D = \sqrt{3} \text{ বা, } \sin D = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{বা, } \sin D = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ \therefore D = 60^\circ$$

$$\text{বামপক্ষ} = 3\sin D - 4\sin^3 D - \sin 3D$$

$$= 3 \times \sin 60^\circ - 4(\sin 60^\circ)^3 - \sin (3 \times 60^\circ) \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$= 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 - \sin 180^\circ;$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - 4 \times \frac{3\sqrt{3}}{8} - 0 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$= 0 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore 3\sin D - 4\sin^3 D - \sin 3D = 0 \quad (\text{প্রমাণিত})$$

(গ) দেওয়া আছে,

$$\tan^2 \theta + \cot^2 \theta - \frac{10}{3} = 0; 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\text{বা, } \tan^2 \theta + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{10}{3} \text{ বা, } \frac{\tan^4 \theta + 1}{\tan^2 \theta} = \frac{10}{3}$$

$$\text{বা, } 3\tan^4 \theta + 3 - 10\tan^2 \theta = 0$$

$$\text{বা, } 3\tan^4 \theta - 9\tan^2 \theta - \tan^2 \theta + 3 = 0$$

$$\text{বা, } 3\tan^2 \theta(\tan^2 \theta - 3) - 1(\tan^2 \theta - 3) = 0$$

$$\text{বা, } (\tan^2 \theta - 3)(3\tan^2 \theta - 1) = 0$$

$$\text{হয়, } \tan^2 \theta - 3 = 0 \text{ বা, } \tan^2 \theta = 3 \text{ বা, } \tan \theta = \pm \sqrt{3}$$

$$'+' \text{ চিহ্ন দিয়ে, } \tan \theta = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \tan \theta = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3} = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{বা, } \tan \theta = \tan \frac{\pi}{3} = \tan \frac{4\pi}{3} \therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

$$'-' \text{ চিহ্ন দিয়ে, } \tan \theta = -\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \tan \theta = -\sqrt{3} = \tan \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \tan \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{বা, } \tan \theta = \tan \frac{2\pi}{3} = \tan \frac{5\pi}{3} \therefore \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

$$\text{আবার, } 3\tan^2 \theta - 1 = 0 \text{ বা, } \tan^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$$\text{বা, } \tan \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$'+' \text{ চিহ্ন নিয়ে, } \therefore \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \frac{\pi}{6} = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\text{বা, } \tan \theta = \tan \frac{\pi}{6} = \tan \frac{7\pi}{6} \therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$$

$$'-' \text{ চিহ্ন নিয়ে,}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ বা, } \tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

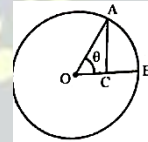
$$= \tan \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \tan \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\text{বা, } \tan \theta = \tan \frac{5\pi}{6} = \tan \frac{11\pi}{6} \therefore \theta = \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$\therefore 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ ব্যবধিতে } \theta \text{ এর মান:}$$

$$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6} \quad (\text{Ans.})$$

৩৬.



চিত্রে, $AB = OB$

$$\text{এবং } \sec x - \tan x = (\sqrt{3})^{-1}, 0 \leq x \leq 2\pi.$$

[যশোর বোর্ড-২০২১]

(ক) -620° এর অবস্থান কোন চতুর্ভাগে চিত্রসহ নির্ণয় কর।

(খ) জ্যামিতিক উপায়ে প্রমাণ কর যে, θ একটি ধ্রুব কোণ।

(গ) x এর মান নির্ণয় কর।

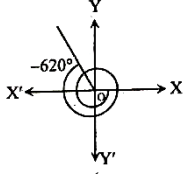
৩৬ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) প্রদত্ত কোণ,

$$= -620^\circ$$

$$= -540^\circ - 80^\circ$$

$$= -6 \times 90^\circ - 80^\circ$$

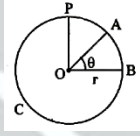


∴ -620° এর অবস্থান হয় চতুর্ভাগে। (Ans.)

(খ) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট PABC বৃত্তে, AB চাপ বৃত্তের ব্যাসার্ধ OB এর সমাধান হওয়ায়, ∠AOB = এক রেডিয়ান কোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, ∠AOB = θ একটি ধ্রুব কোণ OB রেখাংশের (ব্যাসার্ধের) উপর O বিন্দুতে OP লম্ব আঁকি।

OP লম্ববৃত্তের পরিধিকে P বিন্দুতে ছেদ করে।

চাপ, PB = পরিধির এক-চতুর্থাংশ = $\frac{1}{4} \times 2\pi r = \frac{\pi r}{2}$ এবং চাপ AB = r (ব্যাসার্ধ) [∠AOB = 1 রেডিয়ান]



বৃত্তের কোনো চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক।

$$\frac{\angle AOB}{\angle POB} = \frac{\text{চাপ AB}}{\text{চাপ PB}}$$

$$\therefore \angle AOB = \frac{\text{চাপ AB}}{\text{চাপ PB}} \times \angle POB = \frac{r}{\frac{\pi r}{2}} \times \text{এক সমকোণ}$$

[OP ব্যাসার্ধ এবং OB এর উপর লম্ব = $\frac{2}{\pi}$ সমকোণ।

যেহেতু সমকোণ π ধ্রুবক সেহেতু ∠AOB = 0 একটি ধ্রুব কোণ। (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে, $\sec x - \tan x = (\sqrt{3})^{-1}$, $0 \leq x \leq 2\pi$

$$\text{বা, } \sec x - \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \sqrt{3}\sec x - \sqrt{3}\tan x = 1$$

$$\text{বা, } \sqrt{3}\sec x = 1 + \sqrt{3}\tan x$$

$$\text{বা, } (\sqrt{3}\sec x)^2 = (1 + \sqrt{3}\tan x)^2$$

$$\text{বা, } 3\sec^2 x = 1 + 2\sqrt{3}\tan x + 3\tan^2 x$$

$$\text{বা, } 3 + 3\tan^2 x = 1 + 2\sqrt{3}\tan x + 3\tan^2 x$$

$$[\because \sec^2 x = 1 + \tan^2 x]$$

$$\text{বা, } 2\sqrt{3}\tan x = 2$$

$$\text{বা, } \tan x = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \tan x = \tan \frac{\pi}{6} = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\text{বা, } \tan x = \tan \frac{\pi}{6} = \tan \frac{7\pi}{6}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$$

$$\text{কিন্তু } x = \frac{7\pi}{6} \text{ গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ, } \sec \frac{7\pi}{6} - \tan \frac{7\pi}{6}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-3}{\sqrt{3}}$$

$$= -\sqrt{3} \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 2\pi \text{ ব্যবধিতে } x \text{ এর মান } \frac{\pi}{6} \text{ (Ans.)}$$

$$৩৭. (i) M = \frac{\tan \theta + \sec(-\theta)}{\cot \theta + \csc(-\theta)}, (ii) N = \frac{\pi}{12}$$

[বরিশাল বোর্ড-২০২১]

(ক) একটি চাকা 2.88 কিলোমিটার পথ যেতে 120 বার ঘুরে। চাকাটির ব্যাসার্ধ কত?

(খ) $\sin \theta = \frac{5}{13}$ এবং $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ হলে, M এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $\sin^2 N + \sin^2 3N + \sin^2 5N + \sin^2 7N + \sin^2 9N + \sin^2 11N$ এর মান নির্ণয় কর।

৩৭ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) 2.88 কি.মি. পথ = 2.88×1000 মিটার = 2880 মিটার

চাকাটি 120 বার ঘুরে যায় 2880 মিটার

$$\therefore \text{চাকাটি 1 বার ঘুরে যায় } \frac{2880}{120} \text{ মিটা} = 24 \text{ মিটার}$$

∴ চাকাটির পরিধি 24 মিটার

চাকাটির ব্যাসার্ধ r হলে, পরিধি $2\pi r$ মিটার

$$\text{শর্তমতে, } 2\pi r = 24$$

$$\therefore r = \frac{24}{2\pi} = \frac{12}{3.1416} = 3.82 \text{ মিটার (প্রায়)}$$

∴ চাকাটির ব্যাসার্ধ 3.82 মিটার (প্রায়) (Ans.)

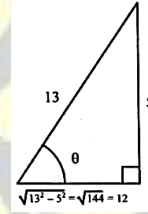
(খ) দেওয়া আছে, $\sin \theta = \frac{5}{13}$ এবং $\cos \theta$ ঋণাত্মক হওয়ায়

θ এর অবস্থান দ্বিতীয় চতুর্ভাগে ($\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$)

$$\therefore \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\frac{5}{13}} = \frac{13}{5}$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ ব্যবধিতে } \tan \theta = -\frac{5}{12}$$

$$\therefore \cot = \frac{-12}{5} \text{ এবং } \sec \theta = \frac{-13}{12}$$



$$\text{বামপক্ষ} = \frac{\tan \theta + \sec(-\theta)}{\cot \theta + \csc(-\theta)}$$

$$= \frac{\tan \theta + \sec \theta}{\cot \theta - \csc \theta}$$

$$= \frac{\frac{5}{12} - \frac{13}{12}}{\frac{12}{5} - \frac{13}{5}} = \frac{-(\frac{5}{12} + \frac{13}{12})}{-(\frac{12}{5} + \frac{13}{5})}$$

$$= \frac{\frac{5+13}{12}}{\frac{12+13}{5}} = \frac{\frac{18}{12}}{\frac{25}{5}} = \frac{18}{12} \times \frac{5}{25}$$

$$= \frac{90}{300} = \frac{3}{10} = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \frac{\tan \theta + \sec(-\theta)}{\cot \theta + \csc(-\theta)} = \frac{3}{10} \text{ (দেখানো হলো)}$$

(গ) দেওয়া আছে, $N = \frac{\pi}{12}$

প্রদত্ত রাশি:

$$\sin^2 N + \sin^2 3N + \sin^2 5N + \sin^2 7N + \sin^2 9N + \sin^2 11N$$

$$= \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \frac{7\pi}{12} + \sin^2 \frac{9\pi}{12} + \sin^2 \frac{11\pi}{12}$$

$$= \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \left\{ \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \right) \right\}^2 +$$

$$\left\{ \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{12} \right) \right\}^2 + \left\{ \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{12} \right) \right\}^2 +$$

$$= \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \left(\cos \frac{\pi}{12} \right)^2 + \left(\cos \frac{3\pi}{12} \right)^2 +$$

$$\left(\cos \frac{5\pi}{12} \right)^2$$

$$= \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{3\pi}{12} +$$

$$\cos^2 \frac{5\pi}{12}$$

$$= \left(\sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} \right) + \left(\sin^2 \frac{3\pi}{12} + \cos^2 \frac{3\pi}{12} \right) +$$

$$\left(\sin^2 \frac{5\pi}{12} + \cos^2 \frac{5\pi}{12} \right)$$

$$= 3 \text{ (Ans.)}$$

৩৮. $p = 3\tan^2 \theta - 4\sqrt{3}\sec \theta + 7$ এবং $Q = 15\sin^2 A + 2\cos A$.
যেখানে, A সূক্ষ্মকোণ।

[ঢাকা বোর্ড-২০২০]

(ক) $30^\circ 15' 36''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

(খ) যদি $P = 0$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হয়, তবে θ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $Q = 7$ হলে, $\tan A$ এর মান নির্ণয় কর।

৩৮ নং প্রশ্নের উত্তর

$$\begin{aligned} (ক) \quad 30^\circ 15' 36'' &= 30^\circ \left(15 \frac{36}{60}\right)' = 30^\circ \left(15 \frac{3}{5}\right)' \\ &= 30^\circ \left(\frac{78}{5}\right)' = \left(30 \frac{78}{5 \times 60}\right)^\circ = \left(30 \frac{13}{50}\right)^\circ = \left(\frac{1513}{50}\right)^\circ \\ &= \frac{1513}{50} \times \frac{\pi}{180} \text{ রেডিয়ান} = 0.5281^0 \text{ (প্রায়) (Ans.)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (খ) \quad \text{দেওয়া আছে, } P &= 3\tan^2 \theta - 4\sqrt{3}\sec \theta + 7 \\ P = 0 \text{ হলে, } 3\tan^2 \theta - 4\sqrt{3}\sec \theta + 7 &= 0, 0 < \theta < 2\pi \\ \text{বা, } 3(\sec^2 \theta - 1) - 4\sqrt{3}\sec \theta + 7 &= 0 \\ \text{বা, } 3\sec^2 \theta - 3 - 4\sqrt{3}\sec \theta + 7 &= 0 \\ \text{বা, } 3\sec^2 \theta - 3 - 4\sqrt{3}\sec \theta + 7 &= 0 \\ \text{বা, } 3\sec^2 \theta - 3 - 4\sqrt{3}\sec \theta + 7 &= 0 \\ \text{বা, } 3\sec^2 \theta - 4\sqrt{3}\sec \theta + 4 &= 0 \\ \text{বা, } (\sqrt{3}\sec \theta)^2 - 2 \cdot \sqrt{3}\sec \theta \cdot 2 + 2^2 &= 0 \\ \text{বা, } (\sqrt{3}\sec \theta - 2)^2 &= 0 \\ \text{বা, } \sqrt{3}\sec \theta - 2 &= 0 \\ \text{বা, } \sqrt{3}\sec \theta &= 2 \\ \text{বা, } \sec \theta &= \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{বা, } \sec \theta &= \sec \frac{\pi}{6} = \sec \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ \text{বা, } \sec \theta &= \sec \frac{\pi}{6} = \sec \frac{11\pi}{6} \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

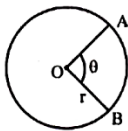
$$(গ) \quad \text{দেওয়া আছে, } Q = 15\sin^2 A + 2\cos A$$

$$\begin{aligned} Q = 7 \text{ হলে,} \\ 15\sin^2 A + 2\cos A &= 7, \text{ যেখানে } A \text{ সূক্ষ্মকোণ} \\ \text{বা, } 15(1 - \cos^2 A) + 2\cos A &= 7 \\ \text{বা, } 15 - 15\cos^2 A + 2\cos A &= 7 \\ \text{বা, } -15\cos^2 A + 2\cos A + 8 &= 0 \\ \text{বা, } 15\cos^2 A - 2\cos A - 8 &= 0 \\ \text{বা, } 15\cos^2 A - 12\cos A + 10\cos A - 8 &= 0 \\ \text{বা, } 3\cos A(5\cos A - 4) + 2(5\cos A - 4) &= 0 \\ \text{বা, } (5\cos A - 4)(3\cos A + 2) &= 0 \\ \text{হয়, } 5\cos A - 4 &= 0 \quad \text{অথবা, } 3\cos A + 2 = 0 \\ \therefore \cos A &= \frac{4}{5} \quad \text{বা, } \cos A = -\frac{2}{3} \\ \cos A = -\frac{2}{3} \text{ গ্রহণযোগ্য নয় কেননা } A \text{ সূক্ষ্মকোণ।} \\ \therefore \cos A &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \text{ (Ans.)}$$

৩৯.



[ময়মনসিংহ বোর্ড-২০২০]

$$(ক) \quad \text{প্রমাণ কর যে, } \cos \frac{17\pi}{10} + \cos \frac{13\pi}{10} + \cos \frac{9\pi}{10} + \cos \frac{\pi}{10} = 0$$

(খ) $\theta = 60^\circ$ এবং $r = 50$ কি.মি. হলে 5 কি.মি./ঘন্টা বেগে A থেকে B তে যেতে কত সময় লাগবে তা নির্ণয় কর।

(গ) $0 < \theta < 2\pi$ হলে θ কোণের \cot এবং cosec অনুপাতের বর্গের যোগফলকে 3 এর সমান ধরে সমীকরণ গঠন কর এবং সমীকরণটি সমাধান কর।

৩৯ নং প্রশ্নের উত্তর

$$\begin{aligned} (ক) \quad \text{বামপক্ষ} &= \cos \frac{17\pi}{10} + \cos \frac{13\pi}{10} + \cos \frac{9\pi}{10} + \cos \frac{\pi}{10} \\ &= \cos \left(2\pi - \frac{3\pi}{10}\right) + \cos \left(\pi + \frac{3\pi}{10}\right) + \cos \left(\pi - \frac{\pi}{10}\right) + \cos \frac{\pi}{10} \\ &= \cos \frac{3\pi}{10} - \cos \frac{3\pi}{10} - \cos \frac{\pi}{10} + \cos \frac{\pi}{10} \\ &= 0 = \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

$$\therefore \cos \frac{17\pi}{10} + \cos \frac{13\pi}{10} + \cos \frac{9\pi}{10} + \cos \frac{\pi}{10} = 0 \text{ (প্রমাণিত)}$$

(খ) দেওয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = OB = 50$ কি.মি.

$$\text{কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, } \theta = 60^\circ = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ রেডিয়ান}$$

$$\text{এখন চাপ, } S = AB = r\theta = 50 \times \frac{\pi}{3} = 52.36 \text{ কি.মি.}$$

দেওয়া আছে, গতিবেগ 5 কি.মি./ঘন্টা

$$A \text{ ও } B \text{ বিন্দুতে পৌঁছাতে প্রয়োজনীয় সময়} = \frac{52.36}{5} \text{ ঘন্টা}$$

$$= 10.472 \text{ ঘন্টা (Ans.)}$$

(গ) দেওয়া আছে, $a^2 + (b+1)^2 = 3; 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\text{বা, } \cot^2 \theta + (\operatorname{cosec} \theta - 1 + 1)^2 = 3 \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$\text{বা, } \cot^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta = 3 \text{ বা, } \cot^2 \theta + -1 + \cot^2 \theta = 3$$

$$\text{বা, } 2\cot^2 \theta = 2 \text{ বা, } \cot^2 \theta = 1$$

$$\cot \theta = \pm 1$$

$$\text{হয়, } \cot \theta = 1$$

$$\text{অথবা, } \cot \theta = -1$$

$$\text{বা, } \cot \theta = 1 = \cot \frac{\pi}{4}$$

$$\text{বা, } \cot \theta = -1 = \cot \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cot \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cot \left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{বা, } \cot \theta = \cot \frac{\pi}{4} = \cot \frac{3\pi}{4} = \cot \frac{7\pi}{4}$$

$$\cot \frac{5\pi}{4}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

$$\therefore \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$\therefore 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ ব্যবধিতে প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান,}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \text{ (Ans.)}$$

$$80. f(x) = \cos x$$

[রাজশাহী বোর্ড-২০২০]

(ক) $\tan \theta = \frac{3}{4}$ হলে, $\operatorname{cosec} \theta$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $f(\theta) + f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sqrt{2}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। যেখানে, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

(গ) $f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + f(\theta) = \sqrt{2}f(\theta)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $f(\theta) - f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

80 নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\tan \theta = \frac{3}{4}$

$$\text{বা, } \frac{1}{\cot \theta} = \frac{3}{4} \text{ বা, } \cot^2 \theta = \frac{16}{9}$$

$$\text{বা, } \operatorname{cosec}^2 \theta - 1 = \frac{16}{9} \text{ বা, } \operatorname{cosec}^2 \theta = \frac{16}{9} + 1$$

$$\text{বা, } \operatorname{cosec}^2 \theta = \frac{16+9}{9} \text{ বা, } \operatorname{cosec} \theta = \pm \sqrt{\frac{25}{9}}$$

$$\therefore \operatorname{cosec} \theta = \pm \frac{5}{3} \text{ (Ans.)}$$

(খ) দেওয়া আছে, $f(x) = \cos x \therefore f(\theta) = \cos \theta$

$$\text{এবং } f(\theta) + f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sqrt{2}$$

$$\therefore \cos \theta + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sqrt{2}$$

$$\text{বা, } \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sqrt{2} - \cos \theta$$

$$\text{বা, } \sin^2 \theta = (\sqrt{2} - \cos \theta)^2$$

$$\text{বা, } 1 - \cos^2 \theta = 2 - 2\sqrt{2}\cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$\text{বা, } 2\cos^2 \theta - 2\sqrt{2}\cos \theta + 1 = 0$$

$$\text{বা, } (\sqrt{2}\cos \theta)^2 - 2\sqrt{2}\cos \theta \cdot 1 + 1^2 = 0$$

$$\text{বা, } (\sqrt{2}\cos \theta - 1)^2 = 0$$

$$\text{বা, } \sqrt{2}\cos \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4} \quad [\because 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}]$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4} \quad (\text{Ans.})$$

(গ) দেওয়া আছে,

$$f(x) = \cos x \text{ এবং } f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + f(\theta) = \sqrt{2}f(\theta)$$

$$\therefore \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + \cos \theta = \sqrt{2}\cos \theta$$

$$\text{বা, } \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}\cos \theta$$

$$\text{বা, } \sin \theta = (\sqrt{2} - 1)\cos \theta$$

$$\text{বা, } \sin \theta(\sqrt{2} + 1) = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)\cos \theta$$

$$\text{বা, } \sqrt{2}\sin \theta + \sin \theta = (2 - 1)\cos \theta$$

$$\text{বা, } \cos \theta - \sin \theta = \sqrt{2}\sin \theta,$$

$$\text{বা, } \cos \theta - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sqrt{2}\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$\therefore f(\theta) - f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad (\text{প্রমানিত})$$

$$81. \sqrt{3}\sin x - \cos x = P \cot \left(\frac{3\pi}{2} - B \right) = Q$$

[দিনাজপুর বোর্ড-২০২০]

(ক) 10 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের যে চাপ কেন্দ্রে 30° কোণ উৎপন্ন করে, তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) $Q = \sqrt{3}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos 3B = 4\cos^3 B - 3\cos B$.

(গ) $P = 2$ এবং $0 \leq x \leq 2\pi$, হলে x এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

82 নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = 10$ সে.মি.

কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 30^\circ = 30 \times \frac{\pi}{180} = 0.5236$ রেডিয়ান

\therefore চাপের দৈর্ঘ্য, $s = r\theta = 10 \times 0.5236 = 5.236$ সে.মি. (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে, $Q = \sqrt{3}$ বা, $\cot \left(\frac{3\pi}{2} - B \right) = \sqrt{3}$

$$\text{বা, } \tan B = \tan \frac{\pi}{3} \therefore B = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{বামপক্ষ} = \cos 3B = \cos 3 \times \frac{\pi}{3} = \cos \pi = -1$$

$$\text{ডানপক্ষ} = 4\cos^3 B - 3\cos B = 4\cos^3 \frac{\pi}{3} - 3\cos \frac{\pi}{3}$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\therefore \cos 3B = 4\cos^3 B - 3\cos B \quad (\text{প্রমাণিত})$$

(গ) দেওয়া আছে, $P = 2$ এবং $0 \leq x \leq 2\pi$

$$\therefore \sqrt{3}\sin x - \cos x = 2 \quad [\text{উদ্বীপক হতে মান বসিয়ে}]$$

$$\text{বা, } \sqrt{3}\sin x = \cos x + 2$$

$$\text{বা, } 3\sin^2 x = \cos^2 x + 4\cos x + 4$$

$$\text{বা, } 3 - 3\cos^2 x = \cos^2 x + 4\cos x + 4$$

$$\text{বা, } 4\cos^2 x + 4\cos x + 1 = 0$$

$$\text{বা, } (2\cos x)^2 + 2 \cdot 2\cos x + 1^2 = 0$$

$$\text{বা, } (2\cos x + 1)^2 = 0$$

$$\text{বা, } 2\cos x + 1 = 0$$

$$\text{বা, } \cos x = -\frac{1}{2} = -\cos \frac{\pi}{3}$$

$$\text{বা, } \cos x = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{বা, } \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3}$$

$$\therefore x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

কিন্তু $x = \frac{4\pi}{3}$ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

$$\text{কেননা } \sqrt{3}\sin \frac{4\pi}{3} - \cos \frac{4\pi}{3}$$

$$= \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1 \neq 2$$

$$\therefore \text{প্রদত্ত ব্যবধিতে নির্ণেয় সমাধান, } x = \frac{2\pi}{3} \quad (\text{Ans.})$$

$$82. \text{psin} \theta + \text{qcos} \theta = r \text{ এবং } \tan \alpha = x - \sec \alpha$$

[কুমিল্লা বোর্ড-২০২০]

(ক) সকাল 8:30 টায় ঘড়ির ঘন্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার অন্তর্গত কোণকে ডিগ্রিতে নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $p\cos \theta - q\sin \theta = \pm \sqrt{p^2 + q^2 - r^2}$

(গ) $x = 2\cos \alpha$ হলে, α এর মান নির্ণয় কর। [যেখানে $0 < \alpha < 2\pi$]

82 নং প্রশ্নের উত্তর

(ক)



আমরা জানি,

ঘড়িতে সর্বমোট 12টি ঘন্টার দাগ কাঁটা থাকে।

$$\therefore \text{ঘন্টার কাঁটার ক্ষেত্রে 12 ঘন্টা কেন্দ্রে উৎপন্ন করে} = 360^\circ$$

$$\therefore \text{ঘন্টার কাঁটার ক্ষেত্রে 1 ঘন্টা কেন্দ্রে উৎপন্ন করে, } = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

$$\therefore \text{ঘন্টার কাঁটার ক্ষেত্রে 1 মিনিট কেন্দ্রে উৎপন্ন করে} = \frac{30^\circ}{60} = 0.5^\circ$$

$$[\therefore 1 \text{ ঘন্টা} = 60 \text{ মি.}]$$

$$\therefore \text{ঘন্টার কাঁটার ক্ষেত্রে 30 মিনিট কেন্দ্রে উৎপন্ন করে } 0.5 \times 30 = 15^\circ$$

$$\therefore \text{সকাল 8:30 টায় ঘড়ির ঘন্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার অন্তর্গত কোণ}$$

$$= 2 \times 30^\circ + 15^\circ$$

$$= 60^\circ + 15^\circ$$

$$= 75^\circ \quad (\text{Ans.})$$

(খ) দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta = a$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = a \text{ বা, } \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = a$$

$$\text{বা, } \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} = a^2 \text{ বা, } \frac{(1 - \cos \theta)^2}{1 - \cos^2 \theta} = a^2$$

$$\text{বা, } \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)} = a^2 \text{ বা, } \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = a^2$$

$$\text{বা, } \frac{1 - \cos \theta + 1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta - 1 - \cos \theta} = \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} \quad [\text{যোজন-বিয়োজন করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{2}{-2\cos \theta} = \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} \text{ বা, } \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1 + a^2}{1 - a^2}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \quad (\text{প্রমাণিত})$$

(গ) দেওয়া আছে, $\tan \alpha = x - \sec \alpha$

$$\text{বা, } \tan \alpha = 2\cos \alpha - \sec \alpha \quad [\because x = 2\cos \alpha]$$

$$\text{বা, } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2\cos \alpha - \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\text{বা, } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2\cos^2 \alpha - 1}{\cos \alpha}$$

$$\text{বা, } 2\cos^2 \alpha - 1 = \sin \alpha \quad [\text{উভয় পক্ষকে } \cos \alpha \text{ দ্বারা গুণ করে}]$$

$$\text{বা, } 2(1 - \sin^2 \alpha) - 1 = \sin \alpha$$

$$\text{বা, } 2 - 2\sin^2 \alpha - 1 - \sin \alpha = 0$$

$$\text{বা, } -2\sin^2 \alpha - \sin \alpha + 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2\sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha - \sin \alpha - 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2\sin \alpha (\sin \alpha + 1) - 1(\sin \alpha + 1) = 0$$

$$\text{বা, } (\sin \alpha + 1)(2\sin \alpha - 1) = 0$$

$$\text{হয়, } \sin \alpha + 1 = 0 \quad \text{অথবা, } 2\sin \alpha - 1 = 0$$

$$\text{বা, } \sin \alpha = -1 \quad \text{বা, } \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \sin \alpha = -\sin \frac{\pi}{2} \quad \text{বা, } \sin \alpha = \sin \frac{\pi}{6} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\text{বা, } \sin \alpha = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{বা, } \sin \alpha = \sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{বা, } \sin \alpha = \sin \frac{3\pi}{2} \quad \therefore \alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore \alpha = \frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore 0 < \alpha < 2\pi \text{ এর মধ্যে } \alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{কিন্তু } \alpha = \frac{3\pi}{2}, \tan \alpha = 2\cos \alpha - \sec \alpha \text{ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না।}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad (\text{Ans.})$$

$$83. A = \tan \theta + \sec \theta$$

[চট্টগ্রাম বোর্ড-২০২০]

$$(ক) \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ হলে, } \alpha \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

$$(খ) A = x \text{ হলে, প্রমাণ কর যে, } \sec \theta = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \right)$$

$$(গ) A = \sqrt{3} \text{ হলে, } \theta \text{ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

৪৩ নং প্রশ্নের উত্তর

$$(ক) \text{ দেওয়া আছে, } \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \text{ যেখানে, } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

$$\text{বা, } \cos \alpha = -\cos \frac{\pi}{4} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore \alpha = \frac{3\pi}{4} \quad (\text{Ans.})$$

$$(খ) \text{ দেওয়া আছে, } A = \tan \theta + \sec \theta \text{ এবং } A = x$$

$$\therefore x = \tan \theta + \sec \theta$$

$$\text{বা, } x - \sec \theta = \tan \theta$$

$$\text{বা, } x^2 - 2x\sec \theta + \sec^2 \theta = \tan^2 \theta$$

$$\text{বা, } x^2 - 2x\sec \theta + \sec^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$$

$$\text{বা, } x^2 - 2x\sec \theta + 1 = 0 \text{ dt, } 2x\sec \theta = x^2 + 1$$

$$\text{বা, } \sec \theta = \frac{x^2 + 1}{2x}$$

$$\therefore \sec \theta = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \right) \quad (\text{প্রমাণিত})$$

$$(গ) \text{ দেওয়া আছে, } R = \tan \alpha + \sec \alpha$$

$$R = \sqrt{3} \text{ হলে,}$$

$$\therefore \tan \alpha + \sec \alpha = \sqrt{3} \text{ বা, } \sec \alpha = \sqrt{3} - \tan \alpha$$

$$\text{বা, } \sec^2 \alpha = (\sqrt{3} - \tan \alpha)^2 \quad [\text{বর্গ করে}]$$

$$\text{বা, } 1 + \tan^2 \alpha = 3 - 2\sqrt{3}\tan \alpha + \tan^2 \alpha$$

$$\text{বা, } 2\sqrt{3}\tan \alpha = 2$$

$$\text{বা, } \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \frac{\pi}{6} = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) \quad [\because 0 \leq \alpha \leq 2\pi]$$

$$\text{বা, } \tan \alpha = \tan \frac{\pi}{6} = \tan \frac{7\pi}{6} \therefore \alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \text{ হলে, } \tan \frac{\pi}{6} + \sec \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\text{এবং } \alpha = \frac{7\pi}{6} \text{ হলে,}$$

$$\tan \frac{7\pi}{6} + \sec \frac{7\pi}{6} = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) + \sec \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \tan \frac{\pi}{6} - \sec \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \alpha = \frac{7\pi}{6} \text{ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6} \quad (\text{Ans.})$$

$$88. A = \sec \alpha + \tan \alpha, B = \cot^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta$$

[যশোর বোর্ড-২০২০]

$$(ক) \text{ চিত্রসহ } -840^\circ \text{ কোণের অবস্থান কোন চতুর্ভাগে নির্ণয় কর।}$$

$$(খ) \text{ দেখাও যে, } (A^2 - 1)\operatorname{cosec} \alpha = A^2 + 1$$

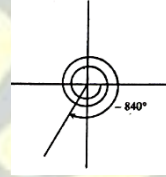
$$(গ) \text{ যদি } B = \frac{5}{3} \text{ হয় তবে } \theta \text{ এর মান নির্ণয় কর। [যখন } 0 < \theta < 2\pi]$$

৪৪ নং প্রশ্নের উত্তর

$$(ক) -840^\circ = -810^\circ - 30^\circ$$

$$= -9 \times 90^\circ - 30^\circ$$

-840° একটি ঋণাত্মক কোণ এবং -840° কোণটি উৎপন্ন করতে কোনো রশ্মিকে ঘড়ির কাঁটার দিকে দুইবার সম্পূর্ণ ঘুরে একই দিকে আরো এক সমকোণ বা 90° এবং 30° ঘুরে তৃতীয় চতুর্ভাগে আসতে হয়েছে।



সুতরাং, -840° তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করছে। (Ans.)

$$(খ) \text{ দেওয়া আছে, } \tan \alpha + \sec \alpha = A$$

$$\text{বা, } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} = A$$

$$\text{বা, } \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = A$$

$$\text{বা, } \frac{(1 + \sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha} = A^2 \quad [\text{উভয় পক্ষকে বর্গ করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{(1 + \sin \alpha)^2}{1 - \sin^2 \alpha} = A^2 \quad [\because \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta]$$

$$\text{বা, } \frac{(1 + \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)} = A^2$$

$$\text{বা, } \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} = A^2$$

$$\text{বা, } \frac{1 + \sin \alpha + 1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha - 1 + \sin \alpha} = \frac{A^2 + 1}{A^2 - 1} \quad [\text{যোজন-বিয়োজন করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{2}{2\sin \alpha} = \frac{A^2 + 1}{A^2 - 1}$$

$$\text{বা, } \operatorname{cosec} \alpha = \frac{A^2 + 1}{A^2 - 1}$$

$$\therefore (A^2 - 1)\operatorname{cosec} \alpha = A^2 + 1 \quad (\text{দেখানো হলো})$$

$$(গ) \text{ দেওয়া আছে,}$$

$$a = \cot \theta \text{ এবং } b = \operatorname{cosec} \theta$$

$$\text{প্রদত্ত সমীকরণ,}$$

$$3(a^2 + b^2) = 5$$

$$\text{বা, } 3\cot^2 \theta + 3\operatorname{cosec}^2 \theta = 5 \text{ বা, } \cot^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta = \frac{5}{3}$$

$$\text{বা, } \cot^2 \theta + 1 + \cot^2 \theta = \frac{5}{3} \text{ বা, } 2\cot^2 \theta = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$$

$$\text{বা, } \cot^2 \theta = \frac{1}{3} \text{ বা, } \cot \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{এখন, } \cot \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ থেকে পাই, } \cot \theta = \cot \frac{\pi}{3} = \cot \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \quad [\because 0 < \theta < 2\pi]$$

$$\text{আবার, } \cot \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ থেকে পাই,}$$

$$\cot \theta = \cot \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \cot \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\therefore \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \quad [\because 0 < \theta < 2\pi]$$

\therefore নির্দিষ্ট সীমা $0 < \theta < 2\pi$ এর মধ্যে θ এর সম্ভাব্য মানসমূহ

$$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \quad (\text{Ans.})$$

৪৫. $p = \operatorname{cosec} x + \cot x$ এবং $Q = 13\sin\theta - 5$

[বরিশাল বোর্ড-২০২০]

(ক) যদি $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ হয়, তবে θ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\operatorname{cosec} x = \frac{1+p^2}{2p}$

(গ) যদি $Q = 0$ হয় এবং $\sin\theta$ ধনাত্মক ও $\cos\theta$ ঋণাত্মক হয় তবে $\frac{\tan\theta - \sec(-\theta)}{\cot\theta - \csc(-\theta)}$ এর মান নির্ণয় কর।

৪৫ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\sin\theta = -\sin\frac{\pi}{3}$ বা, $\sin\theta = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

বা, $\sin\theta = \sin\frac{4\pi}{3} \therefore \theta = \frac{4\pi}{3}$ (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে, $p = \operatorname{cosec} x + \cot x$

বা, $\cot x + \operatorname{cosec} x = p$

বা, $\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\sin x} = p$ বা, $\frac{1+\cos x}{\sin x} = p$

বা, $\frac{(1+\cos x)^2}{\sin^2 x} = p^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{(1+\cos x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = p^2$

বা, $\frac{1+\cos x}{1-\cos x} = p^2$

বা, $\frac{1+\cos x+1-\cos x}{1+\cos x-1+\cos x} = \frac{p^2+1}{p^2-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\cos x} = \frac{p^2+1}{p^2-1}$ বা, $\cos x = \frac{p^2-1}{p^2+1}$

বা, $\cos^2 x = \frac{(p^2-1)^2}{(p^2+1)^2}$ বা, $1 - \sin^2 x = \frac{p^4-2p^2+1}{p^4+2p^2+1}$

বা, $1 - \frac{p^4-2p^2+1}{p^4+2p^2+1} = \sin^2 x$

বা, $\sin^2 x = \frac{p^4+2p^2+1-p^4+2p^2-1}{p^4+2p^2+1}$

বা, $\sin^2 x = \frac{4p^2}{(p^2+1)^2}$

$\therefore \sin x = \frac{2p}{p^2+1}$ [বর্গমূল করে]

$\therefore \operatorname{cosec} x = \frac{1+p^2}{2p}$ (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে, $Q = 13\sin\theta - 5$ এবং $Q = 0$

$\therefore 13\sin\theta - 5 = 0$ বা, $13\sin\theta = 5 \therefore \sin\theta = \frac{5}{13}$

$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{5}{13}} = \frac{13}{5}$

$\therefore \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$

$\therefore \cos\theta = \pm \frac{12}{13}$

$\cos\theta$ ঋণাত্মক হওয়ায়, $\cos\theta = -\frac{12}{13}$

$\therefore \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{-\frac{12}{13}} = -\frac{13}{12}$

$\therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}$

$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{-\frac{5}{12}} = -\frac{12}{5}$

প্রদত্ত রাশি = $\frac{\tan\theta - \sec(-\theta)}{\cot\theta - \csc(-\theta)} = \frac{\tan\theta - \sec\theta}{\cot\theta + \csc\theta}$

= $\frac{\frac{5}{12} - \left(-\frac{13}{12}\right)}{-\frac{12}{5} + \frac{13}{5}} = \frac{\frac{5+13}{12}}{\frac{-12+13}{5}} = \frac{\frac{18}{12}}{\frac{1}{5}} = \frac{18}{12} \times \frac{5}{1} = \frac{10}{3}$ (Ans.)

৪৬. $\tan\theta = a, \sec\theta = b$ এবং $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = c$

[ঢাকা বোর্ড-২০১৯]

(ক) ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত 5:6:7 হলে ক্ষুদ্রতম কোণটিকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\frac{a+b-1}{a-b+1} = c$

(গ) $c = \sqrt{3}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর, যখন $0 < \theta \leq 2\pi$

৪৬ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) মনে করি, কোণ তিনটি $5x, 6x$ ও $7x$ রেডিয়ান।

আমরা জানি, ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180° বা π রেডিয়ান।

$\therefore 5x + 6x + 7x = \pi$ বা, $18x = \pi \therefore x = \frac{\pi}{18}$

\therefore ক্ষুদ্রতম কোণ = $5x = 5 \times \frac{\pi}{18}$ রেডিয়ান = $\frac{5\pi}{18}$ রেডিয়ান। (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে, $\tan\theta = a, \sec\theta = b$, এবং $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = c$

বামপক্ষ = $\frac{a+b-1}{a-b+1} = \frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$

= $\frac{\sec^2\theta - \tan^2\theta + \tan\theta - \sec\theta}{\sec\theta + \tan\theta - 1}$

= $\frac{(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) - (\sec\theta - \tan\theta)}{(\sec\theta + \tan\theta - 1)}$

= $\frac{(\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta - 1)}{(\sec\theta + \tan\theta - 1)}$

= $\frac{1}{\sec\theta - \tan\theta} = \frac{1}{\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

= c = ডানপক্ষ

$\therefore \frac{a+b-1}{a-b+1} = c$ (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে, $c = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

আবার, $c = \sqrt{3}$

$\therefore \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \sqrt{3}$

বা, $\frac{\cos^2\theta}{(1-\sin\theta)^2} = 3$ [বর্গ করে]

বা, $\cos^2\theta = 3(1-\sin\theta)^2$

বা, $1 - \sin^2\theta = 3(1 - 2\sin\theta + \sin^2\theta)$

বা, $1 - \sin^2\theta = 3 - 6\sin\theta + 3\sin^2\theta$

বা, $4\sin^2\theta - 6\sin\theta + 2 = 0$

বা, $2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$

বা, $2\sin^2\theta - 2\sin\theta - \sin\theta + 1 = 0$

বা, $2\sin\theta(\sin\theta - 1) - 1(\sin\theta - 1) = 0$

$\therefore (\sin\theta - 1)(2\sin\theta - 1) = 0$

হয়, $\sin\theta - 1 = 0$

অথবা, $2\sin\theta - 1 = 0$

বা, $\sin\theta = 1$

বা, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{2}$

বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ এবং $\frac{5\pi}{6}$ এর জন্য $c = \sqrt{3}$ সিদ্ধ নয়।

\therefore নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{6}$ (Ans.)

৪৭. $x = a\cos\theta$ এবং $y = b\sin\theta$

[রাজশাহী বোর্ড-২০১৯]

(ক) $\frac{x}{y} = 1$ হলে $\frac{a\sin\theta + b\cos\theta}{a\sin\theta - b\cos\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $x - y = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ হলে প্রমাণ কর যে, $a\sin\theta + b\cos\theta - c = 0$

(গ) $a = 3$ এবং $b = \sqrt{2}$ হলে $x + y^2 = 3$ সমীকরণটি সমাধান কর, যখন $0 \leq \theta \leq 2\pi$

৪৭ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$

এখন, $\frac{x}{y} = 1$ বা, $\frac{a \cos \theta}{b \sin \theta} = 1$ বা, $\cos \theta = \frac{b \sin \theta}{a}$

এখন, $\frac{a \sin \theta + b \cos \theta}{a \sin \theta - b \cos \theta} = \frac{a \sin \theta + b \cdot \frac{b \sin \theta}{a}}{a \sin \theta - b \cdot \frac{b \sin \theta}{a}}$
 $= \frac{\frac{\sin \theta}{a}(a^2 + b^2)}{\frac{\sin \theta}{a}(a^2 - b^2)} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে, $x - y = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$

বা, $a \cos \theta - b \sin \theta = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$

বা, $(a \cos \theta - b \sin \theta)^2 = a^2 + b^2 - c^2$

বা, $a^2 \cos^2 \theta - 2ab \cos \theta \sin \theta + b^2 \sin^2 \theta = a^2 + b^2 - c^2$

বা, $a^2(1 - \sin^2 \theta) - 2ab \cos \theta \sin \theta + b^2(1 - \cos^2 \theta) = a^2 + b^2 - c^2$

বা, $a^2 + b^2 - a^2 \sin^2 \theta - 2ab \cos \theta \sin \theta - b^2 \cos^2 \theta = a^2 + b^2 - c^2$

বা, $-(a^2 \sin^2 \theta + 2ab \cos \theta \sin \theta + b^2 \cos^2 \theta) = -c^2$

বা, $(a \sin \theta + b \cos \theta)^2 = c^2$

বা, $a \sin \theta + b \cos \theta = c$

$\therefore a \sin \theta + b \cos \theta - c = 0$ (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে, $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$

$a = 3$ এবং $b = \sqrt{2}$ হলে,

$x = 3 \cos \theta$

$y = \sqrt{2} \sin \theta$

এখন, $x + y^2 = 3$

বা, $3 \cos \theta + (\sqrt{2} \sin \theta)^2 = 3$

বা, $3 \cos \theta + 2(1 - \cos^2 \theta) = 3$

বা, $3 \cos \theta + 2 - 2 \cos^2 \theta - 3 = 0$

বা, $2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta + 1 = 0$

বা, $2 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - \cos \theta + 1 = 0$

বা, $2 \cos \theta (\cos \theta - 1) - 1(\cos \theta - 1) = 0$

বা, $(\cos \theta - 1)(2 \cos \theta - 1) = 0$

$\therefore \cos \theta - 1 = 0$

অথবা, $2 \cos \theta - 1 = 0$

বা, $\cos \theta = 1$

বা, $\cos \theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos \theta = \cos 0$

বা, $\cos \theta = \cos \frac{\pi}{3}$

$= \cos 2\pi$

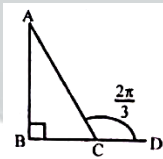
$= \cos \frac{5\pi}{3}$

$\therefore \theta = 0, 2\pi$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

\therefore নির্ণেয় সমাধান: $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$ (Ans.)

8৮. (i)



(ii) $2 \sin \alpha \cos \alpha + 1 = 2 \cos \alpha + \sin \alpha$

[দিনাজপুর বোর্ড-২০১৯]

(ক) $\cos \theta = -\frac{4}{5}, 0 < \theta < \pi$ হলে, $\tan \theta$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\cot(A + C) = \frac{\cot A \cot C - 1}{\cot C + \cot A} + \cot B$

(গ) $0 \leq \alpha < 2\pi$ সীমার মধ্যে (ii) এ বর্ণিত সমীকরণটি সমাধান কর।

8৮ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\cos \theta = -\frac{4}{5}$

$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5} \quad [\because 0 < \theta < \pi]$

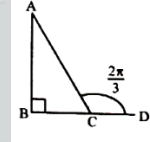
$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$ (Ans.)

(খ) এখানে, $\angle ACD = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore \angle ACB = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

এবং $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \angle BAC = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$



এখন,

$\cot A = \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

$\cot C = \cot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cot B = \cot \frac{\pi}{2} = 0$

বামপক্ষ = $\cot(A + C) = \cot\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \cot \frac{\pi}{2} = 0$

ডানপক্ষ = $\frac{\cot A \cot C - 1}{\cot C + \cot A} + \cot B = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}} + 0$
 $= \frac{1 - 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}} = 0$

$\therefore \cot(A + C) = \frac{\cot A \cot C - 1}{\cot C + \cot A} + \cot B$ (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে, $2 \sin \alpha \cos \alpha + 1 = 2 \cos \alpha + \sin \alpha$

বা, $2 \cos \alpha (\sin \alpha - 1) = \sin \alpha - 1$

বা, $2 \cos \alpha (\sin \alpha - 1) - (\sin \alpha - 1) = 0$

বা, $(\sin \alpha - 1)(2 \cos \alpha - 1) = 0$

হয়, $\sin \alpha = 1$

অথবা, $2 \cos \alpha - 1 = 0$

বা, $\sin \alpha = \sin \frac{\pi}{2}$

বা, $\cos \alpha = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} = \cos \frac{5\pi}{3}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

\therefore নির্ণেয় সমাধান: $\alpha = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$ (Ans.)

8৯. $X = \frac{\cot A + \operatorname{cosec} A - 1}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1}$ এবং $Y = \cot A - \operatorname{cosec} A$

[কুমিল্লা বোর্ড-২০১৯]

(ক) $A = \frac{2\pi}{3}$ হলে Y এর মান নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $XY = -1$

(গ) $Y = (\sqrt{3})^{-1}$ এবং $0 \leq A \leq 2\pi$ হলে A এর মান নির্ণয় কর।

8৯ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) $A = \frac{2\pi}{3}$ হলে,

$Y = \cot A - \operatorname{cosec} A$

$= \cot \frac{2\pi}{3} - \operatorname{cosec} \frac{2\pi}{3}$

$= \cot 120^\circ - \operatorname{cosec} 120^\circ$

$= \cot(90^\circ + 30^\circ) - \operatorname{cosec}(90^\circ + 30^\circ)$

$= -\tan 30^\circ - \sec 30^\circ$

$= -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{-1-2}{\sqrt{3}}$

$= \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$ (Ans.)

(খ) $X = \frac{\cot A + \operatorname{cosec} A - 1}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1}$

$= \frac{\cot A + \operatorname{cosec} A - (\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A)}{\cot A - \cot A + 1}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cot A + \operatorname{cosec} A - (\operatorname{cosec} A + \cot A)(\operatorname{cosec} A - \cot A)}{\cot A - \cot A + 1} \\
 &= \frac{(\cot A + \cot A)(1 - \cot A + \cot A)}{(1 - \cot A + \cot A)} \\
 &= \cot A + \operatorname{cosec} A \\
 \therefore XY &= (\cot A + \cot A)(\cot A - \cot A) \\
 &= \cot^2 A - \operatorname{cosec}^2 A = -(\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A) \\
 &= -1 \text{ (প্রমাণিত)}
 \end{aligned}$$

(গ) দেওয়া আছে, $Y = (\sqrt{3})^{-1}$

বা, $\cot A - \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\cos A}{\sin A} - \frac{1}{\sin A} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\cos A - 1}{\sin A} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{(\cos A - 1)^2}{\sin^2 A} = \frac{1}{3}$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{(\cos A - 1)^2}{(1 - \cos^2 A)} = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{(1 - \cos A)^2}{(1 - \cos A)(1 + \cos A)} = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \frac{1}{3}$

বা, $3 - 3\cos A = 1 + \cos A$

বা, $3 - 1 = \cos A + 3\cos A$

বা, $4\cos A = 2$

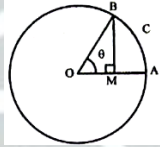
বা, $\cos A = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}, \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore A = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

কিন্তু $A = \frac{\pi}{3}, \cot A - \operatorname{cosec} A = (\sqrt{3})^{-1}$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না।

\therefore নির্ণেয় মান: $A = \frac{5\pi}{3}$ (Ans.)

৫০.



চিত্রে $OA = 10$ সে.মি.

[চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৯]

- (ক) θ^0 কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।
- (খ) যদি $\theta = 60^0$ হয় এবং একজন দৌড়বিদ A বিন্দু থেকে যাত্রা শুরু করে B বিন্দুতে পৌঁছাতে 5 সেকেন্ড সময় নেয় তবে তার গতিবেগ নির্ণয় কর।
- (গ) $2\left(\frac{OM}{OB}\right)^2 = 1 + 2\left(\frac{BM}{OB}\right)^2$ হয় তবে θ এর মান নির্ণয় কর। [যেখানে $0 < \theta < 2\pi$]

৫০ নং প্রশ্নের উত্তর

- (ক) আমরা জানি, $180^\circ = \pi^\circ$
- বা, $1^\circ = \frac{\pi}{180}$
- $\therefore \theta^\circ = \left(\frac{\pi\theta}{180}\right)$ (Ans.)
- (খ) দেওয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = OA = 10$ সে.মি.
- কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 60^\circ$ সে.মি.
- $= 60 \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $= \frac{\pi}{3}$ রেডিয়ান।
- এখন, চাপ, $S = AB = r\theta = 10 \times \frac{\pi}{3}$
- $= 10.4719$ সে.মি.
- দৌড়বিদ 5 সেকেন্ডে অতিক্রম করে 10.4719 সে.মি.
- \therefore দৌড়বিদ 1 সেকেন্ডে অতিক্রম করে $\frac{10.4719}{5}$ সে.মি.
- $= 2.094$ সে.মি.
- \therefore গতিবেগ 2.094 সে.মি./সেকেন্ড (Ans.)

- (গ) উদ্দীপক হতে পাই, $\cos \theta = \frac{OM}{OB}$ এবং $\sin \theta = \frac{BM}{OB}$
- দেওয়া আছে, $2\left(\frac{OM}{OB}\right)^2 = 1 + 2\left(\frac{BM}{OB}\right)^2$
- বা, $2\cos^2 \theta = 1 + 2\sin^2 \theta$
- বা, $2(1 - \sin^2 \theta) = 1 + 2\sin^2 \theta$
- বা, $2 - 2\sin^2 \theta - 1 - 2\sin^2 \theta = 0$
- বা, $-4\sin^2 \theta = -1$
- বা, $\sin^2 \theta = \frac{1}{4}$ বা, $\sin \theta = \pm \frac{1}{2}$
- এখন, $\sin \theta = \frac{1}{2}$ বা, $\sin \theta = \sin \frac{\pi}{6} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$
- $\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ অথবা, $\sin \theta = \frac{1}{2}$
- বা, $\sin \theta = -\sin \frac{\pi}{6}$
- বা, $\sin \theta = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$
- বা, $\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$
- \therefore নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে, $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ (Ans.)

৫১. $M = \tan \theta, N = \sec \theta$ এবং $P = \sin \theta$

[সিলেট বোর্ড-২০১৯]

- (ক) পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি.। পৃথিবীর উপরের যে দুইটি স্থান কেন্দ্রে 7^0 কোণ উৎপন্ন করে তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।
- (খ) প্রমাণ কর যে, $\frac{1-M-N}{N-M-1} = \sqrt{\frac{1+P}{1-P}}$
- (গ) $P^2N - \frac{1}{N} = 1$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর; যেখানে $0 \leq \theta \leq 2\pi$

৫১ নং প্রশ্নের উত্তর

- (ক) এখানে, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $r = 6440$ কি.মি.
- কোণ $\theta = 7^\circ = \frac{7 \times \pi}{180}$ রেডিয়ান
- আমরা জানি, $S = r\theta = 6440 \times \frac{7 \times \pi}{180}$ কি.মি.
- $= 786.794$ কি.মি. (প্রায়) (Ans.)
- (খ) দেওয়া আছে, $M = \tan \theta, N = \sec \theta$ এবং $P = \sin \theta$
- এখন, বামপক্ষ $= \frac{1-M-N}{N-M-1} = \frac{1-\tan \theta - \sec \theta}{\sec \theta - \tan \theta - 1}$
- $= \frac{(\sec^2 \theta - \tan^2 \theta) - \tan \theta - \sec \theta}{\sec \theta - \tan \theta - 1}$
- $= \frac{(\sec \theta + \tan \theta)(\sec \theta - \tan \theta) - (\tan \theta + \sec \theta)}{\sec \theta - \tan \theta - 1}$
- $= \frac{(\sec \theta + \tan \theta)(\sec \theta - \tan \theta - 1) - (\tan \theta + \sec \theta)}{(\sec \theta - \tan \theta - 1)}$
- $= \sec \theta + \tan \theta$
- $= \frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
- $= \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$
- $= \sqrt{\frac{(1 + \sin \theta)^2}{\cos^2 \theta}}$
- $= \sqrt{\frac{(1 + \sin \theta)^2}{1 - \sin^2 \theta}}$
- $= \sqrt{\frac{(1 + \sin \theta)(1 + \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}}$
- $= \sqrt{\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}} = \sqrt{\frac{1+P}{1-P}}$
- $=$ ডানপক্ষ
- $\therefore \frac{1-M-N}{N-M-1} = \sqrt{\frac{1+P}{1-P}}$ (প্রমাণিত)
- (গ) $P^2N - \frac{1}{N} = 1$
- বা, $(\sin \theta)^2 \cdot \sec \theta - \frac{1}{\sec \theta} = 1$

বা, $\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} - \cos \theta = 1$

বা, $\frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\cos \theta} = 1$

বা, $1 - \cos^2 \theta - \cos^2 \theta = \cos \theta$

বা, $1 - 2\cos^2 \theta - \cos \theta = 0$

বা, $2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0$

বা, $2\cos^2 \theta + 2\cos \theta - \cos \theta - 1 = 0$

বা, $2\cos \theta (\cos \theta + 1) - 1(\cos \theta + 1) = 0$

বা, $(2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) = 0$

অর্থাৎ, $2\cos \theta - 1 = 0$

অথবা, $\cos \theta + 1 = 0$

বা, $\cos \theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos \theta = -1$

বা, $\cos \theta = \cos \frac{\pi}{3} = \cos \frac{5\pi}{3}$

বা, $\cos \theta = \cos \pi$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

$\therefore \theta = \pi$

\therefore নির্ণেয় মান, $\theta = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$ (Ans.)

৫২. $P = 10\sin^2 \alpha + 6\cos^2 \alpha$ এবং $Q = \frac{\sin \theta - \cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta - 1}$ [যশোর বোর্ড-২০১৯]

(ক) $\sin A = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; যেখানে $0 < A < \frac{3\pi}{2}$ হলে A এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $P = 7$ হলে $\cot \alpha$ এর মান নির্ণয় কর। যখন $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

(গ) প্রমাণ কর যে, $Q = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$

৫২ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\sin A = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ যেখানে, $0 < A < \frac{3\pi}{2}$

বা, $\sin A = -\sin \frac{\pi}{4} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(\frac{5\pi}{4} \right)$

$\therefore A = \frac{5\pi}{4}$ (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে, $P = 10\sin^2 \alpha + 6\cos^2 \alpha$ এবং $P = 7$

$\therefore 10\sin^2 \alpha + 6\cos^2 \alpha = 7$

বা, $10\sin^2 \alpha + 6(1 - \sin^2 \alpha) = 7$

বা, $10\sin^2 \alpha + 6 - 6\sin^2 \alpha = 7$

বা, $4\sin^2 \alpha = 7 - 6$

বা, $\sin^2 \alpha = \frac{1}{4}$

বা, $\sin \alpha = \pm \frac{1}{2}$

বা, $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ $\left[\because \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \right]$

বা, $\sin \alpha = \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right)$

$\therefore \alpha = \frac{5\pi}{6}$

$\therefore \cot \alpha = \cot \left(\frac{5\pi}{6} \right) = \frac{1}{\tan \left(\frac{5\pi}{6} \right)} = -\sqrt{3}$ (Ans.)

(গ) দেওয়া আছে,

$A = \frac{\sin \theta - \cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta - 1} = \frac{\cos \theta (\tan \theta - 1 + \sec \theta)}{\cos \theta (\tan \theta + 1 - \sec \theta)}$

$= \frac{(\tan \theta + \sec \theta) - (\sec^2 \theta - \tan^2 \theta)}{(\tan \theta + \sec \theta) - (\sec^2 \theta - \tan^2 \theta)}$

$= \frac{\tan \theta - \sec \theta + 1}{(\sec \theta + \tan \theta) - (\sec \theta + \tan \theta)(\sec \theta - \tan \theta)}$

$= \frac{\tan \theta - \sec \theta + 1}{(\sec \theta + \tan \theta)(1 - \sec \theta + \tan \theta)}$

$= \frac{\tan \theta - \sec \theta + 1}{(1 - \sec \theta + \tan \theta)}$

$= \sec \theta + \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$

বা, $A = B$ $\left[\because B = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right]$

বা, $A^2 = B^2$

$\therefore A^2 - B^2 = 0$ (প্রমাণিত)

৫৩. $A = 15\cos^2 \alpha + 2\sin \alpha$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

$B = 3\sin^2 \theta + 5\cos^2 \theta$

[বরিশাল বোর্ড-২০১৯]

(ক) প্রমাণ কর যে, রেডিয়ান কোণ একটি ধ্রুব কোণ।

(খ) $A = 7$ হলে, $\cot \alpha$ এর মান নির্ণয় কর।

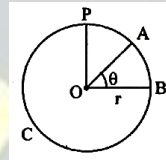
(গ) $B = 4$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর।

৫৩ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট PABC বৃত্তে, AB চাপ বৃত্তের ব্যাসার্ধ OB এর সমাধান হওয়ায়, $\angle AOB =$ এক রেডিয়ান কোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOB = \theta$ একটি ধ্রুব কোণ OB রেখাংশের (ব্যাসার্ধের) উপর O বিন্দুতে OP লম্ব আঁকি।

OP লম্ববৃত্তের পরিধিকে P বিন্দুতে ছেদ করে।

চাপ, PB = পরিধির এক-চতুর্থাংশ $= \frac{1}{4} \times 2\pi r = \frac{\pi r}{2}$ এবং চাপ AB = r (ব্যাসার্ধ) $[\angle AOB = 1$ রেডিয়ান]



বৃত্তের কোনো চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক।

$\frac{\angle AOB}{\angle POB} = \frac{\text{চাপ AB}}{\text{চাপ PB}}$

$\therefore \angle AOB = \frac{\text{চাপ AB}}{\text{চাপ PB}} \times \angle POB = \frac{r}{\frac{\pi r}{2}} \times \text{এক সমকোণ}$

$[OP$ ব্যাসার্ধ এবং OB এর উপর লম্ব $= \frac{2}{\pi}$ সমকোণ।

যেহেতু সমকোণ π ধ্রুবক সেহেতু $\angle AOB = 0$ একটি ধ্রুব কোণ। (প্রমাণিত)

(খ) $A = 7$ হলে,

$15\cos^2 \alpha + 2\sin \alpha = 7$

বা, $15\cos^2 \alpha + 2\sin \alpha - 7 = 0$

বা, $15 - 15\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha - 7 = 0$

বা, $-15\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha + 8 = 0$

বা, $15\sin^2 \alpha - 2\sin \alpha - 8 = 0$

বা, $15\sin^2 \alpha - 12\sin \alpha + 10\sin \alpha - 8 = 0$

বা, $3\sin \alpha (5\sin \alpha - 4) + 2(5\sin \alpha - 4) = 0$

বা, $(5\sin \alpha - 4)(3\sin \alpha + 2) = 0$

$\therefore 5\sin \alpha - 4 = 0$

অথবা, $3\sin \alpha + 2 = 0$

বা, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

বা, $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$

বা, $\sin^2 \alpha = \frac{16}{25}$

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ব্যবধিতে $\sin \alpha$ ধনাত্মক।

বা, $1 - \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$

$\therefore \sin \alpha = -\frac{2}{3}$ গ্রহণযোগ্য নয়।

বা, $\cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$

বা, $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$

$\therefore \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ এর মধ্যে $\cos \alpha$ ঋণাত্মক এবং $\sin \alpha$ ধনাত্মক।

$\therefore \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$ (Ans.)

(গ) $B = 4$ হলে, $3\sin^2 \theta + 5\cos^2 \theta = 4$

বা, $3\sin^2 \theta + 5 - 5\sin^2 \theta = 4$

বা, $5 - 2\sin^2 \theta = 4$ বা, $2\sin^2 \theta = 1$

বা, $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}$ বা, $\sin \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

'+' চিহ্ন নিয়ে, $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right)$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

'-' চিহ্ন নিয়ে, $\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right)$

$\therefore \theta = \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

\therefore নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ (Ans.)

৫৪. $P = \tan \theta + \sec \theta$ এবং $Q = \cot^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta$

[সকল বোর্ড-২০১৮]

(ক) $\sec \theta - \tan \theta$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) দেখাও যে, $\cos \theta = \frac{2P}{P^2+1}$

(গ) $Q = 3$ হলে, প্রদত্ত সমীকরণটি সমাধান কর, যখন $0 < \theta < 2\pi$

৫৪ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $P = \tan \theta + \sec \theta$

এখন, $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$

বা, $(\sec \theta + \tan \theta)(\sec \theta - \tan \theta) = 1$

বা, $P(\sec \theta - \tan \theta) = 1$

$\therefore \sec \theta - \tan \theta = \frac{1}{P}$ (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে, $P = \tan \theta + \sec \theta$

বা, $P = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta}$ বা, $P = \frac{1+\sin \theta}{\cos \theta}$

বা, $P^2 = \frac{(1+\sin \theta)^2}{\cos^2 \theta}$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{(1+\sin \theta)^2}{1-\sin^2 \theta} = P^2$ বা, $\frac{(1+\sin \theta)^2}{(1+\sin \theta)(1-\sin \theta)} = P^2$

বা, $\frac{1+\sin \theta}{1-\sin \theta} = P^2$

বা, $\frac{1+\sin \theta+1-\sin \theta}{1+\sin \theta-1+\sin \theta} = \frac{P^2+1}{P^2-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\sin \theta} = \frac{P^2+1}{P^2-1}$ বা, $\frac{1}{\sin \theta} = \frac{P^2+1}{P^2-1}$

বা, $\sin \theta = \frac{P^2-1}{P^2+1}$ বা, $\sin^2 \theta = \frac{(P^2-1)^2}{(P^2+1)^2}$

বা, $1 - \cos^2 \theta = \frac{(P^2-1)^2}{(P^2+1)^2}$ বা, $1 - \frac{(P^2-1)^2}{(P^2+1)^2} = \cos^2 \theta$

বা, $\frac{(P^2+1)^2 - (P^2-1)^2}{(P^2+1)^2} = \cos^2 \theta$ বা, $\cos^2 \theta = \frac{4P^2}{(P^2+1)^2}$

$\therefore \cos \theta = \frac{2P}{P^2+1}$ (দেখানো হলো)

(গ) দেওয়া আছে, $a^2 + (b+1)^2 = 3; 0 \leq \theta \leq 2\pi$

বা, $\cot^2 \theta + (\operatorname{cosec} \theta - 1 + 1)^2 = 3$ [মান বসিয়ে]

বা, $\cot^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta = 3$ বা, $\cot^2 \theta + -1 + \cot^2 \theta = 3$

বা, $2\cot^2 \theta = 2$ বা, $\cot^2 \theta = 1$

$\cot \theta = \pm 1$

হয়, $\cot \theta = 1$

অথবা, $\cot \theta = -1$

বা, $\cot \theta = 1 = \cot \frac{\pi}{4}$

বা, $\cot \theta = -1 = \cot \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right)$

$= \cot \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \cot \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right)$

বা, $\cot \theta = \cot \frac{\pi}{4} = \cot \frac{3\pi}{4} = \cot \frac{7\pi}{4}$

$\cot \frac{5\pi}{4}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

$\therefore \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

$\therefore 0 \leq \theta \leq 2\pi$ ব্যবধিতে প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান,

$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ (Ans.)