১. $A = 4 + 44 + 444 + \dots\dots..$ এবং
$S = 2(3x-5)^{-1} + 4(3x-5)^{-2} + 8(3x-5)^{-3} + \cdots ....$
দুইটি অসীম ধারা।

[ঢাকা বোর্ড-২০২৪]

(ক) $2x^2 + 7x + 3 = 0$ সমীকরণীটর মূলের ধরণ ও প্রকৃতি নির্ণয় কর।

(খ) A ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

(গ) x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে S ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

১ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) প্রদত্ত সমীকরণ, $2x^2 + 7x + 3 = 0$

$\therefore$ নিশ্চায়ক, $D = 7^2 - 4 \times 2 \times 3 = 49 - 24 = 25 = 5^2$

এখানে, সমীকরণটির নিশ্চায়ক, $D > 0$ এবং পূর্ণবর্গ সংখ্যা,

$\therefore$ সমীকরণটির মূলগুলো মূলদ, অসমান এবং বাস্তব সংখ্যা। (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে, $A = 4 + 44 + 44 + \cdots$

$= 4\,(1 + 11 + 111 + \cdots + n$ তম পদ)

$= \frac{4}{9}(9 + 99 + 999 + \cdots + n$ তম পদ)

$= \frac{4}{9}\,\{(10-1) + (100-1) + (1000-1) + \cdots + n$ তম পদ}

$= \frac{4}{9}\,\{(10 + 100 + 1000 + \cdots + n$ তম পদ) $-(1 + 1 + 1 + \cdots + n$ তম পদ)}

$= \frac{4}{9}\left\{10.\left(\frac{10^n-1}{10-1}\right) - n\right\}$

$= \frac{40}{81}\,(10^n - 1) - \frac{4}{9}n$

অতএব, A ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$S_n = \frac{40}{81}(10^n - 1) - \frac{4}{8}n$ (Ans.)

(গ) দেওয়া আছে, প্রদত্ত ধারা:

$S = 2(3x-5)^{-1} + 4(3x-5)^{-2} + 8(3x-5)^{-3} + \dots\dots.$

$= \frac{2}{3x-5} + \left(\frac{2}{3x-5}\right)^2 + \left(\frac{2}{3x-5}\right)^3 + ...$ যা একটি গুণোত্তর ধারা

ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{2}{3x-5}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \left(\frac{2}{3x-5}\right)^2 \div \left(\frac{2}{3x-5}\right) = \frac{2}{3x-5}$

প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ, $\left|\frac{2}{3x-5}\right| < 1$ বা, $-1 < \frac{2}{3x-5} < 1$

হয়, $\frac{2}{3x-5} < 1$

বা, $\frac{1}{3x-5} < \frac{1}{2}$

বা, $3x - 5 > 2$

বা, $3x > 7$

$\therefore x > \frac{7}{3}$

অথবা, $\frac{2}{3x-5} > -1$

বা, $\frac{1}{3x-5} > -\frac{1}{2}$

বা, $3x - 5 < -2$

বা, $3x < 3$

$\therefore x < 1$

নির্ণেয় শর্ত: $x > \frac{7}{3}$ অথবা, $x < 1$ (Ans.)

অসীমতক সমষ্টি, $S\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{2}{3x-5}}{1-\frac{2}{3x-5}}$

$= \frac{2}{3x-5} \div \frac{3x-5-2}{3x-5}$

$= \frac{2}{3x-5} \times \frac{3x-5}{3x-7}$

$= \frac{2}{3x-7}$ (Ans.)

২. (i) $3\,(1 + 11 + 111 + ... \;...\;....)$

(ii) $a + ap + ap^2 + \dots \dots \dots$ একটি গুণোত্তর ধারা।

[ময়মনসিংহ বোর্ড-২০২৪]

(ক) $7x - 1 + 2x^2 = 0$ সমীকরণের নিশ্চায়ক নির্ণয় কর।

(খ) (ii) নং ধারার ১ম n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

(গ) $a = p = \frac{1}{2x+3}$ হলে, x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

২ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) প্রদত্ত সমীকরণ, $7x - 1 + 2x^2 = 0$

বা, $2x^2 + 7x - 1 = 0;$

সমীকরণটিকে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 2, b = 7$ এবং $c = -1$

$\therefore$ সমীকরণের নিশ্চায়ক,

$D = b^2 - 4ac$

$= 7^2 - 4 \times 2 \times (-1)$

$= 49 + 8 = 57$ (Ans.)

(খ) মনে করি, (i) নং ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n

$\therefore S_n = 3\,(1 + 11 + 111 + \dots\dots. + n$ তম পদ)

$= \frac{3}{9}\,(9 + 99 + 999 + \dots\dots. + n$ তম পদ)

$= \frac{3}{9}\{(10-1) + (100-1) + (1000-1) + ... + n$ তম পদ}

$= \frac{3}{9}\{(10 + 10^2 + 10^3 + ... + n$ তম পদ) $-(1 + 1 + 1 + ... n$ তম পদ)}

$= \frac{3}{9}\left\{\left(\frac{10.10^n-1}{10-1}\right) - n\right\}$

$= \frac{30}{81}(10^n - 1) - \frac{3n}{9}$

$= \frac{10}{27}(10^n - 1) - \frac{n}{3}$

অতএব, ধারাটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$S_n = \frac{10}{27}\,(10^n - 1) - \frac{n}{3}$ (Ans.)

(গ) এখানে, প্রদত্ত গুণোত্তর ধারাটি $= a + ap + ap^2 + \dots \dots \dots$

$a = p = \frac{1}{2x+3}$ হলে ধারাটি,

$\frac{1}{2x+3} + \frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{(2x+3)^3} + \dots. \dots \dots.$

যার প্রথম পদ, $a = \frac{1}{2x+3}$

এবং সাধারণ অনুপাত,

$r = \frac{\frac{1}{(2x+3)^2}}{\frac{1}{2x+3}} = \frac{1}{2x+3}$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি $|r| < 1$ হয়।

শর্তমতে, $\left|\frac{1}{2x+3}\right| < 1$

$\frac{1}{2x+3} > 0$ হলে, $\frac{1}{2x+3} < 1$

বা, $2x + 3 > 1$

বা, $2x > 1 - 3$

বা, $2x > -2$

$\therefore x > -1$

আবার, $\frac{1}{2x+3} < 0$ হলে,

$-\frac{1}{2x+3} < 1$

বা, $-(2x + 3) > 1$

বা, $2x + 3 < -1$

বা, $2x < -1 - 3$

বা, $2x < -4$

$\therefore x > -1$ অথবা, $x < -2$ হলে প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে। (Ans.)

অসমীতক সমষ্টিক,

$S\infty = \frac{a}{1-r}$

$= \frac{\frac{1}{2x+3}}{1-\frac{1}{2x+3}} = \frac{\frac{1}{2x+3}}{\frac{2x+3-1}{2x+3}}$

$= \frac{1}{2x+3} \times \frac{2x+3}{2x+2} = \frac{1}{2(x+1)}$ (Ans.)

৩. (i) একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারার ১ম দুই পদের সমষ্টি $\frac{3}{2}$ এবং অসীমতক সমষ্টি 2।

(ii) $4 + 44 + 444 + \dots\dots..$ একটি ধারা।

[রাজশাহী বোর্ড-২০২৪]

(ক) অনন্ত গুণোত্তর ধারার সূত্র প্রয়োগ করে $0.1\dot{2}$ কে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

(খ) (i) নং এ বর্ণিত গুণোত্তর ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।

(গ) (ii) নং ধারাটির ১ম n পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

৩ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) এখানে, $0.1\dot{2} = 0.12121212.....$

$= 0.12 + 0.0012 + 0.000012 + ...$

এই অসীম গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ, $a = 0.12$ এবং

সাধারণ অনুপাত $r = \frac{0.0012}{0.12} = 0.01$

$\therefore 0.1\dot{2} = \frac{a}{1-r} = \frac{0.12}{1-(0.01)} = \frac{0.12}{0.99} = \frac{4}{33}$ (Ans.)

(খ) ধরি, অসীম গুণোত্তর ধারাটি হলো,

$a + ar + ar^2 + ...$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

প্রশ্নমতে, $a + ar = \frac{3}{2}$ $\therefore a(1+r) = \frac{3}{2} .... (i)$

আবার, $\frac{a}{1-r} = 2 .... (ii)$

(ii) নং কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{a}{1-r} \times \frac{1}{a(1+r)} = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

বা, $1 - r^2 = \frac{3}{4}$

বা, $r^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}$

$\therefore r = \pm\frac{1}{2}$

অর্থাৎ গুণোত্তর ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r = \pm\frac{1}{2}$ (Ans.)

(গ) দেওয়া আছে, $A = 4 + 44 + 44 + \cdots$

$= 4\,(1 + 11 + 111 + \cdots + n$ তম পদ)

$= \frac{4}{9}(9 + 99 + 999 + \cdots + n$ তম পদ)

$= \frac{4}{9}$ {(10 − 1) + (100 − 1) + (1000 − 1) + ⋯ + n তম পদ}

$= \frac{4}{9}$ {(10 + 100 + 1000 + ⋯ + n তম পদ) −(1 + 1 + 1 + ⋯ + n তম পদ)}

$= \frac{4}{9}\left\{10.\left(\frac{10^n-1}{10-1}\right) - n\right\}$

$= \frac{40}{81}(10^n - 1) - \frac{4}{9}n$

অতএব, A ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$S_n = \frac{40}{81}(10^n - 1) - \frac{4}{8}n$ (Ans.)

৪. $(3x+1)^{-1} + (3x+1)^{-2} + (3x+1)^{-3} + ...$ একটি গুণোত্তর ধারা।

[কুমিল্লা বোর্ড-২০২৪]

(ক) সমাধান কর: $y^2 + 4y - 3 = 0$

(খ) $x = \frac{2}{3}$ হলে, ধারাটির প্রথম 7 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

(গ) x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে অসীম ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

৪ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) প্রদত্ত সমীকরণ,

$y^2 + 4y - 3 = 0$

সমীকরণটিকে $ay^2 + by + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 1, b = 4$ এবং $c = -3$

$\therefore y = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-4\pm\sqrt{(-4)^2-4.1(-3)}}{2.1}$

$= \frac{-4\pm\sqrt{16+12}}{2} = \frac{-4\pm\sqrt{28}}{2} = -2 \pm \sqrt{7}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $y = -2 \pm \sqrt{7}$ (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে,

অনন্ত গুণোত্তর ধারাটি

$(3x+1)^{-1} + (3x+1)^{-2} + (3x+1)^{-3} + \cdots ... ...$

$= \frac{1}{3x+1} + \frac{1}{(3x+1)^2} + \frac{1}{(3x+1)^3} + ...$

$x = \frac{2}{3}$ হলে, ধারাটি, $\frac{1}{3.\frac{2}{3}+1} + \frac{1}{\left(3.\frac{2}{3}+1\right)^2} + \frac{1}{\left(3.\frac{2}{3}+1\right)^3} + ...$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ...$

যার প্রথম পদ, $a = \frac{1}{3}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{3^2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^2} \times 3 = \frac{1}{3} < 1$

আমরা জানি,

গুণোত্তর ধারার প্রথম n পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$; $[\because r < 1]$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম 7 পদের সমষ্টি, $S_7' = \frac{a(1-r^7)}{1-r}$

$= \frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^7\right\}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^7}\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}\left(\frac{3^7-1}{3^7}\right) = \frac{3^7-1}{2\times3^7}$ (Ans.)

(গ) দেওয়া আছে,

প্রদত্ত ধারা: $(3x+1)^{-1} + (3x+1)^{-2} + (3x+1)^{-3} + \cdots ....$

$= \frac{1}{3x+1} + \frac{1}{(3x+1)^2} + \frac{1}{(3x+1)^3} + \cdots ... ...$

প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{3x+1}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(3x+1)^2} \div \frac{1}{3x+1} = \frac{1}{3x+1}$

প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়।

$\therefore \left|\frac{1}{3x+1}\right| < 1$ অর্থাৎ, $-1 < \frac{1}{3x+1} < 1$

$\therefore -1 < \frac{1}{3x+1}$

বা, $-1 > 3x + 1$ বা, $-1 - 1 > 3x + 1 - 1$

বা, $-2 > 3x \therefore x < -\frac{2}{3}$

আবার, $\frac{1}{3x+1} < 1$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত: $x < -\frac{2}{3}$ অথবা, $x > 0$ (Ans.)

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$= \frac{\frac{1}{3x+1}}{1-\frac{1}{3x+1}} = \frac{\frac{1}{3x+1}}{\frac{3x+1-1}{3x+1}} = \frac{1}{3x}$ (Ans.)

৫. (i) $X = 8 + 88 + 888 + ...$

(ii) $Y = 5 + \frac{10}{3} + \frac{20}{9} + \frac{40}{27} + ...$

[ঢাকা বোর্ড-২০২৩]

(ক) $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}..............$ অনুক্রমে ৯ম পদ নির্ণয় কর।

(খ) X ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

(গ) Y ধারাটির সাধারণ পদ নির্ণয় করে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি (যদি থাকে) নির্ণয় কর।

৫ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) প্রদত্ত অনুক্রম, $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}..............$

$\Rightarrow 1, \left(\frac{2}{3}\right)^1, \left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{2}{3}\right)^3 ....$

যা একটি গুণোত্তর ধারা তৈরি করবে।

ধারাটির প্রথম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{2}{3}$

$\therefore$ অনুক্রমটির ৯ম পদ $= ar^{9-1} = 1.\left(\frac{2}{3}\right)^8 = \frac{256}{6561}$ (Ans.)

(খ) প্রদত্ত ধারাটি,

$X = 8 + 88 + 888 + ... + n$ তম পদ

$= 8(1 + 11 + 111 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + n$ তম পদ)

$= \frac{8}{9}(9 + 99 + 999 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + n)$ তম পদ)

$= \frac{8}{9}\{(10 - 1) + (100 + 1) + (1000 - 1) + \ldots\ldots + n$ তম}

$= \frac{8}{9}\{(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots\ldots + 10^n) -$

$(1 + 1 + 1 + \ldots + n$ পদ)

$= \frac{8}{9}\left\{10 \times \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n\right\} = \frac{80}{81}(10^n - 1) - \frac{8n}{9}$

$\therefore$ X ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল $= \frac{80}{81}(10^n - 1) - \frac{8n}{9}$

(Ans.)

(গ) উদ্দীপকে বর্ণিত (ii) নং ধারা,

$Y = 5 + \frac{10}{3} + \frac{20}{9} + \frac{40}{27} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

ধারাটির,

$\frac{\text{দ্বিতীয় পদ}}{\text{প্রথম পদ}} = \frac{\frac{10}{3}}{5} = \frac{2}{3}$

আবার, $\frac{\text{তৃতীয় পদ}}{\text{দ্বিতীয় পদ}} \frac{20}{\frac{9}{3}} = \frac{2}{3}$

সুতরাং, প্রদত্ত ধারাটি একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

ধারাটির প্রথম পদ, $a = 5$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{2}{3}$

$\therefore$ ধারাটির সাধারণ পদ $ar^{n-1} = 5\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ (Ans.)

আবার, $|\, r \,| = \frac{2}{3} < 1$ হওয়ায় গুণোত্তর ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে।

আমরা জানি,

অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{5}{1-\frac{2}{3}} = \frac{5}{\frac{1}{3}} = 15$ (Ans.)

৬. $1 + (3x - 1)^{-1} + (3x - 1)^{-2} + \ldots\ldots$ একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

[কুমিল্লা বোর্ড-২০২৩]

(ক) $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots\ldots$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি (যদি থাকে) নির্ণয় কর।

(খ) $x = \frac{4}{3}$ হলে, ধারাটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

(গ) x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

৬ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) প্রদত্ত ধারার প্রথম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$

যেহেতু $|r| = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ তাই ধারাটির অসীমতক সমষ্টি বিদ্যমান

নির্ণেয় অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$= \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(3-1)}$ [হর ও লবকে $(\sqrt{3} + 1)$ দ্বারা গুণ করে]

$= \frac{1}{2}(3 + \sqrt{3})$ (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে, প্রদত্ত ধারাটি:

$1 + \frac{1}{(3x-1)} + \frac{1}{(3x-1)^2} + \frac{1}{(3x-1)^3} + \ldots$

$x = \frac{4}{3}$ হলে ধারাটি হবে,

$= 1 + \frac{1}{(3.\frac{4}{3}-1)} + \frac{1}{(3.\frac{4}{3}-1)^2} + \frac{1}{(3.\frac{4}{3}-1)^3} + \cdots \ldots$

$= 1 + \frac{1}{(4-1)} + \frac{1}{(4-1)^2} + \frac{1}{(4-1)^3} + \ldots\ldots\ldots$

$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\ldots\ldots$

এখানে, ধারাটির প্রথম পদ, $a = 1$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{3} \div 1 = \frac{1}{3} < 1$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম 10টি পদের সমষ্টি,

$S_{10} = a\frac{(1-r^{10})}{(1-r)}$

$= 1.\frac{\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{3^{10}-1}{3^{10}}}{\frac{3-1}{3}} = \frac{(3^{10}-1)}{3^{10}} \times \frac{3}{2} = \frac{(3^{10}-1)}{2\times3^9}$ (Ans)

(গ) উদ্দীপকে প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ, $a = 1$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{3x-1}$

এখন, প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি হয় $|r| < 1$

অর্থাৎ $\left|\frac{1}{3x-1}\right| < 1$

$\therefore -1 < \frac{1}{3x-1} < 1$

হয়, $\frac{1}{3x-1} < 1$ অথবা, $\frac{1}{3x-1} > -1$

বা, $3x - 1 > 1$ বা, $3x - 1 < -1$

বা, $3x > 2$ বা, $3x < 0$

$\therefore x > \frac{2}{3}$ $\therefore x < 0$

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি থাকার শর্ত: $x < 0$ অথবা, $x > \frac{2}{3}$ (Ans.)

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3x-1}}$

$= \frac{1}{\frac{3x-1-1}{3x-1}} = \frac{3x-1}{3x-2}$ (Ans.)

৭. (i) $1 + \frac{1}{3x-5} + \frac{1}{(3x-5)^2} + \frac{1}{(3x-5)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(ii) $6 + 66 + 666 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

[চট্টগ্রাম বোর্ড-২০২৩]

(ক) 3.02 কে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

(খ) (ii) নং ধারার আলোকে প্রমাণ কর যে, ধারাটির ১ম n পদের সমষ্টি $\frac{2}{3}\left\{\frac{10}{9}(10^n - 1) - n\right\}$

(গ) x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে (i) নং অনন্ত গুণোত্তর ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

৭ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) $3.02 = \frac{302-30}{90} = \frac{272}{90} = \frac{136}{45}$ (Ans.)

(খ) প্রদত্ত ধারা $= 6 + 66 + 666 + \ldots\ldots\ldots + n$ তম পদ

$= 6(1 + 11 + 111 + \ldots\ldots\ldots + n$ তম পদ)

$= \frac{6}{9}(9 + 99 + 999 + \ldots\ldots\ldots + n$ তম পদ)

$= \frac{6}{9}\{(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \ldots\ldots + n\}$ তম পদ}

$= \frac{6}{9}\{(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^n) - (1 + 1 + 1 + \ldots n\}$ তম পদ)}

$= \frac{6}{9}\left\{10.\frac{10^n-1}{10-1} - n\right\} = \frac{60}{81}(10^n - 1) - \frac{6n}{9}$

$= \frac{20}{27}(10^n - 1) - \frac{2}{3}n$

$\therefore$ ধারাটির $n -$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $= \frac{20}{27}(10^n - 1) - \frac{2}{3}n$

$= \frac{2}{3}\left\{\frac{10}{9}(10^n - 1) - n\right\}$ (প্রমাণিত)

(গ) প্রদত্ত ধারা: $1 + \frac{1}{3x-5} + \frac{1}{(3x-5)^2} + \frac{1}{(3x-5)^3} + \ldots\ldots$

ধারাটির প্রথম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{3x-5} \div 1 = \frac{1}{3x-5}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি $|r| < 1$ হয়

অর্থাৎ, $\left|\frac{1}{3x-5}\right| < 1$

∴ $|3x-5| > 1$

হয়, $3x-5>1$ অথবা, $-(3x-5)>1$

বা, $3x>6$ বা, $3x-5<-1$

∴ $x>2$ বা, $3x<4$ ∴ $x<\frac{4}{3}$

∴ নির্ণেয় শর্ত: $x>2$ অথবা, $x<\frac{4}{3}$

অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3x-5}}$

$= \frac{1}{\frac{3x-5-1}{3x-5}} = \frac{3x-5}{3x-6}$ (Ans.)

৮. $A = 9+99+999+\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ এবং $S=(5x-3)^{-1}+(5x-3)^{-2}+(5x-3)^{-3}+\dots\dots\dots$ দুইটি অসীম ধারা।

[সিলেট বোর্ড-২০২৩]

(ক) $x=1$ হলে, S ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।

(খ) A ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

(গ) x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে S ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

৮ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে,

$S=(5x-3)^{-1}+(5x-3)^{-2}+(5x-3)^{-3}+\dots\dots\dots$

সাধারণ অনুপাত,

$r=(5x-3)^{-2}+(5x-3)^{-1}$

$=\frac{1}{(5x-3)^2}+\frac{1}{5x-3}$

$=\frac{1}{(5x-3)^2}\times\frac{(5x-3)}{1}=\frac{1}{5x-3}$

$x=1$ হলে, সাধারণ অনুপাত, $r=\frac{1}{5.1-3}=\frac{1}{5-3}=\frac{1}{2}$ (Ans.)

(খ) $A=9+99+999+\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

মনে করি, ধারাটির n সংখ্যক পদ পর্যন্ত সমষ্টি S_n

∴ $S_n=9+99+999+\dots\dots\dots n$ তম পদ

$=(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\dots\dots n$ তম পদ

$=(10+100+1000+\cdots n$ তম পদ$)$ $-(1+1+1+\dots$ তম পদ$)$

$=(10+10^2+10^3+\dots\dots 10^n)-n$

$=10.\frac{10^n-1}{10-1}-n.$

∴ $S_n=\frac{10(10^n-1)}{9}-n$ (Ans.)

(গ) $S=(5x-3)^{-1}+(5x-3)^{-2}+(5x-3)^{-3}+\cdots\dots\dots$

$=\frac{1}{5x-3}+\frac{1}{(5x-3)^2}+\frac{1}{(5x-3)^3}+\dots\dots$

প্রথম পদ, $a=\frac{1}{5x-3}$

সাধারণ অনুপাত, $r=\frac{1}{(5x-3)^2}\div\frac{1}{5x-3}=\frac{1}{5x-3}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি $|r|<1$ হয়।

অর্থাৎ, $\left|\frac{1}{5x-3}\right|<1$

∴ $|5x-3|>1$

হয়, $5x-3>1$ অথবা, $-(5x-3)>1$

বা, $5x>4$ বা, $5x-3<-1$

∴ $x>\frac{4}{5}$ বা, $5x<2$

∴ $x<\frac{2}{5}$

∴ নির্ণেয় শর্ত: $x>\frac{4}{5}$ অথবা, $x<\frac{2}{5}$

∴ অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{1}{5x-3}}{1-\frac{1}{5x-3}}=\frac{\frac{1}{5x-3}}{\frac{5x-3-1}{5x-3}}$

$=\frac{1}{5x-4}$ (Ans.)

৯. একটি গুণোত্তর ধারার ১ম পদ $\frac{1}{2}$ এবং অসীমতক সমষ্টি $\frac{1}{3}$।

[ঢাকা বোর্ড-২০২২]

(ক) ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।

(খ) ধারাটি নির্ণয় কর এবং ধারাটির ১ম দশ পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

(গ) ধারাটির ১ম কতটি পদের সমষ্টি $\frac{85}{256}$?

৯ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ, $a=\frac{1}{2}$

এবং অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty=\frac{1}{3}$

ধরি, সাধারণ অনুপাত, r

আমরা জানি, অসীমতক সমষ্টি, $S_a=\frac{a}{1-r}$ বা, $\frac{1}{3}=\frac{\frac{1}{2}}{1-r}$

বা, $1-r=\frac{3}{2}$ বা, $r=1-\frac{3}{2}$ ∴ $r=-\frac{1}{2}$ (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে, গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ, $a=\frac{1}{2}$

'ক' হতে পাই, ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r=-\frac{1}{2}$ $[\because r<1]$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n তম পদ $=ar^{n-1}$

∴ ধারাটির দ্বিতীয় পদ $=ar=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$

ধারাটির তৃতীয় পদ $=ar^2=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$

ধারাটির চতুর্থ পদ $=ar^3=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{16}$

ধারাটির পঞ্চম পদ $=ar^4=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{32}$

∴ ধারাটির $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\dots\dots\dots$ (Ans.)

ধারাটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ $[\because r<1]$

∴ ধারাটির প্রথম দশ পদের সমষ্টি, $S_{10}=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2^{10}-1}{2^{10}}\right)}{\frac{3}{2}}$

$=\frac{1024-1}{3.1024}=\frac{1023}{3.1024}=\frac{341}{1024}$ (Ans.)

(গ) ধরি, গুণোত্তর ধারার প্রথম n টি পদের সমষ্টি $\frac{85}{256}$

শর্তমতে, $\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{85}{256}$ $[\because r\le 1]$

বা, $\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)}=\frac{85}{256}$ $\left[\because a=\frac{1}{2}, r=-\frac{1}{2}\right]$

বা, $\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{\frac{3}{2}}=\frac{85}{256}$ বা, $1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{3\times85}{256}$

বা, $1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{255}{256}$ বা, $\left(-\frac{1}{2}\right)^n=1-\frac{255}{256}$

বা, $\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\left(-\frac{1}{2}\right)^8$ ∴ $n=8$ (Ans.)

১০. $(5x-4)^{-1}+(5x-4)^{-2}+(5x-4)^{-3}+\cdots\cdots$ এবং $3+33+333+\dots\dots\dots$ দুইটি ধারা।

[ময়মনসিংহ বোর্ড-২০২২]

(ক) 3.042 কে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

(খ) x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে প্রথম ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

(গ) দ্বিতীয় ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

১০ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) $3.042=3+042$

$=3+(0.042+0.00042+0.0000042+\dots\dots\dots)$

এখানে, বন্ধনীর ভিতরের অংশটি একটি অসীম গুণোত্তর ধারা।
আর সেই গুণোত্তর ধারার ১ম পদ $a = 0.042$ এবং সাধারণ অনুপাত

$r = \frac{0.00042}{0.042} = 0.01$

$\therefore 3.042 = 3 + \frac{a}{1-r} = 3 + \frac{0.042}{1-0.01} = 3 + \frac{7}{165} = \frac{502}{165}$ (Ans.)

(খ) প্রদত্ত ধারা, $(5x-4)^{-1} + (5x-4)^{-2} + (5x-4)^{-3} + \dots\dots\dots$

$= \frac{1}{5x-4} + \frac{1}{(5x-4)^2} + \frac{1}{(5x-4)^3} + \dots\dots\dots$

ধারাটির ১ম পদ, $a = \frac{1}{5x-4}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{(5x-4)^2}}{\frac{1}{(5x-4)}} = \frac{1}{5x-4}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি এবং কেবল যদি $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ $\left|\frac{1}{5x-4}\right| < 1$

$\therefore |5x-4| > 1$

হয়, $5x - 4 > 1$ অথবা, $-(5x-4) > 1$

বা, $5x > 1 + 4$ বা, $5x - 4 < -1$

বা, $5\mathbf{x} > 5$ বা, $5\mathbf{x} < -1 + 4$

$\therefore x > 1$ বা, $5x < 3$

$\therefore x < \frac{3}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত: $\mathbf{x} > 1$ অথবা, $x < \frac{3}{5}$ (Ans.)

অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{5x-4}}{1-\frac{1}{5x-4}} = \frac{\frac{1}{5x-4}}{\frac{5x-4-1}{5x-4}} = \frac{1}{5x-5}$ (Ans.)

(গ) মনে করি, (i) নং ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n

$\therefore S_n = 3\,(1 + 11 + 111 + \dots\dots + n$ তম পদ)

$= \frac{3}{9}\,(9 + 99 + 999 + \dots\dots + n$ তম পদ)

$= \frac{3}{9}\{(10-1) + (100-1) + (1000-1) + \dots\dots + n$ তম পদ$\}$

$= \frac{3}{9}\{(10 + 10^2 + 10^3 + \dots\dots + n$ তম পদ$) - (1 + 1 + 1 + \dots\dots n$ তম পদ$)\}$

$= \frac{3}{9}\left\{\left(\frac{10.10^n - 1}{10-1}\right) - n\right\}$

$= \frac{30}{81}(10^n - 1) - \frac{3n}{9}$

$= \frac{10}{27}(10^n - 1) - \frac{n}{3}$

অতএব, ধারাটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$S_n = \frac{10}{27}\,(10^n - 1) - \frac{n}{3}$ (Ans.)

১১. $\frac{1}{3x+1} + \frac{1}{(3x+1)^2} + \frac{1}{(3x+1)^3} + \dots\dots$ একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

[কুমিল্লা বোর্ড-২০২২]

(ক) $x = 1$ হলে, ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।

(খ) $x = \frac{2}{3}$ হলে, ধারাটির প্রথম 10টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

(গ) x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটি অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

১১ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) প্রদত্ত ধারাটি $\frac{1}{(3x+1)} + \frac{1}{(3x+1)^2} + \frac{1}{(3x+1)^3} + \dots\dots$

$x = 1$ হলে ধারাটি, $\frac{1}{3.1+1} + \frac{1}{(3.1+1)^2} + \frac{1}{(3.1+1)^3} + \dots$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots\dots$

$\therefore$ ধারাটির সাধারণ অনুপাত $= \frac{\text{দ্বিতীয় পদ}}{\text{প্রথম পদ}} = \frac{\frac{1}{4^2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4^2} \times 4 = \frac{1}{4}$ (Ans.)

(খ) $x = \frac{2}{3}$ হলে, ধারাটি, $\frac{1}{3.\frac{2}{3}+1} + \frac{1}{(3.\frac{2}{3}+1)^2} + \frac{1}{(3.\frac{2}{3}+1)^3} + \cdots\cdots$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots$

যার প্রথম পদ, $a = \frac{1}{3}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{3^2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^2} \times 3 = \frac{1}{3} < 1$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ n পদের সমষ্টি,

$S_n = \frac{à(1-r^n)}{1-r}$; $[\because r < 1]$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম 10 পদের সমষ্টি, $S_{10} = \frac{a(1-r^{10})}{1-r}$

$= \frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^{10}}\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}\left(\frac{3^{10}-1}{3^{10}}\right) = \frac{3^{10}-1}{2\times 3^{10}}$ (Ans.)

(গ) দেওয়া আছে,

প্রদত্ত ধারা: $(3x+1)^{-1} + (3x+1)^{-2} + (3x+1)^{-3} + \cdots\dots$

$= \frac{1}{3x+1} + \frac{1}{(3x+1)^2} + \frac{1}{(3x+1)^3} + \cdots\dots\dots\dots$

প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{3x+1}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(3x+1)^2} \div \frac{1}{3x+1} = \frac{1}{3x+1}$

প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়।

$\therefore \left|\frac{1}{3x+1}\right| < 1$ অর্থাৎ, $-1 < \frac{1}{3x+1} < 1$

$\therefore -1 < \frac{1}{3x+1}$

বা, $-1 > 3x + 1$ বা, $-1 - 1 > 3x + 1 - 1$

বা, $-2 > 3x \therefore x < -\frac{2}{3}$

আবার, $\frac{1}{3x+1} < 1$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত: $x < -\frac{2}{3}$ অথবা, $x > 0$ (Ans.)

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$= \frac{\frac{1}{3x+1}}{1-\frac{1}{3x+1}} = \frac{\frac{1}{3x+1}}{\frac{3x+1-1}{3x+1}} = \frac{1}{3x}$ (Ans.)

১২. $A = p + p^2q + p^3q^2 + \dots\dots\dots$ একটি গুণোত্তর ধারা এবং $B = 2 + 22 + 222 + \dots\dots\dots$

[যশোর বোর্ড-২০২২]

(ক) 5.123 কে সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর কর।

(খ) $p = (5x+1)^{-1}$ এবং $q = 1$ হলে x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে A ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

(গ) B ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর।

১২ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) $5.\dot{1}2\dot{3} = \frac{5123-5}{999} = \frac{5118}{999} = \frac{1706}{333} = 5\frac{41}{333}$ (Ans.)

(খ) $A = p + p^2q + p^3q^2 + \dots\dots$

$p = (5x+1)^{-1}$ এবং $q = 1$ হলে,

$A = (5x+1)^{-1} + \{(5x+1)^{-1}\}^2.1 + \{(5x+1)^{-1}\}^3.1^2 + .$

$= \frac{1}{5x+1} + \frac{1}{(5x+1)^2} + \frac{1}{(5x+1)^3} + \dots\dots$

ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{5x+1}$

ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{(5x+1)^2}}{\frac{1}{5x+1}} = \frac{1}{5x+1}$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি, $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ, $\left|\frac{1}{5x+1}\right| < 1$ হয়।

$\therefore |5x+1| > 1$

তাহলে, অথবা,

$5x + 1 > 1$ $-(5x+1) > 1$

বা, $5x > 0$ বা, $5x + 1 < -1$

$\therefore x > 0$ বা, $5x < -2$

$\therefore x < -\frac{2}{5}$

$\therefore x > 0$ অথবা, $x < -\frac{2}{5}$ হলে প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে। (Ans.)

অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{5x+1}}{1-\frac{1}{5x+1}} = \frac{\frac{1}{5x+1}}{\frac{5x+1-1}{5x+1}}$

$= \frac{1}{5x+1} \times \frac{5x+1}{5x} = \frac{1}{5x}$ (Ans.)

(গ) ধরি, $S_n = 2 + 22 + 222 + \ldots\ldots\ldots + n$ তম পদ

$= 2(1 + 11 + 111 + \ldots\ldots + n$ তম পদ)

$= \frac{2}{9}(9 + 99 + 999 + \ldots\ldots\ldots + n$ তম পদ)

$= \frac{2}{9}\{(10-1) + (100-1) + (1000-1) + \ldots\ldots + n$ তম পদ}

$\frac{2}{9}\{(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + n$ তম পদ$) - (1 + 1 + \ldots. + n$ তম পদ)}

$= \frac{2}{9}\{(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 10^n) - n\}$

$= \frac{2}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1} - n\right\} = \frac{20}{81}(10^n - 1) - \frac{2n}{9}$ (Ans.)

১৩. $\frac{1}{3x+5} + \frac{1}{(3x+5)^2} + \frac{1}{(3x+5)^3} \ldots\ldots$ একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

[বরিশাল বোর্ড-২০২২]

(ক) 0.05 কে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

(খ) $x = \frac{2}{3}$ হলে যে ধারা গঠিত হয় তার প্রথম 10টি পদের যোগফল নির্ণয় কর।

(গ) x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে উক্ত ধারার অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

১৩ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) $0.0\dot{5} = 0.05 + 0.005 + 0.0005 + \ldots\ldots\ldots$ যা একটি অসীম গুণোত্তর ধারা।

যার প্রথম পদ, $a = 0.05$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{0.005}{0.05} = 0.1$

$\therefore 0.0\dot{5} = \frac{a}{1-r} = \frac{0.05}{1-0.1} = \frac{0.05}{0.9} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$ (Ans.)

(খ) প্রদত্ত গুণোত্তর ধারা,

$\frac{1}{3x+5} + \frac{1}{(3x+5)^2} + \frac{1}{(3x+5)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$x = \frac{2}{3}$ হলে, ধারাটি

$\frac{1}{3\cdot\frac{2}{3}+5} + \frac{1}{(3\cdot\frac{2}{3}+5)^2} + \frac{1}{(3\cdot\frac{2}{3}+5)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম পদ, $\mathbf{a} = \frac{1}{7}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $\mathbf{r} = \frac{\frac{1}{7^2}}{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7} < 1$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম 10টি পদের যোগফল $= \frac{a(1-r^{10})}{1-r}; [\because r < 1]$

$= \frac{\frac{1}{7}\left(1-\frac{1}{7^{10}}\right)}{1-\frac{1}{7}} = \frac{\frac{1}{7}\left(1-\frac{1}{7^{10}}\right)}{\frac{7-1}{7}}$

$= \frac{1}{7}\left(1 - \frac{1}{7^{10}}\right) \times \frac{7}{6} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{7^{10}}\right)$ (Ans.)

(গ) প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{3x+5}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{(3x+5)^2}}{\frac{1}{3x+5}} = \frac{1}{3x+5}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ, $\left|\frac{1}{3x+5}\right| < 1$ বা, $-1 < \frac{1}{3x+5} < 1$ হয়।

$\therefore -1 < \frac{1}{3x+5}$

বা, $-1 > 3x + 5$ বা, $-1 - 5 > 3x + 5 - 5$ বা, $-6 > 3x$

বা, $-\frac{6}{3} > \frac{3x}{3} \therefore x < -2$

অথবা, $\frac{1}{3x+5} < 1$

বা, $3x + 5 > 1$ বা, $3x + 5 - 5 > 1 - 5$ বা, $3x > -4$

বা, $\frac{3x}{3} > -\frac{4}{3} \therefore x > -\frac{4}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত: $x < -2$ অথবা, $x > -\frac{4}{3}$. (Ans.)

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{3x+5}}{1-\frac{1}{3x+5}} = \frac{\frac{1}{3x+5}}{\frac{3x+5-1}{3x+5}}$

$= \frac{1}{3x+5} \times \frac{3x+5}{3x+4} = \frac{1}{3x+4}$ (Ans.)

১৪. $\frac{1}{4x+1} + \frac{1}{(4x+1)^2} + \frac{1}{(4x+1)^3} + \ldots\ldots\ldots$ একটি গুণোত্তর ধারা।

[ঢাকা বোর্ড-২০২১]

(ক) 0.02 কে অনন্ত গুণোত্তর ধারায় প্রকাশ কর।

(খ) $4x = 1$ হলে ধারাটির ১ম 12 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

(গ) x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

১৪ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) $0.0\dot{2} = 0.0222222\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= 0.02 + 0.002 + 0.0002 + 0.00002 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

যা একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা। (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে, প্রদত্ত ধারাটি,

$\frac{1}{4x+1} + \frac{1}{(4x+1)^2} + \frac{1}{(4x+1)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$4x = 1$ হলে, ধারাটি হবে:

$\frac{1}{1+1} + \frac{1}{(1+1)^2} + \frac{1}{(1+1)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{2}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} < 1$

$\therefore$ গুণোত্তর ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n = a\frac{1-r^n}{1-r}$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারাটির প্রথম 12টি পদের সমষ্টি, $S_{12} = a\frac{1-r^{12}}{1-r}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1-\frac{1}{4096}}{\frac{1}{2}}$

$= \frac{4096-1}{4096} = \frac{4095}{4096}$ (Ans.)

(গ) উদ্দীপকের ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{4x+1}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(4x+1)^2} \div \frac{1}{4x+1} = \frac{1}{4x+1}$

প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ $\left|\frac{1}{4x+1}\right| < 1$ বা, $-1 < \frac{1}{4x+1} < 1$ হয়।

এখন, $\frac{1}{4x+1} < 1$	আবার, $\frac{1}{4x+1} > -1$
বা, $4x + 1 > 1$	বা, $4x + 1 < -1$
বা, $4x > 0$	বা, $4x < -2$
$\therefore x > 0$	$\therefore x < -\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত: $x > 0$ অথবা, $x < -\frac{1}{2}$ (Ans.)

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{4x+1}}{1-\frac{1}{4x+1}} = \frac{\frac{1}{4x+1}}{\frac{4x+1-1}{4x+1}} = \frac{1}{4x}$ (Ans.)

১৫. (i) $1 + (5x+1)^{-1} + (5x+1)^{-2} + (5x+1)^{-3} + \ldots.$ একটি অনন্ত ধারা।

(ii) একটি গুণোত্তর ধারার ১ম তিনটি ক্রমিক পদের সমষ্টি $3\frac{24}{49}$ এবং গুণফল $\frac{27}{343}$।

[রাজশাহী বোর্ড-২০২১]

(ক) $x = 1$ হলে ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি যদি থাকে তবে তা নির্ণয় কর।

(খ) x এর উপর কি শর্ত আরোপ করলে প্রদত্ত অনন্ত ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

(গ) (ii) ধারাটির ১ম পদ ও সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।

১৫ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) প্রদত্ত ধারাটি, $1 + (5x+1)^{-1} + (5x+1)^{-2} + (5x+1)^{-3}..$

$x = 1$ হলে ধারাটি হবে:

$1 + (5+1)^{-1} + (5+1)^{-2} + (5+1)^{-3} + \ldots$

$= 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \ldots$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম পদ, $a = 1$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{6} \div 1 = \frac{1}{6} < 1$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি বিদ্যমান।

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5}$ (Ans.)

(খ) উদ্দীপকের ধারাটির প্রথম পদ $a = 1$ এবং

সাধারণ অনুপাত $r = \left(\frac{1}{5x+1}\right) + 1 = \frac{1}{5x+1}$

প্রদত্ত অনন্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি $|r| < I$ হয়।

অর্থাৎ $\left|\frac{1}{5x+1}\right| < 1$ বা, $-1 < \frac{1}{5x+1} < 1$ হয়।

$\therefore \frac{1}{5x+1} < 1$ অথবা, $\frac{1}{5x+1} > -1$

বা, $5x + 1 > 1$ বা, $5x + 1 < -1$

বা, $5x > 0$ বা, $5x < -2$

$\therefore x > 0$ $\therefore x < -\frac{2}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত: $x > 0$ অথবা, $x < -\frac{2}{5}$ (Ans.)

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{5x+1}} = \frac{1}{\frac{5x+1-1}{5x+1}}$

$= \frac{5x+1}{5x}$ (Ans.)

(গ) মনে করি, গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ $= a$

এবং সাধারণ অনুপাত $= r$

$\therefore$ গুণোত্তর ধারাটির প্রথম, দ্বিতীয় এবং তৃতীয় পদ যথাক্রমে, a, ar এবং ar^2

প্রশ্নমতে,

$a + ar + ar^2 = 3\frac{24}{49} = \frac{171}{49} \ldots\ldots\ldots (i)$

এবং $a.ar.ar^2 = \frac{27}{343}4, a^3r^3 = \left(\frac{3}{7}\right)^3$

বা, $ar = \frac{3}{7} \therefore a = \frac{3}{7r} \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

(i) নং হতে পাই, $a(1 + r + r^2) = \frac{171}{49}$

বা, $\frac{3}{7r}(1 + r + r^2) = \frac{171}{49}$ [a এর মান বসিয়ে]

বা, $\frac{1+r+r^2}{r} = \frac{57}{7}$ বা, $7 + 7r + 7r^2 = 57r$

বা, $7r^2 - 50r + 7 = 0$

বা, $7r^2 - 49r - r + 7 = 0$ বা, $7r(r-7) - 1(r-7) = 0$

বা, $(r-7)(7r-1) = 0$ $\therefore r = 7, \frac{1}{7}$

r এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$r = 7$ হলে $a = \frac{3}{7 \times 7} = \frac{3}{49}$

$r = \frac{1}{7}$ হলে, $a = \frac{3}{7 \times \frac{1}{7}} = 3$

$\therefore a = \frac{3}{49}$ এবং $r = 7$ অথবা, $a = 3$ এবং $r = \frac{1}{7}$ (Ans.)

১৬. $(i) 6 + 66 + 666 + \ldots.$ এবং

$(ii) (5x+1)^{-1} + (5x+1)^{-2} + (5x+1)^{-3} + \ldots\ldots$ দুইটি ধারা।

[দিনাজপুর বোর্ড-২০২১]

(ক) $7, \frac{7}{3}, \frac{7}{9}, \frac{7}{27}, \ldots\ldots$ অনুক্রমটির 15 তম পদ নির্ণয় কর।

(খ) (i) নং ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর।

(গ) x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে (ii) নং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

১৬ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে,

অনুক্রম:

$7, \frac{7}{3}, \frac{7}{9}, \frac{7}{27}, \ldots\ldots$

$= \frac{7}{1}, \frac{7}{3}, \frac{7}{927} \ldots\ldots$

$= \frac{7}{3^0}, \frac{7}{3^1}, \frac{7}{3^2}, \frac{7}{3^3}, \ldots\ldots$

$\therefore$ অনুক্রমটির n তম পদ $= \frac{7}{3^{n-1}}; n \in \mathbb{N}$

$\therefore$ অনুক্রমটির 15 তম পদ $= \frac{7}{3^{13-1}} = \frac{7}{3^{14}}$ (Ans.)

(খ) প্রদত্ত ধারা $= 6 + 66 + 666 + \ldots\ldots\ldots + n$ তম পদ

$= 6(1 + 11 + 111 + \ldots\ldots\ldots + n$ তম পদ)

$= \frac{6}{9}(9 + 99 + 999 + \ldots\ldots\ldots + n$ তম পদ)

$= \frac{6}{9}\{(10-1) + (100-1) + (1000-1) + \ldots\ldots + n\}$ তম পদ}

$= \frac{6}{9}\{(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^n) - (1 + 1 + 1 + \ldots n\}$ তম পদ)}

$= \frac{6}{9}\left\{10.\frac{10^n-1}{10-1} - n\right\} = \frac{60}{81}(10^n - 1) - \frac{6n}{9}$

$= \frac{20}{27}(10^n - 1) - \frac{2}{3}n$

$\therefore$ ধারাটির $n-$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $= \frac{20}{27}(10^n - 1) - \frac{2}{3}n$

$= \frac{2}{3}\left\{\frac{10}{9}(10^n - 1) - n\right\}$ (প্রমাণিত)

(গ) $A = p + p^2q + p^3q^2 + \ldots..$

$p = (5x+1)^{-1}$ এবং $q = 1$ হলে,

$A = (5x+1)^{-1} + \{(5x+1)^{-1}\}^2.1 + \{(5x+1)^{-1}\}^3.1^2 + .$

$= \frac{1}{5x+1} + \frac{1}{(5x+1)^2} + \frac{1}{(5x+1)^3} + \ldots\ldots$

ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{5x+1}$

ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{(5x+1)^2}}{\frac{1}{5x+1}} = \frac{1}{5x+1}$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি, $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ, $\left|\frac{1}{5x+1}\right| < 1$ হয়।

$\therefore |5x+1| > 1$

তাহলে, অথবা,

$5x + 1 > 1$ $-(5x+1) > 1$

বা, $5x > 0$ বা, $5x + 1 < -1$

$\therefore x > 0$ বা, $5x < -2$

$\therefore x < -\frac{2}{5}$

$\therefore x > 0$ অথবা, $x < -\frac{2}{5}$ হলে প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে। (Ans.)

অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{5x+1}}{1-\frac{1}{5x+1}} = \frac{\frac{1}{5x+1}}{\frac{5x+1-1}{5x+1}}$

$= \frac{1}{5x+1} \times \frac{5x+1}{5x} = \frac{1}{5x}$ (Ans.)

১৭. $1 + \frac{1}{7x+1} + \frac{1}{(7x+1)^2} + \frac{1}{(7x+1)^3} + \ldots..$ একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা এবং $g + h + f + \ldots..$ অপর একটি ধারা।

[চট্টগ্রাম বোর্ড-২০২১]

(ক) একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারার অসীমতক সমষ্টি 15 এবং সাধারণ অনুপাত $-\frac{1}{3}$ হলে, ধারাটির প্রথম পদ নির্ণয় কর।

(খ) x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে তা উল্লেখপূর্বক সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

(গ) $g = 12, h = 132$ এবং $f = 1332$ হলে, যে ধারা পাওয়া যায় তার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

১৭ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) মনে করি, অনন্ত গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ $= a$

দেওয়া আছে, সাধারণ অনুপাত, $r = -\frac{1}{3}$

অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = 15$

$\therefore \frac{a}{1-r} = 15$ বা, $\frac{a}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = 15$ বা, $\frac{a}{1+\frac{1}{3}} = 15$

বা, $\frac{a}{\frac{4}{3}} = 15 \therefore a = 15 \times \frac{4}{3} = 20$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম পদ 20 (Ans.)

(খ) প্রদত্ত ধারা: $1 + \frac{1}{7x+1} + \frac{1}{(7x+1)^2} + \frac{1}{(7x+1)^3} + \cdots \ldots$

ধারাটির প্রথম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{7x+1} \div 1 = \frac{1}{7x+1}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ, $\left|\frac{1}{7x+1}\right| < 1$ বা, $-1 < \frac{1}{7x+1} < 1$ হয়।

এখন, $\frac{1}{7x+1} < 1$

বা, $7x + 1 > 1$

বা, $7x > 1 - 1$

বা, $7x > 0$

$\therefore x > 0$

অথবা, $\frac{1}{7x+1} > -1$

বা, $7x + 1 < -1$

বা, $7x < -1 - 1$

বা, $7x < -2 \therefore x < -\frac{2}{7}$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত: $x > 0$ অথবা, $x < -\frac{2}{7}$ (Ans.)

অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{7x+1}}$

$= \frac{1}{\frac{7x+1-1}{7x+1}} = \frac{1}{\frac{7x}{7x+1}} = \frac{7x+1}{7x}$ (Ans.)

(গ) প্রদত্ত ধারা: $g + h + f + \ldots\ldots$

দেওয়া আছে, $g = 12, h = 132, f = 1332$

$\therefore$ ধারাটি, $12+132+1332+\ldots\ldots$

$\therefore$ ধারাটির n পদের সমষ্টি $= 12 + 132 + 1332 + \cdots \ldots + n$ তম পদ

$= 12(1 + 11 + 111 + \ldots\ldots + n$ তম পদ$)$

$= \frac{12}{9}(9 + 99 + 999 + \cdots \ldots + n$ তম পদ$)$

$= \frac{12}{9}\{(10-1) + (100-1) + (1000-1) + \ldots\ldots + n$ তম পদ$\}$

$= \frac{4}{3}\{(10 + 100 + 1000 + \ldots + n$ তম পদ$) - (1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + n$ তম পদ$)\}$

$= \frac{4}{3}\{(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots\ldots + n$ তম পদ$) - n\}$

$= \frac{4}{3}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1} - n\right\} = \frac{4}{3}\frac{10(10^n-1)}{9} - \frac{4n}{3}$

$= \frac{40}{27}(10^n - 1) - \frac{4}{3}\ln$ (Ans.)

১৮. একটি গুণোত্তর ধারার $n -$ তম পদ, $U_n = (6x-4)^{n-2}, n \in \mathbb{N}$.

[সিলেট বোর্ড-২০২১]

(ক) 8.051 কে অনন্ত গুণোত্তর ধারায় প্রকাশ কর।

(খ) $x = 1$ হলে ধারাটির প্রথম 14 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

(গ) x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

১৮ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) $8.0\dot{5}\dot{1} = 8 + 0.0\dot{5}\dot{1} = 8 + 0.0515151 \ldots \ldots$

$= 8 + (0.051 + 0.00051 + 0.0000051 + \ldots\ldots)$ (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে, একটি গুণোত্তর ধারার $n -$ তম পদ,

$U_n = (6x-4)^{n-2}; n \in \mathbb{N}$

$x = 1$ হলে গুণোত্তর ধারার $n -$ তম পদ,

$U_n = (6-4)^{n-2} = 2^{n-2}; n \in \mathbb{N}$

$n = 1,2,3,\ldots\ldots$ বসিয়ে প্রাপ্ত গুণোত্তর ধারাটি:

$2^{1-2} + 2^{2-2} + 2^{3-2} + 2^{4-2} + 2^{5-2} + \ldots\ldots$

$= 2^{-1} + 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots = \frac{1}{2} + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots$

প্রাপ্ত গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{2}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 > i$

$\therefore$ গুণোত্তর ধারাটির প্রথম 14টি পদের সমষ্টি, $S_{14} = a.\frac{r^{14}-1}{r-1}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{2^{14}-1}{2-1} = \frac{2^{14}-1}{2} = \frac{16384-1}{2} = \frac{16383}{2} = 8191.5$ (Ans.)

(গ) $n = 1$ হলে, $U_1 = (6x-4)^{1-2} = (6x-4)^{-1} = \frac{1}{6x-4}$

$n = 2$ হলে, $U_2 = (6x-4)^{2-2} = (6x-4)^0 = 1$

$n = 3$ হলে, $U_3 = (6x-4)^{3-2} = 6x - 4$

$n = 4$ হলে, $U_4 = (6x-4)^{4-2} = (6x-4)^2$

$\therefore$ ধারাটি হবে: $\frac{1}{6x-4} + 1 + (6x-4) + (6x-4)^2 + \ldots$

প্রদত্ত গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{6x-4}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{\frac{1}{6x-4}} = 6x - 4$

এখন, গুণোত্তর ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ, $|6x - 4| < 1$ বা, $-1 < 6x - 4 < 1$ হয়।

$\therefore 6x - 4 < 1$

বা, $6x < 5 \therefore x < \frac{5}{6}$

অথবা, $6x - 4 > -1$

বা, $6x > 3 \therefore x > \frac{1}{2}$

অতএব, $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{6}$ এর জন্য ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে। (Ans.)

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{6x-4}}{1-(6x-4)}$

$= \frac{\frac{1}{6x-4}}{1-6x+4} = \frac{1}{(6x-4)(5-6x)}$ (Ans.)

১৯. $(9x-2)^{-i} + (9x-2)^{-2} + (9x-2)^{-3} + \ldots\ldots$ একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

[যশোর বোর্ড-২০২১]

(ক) 5.032 কে অনন্ত গুণোত্তর ধারার মাধ্যমে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

(খ) $x = 1$ হলে, প্রদত্ত ধারাটির ১ম দশটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

(গ) x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

১৯ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $5.0\dot{3}\dot{2} = 5 + 0.0\dot{3}\dot{2} = 5 + 0.0323232\ldots\ldots$

$= 5 + (0.032 + 0.00032 + 0.0000032 + \ldots\ldots)$

অনন্ত গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ, $a = 0.032$

এবং সাধারণ অনুপাত, $\mathbf{r} = \frac{0.00032}{0.032} = 0.01$

$\therefore$ অনন্ত গুণোত্তর ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $\mathbf{S_\infty} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{1-r}}$

$= \frac{0.032}{1-0.01} = \frac{0.032}{0.99} = \frac{32}{990} = \frac{16}{495}$

অর্থাৎ

$5.0\dot{3}\dot{2}, = 5 + 0.0\dot{3}\dot{2} = 5 + \frac{16}{495} = \frac{2475+16}{495} = \frac{2491}{495}$ (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে, উদ্দীপকের ধারাটি:

$(9x-2)^{-1} + (9x-2)^{-2} + (9x-2)^{-3} + \cdots \ldots$

$x = 1$ হলে ধারাটি হবে,

$(9-2)^{-1}+(9-2)^{-2}+(9-2)^{-3}+\ldots\ldots$

$=7^{-1}+7^{-2}+7^{-3}+\ldots\ldots\ldots=\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\ldots\ldots\ldots$

গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ, $a=\frac{1}{7}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r=\frac{1}{7^2}\div\frac{1}{7}=\frac{1}{7}<1$

$\therefore$ গুণোত্তর ধারাটির ১ম দশটি পদের সমষ্টি, $S_{10}=a.\frac{1-r^{10}}{1-r}$

$=\frac{1}{7}\times\frac{1-\left(\frac{1}{7}\right)^{10}}{1-\frac{1}{7}}=\frac{1}{7}\times\frac{1-\frac{1}{7^{10}}}{1-\frac{1}{7}}=\frac{1}{7}\times\frac{\frac{7^{10}-1}{7^{10}}}{\frac{6}{7}}=\frac{7^{10}-1}{6\times7^{10}}$ (Ans.)

(গ) উদ্দীপকে উল্লেখিত ধারাটির প্রথম পদ, $a=(9x-2)^{-1}=\frac{1}{9x-2}$

এবং সাধারণ অনুপাত,

$r=(9x-2)^{-2}\div(9x-2)^{-1}$

$=(9x-2)^{-1}=\frac{1}{9x-2}$

ধারাটির অসীমতক সমস্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি ধারাটির সাধারণ অনুপাত $|r|<1$ হয়।

অর্থাৎ $\left|\frac{1}{9x-2}\right|<1$ বা, $-1<\frac{1}{9x-2}<1$ হয়।

$\therefore \frac{1}{9x-2}<1$ অথবা, $\frac{1}{9x-2}>-1$

বা, $9x-2>1$ বা, $9x-2<-1$

বা, $9x>3$ বা, $9x<1$

$\therefore x>\frac{1}{3}$ $\therefore x<\frac{1}{9}$

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টির জন্য শর্ত: $x<\frac{1}{9}$ অথবা, $x>\frac{1}{3}$ (Ans.)

$\therefore$ গুণোত্তর ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{1}{9x-2}}{1-\frac{1}{9x-2}}$

$=\frac{1}{9x-2}\times\frac{9x-2}{9x-3}=\frac{1}{9x-3}$ (Ans.)

২০. $\frac{1}{4x+1}+\frac{1}{(4x+1)^2}+\frac{1}{(4x+1)^3}+\ldots\ldots$

[বরিশাল বোর্ড-২০২১]

(ক) সাধারণ পদ $\frac{n^2}{\sqrt[n]{\pi}}$ হলে, অনুক্রমটি নির্ণয় কর।

(খ) $x=\frac{1}{2}$ হলে, ধারাটির ১ম 21 টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

(গ) x এর উপর কী কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

২০ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) অনুক্রমটির সাধারণ পদ $=\frac{n^2}{\sqrt[n]{\pi}}$

$n=1$ হলে, প্রথম পদ $=\frac{1^2}{\sqrt[1]{\pi}}=\frac{1}{\pi}$

$n=2$ হলে, দ্বিতীয় পদ $=\frac{2^2}{\sqrt[2]{\pi}}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}$

$n=3$ হলে, তৃতীয় পদ $=\frac{3^2}{\sqrt[3]{\pi}}=\frac{9}{\sqrt[3]{\pi}}$

$\therefore$ অনুক্রমটি, $\frac{1}{\pi},\frac{4}{\sqrt{\pi}},\frac{9}{\sqrt[3]{\pi}},\ldots\ldots$ (Ans.)

(খ) প্রদত্ত ধারা: $\frac{1}{4x+1}+\frac{1}{(4x+1)^2}+\frac{1}{(4x+1)^3}+\ldots$

$x=\frac{1}{2}$ হলে, $4x+1=4.\frac{1}{2}+1=2+1=3$

$\therefore$ ধারাটি হবে: $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\ldots$

ধারাটির প্রথম পদ, $a=\frac{1}{3}$

সাধারণ অনুপাত, $r=\frac{\frac{1}{3^2}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{9}\times\frac{3}{1}=\frac{1}{3}<1$

ধারাটির ১ম 21টি পদের সমষ্টি, $S_{21}=\frac{a(1-r^{21})}{1-r}$ $[\because r<1]$

$=\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{21}\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^{21}}\right)}{\frac{3-1}{3}}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{3^{21}-1}{3^{21}}\right)\times\frac{3}{2}=\frac{3^{21}-1}{2\times3^{21}}$ (Ans.)

(গ) উদ্দীপকের ধারাটির প্রথম পদ, $a=\frac{1}{4x+1}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r=\frac{1}{(4x+1)^2}\div\frac{1}{4x+1}=\frac{1}{4x+1}$

প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি $|r|<1$ হয়।

অর্থাৎ $\left|\frac{1}{4x+1}\right|<1$ বা, $-1<\frac{1}{4x+1}<1$ হয়।

এখন, $\frac{1}{4x+1}<1$ আবার, $\frac{1}{4x+1}>-1$

বা, $4x+1>1$ বা, $4x+1<-1$

বা, $4x>0$ বা, $4x<-2$

$\therefore x>0$ $\therefore x<-\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত: $x>0$ অথবা, $x<-\frac{1}{2}$ (Ans.)

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{1}{4x+1}}{1-\frac{1}{4x+1}}=\frac{\frac{1}{4x+1}}{\frac{4x+1-1}{4x+1}}=\frac{1}{4x}$ (Ans.)

২১. $\frac{1}{6x+1}+\frac{1}{(6x+1)^2}+\frac{1}{(6x+1)^3}+\ldots\ldots\ldots$ একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

[সিলেট বোর্ড-২০২০]

(ক) $x=1$ হলে, ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।

(খ) $x=\frac{1}{3}$ হলে, ধারাটির ১ম 10টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

(গ) x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি যদি থাকে তবে সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

২১ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) প্রদত্ত গুণোত্তর ধারাটি, $\frac{1}{6x+1}+\frac{1}{(6x+1)^2}+\frac{1}{(6x+1)^3}+\cdots\ldots$

$x=1$ হলে ধারাটি হবে, , $\frac{1}{6\times1+1}+\frac{1}{(6\times1+1)^2}+\frac{1}{(6\times1+1)^3}+\cdots\ldots$

$=\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\ldots\ldots$

$\therefore$ ধারাটির সাধারণ অনুপাত $=\frac{\frac{1}{7^2}}{\frac{1}{7}}=\frac{1}{7}$ (Ans.)

(খ) $x=\frac{1}{3}$ হলে, ধারাটি হবে,

$\frac{1}{6\times\frac{1}{3}+1}+\frac{1}{\left(6\times\frac{1}{3}+1\right)^2}+\frac{1}{\left(6\times\frac{1}{3}+1\right)^3}+\ldots\ldots$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\ldots\ldots$

$\therefore$ ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r=\frac{\frac{1}{3^2}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}<1$

প্রথম পদ, $a=\frac{1}{3}$

আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি, $=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$\therefore$ প্রথম 10টি $(n=10)$ পদের সমষ্টি, $=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^{10}}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{3^{10}-1}{3^{11}}}{\frac{2}{3}}$

$=\frac{3^{10}-1}{3^{11}}\times\frac{3}{2}=\frac{3^{10}-1}{2\times3^{10}}$ (Ans.)

(গ) উদ্দীপকের ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r=\frac{\frac{1}{(6x+1)^2}}{\frac{1}{6x+1}}=\frac{1}{6x+1}$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি $|r|<1$ হয়।

অর্থাৎ $\left|\frac{1}{6x+1}\right|<1$ বা, $|6x+1|>1$ হয়।

অর্থাৎ $6x+1>1$ অথবা, $-(6x+1)>1$

বা, $6x>0$ বা, $6x+1<-1$

$\therefore x>0$ বা, $6x<-2$

$\therefore x<-\frac{1}{3}$

$\therefore x>0$ অথবা $x<-\frac{1}{3}$ হলে প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে। (Ans.)

ধারাটির ১ম পদ, $a = \frac{1}{6x+1}$

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{6x+1}}{1-\left(\frac{1}{6x+1}\right)} = \frac{\frac{1}{6x+1}}{\frac{6x+1-1}{6x+1}}$

$= \frac{1}{6x+1} \times \frac{6x+1}{6x} = \frac{1}{6x}$ (Ans.)

২২. $1 + (4x-1)^{-1} + (4x-1)^{-2} + (4x-1)^{-3} + \ldots\ldots$ একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

[কুমিল্লা বোর্ড-২০১৯]

(ক) $x = 1$ এর জন্য প্রাপ্ত ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।
(খ) $x = 2$ এর জন্য প্রাপ্ত ধারাটির প্রথম 20টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।
(গ) x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

২২ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{(4x-1)^{-1}}{1} = (4x-1)^{-1} = \frac{1}{4x-1}$

$x = 1$ হলে, $r = \frac{1}{4.1-1} = \frac{1}{3}$ (Ans.)

(খ) $x = 2$ হলে ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{4.2-1} = \frac{1}{7}$

এবং ১ম পদ, $a = 1$

$\therefore$ ধারাটির ১ম 20টি পদের সমষ্টি, $= \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ $[\because r < r]$

$= \frac{1\left\{1-\left(\frac{1}{7}\right)^{20}\right\}}{1-\frac{1}{7}}$

$= \frac{1-\frac{1}{7^{20}}}{\frac{6}{7}} = \frac{7}{6}\left(1-\frac{1}{7^{20}}\right).$ (Ans.)

(গ) ধারাটির প্রথম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{4x-1}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি, $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ $\left|\frac{1}{4x-1}\right| < 1$ বা, $|4x-1| > 1$ হয়।

$\therefore 4x - 1 > 1$ অথবা, $-(4x-1) > 1$

বা, $4x > 2$ বা, $4x - 1 < -1$

$\therefore x < 0$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত: $x > \frac{1}{2}$ অথবা, $x < 0$ (Ans.)

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{4x-1}}$

$= \frac{1}{\frac{4x-1-1}{4x-1}} = \frac{4x-1}{4x-2}$ (Ans.)

২৩. $1 + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+y)^3} + \ldots\ldots$ একটি ধারা।

[চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৯]

(ক) যদি $y = 3$ হয়, ধারাটি নির্ণয় কর এবং এর সাধারণ অনুপাত কত?
(খ) $y = 2$ হলে ধারাটির ১ম দশটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।
(গ) y এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

২৩ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) প্রদত্ত ধারাটি,

$1 + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+y)^3} + \ldots\ldots$

$y = 3$ হলে,

ধারাটি, $1 + \frac{1}{1+3} + \frac{1}{(1+3)^2} + \frac{1}{(1+3)^3} + \ldots\ldots$

$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\ldots\ldots$ (Ans.)

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{4} \div 1 = \frac{1}{4}$ (Ans.)

(খ) প্রদত্ত ধারা: $1 + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+y)^3} + \ldots\ldots$

$y = 2$ হলে,

ধারাটি, $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{(1+2)^2} + \frac{1}{(1+2)^3} + \ldots\ldots$

$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots$

ধারাটির ১ম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$

যেহেতু, ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $|r| < 1$

$\therefore$ ধারাটির ১ম 10টি পদের সমষ্টি, $= \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$= \frac{1\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1-\frac{1}{59049}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{59049-1}{59049}}{\frac{2}{3}}$

$= \frac{3}{2} \times \frac{59048}{59049} = \frac{29524}{19683}$ (Ans.)

(গ) ধারাটির ১ম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{1+y}}{1} = \frac{1}{1+y}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ $\left|\frac{1}{1+y}\right| < 1$

বা, $|1+y| >$ হয়।

$\therefore 1 + y > 1$ অথবা, $-(1+y) > 1$

$\therefore y > 0$ বা, $1 + y < -1 : y < -2$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত: $y > 0$ অথবা, $y < -2$

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+y}}$

$= \frac{1}{\frac{1+y-1}{1+y}} = \frac{1+y}{y}$ (Ans.)