

অধ্যায়-০৯ (ত্রিকোণমিতিক অনুপাত)

১. $A = 1 + \sin \theta$ এবং $B = 1 - \sin \theta$.

[ঢাকা বোর্ড ২০২৪]

(ক) $\sec(90^\circ - \theta) = \frac{5}{3}$ হলে, $\sin \theta$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\sec \theta + \tan \theta = \sqrt{\frac{A}{B}}$.

(গ) $B - \cos \theta = 0$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর, যখন $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

১ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\sec(90^\circ - \theta) = \frac{5}{3}$

বা, $\operatorname{cosec} \theta = \frac{5}{3}$ [$\because \sec(90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec} \theta$]

বা, $\frac{1}{\sin \theta} = \frac{5}{3}$ [$\because \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$]

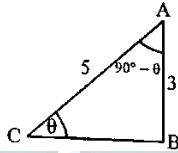
$\therefore \sin \theta = \frac{3}{5}$ [বিপরীতকরণ করে]

নির্ণেয় মান : $\frac{3}{5}$

► বিকল্প পদ্ধতি

এখানে, ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle ABC =$ এক সমকোণ $= 90^\circ$,
 $\angle ACB = \theta$, $\angle BAC = 90^\circ - \theta$

$\sec(90^\circ - \theta) = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{3}$



অর্থাৎ, $AC = 5$ এবং $AB = 3$

এখন, $\sin \angle ACB = \frac{AB}{AC}$

বা, $\sin \theta = \frac{3}{5}$

নির্ণেয় মান : $\frac{3}{5}$.

(খ) দেওয়া আছে, $A = 1 + \sin \theta$ এবং $B = 1 - \sin \theta$

বামপক্ষ = $\sec \theta + \tan \theta$

$= \frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ [$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ এবং $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$]

$= \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = \sqrt{\left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{(1 + \sin \theta)^2}{\cos^2 \theta}}$

$= \sqrt{\frac{(1 + \sin \theta)^2}{1 - \sin^2 \theta}}$ [$\because \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$]

$= \sqrt{\frac{(1 + \sin \theta)(1 + \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}}$

$= \sqrt{\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$ ডানপক্ষ

$\therefore \sec \theta + \tan \theta = \sqrt{\frac{A}{B}}$. (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে, $B = 1 - \sin \theta$

এখন, $B - \cos \theta = 0$ হলে,

$1 - \sin \theta - \cos \theta = 0$

বা, $\sin \theta + \cos \theta = 1$

বা, $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = (1)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1$

বা, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = 1$

বা, $1 + 2 \sin \theta \cos \theta = 1$ [$\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$]

বা, $2 \sin \theta \cos \theta = 0$

বা, $\sin \theta \cdot \cos \theta = 0$

হয়, $\sin \theta = 0$

বা, $\sin \theta = \sin 0^\circ$

[$\because \sin 0^\circ = 0$]

$\therefore \theta = 0^\circ$

নির্ণেয় মান : $\theta = 0^\circ, 90^\circ$.

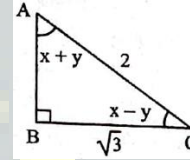
অথবা, $\cos \theta = 0$

বা, $\cos \theta = \cos 90^\circ$

[$\because \cos 90^\circ = 0$]

$\therefore \theta = 90^\circ$

২.



চিত্রে ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার $\angle B = 90^\circ$ ।

[রাজশাহী বোর্ড ২০২৪]

(ক) $\sin(90^\circ - \theta) = \frac{5}{13}$ হলে, $\sin \theta$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\frac{\cos A}{1 - \tan A} + \frac{\sin A}{1 - \cot A} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$.

(গ) দেখাও যে, $\sin x = \cos 3y$.

২ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\sin(90^\circ - \theta) = \frac{5}{13}$

বা, $\cos \theta = \frac{5}{13}$ [$\because \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$]

এখন, $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

$= 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$

$= 1 - \frac{25}{169}$

$= \frac{169 - 25}{169} = \frac{144}{169}$

$\therefore \sin \theta = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$

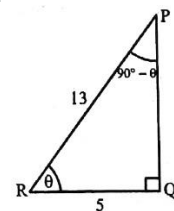
নির্ণেয় মান : $\frac{12}{13}$.

► বিকল্প পদ্ধতি

এখানে, PQR সমকোণী ত্রিভুজে $\angle PQR =$ এক সমকোণ $= 90^\circ$,

$\angle PRQ = \theta$, $\angle QPR = 90^\circ - \theta$

$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{QR}{PR} = \frac{5}{13}$



অর্থাৎ, $PR = 13$ এবং $QR = 5$

$\therefore PQ = \sqrt{PR^2 - QR^2}$

$= \sqrt{(13)^2 - 5^2}$

$$= 169 - 25 = \sqrt{144} = 12$$

এখন, $\sin \angle PRQ = \frac{PQ}{PR}$ বা, $\sin \theta = \frac{12}{13}$

নির্ণেয় মান : $\frac{12}{13}$

(খ) এখানে, ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle B =$ এক সমকোণ $= 90^\circ$,

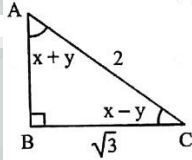
$AC = 2, BC = \sqrt{3}$.

এখন, $\sin A = \frac{BC}{AC}$

বা, $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\sin A = \sin 60^\circ$

$\therefore A = 60^\circ$

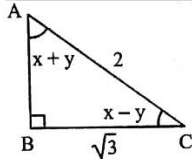


$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \frac{\cos A}{1 - \tan A} + \frac{\sin A}{1 - \cot A} \\ &= \frac{\cos 60^\circ}{1 - \tan 60^\circ} + \frac{\sin 60^\circ}{1 - \cot 60^\circ} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \sqrt{3}} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2(1 - \sqrt{3})} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \\ &= \frac{1}{2(1 - \sqrt{3})} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2(1 - \sqrt{3})} + \frac{3}{2(\sqrt{3} - 1)} \\ &= \frac{1}{-2(\sqrt{3} - 1)} + \frac{3}{2(\sqrt{3} - 1)} = \frac{3}{2(\sqrt{3} - 1)} - \frac{1}{2(\sqrt{3} - 1)} \\ &= \frac{3 - 1}{2(\sqrt{3} - 1)} = \frac{2}{2(\sqrt{3} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \\ &= \frac{1(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} \text{ [লব ও হরকে } (\sqrt{3} + 1) \text{ দ্বারা গুণ করে]} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{3 - 1} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}) = \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

$\therefore \frac{\cos A}{1 - \tan A} + \frac{\sin A}{1 - \cot A} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$ (প্রমাণিত)

► বিকল্প পদ্ধতি

এখানে, ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle B =$ এক সমকোণ $= 90^\circ$, $AC = 2$ এবং $BC = \sqrt{3}$.



$$\begin{aligned} \text{এখন, } AB &= \sqrt{AC^2 - BC^2} \\ &= \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{4 - 3} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$

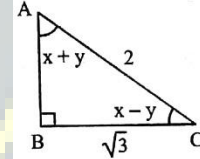
$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \frac{\cos A}{1 - \tan A} + \frac{\sin A}{1 - \cot A} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \sqrt{3}} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2(1 - \sqrt{3})} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \\ &= \frac{1}{2(1 - \sqrt{3})} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2(1 - \sqrt{3})} + \frac{3}{2(\sqrt{3} - 1)} \\ &= \frac{1}{-2(\sqrt{3} - 1)} + \frac{3}{2(\sqrt{3} - 1)} = \frac{3}{2(\sqrt{3} - 1)} - \frac{1}{2(\sqrt{3} - 1)} \\ &= \frac{3 - 1}{2(\sqrt{3} - 1)} = \frac{2}{2(\sqrt{3} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \\ &= \frac{1(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} \text{ [লব ও হরকে } (\sqrt{3} + 1) \text{ দ্বারা গুণ করে]} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{3 - 1} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}) = \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

$\therefore \frac{\cos A}{1 - \tan A} + \frac{\sin A}{1 - \cot A} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$ (প্রমাণিত)

(গ) এখানে, ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle B =$ এক সমকোণ $= 90^\circ$, $\angle A = x + y$, $\angle C = x - y$, $AC = 2$ এবং $BC = \sqrt{3}$



এখন, $\sin A = \frac{BC}{AC}$

বা, $\sin (x + y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\sin (x + y) = \sin 60^\circ$

$\therefore x + y = 60^\circ \dots\dots\dots (i)$

আবার, $\cos C = \frac{BC}{AC}$

বা, $\cos (x - y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\cos (x - y) = \cos 30^\circ$

$\therefore x - y = 30^\circ \dots\dots\dots (ii)$

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$x + y + x - y = 60^\circ + 30^\circ$

বা, $2x = 90^\circ$

বা, $x = \frac{90^\circ}{2}$

$\therefore x = 45^\circ$

(i) নং সমীকরণে $x = 45^\circ$ বসিয়ে পাই,

$45^\circ + y = 60^\circ$

বা, $y = 60^\circ - 45^\circ$

$$\therefore y = 15^\circ$$

$$\text{বামপক্ষ} = \sin x = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{ডানপক্ষ} = \cos 3y = \cos (3 \times 15^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \sin x = \cos 3y. (\text{দেখানো হলো})$$

৩. (i) $\cos p + \cot p = x$ এবং $\cot p - \cos p = y$.

(ii) $2 \sin^2 \theta + 3 \cos \theta - 3 = 0$.

[যশোর বোর্ড ২০২৪]

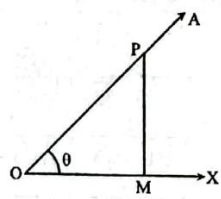
(ক) জ্যামিতিকভাবে প্রমাণ কর যে, $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$.

(খ) (i) নং তথ্যের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\frac{x^2 - y^2}{\sqrt{xy}} = 4$.

(গ) (ii) নং তথ্যের আলোকে θ -এর মান নির্ণয় কর, যেখানে, $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

৩ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) মনে করি, $\angle XO A = \theta$; একটি সূক্ষ্মকোণ। OA বাহুতে যেকোনো একটি বিন্দু P নিই। P থেকে OX এর উপর PM লম্ব টানি। ফলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ POM গঠিত হলো।



$\angle POM = \theta$ সাপেক্ষে সমকোণী ত্রিভুজ POM এর PM বিপরীত বাহু, OM সন্নিহিত বাহু, OP অতিভুজ।

POM সমকোণী ত্রিভুজে $PM^2 + OM^2 = OP^2$

বা, $OM^2 = OP^2 - PM^2$

এখন, $\sec \theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{সন্নিহিত বাহু}} = \frac{OP}{OM}$

এবং $\tan \theta = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}} = \frac{PM}{OM}$

$$\begin{aligned} \therefore \sec^2 \theta - \tan^2 \theta &= \left(\frac{OP}{OM}\right)^2 - \left(\frac{PM}{OM}\right)^2 \\ &= \frac{OP^2}{OM^2} - \frac{PM^2}{OM^2} \\ &= \frac{OP^2 - PM^2}{OM^2} \\ &= \frac{OM^2}{OM^2} [\because OP^2 - PM^2 = OM^2] \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1. (\text{প্রমাণিত})$$

(খ) দেওয়া আছে, $\cos p + \cot p = x$

এবং $\cot p - \cos p = y$

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{xy}} = \frac{(\cos p + \cot p)^2 - (\cot p - \cos p)^2}{\sqrt{(\cos p + \cot p)(\cot p - \cos p)}} \\ &= \frac{4 \cot p \cos p}{\sqrt{\cot^2 p - \cos^2 p}} \\ [\because (a+b)^2 - (a-b)^2 &= 4ab \text{ এবং } (a+b)(a-b) = a^2 - b^2] \\ &= \frac{4 \sqrt{\cot^2 p (1 - \sin^2 p)}}{\sqrt{\cot^2 p - \cos^2 p}} [\because \cos^2 p = 1 - \sin^2 p] \\ &= \frac{4 \sqrt{\cot^2 p - \cot^2 p \cdot \sin^2 p}}{\sqrt{\cot^2 p - \cos^2 p}} \end{aligned}$$

$$= \frac{4 \sqrt{\cot^2 p - \frac{\cos^2 p}{\sin^2 p} \cdot \sin^2 p}}{\sqrt{\cot^2 p - \cos^2 p}} [\because \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}]$$

$$= \frac{4 \sqrt{\cot^2 p - \cot^2 p}}{\sqrt{\cot^2 p - \cos^2 p}} = 4 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{xy}} = 4. (\text{প্রমাণিত})$$

(গ) দেওয়া আছে, $2 \sin^2 \theta + 3 \cos \theta - 3 = 0$

বা, $2(1 - \cos^2 \theta) + 3 \cos \theta - 3 = 0$ [$\because \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$]

বা, $2 - 2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta - 3 = 0$

বা, $2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta - 1 = 0$

বা, $2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta + 1 = 0$ [উভয়পক্ষকে (-1) দ্বারা গুণ করে]

বা, $2 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - \cos \theta + 1 = 0$

বা, $2 \cos \theta (\cos \theta - 1) - 1 (\cos \theta - 1) = 0$

বা, $(\cos \theta - 1)(2 \cos \theta - 1) = 0$

হয়, $\cos \theta - 1 = 0$

বা, $\cos \theta = 1$

ev, $\cos \theta = \cos 0^\circ$

বা, $0 = 0^\circ$ যা গ্রহণযোগ্য নয় কারণ

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ সূক্ষ্মকোণ]

অথবা, $2 \cos \theta - 1 = 0$

বা, $2 \cos \theta = 1$

বা, $\cos \theta = \frac{1}{2}$

ev, $\cos \theta = \cos 60^\circ$

বা, $\theta = 60^\circ$

নির্ণেয় মান : $\theta = 60^\circ$.

8. $\cot \theta + \cos \theta = m$ এবং $\cot \theta - \cos \theta = n$

[কুমিল্লা বোর্ড ২০২৪]

(ক) $\theta = 60^\circ$ হলে, $3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $\frac{m}{n} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$ হলে, $\tan \theta$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) প্রমাণ কর যে, $(m^2 - n^2)^2 = 16 mn$.

8 নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\theta = 60^\circ$

প্রদত্ত রাশি = $3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta = 3 \sin 60^\circ - 4 \sin^3 60^\circ$

$$= 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 [\because \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}]$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - 4 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$$

নির্ণেয় মান : 0.

(খ) দেওয়া আছে, $\cot \theta + \cos \theta = m$ এবং $\cot \theta - \cos \theta = n$

$$\frac{m}{n} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \text{ হলে, } \frac{\cot \theta + \cos \theta}{\cot \theta - \cos \theta} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{\cot \theta + \cos \theta - \cot \theta - \cos \theta}{\cot \theta + \cos \theta - \cot \theta + \cos \theta} = \frac{2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}}$$

[যোজন-বিয়োজন করে]

$$\text{বা, } \frac{2 \cot \theta}{2 \cos \theta} = \frac{4}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{\cot \theta}{\cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{\cot \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sin \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} [\text{ব্যস্তানুপাত করে}]$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin 60^\circ$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \tan \theta = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\text{নির্ণেয় মান : } \sqrt{3}.$$

(গ) দেওয়া আছে, $\cot \theta + \cos \theta = m$ এবং $\cot \theta - \cos \theta = n$

$$\text{বামপক্ষ} = (m^2 - n^2)^2$$

$$= \{(\cot \theta + \cos \theta)^2 - (\cot \theta - \cos \theta)^2\}^2$$

$$= \{4 \cot \theta \cdot \cos^2 \theta\}^2$$

$$= 16 \cot^2 \theta \cdot \cos^2 \theta$$

$$= 16 \cot^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) [\because \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta]$$

$$= 16 (\cot^2 \theta - \cot^2 \theta \cdot \sin^2 \theta)$$

$$= 16 \left(\cot^2 \theta - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \cdot \sin^2 \theta \right) [\because \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}]$$

$$= 16 (\cot^2 \theta - \cos^2 \theta)$$

$$= 16 (\cot \theta + \cos \theta) (\cot \theta - \cos \theta) = 16mn = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore (m^2 - n^2)^2 = 16mn. \text{ (প্রমাণিত)}$$

৫. $\cos B = \sqrt{3} \sin B$ এবং $\sqrt{2} - \sin P = \cos P$,
যেখানে, B, P সূক্ষ্মকোণ।

[চট্টগ্রাম বোর্ড ২০২৪]

(ক) $\tan 9x = \cot 9x$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $\frac{\operatorname{cosec}^2 B - \sec^2 B}{\sin^2 B - \cos^2 B}$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) উদ্দীপকের তথ্য অনুসারে P এর মান নির্ণয় কর।

৫ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\tan 9x = \cot 9x$

$$\text{বা, } \tan 9x = \frac{1}{\tan 9x} [\because \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}]$$

$$\text{বা, } \tan^2 9x = 1$$

$$\text{বা, } \tan 9x = 1 \text{ [বর্গমূল করে]}$$

$$\text{বা, } \tan 9x \tan 45^\circ$$

$$\text{বা, } 9x = 45^\circ$$

$$\text{বা, } x = \frac{45^\circ}{9}$$

$$\therefore x = 5^\circ$$

$$\text{নির্ণেয় মান : } x = 5^\circ.$$

(খ) দেওয়া আছে, $\cos B = \sqrt{3} \sin B$; যেখানে B সূক্ষ্মকোণ

$$\text{বা, } \frac{\cos B}{\sin B} = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \cot B = \sqrt{3} [\because \frac{\cos B}{\sin B} = \cot B]$$

$$\text{বা, } \cot B = \cot 30^\circ [\because \cot 30^\circ = \frac{\cos B}{\sin B}]$$

$$\therefore B = 30^\circ$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{\operatorname{cosec}^2 B - \sec^2 B}{\sin^2 B - \cos^2 B} = \frac{\operatorname{cosec}^2 30^\circ - \sec^2 30^\circ}{\sin^2 30^\circ - \cos^2 30^\circ}$$

$$= \frac{2^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$[\because \operatorname{cosec} 30^\circ = 2, \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ এবং } \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}]$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}]$$

$$= \frac{4 - \frac{4}{3}}{\frac{1}{4} - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{12-4}{3}}{\frac{1-3}{4}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{-2}{4}} = \frac{8}{3} \times \left(-\frac{2}{1}\right) = -\frac{16}{3}$$

$$\text{নির্ণেয় মান : } -\frac{16}{3}.$$

(গ) দেওয়া আছে,

$$\sqrt{2} - \sin P = \cos P \text{ যেখানে } P \text{ সূক্ষ্মকোণ}$$

$$\text{বা, } (\sqrt{2} - \sin P)^2 = \cos^2 P \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin P + \sin^2 P = \cos^2 P$$

$$\text{বা, } 2 - 2\sqrt{2} \sin P + \sin^2 P = 1 - \sin^2 P$$

$$[\because \cos^2 P = 1 - \sin^2 P]$$

$$\text{বা, } 2 - 2\sqrt{2} \sin P + \sin^2 P - 1 + \sin^2 P = 0$$

$$\text{বা, } 2 \sin^2 P - 2\sqrt{2} \sin P + 1 = 0$$

$$\text{বা, } (\sqrt{2} \sin P)^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \sin P \cdot 1 + 1^2 = 0$$

$$\text{বা, } (\sqrt{2} \sin P - 1)^2 = 0$$

$$\text{বা, } \sqrt{2} \sin P - 1 = 0 \text{ [বর্গমূল করে]}$$

$$\text{বা, } \sqrt{2} \sin P = 1$$

$$\text{বা, } \sin P = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{বা, } \sin P = \sin 45^\circ$$

$$\therefore P = 45^\circ.$$

$$\text{নির্ণেয় মান : } P = 45^\circ.$$

৬. $\cos \theta = m - \cot \theta$, $\cot \theta = n + \cos \theta$ এবং

$$\cos (m + n) = \frac{1}{2} = \sin (m - n); m, n \text{ সূক্ষ্মকোণ।}$$

[চট্টগ্রাম বোর্ড ২০২৪]

(ক) $\cot (90^\circ - \theta) = \sqrt{3}$ হলে, $\sin \theta$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) দেখাও যে, $\left(\frac{m^2 - n^2}{4}\right)^2 = mn$.

(গ) দেখাও যে, $m = 45^\circ$ এবং $n = 15^\circ$ ।

৬ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে,

$$\cot (90^\circ - \theta) = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \cot (90^\circ - \theta) = \cot 30^\circ [\because \cot 30^\circ = \sqrt{3}]$$

$$\text{বা, } 90^\circ - \theta = 30^\circ$$

$$\text{বা, } \theta = 90^\circ - 30^\circ$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \sin \theta = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{নির্ণেয় মান : } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

► বিকল্প পদ্ধতি

$$\text{দেওয়া আছে, } \cot (90^\circ - \theta) = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \tan \theta = \sqrt{3} [\because \cot (90^\circ - \theta) = \tan \theta]$$

$$\text{বা, } \tan \theta = \tan 60^\circ$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \sin \theta = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{নির্ণেয় মান : } \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(খ) দেওয়া আছে, $\cos \theta = m - \cot \theta$

বা, $m = \cot \theta + \cos \theta$

এবং $\cot \theta = n + \cos \theta$

বা, $n = \cot \theta - \cos \theta$

বামপক্ষ = $\left(\frac{m^2 - n^2}{4}\right)^2$

= $\left\{\frac{(\cot \theta + \cos \theta)^2 - (\cot \theta - \cos \theta)^2}{4}\right\}^2$

= $\left\{\frac{4 \cot \theta \cos \theta}{4}\right\}^2$ [$\because (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$]

= $\cot^2 \theta \cos^2 \theta$

= $\cot^2 \theta (1 - \sin^2 \theta)$ [$\because \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$]

= $\cot^2 \theta - \cot^2 \theta \cdot \sin^2 \theta$

= $\cot^2 \theta - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \cdot \sin^2 \theta$ [$\because \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$]

= $\cot^2 \theta + \cos^2 \theta$

= $(\cot \theta + \cos \theta)(\cot \theta - \cos \theta)$

[$\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$]

= $mn = \text{ডানপক্ষ} = mn$. (দেখানো হলো)

(গ) দেওয়া আছে, $\cos(m+n) = \frac{1}{2} = \sin(m-n)$; m, n সূক্ষ্মকোণ

অর্থাৎ, $\cos(m+n) = \frac{1}{2}$

বা, $\cos(m+n) = \cos 60^\circ$ [$\because \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$]

$\therefore m+n = 60^\circ$ (i)

এবং $\sin(m-n) = \frac{1}{2}$

বা, $\sin(m-n) = \sin 30^\circ$ [$\because \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$]

$\therefore m-n = 30^\circ$ (ii)

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$m+n+m-n = 60^\circ + 30^\circ$

বা, $2m = 90^\circ$

বা, $m = \frac{90^\circ}{2}$

$\therefore m = 45^\circ$

(i) নং সমীকরণে m এর মান বসিয়ে পাই,

$45^\circ + n = 60^\circ$

বা, $n = 60^\circ - 45^\circ$

$\therefore n = 15^\circ$

অতএব, $m = 45^\circ$ এবং $n = 15^\circ$. (দেখানো হলো)

৭. $p = \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta$, $q = \operatorname{cosec} \theta - \cot \theta$, $c = \frac{\sec \theta + 1}{\sec \theta - 1}$
[সিলেট বোর্ড ২০২৪]

(ক) $\theta = 30^\circ$ হলে, pq এর মান নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $p^2 = c$.

(গ) $\frac{p}{q} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ এবং θ সূক্ষ্মকোণ হলে, $\sec \theta$ এর মান নির্ণয় কর।

৭ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $p = \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta$

$q = \operatorname{cosec} \theta - \cot \theta$ এবং $\theta = 30^\circ$

প্রদত্ত রাশি = pq

= $(\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta)(\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)$

= $\operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta$

= $\operatorname{cosec}^2 30^\circ - \cot^2 30^\circ$

= $2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$

নির্ণেয় মান : 1.

► বিকল্প পদ্ধতি

দেওয়া আছে, $\theta = 30^\circ$

$p = \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta$

= $\operatorname{cosec} 30^\circ + \cot 30^\circ = 2 + \sqrt{3}$

$q = \operatorname{cosec} \theta - \cot \theta$

= $\operatorname{cosec} 30^\circ - \cot 30^\circ$

= $2 - \sqrt{3}$

প্রদত্ত রাশি = pq

= $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$

নির্ণেয় মান : 1.

(খ) দেওয়া আছে, $p = \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta$ এবং $c = \frac{\sec \theta + 1}{\sec \theta - 1}$

বামপক্ষ = $p^2 = (\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta)^2$

= $\left(\frac{1}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)^2 = \left(\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}\right)^2$

= $\frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} = \frac{(1 - \cos \theta)^2}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{(1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}$

= $\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{1 + \frac{1}{\sec \theta}}{1 - \frac{1}{\sec \theta}} = \frac{\sec \theta + 1}{\sec \theta - 1}$

= $\frac{\sec \theta + 1}{\sec \theta} \times \frac{\sec \theta}{\sec \theta - 1} = \frac{\sec \theta + 1}{\sec \theta - 1} = c = \text{ডানপক্ষ}$

$\therefore p^2 = c$. (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে, $p = \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta$

$q = \operatorname{cosec} \theta - \cot \theta$ এবং $\frac{p}{q} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta + \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta}{\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta - \operatorname{cosec} \theta - \cot \theta} = \frac{2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3}}$
[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2 \operatorname{cosec} \theta}{-2 \cot \theta} = \frac{4}{-2\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\operatorname{cosec} \theta}{\cot \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{1}{\sin \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{1}{\cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

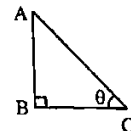
বা, $\frac{1}{\sin \theta} \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{1}{\cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\therefore \sec \theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ [$\because \frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta$]

নির্ণেয় মান : $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

৮.



[বরিশাল বোর্ড ২০২৪]

(ক) $\tan(90^\circ - \beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\operatorname{cosec} \beta$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}$

(গ) $\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{BC} = \sqrt{2}$ হলে, এর θ মান নির্ণয় কর।

৮ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\tan(90^\circ - \beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan(90^\circ - \beta) = \tan 30^\circ$ [$\because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$]

বা, $90^\circ - \beta = 30^\circ$

বা, $\beta = 90^\circ - 30^\circ$

$\therefore \beta = 60^\circ$

প্রদত্ত রাশি = $\operatorname{cosec} \beta = \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$

► বিকল্প পদ্ধতি

দেওয়া আছে, $\tan(90^\circ - \beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\cot \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ [$\because \tan(90^\circ - \beta) = \cot \beta$]

বা, $\cot \beta = \cot 60^\circ$ [$\because \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$]

$\therefore \beta = 60^\circ$

প্রদত্ত রাশি = $\operatorname{cosec} \beta = \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$

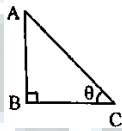
নির্ণেয় মান : $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(খ) এখানে, ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle ABC$ এক সমকোণ, $\angle ACB = \theta$

এখন, $\frac{AB}{BC} = \tan \angle ACB$

বা, $\frac{AB}{BC} = \tan \theta$

এবং $\frac{AB}{BC} = \sec \theta$



বামপক্ষ = $\left(\frac{AB}{BC} + \frac{AC}{BC}\right)^2 = (\tan \theta + \sec \theta)^2$

= $\left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta}\right)^2 = \left(\frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta}\right)^2 = \frac{(\sin \theta + 1)^2}{\cos^2 \theta}$

= $\frac{(\sin \theta + 1)^2}{1 - \sin^2 \theta}$ [$\because \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$]

= $\frac{(1 + \sin \theta)(1 + \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} = \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} = \text{ডানপক্ষ}$

$\therefore \left(\frac{AB}{BC} + \frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}$ (প্রমাণিত)

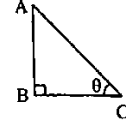
(গ) ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle ABC$ এক সমকোণ, $\angle ACB = \theta$.

$\therefore \frac{AB}{BC} = \sin \angle ACB$

বা, $\frac{AB}{BC} = \sin \theta$

এবং $\frac{BC}{AC} = \cos \angle ACB$

বা, $\frac{BC}{AC} = \cos \theta$



এখন, $\frac{AB}{BC} + \frac{BC}{AC} = \sqrt{2}$ হলে,

$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$

বা, $\cos \theta = \sqrt{2} - \sin \theta$

বা, $\cos^2 \theta = (\sqrt{2} - \sin \theta)^2$ [বর্গ করে]

বা, $\cos^2 \theta = (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \theta + \sin^2 \theta$

বা, $\cos^2 \theta = 2 - 2\sqrt{2} \sin \theta + \sin^2 \theta$

বা, $1 - \sin^2 \theta = 2 - 2\sqrt{2} \sin \theta + \sin^2 \theta$

বা, $2 - 2\sqrt{2} \sin \theta + \sin^2 \theta - 1 + \sin^2 \theta = 0$

বা, $2 \sin^2 \theta - 2\sqrt{2} \sin \theta + 1 = 0$

বা, $(\sqrt{2} \sin \theta)^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \sin \theta \cdot 1 + 1^2 = 0$

বা, $(\sqrt{2} \sin \theta - 1)^2 = 0$

বা, $\sqrt{2} \sin \theta - 1 = 0$ [বর্গমূল করে]

বা, $\sqrt{2} \sin \theta = 1$

বা, $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\sin \theta = \sin 45^\circ$

$\therefore \theta = 45^\circ$

নির্ণেয় মান : $\theta = 45^\circ$

৯. $x = \sec \theta$, $y = \sin \theta$ এবং $a = \cos \theta$

[দিনাজপুর বোর্ড ২০২৪]

(ক) $\cot(A + 15^\circ) = 1$ হলে, A এর মান নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{a}{y} + \frac{1}{y}$

(গ) উদ্দীপকের আলোকে $\frac{1}{x^2} - y^2 + 5a = 2$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ।

৯ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\cot(A + 15^\circ) = 1$

বা, $\cot(A + 15^\circ) = \cot 45^\circ$ [$\because \cot 45^\circ = 1$]

বা, $A + 15^\circ = 45^\circ$

বা, $A = 45^\circ - 15^\circ$

$\therefore A = 30^\circ$

নির্ণেয় মান : $A = 30^\circ$

(খ) দেওয়া আছে, $x = \sec \theta$, $y = \sin \theta$ এবং $a = \cos \theta$

বামপক্ষ = $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \sqrt{\frac{\sec \theta + 1}{\sec \theta - 1}} = \frac{\sqrt{\sec \theta + 1}}{\sqrt{\sec \theta - 1}}$

= $\frac{\sqrt{\sec \theta + 1} \cdot \sqrt{\sec \theta + 1}}{\sqrt{\sec \theta - 1} \cdot \sqrt{\sec \theta + 1}}$

[লব ও হরকে $\sqrt{\sec \theta + 1}$ দ্বারা গুণ করে]

= $\frac{(\sqrt{\sec \theta + 1})^2}{\sqrt{(\sec \theta + 1)(\sec \theta - 1)}} = \frac{\sec \theta + 1}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}$

= $\frac{\sec \theta + 1}{\sqrt{\tan^2 \theta}}$ [$\because \sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$]

$$\begin{aligned} &= \frac{\sec \theta + 1}{\tan^2 \theta} = \frac{\sec \theta}{\tan \theta} + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\frac{1}{\cos \theta}}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} + \frac{1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \\ &= \frac{1}{\cos \theta} \times \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + 1 \times \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{1}{y} + \frac{a}{y} [\because y = \sin \theta \text{ এবং } a = \cos \theta] \\ &= \frac{a}{y} + \frac{1}{y} = \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{a}{y} + \frac{1}{y} \text{ (প্রমাণিত)}$$

(গ) দেওয়া আছে, $x = \sec \theta$, $y = \sin \theta$ এবং $a = \cos \theta$

$$\text{এখন, } \frac{1}{x^2} - y^2 + 5a = 2 \text{ হলে,}$$

$$\frac{1}{\sec^2 \theta} - \sin^2 \theta + 5 \cos \theta = 2$$

$$\text{বা, } \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) + 5 \cos \theta = 2$$

$$\text{বা, } \cos^2 \theta - (1 + \cos^2 \theta) + 5 \cos \theta = 2$$

$$[\because \frac{1}{\sec^2 \theta} = \cos^2 \theta \text{ এবং } \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta]$$

$$\text{বা, } \cos^2 \theta - 1 + \cos^2 \theta + 5 \cos \theta - 2 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \cos^2 \theta + 5 \cos \theta - 3 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \cos^2 \theta - \cos \theta + 6 \cos \theta - 3 = 0$$

$$\text{বা, } \cos \theta (2 \cos \theta - 1) + 3 (2 \cos \theta - 1) = 0$$

$$\text{বা, } (2 \cos \theta - 1) (\cos \theta + 3) = 0$$

$$\text{হয়, } 2 \cos \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \cos \theta = 1$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \cos 60^\circ$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

$$\text{নির্ণেয় মান : } \theta = 60^\circ.$$

$$\text{অথবা, } \cos \theta + 3 = 0$$

$$\text{বা, } \cos \theta = -3$$

$$\text{যা গ্রহণযোগ্য নয়}$$

$$\text{কারণ } 0^\circ < \theta < 90^\circ$$

১০. (i) $P = 2 - \sin^2 \theta$ এবং $Q = 2 + \tan^2 \theta$, (ii) $R = \operatorname{cosec} \theta$.

[ময়মনসিংহ বোর্ড ২০২৪]

$$\text{(ক) } \operatorname{cosec} \theta - \cot \theta = \frac{4}{3} \text{ হলে, } \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

$$\text{(খ) প্রমাণ কর যে, } \frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = 1.$$

$$\text{(গ) সমাধান কর : } \frac{4}{R^2} - (2 + 2\sqrt{3}) \frac{1}{R} + \sqrt{3} = 0, \text{ যখন } \theta \text{ সূক্ষ্মকোণ।}$$

১০ নং প্রশ্নের উত্তর

$$\text{(ক) দেওয়া আছে, } \operatorname{cosec} \theta - \cot \theta = \frac{4}{3}$$

$$\text{আমরা জানি, } \operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

$$\text{বা, } (\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta) \times \frac{4}{3} (\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta) = 1$$

$$\text{বা, } (\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta) \times \frac{4}{3} = 1$$

$$\therefore \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta = \frac{3}{4}$$

$$\text{নির্ণেয় মান : } \frac{4}{3}.$$

(খ) দেওয়া আছে, $P = 2 - \sin^2 \theta$ এবং $Q = 2 + \tan^2 \theta$

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{1}{P} + \frac{1}{Q}$$

$$= \frac{1}{2 - \sin^2 \theta} + \frac{1}{2 + \tan^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{2 - \sin^2 \theta} + \frac{1}{2 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} [\because \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}]$$

$$= \frac{1}{2 - \sin^2 \theta} + \frac{1}{\frac{2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}}$$

$$= \frac{1}{2 - \sin^2 \theta} + 1 \times \frac{\cos^2 \theta}{2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{2 - \sin^2 \theta} + 1 \times \frac{1 - \sin^2 \theta}{2 (1 - \sin^2 \theta) + \sin^2 \theta}$$

$$[\because \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta]$$

$$= \frac{1}{2 - \sin^2 \theta} + \frac{1 - \sin^2 \theta}{2 - 2 \sin^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{2 - \sin^2 \theta} + \frac{1 - \sin^2 \theta}{2 - \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{1 + 1 - \sin^2 \theta}{2 - \sin^2 \theta} + \frac{2 - \sin^2 \theta}{2 - \sin^2 \theta} = 1 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = 1. \text{ (প্রমাণিত)}$$

(গ) দেওয়া আছে, $R = \operatorname{cosec} \theta$

$$\text{এখন, } \frac{4}{R^2} - (2 + 2\sqrt{3}) \frac{1}{R} + \sqrt{3} = 0, \text{ যখন } \theta \text{ সূক্ষ্মকোণ}$$

$$\text{বা, } \frac{4}{\operatorname{cosec}^2 \theta} - (2 + 2\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta} + \sqrt{3} = 0$$

$$\text{বা, } 8 \cdot \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 \theta} - (2 + 2\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta} + \sqrt{3} = 0$$

$$\text{বা, } 4 \sin^2 \theta - (2 + 2\sqrt{3}) \sin \theta + \sqrt{3} = 0 [\because \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta} = \sin \theta]$$

$$\text{বা, } 4 \sin^2 \theta - 2 \sin \theta - 2\sqrt{3} \sin \theta + \sqrt{3} = 0$$

$$\text{বা, } 2 \sin \theta (2 \sin \theta - 1) - \sqrt{3} (2 \sin \theta - 1) = 0$$

$$\text{বা, } (2 \sin \theta - 1) (2 \sin \theta - \sqrt{3}) = 0$$

$$\text{হয়, } 2 \sin \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \sin \theta = 1$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin 30^\circ$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

$$\text{অথবা, } 2 \sin \theta - \sqrt{3} = 0$$

$$\text{বা, } 2 \sin \theta = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin 60^\circ$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

$$\text{নির্ণেয় সমাধান : } \theta = 30^\circ, 60^\circ.$$

১১. $x = \operatorname{cosec} \theta$, $y = \sec \theta$ এবং $z = \tan \theta$ যখন θ সূক্ষ্মকোণ।

[ঢাকা বোর্ড ২০২৩]

$$\text{(ক) } \tan (90^\circ - A) = \sqrt{3} \text{ হলে, } A \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

$$\text{(খ) } x + \frac{1}{z} = a \text{ হলে, প্রমাণ কর যে, } \cos \theta = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}.$$

$$\text{(গ) } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \sqrt{2} \text{ হলে, } \theta \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

১১ নং প্রশ্নের উত্তর

$$\text{(ক) দেওয়া আছে, } \tan (90^\circ - A) = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \cot A = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \cot A = \cot 30^\circ$$

$$\therefore A = 30^\circ$$

$$\text{নির্ণেয় মান : } A = 30^\circ.$$

(খ) দেওয়া আছে, $x = \operatorname{cosec} \theta$, $y = \sec \theta$ এবং $z = \tan \theta$

$$\text{এখন, } x + \frac{1}{z} = a \text{ হলে, } \operatorname{cosec} \theta + \frac{1}{\tan \theta} = a$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = a$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = a$$

$$\text{বা, } \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = a$$

$$\text{বা, } \left(\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 = a^2 \text{ [উভয়পক্ষে বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } \frac{(1 + \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} = a^2$$

$$\text{বা, } \frac{(1 + \cos \theta)^2}{1 + \cos^2 \theta} = a^2$$

$$\text{বা, } \frac{(1 + \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)} = a^2$$

$$\text{বা, } \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{a^2}{1}$$

$$\text{বা, } \frac{1 + \cos \theta - 1 + \cos \theta}{1 + \cos \theta + 1 - \cos \theta} = \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} \quad [\text{বিয়োজন-যোজন করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{2 \cos \theta}{2} = \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \text{ (প্রমাণিত)}$$

(গ) দেওয়া আছে, $x = \operatorname{cosec} \theta$ এবং $y = \sec \theta$

$$\text{এখন, } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \sqrt{2} \text{ হলে, } \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta} + \frac{1}{\sec \theta} = \sqrt{2}$$

$$\text{বা, } \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sqrt{2} - \cos \theta$$

$$\text{বা, } (\sin \theta)^2 = (\sqrt{2} - \cos \theta)^2 \text{ [উভয়পক্ষে বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } \sin^2 \theta = 2 - 2\sqrt{2} \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$\text{বা, } 1 - \cos^2 \theta = \cos^2 \theta - 2\sqrt{2} \cos \theta + 2$$

$$\text{বা, } \cos^2 \theta - 2\sqrt{2} \cos \theta + 2 - 1 + \cos^2 \theta = 0$$

$$\text{বা, } -2\cos^2 \theta - 2\sqrt{2} \cos \theta + 1 = 0$$

$$\text{বা, } (\sqrt{2} \cos \theta - 1)^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cos \theta + 1 + 1^2 = 0$$

$$\text{বা, } (\sqrt{2} \cos \theta - 1)^2 = 0$$

$$\text{বা, } \sqrt{2} \cos \theta = 0$$

$$\text{বা, } \sqrt{2} \cos \theta = 1$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \cos 45^\circ$$

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

$$\text{নির্ণেয় মান } \theta = 45^\circ.$$

১২. (i) A ABC-এ $\angle B = 90^\circ$ এবং $\tan A = \frac{3}{4}$

(ii) $4 \sin(x + y) = \sqrt{12}$, $\sqrt{3} \tan(x - y) = 1$.

[ঢাকা বোর্ড ২০২৩]

(ক) $\theta = 60^\circ$ হলে, $4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) (i) নং উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $(\operatorname{cosec} A + \cot A)^2 = \frac{1 + \cos A}{1 - \cos A}$.

(গ) (ii) নং হতে x ও y এর মান নির্ণয় কর।

১২ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\theta = 60^\circ$

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= 4 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \\ &= 4(\sin \theta)^2 - (\cos \theta)^2 \\ &= 4(\sin 60^\circ)^2 - (\cos 60^\circ)^2 \end{aligned}$$

$$= 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 = 4 \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{12}{4} - \frac{1}{4} = \frac{12-1}{4} = \frac{11}{4}$$

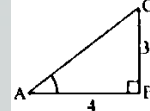
$$\text{নির্ণেয় মান : } \frac{11}{4}$$

(খ) দেওয়া আছে, ΔABC -এ $\angle B = 90^\circ$ এবং $\tan A = \frac{3}{4}$

আমরা জানি, সূক্ষ্মকোণ A হলে, $\tan A = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$

$$\therefore \text{লম্ব} = 3, \text{ভূমি} = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{অতিভুজ} &= \sqrt{\text{লম্ব}^2 + \text{ভূমি}^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= (\operatorname{cosec} A + \cot A)^2 = \left(\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} + \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} \right)^2 \\ &= \left(\frac{5}{3} + \frac{4}{3} \right)^2 = \left(\frac{5+4}{3} \right)^2 \\ &= \left(\frac{9}{3} \right)^2 = 3^2 = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ডানপক্ষ} &= \frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} = \frac{1 + \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}}{1 - \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}} \\ &= \frac{1 + \frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{\frac{5+4}{5}}{\frac{5-4}{5}} = \frac{9}{1} = 9 \end{aligned}$$

$$\therefore (\operatorname{cosec} A + \cot A)^2 = \frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} \text{ (প্রমাণিত)}$$

(গ) দেওয়া আছে, $4 \sin(x + y) = \sqrt{12}$

$$\text{বা, } \sin(x + y) = \frac{\sqrt{3 \times 4}}{4}$$

$$\text{বা, } \sin(x + y) = \frac{2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{বা, } \sin(x + y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{বা, } \sin(x + y) = \sin 60^\circ$$

$$\therefore x + y = 60^\circ \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{এবং } \sqrt{3} \tan(x - y) = 1.$$

$$\text{বা, } \tan(x - y) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \tan(x - y) = \tan 30^\circ$$

$$\therefore x - y = 30^\circ \dots\dots\dots (ii)$$

(i) নং হতে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$$x + y - x + y = 60^\circ - 30^\circ$$

$$\text{বা, } 2y = 30^\circ$$

$$\therefore y = 15^\circ$$

y এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$x - 15^\circ = 30^\circ$$

$$\therefore x = 45^\circ$$

$$\text{নির্ণেয় মান : } x = 45^\circ \text{ এবং } y = 15^\circ.$$

১৩. $\frac{\tan \theta + \sec \theta}{\tan \theta - \sec \theta} = \frac{x+y}{x-y}$ এবং $\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \alpha$.

[রাজশাহী বোর্ড ২০২৩]

(ক) $\tan A = \frac{3}{4}$ হলে, $\sin A$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $x = 1, y = \sqrt{2}$ এবং θ সূক্ষ্মকোণ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) উদ্দীপক ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে, $\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \tan \alpha$.

১৩ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\tan A = \frac{3}{4}$

বা, $\tan^2 A = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ [উভয়পক্ষে বর্গ করে]

বা, $\sec^2 A - 1 = \frac{9}{16}$

বা, $\sec^2 A = \frac{9}{16} + 1$

বা, $\sec^2 A = \frac{9+16}{16}$

বা, $\frac{1}{\cos^2 A} = \frac{25}{16}$

বা, $\cos^2 A = \frac{16}{25}$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $1 - \sin^2 A = \frac{16}{25}$

বা, $\sin^2 A = 1 - \frac{16}{25}$

বা, $\sin^2 A = 1 - \frac{16}{25}$

বা, $\sin^2 A = \frac{25-16}{25}$

বা, $\sin A = \sqrt{\frac{9}{25}}$

$\therefore \sin A = \frac{3}{5}$

নির্ণেয় মান $\frac{3}{5}$.

(খ) দেওয়া আছে, $\frac{\tan \theta + \sec \theta}{\tan \theta - \sec \theta} = \frac{x+y}{x-y}$

$x = 1, y = \sqrt{2}$ হলে, $\frac{\tan \theta + \sec \theta}{\tan \theta - \sec \theta} = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

বা, $\frac{\tan \theta + \sec \theta + \tan \theta - \sec \theta}{\tan \theta + \sec \theta - \tan \theta + \sec \theta} = \frac{1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2 \tan \theta}{2 \sec \theta} = \frac{2}{2\sqrt{2}}$

বা, $\frac{\tan \theta}{\sec \theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\frac{\tan \theta}{\frac{1}{\cos \theta}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\sin \theta = \sin 45^\circ$

$\therefore \theta = 45^\circ$

নির্ণেয় মান, $\theta = 45^\circ$.

(গ) দেওয়া আছে, $\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \alpha$

বা, $\cos \alpha = \sqrt{2} \sin \alpha + \sin \alpha$

বা, $\sin \alpha = \sin \alpha (\sqrt{2} + 1)$

বা, $\sin \alpha = \frac{\cos \alpha}{(\sqrt{2} + 1)}$

বা, $\sin \alpha = \frac{\cos \alpha - (\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)}$ [($\sqrt{2} + 1$) দ্বারা হর ও লবকে গুণ করে]

বা, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - \cos \alpha}{(\sqrt{2})^2 - (1)^2}$

বা, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - \cos \alpha}{2 - 1}$

বা, $\sin \alpha = \sqrt{2} \cos \alpha - \cos \alpha$

$\therefore \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \alpha$

বামপক্ষ = $\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$

= $\frac{\sqrt{2} \sin \alpha}{\sqrt{2} \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha =$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \tan \alpha$. (প্রমাণিত)

১৪. (i) $\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{1}{x}$

এবং (ii) $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2$, যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ।

[রাজশাহী বোর্ড ২০২৩]

(ক) $x = 2$ হলে, $\operatorname{cosec} A + \cot A$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) (i) নং থেকে প্রমাণ কর যে, $\cos A = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

(গ) (ii) নং সমীকরণটি সমাধান কর।

১৪ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{1}{x}$

$x = 2$ হলে, $\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{1}{2}$

বা, $(\operatorname{cosec} A - \cot A)(\operatorname{cosec} A + \cot A)$

= $\frac{1}{2} (\operatorname{cosec} A + \cot A)$

বা, $\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = \frac{1}{2} (\operatorname{cosec} A + \cot A)$

বা, $1 = \frac{1}{2} (\operatorname{cosec} A + \cot A)$

$\therefore \operatorname{cosec} A + \cot A = 2$

নির্ণেয় মান 2.

(খ) দেওয়া আছে,

$\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{1}{x}$

বা, $\frac{1}{\sin A} - \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{1}{x}$

বা, $\frac{1 - \cos A}{\sin A} = \frac{1}{x}$

বা, $\left(\frac{1 - \cos A}{\sin^2 A}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$ [উভয়পক্ষে বর্গ করে]

বা, $\frac{(1 - \cos A)^2}{\sin^2 A} = \frac{1}{x^2}$

$$\text{বা, } \frac{(1 - \cos A)^2}{1 - \cos^2 A} = \frac{1}{x^2} [\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1]$$

$$\text{বা, } \frac{(1 - \cos A)(1 - \cos A)}{(1 - \cos A)(1 + \cos A)} = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{বা, } \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{বা, } \frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} = \frac{x^2}{1} \text{ [ব্যস্তকরণ করে]}$$

$$\text{বা, } \frac{1 + \cos A - 1 + \cos A}{1 + \cos A + 1 - \cos A} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \text{ [বয়োজন-যোজন করে]}$$

$$\text{বা, } \frac{2 \cos A}{2} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$\therefore \cos A = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \text{ (প্রমাণিত)}$$

(গ) দেওয়া আছে,

$$\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2$$

$$\text{বা, } \sqrt{3} \cos \theta = 2 - \sin \theta$$

$$\text{বা, } (\sqrt{3} \cos \theta)^2 = (2 - \sin \theta)^2 \text{ [উভয়পক্ষে বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } 3 \cos^2 \theta = 4 - 4 \sin \theta + \sin^2 \theta$$

$$\text{বা, } 3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 4 \sin \theta - 4 = 0$$

$$\text{বা, } 3(1 - \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta + 4 \sin \theta - 4 = 0$$

$$\text{বা, } 3 - 3 \sin^2 \theta - \sin^2 \theta + 4 \sin \theta - 4 = 0$$

$$\text{বা, } -4 \sin^2 \theta + 4 \sin \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } 4 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta + 1 = 0 \text{ [(-1) দ্বারা গুণ করে]}$$

$$\text{বা, } (2 \sin \theta - 1)^2 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \sin \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

নির্ণেয় সমাধান $\theta = 30^\circ$.

১৫. $X = \tan \theta$, $Y = \cot \theta$ এবং $Z = \sin \theta$

[যশোর বোর্ড ২০২৩]

$$(ক) X = \frac{5}{12} \text{ হলে } Z \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

$$(খ) \text{ প্রমাণ কর যে, } \frac{X}{1 - Y} + \frac{Y}{1 - X} = X + Y + 1.$$

$$(গ) \text{ দেখাও যে, } (X + Z)^2 - (X - Z)^2 = 4\sqrt{X^2 - Z^2}.$$

১৫ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $X = \tan \theta$ এবং $Z = \sin \theta$

$$X = \frac{5}{12} \text{ হলে, } \tan \theta = \frac{5}{12}$$

$$\text{আমরা জানি, } \tan \theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$$

$$\therefore \text{ লম্ব} = 5, \text{ ভূমি} = 12$$

$$\text{এবং অতিভুজ} = \sqrt{\text{লম্ব}^2 + \text{ভূমি}^2}$$

$$= \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$\therefore Z = \sin \theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{5}{12}$$

$$\text{নির্ণেয় মান, } Z = \frac{5}{12}$$

(খ) দেওয়া আছে, $X = \tan \theta$, $Y = \cot \theta$

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{X}{1 - Y} + \frac{Y}{1 - X}$$

$$= \frac{\tan \theta}{1 - \cot \theta} + \frac{\cot \theta}{1 - \tan \theta} = \frac{\tan \theta}{1 - \frac{1}{\tan \theta}} = \frac{1 - \frac{1}{\tan \theta}}{1 - \frac{1}{\tan \theta}}$$

$$= \frac{\tan \theta}{\frac{\tan \theta - 1}{\tan \theta}} + \frac{1}{\tan \theta (1 - \tan \theta)}$$

$$= \tan \theta \times \frac{\tan \theta}{\tan \theta - 1} + \frac{1}{\tan \theta (1 - \tan \theta)}$$

$$= \frac{\tan^2 \theta}{\tan \theta - 1} + \frac{1}{\tan \theta (\tan \theta - 1)}$$

$$= \frac{\tan^3 \theta - 1}{\tan \theta (\tan \theta - 1)} = \frac{(\tan \theta - 1)(\tan^2 \theta + \tan \theta + 1)}{\tan \theta (\tan \theta - 1)}$$

$$= \frac{\tan^2 \theta + \tan \theta + 1}{\tan \theta} = \frac{\tan^2 \theta}{\tan \theta} + \frac{\tan \theta}{\tan \theta} + \frac{1}{\tan \theta}$$

$$= \tan \theta + 1 + \cot \theta = X + Y + 1 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \frac{X}{1 - Y} + \frac{Y}{1 - X} = X + Y + 1. \text{ (প্রমাণিত)}$$

(গ) দেওয়া আছে, $X = \tan \theta$ এবং $Z = \sin \theta$

$$\text{বামপক্ষ} = (X + Z)^2 - (X - Z)^2 = 4 X Z = 4 \cdot \tan \theta \cdot \sin \theta$$

$$= 4 \sqrt{\tan^2 \theta \sin^2 \theta} = 4 \sqrt{\tan^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)}$$

$$= 4 \sqrt{\tan^2 \theta - \tan^2 \theta \cos^2 \theta}$$

$$= 4 \sqrt{\tan^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cdot \cos^2 \theta}$$

$$= 4 \sqrt{\tan^2 \theta - \sin^2 \theta} = 4 \sqrt{X^2 - Z^2}$$

$$\therefore (X + Z)^2 - (X - Z)^2 = 4\sqrt{X^2 - Z^2}. \text{ (দেখানো হলো)}$$

১৬. $U = \sin A + \cos A$ এবং $V = \sin A - \cos A$, যেখানে, A সূক্ষ্মকোণ।
[যশোর বোর্ড ২০২৩]

(ক) $A = 60^\circ$ হলে, V এর মান নির্ণয় কর।

(খ) সমাধান কর : $U = \sqrt{2}$

(গ) $\frac{U}{V} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$ হলে, A এর মান নির্ণয় কর।

১৬ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $V = \sin A - \cos A$

$$A = 60^\circ \text{ হলে, } V = \sin 60^\circ - \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\text{নির্ণেয় মান } \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

(খ) দেওয়া আছে, $U = \sin A + \cos$

$$\text{এখানে, } U = \sqrt{2}$$

$$\text{বা, } \sin A + \cos A = \sqrt{2}$$

$$\text{বা, } \sin A = \sqrt{2} - \cos A$$

$$\text{বা, } (\sin A)^2 = (\sqrt{2} - \cos A)^2 \text{ [উভয়পক্ষে বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } \sin^2 A = 2 - 2\sqrt{2} \cos A + \cos^2 A$$

$$\text{বা, } 1 - \cos^2 A - 2 - 2\sqrt{2} \cos A - \cos^2 A = 0$$

$$\text{বা, } -2 \cos^2 A - 2\sqrt{2} \cos A + 1 = 0 \text{ [(-1) দ্বারা গুণ করে]}$$

$$\text{বা, } (\sqrt{2} \cos A)^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cos A + 1 + 1 = 0$$

$$\text{বা, } (\sqrt{2} \cos A - 1)^2 = 0$$

$$\text{বা, } \sqrt{2} \cos A - 1 = 0$$

$$\text{বা, } \text{পড়ং অ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{বা, } \cos A = \cos 45^\circ$$

$$\therefore A = 45^\circ$$

নির্ণেয় মান : $A = 45^\circ$.

(গ) দেওয়া আছে,

$$U = \sin A + \cos A \text{ এবং } V = \sin A - \cos A$$

$$\therefore \frac{U}{V} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \text{ হলে,}$$

$$\frac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$\text{বা, } \frac{\sin A + \cos A + \sin A - \cos A}{\sin A + \cos A - \sin A - \cos A} = \frac{\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + 1}$$

[যোজন-বিয়োজন করে]

$$\text{বা, } \frac{2 \sin A}{2 \cos A} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

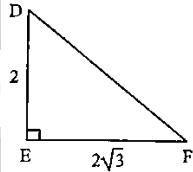
$$\text{বা, } \tan A = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \tan A = \tan 60^\circ$$

$$\therefore A = 60^\circ$$

নির্ণেয় মান : $A = 60^\circ$.

১৭. (i)



চিত্রে, $\angle EDF = 5x + 2y$ এবং $\angle DFE = x + 4y$

(ii) $p = \cot \theta$ এবং $q = \cos \theta$.

[কুমিল্লা বোর্ড ২০২৩]

(ক) $\cos(\alpha + 30^\circ) = 0$ হলে, $\sin \frac{\alpha}{2}$ এর মান কত?

(খ) x ও y এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $p + q = a$, $p - q = b$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{16}(a^2 - b^2)^2 = ab$.

১৭ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\cos(\alpha + 30^\circ) = 0$

$$\text{বা, } \cos(\alpha + 30^\circ) = \cos 90^\circ$$

$$\text{বা, } \alpha + 30^\circ = 90^\circ$$

$$\text{বা, } \alpha = 90^\circ - 30^\circ$$

$$\therefore \alpha = 60^\circ$$

$$\therefore \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{60^\circ}{2} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

নির্ণেয় মান $\frac{1}{2}$.

(খ) দেওয়া আছে, $\angle EDF = 5x + 2y$ এবং $\angle DFE = x + 4y$

চিত্র হতে পাই, $DE = 2$ এবং $EF = 2\sqrt{3}$

$$\text{এখন, } \tan \angle DFE = \frac{DE}{EF}$$

$$\text{বা, } \tan(x + 4y) = \frac{2}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \tan(x + 4y) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \tan(x + 4y) = \tan 30^\circ$$

$$\therefore x + 4y = 30^\circ \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{এবং } \tan \angle EDF = \frac{EF}{DE}$$

$$\text{বা, } \tan(5x + 2y) = \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{বা, } \tan(5x + 2y) = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \tan(5x + 2y) = \tan 60^\circ$$

$$\therefore 5x + 2y = 60^\circ \dots\dots\dots (ii)$$

(i) নং কে 5 দ্বারা গুণ করে (ii) নং হতে বিয়োগ করি

$$5x + 2y - 5x - 20y = 60^\circ - 150^\circ$$

$$\text{বা, } -18y = -90^\circ$$

$$\text{বা, } y = 5^\circ [(-18) \text{ দ্বারা ভাগ করে}]$$

y এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$x + 4 \times 5^\circ = 30^\circ$$

$$\text{বা, } x + 20^\circ = 30^\circ$$

$$\text{বা, } x = 30^\circ - 20^\circ$$

$$\therefore x = 10^\circ$$

নির্ণেয় মান : $x = 10^\circ$ এবং $y = 5^\circ$.

(গ) দেওয়া আছে, $p = \cot \theta$ এবং $q = \cos \theta$.

এখন, $p + q = a$, $p - q = b$ হলে,

$$\cot \theta + \cos \theta = a \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{এবং } \cot \theta - \cos \theta = b \dots\dots\dots (ii)$$

(i) ও (ii) নং বর্গ করে বিয়োগ করি,

$$(\cot \theta + \cos \theta)^2 - (\cot \theta - \cos \theta)^2 = a^2 - b^2$$

$$\text{বা, } 4 \cot \theta \cos \theta = a^2 - b^2$$

$$\text{বা, } \frac{(a^2 - b^2)}{4} = \cot \theta \cos \theta$$

$$\text{বা, } \frac{1}{16}(a^2 - b^2)^2 = (\cot \theta \cos \theta)^2 \text{ [উভয়পক্ষে বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{16}(a^2 - b^2)^2 = \cot^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$\text{বা, } \frac{1}{16}(a^2 - b^2)^2 = \cot^2 \theta (1 - \sin^2 \theta)$$

$$\text{বা, } \frac{1}{16}(a^2 - b^2)^2 = \cot^2 \theta - \cot^2 \theta \cdot \sin^2 \theta$$

$$\text{বা, } \frac{1}{16}(a^2 - b^2)^2 = \cot^2 \theta - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \cdot \sin^2 \theta$$

$$\text{বা, } \frac{1}{16}(a^2 - b^2)^2 = \cot^2 \theta - \cos^2 \theta$$

$$\text{বা, } \frac{1}{16}(a^2 - b^2)^2 = (\cot \theta + \cos \theta)(\cot \theta - \cos \theta)$$

$$\therefore \frac{1}{16}(a^2 - b^2)^2 = ab. \text{ (প্রমাণিত)}$$

১৮. $p = \tan \beta$, $q = \cot \beta$ এবং $r = \sec \theta - \tan \theta$.

[কুমিল্লা বোর্ড ২০২৩]

$$(ক) A = 30^\circ \text{ হলে, প্রমাণ কর যে, } \cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$(খ) \text{ প্রমাণ কর যে, } \frac{p}{1 - q} + \frac{q}{1 - p} = \sec \beta \operatorname{cosec} \beta + 1.$$

$$(গ) r = \frac{1}{a} \text{ হলে, প্রমাণ কর যে, } \cot \theta = \frac{2a}{a^2 - 1}.$$

১৮ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $A = 30^\circ$

$$\text{বামপক্ষ} = \cos 2A = \cos(2 \times 30^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{ডানপক্ষ} = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = \frac{1 - (\tan 30^\circ)^2}{1 + (\tan 30^\circ)^2}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{3-1}{3}}{\frac{3+1}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} \text{ (প্রমাণিত)}$$

(খ) দেওয়া আছে, $p = \tan \beta$ এবং $q = \cot \beta$

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \frac{p}{1-q} + \frac{q}{1-p} \\ &= \frac{\tan \beta}{1 - \cot \beta} + \frac{\cot \beta}{1 - \tan \beta} \\ &= \frac{\tan \beta}{1 - \frac{1}{\tan \beta}} + \frac{\frac{1}{\tan \beta}}{1 - \tan \beta} \\ &= \tan \beta \times \frac{\tan \beta}{\tan \beta - 1} + \frac{1}{\tan \beta} \times \frac{1}{1 - \tan \beta} \\ &= \frac{\tan^2 \beta}{\tan \beta - 1} - \frac{1}{\tan \beta (\tan \beta - 1)} = \frac{\tan^3 \beta - 1}{\tan \beta (\tan \beta - 1)} \\ &= \frac{(\tan \beta - 1)(\tan^2 \beta - \tan \beta + 1)}{\tan \beta (\tan \beta - 1)} \\ &= \frac{\tan^2 \beta + \tan \beta + 1}{\tan \beta} = \tan \beta + 1 + \frac{1}{\tan \beta} \\ &= \tan \beta + \cot \beta + 1 = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} + 1 \\ &= \frac{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta}{\sin \beta \cos \beta} + 1 = \frac{1}{\sin \beta \cdot \cos \beta} + 1 \\ &= \sec \beta \operatorname{cosec} \beta + 1 = \text{ডানপক্ষ} \\ \therefore \frac{p}{1-q} + \frac{q}{1-p} &= \sec \beta \operatorname{cosec} \beta + 1. \text{ (প্রমাণিত)} \end{aligned}$$

(গ) দেওয়া আছে, $r = \sec \theta - \tan \theta$

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{a} \text{ হলে, } \sec \theta - \tan \theta = \frac{1}{a} \\ \text{বা, } \frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} &= \frac{1}{a} \\ \text{বা, } \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} &= \frac{1}{a} \\ \text{বা, } \left(\frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 &= \left(\frac{1}{a} \right)^2 \text{ [বর্গ করে]} \\ \text{বা, } \frac{(1 - \sin \theta)^2}{\cos^2 \theta} &= \frac{1}{a^2} \\ \text{বা, } \frac{(1 - \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} &= \frac{1}{a^2} \\ \text{বা, } \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} &= \frac{1}{a^2} \\ \text{বা, } \frac{1 - \sin \theta + 1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta - 1 - \sin \theta} &= \frac{1 + a^2}{1 - a^2} \text{ [যোজন-বিয়োজন করে]} \\ \text{বা, } \frac{2}{-2 \sin \theta} &= \frac{1 + a^2}{1 - a^2} \\ \text{বা, } \frac{-1}{\sin \theta} &= \frac{1 + a^2}{1 - a^2} \\ \text{বা, } -\operatorname{cosec} \theta &= \frac{1 + a^2}{1 - a^2} \\ \text{বা, } (-\operatorname{cosec} \theta)^2 &= \left(\frac{1 + a^2}{1 - a^2} \right)^2 \text{ [পুনরায় বর্গ করে]} \\ \text{বা, } \operatorname{cosec}^2 \theta &= \frac{(1 + a^2)^2}{(1 - a^2)^2} \\ \text{বা, } 1 + \cot^2 \theta &= \frac{(1 + a^2)^2}{(1 - a^2)^2} \\ \text{বা, } \cot^2 \theta &= \frac{(1 + a^2)^2}{(1 - a^2)^2} - 1 \end{aligned}$$

$$\text{বা, } \cot^2 \theta = \frac{(1 + a^2)^2 - (1 - a^2)^2}{(1 - a^2)^2}$$

$$\text{বা, } \cot^2 \theta = \frac{4a^2}{(1 - a^2)^2} = \frac{(2a)^2}{(a^2 - 1)^2}$$

$$\text{বা, } \cot \theta = \frac{2a}{a^2 - 1} \text{ [বর্গমূল করে]}$$

$$\therefore \cot \theta = \frac{2a}{a^2 - 1} \text{ (প্রমাণিত)}$$

$$19. \frac{\tan \theta}{\sec \theta + 1} = m, \frac{\sec \theta - 1}{\tan \theta} = n \text{ এবং } \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = p.$$

[চট্টগ্রাম বোর্ড ২০২৩]

$$(ক) \theta = 45^\circ \text{ হলে, দেখাও যে, } m = \sqrt{2} - 1.$$

$$(খ) \text{ প্রমাণ কর যে, } m + n = 2p.$$

$$(গ) m = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ হলে, } \theta \text{ এর মান নির্ণয় কর } (\theta \text{ সূক্ষ্মকোণ বিবেচ্য}).$$

১৯ নং প্রশ্নের উত্তর

$$(ক) \text{ দেওয়া আছে, } \frac{\tan \theta}{\sec \theta + 1} = m$$

$$\theta = 45^\circ \text{ হলে, } \frac{\tan 45^\circ}{\sec 45^\circ + 1} = m$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = m$$

$$\text{বা, } m = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1}$$

$$\therefore m = \sqrt{2} - 1 \text{ (দেখানো হলো)}$$

$$(খ) \text{ দেওয়া আছে, } \frac{\tan \theta}{\sec \theta + 1} = m, \frac{\sec \theta - 1}{\tan \theta} = n \text{ এবং } \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = p$$

$$\text{বামপক্ষ} = m + n$$

$$= \frac{\tan \theta}{\sec \theta + 1} + \frac{\sec \theta - 1}{\tan \theta} = \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{1}{\cos \theta} + 1} + \frac{1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} - 1$$

$$= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta} \times \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + 1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta (1 + \cos \theta)}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin \theta (1 + \cos \theta)} = \frac{2\sin^2 \theta}{\sin \theta (1 + \cos \theta)}$$

$$= \frac{2\sin \theta}{1 + \cos \theta} = 2p = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore m + n = 2p. \text{ (প্রমাণিত)}$$

$$(গ) \text{ দেওয়া আছে, } \frac{\tan \theta}{\sec \theta + 1} = m$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ হলে, } \frac{\tan \theta}{\sec \theta + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \sqrt{3} \tan \theta = \sec \theta + 1$$

$$\text{বা, } (\sqrt{3} \tan \theta)^2 = (\sec \theta + 1)^2 \text{ [উভয়পক্ষে বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } 3 \tan^2 \theta = \sec^2 \theta + 2 \sec \theta + 1$$

$$\text{বা, } 3(\sec^2 \theta - 1) - \sec^2 \theta - 2 \sec \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } 3 \sec^2 \theta - 3 - \sec^2 \theta - 2 \sec \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \sec^2 \theta - 2 \sec \theta - 4 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \sec^2 \theta - 4 \sec \theta + 2 \sec \theta - 4 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \sec \theta (\sec \theta - 2) + 2 (\sec \theta - 2) = 0$$

$$\text{বা, } (\sec \theta - 2)(2 \sec \theta + 2) = 0$$

$$\text{হয়, } \sec \theta - 2 = 0$$

$$\text{বা, } \sec \theta = 2$$

$$\text{অথবা, } 2 \sec \theta + 2 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \sec \theta = -2$$

বা, $\sec \theta = \sec 60^\circ$

$\therefore \theta = 60^\circ$

নির্ণেয় মান $\theta = 60^\circ$.

২০. $\cot \theta + \cos \theta = a$, $\cot \theta - \cos \theta = b$.

[চট্টগ্রাম বোর্ড ২০২৩]

(ক) $\sin A = \frac{4}{5}$ হলে, $\tan A$ -এর মান নির্ণয় কর যখন A সূক্ষ্মকোণ।

(খ) $b = \sqrt{2} \cos \theta$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a = \sqrt{2} \cos \theta$.

(গ) $\frac{a}{b} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। (θ সূক্ষ্মকোণ বিবেচ্য)।

২০ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\sin A = \frac{4}{5}$

বা, $\sin^2 A = \frac{16}{25}$ [উভয়পক্ষে বর্গ করে]

বা, $1 - \cos^2 A = \frac{16}{25}$

বা, $\cos^2 A = 1 - \frac{16}{25}$

বা, $\cos^2 A = \frac{25 - 16}{25} = \frac{9}{25}$

বা, $\cos A = \sqrt{\frac{9}{25}}$

$\therefore \cos A = \frac{3}{5}$

$\therefore \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$

নির্ণেয় মান : $\frac{4}{3}$.

(খ) দেওয়া আছে, $\cot \theta + \cos \theta = a$ এবং $\cot \theta - \cos \theta = b$

$b = \sqrt{2} \cos \theta$ হলে,

$\cot \theta - \cos \theta = \sqrt{2} \cos \theta$

বা, $\cot \theta = \sqrt{2} \cos \theta + \cos \theta$

বা, $\cot \theta = \cos \theta (\sqrt{2} + 1)$

বা, $\frac{\cot \theta}{\sin \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} = \sqrt{2} + 1$

বা, $\frac{1}{\sin \theta} = \sqrt{2} + 1$

বা, $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$ [ব্যস্তানুপাত করে]

বা, $\sin \theta = \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)}$

বা, $\sin \theta = \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2})^2 - 1}$

বা, $\sin \theta = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1}$

বা, $\sin \theta = \sqrt{2} - 1$

বা, $\cot \theta \cdot \sin \theta = \cot \theta (\sqrt{2} - 1)$ [উভয়পক্ষে $\cot \theta$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\frac{\cot \theta}{\sin \theta} \cdot \sin \theta = \sqrt{2} \cot \theta - \cot \theta$

বা, $\cos \theta = \sqrt{2} \cot \theta - \cot \theta$

বা, $2 \sec \theta = -2$

বা, $\sec \theta = -1$

কিন্তু ইহা গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ θ সূক্ষ্মকোণ।

বা, $\cot \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \cot \theta$

$\therefore a = \sqrt{2} \cot \theta$. (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে, $\cot \theta + \cos \theta = a$

এবং $\cot \theta - \cos \theta = b$.

$\frac{a}{b} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$ হলে, $\frac{\cot \theta + \cos \theta}{\cot \theta - \cos \theta} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$

বা, $\frac{\cot \theta + \cos \theta + \cot \theta - \cos \theta}{\cot \theta + \cos \theta - \cot \theta + \cos \theta} = \frac{2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2 \cot \theta}{2 \cos \theta} = \frac{4}{2 \sqrt{3}}$

বা, $\frac{\cot \theta}{\cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{1}{\sin \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ [ব্যস্তানুপাত করে]

বা, $\sin \theta = \sin 60^\circ$

$\therefore \theta = 60^\circ$

নির্ণেয় মান : $\theta = 60^\circ$.

২১. $\tan(p + q) = \sqrt{3}$, $\sin(p - q) = 0$; p, q সূক্ষ্মকোণ।
 $x = \cot \theta$, $y = \cos \theta$.

[সিলেট বোর্ড ২০২৩]

(ক) $\cos(90^\circ - \theta) = \frac{5}{3}$ হলে, $\operatorname{cosec} \theta$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $\cot^2 p - \cos^2 q$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $x^4 - x^2 = 1$ হলে প্রমাণ কর যে, $y^4 + y^2 = 1$.

২১ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\cos(90^\circ - \theta) = \frac{5}{3}$

বা, $\sin \theta = \frac{5}{3}$

বা, $\frac{1}{\operatorname{cosec} \theta} = \frac{5}{3}$

বা, $\operatorname{cosec} \theta = \frac{3}{5}$

নোট : প্রশ্নটি অসঙ্গতিপূর্ণ। $\cos(90^\circ - \theta) = \frac{5}{3}$ বা, $\sin \theta = \frac{5}{3}$ হতে পারে

না; কারণ $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ এবং $1 \leq \sin \theta \leq 1$.

$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{5}{3}$ এর পরিবর্তে $\cos(90^\circ - \theta) = \frac{3}{5}$ ধরে মান নির্ণয় করা

হলো : $\cos(90^\circ - \theta) = \frac{3}{5}$

বা, $\sin \theta = \frac{3}{5}$

বা, $\frac{1}{\operatorname{cosec} \theta} = \frac{3}{5}$

বা, $\operatorname{cosec} \theta = \frac{5}{3}$

নির্ণেয় মান : $\frac{5}{3}$.

(খ) দেওয়া আছে, $\tan(p + q) = \sqrt{3}$ (i)

এবং $\sin(p - q) = 0$ (ii)

(i) নং হতে পাই, $\tan(p + q) = \sqrt{3}$
 বা, $\tan(p + q) = \tan 60^\circ$
 বা, $p + q = 60^\circ$ (iii)

(ii) নং হতে পাই, $\sin(p - q) = 0$
 বা, $\sin(p - q) = \sin 0^\circ$
 বা, $p - q = 0^\circ$ (iv)

(iii) ও (iv) নং যোগ করে পাই,
 $p + q + p - q = 60^\circ + 0^\circ$
 বা, $2p = 60^\circ$
 $\therefore p = 30^\circ$

p এর মান (iii) নং এ বসাইয়া পাই,
 $30^\circ + q = 60^\circ$
 বা, $q = 60^\circ - 30^\circ$
 $\therefore q = 30^\circ$

প্রদত্ত রাশি $= \cot^2 p - \cos^2 q$
 $= (\cot 30^\circ)^2 - (\cos 30^\circ)^2$ [p ও q এর মান বসিয়ে]
 $= (\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3 - \frac{3}{4} = \frac{12-3}{4} = \frac{9}{4}$

নির্ণেয় মান : $\frac{9}{4}$.

(গ) দেওয়া আছে, $x = \cot \theta$ এবং $y = \cos \theta$
 $x^4 - x^2 = 1$ হলে, $\cot^4 \theta - \cot^2 \theta = 1$
 বা, $\cot^4 \theta = 1 + \cot^2 \theta$
 বা, $\cot^4 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$
 বা, $\frac{\cot^4 \theta}{\cot^4 \theta} = \frac{\operatorname{cosec}^2 \theta}{\cot^4 \theta}$ [উভয়পক্ষে $\cot^4 \theta$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $1 = \frac{1}{\frac{\sin^2 \theta}{\cot^4 \theta}}$
 বা, $1 = \frac{1}{\frac{\sin^2 \theta}{\sin^4 \theta}}$

বা, $1 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \times \frac{\sin^4 \theta}{\cos^4 \theta}$

বা, $1 = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^4 \theta}$

বা, $\cos^4 \theta = \sin^2 \theta$ বা, $\cos^4 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

বা, $\cos^4 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$\therefore x^4 - x^2 = 1$. (প্রমাণিত)

২২. $\operatorname{cosec} \theta = M$, $\cot \theta = N$, $\sec \alpha = y$; θ , α সূক্ষ্মকোণ।

[সিলেট বোর্ড ২০২৩]

(ক) $y = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}}$ হলে α এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $M + N = a$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos \theta = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$.

(গ) $3M^2 - 2\sqrt{3}N = 2$ হলে, $\left(\sin^2 \theta + \frac{1}{4}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

২২ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $y = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}}$

বা, $\sec \alpha = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}}$ [$\because y = \sec \alpha$]

বা, $\sec \alpha = \sqrt{\frac{1}{\frac{3}{4}}}$

বা, $\sec \alpha = \sqrt{1 \times \frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sec 30^\circ$

$\therefore \alpha = 30^\circ$

নির্ণেয় মান : $\alpha = 30^\circ$

(খ) দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec} \theta = M$ এবং $\cot \theta = N$
 $M + N = a$ হলে, $\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta = a$

বা, $\frac{1}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = a$

বা, $\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = a$

বা, $\left(\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}\right)^2 = a^2$ [উভয়পক্ষে বর্গ করে]

বা, $\frac{(1 + \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} = a^2$

বা, $\frac{(1 + \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta} = a^2$

বা, $\frac{(1 + \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)} = a^2$

বা, $\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} = a^2$

বা, $\frac{1 + \cos \theta - 1 + \cos \theta}{1 + \cos \theta + 1 - \cos \theta} = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$ [বিয়োজন-যোজন করে]

বা, $\frac{2 \cos \theta}{2} = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$

$\therefore \cos \theta = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$. (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec} \theta = M$ এবং $\cot \theta = N$

$3M^2 - 2\sqrt{3}N = 2$ হলে,

$3 \operatorname{cosec}^2 \theta - 2\sqrt{3} \cot \theta = 2$

বা, $3(1 + \cot^2 \theta) - 2\sqrt{3} \cot \theta - 2 = 0$

বা, $3 + 3 \cot^2 \theta - 2\sqrt{3} \cot \theta - 2 = 0$

বা, $3 \cot^2 \theta - 2\sqrt{3} \cot \theta + 1 = 0$

বা, $(\sqrt{3} \cot \theta)^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cot \theta \cdot 1 + 1^2 = 0$

বা, $(\sqrt{3} \cot \theta - 1)^2 = 0$

বা, $\sqrt{3} \cot \theta - 1 = 0$

বা, $\cot \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\cot \theta = \cot 60^\circ$

$\therefore \theta = 60^\circ$

প্রদত্ত রাশি $= \sin^2 \theta + \frac{1}{4}$

$= (\sin 60^\circ)^2 + \frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

নির্ণেয় মান : 1।

২৩. $p = \cos A$, $q = \sin A$

[বরিশাল বোর্ড ২০২৩]

(ক) $\tan x = \cot y = \sqrt{3}$ হলে, $\cos(x + y)$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $p^2 + p^4 = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{p}{q}\right)^4 - \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1$.

(গ) $p - q = \sqrt{5}q$ হলে, প্রমাণ কর যে, $4q + p = \sqrt{5}p$.

২৩ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\tan x = \cot y = \sqrt{3}$

$\therefore \tan x = \sqrt{3}$

বা, $\tan x = \tan 60^\circ$

$\therefore x = 60^\circ$

এবং $\cot y = \sqrt{3}$

বা, $\cot y = \cot 30^\circ$

$\therefore y = 30^\circ$

প্রদত্ত রাশি $= \cos (x + y) = \cos (60^\circ + 30^\circ) = \cos 90^\circ = 0$

নির্ণেয় মান : 0.

(খ) দেওয়া আছে, $p = \cos A$ এবং $q = \sin A$

$p^2 + p^4 = 1$ হলে, $\cos^2 A + \cos^4 A = 1$

বা, $\cos^4 A = 1 - \cos^2 A$

বা, $\cos^4 A = \sin^2 A$

বামপক্ষ $= \left(\frac{p}{q}\right)^4 - \left(\frac{p}{q}\right)^2$

$= \left(\frac{\cos A}{\sin A}\right)^4 - \left(\frac{\cos A}{\sin A}\right)^2$

$= \frac{\cos^4 A}{\sin^4 A} - \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}$

$= \frac{\cos^2 A}{\sin^4 A} - \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} [\because \cos^4 A = \sin^2 A]$

$= \frac{\cos^2 A}{\sin^4 A} - \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}$

$= \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \frac{1 - \cos^2 A}{\sin^2 A} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 A} = 1 = \text{ডানপক্ষ}$

$\therefore \left(\frac{p}{q}\right)^4 - \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1. \text{ (প্রমাণিত)}$

(গ) দেওয়া আছে, $p = \cos A$ এবং $q = \sin A$

$p - q = \sqrt{5}q$ হলে, $\cos A - \sin A = \sqrt{5} \sin A$

বা, $\cos A = \sqrt{5} \sin A + \sin A$

বা, $\cos A = \sin A (\sqrt{5} + 1)$

বা, $\frac{\cos A}{\sin A} = \sqrt{5} + 1$

বা, $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{5} + 1}$ [ব্যাস্তকরণ করে]

বা, $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sqrt{5} - 1}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)}$

বা, $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sqrt{5} - 1}{(\sqrt{5})^2 - 1^2}$

বা, $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

বা, $4 \sin A = \sqrt{5} \cos A - \cos A$

বা, $4 \sin A + \cos A = \sqrt{5} \cos A$

$\therefore 4q + p = \sqrt{5}p. \text{ (প্রমাণিত)}$

২৪. $M = \cot \theta, N = \cos \theta$; যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ, $A > 0$.

[বরিশাল বোর্ড ২০২৩]

(ক) $\cos A = \frac{1}{3}$ হলে, পড়ঃ অ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $4N^2 - (2 + 2\sqrt{3})N + \sqrt{3} = 0$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $(M + N)(2 - \sqrt{3}) = (M - N)(2 + \sqrt{3})$ হলে, $2 \sin \frac{\theta}{2}$ এর মান নির্ণয় কর।

২৪ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\cos A = \frac{1}{3}$

বা, $\cos^2 A = \frac{1}{9}$ [উভয়পক্ষে বর্গ করে]

বা, $1 - \sin^2 A = \frac{1}{9}$

ev, $\sin^2 A = 1 - \frac{1}{9} = \frac{9-1}{9}$

বা, $\sin A = \sqrt{\frac{8}{9}}$

$\therefore \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

নির্ণেয় মান : $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(খ) দেওয়া আছে, $M = \cot \theta$ এবং $N = \cos \theta$

$4N^2 - (2 + 2\sqrt{3})N + \sqrt{3} = 0$ হলে,

$4 \cos^2 \theta - (2 + 2\sqrt{3}) \cos \theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $4 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - 2\sqrt{3} \cos \theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $2 \cos \theta (2 \cos \theta - 1) - \sqrt{3} (2 \cos \theta - 1) = 0$

বা, $(2 \cos \theta - 1)(2 \cos \theta - \sqrt{3}) = 0$

হয়, $2 \cos \theta - 1 = 0$

অথবা, $2 \cos \theta - \sqrt{3} = 0$

বা, $\cos \theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\cos \theta = \cos 60^\circ$

বা, $\cos \theta = \cos 30^\circ$

$\therefore \theta = 60^\circ$

$\therefore \theta = 30^\circ$

নির্ণেয় মান : $\theta = 30^\circ, 60^\circ$ ।

(গ) দেওয়া আছে, $M = \cot \theta$ এবং $N = \cos \theta$

$\therefore (M + N)(2 - \sqrt{3}) = (M - N)(2 + \sqrt{3})$ হলে,

$(\cot \theta + \cos \theta)(2 - \sqrt{3}) = (\cot \theta - \cos \theta)(2 + \sqrt{3})$

বা, $\frac{\cot \theta + \cos \theta}{\cot \theta - \cos \theta} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$

বা, $\frac{\cot \theta + \cos \theta + \cot \theta - \cos \theta}{\cot \theta + \cos \theta - \cot \theta + \cos \theta} = \frac{2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2 \cot \theta}{2 \cos \theta} = \frac{4}{2\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\cot \theta}{\cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{1}{\sin \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\operatorname{cosec} \theta = \operatorname{cosec} 60^\circ$

$\therefore \theta = 60^\circ$

প্রদত্ত রাশি $= 2 \sin \frac{\theta}{2} = 2 \sin \frac{60^\circ}{2} = 2 \sin 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

নির্ণেয় মান : 1.

২৫. $p = \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}, q = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$ এবং $r = \sec \theta$

[দিনাজপুর বোর্ড ২০২৩]

(ক) $\tan A = x$ হলে, $\sec^2 A$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) দেখাও যে, $p + q = 2r$.

(গ) $q = 1$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর, যখন $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

২৫ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\tan A = x$

বা, $\tan^2 A = x^2$

বা, $\sec^2 A - 1 = x^2$

বা, $\sec^2 A = x^2 + 1$

নির্ণেয় মান : $x^2 + 1$ ।

(খ) দেওয়া আছে, $p = \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}$, $q = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$ এবং $r = \sec \theta$

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= p + q = \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta (1 + \sin \theta)^2}{\cos (1 - \sin \theta)} \\ &= \frac{\cos^2 \theta + 1 - 2 \sin \theta + \sin^2 \theta}{\cos (1 - \sin \theta)} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 1 - 2 \sin \theta}{\cos (1 - \sin \theta)} \\ &= \frac{1 + 1 - 2 \sin \theta}{\cos (1 - \sin \theta)} \\ &= \frac{2 - 2 \sin \theta}{\cos (1 - \sin \theta)} \\ &= \frac{2 (1 - \sin \theta)}{\cos (1 - \sin \theta)} \\ &= \frac{2}{\cos \theta} = 2 \sec \theta = 2r = \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

$\therefore p + q = 2r$. (দেখানো হলো)

(গ) দেওয়া আছে, $q = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$

$q = 1$ হলে, $\frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} = 1$

বা, $1 - \sin \theta = \cos \theta$

বা, $(1 - \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta$ [উভয়পক্ষে বর্গ করে]

বা, $1 - 2 \sin \theta + \sin^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$

বা, $1 - 2 \sin \theta + \sin^2 \theta - 1 + \sin^2 \theta = 0$

বা, $2 \sin^2 \theta - 2 \sin \theta = 0$

বা, $\sin^2 \theta - \sin \theta = 0$

বা, $\sin \theta (\sin \theta - 1) = 0$

হয়, $\sin \theta = 0$

বা, $\sin \theta = \sin 0^\circ$

$\therefore \theta = 0^\circ$

অথবা, $\sin \theta - 1 = 0$

বা, $\sin \theta = 1$

বা, $\sin \theta = \sin 90^\circ$

$\therefore \theta = 90^\circ$

কিন্তু $\theta = 90^\circ$ এর জন্য $\frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$ এর মান অসংজ্ঞায়িত।

তাই $\theta = 90^\circ$ গ্রহণযোগ্য নয়।

নির্ণেয় মান $\theta = 0^\circ$ ।

২৬. $m \sin A = n \cos A$ এবং $\operatorname{cosec} (A - B) = 2$, যেখানে A এবং B সূক্ষ্মকোণ।

[দিনাজপুর বোর্ড ২০২৩]

(ক) দেখাও যে, $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cdot \cos \theta$, যখন $\theta = 30^\circ$ ।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\frac{\sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A}{\sec^2 A - \operatorname{cosec}^2 A} = \frac{n^2 - m^2}{n^2 + m^2}$. ($m \neq n$)।

(গ) $m = n = 1$ হলে, B-এর মান নির্ণয় কর।

২৬ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\theta = 30^\circ$

বামপক্ষ $= \sin 2\theta = \sin (2 \times 30^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ডানপক্ষ $= 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$. (দেখানো হলো)

(খ) দেওয়া আছে, $m \sin A = n \cos A$ বা, $\frac{n}{m} = \frac{\sin A}{\cos A}$

বা, $\left(\frac{n}{m}\right)^2 = \left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2$ [উভয়পক্ষে বর্গ করে]

বা, $\frac{n^2}{m^2} = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$

বা, $\frac{n^2 + m^2}{n^2 - m^2} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin^2 A - \cos^2 A}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{n^2 + m^2}{n^2 - m^2} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin^2 A - \cos^2 A}$

বা, $\frac{n^2 + m^2}{n^2 - m^2} = \frac{\sin^2 A \cos^2 A}{\sin^2 A \cos^2 A}$

বা, $\frac{n^2 + m^2}{n^2 - m^2} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 A \cos^2 A} + \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A \cos^2 A}$

বা, $\frac{n^2 + m^2}{n^2 - m^2} = \frac{1}{\sin^2 A \cos^2 A} + \frac{1}{\sin^2 A \cos^2 A}$

বা, $\frac{n^2 + m^2}{n^2 - m^2} = \frac{1}{\cos^2 A} + \frac{1}{\sin^2 A}$

বা, $\frac{n^2 + m^2}{n^2 - m^2} = \frac{1}{\cos^2 A} + \frac{1}{\sin^2 A}$

বা, $\frac{n^2 + m^2}{n^2 - m^2} = \frac{\sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A}{\sec^2 A - \operatorname{cosec}^2 A}$

$\therefore \frac{\sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A}{\sec^2 A - \operatorname{cosec}^2 A} = \frac{n^2 + m^2}{n^2 - m^2}$ (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে,

$m \sin A = n \cos A$ এবং $\operatorname{cosec} (A - B) = 2$

$m = n = 1$ হলে, $\sin A = \cos A$

বা, $\frac{\sin A}{\cos A} = 1$

বা, $\tan A = \tan 45^\circ$

$\therefore A = 45^\circ$

এবং $\operatorname{cosec} (A - B) = 2$

বা, $\operatorname{cosec} (A - B) = \operatorname{cosec} 30^\circ$

বা, $A - B = 30^\circ$

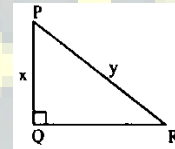
বা, $45^\circ - B = 30^\circ$ [$\because A = 45^\circ$]

বা, $B = 45^\circ - 30^\circ$

$\therefore B = 15^\circ$

নির্ণেয় মান : $B = 15^\circ$ ।

২৭. (i)



(ii) $\sin \beta + \sin \beta \cdot \cot \beta = P$.

[ময়মনসিংহ বোর্ড ২০২৩]

(ক) $\sec (A + 30^\circ) = \sqrt{2}$ হলে, A এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $x = \sqrt{3}$ এবং $y = 2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\sqrt{3} \sin R \cdot \cos R = \frac{3}{4}$ ।

(গ) $P = 1$ হলে, β এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ ।

২৭ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\sec (A + 30^\circ) = \sqrt{2}$

বা, $\sec (A + 30^\circ) = \sec 45^\circ$

বা, $A + 30^\circ = 45^\circ$

বা, $A = 45^\circ - 30^\circ$

$\therefore A = 15^\circ$

নির্ণেয় মান : $A = 15^\circ$.

(খ) দেওয়া আছে, ΔPQR সমকোণী ত্রিভুজে, $PQ = x$ এবং $PR = y$

$$\therefore QR = \sqrt{PR^2 - PQ^2}$$

$$= \sqrt{y^2 - x^2}$$

$x = \sqrt{3}$ এবং $y = 2$ হলে,

$$PQ = \sqrt{3}, PR = 2$$

$$\text{এবং } QR = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{4 - 3} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{এখন, } \sin R = \frac{PQ}{PR} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{এবং } \cos R = \frac{QR}{PR} = \frac{1}{2}$$

$$\text{বামপক্ষ} = \sqrt{3} \sin R \cdot \cos R$$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \sqrt{3} \sin R \cdot \cos R = \frac{3}{4} \text{ (প্রমাণিত)}$$

(গ) দেওয়া আছে,

$$\sin \beta + \sin \beta \cdot \cot \beta = P$$

$$P = 1 \text{ হলে, } \sin \beta + \sin \beta \cdot \cot \beta = 1$$

$$\text{বা, } \sin \beta + \sin \beta \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = 1$$

$$\text{বা, } \sin \beta + \cos \beta = 1$$

$$\text{বা, } (\sin \beta + \cos \beta)^2 = 1^2$$

$$\text{বা, } \sin^2 \beta + \cos^2 \beta + 2 \sin \beta \cdot \cos \beta = 1$$

$$\text{বা, } 1 + 2 \sin \beta \cdot \cos \beta = 1$$

$$\text{বা, } 2 \sin \beta \cdot \cos \beta = 0$$

$$\text{বা, } \sin \beta \cdot \cos \beta = 0$$

$$\text{হয়, } \sin \beta = 0$$

$$\text{বা, } \sin \beta = \sin 0^\circ$$

$$\therefore \beta = 0^\circ$$

$$\text{অথবা, } \cos \beta = 0$$

$$\text{বা, } \cos \beta = \cos 90^\circ$$

$$\therefore \beta = 90^\circ$$

কিন্তু $\beta = 0^\circ$ এর জন্য $\sin \beta + \sin \beta \cdot \cot \beta$ এর মান অসংজ্ঞায়িত।

তাই $\beta = 0^\circ$ গ্রহণযোগ্য নয়।

নির্ণেয় মান : $\beta = 90^\circ$.

২৮. $a = \cos \theta$ এবং $b = \cot \theta$.

[ঢাকা বোর্ড ২০২২]

$$(ক) \sin(90^\circ - \theta) = \frac{3}{2} \text{ হলে, } b \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

$$(খ) b^4 - b^2 = 1 \text{ হলে, প্রমাণ কর যে, } a^4 + a^2 = 1.$$

$$(গ) \frac{a+b}{a-b} = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2} \text{ এবং } \theta \text{ সূক্ষ্মকোণ হলে, } \theta \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

২৮ নং প্রশ্নের উত্তর

$$(ক) \text{ দেওয়া আছে, } \sin(90^\circ - \theta) = \frac{3}{2}$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \frac{3}{2}, \text{ যা অসম্ভব}$$

কেননা, $\cos \theta$ এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না।

লক্ষ করি : দেওয়া আছে, $b = \cot \theta$

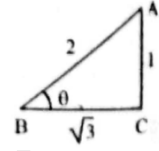
$$\text{এখন, } \sin(90^\circ - \theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ হলে, } \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

অর্থাৎ, সন্নিহিত বাহু, $BC = \sqrt{3}$ এবং অতিভুজ, $AC = 2$

$$\therefore \text{বিপরীত বাহু, } AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$$

$$= \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{4 - 3} = \sqrt{1} = 1$$



$$\therefore b = \cot \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

নির্ণেয় মান : $b = \sqrt{3}$.

(খ) দেওয়া আছে, $a = \cos \theta$ এবং $b = \cot \theta$

এখন, $b^4 - b^2 = 1$ হলে, $\cot^4 \theta - \cot^2 \theta = 1$

$$\text{বা, } \cot^4 \theta = 1 + \cot^2 \theta$$

$$\text{বা, } \cot^4 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta [\because \operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = 1]$$

$$\text{বা, } \frac{\cos^4 \theta}{\sin^4 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} [\because \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}]$$

$$\text{বা, } \frac{\cos^4 \theta}{\sin^2 \theta} = 1 \text{ [উভয়পক্ষকে } \sin^2 \theta \text{ ও দ্বারা গুণ করে]}$$

$$\text{বা, } \cos^4 \theta = \sin^2 \theta$$

$$\text{বা, } \cos^4 \theta = 1 - \cos^2 \theta [\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1]$$

$$\text{বা, } \cos^4 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\text{বা, } (\cos \theta)^4 + (\cos \theta)^2 = 1$$

$$\therefore a^4 + a^2 = 1 \text{ (দেখানো হলো)}$$

(গ) দেওয়া আছে, $a = \cos \theta$ এবং $b = \cot \theta$

$$\text{এবং } \frac{a+b}{a-b} = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2} \text{ এবং } \theta \text{ সূক্ষ্মকোণ}$$

$$\text{বা, } \frac{\cos \theta + \cot \theta}{\cos \theta - \cot \theta} = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}$$

$$\text{বা, } \frac{\cos \theta + \cot \theta + \cos \theta - \cot \theta}{\cos \theta + \cot \theta - \cos \theta - \cot \theta} = \frac{\sqrt{3}+2+\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2}$$

[যোজন-বিয়োজন করে]

$$\text{বা, } \frac{2 \cos \theta}{2 \cot \theta} = \frac{2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{বা, } \frac{\cos \theta}{\cot \theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{বা, } \frac{\cos \theta}{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}} = \frac{\sqrt{3}}{2} [\because \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}]$$

$$\text{বা, } \cos \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin 60^\circ [\because \theta \text{ সূক্ষ্মকোণ}]$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

নির্ণেয় মান : $\theta = 60^\circ$.

২৯. $\cot \theta + \cos \theta = a$ এবং $\cot \theta - \cos \theta = b$.

[ঢাকা বোর্ড ২০২২]

$$(ক) \theta = 60^\circ \text{ হলে, } b \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

$$(খ) \text{ দেখাও যে, } a^2 + b^2 = 2 \cot^2 \theta (1 + \sin^2 \theta).$$

$$(গ) \text{ প্রমাণ কর যে, } (a^2 - b^2)^2 = 16ab.$$

২৯ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\cot \theta - \cos \theta = b$

$$\theta = 60^\circ \text{ হলে, } \cot 60^\circ - \cos 60^\circ = b$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} = b [\because \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}]$$

$$\text{বা, } \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = b$$

$$\text{বা, } b = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-3}{6}$$

$$\text{নির্ণেয় মান : } b = \frac{2\sqrt{3}-3}{6}$$

(খ) দেওয়া আছে,

$$\cot \theta + \cos \theta = a \text{ এবং } \cot \theta - \cos \theta = b$$

$$\text{বামপক্ষ} = a^2 + b^2$$

$$= (\cot \theta + \cos \theta)^2 + (\cot \theta - \cos \theta)^2$$

$$= 2(\cot^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$[\because (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)]$$

$$= 2\left(\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \cos^2 \theta\right) = 2 \cos^2 \theta \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} + 1\right)$$

$$= 2 \cos^2 \theta \left(\frac{1 + \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}\right) = \frac{2 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} (1 + \sin^2 \theta)$$

$$= 2 \cos^2 \theta (1 + \sin^2 \theta)$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$a^2 + b^2 = 2 \cot^2 \theta (1 + \sin^2 \theta). \text{ (দেখানো হলো)}$$

(গ) দেওয়া আছে, $\cot \theta + \cos \theta = a$ এবং $\cot \theta - \cos \theta = b$

$$\text{বামপক্ষ} = (a^2 - b^2)^2$$

$$= \{(\cot \theta + \cos \theta)^2 - (\cot \theta - \cos \theta)^2\}^2$$

$$= (4 \cot \theta \cos \theta)^2 [\because (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab]$$

$$= 16 \cot^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$= 16 \cot^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) [\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1]$$

$$= 16 \cot^2 \theta - 16 \cot^2 \theta \cdot \sin^2 \theta$$

$$= 16 \cot^2 \theta - 16 \frac{\cot^2 \theta}{\sin^2 \theta} \cdot \sin^2 \theta \left[\because \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right]$$

$$= 16 \cot^2 \theta - 16 \cos^2 \theta = 16(\cot^2 \theta - \cos^2 \theta)$$

$$= 16(\cot \theta + \cos \theta)(\cot \theta - \cos \theta)$$

$$[\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$$

$$= 16ab = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore (a^2 - b^2)^2 = 16ab. \text{ (প্রমাণিত)}$$

$$৩০. \sqrt{2} \cos(A-B) = 1 = \sqrt{2} \sin(A+B) \text{ এবং } \sec \theta - \tan \theta = \frac{3}{4}.$$

[রাজশাহী বোর্ড ২০২২]

$$(ক) \beta = 30^\circ \text{ হলে প্রমাণ কর যে, } \cos 2\beta = 2\cos^2 \beta - 1.$$

(খ) $\sec A + \tan B$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $(\cos \theta - \sin \theta)$ এর মান নির্ণয় কর।

৩০ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\beta = 30^\circ$

$$\text{বামপক্ষ} = \cos 2\beta$$

$$= \cos(2 \times 30^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{ডানপক্ষ} = 2\cos^2 \beta - 1 = 2(\cos 30^\circ)^2 - 1 = 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1$$

$$= 2 \times \frac{3}{4} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos 2\beta = 2\cos^2 \beta - 1. \text{ (প্রমাণিত)}$$

(খ) দেওয়া আছে, $\sqrt{2} \cos(A-B) = 1 = \sqrt{2} \sin(A+B)$

$$\therefore \sqrt{2} \sin(A+B)$$

$$\text{বা, } \sin(A+B) = \sqrt{2}$$

$$\text{বা, } \sin(A+B) = \sin 45^\circ \left[\because \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\therefore A+B = 45^\circ \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{আবার, } \sqrt{2} \cos(A-B) = 1$$

$$\text{বা, } \cos(A-B) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{বা, } \cos(A-B) = \cos 45^\circ \left[\because \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\therefore A-B = 45^\circ \dots\dots\dots (ii)$$

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$$A+B = 45^\circ$$

$$A-B = 45^\circ$$

$$2A = 90^\circ$$

$$\therefore A = 45^\circ$$

(i) হতে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$$A+B = 45^\circ$$

$$A-B = 45^\circ$$

$$2B = 0^\circ$$

$$\therefore B = 0^\circ$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \sec A + \tan B$$

$$= \frac{1}{\cos A} + \tan B$$

$$= \frac{1}{\cos 45^\circ} + \tan 0^\circ$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + 0 \left[\because \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ and } \tan 0^\circ = 0\right]$$

$$= \sqrt{2} + 0 = \sqrt{2}$$

$$\text{নির্ণেয় মান : } \sqrt{2}$$

(গ) দেওয়া আছে, $\sec \theta - \tan \theta = \frac{3}{4} \dots\dots\dots (i)$

$$\text{বা, } (\sec \theta - \tan \theta)(\sec \theta + \tan \theta) = \frac{3}{4}(\sec \theta + \tan \theta)$$

[উভয়পক্ষকে $(\sec \theta + \tan \theta)$ দ্বারা গুণ করে]

$$\text{বা, } \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = \frac{3}{4}(\sec \theta + \tan \theta)$$

$$[\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$$

$$\text{বা, } 1 = \frac{3}{4}(\sec \theta + \tan \theta) [\because \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1]$$

$$\text{বা, } \sec \theta + \tan \theta = \frac{4}{3} \dots\dots\dots (ii)$$

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$$\sec \theta - \tan \theta = \frac{3}{4}$$

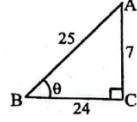
$$\sec \theta + \tan \theta = \frac{4}{3}$$

$$2\sec \theta = \frac{3}{4} + \frac{4}{3}$$

$$\text{বা, } 2\sec \theta = \frac{9+16}{12}$$

$$\text{বা, } 2\sec \theta = \frac{25}{12}$$

$$\text{বা, } \sec \theta = \frac{25}{24}$$



অর্থাৎ, অতিভুজ, $AB = 25$

সন্নিহিত বাহু, $BC = 24$

$$\begin{aligned}\therefore \text{বিপরীত বাহু, } AC &= \sqrt{AB^2 - BC^2} \\ &= \sqrt{25^2 - 24^2} \\ &= \sqrt{625 - 576} = \sqrt{49} = 7\end{aligned}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{24}{25}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{7}{25}$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \cos \theta - \sin \theta = \frac{24}{25} - \frac{7}{25} = \frac{24-7}{25} = \frac{17}{25}$$

$$\text{নির্ণেয় মান : } \frac{17}{25}$$

৩১. $K = \sin \alpha$, $M = \cos \alpha$, $A = 30^\circ$, যেখানে α সূক্ষ্মকোণ।

[রাজশাহী বোর্ড ২০২২]

(ক) $\frac{1 - \cot^2 A}{1 + \cot^2 A} + \cos^2 A$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $2M^2 + 3K = 3$ হলে α এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $M - K = \sqrt{2} K$ হলে প্রমাণ কর যে, $K + M = \sqrt{2} M$.

৩১ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $A = 30^\circ$

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= \frac{1 - \cot^2 A}{1 + \cot^2 A} + \cos^2 A \\ &= \frac{1 - (\cot 30^\circ)^2}{1 + (\cot 30^\circ)^2} + (\cot 30^\circ)^2 \\ &= \frac{1 - (\sqrt{3})^2}{1 + (\sqrt{3})^2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1 - 3}{1 + 3} + \frac{3}{4} = \frac{-2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{-2+3}{4} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\text{নির্ণেয় মান : } \frac{1}{4}$$

(খ) দেওয়া আছে, $K = \sin \alpha$ এবং $M = \cos \alpha$

এখানে, $2M^2 + 3K = 3$

বা, $2 \cos^2 \alpha + 3 \sin \alpha = 3$; যেখানে α সূক্ষ্মকোণ

বা, $2(1 - \sin^2 \alpha) + 3 \sin \alpha = 3$ [$\because \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$]

বা, $2 - 2 \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha - 3 = 0$

বা, $2 \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha - 1 = 0$

বা, $2 \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha - \sin \alpha + 1 = 0$

বা, $2 \sin \alpha (\sin \alpha - 1) - 1 (\sin \alpha - 1) = 0$

বা, $(\sin \alpha - 1) (2 \sin \alpha - 1) = 0$

হয়, $\sin \alpha - 1 = 0$

বা, $\sin \alpha = 1$

বা, $\sin \alpha = \sin 90^\circ$

বা, $\alpha = 90^\circ$; যা গ্রহণযোগ্য নয়

কেননা, α সূক্ষ্মকোণ

অথবা, $2 \sin \alpha - 1 = 0$

বা, $2 \sin \alpha = 1$

বা, $\sin \alpha = \frac{1}{2}$

বা, $\sin \alpha = \sin 30^\circ$

$\therefore \alpha = 30^\circ$

$$\text{নির্ণেয় মান : } \alpha = 30^\circ$$

(গ) দেওয়া আছে, $K = \sin \alpha$ এবং $M = \cos \alpha$

এখানে, $M - K = \sqrt{2} K$

বা, $\cos^2 \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \alpha$

বা, $(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = (\sqrt{2} \sin \alpha)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha$

বা, $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 0$.

বা, $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

বা, $(\cos \alpha + \sin \alpha) (\cos \alpha - \sin \alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

[$a^2 - b^2 = (a + b) (a - b)$]

বা, $(\cos \alpha + \sin \alpha) \sqrt{2} \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ [(i) নং হতে পাই।]

বা, $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{2} \sin \alpha}$

বা, $\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \alpha$ [$\sin \alpha \neq 0$ যেহেতু α সূক্ষ্মকোণ]

বা, $K + M = \sqrt{2} M$.

$\therefore K + M = \sqrt{2} M$. (প্রমাণিত)

৩২. $x = \sin \theta$ এবং $y = \cos \theta$.

$P = 1 + \sin A$, $Q = 1 - \sin A$.

[যশোর বোর্ড ২০২২]

(ক) দেখাও যে, $\frac{x}{y} \sqrt{1 - x^2} = x$.

(খ) সমাধান কর : $2 - 5x = x^2 - y^2$, যখন θ সূক্ষ্মকোণ।

(গ) প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{P}{Q}} = \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cot A}$.

৩২ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $x = \sin \theta$ এবং $y = \cos \theta$

$$\begin{aligned}\text{বামপক্ষ} &= \frac{x}{y} \sqrt{1 - x^2} \\ &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \\ &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \sqrt{\cos^2 \theta} [\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1] \\ &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \cos \theta = \sin \theta = \text{ডানপক্ষ}\end{aligned}$$

অর্থাৎ $\frac{x}{y} \sqrt{1 - x^2} = x$. (দেখানো হলো)

(খ) দেওয়া আছে, $x = \sin \theta$ এবং $y = \cos \theta$

এখন, $2 - 5x = x^2 - y^2$, যখন θ সূক্ষ্মকোণ

বা, $2 - 5 \sin \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$

বা, $2 - 5 \sin \theta = \sin^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta)$ [$\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$]

বা, $2 - 5 \sin \theta = \sin^2 \theta - 1 + \sin^2 \theta$

বা, $2 - 5 \sin \theta = 2 \sin^2 \theta - 1$

বা, $2 \sin^2 \theta + 5 \sin \theta - 3 = 0$

ev, $2 \sin^2 \theta + 6 \sin \theta - \sin \theta - 3 = 0$

বা, $2 \sin \theta (\sin \theta + 3) - 1 (\sin \theta + 3) = 0$

বা, $(\sin \theta + 3) (2 \sin \theta - 1) = 0$

হয়, $\sin \theta + 3 = 0$

বা, $\sin \theta = -3$;

যা গ্রহণযোগ্য নয়। কেননা, θ সূক্ষ্মকোণ।

অথবা, $2 \sin \theta - 1 = 0$

বা, $\sin \theta = \frac{1}{2}$

বা, $\sin \theta = \sin 30^\circ$

$\therefore \theta = 30^\circ$

নির্ণেয় সমাধান : $\theta = 30^\circ$

(গ) দেওয়া আছে, $P = 1 + \sin A$ এবং $Q = 1 - \sin A$

$$\text{বামপক্ষ} = \sqrt{\frac{P}{Q}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1 + \sin A)(1 + \sin A)}{(1 - \sin A)(1 + \sin A)}}$$

[লব ও হরকে $(1 + \sin A)$ দ্বারা গুণ করে]

$$= \sqrt{\frac{(1 + \sin A)^2}{1 - \sin^2 A}} \quad [\because (a + b)(a - b) = a^2 - b^2]$$

$$= \frac{1 + \sin A}{\cos A} = \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}$$

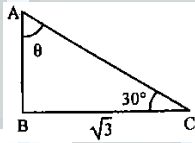
$$= \frac{1}{\cos A} + \tan A \quad [\because \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}]$$

$$= \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cot A} \quad [\because \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}]$$

= ডানপক্ষ

অর্থাৎ $\sqrt{\frac{P}{Q}} = \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cot A}$ (প্রমাণিত)

৩৩.



[যশোর বোর্ড ২০২২]

(ক) AC বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\left(2 - \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A}\right)^{-1} + \left(2 + \frac{1}{\cos^2 A}\right)^{-1} = 1$.

(গ) θ কোণের সাপেক্ষে যদি $2\left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + 3\left(\frac{AB}{AC}\right) - 3 = 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $\theta = 60^\circ$.

৩৩ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) এখানে, $\cos 30^\circ = \frac{BC}{AC}$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{AC}$

বা, $\frac{1}{AC} = \frac{1}{2}$

$\therefore AC = 2$

নির্ণেয় দৈর্ঘ্য : $AC = 2$.

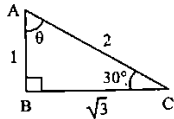
(খ) 'ক' হতে প্রাপ্ত, $AC = 2$

দেওয়া আছে, $BC = \sqrt{3}$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$$

$$= \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{4 - 3} = \sqrt{1} = 1$$



এখন, $\sin A = \sin \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos A = \cos \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$

$$\text{বামপক্ষ} = \left(2 - \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A}\right)^{-1} + \left(2 + \frac{1}{\cos^2 A}\right)^{-1}$$

$$= (2 - \sin^2 A)^{-1} + \left(2 + \frac{1}{\cos^2 A}\right)^{-1}$$

$[\because \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}]$

$$= \left\{2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\}^{-1} + \left\{2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right\}^{-1}$$

$$= \left(2 - \frac{3}{4}\right)^{-1} + (2 + 4)^{-1} = \left(\frac{8-3}{4}\right)^{-1} + 6^{-1}$$

$$= \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} + 6^{-1} = \frac{4}{5} + \frac{1}{6} = \frac{24+5}{30} = \frac{29}{30}$$

\therefore বামপক্ষ = ডানপক্ষ।

Note : লক্ষ করি-১ : $\left(2 + \frac{1}{\cos^2 A}\right)^{-1}$ এর পরিবর্তে $\left(2 + \frac{1}{\cot^2 A}\right)^{-1}$ বিবেচনা করে।

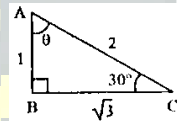
'ক' হতে প্রাপ্ত, $AC = 2$

দেওয়া আছে, $BC = \sqrt{3}$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$$

$$= \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{4 - 3} = \sqrt{1} = 1$$



এখন, $\sin A = \sin \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

এবং $\tan A = \tan \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

$$\text{বামপক্ষ} = \left(2 - \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A}\right)^{-1} + \left(2 + \frac{1}{\cot^2 A}\right)^{-1}$$

$$= (2 - \sin^2 A)^{-1} + (2 + \tan^2 A)^{-1}$$

$$\left[\because \sin \theta = \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta} \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}\right]$$

$$= \left(2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^{-1} + \left(2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)^2\right)^{-1}$$

$$= \left(2 - \frac{3}{4}\right)^{-1} + (2 + 3)^{-1}$$

$$= \left(\frac{8-3}{4}\right)^{-1} + (5)^{-1}$$

$$= \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} + (5)^{-1} = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4+1}{5} = \frac{5}{5} = 1 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \left(2 - \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A}\right)^{-1} + \left(2 + \frac{1}{\cos^2 A}\right)^{-1} = 1. \text{ (প্রমাণিত)}$$

লক্ষ করি-২ : $\left(2 + \frac{1}{\cos^2 A}\right)^{-1}$ এর পরিবর্তে $\left(1 + \frac{1}{\cos^2 A}\right)^{-1}$ বিবেচনা করে।

'ক' হতে প্রাপ্ত, $AC = 2$

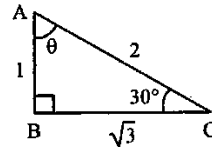
দেওয়া আছে, $BC = \sqrt{3}$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$$

$$= \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{4 - 3}$$

$$= \sqrt{1} = 1$$



এখন, $\sin A = \sin \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

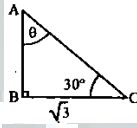
এবং $\tan A = \tan \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

বামপক্ষ = $\left(2 - \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A}\right)^{-1} + \left(1 + \frac{1}{\cos^2 A}\right)^{-1}$
 $= (2 - \sin^2 A)^{-1} + \left(1 + \frac{1}{\cos^2 A}\right)^{-1}$
 $\left[\because \sin \theta = \frac{1}{\cos \theta} \right]$

$= \left\{2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\}^{-1} + \left\{2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^{-1}$
 $= \left(2 - \frac{3}{4}\right)^{-1} + \left(1 + \frac{1}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{8-3}{4}\right)^{-1} + (1+4)^{-1}$
 $= \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} + (5)^{-1} = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4+1}{5} = \frac{5}{5} = 1 = \text{ডানপক্ষ}$

$\therefore \left(2 - \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A}\right)^{-1} + \left(1 + \frac{1}{\cos^2 A}\right)^{-1} = 1. \text{ (প্রমাণিত)}$

(গ)



ABC সমকোণী ত্রিভুজে, $\angle B =$ এক সমকোণ
 এবং $\angle BAC = \theta$

এখন, $\sin \angle BAC = \frac{BC}{AC}$

বা, $\sin \theta = \frac{BC}{AC}$

এবং $\cos \angle BAC = \frac{AB}{AC}$

বা, $\cos \theta = \frac{AB}{AC}$

এখানে, $2\left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + 3\left(\frac{AB}{AC}\right) - 3 = 0$

বা, $2\sin^2 \theta + 3\cos \theta - 3 = 0 \left[\because \sin \theta = \frac{BC}{AC} \text{ এবং } \cos \theta = \frac{AB}{AC} \right]$

বা, $2(1 - \cos^2 \theta) + 3\cos \theta - 3 = 0 \left[\because \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \right]$

বা, $2 - 2\cos^2 \theta + 3\cos \theta - 3 = 0$

বা, $-2\cos^2 \theta + 3\cos \theta - 1 = 0$

বা, $2\cos^2 \theta - 3\cos \theta + 1 = 0$

বা, $2\cos^2 \theta - \cos \theta - 2\cos \theta + 1 = 0$

বা, $\cos \theta(2\cos \theta - 1) - 1(2\cos \theta - 1) = 0$

বা, $(2\cos \theta - 1)(\cos \theta - 1) = 0$

হয়, $2\cos \theta - 1 = 0$

বা, $2\cos \theta = 1$

বা, $\cos \theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos \theta = \cos 60^\circ$

বা, $\theta = 60^\circ$

সুতরাং $\theta = 60^\circ$. (দেখানো হলো)

অথবা, $\cos \theta - 1 = 0$

বা, $\cos \theta = 1$

বা, $\cos \theta = \cos 0^\circ$

বা, $\theta = 0^\circ$;

যা গ্রহণযোগ্য নয়।

(খ) $A = \sec \theta - \tan \theta$ হলে, $\operatorname{cosec} \theta$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) 'p' ও 'q' এর মান নির্ণয় কর।

৩৪ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $C = 30^\circ$

বামপক্ষ = $\tan 2C = \tan (2 \times 30^\circ)$

$= \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

ডানপক্ষ = $\frac{2 \tan C}{1 - \tan^2 C} = \frac{2 \tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ}$

$= \frac{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \left[\because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$

$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3-1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \sqrt{3}$

অর্থাৎ, $\tan 2C = \frac{2 \tan C}{1 - \tan^2 C}$. (প্রমাণিত)

(খ) দেওয়া আছে, $A = \frac{1}{x}$

$A = \sec \theta - \tan \theta$ হলে,

$\sec \theta - \tan \theta = \frac{1}{x}$

বা, $\frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{x}$

বা, $\frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{x}$

বা, $\left(\frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$ [উভয়ক্ষেত্রে বর্গ করে]

বা, $\frac{(1 - \sin \theta)^2}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{1}{x^2} \left[\because \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \right]$

বা, $\frac{(1 - \sin \theta)^2}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} = \frac{1}{x^2}$

বা, $\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1}{x^2}$

বা, $\frac{1 - \sin \theta + 1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta - 1 - \sin \theta} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$ [যোজন-বিয়োজন করে।]

বা, $\frac{2}{-2 \sin \theta} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$

বা, $\frac{1}{\sin \theta} = -\frac{1 + x^2}{1 - x^2}$ [উভয়পক্ষকে -1 দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \operatorname{cosec} \theta = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

নির্ণেয় মান : $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

(গ) দেওয়া আছে, $\cot (p + q) = 1$

বা, $\cot (p + q) = \cot 45^\circ$

$\therefore p + q = 45^\circ \dots\dots\dots (1)$

এবং $\sqrt{2} \cot (p - q) = \sqrt{6}$

বা, $\cot (p - q) = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

বা, $\cot (p - q) = \sqrt{\frac{6}{2}}$

বা, $\cot (p - q) = \sqrt{3}$

বা, $\cot (p - q) = \cot 30^\circ$

$\therefore p - q = 30^\circ \dots\dots\dots (ii)$

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

৩৪. $A = \frac{1}{x}$, $\cot (p + q) = 1$.

$\sqrt{2} \cot (p - q) = \sqrt{6}$ এবং p, q সূক্ষ্মকোণ।

[কুমিল্লা বোর্ড ২০২২]

(ক) $C = 30^\circ$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\tan 2C = \frac{2 \tan C}{1 - \tan^2 C}$

$$\begin{array}{r} p + q = 45^\circ \\ p - q = 30^\circ \\ \hline (-) (+) (-) \\ 2p = 75^\circ \end{array}$$

$$\text{বা, } p = \frac{75^\circ}{2} = 37\frac{1}{2}^\circ$$

$$\therefore p = 37\frac{1}{2}^\circ$$

আবার, (i) হতে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$$\begin{array}{r} p + q = 45^\circ \\ p - q = 30^\circ \\ \hline (-) (+) (-) \\ 2q = 15^\circ \end{array}$$

$$\text{বা, } q = \left(\frac{15^\circ}{2}\right) = 7\frac{1}{2}^\circ$$

$$\therefore q = 7\frac{1}{2}^\circ$$

$$\text{নির্ণেয় মান : } p = 37\frac{1}{2}^\circ \text{ এবং } q = 7\frac{1}{2}^\circ.$$

$$35. \operatorname{cosec}(2c) = a, \cot(2c) = b \text{ এবং } \cos = p.$$

[কুমিল্লা বোর্ড ২০২২]

$$(ক) \cos^2 - 5 - \sin^2 \theta = \frac{5}{6} \text{ হলে, } \cos^4 \theta - \sin^4 \theta \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

$$(খ) \frac{a+b}{a-b} = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \text{ হলে, } c \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

$$(গ) 4p^2 - (2 + 2\sqrt{3})p + \sqrt{3} = 0 \text{ হলে, } \theta \text{ এর মান নির্ণয় কর, } 0^\circ < \theta < 90^\circ.$$

৩৫ নং প্রশ্নের উত্তর

$$(ক) \text{ দেওয়া আছে, } \cos^2 - 5 - \sin^2 \theta = \frac{5}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= \cos^4 \theta - \sin^4 \theta = (\cos^2 \theta)^2 - (\sin^2 \theta)^2 \\ &= (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= 1 \cdot \frac{5}{6} \quad [\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1] \end{aligned}$$

$$= \frac{5}{6}$$

$$\text{নির্ণেয় মান : } \frac{5}{6}.$$

$$(খ) \text{ দেওয়া আছে,}$$

$$\operatorname{cosec}(2c) = a, \cot(2c) = b$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \text{ হলে,}$$

$$\text{বা, } \frac{\operatorname{cosec} 2c + \cot 2c}{\operatorname{cosec} 2c - \cot 2c} = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{\operatorname{cosec} 2c + \cot 2c + \operatorname{cosec} 2c - \cot 2c}{\operatorname{cosec} 2c + \cot 2c - \operatorname{cosec} 2c + \cot 2c} =$$

$$\frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}} \quad [\text{যোজন বিয়োজন করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{2 \operatorname{cosec} 2c}{2 \cot 2c} = \frac{4}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{\operatorname{cosec} 2c}{\cot 2c} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\frac{\sin 2c}{\cos 2c}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right]$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sin 2c} \times \frac{\sin 2c}{\cos 2c} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\cos 2c} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \cos 2c = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{বা, } \cos 2c = \cos 30^\circ$$

$$\text{বা, } 2c = 30^\circ$$

$$\therefore c = 15^\circ$$

$$\text{নির্ণেয় মান : } c = 15^\circ.$$

$$(গ) \text{ দেওয়া আছে, } \cos \theta = p$$

$$\text{এখানে, } 4p^2 - (2 + 2\sqrt{3})p + \sqrt{3} = 0; 0^\circ < \theta < 90^\circ.$$

$$\text{বা, } 4(\cos \theta)^2 - (2 + 2\sqrt{3})\cos \theta + \sqrt{3} = 0$$

$$\text{বা, } 4\cos^2 \theta - 2\cos \theta - 2\sqrt{3}\cos \theta + \sqrt{3} = 0$$

$$\text{বা, } 2\cos \theta(2\cos \theta - 1) - \sqrt{3}(2\cos \theta - 1) = 0$$

$$\text{বা, } (2\cos \theta - 1)(2\cos \theta - \sqrt{3}) = 0$$

$$\text{হয়, } 2\cos \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2\cos \theta = 1$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \cos 60^\circ$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

$$\text{নির্ণেয় মান : } \theta = 30^\circ, 60^\circ.$$

$$\text{অথবা, } 2\cos \theta - \sqrt{3} = 0$$

$$\text{বা, } 2\cos \theta = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \cos 30^\circ$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

$$36. P = \tan A, q = \sec A + 1, r = \sec A - 1 \text{ এবং } s = \sin \theta + \cos \theta.$$

[চট্টগ্রাম বোর্ড ২০২২]

$$(ক) \text{ যদি } (\sec A - \tan A) = \frac{2}{5} \text{ হয়, তবে } (\sec A + \tan A) \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

$$(খ) \text{ প্রমাণ কর যে, } \frac{p}{q} - \frac{r}{q} = 0.$$

$$(গ) \text{ যদি } s = \sqrt{2} \text{ হয়, তবে } \theta \text{ এর মান নির্ণয় কর। যেখানে } 0^\circ < \theta < 90^\circ.$$

৩৬ নং প্রশ্নের উত্তর

$$(ক) \text{ দেওয়া আছে, } \sec A - \tan A = \frac{2}{5}$$

$$\text{বা, } (\sec A - \tan A)(\sec A + \tan A) = \frac{2}{5}(\sec A + \tan A)$$

[উভয়পক্ষকে $(\sec A + \tan A)$ দ্বারা গুণ করে]

$$\text{বা, } \sec^2 A - \tan^2 A = \frac{2}{5}(\sec A + \tan A)$$

$$[\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$$

$$\text{বা, } 1 = \frac{2}{5}(\sec A + \tan A) \quad [\because \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1]$$

$$\therefore (\sec A + \tan A) = \frac{5}{2}$$

$$\text{নির্ণেয় মান : } \frac{5}{2}$$

$$(খ) \text{ দেওয়া আছে, } P = \tan A, q = \sec A + 1 \text{ এবং } r = \sec A - 1$$

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{p}{q} - \frac{r}{q}$$

$$= \frac{\tan A}{\sec A + 1} - \frac{\sec A + 1}{\tan A}$$

$$= \frac{\frac{\sin A}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A} + 1} - \frac{1}{\frac{\sin A}{\cos A} - 1}$$

$$= \frac{1}{\cos A + 1} - \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{\sin A}{\cos A} - \frac{1 - \cos A}{\cos A}}{\frac{1 + \cos A}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A}} \\ &= \left(\frac{\sin A}{\cos A} \times \frac{\cos A}{1 + \cos A} \right) - \left(\frac{1 - \cos A}{\cos A} \times \frac{\cos A}{\sin A} \right) \\ &= \frac{\sin A}{1 + \cos A} - \frac{1 + \cos A}{\sin A} \\ &= \frac{\sin^2 A - (1 + \cos A)(1 - \cos A)}{\sin A (1 + \cos A)} \\ &= \frac{\sin^2 A (1 + \cos^2 A)}{\sin A (1 + \cos A)} \quad [\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2] \\ &= \frac{\sin^2 A - \sin^2 A}{\sin A (1 + \cos A)} \quad [\because \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta] \\ &= \frac{1}{\sin A (1 + \cos A)} = 0 = \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{p}{q} - \frac{r}{q} = 0. \text{ (প্রমাণিত)}$$

(গ) দেওয়া আছে, $s = \sin \theta + \cos \theta$.

$$s = \sqrt{2} \text{ হলে, } \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \dots\dots (i)$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \sqrt{2} - \sin \theta$$

$$\text{বা, } \cos^2 \theta = (\sqrt{2} - \sin \theta)^2 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } \cos^2 \theta = (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \theta + \sin^2 \theta$$

$$\text{বা, } \cos^2 \theta = 2 - 2\sqrt{2} \sin \theta + \sin^2 \theta$$

$$\text{বা, } 1 - \sin^2 \theta = 2 - 2\sqrt{2} \sin \theta + \sin^2 \theta$$

$$\text{বা, } 2 - 2\sqrt{2} \sin \theta + \sin^2 \theta - 1 + \sin^2 \theta = 0$$

$$\text{বা, } 2 \sin^2 \theta - 2\sqrt{2} \sin \theta + 1 = 0$$

$$\text{বা, } (\sqrt{2} \sin \theta)^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \sin \theta \cdot 1 + 1^2 = 0$$

$$\text{বা, } (\sqrt{2} \sin \theta - 1)^2 = 0$$

$$\text{বা, } \sqrt{2} \sin \theta - 1 = 0 \text{ [বর্গমূল করে]}$$

$$\text{বা, } \sqrt{2} \sin \theta = 1$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^\circ$$

$$\therefore \theta = 45^\circ; \text{ যেখানে, } 0^\circ < \theta < 90^\circ$$

$$\text{নির্ণেয় মান : } \theta = 45^\circ.$$

৩৭. (i) $\sqrt{3} \tan A = 1$

$$(ii) \cot \alpha + \cos \beta = x \text{ এবং } \cot \alpha - \cos \beta = y.$$

[সিলেট বোর্ড ২০২২]

$$(ক) \operatorname{cosec} \theta = \frac{5}{3} \text{ হলে, } \sec \theta \text{ ও } \cot \theta \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

$$(খ) (i) \text{ হতে } \frac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A} \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

$$(গ) (ii) \text{ হতে প্রমাণ কর যে, } x^2 - y^2 = 4\sqrt{xy}.$$

৩৭ নং প্রশ্নের উত্তর

$$(ক) \text{ দেওয়া আছে, } \operatorname{cosec} \theta = \frac{5}{3}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sin \theta} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{3}{5}$$

$$\text{আমরা জানি, } \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\therefore \cos \theta = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = 1 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{নির্ণেয় মান : } \sec \theta = \frac{5}{4} \text{ এবং } \cot \theta = \frac{4}{3}.$$

(খ) দেওয়া আছে, $\sqrt{3} \tan A = 1$

$$\text{বা, } \tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \tan^2 A = \frac{1}{3}$$

$$\text{বা, } \sec^2 A - 1 = \frac{1}{3} \quad [\because \sec^2 A - \tan^2 A = 1]$$

$$\text{বা, } \sec^2 A = \frac{1}{3} + 1$$

$$\text{বা, } \sec^2 A = \frac{1+3}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \sec^2 A = \frac{4}{3}$$

$$\text{আবার, } \tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\cot A} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \cot A = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \cot^2 A = 3 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } \operatorname{cosec}^2 A - 1 = 3 \quad [\because \operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1]$$

$$\text{বা, } \operatorname{cosec}^2 A = 3 + 1$$

$$\therefore \operatorname{cosec}^2 A = 4$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A} = \frac{4 - \frac{4}{3}}{\frac{4}{3} + 4} = \frac{\frac{12-4}{3}}{\frac{4+12}{3}} = \frac{8}{3} \times \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\text{নির্ণেয় মান : } \frac{1}{2}$$

(গ) লক্ষ করি : $\cot \alpha + \cos \beta = x$ এবং $\cot \alpha - \cos \beta = y$ হলে, $x^2 - y^2$

$= 4\sqrt{xy}$ সম্পর্কটি প্রমাণ করা সম্ভব নয়। কারণ উক্ত সম্পর্কটি প্রমাণ করার জন্য

$\alpha = \beta$ হতে হবে যা প্রশ্নে উল্লেখ করা হয়নি। তাই $\alpha = \beta$ বিবেচনা করে $x^2 - y^2$

$= 4\sqrt{xy}$ সম্পর্কটি প্রমাণ করা হলো।

$$\text{দেওয়া আছে, } \cot \alpha + \cos \beta = x$$

$$\cot \alpha - \cos \beta = y$$

$$\text{বামপক্ষ} = x^2 - y^2$$

$$= (\cot \alpha + \cos \beta)^2 - (\cot \alpha - \cos \beta)^2$$

$$= (\cot \alpha + \cos \beta)^2 - (\cot \alpha - \cos \beta)^2 \quad [\alpha = \beta \text{ করে}]$$

$$= 4\cot \alpha \cos \alpha \quad [\because (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab]$$

$$= 4\sqrt{\cot \alpha \cos \alpha}$$

$$= 4\sqrt{\cot^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)} \quad [\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1]$$

$$= 4\sqrt{\cot^2 \alpha - \cot^2 \alpha \sin^2 \alpha}$$

$$= 4\sqrt{\cot^2 \alpha - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha} \quad [\because \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}]$$

$$= 4\sqrt{\cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$$

$$= 4\sqrt{(\cot \alpha + \cos \alpha)(\cot \alpha - \cos \alpha)}$$

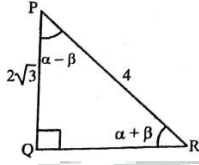
$$[\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$$

$$= 4\sqrt{xy} = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\text{অর্থাৎ, } x^2 - y^2 = 4\sqrt{xy}. \text{ (প্রমাণিত)}$$

৩৮.



[সিলেট বোর্ড ২০২২]

(ক) QR এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $\frac{\tan^2 P + \cot^2 R}{\sin^2 Q + \cos^2 R}$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) দেখাও যে, $\alpha = 45^\circ$ এবং $\beta = 15^\circ$.

৩৮ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $PQ = 2\sqrt{3}$

$$PR = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore QR &= \sqrt{PR^2 - PQ^2} \\ &= \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{16 - 12} \\ &= \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

নির্ণেয় মান : $QR = 2$.

(খ) দেওয়া আছে, $PQ = 2\sqrt{3}$ এবং $PR = 4$

‘ক’ হতে পাই, $QR = 2$

$$\therefore \tan P = \tan(\alpha - \beta) = \frac{QR}{PQ} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \cot R = \cot(\alpha + \beta) = \frac{QR}{PQ} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \sin Q = \sin 90^\circ = 1$$

$$\therefore \cos R = \cos(\alpha + \beta) = \frac{QR}{PQ} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= \frac{\tan^2 P + \cot^2 R}{\sin^2 Q + \cos^2 R} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{(1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{\frac{4}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{4}} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{4}} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

নির্ণেয় মান : $\frac{8}{15}$.

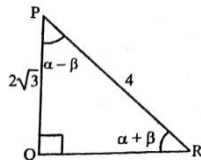
(গ) দেওয়া আছে, $PQ = 2\sqrt{3}$ এবং $PR = 4$

‘ক’ হতে পাই, $QR = 2$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \frac{PQ}{PR}$$

$$\text{বা, } \sin(\alpha + \beta) = \frac{2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{বা, } \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\text{বা, } \sin(\alpha + \beta) = \sin 60^\circ \left[\because \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\therefore \alpha + \beta = 60^\circ \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{আবার, } \sin(\alpha - \beta) = \frac{QR}{PQ}$$

$$\text{বা, } \sin(\alpha - \beta) = \frac{2}{4}$$

$$\text{বা, } \sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \sin(\alpha - \beta) = \sin 30^\circ \left[\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \right]$$

$$\therefore \alpha - \beta = 30^\circ \dots\dots\dots (ii)$$

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$$\alpha + \beta = 60^\circ$$

$$\alpha - \beta = 30^\circ$$

$$\frac{2\alpha}{2} = 90^\circ$$

$$\therefore \alpha = 45^\circ$$

(i) হতে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$$\alpha + \beta = 60^\circ$$

$$\alpha - \beta = 30^\circ$$

$$\frac{(-) (+) (-)}{2\beta = 30^\circ}$$

$$\therefore \beta = 15^\circ$$

$$\therefore \alpha = 45^\circ \text{ এবং } \beta = 15^\circ. \text{ (দেখানো হলো)}$$

৩৯. $x = \tan p + \sin p$, $y = \tan p - \sin p$
এবং $z = \cos^2 A - \sin^2 A$, A সূক্ষ্মকোণ।

[বরিশাল বোর্ড ২০২২]

(ক) যদি $\tan B = \frac{5}{12}$ হয় তবে $\sin B$, এর মান বের কর, B সূক্ষ্মকোণ।

(খ) প্রমাণ কর : $(x^2 - y^2) \div (\sqrt{xy}) = 4$.

(গ) যদি $z = 4 - 9 \cos A$ হয়, তবে A এর মান বের কর।

৩৯ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\tan B = \frac{5}{12}$

অর্থাৎ, সন্নিহিত বাহু, $BC = 12$

বিপরীত বাহু, $AC = 5$

$$\therefore \text{অতিভুজ, } AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

$$= \sqrt{5^2 + 12^2}$$

$$= \sqrt{169} = 13$$

$$\therefore \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}$$

নির্ণেয় মান : $\frac{5}{13}$.

(খ) দেওয়া আছে, $x = \tan p + \sin p$; $y = \tan p - \sin p$

$$\text{বামপক্ষ} = (x^2 - y^2) \div (\sqrt{xy})$$

$$= \frac{(x^2 - y^2)}{(\sqrt{xy})} = \frac{(\tan p + \sin p)^2 - (\tan p - \sin p)^2}{\sqrt{(\tan p + \sin p)(\tan p - \sin p)}}$$

$$= \frac{4 \tan p \sin p}{\sqrt{\tan^2 p - \sin^2 p}}$$

$$[\because (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab]$$

$$\text{এবং } (a+b) - (a-b) = a^2 - b^2]$$

$$= \frac{4 \cdot \frac{\sin p}{\cos p} \cdot \sin p}{\sqrt{\frac{\sin^2 p}{\cos^2 p} - \sin^2 p}} \left[\because \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right]$$

$$= \frac{4 \cdot \frac{\sin^2 p}{\cos p}}{\sqrt{\frac{\sin^2 p (1 - \cos^2 p)}{\cos^2 p}}}$$

$$= \frac{4 \cdot \frac{\sin^2 p}{\cos p}}{\sqrt{\frac{\sin^2 p \cdot \sin^2 p}{\cos^2 p}}} \quad [\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1]$$

$$= \frac{4 \cdot \frac{\sin^2 p}{\cos p}}{\frac{\sin^2 p}{\cos p}} = 4 \cdot \frac{\sin^2 p}{\cos p} \times \frac{\cos p}{\sin^2 p} = 4 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore (x^2 - y^2) \div (\sqrt{xy}) = 4. \text{ (প্রমাণিত)}$$

(গ) দেওয়া আছে, $z = \cos^2 A - \sin^2 A$; A সূক্ষ্মকোণ।

আবার, $z = \cos^2 A - \sin^2 A$ হলে, $4 - 9 \cos A = \cos^2 A - \sin^2 A$
বা, $4 - 9 \cos A = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A)$

$$[\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1]$$

$$\text{বা, } \cos^2 A - 1 + \cos^2 A - 4 + 9 \cos A = 0$$

$$\text{বা, } 2 \cos^2 A + 9 \cos A - 5 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \cos^2 A + 10 \cos A \cos A - 5 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \cos^2 A (\cos A + 5) - 1 (\cos A + 5) = 0$$

$$\text{বা, } (\cos A + 5) (2 \cos A - 1) = 0$$

$$\text{হয়, } \cos A + 5 = 0$$

বা, $\cos A = -5$; যা গ্রহণযোগ্য নয়, কেননা, A সূক্ষ্মকোণ।

$$\text{অথবা, } 2 \cos A - 1 = 0$$

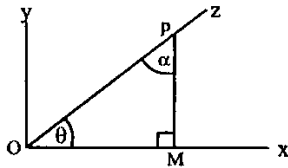
$$\text{বা, } \cos A = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \cos A = \cos 60^\circ$$

$$\therefore A = 60^\circ$$

নির্ণেয় মান : $A = 60^\circ$.

৪০.



চিত্রে, $OP = 2$, $PM = \sqrt{3}$.

[দিনাজপুর বোর্ড ২০২২]

(ক) $\tan \theta + \cot \theta = 2$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $\frac{1}{1 + \sin^2 \theta} + \frac{1}{1 + \cos^2 \theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) প্রমাণ কর যে, $(\sec \alpha + \tan \alpha)^2 = \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$.

৪০ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\tan \theta + \cot \theta = 2$

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = 2$$

$$\text{বা, } \frac{\tan^2 \theta + 1}{\tan \theta} = 2$$

$$\text{বা, } \tan^2 \theta + 1 = 2 \tan^2 \theta$$

$$\text{বা, } \tan^2 \theta - 2 \tan \theta + 1 = 0$$

$$\text{বা, } (\tan \theta - 1)^2 = 0$$

$$\text{বা, } \tan \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } \tan \theta = 1$$

$$\text{বা, } \tan \theta = \tan 45^\circ$$

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

নির্ণেয় মান : $\theta = 45^\circ$.

(খ) দেওয়া আছে, ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle PMO = \text{সমকোণ}$ ।

$$\angle POM = \theta$$

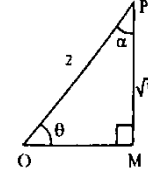
$$OP = 2, PM = \sqrt{3}$$

$$\therefore OM = \sqrt{OP^2 - PM^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{4 - 3} = \sqrt{1} = 1$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{PM}{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{OM}{OP} = \frac{1}{2}$$



$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{1}{1 + \sin^2 \theta} + \frac{1}{1 + \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{4+3}{4}} + \frac{1}{\frac{4+1}{4}} = \frac{1}{\frac{7}{4}} + \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{7} + \frac{4}{5}$$

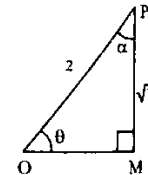
$$= 1 \times \frac{4}{7} + 1 \times \frac{4}{5} = \frac{4}{7} + \frac{4}{5} = \frac{20 + 28}{35} = \frac{48}{35}$$

$$\text{নির্ণেয় মান : } \frac{48}{35}$$

(গ) দেওয়া আছে, ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle PMO = \text{সমকোণ}$ । $\angle OPM = \alpha$

$$OP = 2$$

$$PM = \sqrt{3}$$



‘খ’ হতে পাই, $OM = 1$

$$\therefore \sec \angle OPM = \sec \alpha = \frac{OP}{PM} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \tan \angle OPM = \tan \alpha = \frac{OM}{PM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \sin \angle OPM = \sin \alpha = \frac{OM}{OP} = \frac{1}{2}$$

$$\text{বামপক্ষ} = (\sec \alpha + \tan \alpha)^2$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{2+1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$$

$$\text{ডানপক্ষ} = \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2+1}{2}}{\frac{2-1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \times 2 = 3$$

$$\therefore (\sec \alpha + \tan \alpha)^2 = \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \text{ (প্রমাণিত)}$$

৪১. (i) $2 \cos (x + y) = 1 = 2 \sin (x - y)$, x, y সূক্ষ্মকোণ।

(ii) $\sec \theta + \operatorname{cosec} \theta = \operatorname{cosec} \theta \cdot \sec \theta$

[দিনাজপুর বোর্ড ২০২২]

(ক) $\tan (A - 30^\circ) = 1$ হলে, A এর মান নির্ণয় কর।

(খ) (x, y) এর মান নির্ণয় কর।

(গ) θ এর মান নির্ণয় কর, যখন $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

৪১ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\tan(A - 30^\circ) = 1$

$$\text{বা, } \tan(A - 30^\circ) = \tan 45^\circ$$

$$\text{বা, } A - 30^\circ = 45^\circ$$

$$\text{বা, } A = 45^\circ + 30^\circ$$

$$\therefore A = 75^\circ$$

নির্ণেয় মান : $A = 75^\circ$.

(খ) দেওয়া আছে,

$$2 \cos(x + y) = 1 = 2 \sin(x - y), x, y \text{ সূক্ষ্মকোণ।}$$

$$\therefore 2 \cos(x + y) = 1$$

$$\text{বা, } \cos(x + y) = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \cos(x + y) = \cos 60^\circ$$

$$\therefore x + y = 60^\circ \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{আবার, } 2 \sin(x - y) = 1$$

$$\text{বা, } \sin(x - y) = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \sin(x - y) = \sin 30^\circ$$

$$\therefore x - y = 30^\circ \dots\dots\dots (ii)$$

এখন, (i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$$x + y = 60^\circ$$

$$x - y = 30^\circ$$

$$2x = 90^\circ$$

$$\therefore x = 45^\circ$$

আবার, (i) নং হতে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$$x + y = 60^\circ$$

$$x - y = 30^\circ$$

$$\begin{array}{r} (-) \quad (+) \quad (-) \\ \hline 2y = 30^\circ \end{array}$$

$$\therefore y = 15^\circ$$

নির্ণেয় মান : $(x, y) = (45^\circ, 15^\circ)$

(গ) দেওয়া আছে, $\sec \theta + \operatorname{cosec} \theta = \operatorname{cosec} \theta \cdot \sec \theta$; $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

$$\text{বা, } \frac{\sec \theta + \operatorname{cosec} \theta}{\operatorname{cosec} \theta \cdot \sec \theta} = \frac{\operatorname{cosec} \theta \cdot \sec \theta}{\operatorname{cosec} \theta \cdot \sec \theta}$$

[উভয়পক্ষকে $\operatorname{cosec} \theta \cdot \sec \theta$ দ্বারা ভাগ করে]

$$\text{বা, } \frac{\sec \theta}{\operatorname{cosec} \theta \cdot \sec \theta} + \frac{\operatorname{cosec} \theta}{\operatorname{cosec} \theta \cdot \sec \theta} = 1$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta} + \frac{1}{\sec \theta} = 1$$

$$\text{বা, } \sin \theta + \cos \theta = 1$$

$$\text{বা, } (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1^2 \text{ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta = 1$$

$$\text{বা, } 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = 1 [\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1]$$

$$\text{বা, } 2 \sin \theta \cos \theta = 1$$

$$\text{বা, } 2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$\text{বা, } \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$\text{বা, } \sin \theta = 0$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin 0^\circ$$

$$\text{বা, } \theta = 0^\circ$$

$$\text{অথবা, } \cos \theta = 0$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \cos 90^\circ$$

$$\text{বা, } \theta = 90^\circ$$

নির্ণেয় মান : $\theta = 0^\circ$ অথবা 90° .

Note : এখানে, $\sec 90^\circ$ ও পড়বপ ০র এর মান অসংজ্ঞায়িত।

$$82. \cos \theta + \cot \theta = p, \cot \theta - \cos \theta = q \text{ এবং } 2 \sin^2 \theta + 3 \cos \theta = M$$

[ময়মনসিংহ বোর্ড ২০২২]

(ক) $\cot(A - 25^\circ) = 1$ হলে A এর মান নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর : $p^2 - q^2 = 4\sqrt{pq}$.

(গ) $M = 3$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। [যখন $0^\circ < \theta < 90^\circ$]

৪২ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\cot(A - 25^\circ) = 1$

$$\text{বা, } \cot(A - 25^\circ) = \cot 45^\circ [\because \cot 45^\circ = 1]$$

$$\text{বা, } A - 25^\circ = 45^\circ$$

$$\text{বা, } A = (45^\circ + 25^\circ)$$

$$\therefore A = 70^\circ$$

নির্ণেয় মান : $A = 70^\circ$.

(খ) দেওয়া আছে, $\cos \theta + \cot \theta = p, \cot \theta - \cos \theta = q$

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= p^2 - q^2 \\ &= (\cos \theta + \cot \theta)^2 - (\cot \theta - \cos \theta)^2 \\ &= 4 \cot \theta \cos \theta [\because (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab] \\ &= 4 \sqrt{\cot^2 \theta \cos^2 \theta} [\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1] \\ &= 4 \sqrt{\cot^2 \theta - \cot^2 \theta \cdot \sin^2 \theta} \\ &= 4 \sqrt{\cot^2 \theta - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \cdot \sin^2 \theta} \left[\because \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right] \\ &= 4 \sqrt{\cot^2 \theta - \cos^2 \theta} \\ &= 4 \sqrt{(\cot \theta + \cos \theta)(\cot \theta - \cos \theta)} \\ &= 4 \sqrt{pq} = \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

[$\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$]

$$\therefore p^2 - q^2 = 4\sqrt{pq} \text{ (প্রমাণিত)}$$

(গ) দেওয়া আছে, $2 \sin^2 \theta + 3 \cos \theta = M$

$M = 3$ হলে, $2 \sin^2 \theta + 3 \cos \theta = 3$; যখন $0^\circ < \theta < 90^\circ$

$$\text{বা, } 2(1 - \cos^2 \theta) + 3 \cos \theta = 3 [\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1]$$

$$\text{বা, } 2 - 2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta - 3 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta + 1 = 0 \text{ [উভয়পক্ষকে } (-1) \text{ দ্বারা গুণ করে]}$$

$$\text{বা, } 2 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - \cos \theta + 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \cos \theta (\cos \theta - 1) - 1(\cos \theta - 1) = 0$$

$$\text{বা, } (\cos \theta - 1)(2 \cos \theta - 1) = 0$$

$$\text{হয়, } \cos \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } \cos \theta = 1$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \cos 0^\circ$$

$$[\because \cos 0^\circ = 1]$$

$$\therefore \theta = 0^\circ \text{ যা গ্রহণযোগ্য নয়}$$

$$\text{কেননা, } 0^\circ < \theta < 90^\circ$$

$$\text{অথবা, } 2 \cos \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \cos 60^\circ$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

$$[\because \cos 60^\circ = \frac{1}{2}]$$

নির্ণেয় মান : $\theta = 60^\circ$.

$$83. \cos^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ এবং } \sqrt{3} \tan(A + B) = 3 = 2\sqrt{3} \cos(A - B).$$

[ময়মনসিংহ বোর্ড ২০২২]

(ক) $p = 30^\circ$ হলে, $\sqrt{1 - \cos^2 p}$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\cot^4 \theta - 1 = \cot^2 \theta$.

(গ) প্রমাণ কর : $\sin A = \cos 3B$.

৪৩ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $P = 30^\circ$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \sqrt{1 - \cos^2 p} = \sqrt{1 - \cos^2 30^\circ}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \left[\because \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$= \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4-3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

নির্ণেয় মান : $\frac{1}{2}$.

(খ) দেওয়া আছে, $\cos^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$$\text{বা, } \cos^4 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\text{বা, } \cos^4 \theta = \sin^2 \theta \left[\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \right]$$

$$\text{বা, } \frac{\cos^4 \theta}{\sin^4 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin^4 \theta} \text{ [উভয়পক্ষকে } \sin^4 \theta \text{ দ্বারা ভাগ করে]}$$

$$\text{বা, } \cot^4 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\because \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right]$$

$$\text{বা, } \cot^4 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta \left[\because \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \right]$$

$$\text{বা, } \cot^4 \theta = 1 + \cot^2 \theta \left[\because \operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = 1 \right]$$

$$\therefore \cot^4 \theta - 1 = \cot^2 \theta. \text{ (প্রমাণিত)}$$

(গ) দেওয়া আছে, $\sqrt{3} \tan (A+B) = 3 = 2\sqrt{3} \cos (A-B)$.

$$\text{এখন, } \sqrt{3} \tan (A+B) = 3$$

$$\text{বা, } \tan(A+B) = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \tan(A+B) = \tan 60^\circ$$

$$\therefore A+B = 60^\circ \dots\dots\dots(i)$$

$$\text{আবার, } 2\sqrt{3} \cos(A-B) = 3$$

$$\text{বা, } \cos(A-B) = \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \cos(A-B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{বা, } \cos(A-B) = \cos 30^\circ$$

$$\therefore A-B = 30^\circ \dots\dots\dots(ii)$$

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$$A+B = 60^\circ$$

$$A-B = 30^\circ$$

$$\frac{A+B}{2} = 90^\circ$$

$$\therefore A = 45^\circ$$

(i) হতে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$$A+B = 60^\circ$$

$$\frac{(-) (+) (-)}{2B} = 30^\circ$$

$$\therefore B = 15^\circ$$

$$\text{বামপক্ষ} = \sin A = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{ডানপক্ষ} = \cos 3B = \cos(3 \times 15^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{অর্থাৎ, } \sin A = \cos 3B. \text{ (প্রমাণিত)}$$

$$88. (i) \frac{a^2}{\cos^2 \theta} - \frac{b^2}{\cot^2 \theta} = c^2; \text{ যেখানে } c > a > b.$$

$$(ii) \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A} = 2 + \sqrt{3}.$$

[ঢাকা বোর্ড ২০২০]

(ক) $\alpha = 30^\circ$ হলে $4 \cos^3 \alpha - 3 \sin 2\alpha$ এর মান নির্ণয় কর।

$$(খ) \text{ প্রমাণ কর যে, } \frac{1}{\sin \theta} = \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}}$$

(গ) (ii) নং থেকে A এর মান নির্ণয় কর যেখানে $0^\circ < A < 90^\circ$.

88 নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\alpha = 30^\circ$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = 4 \cos^3 - 3 \sin 2\alpha$$

$$= 4 \cos^3 30^\circ - 3 \sin (2 \times 30^\circ)$$

$$= 4 \cos^3 30^\circ - 3 \sin 60^\circ = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 4 \times \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$$

নির্ণেয় মান 0.

(খ) দেওয়া আছে, $\frac{a^2}{\cos^2 \theta} - \frac{b^2}{\cot^2 \theta} = c^2$

$$\text{বা, } a^2 \frac{1}{\cos^2 \theta} - b^2 \frac{1}{\cot^2 \theta} = c^2$$

$$\text{বা, } a^2 \sec^2 - b^2 \tan^2 = c^2$$

$$\text{বা, } a^2 (1 + \tan^2 \theta) - b^2 \tan^2 \theta = c^2$$

$$\text{বা, } a^2 + a^2 \tan^2 \theta - b^2 \tan^2 \theta = c^2$$

$$\text{বা, } \tan^2 \theta (a^2 - b^2) = c^2 - a^2$$

$$\text{বা, } \tan^2 \theta = \frac{c^2 - a^2}{a^2 - b^2}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{c^2 - a^2}{a^2 - b^2}$$

$$\text{বা, } \cos^2 \theta = \frac{a^2 - b^2}{c^2 - a^2}$$

$$\text{বা, } \operatorname{cosec}^2 \theta - 1 = \frac{a^2 - b^2}{c^2 - a^2}$$

$$\text{বা, } \operatorname{cosec}^2 \theta = \frac{a^2 - b^2}{c^2 - a^2} + 1$$

$$\text{বা, } \operatorname{cosec}^2 \theta = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - a^2}{c^2 - a^2}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}$$

$$\therefore \frac{1}{\sin \theta} = \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}}. \text{ (প্রমাণিত)}$$

(গ) দেওয়া আছে, $\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A} = 2 + \sqrt{3}$

$$\text{বা, } \frac{1 + \sin A}{\cos A} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \left(\frac{1 + \sin A}{\cos A} \right)^2 = (2 + \sqrt{3})^2 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } \frac{(1 + \sin A)^2}{\cos^2 A} = (2)^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$$

$$\text{বা, } \frac{(1 + \sin A)^2}{1 - \sin^2 A} = 4 + 4\sqrt{3} + 3$$

$$\text{বা, } \frac{(1 + \sin A)(1 + \sin A)}{(1 + \sin A)(1 - \sin A)} = 7 + 4\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \frac{1 + \sin A}{1 - \sin A} = 7 + 4\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \frac{1 + \sin A + 1 - \sin A}{1 + \sin A - 1 + \sin A} = \frac{7 + 4\sqrt{3} + 1}{7 + 4\sqrt{3} - 1}$$

[যোজন-বিয়োজন করে]

$$\text{বা, } \frac{2}{2 \sin A} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{6 + 4\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sin A} = \frac{4(2 + \sqrt{3})}{2(3 + 2\sqrt{3})}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sin A} = \frac{2(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 2\sqrt{3}} = \frac{2(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \sin A = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sin 60^\circ$$

$$\therefore A = 60^\circ$$

নির্ণেয় মান : $A = 60^\circ$.

$$8৫. \sec \theta + \tan \theta = m \text{ এবং } \sqrt{6} \sin(A + B) = \sqrt{3} = 2 \cos(A - B). \quad [\text{রাজশাহী বোর্ড ২০২০}]$$

$$(ক) \tan(60^\circ - \theta) = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ হলে, } \theta \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

$$(খ) \text{ প্রমাণ কর যে, } \operatorname{cosec} \theta = \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}.$$

$$(গ) \sec 4B \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

৪৫ নং প্রশ্নের উত্তর

$$(ক) \text{ দেওয়া আছে, } \tan(60^\circ - \theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \tan(60^\circ - \theta) = \tan 30^\circ$$

$$\text{বা, } 60^\circ - \theta = 30^\circ$$

$$\text{বা, } 60^\circ - 30^\circ = \theta$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

নির্ণেয় মান : $\theta = 30^\circ$.

$$(খ) \text{ দেওয়া আছে, } \sec \theta + \tan \theta = m$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = m$$

$$\text{বা, } \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = m$$

$$\text{বা, } \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 = m^2 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } \frac{(1 + \sin \theta)^2}{\cos^2 \theta} = m^2$$

$$\text{বা, } \frac{(1 + \sin \theta)^2}{1 - \sin^2 \theta} = m^2$$

$$\text{বা, } \frac{(1 + \sin \theta)(1 + \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} = m^2$$

$$\text{বা, } \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} = m^2$$

$$\text{বা, } \frac{1 + \sin \theta + 1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta + 1 + \sin \theta} = \frac{m^2 + 1}{m^2 - 1} \quad [\text{যোজন-বিয়োজন করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{2}{2 \sin \theta} = \frac{m^2 + 1}{m^2 - 1}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sin \theta} = \frac{m^2 + 1}{m^2 - 1}$$

$$\therefore \operatorname{cosec} \theta = \frac{m^2 + 1}{m^2 - 1} \text{ (প্রমাণিত)}$$

$$\text{লক্ষ কর : প্রশ্নে } \operatorname{cosec} \theta = \frac{m^2 + 1}{m^2 - 1} \text{ এর পরিবর্তে } \operatorname{cosec} \theta = \frac{m^2 + 1}{m^2 - 1} \text{ হবে।}$$

$$(গ) \text{ দেওয়া আছে, } \sqrt{6} \sin(A + B) = \sqrt{3} = 2 \cos(A - B)$$

$$\text{এখন, } \sqrt{6} \sin(A + B) = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \sin(A + B) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$$

$$\text{বা, } \sin(A + B) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}$$

$$\text{বা, } \sin(A + B) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{বা, } \sin(A + B) = \sin 45^\circ$$

$$\text{বা, } \sin(A + B) = 45^\circ \dots\dots\dots (1)$$

এখন, (1) নং সমীকরণ হতে (2) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$$2B = 15^\circ$$

$$\text{বা, } B = \frac{15^\circ}{2}$$

$$\text{আবার, } 2 \cos(A - B) = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \cos(A - B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{বা, } \cos(A - B) = \cos 30^\circ$$

$$\therefore A - B = 30^\circ \dots\dots (2)$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \sec 4B$$

$$= \sec \left(4 \times \frac{15^\circ}{2} \right)$$

$$= \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{নির্ণেয় মান} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$8৬. (i) A = \sin \theta, B = \cos \theta.$$

$$(ii) P = \cos A + \sin A.$$

[যশোর বোর্ড ২০২০]

$$(ক) \sec x = \operatorname{cosec} y = 2 \text{ হলে, } \sin(x + y) \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

$$(খ) P = \sqrt{2} \text{ হলে, প্রমাণ কর যে, } A = 45^\circ.$$

$$(গ) (i) \text{ নং তথ্যের আলোকে প্রমাণ কর যে, } \frac{A + 1 - B}{A - 1 + B} = \frac{B}{1 - A}.$$

৪৬ নং প্রশ্নের উত্তর

$$(ক) \text{ দেওয়া আছে, } \sec x = \operatorname{cosec} y = 2$$

$$\text{এখন, } \sec x = 2$$

$$\text{বা, } \sec x = \sec 60^\circ$$

$$\therefore x = 60^\circ$$

$$\text{আবার, } \operatorname{cosec} y = 2$$

$$\text{বা, } \operatorname{cosec} y = \operatorname{cosec} 30^\circ$$

$$\therefore y = 30^\circ$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \sin(x + y) = \sin(60^\circ + 30^\circ) = \sin 90^\circ = 1$$

নির্ণেয় মান 1.

$$(খ) \text{ দেওয়া আছে, } P = \cos A + \sin A.$$

$$P = \sqrt{2} \text{ হলে, } \cos A + \sin A = \sqrt{2}$$

$$\text{বা, } \cos A = \sqrt{2} - \sin A$$

$$\text{বা, } \cos^2 A = (\sqrt{2} - \sin A)^2 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } \cos^2 A = (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin A + \sin^2 A$$

$$\text{বা, } \cos^2 A = 2 - 2\sqrt{2} \sin A + \sin^2 A$$

$$\text{বা, } 1 - \sin^2 A = 2 - 2\sqrt{2} \sin A + \sin^2 A$$

$$\text{বা, } 2 - 2\sqrt{2} \sin A + \sin^2 A - 1 + \sin^2 A = 0$$

$$\text{বা, } 2 \sin^2 A - 2\sqrt{2} \sin A + 1 = 0$$

$$\text{বা, } (\sqrt{2} \sin A)^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \sin A \cdot 1 + 1^2 = 0$$

$$\text{বা, } (\sqrt{2} \sin A - 1)^2 = 0$$

$$\text{বা, } \sqrt{2} \sin A - 1 = 0 \text{ [বর্গমূল করে]}$$

$$\text{বা, } \sqrt{2} \sin A = 1$$

$$\text{বা, } \sin A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^\circ$$

$$\therefore A = 45^\circ. \text{ (প্রমাণিত)}$$

$$(গ) \text{ দেওয়া আছে, } A = \sin \theta, B = \cos \theta$$

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{A + 1 - B}{A - 1 + B} = \frac{\sin \theta + 1 - \cos \theta}{\sin \theta - 1 + \cos \theta}$$

$$= \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta} - \frac{\cos \theta}{\cos \theta}}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{1}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\cos \theta}} \text{ [লব ও হরকে } \cos \theta \text{ দ্বারা ভাগ করে]}$$

$$= \frac{\sin \theta + 1 - \cos \theta}{\sin \theta - 1 + \cos \theta}$$

$$= \frac{\tan \theta + \sec \theta - 1}{\tan \theta - \sec \theta + 1}$$

$$= \frac{\tan \theta + \sec \theta - 1}{\tan \theta - \sec \theta + (\sec^2 \theta - \tan^2 \theta)}$$

$$= \frac{\tan \theta + \sec \theta - 1}{\tan \theta - \sec \theta + (\sec^2 \theta - \tan^2 \theta)}$$

$$[\because \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1]$$

$$= \frac{\tan \theta + \sec \theta - 1}{(\tan \theta - \sec \theta)(\sec \theta + \tan \theta)(\sec \theta - \tan \theta)}$$

$$= \frac{\tan \theta + \sec \theta - 1}{-(\sec \theta - \tan \theta)(\sec \theta + \tan \theta)(\sec \theta - \tan \theta)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\tan \theta + \sec \theta - 1}{(\sec \theta - \tan \theta)(\sec \theta + \tan \theta - 1)} \\
 &= \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{1}{\frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \\
 &= \frac{B}{1 - A} = \text{ডানপক্ষ} \\
 \therefore \frac{A + 1 - B}{A - 1 + B} &= \frac{B}{1 - A} \text{ (প্রমাণিত)}
 \end{aligned}$$

৪৭. $A = \sin \theta - \cos \theta$, $B = \sin \theta + \cos \theta$.

[কুমিল্লা বোর্ড ২০২০]

(ক) $\sin A = \frac{4}{5}$ হলে $\tan A$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\frac{A+1}{B-1} = \frac{1+\sin \theta}{\cos \theta}$

(গ) $B = \sqrt{2}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

৪৭ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\sin A = \frac{4}{5}$

বা, $\sin^2 A = \left(\frac{4}{5}\right)^2$ [বর্গ করে]

বা, $\sin^2 A = \frac{16}{25}$

বা, $1 - \cos^2 A = \frac{16}{25}$ [$\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1$]

বা, $\cos^2 A = 1 - \frac{16}{25} = \frac{25-16}{25} = \frac{9}{25} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$

$\therefore \cos A = \frac{3}{5}$

এখন, $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$

নির্ণেয় মান $\frac{4}{3}$.

(খ) দেওয়া আছে, $A = \sin \theta - \cos \theta$ এবং $B = \sin \theta + \cos \theta$

$$\begin{aligned}
 \text{বামপক্ষ} &= \frac{A+1}{B-1} = \frac{\sin \theta - \cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta - 1} = \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{\cos \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta}}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\cos \theta} - \frac{1}{\cos \theta}} \\
 &= \frac{\tan \theta - 1 + \sec \theta}{\tan \theta + 1 - \sec \theta} \\
 &= \frac{\tan \theta + \sec \theta - (\sec^2 \theta - \tan^2 \theta)}{\tan \theta - \sec \theta + 1} \\
 &= \frac{(\sec \theta + \tan \theta) - (1 - \sec \theta + \tan \theta)}{1 - \sec \theta + \tan \theta} = \sec \theta + \tan \theta \\
 &= \frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = \text{ডানপক্ষ}
 \end{aligned}$$

[লব ও হরকে $\cos \theta$ দ্বারা ভাগ করে পাই]

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\tan \theta - 1 + \sec \theta}{\tan \theta + 1 - \sec \theta} \\
 &= \frac{\tan \theta + \sec \theta - (\sec^2 \theta - \tan^2 \theta)}{\tan \theta - \sec \theta + 1}
 \end{aligned}$$

[$\because \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$]

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\sec \theta + \tan \theta) - (1 - \sec \theta + \tan \theta)}{1 - \sec \theta + \tan \theta} = \sec \theta + \tan \theta \\
 &= \frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = \text{ডানপক্ষ}
 \end{aligned}$$

$\therefore \frac{A+1}{B-1} = \frac{1+\sin \theta}{\cos \theta}$. (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে, $B = \sin \theta + \cos \theta$

$B = \sqrt{2}$ হলে, $\cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2}$

বা, $\cos \theta = \sqrt{2} - \sin \theta$

বা, $\cos^2 \theta = (\sqrt{2} - \sin \theta)^2$ [বর্গ করে]

বা, $\cos^2 \theta = (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \theta + \sin^2 \theta$

বা, $\cos^2 \theta = 2 - 2\sqrt{2} \sin \theta + \sin^2 \theta$

বা, $1 - \sin^2 \theta = 2 - 2\sqrt{2} \sin \theta + \sin^2 \theta$

বা, $2 - 2\sqrt{2} \sin \theta + \sin^2 \theta$

বা, $2 \sin^2 \theta - 2\sqrt{2} \sin \theta + 1 = 0$

বা, $(\sqrt{2} \sin \theta)^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \sin \theta \cdot 1 + 1^2 = 0$

বা, $(\sqrt{2} \sin \theta - 1)^2 = 0$

বা, $\sqrt{2} \sin \theta - 1 = 0$ [বর্গমূল করে]

বা, $\sqrt{2} \sin \theta = 1$

বা, $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\sin \theta = \sin 45^\circ$

$\therefore \theta = 45^\circ$.

৪৮. $f(z) = \sin z$ এবং $g(z) = \cos z$.

[চট্টগ্রাম বোর্ড ২০২০]

(ক) $\tan A = \frac{3}{4}$ হলে, দেখাও যে, $\sin A \cdot \cos A = \frac{12}{13}$.

(খ) প্রমাণ কর যে, $\frac{f(A)}{1-g(A)} + \frac{1-g(A)}{f(A)} = \frac{2}{f(A)}$.

(গ) $2\left\{g\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}^2 + 3f\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) - 3 = 0$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর।

৪৮ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\tan A = \frac{3}{4}$

বা, $\tan^2 A = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ [বর্গ করে]

আবার, $\tan A = \frac{3}{4}$

বা, $\sec^2 A - 1 = \frac{9}{16}$

বা, $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{3}{4}$

বা, $\sec^2 A = 1 + \frac{9}{16}$

বা, $\sin A = \frac{3}{4} \times \cos A$

বা, $\sec^2 A = \frac{16+9}{16}$

বা, $\sin A = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}$

বা, $\sec^2 A = \frac{25}{16}$

$\therefore \sin A = \frac{3}{5}$

বা, $\sec A = \sqrt{\frac{25}{16}}$ [বর্গমূল করে]

বা, $\sec A = \frac{5}{4}$ বা, $\frac{1}{\cos A} = \frac{5}{4}$

$\therefore \cos A = \frac{4}{5}$

বামপক্ষ $= \sin A \cdot \cos A = \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{25} = \text{ডানপক্ষ}$

$\therefore \sin A \cdot \cos A = \frac{12}{25}$ (দেখানো হলো)

(খ) দেওয়া আছে, $f(z) = \sin z$

$\therefore f(A) = \sin A$

এবং $g(z) = \cos z$

$\therefore g(A) = \cos A$

বামপক্ষ $= \frac{f(A)}{1-g(A)} + \frac{1-g(A)}{f(A)}$

$= \frac{\sin A}{1-\cos A} + \frac{1-\cos A}{\sin A} = \frac{\sin^2 A + (1-\cos A)^2}{\sin A (1-\cos A)}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin^2 A + 1 - 2 \cos A + \cos^2 A}{\sin A (1 - \cos A)} \\
 &= \frac{1 + 1 - 2 \cos A}{\sin A (1 - \cos A)} [\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1] \\
 &= \frac{2 - 2 \cos A}{\sin A (1 - \cos A)} = \frac{2(1 - \cos A)}{\sin A (1 - \cos A)} \\
 &= \frac{2}{\sin A} = \frac{2}{f(A)} = \text{ডানপক্ষ} \\
 \therefore \frac{f(A)}{1 - g(A)} + \frac{1 - g(A)}{f(A)} &= \frac{2}{f(A)} \cdot (\text{প্রমাণিত})
 \end{aligned}$$

(গ) দেওয়া আছে, $f(z) = \sin z$ এবং $g(z) = \cos z$

$$\text{এখন, } 2\left\{g\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right\}^2 + 3f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - 3 = 0$$

$$\text{বা, } 2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right\}^2 + 3\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - 3 = 0$$

$$\text{বা, } 2\sin^2 \theta + 3\cos \theta - 3 = 0$$

$$\text{বা, } 2(1 - \cos^2 \theta) + 3\cos \theta - 3 = 0$$

$$\text{বা, } 2 - 2\cos^2 \theta + 3\cos \theta - 3 = 0$$

$$\text{বা, } 2\cos^2 \theta + 3\cos \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } (2\cos^2 \theta - 3\cos \theta + 1) = 0$$

$$\text{বা, } 2\cos^2 \theta - 3\cos \theta + 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2\cos^2 \theta - 2\cos \theta - \cos \theta + 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2\cos \theta (\cos \theta - 1) - 1(\cos \theta - 1) = 0$$

$$\text{বা, } (2\cos \theta - 1)(\cos \theta - 1) = 0$$

$$\text{হয়, } 2\cos \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2\cos \theta = 1$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \cos = \cos 60^\circ$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

নির্ণেয় মান : $\theta = 0^\circ, 60^\circ$.

$$\text{অথবা, } \cos \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } \cos \theta = 1$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \cos 0^\circ$$

$$\therefore \theta = 0^\circ$$

৪৯. $P = \sec A + \tan A$, $Q = \sec A - \tan A$ এবং $C = \frac{\operatorname{cosec} A + 1}{\operatorname{cosec} A - 1}$ [সিলেট বোর্ড ২০২০]

(ক) $\sec \theta = 3$ হলে, $\tan \theta$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $P^2 = C$.

(গ) $\frac{P}{Q} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$ এবং A সূক্ষ্মকোণ হলে, A -এর মান নির্ণয় কর।

৪৯ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\sec \theta = 3$

$$\text{বা, } \sec^2 \theta = 3^2 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } 1 + \tan^2 \theta = 9$$

$$\text{বা, } \tan^2 \theta = 9 - 1$$

$$\text{বা, } \tan^2 \theta = 8$$

$$\text{বা, } \tan \theta = \pm \sqrt{8}$$

$$\therefore \tan \theta = \pm 2\sqrt{2}$$

নির্ণেয় মান $\pm 2\sqrt{2}$.

(খ) দেওয়া আছে, $P = \sec A + \tan A$, এবং $C = \frac{\operatorname{cosec} A + 1}{\operatorname{cosec} A - 1}$

$$\text{বামপক্ষ} = P^2$$

$$= (\sec A + \tan A)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1 + \sin A}{\cos A}\right)^2$$

$$= \frac{(1 + \sin A)^2}{\cos^2 A} = \frac{(1 + \sin A)^2}{1 - \sin^2 A}$$

$$= \frac{(1 + \sin A)^2}{(1 + \sin A)(1 - \sin A)} = \frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}$$

$$1 + \frac{1}{\operatorname{cosec} A} = \frac{\operatorname{cosec} A + 1}{\operatorname{cosec} A}$$

$$1 - \frac{1}{\operatorname{cosec} A} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec} A + 1}{\operatorname{cosec} A} \times \frac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A - 1}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec} A + 1}{\operatorname{cosec} A - 1} = C = \text{ডানপক্ষ}$$

$\therefore P^2 = C$. (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে, $P = \sec A + \tan A$, $Q = \sec A - \tan A$

$$\text{এখন, } \frac{P}{Q} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{\sec A + \tan A}{\sec A - \tan A} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{\sec A + \tan A + \sec A - \tan A}{\sec A + \tan A - \sec A + \tan A} = \frac{2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}} \quad [\text{যোজন-বিয়োজন করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{2 \sec A}{2 \tan A} = \frac{4}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{\sec A}{\tan A} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\cos A} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\cos A} \times \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sin A} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \sin A = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sin 60^\circ$$

$$\therefore A = 60^\circ$$

$$\text{নির্ণেয় মান } 60^\circ.$$

৫০. (i) $\tan \theta = \frac{4}{3}$; (ii) $x = \operatorname{cosec} \theta$, $y = \sec \theta$.

[বরিশাল বোর্ড ২০২০]

(ক) $\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta = \frac{3}{5}$ হলে, $\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\frac{\cot^2 \theta - \cos^2 \theta}{\operatorname{cosec}^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{81}{881}$.

(গ) $2\frac{1}{x^2} + 3\frac{1}{y} = 3$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। (যখন θ সূক্ষ্মকোণ)।

৫০ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta = \frac{3}{5}$

$$\text{আমরা জানি, } \operatorname{cosec}^2 \theta + \cot^2 \theta = 1$$

$$\text{বা, } (\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta)(\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta) = 1$$

$$\text{বা, } (\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta) \times \frac{3}{5} = 1$$

$$\therefore \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta = \frac{5}{3}$$

নির্ণেয় মান $\frac{5}{3}$.

(খ) দেওয়া আছে, $\tan \theta = \frac{4}{3}$

বা, $\tan \theta = \left(\frac{4}{3}\right)^2$ [বর্গ করে]

বা, $\sec^2 \theta - 1 = \frac{16}{9}$

বা, $\sec^2 \theta = 1 + \frac{16}{9}$

বা, $\sec^2 \theta = \frac{9+16}{9}$

বা, $\sec^2 \theta = \frac{25}{9}$

বা, $\frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{25}{9}$

বা, $\cos \theta = \frac{9}{25}$

বামপক্ষ = $\frac{\cot^2 \theta - \cos^2 \theta}{\operatorname{cosec}^2 \theta + \sin^2 \theta}$

$\frac{\frac{1}{\tan^2 \theta} - \cos^2 \theta}{1 + \cot^2 \theta + 1 - \cot^2 \theta}$

$\frac{\frac{1}{\tan^2 \theta} - \cos^2 \theta}{1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} + 1 - \cos^2 \theta}$

$\frac{\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} - \frac{9}{25}}{2 + \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} - \frac{9}{25}} = \frac{\frac{16}{9} - \frac{9}{25}}{2 + \frac{16}{9} - \frac{9}{25}}$

$\frac{\frac{9}{25} - \frac{9}{25}}{2 + \frac{9}{25} - \frac{9}{25}} = \frac{\frac{225 - 144}{400}}{\frac{81}{400}}$

$\frac{81}{400} \times \frac{400}{881} = \frac{81}{881}$ [ডানপক্ষ]

$\therefore \frac{\cot^2 \theta - \cos^2 \theta}{\operatorname{cosec}^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{81}{881}$ (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে, $x = \operatorname{cosec} \theta$ এবং $y = \sec \theta$

এখন, $2\frac{1}{x^2} + 3\frac{1}{y} = 3$

বা, $2\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 \theta} + 3\frac{1}{\sec \theta} = 3$

বা, $2\sin^2 \theta + 3\cos \theta = 3$

বা, $2(1 - \cos^2 \theta) + 3\cos \theta = 3$

বা, $2 - 2\cos^2 \theta + 3\cos \theta = 3$

বা, $-2\cos^2 \theta + 3\cos \theta + 2 - 3 = 0$

বা, $-2\cos^2 \theta + 3\cos \theta - 1 = 0$

বা, $-(2\cos^2 \theta - 3\cos \theta + 1) = 0$

বা, $2\cos^2 \theta - 3\cos \theta + 1 = 0$

বা, $2\cos^2 \theta - 2\cos \theta - \cos \theta + 1 = 0$

বা, $2\cos \theta (\cos \theta - 1) - 1(\cos \theta - 1) = 0$

বা, $(2\cos \theta - 1)(\cos \theta - 1) = 0$

হয়, $2\cos \theta = 1$ বা $\cos \theta = 1$

বা, $2\cos \theta = 1$

অথবা, $\cos \theta - 1 = 0$

বা, $\cos \theta = 1$

বা, $\cos \theta = \cos 0^\circ$

বা, $\cos \theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos \theta = \cos 60^\circ$

$\therefore \theta = 60^\circ$

নির্ণেয় মান $\theta = 60^\circ$.

$\therefore \theta = 0^\circ$ যা গ্রহণযোগ্য নয় কারণ θ সূক্ষ্মকোণ

৫১. $\cot \theta + \cos \theta = p$ এবং $\cot \theta - \cos \theta = q$.

[দিনাজপুর বোর্ড ২০২০]

(ক) দেখাও যে, $pq = \cot^2 \theta \cos^2 \theta$.

(খ) প্রমাণ কর যে, $p^2 - q^2 = 4\sqrt{pq}$.

(গ) $\frac{p}{q} = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

৫১ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\cot \theta + \cos \theta = p$ এবং $\cot \theta - \cos \theta = q$

বামপক্ষ = $pq = (\cot \theta + \cos \theta)(\cot \theta - \cos \theta)$

$= \cot^2 \theta - \cos^2 \theta = \cot^2 \theta - \cot^2 \theta \cdot \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \cdot \sin^2 \theta$

$= \cot^2 \theta - \cot^2 \theta \cdot \sin^2 \theta$

$= \cot^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) = \cot^2 \theta \cdot \cos^2 \theta = \text{ডানপক্ষ}$

$\therefore pq = \cot^2 \theta \cdot \cos^2 \theta$ (দেখানো হলো)

(খ) দেওয়া আছে, $\cot \theta + \cos \theta = p$ এবং $\cot \theta - \cos \theta = q$

'ক' হতে প্রাপ্ত, $pq = \cot^2 \theta \cdot \cos^2 \theta$

বামপক্ষ = $p^2 - q^2 = (\cot \theta + \cos \theta)^2 - (\cot \theta - \cos \theta)^2$

$= 4\sqrt{\cot^2 \theta \cos^2 \theta} [\because (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab]$

$= 4\sqrt{\cot^2 \theta \cos^2 \theta}$

$= 4\sqrt{pq} [\because pq = \cot^2 \theta \cdot \cos^2 \theta]$

$= \text{ডানপক্ষ}$

$\therefore p^2 - q^2 = 4\sqrt{pq}$ (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে, $\cot \theta + \cos \theta = p$ এবং $\cot \theta - \cos \theta = q$

এখন, $\frac{p}{q} = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\cot \theta + \cos \theta}{\cot \theta - \cos \theta} = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\cot \theta + \cos \theta + \cot \theta - \cos \theta}{\cot \theta + \cos \theta - \cot \theta + \cos \theta} = \frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2\cot \theta}{2\cos \theta} = \frac{4}{2\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\cot \theta}{\cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{1}{\sin \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$

$\therefore \theta = 60^\circ$

নির্ণেয় মান : $\theta = 60^\circ$.

৫২. $P = \operatorname{cosec} \beta - 1$, $Q = \operatorname{cosec} \beta + 1$ এবং $R = \sec \alpha - \tan \alpha$.

[ময়মনসিংহ বোর্ড ২০২০]

(ক) $C = 30^\circ$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos 2C = 2\cos^2 C - 1$.

(খ) প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{Q}{P}} = \frac{1}{\sec \beta - \tan \beta}$

(গ) $R = \frac{1}{x}$ হলে $\operatorname{cosec} \alpha$ -এর মান নির্ণয় কর।

৫২ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $C = 30^\circ$

বামপক্ষ = $\cos 2C = \cos (2 \times 30^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

ডানপক্ষ = $2 \cos^2 C - 1 = 2 \cos^2 30^\circ - 1$
 $= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - 1 = 2 \times \frac{3}{4} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore \cos 2C = 2 \cos^2 C - 1$. (প্রমাণিত)

(খ) দেওয়া আছে, $P = \operatorname{cosec} \beta - 1$ এবং $Q = \operatorname{cosec} \beta + 1$

বামপক্ষ = $\sqrt{\frac{Q}{P}} = \sqrt{\frac{\operatorname{cosec} \beta + 1}{\operatorname{cosec} \beta - 1}}$
 $= \sqrt{\frac{(\operatorname{cosec} \beta + 1)(\operatorname{cosec} \beta + 1)}{(\operatorname{cosec} \beta - 1)(\operatorname{cosec} \beta + 1)}}$
 $= \sqrt{\frac{(\operatorname{cosec} \beta + 1)^2}{\operatorname{cosec}^2 \beta - 1}}$
 $= \sqrt{\frac{(\operatorname{cosec} \beta + 1)^2}{\cot^2 \beta}}$
 $= \frac{\operatorname{cosec} \beta + 1}{\cot \beta} = \frac{\operatorname{cosec} \beta}{\cot \beta} = \frac{1}{\cot \beta}$
 $= \frac{1}{\frac{\cos \beta}{\sin \beta}} + \tan \beta = \frac{1}{\sin \beta} \times \frac{\sin \beta}{\cos \beta} + \tan \beta$
 $= \frac{1}{\cos \beta} + \tan \beta = \sec \beta + \tan \beta$
 $= \frac{(\sec \beta + \tan \beta)(\sec \beta - \tan \beta)}{\sec \beta - \tan \beta}$
 $= \frac{\sec^2 \beta - \tan^2 \beta}{\sec \beta - \tan \beta} = \frac{1}{\sec \beta - \tan \beta}$
 $[\because \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1]$
 $= \text{ডানপক্ষ}$

$\therefore \sqrt{\frac{Q}{P}} = \frac{1}{\sec \beta - \tan \beta}$. (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে, $R = \sec \alpha - \sec \alpha - \tan \alpha$ $R = \frac{1}{x}$ হলে,

$\sec \alpha - \tan \alpha = \frac{1}{x}$

বা, $\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{x}$

বা, $\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{x}$

বা, $\frac{(1 - \sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{x^2}$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{(1 - \sin \alpha)^2}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{x^2}$

বা, $\frac{(1 - \sin \alpha)^2}{(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)} = \frac{1}{x^2}$

বা, $\frac{(1 - \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)}{(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)} = \frac{1}{x^2}$

বা, $\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{1}{x^2}$

বা, $\frac{1 - \sin \alpha + 1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha - 1 - \sin \alpha} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{-2 \sin \alpha} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$

বা, $\frac{1}{-\sin \alpha} = \frac{x^2 + 1}{-(x^2 - 1)}$

বা, $\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

$\therefore \operatorname{cosec} \alpha = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

নির্ণেয় মান $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

৫৩. $2 \cos (A + B) = 1 = 2 \sin (A - B)$,
 $\cot \theta + \cos \theta = m$ এবং $\cot \theta - \cos \theta = n$.

[ঢাকা বোর্ড ২০১৯]

(ক) $\tan C = \frac{3}{4}$ হলে, $\sec C$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $\operatorname{cosec} 2A$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) প্রমাণ কর যে, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$.

৫৩ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\tan C = \frac{3}{4}$

বা, $\tan^2 C = \left(\frac{3}{4} \right)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\tan^2 C = \frac{9}{16}$

বা, $\sec^2 C - 1 = \frac{9}{16}$

বা, $\sec^2 C = \frac{9}{16} + 1 = \frac{9 + 16}{16} = \frac{25}{16}$

বা, $\sec C = \sqrt{\frac{25}{16}}$ [বর্গমূল করে]

$\therefore \sec C = \frac{5}{4}$

নির্ণেয় মান $\frac{5}{4}$.

► বিকল্প পদ্ধতি

দেওয়া আছে, $\tan C = \frac{3}{4}$

অর্থাৎ, বিপরীত বাহু $AB = 3$

সন্নিহিত বাহু, $BC = 4$

\therefore অতিভুজ, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$
 $= \sqrt{3^2 + 4^2}$
 $= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

এখন, $\sec C = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{4}$

নির্ণেয় মান $\frac{5}{4}$.

(খ)

দেওয়া আছে,

$2 \cos (A + B) = 1$

বা, $\cos (A + B) = \frac{1}{2}$

বা, $\cos (A + B) = \cos 60^\circ$

$\therefore A + B = 60^\circ$ (1)

(1) ও (2) নং যোগ করে পাই,

$A + B + A - B = 60^\circ + 30^\circ$

বা, $2A = 90^\circ$

আবার, $2 \sin (A - B) = 1$

বা, $\sin (A - B) = \frac{1}{2}$

বা, $\sin (A - B) = \sin 30^\circ$

$\therefore A - B = 30^\circ$ (2)

বা, $A = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

$\therefore A = 45^\circ$

প্রদত্ত রাশি = $\operatorname{cosec} 2A = \operatorname{cosec} (2 \times 45^\circ) = \operatorname{cosec} 90^\circ = 1$
নির্ণেয় মান 1.

(গ) দেওয়া আছে, $\cot \theta + \cos \theta = m$ এবং $\cot \theta - \cos \theta = n$.
বামপক্ষ = $m^2 - n^2$

$$\begin{aligned} &= (\cot \theta + \cos \theta)^2 - (\cot \theta - \cos \theta)^2 \\ &= 4 \cot \theta \cos \theta \quad [\because (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab] \\ &= 4 \sqrt{\cot^2 \theta \cos^2 \theta} = 4 \sqrt{\cot^2 \theta (1 - \sin^2 \theta)} \\ &= 4 \sqrt{\cot^2 \theta - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \times \sin^2 \theta} \\ &= 4 \sqrt{\cot^2 \theta - \cos^2 \theta} \\ &= 4 \sqrt{(\cot \theta - \cos \theta)(\cot \theta + \cos \theta)} \\ &= 4 \sqrt{mn} = \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

$\therefore m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$. (প্রমাণিত)

৫৪. $x = \operatorname{cosec} \theta$, $y = \cot \theta$ এবং $z = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$, যখন θ সূক্ষ্মকোণ।
[রাজশাহী বোর্ড ২০১৯]

(ক) $\sin (A + 60^\circ) = 1$ হলে, A এর মান নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\sqrt{z} = x - y$.

(গ) $2x^2 + y = 5$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর।

৫৪ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) $\sin (A + 60^\circ) = 1$

বা, $\sin (A + 60^\circ) = \sin 90^\circ$

বা, $A + 60^\circ = 90^\circ$

বা, $A = 90^\circ - 60^\circ$

$\therefore A = 30^\circ$

নির্ণেয় মান 30° .

(খ) দেওয়া আছে, $x = \operatorname{cosec} \theta$, $y = \cot \theta$ এবং $z = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \sqrt{z} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \\ &= \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}} \\ &= \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)^2}{1 - \cos^2 \theta}} \quad [\text{লব ও হরকে } \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \text{ দ্বারা গুণ করে}] \\ &= \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)^2}{1 - \cos^2 \theta}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \operatorname{cosec} \theta - \cot \theta = x - y = \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{z} = x - y$. (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে, $x = \operatorname{cosec} \theta$ এবং $y = \cot \theta$

এখানে, $2x^2 + y = 5$

বা, $2 \operatorname{cosec}^2 \theta + \cot \theta = 5$

বা, $2(1 + \cot^2 \theta) + \cot \theta = 5$

বা, $2 + 2 \cot^2 \theta + \cot \theta - 5 = 0$

বা, $2 \cot^2 \theta - 2 \cot \theta + 3 \cot \theta - 3 = 0$

বা, $2 \cot \theta (\cot \theta - 1) + 3(\cot \theta - 1) = 0$

বা, $2 \cot^2 \theta + \cot \theta - 3 = 0$

বা, $(\cot \theta - 1)(2 \cot \theta + 3) = 0$

হয়, $\cot \theta - 1 = 0$

বা, $\cot \theta = 1$

বা, $\cot \theta = \cot 45^\circ$

$\therefore \theta = 45^\circ$

অথবা, $2 \cot \theta + 3 = 0$

ev, $2 \cot \theta = -3$

বা, $\cot \theta = -\frac{3}{2}$

নির্ণেয় মান 45° .

৫৫. $\angle C = 60^\circ$ এবং $\cot B = \sqrt{3}$.

[যশোর বোর্ড ২০১৯]

(ক) $\operatorname{cosec} \theta = 2$ হলে $\tan \theta$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের তথ্য অনুসারে প্রমাণ কর যে, $\frac{\operatorname{cosec}^2 B + \sec^2 B}{\operatorname{cosec}^2 B - \sec^2 B} = 2$.

(গ) $4 \sin^2 \theta - (2 + 2\sqrt{3}) \sin \theta + \sqrt{3} = 0$ সমীকরণটি সমাধান করে
উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, $\theta = \frac{1}{2} \angle C$ এবং $\theta = \angle C$.

৫৫ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec} \theta = 2$

বা, $\operatorname{cosec} \theta = \operatorname{cosec} 30^\circ$

$\therefore \theta = 30^\circ$

$\therefore \tan \theta = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

নির্ণেয় মান: $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(খ) দেওয়া আছে, $\cot B = \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \frac{\operatorname{cosec}^2 B + \sec^2 B}{\operatorname{cosec}^2 B - \sec^2 B} \\ &= \frac{1 + \cot^2 B + (1 + \tan^2 B)}{1 + \cot^2 B - (1 + \tan^2 B)} \\ &= \frac{1 + \cot^2 B + 1 + \tan^2 B}{1 + \cot^2 B - 1 - \tan^2 B} \\ &= \frac{2 + \cot^2 B + \tan^2 B}{\cot^2 B - \tan^2 B} = \frac{2 + \cot^2 B + \frac{1}{\cot^2 B}}{\cot^2 B - \frac{1}{\cot^2 B}} \\ &= \frac{2 + (\sqrt{3})^2 + \frac{1}{(\sqrt{3})^2}}{(\sqrt{3})^2 - \frac{1}{(\sqrt{3})^2}} = \frac{2 + 3 + \frac{1}{3}}{3 - \frac{1}{3}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{5 + \frac{1}{3}}{3 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{15}{3} + \frac{1}{3}}{\frac{9}{3} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{16}{3}}{\frac{8}{3}} \\ &= \frac{16}{3} \times \frac{3}{8} = 2 = \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

$\therefore \frac{\operatorname{cosec}^2 B + \sec^2 B}{\operatorname{cosec}^2 B - \sec^2 B} = 2$. (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে, $\angle C = 60^\circ$

এখন, $4 \sin^2 \theta - (2 + 2\sqrt{3}) \sin \theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $4 \sin^2 \theta - 2 \sin \theta - 2\sqrt{3} \sin \theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $2 \sin \theta (2 \sin \theta - 1) - \sqrt{3} (2 \sin \theta - 1) = 0$

বা, $(2 \sin \theta - 1)(2 \sin \theta - \sqrt{3}) = 0$

হয়, $2 \sin \theta - 1 = 0$

বা, $2 \sin \theta = 1$

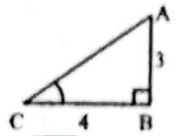
বা, $\sin \theta = \frac{1}{2}$

বা, $\sin \theta = \sin 30^\circ$

বা, $\theta = 30^\circ$

বা, $\theta = \frac{1}{2} \times 60^\circ \therefore \theta = \angle C$

$\therefore \theta = \frac{1}{2} \angle C$ এবং $\theta = \angle C$. (দেখানো হলো)



৫৬. $a = \sin \theta$, $b = \cos \theta$ এবং $A = 30^\circ$

[কুমিল্লা বোর্ড ২০১৯]

(ক) $(\cos A - \sin A)$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $a^2 + a^4 = 1$ হলে উদ্দীপকের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^4 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1$.

(গ) সমাধান কর : $\sqrt{2}a^2 - (1 + \sqrt{2})a + 1 = 0$, যখন $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

৫৬ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $A = 30^\circ$

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= \cos A - \sin A \\ &= \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{নির্ণেয় মান} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

(খ) দেওয়া আছে, $a = \sin \theta$ এবং $b = \cos \theta$

$$a^2 + a^4 = 1 \text{ হলে, } \sin^2 \theta + \sin^4 \theta = 1$$

$$\text{বা, } \sin^4 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\therefore \sin^4 \theta = \cos^2 \theta$$

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \left(\frac{a}{b}\right)^4 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^4 - \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^2 = \frac{\sin^4 \theta}{\cos^4 \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta}{\cos^4 \theta} - \tan^2 \theta [\because \sin^4 \theta = \cos^2 \theta] \\ &= \frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta = \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1 = \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

$$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^4 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1. \text{ (প্রমাণিত)}$$

(গ) দেওয়া আছে, $a = \sin \theta$

$$\text{এখন, } \sqrt{2}a^2 - (1 + \sqrt{2})a + 1 = 0, \text{ যখন } 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ.$$

$$\text{বা, } \sqrt{2} \sin^2 \theta - (1 + \sqrt{2}) \sin \theta + 1 = 0$$

$$\text{বা, } \sqrt{2} \sin^2 \theta - \sin \theta - \sqrt{2} \sin \theta + 1 = 0$$

$$\text{বা, } \sin \theta (\sqrt{2} \sin \theta - 1) - 1 (\sqrt{2} \sin \theta - 1) = 0$$

$$\text{বা, } (\sqrt{2} \sin \theta - 1) (\sin \theta - 1) = 0$$

$$\text{হয়, } \sqrt{2} \sin \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } \sqrt{2} \sin \theta = 1$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

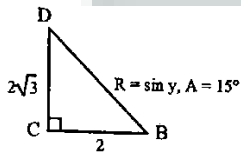
$$\text{বা, } \sin \theta = \sin 45^\circ$$

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

$$\text{নির্ণেয় সমাধান : } \theta = 45^\circ, 90^\circ.$$

$$\begin{aligned} \text{অথবা, } \sin \theta - 1 &= 0 \\ \text{বা, } \sin \theta &= 1 \\ \text{বা, } \sin \theta &= \sin 90^\circ \\ \therefore \theta &= 90^\circ \end{aligned}$$

৫৭.



[চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৯]

(ক) $\tan x = \sqrt{3}$ হলে $\sin x$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $D = p - q$, $B = p + q$ হলে p ও q এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $4R^2 - (2 + 2\sqrt{3})R + \sqrt{3} = 0$ হলে দেখাও যে, $y = 4A$ অথবা $y = 2A$.

৫৭ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\tan x = \sqrt{3}$

$$\text{বা, } \tan x = \tan 60^\circ$$

$$\therefore x = 60^\circ$$

$$\therefore \sin x = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{নির্ণেয় মান} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(খ) দেওয়া আছে, BCD-সমকোণী ত্রিভুজে $C = 90^\circ$, $BC = 2$,

$$CD = 2\sqrt{3}, D = p - q \text{ এবং } B = p + q$$

$$\text{এখন, } \tan D = \frac{BC}{CD} = \frac{2}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \tan D = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ$$

$$\text{বা, } D = 30^\circ$$

$$\text{বা, } p - q = 30^\circ \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{এবং } \tan B = \frac{CD}{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$$

$$\text{বা, } B = 60^\circ$$

$$\text{বা, } p + q = 60^\circ \dots\dots\dots (2)$$

(1) ও (2) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$$p - q + p + q = 30 + 60^\circ$$

$$\text{বা, } 2p = 90^\circ$$

$$\text{বা, } p = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

(2)নং সমীকরণে $p = 45^\circ$ বসিয়ে পাই,

$$45^\circ + q = 60^\circ$$

$$\text{বা, } q = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$$

$$\text{নির্ণেয় মান : } p = 45^\circ \text{ এবং } q = 15^\circ.$$

(গ) দেওয়া আছে, $R = \sin y$ এবং $A = 15^\circ$.

$$\text{এখানে, } 4R^2 - (2 + 2\sqrt{3})R + \sqrt{3} = 0$$

$$\text{বা, } 4 \sin^2 y - (2 + 2\sqrt{3}) \sin y + \sqrt{3} = 0$$

$$\text{বা, } 4 \sin^2 y - 2 \sin y - 2\sqrt{3} \sin y + \sqrt{3} = 0$$

$$\text{বা, } 2 \sin y (2 \sin y - 1) - \sqrt{3} (2 \sin y - 1) = 0$$

$$\text{বা, } (2 \sin y - 1) (2 \sin y - \sqrt{3}) = 0$$

$$\text{হয়, } 2 \sin y - 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \sin y = 1$$

$$\text{বা, } \sin y = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \sin y = \sin 30^\circ$$

$$\text{বা, } y = 30^\circ$$

$$\text{বা, } y = 2 \times 15^\circ$$

$$\therefore y = 2A$$

$$\text{অথবা, } 2 \sin y - \sqrt{3} = 0$$

$$\text{বা, } 2 \sin y = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{বা, } \sin y = \sin 60^\circ$$

$$\text{বা, } y = 60^\circ$$

$$\text{বা, } y = 4 \times 15^\circ$$

$$\text{বা, } y = 4A$$

$$\therefore y = 4A$$

$$\therefore y = 4A \text{ অথবা } y = 2A. \text{ (দেখানো হলো)}$$

৫৮. $A = \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta$, $B = \operatorname{cosec} \theta - \cot \theta$ এবং $C = \frac{\sec \theta + 1}{\sec \theta - 1}$.
[সিলেট বোর্ড ২০১৯]

(ক) $\sin B = \frac{1}{3}$ হলে $\tan B$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $A^2 = C$.

(গ) $\frac{A}{B} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$ এবং θ সূক্ষ্মকোণ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর।

৫৮ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\sin B = \frac{1}{3}$

এখন, $\cos^2 B = 1 - \sin^2 B$

বা, $\cos^2 B = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{9-1}{9} = \frac{8}{9}$

বা, $\cos B = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

নির্ণেয় মান $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(খ) দেওয়া আছে, $A = \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta$

এবং $C = \frac{\sec \theta + 1}{\sec \theta - 1}$

বামপক্ষ = A^2

$= (\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta)^2$

$= \left(\frac{1}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)^2$

$= \left(\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}\right)^2 = \frac{(1 + \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}$

$= \frac{(1 + \cos \theta)^2}{1 - \cos \theta} = \frac{(1 + \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}$

$= \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{1 + \frac{1}{\sec \theta}}{1 - \frac{1}{\sec \theta}} = \frac{\sec \theta + 1}{\sec \theta - 1}$

$= \frac{\sec \theta + 1}{\sec \theta - 1} \times \frac{\sec \theta}{\sec \theta} = \frac{\sec \theta + 1}{\sec \theta - 1} = C = \text{ডানপক্ষ}$

$\therefore A^2 = C$ (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে, $A = \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta$ এবং $B = \operatorname{cosec} \theta - \cot \theta$

এখন, $\frac{A}{B} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$

বা, $\frac{\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta}{\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$

বা, $\frac{\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta + \operatorname{cosec} \theta - \cot \theta}{\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta - \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta} = \frac{2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2 \operatorname{cosec} \theta}{2 \cot \theta} = \frac{4}{2\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\operatorname{cosec} \theta}{\cot \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{1}{\sin \theta} \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{1}{\cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\sec \theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\sec \theta = \sec 30^\circ$

$\therefore \theta = 30^\circ$

নির্ণেয় মান 30° .

৫৯. $\sec B = x$, $\tan B = y$ এবং $\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{4}{3}$, যেখানে A ও B প্রত্যেকে সূক্ষ্মকোণ।

[দিনাজপুর বোর্ড ২০১৯]

(ক) $\operatorname{cosec} \theta = 2$ হলে $\tan \theta$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $\frac{x-y}{x+y} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$ হলে দেখাও যে, $B = 60^\circ$.

(গ) উদ্দীপকের তথ্য হতে $(\sin A + \cos A)$ এর মান নির্ণয় কর।

৫৯ নং প্রশ্নের উত্তর

(ক) দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec} \theta = 2$

বা, $\operatorname{cosec} \theta = \operatorname{cosec} 30^\circ$

$\therefore \theta = 30^\circ$

$\therefore \tan \theta = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

নির্ণেয় মান: $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(খ) দেওয়া আছে, $\sec B = x$ এবং $\tan B = y$

এখন, $\frac{x-y}{x+y} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$

বা, $\frac{\sec B - \tan B}{\sec B + \tan B} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$

বা, $\frac{\sec B - \tan B + \sec B + \tan B}{\sec B - \tan B - \sec B - \tan B} = \frac{2-\sqrt{3} + \sqrt{3} + 2}{2-\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{\sec B}{\tan B} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{1}{\frac{\cos B}{\sin B}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{1}{\cos B} \times \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{1}{\sin B} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\operatorname{cosec} B = \frac{2}{\sqrt{3}} = \operatorname{cosec} 60^\circ$

$\therefore B = 60^\circ$ (দেখানো হলো)

(গ) দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{4}{3}$ (1)

আমরা জানি, $\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$

বা, $(\operatorname{cosec} A + \cot A)(\operatorname{cosec} A - \cot A) = 1$

বা, $(\operatorname{cosec} A + \cot A) \times \frac{4}{3} = 1$

বা, $\operatorname{cosec} A + \cot A = \frac{3}{4}$ (2)

(1) ও (2) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\operatorname{cosec} A - \cot A + \operatorname{cosec} A + \cot A = \frac{4}{3} + \frac{3}{4}$

বা, $2 \operatorname{cosec} A = \frac{16+9}{12} = \frac{25}{12}$

বা, $\operatorname{cosec} A = \frac{25}{12 \times 2} = \frac{25}{24}$

বা, $\frac{1}{\sin A} = \frac{25}{24}$

$$\therefore \sin A = \frac{24}{25}$$

$$\begin{aligned} \text{আবার, } \cos A &= \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{576}{625}} = \sqrt{\frac{625 - 576}{625}} \\ &= \sqrt{\frac{49}{625}} = \frac{7}{25} \quad [\because A \text{ সূক্ষ্মকোণ}] \end{aligned}$$

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} = \sin A + \cos A = \frac{24}{25} + \frac{7}{25} = \frac{24 + 7}{25} = \frac{31}{25}$$

$$\text{নির্ণেয় মান } \frac{31}{25}$$

$$৬০. M = \cos \alpha, \cot A - \operatorname{cosec} A = \frac{1}{p}$$

[বরিশাল বোর্ড ২০১৯]

$$(ক) \text{ দেখাও যে, } 2 \sin^2 B = 1 - \cos 2B \text{ যখন; } B = 45^\circ.$$

$$(খ) \text{ প্রমাণ কর যে, } \sec A = \frac{p^2 + 1}{p^2 - 1}$$

$$(গ) 4M^2 - (2 + 2\sqrt{3})M + \sqrt{3} = 0 \text{ হলে, } \alpha \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

৬০ নং প্রশ্নের উত্তর

$$(ক) \text{ দেওয়া আছে, } B = 45^\circ$$

$$\text{বামপক্ষ} = 2 \sin^2 B = 2 \sin^2 45^\circ = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{ডানপক্ষ} &= 1 - \cos 2B \\ &= 1 - \cos (2 \times 45^\circ) = 1 - \cos 90^\circ = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore 2 \sin^2 B = 1 - \cos 2B. \text{ (দেখানো হলো)}$$

$$(খ) \text{ দেওয়া আছে, } \cot A - \operatorname{cosec} A = \frac{1}{p}$$

$$\text{বা, } \frac{\cos A}{\sin A} - \frac{1}{\sin A} = \frac{1}{p} \text{ বা, } \frac{\cos A - 1}{\sin A} = \frac{1}{p}$$

$$\text{বা, } \left(\frac{\cos A - 1}{\sin A}\right)^2 = \left(\frac{1}{p}\right)^2 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } \frac{(\cos A - 1)^2}{\sin^2 A} = \frac{1}{p^2} \text{ বা, } \frac{\{-(1 - \cos A)\}^2}{(1 - \cos^2 A)} = \frac{1}{p^2}$$

$$\text{বা, } \frac{(1 - \cos A)^2}{(1 + \cos A)(1 - \cos A)} = \frac{1}{p^2}$$

$$\text{বা, } \frac{(1 - \cos A)(1 - \cos A)}{(1 + \cos A)(1 - \cos A)} = \frac{1}{p^2}$$

$$\text{বা, } \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \frac{1}{p^2}$$

$$\text{বা, } \frac{1 - \cos A + 1 + \cos A}{1 - \cos A - 1 + \cos A} = \frac{1 + p^2}{1 - p^2} \text{ [যোজন-বিয়োজন করে]}$$

$$\text{বা, } \frac{2}{-2 \cos A} = \frac{1 + p^2}{1 - p^2}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{-\cos A} = \frac{1 + p^2}{(p^2 - 1)}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\cos A} = \frac{p^2 + 1}{p^2 - 1}$$

$$\therefore \sec A = \frac{p^2 + 1}{p^2 - 1} \text{ (প্রমাণিত)}$$

$$(গ) \text{ দেওয়া আছে, } M = \cos \alpha$$

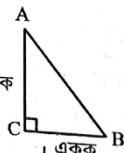
$$\text{এখন, } 4M^2 - (2 + 2\sqrt{3})M + \sqrt{3} = 0$$

$$\text{বা, } 4 \cos^2 \alpha - (2 + 2\sqrt{3}) \cos \alpha + \sqrt{3} = 0$$

$$\text{বা, } 4 \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha - 2\sqrt{3} \cos \alpha + \sqrt{3} = 0$$

$$\text{বা, } 2 \cos \alpha (2 \cos \alpha - 1) - \sqrt{3} (2 \cos \alpha - 1) = 0$$

$$\text{বা, } (2 \cos \alpha - 1) (2 \cos \alpha - \sqrt{3}) = 0 \quad \sqrt{3} \text{ একক}$$



$$\text{হয়, } 2 \cos \alpha - 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \cos \alpha = 1$$

$$\text{বা, } \cos \alpha = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$$

$$\therefore \alpha = 60^\circ$$

$$\text{নির্ণেয় মান : } \alpha = 30^\circ, 60^\circ.$$

$$\text{অথবা, } 2 \cos \alpha - \sqrt{3} = 0$$

$$\text{বা, } 2 \cos \alpha = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$$

$$\therefore \alpha = 30^\circ$$

$$৬১. \Delta ABC \text{-এ } \angle C = 90^\circ \text{ এবং } \tan B = \sqrt{3}.$$

[সকল বোর্ড ২০১৮]

$$(ক) AB \text{ এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।}$$

$$(খ) \text{ উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, } \frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \cot A \tan B.$$

$$(গ) \angle B = m + n \text{ এবং } \angle A = m - n \text{ হলে, } m \text{ ও } n \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

৬১ নং প্রশ্নের উত্তর

$$(ক) \text{ এখানে, } \Delta ABC \text{-এ } \angle C = 90^\circ \text{ এবং } \tan B = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$$

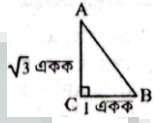
$$\therefore AC = \sqrt{3} \text{ এবং } BC = 1$$

পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 \\ &= (\sqrt{3})^2 + (1)^2 \\ &= 3 + 1 = 4 \end{aligned}$$

$$\therefore AB = \sqrt{4} = 2 \text{ একক}$$

$$\therefore AB \text{ এর দৈর্ঘ্য } 2 \text{ একক।}$$

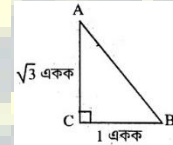


$$(খ) \text{ এখানে, } \Delta ABC \text{ এর } \angle C = 90^\circ$$

$$\text{এবং } \tan B = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \tan B = \tan 60^\circ$$

$$\text{বা, } B = 60^\circ$$



$$\text{অর্থাৎ } \angle B = 60^\circ$$

$$\therefore \angle A = 90^\circ - \angle B$$

$$= 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \frac{\cot 30^\circ + \tan 60^\circ}{\cot 60^\circ + \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = (\sqrt{3})^2 = 3$$

$$\text{ডানপক্ষ} = \cot A \cdot \tan B$$

$$= \cot 30^\circ \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 = 3$$

$$\therefore \frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \cot A \tan B. \text{ (প্রমাণিত)}$$

$$(গ) \text{ এখানে, } \Delta ABC \text{ এর } \angle C = 90^\circ \text{ এবং } \tan B = \sqrt{3}$$

$$'খ' \text{ থেকে পাই, } \angle B = 60^\circ \text{ এবং } \angle A = 30^\circ$$

$$\angle B = m + n \text{ এবং } \angle A = m - n \text{ হলে,}$$

$$m + n = 60^\circ \dots (1) \text{ এবং } m - n = 30^\circ \dots (2)$$

$$(1) \text{ ও } (2) \text{ নং যোগ করে পাই,}$$

$$m + n + m - n = 60^\circ + 30^\circ$$

$$\text{বা, } 2m = 90$$

$$\text{বা, } m = \frac{90^\circ}{2}$$

$$\therefore m = 45^\circ$$

(1) নং হতে (2) নং বিয়োগ করে পাই,

$$m + n - m + n = 60^\circ - 30^\circ$$

বা, $2n = 30^\circ$

বা, $n = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$

\therefore m ও n এর মান যথাক্রমে 45° ও 15° .

