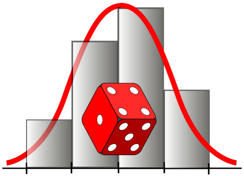
TD1 : Variables aléatoires continues



Module : Techniques d'estimation pour l'ingénieur

Exercice N°1

Enoncé

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |X| & si \quad |X| \leq 1, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

1) Tracer le graphe de f et vérifier que f est bien une densité de probabilité.

2) Déterminer la fonction de répartition de X.

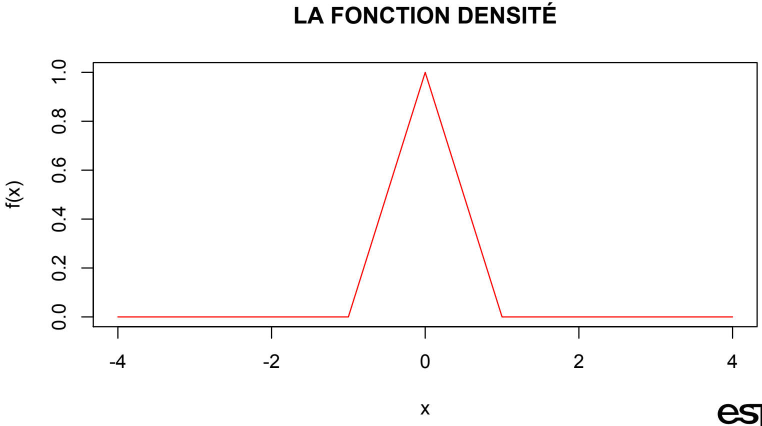
3) Calculer l'espérance et la variance de X.

4) Calculer la probabilité des évènements suivants:

$$\frac{-1}{2} \leq X \leq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad |X| \geq \frac{1}{2}$$

Exercice N°1

1. Le graphe de la fonction densité f est donné par :



Exercice N°1

On peut vérifier que :

- $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ car la courbe est au-dessus de laxe des abscisses.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

En effet :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x)dx &= \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx \\
&= \int_{-1}^{0} (1+x)dx + \int_{0}^{1} (1-x)dx \\
&= \left[x + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = 1
\end{aligned}$$

Alors f est une densité de probabilité

2. La fonction de répartition de X :
   - Si $x < -1$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$

   - Si $-1 \leq x \leq 0$, alors

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{x} f(t).dt \\
&= \cancel{\int_{-\infty}^{-1} 0.dt} + \int_{-1}^{x} (1+t).dt \\
&= \left[t + \frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{x} = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Exercice N°1

- Si $0 \leq x \leq 1$, alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \cancel{\int_{-\infty}^{-1} 0.dt} + \int_{-1}^{0} (1+t).dt + \int_{0}^{x} (1-t).dt \\ &= \left[t + \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^{0} + \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_{0}^{x} \\ &= -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Si $x \geq 1$, alors

$$F(x) = \cancel{\int_{-\infty}^{-1} 0.dt} + \int_{-1}^{0} (1+t).dt + + \int_{0}^{1} (1-t).dt + \cancel{\int_{1}^{+\infty} 0.dt} = 1$$

Conclusion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ \dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{1}{2} & si\text{-}1 \leq x \leq 0, \\ \text{-}\ \dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{1}{2} & si\ 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } \quad x > 1 \end{cases}$$

Exercice N1

3. Calculer l'espérance et la variance de X.
   L'espérance de la variable aléatoire X est donné par :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t.f(t).dt \\
&= \cancel{\int_{-\infty}^{-1} 0.t.dt} + \int_{-1}^{0} t(1+t)dt + \int_{0}^{1} t(1-t)dt + \cancel{\int_{1}^{+\infty} 0.t.dt} \\
&= \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_{0}^{1} \\
&= -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0
\end{aligned}
$$

La variance de X est donnée par :

$$\begin{aligned}
Var[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \underbrace{(\mathbb{E}[X])^2}_{=0} \\
&= \mathbb{E}[X^2] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt \\
&= \int_{-1}^{0} t^2(1+t)dt + \int_{0}^{1} t^2(1-t)dt \\
&= \int_{-1}^{0} (t^2+t^3)dt + \int_{0}^{1} (t^2-t^3)dt \\
&= \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}\right]_{0}^{1} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

4. Calculer la probabilité des évènements suivants :

$$-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{4} \quad et \quad |X| > \frac{1}{2}.$$

- $\mathbb{P}\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{4}\right) = F\left(\frac{1}{4}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{23}{32} - \frac{1}{8} = \frac{19}{32}$
- $\mathbb{P}\left(|X| > \frac{1}{2}\right) = 1 - \mathbb{P}((|X| \leq \frac{1}{2}) = 1 - \mathbb{P}\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right)$
  $= 1 + F(-\frac{1}{2}) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$