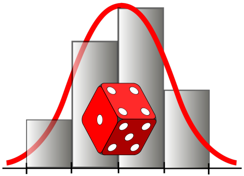
TD1 : Variables aléatoires continues



Module : Techniques d'estimation pour l'ingénieur

Exercice N°2

Enoncé

Une variable aléatoire X a pour densité de probabilité la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} k(9 - x^2) & si \ x \in [-3, 3], \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

1) Déterminer la constante k pour que f soit bien une densité de probabilité.

2) Déterminer la fonction de répartition F de X.

3) Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.

4) calculer $P(|X| \leq 3), P(X > -2)$ et $P(X < -4)$.

Exercice N°2

f est une densité de probabilité si et seulement si :

- $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ k(9-x^2) ≥ 0, $\forall x \in [-3, 3]$ $\Leftrightarrow$ $k \geq 0$.
-

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_{-3}^{3} k(9 - x^2)dx = 1$$

$$\Leftrightarrow k\left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3} = 1$$

$$\Leftrightarrow 36k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{36}$$

2. Déterminer la fonction de répartition F(x) de X.
   La fonction de répartition F de la variable aléatoire X est donnée par, *pour* $x \in \mathbb{R}$:
   - Si $x < -3$, alors
   $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$
   - Si $-3 \leq x \leq 3$, alors
   $$F(x) = \int_{-\infty}^{-3} 0dt + \int_{-3}^{x} \frac{1}{36}(9-t^2)dt = \frac{1}{36}\left[9t - \frac{t^3}{3}\right]_{-3}^{x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{108}$$
   - Si $x > 3$, alors
   $$F(x) = \int_{-\infty}^{-3} 0dt + \int_{-3}^{3} \frac{1}{36}(9-t^2)dt + \int_{3}^{x} 0dt = \frac{1}{36}\left[9t - \frac{t^3}{3}\right]_{-3}^{3} = 1$$

Exercice N°2

Conclusion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3, \\ -\dfrac{x^3}{108} + \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2} & si \text{ -3} \leq x \leq 3, \\ 1 & \text{si } \quad x > 3 \end{cases}$$

3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$
   - L'espérance de la variable aléatoire X est donnée par :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 0$$

Comme $x.f(x)$ est une fonction impaire sur un l'intervalle centré $[-3, 3]$.

   - La variance de la variable aléatoire X est donnée par :

$$\begin{aligned} Var[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \underbrace{(\mathbb{E}[X])^2}_{=0} \\ &= \mathbb{E}[X^2] \\ &= 2\int_{0}^{+\infty} x^2 f(x)dx \quad \textit{car } x^2 f(x) \textit{ est une fonction paire} \end{aligned}$$

Exercice N°2

$$= \quad 2\int_0^3 \frac{1}{36}x^2(9-x^2)dx + 2\int_3^{+\infty} 0dx = \frac{1}{18}\left[3x^3 - \frac{x^5}{5}\right]_0^3 = \frac{9}{5}$$

4. Calculer $\mathbb{P}(|X| \leq 3)$, $\mathbb{P}(X > -2)$, $\mathbb{P}(X < -4)$
   - $\mathbb{P}(|X| \leq 3) = \mathbb{P}(-3 \leq X \leq 3) = F(3) - F(-3) = 1$
   - $\mathbb{P}(X > -2) = 1 - \mathbb{P}(\leq X \leq -2) = 1 - F(-2) = 1 - \frac{2}{27} = \frac{25}{27}$
   - $\mathbb{P}(X < -4) = F(-4) = 0.$