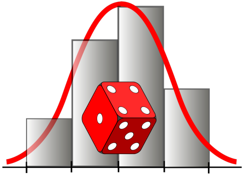
TD1 : Variables aléatoires continues



Module : Techniques d'estimation pour l'ingénieur

Exercice N°4

Enoncé

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, des troupeaux sur la route, etc... Un autocar part de son entrepôt. On note X la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que la variable X suit une loi de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \; e^{\frac{-x}{82}} \;\; si \quad x \geq 0, \\ 0 \qquad sinon. \end{cases}$$

1) Déterminer la constante α pour que la fonction f soit une densité de probabilité. .

2) Montrer que la fonction de répartition est égale à $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}; \; x \geq 0$.

3.a) Calculer la probabilité pour que la distance parcourue sans incident soit comprise entre 50 et 100 km.

3.b) Calculer la probabilité pour que la distance parcourue sans incident soit supérieure à 25 km.

4) Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 km sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains km ?

5) Comparez avec le résultat précédent. Conclure.

6) On veut déterminer la distance moyenne parcourue sans incident. Calculer l'espérance de X.

Exercice 4

1. Déterminer la constante α pour que la fonction f soit une densité de probabilité . f est une densité de probabilité si :
   - $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $\alpha \geq 0$.
   - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \alpha e^{\frac{-x}{82}} dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[-\alpha \times 82 e^{\frac{-x}{82}}\right]_0^{+\infty} = 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha \times 82 = 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{82}$$

esprit Se former autrement

Exercice N°4

2. Montrer que la fonction de répartition est égale à
   $F(x) = 1 - e^{-\alpha x};\ x \geq 0.$
   si $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\
&= \int_0^x f(t).dt \\
&= \int_0^x \alpha e^{-\alpha t} dt \\
&= \left[-e^{-\alpha t}\right]_0^x \\
&= 1 - e^{-\alpha x}.
\end{aligned}$$

3. a) Calculer la probabilité pour que la distance parcourue sans incident soit comprise entre 50 et 100 km.

   $\mathbb{P}(50 \leq X \leq 100) = F(100) - F(50) = e^{\frac{-50}{82}} - e^{\frac{-100}{82}}$

   b) Calculer la probabilité pour que la distance parcourue sans incident soit supérieure a 25 km.

   $\mathbb{P}(X \geq 25) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 25) = 1 - F(25) = e^{\frac{-25}{82}}$

Exercice N°4

4. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 km sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains km ?

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > 350 + 25 | X > 350) &= \frac{\mathbb{P}((X > 375) \cap (X > 350))}{\mathbb{P}(X > 350)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X > 375)}{\mathbb{P}(X > 350)} \\
&= \frac{1 - F(375)}{1 - F(350)} \\
&= \frac{e^{\frac{-375}{82}}}{e^{\frac{-350}{82}}} \\
&= e^{\frac{-25}{82}}
\end{aligned}
$$

5. Comparez avec le résultat prcédent. Conclure.
   $\mathbb{P}(X > 350 + 25|X > 350) = \mathbb{P}(X > 25)$

   la probabilité que le phénomène dure au moins s + t (heures) sachant qu'il a déjà duré t (heures) sera la même que la probabilité de durer s (heures) à partir de sa mise en fonction initiale. On dit que la loi exponentielle est sans mémoire.
   Plus formellement, soit X une variable aléatoire définissant la durée de vie d'un phénomène, $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors:

$$P(X > s + t/X > t) = P(X > s), \; \forall (s, t) \in {\mathbb{R}^{+}}^{2}$$

Exercice N°4

6. On veut déterminer la distance moyenne parcourue sans incident.

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} xf(x).dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{82} e^{\frac{-x}{82}}$$

On effectue une intégration par partie :

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \frac{1}{82} e^{\frac{-x}{82}} & V(x) = -e^{\frac{-x}{82}} \end{array}$$

Alors:

$$\mathbb{E}(X) = \left[-xe^{\frac{-x}{82}}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{\frac{-x}{82}} dx = \left[-82e^{\frac{-x}{82}}\right]_0^{+\infty} = 82$$