

# Projet de mathématiques financières

## 1 Description

**1.1.** On considère le projet *auxiliaire*  $P_{\text{aux}}$ , de durée  $d$ , dont les flux monétaires sont donnés dans le tableau suivant :

années	0	$d$
flux A	$-I_0$	$B_d$

où  $d$ ,  $I_0$  et  $B_d$  sont des nombres réels strictement positifs, avec  $I_0 < B_d$ .

Ecrire l'expression de la valeur actuelle nette,  $VAN_{\text{aux}}(\tau)$ , de  $P_{\text{aux}}$ , en fonction du taux annuel d'actualisation  $\tau$ . En déduire l'existence d'un unique taux de rendement interne,  $\tau_{\text{ri, aux}}(d) > 0$  à exprimer en fonction des données du tableau.

On rappelle que  $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ , pour  $x > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**1.2.** Un projet industriel  $P$  sur  $n$  ans est caractérisé par les flux monétaires du tableau ci-dessous :

années	0	1	2	3	...	$n$
flux $P$	$-I$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	...	$B_n$

où  $I$ , les  $B_k, k = 1, \dots, n$ , sont des nombres réels strictement positifs.

**1.2.1.** Exprimer la valeur actuelle nette,  $VAN_P(\tau)$ , du projet  $P$ , en fonction du taux annuel d'actualisation  $\tau$ , sachant que le matériel initialement acheté est revendu  $V_f \in \mathbb{R}$  à la fin de l'année  $n$ .

**1.2.2.** On admet que  $I < \sum_{k=1}^n B_k + V_f$ . Existence et unicité d'un taux de rendement interne pour le projet  $P$ ?

**1.2.3.** On définit ensuite le nombre réel positif  $d_{\text{moy}}(\tau)$ , appelé *échéance moyenne*, pour un taux annuel d'actualisation donné  $\tau$ , comme étant la date à laquelle la somme des cash flows positifs actualisés à la date 0, est égale à la valeur actuelle de l'unique flux  $B = \sum_{k=1}^n B_k$ , versé à la date  $d_{\text{moy}}(\tau)$ .

Rechercher  $d_{\text{moy}}(\tau)$  en fonction des  $B_k$  et du taux  $\tau$ .

**1.3.** Pour le projet  $P$ , les données numériques de cette question sont dans le fichier associé à votre groupe.

**1.3.1.** En prenant par ex  $\tau_0 = 0.01$  (1%), calculer  $d_0 = d_{\text{moy}}(0.01)$ .

**1.3.2.** Déterminer alors  $\tau_1 = t_{\text{ri, aux}}(d_0)$ , puis  $VAN_P(\tau_1)$ .

**1.3.3.** Quelle procédure itérative peut-on envisager?

## 2 Algorithmique

Le travail demandé consiste à programmer la recherche d'un taux de rendement interne à partir d'un tableau décrivant un projet d'investissement. Le langage préconisé est python ou VBA sous EXCEL.

On propose, à titre indicatif, les schémas algorithmiques ci-après. Deux constantes  $\epsilon$ , par ex  $\epsilon = 0.0001$ , et  $\text{nb\_it}_{\text{max}}$ , par ex  $\text{nb\_it}_{\text{max}} = 30$ , géreront respectivement la précision du résultat fourni et le nombre d'itérations maximal pour l'arrêt de la recherche du taux de rendement interne.

Le rapport, au format pdf, contiendra la partie théorique, la description algorithmique des procédures programmées et le résultat obtenu sur les données.

**Algorithm 1** Procédure init\_var\_glob**Ensure:** initialisation de toutes les variables globales**Algorithm 2** Procédure lecture\_donnees**Require:** un fichier où se trouvent la description de toutes les caractéristiques du projet**Ensure:**  $n$ , la durée du projet**Ensure:** le tableau des  $B_k, k = 0, \dots, n$ , la valeur de revente finale  $V_f$  de l'équipement (0 par défaut)**Algorithm 3** Fonction calcul\_VAN**Require:**  $n$ , les  $B_k, k = 0, \dots, n, V_f$ **Require:**  $\tau \geq 0$ , un taux d'actualisation**Ensure:** la valeur de la  $VAN_P$  du projet pour le taux d'actualisation annuel  $\tau$ **Algorithm 4** Fonction calcul\_echeance\_moy**Require:** un taux d'actualisation  $\tau > 0$ , les  $B_k, k = 0, \dots, n, V_f$ **Ensure:** la valeur de l'échéance moyenne du projet  $P$  pour le taux d'actualisation annuel  $\tau$ **Algorithm 5** Fonction calcul\_tri\_aux**Require:**  $I$ , l'investissement effectué à la date 0, un flux  $B$  disponible à la date  $d$ , la date  $d$ **Ensure:** le taux de rendement interne du projet auxiliaire**Algorithm 6** Procédure init\_echeance\_moy**Require:**  $n$ , les  $B_k, k = 0, \dots, n, V_f$ **Ensure:** un taux  $\tau_0 > 0$  tel que  $VAN(\tau_0) > 0$ , permettant d'assurer le calcul de la première échéance moyenne  $d_0 = d_{\text{moy}}(\tau_0)$ **Algorithm 7** Procédure taux\_interne**Require:**  $\tau_0 > 0$ **Ensure:**  $\tau_{ri} > 0$  tel que  $-\epsilon \leq VAN_P(\tau_{ri}) \leq \epsilon$   $\triangleright$  Si le nombre maximum d'itérations n'est pas atteint ! $\tau_c \leftarrow \tau_0 > 0$  $\text{nb\_it} \leftarrow 0$  $\text{arret} \leftarrow \text{false}$ **while** not arret **do** $\text{nb\_it} \leftarrow \text{nb\_it} + 1$  $d = d(\tau_c) = \text{calcul\_echeance\_moy}(\tau_c > 0)$  $\tau_{ri, \text{aux}}(d) = \text{calcul\_tri\_aux}(I_0, \sum_{k=1}^n B_k, d)$  $\tau_c = \tau_{ri, \text{aux}}(d)$  $VAN_c \leftarrow VAN(\tau_c)$ **if** ((( $VAN_c \leq \epsilon$ ) and ( $VAN_c \geq -\epsilon$ )) or ( $\text{nb\_it} \geq \text{nb\_it}_{\text{max}}$ )) **then** $\tau_{ri} \leftarrow \tau_c$  $\text{arret} \leftarrow \text{true}$ **end if****end while** $\triangleright |VAN(\tau_c)|$  est voisine de 0**Algorithm 8** Procédure affichage\_resultat**Require:**  $\tau_{ri}$ , le taux de rentabilité interne du projet