

VDI-Buch

Berend Gerdse van der Wall

Grundlagen der Dynamik von Hubschrauber-Rotoren

EBOOK INSIDE

VDI



Springer Vieweg

VDI-Buch

Berend Gerdes van der Wall

Grundlagen der Dynamik von Hubschrauber-Rotoren



Springer Vieweg

Berend Gerdes van der Wall
Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
Braunschweig, Deutschland

ISSN 2512-5281

VDI-Buch

ISBN 978-3-662-57641-0

<https://doi.org/10.1007/978-3-662-57642-7>

ISSN 2512-529X (electronic)

ISBN 978-3-662-57642-7 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2018

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürfen. Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Verantwortlich im Verlag: Markus Braun

Springer Vieweg ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Seit Urzeiten träumt der Mensch von einem Transportmittel, das ihn von einem Ort zum anderen durch die Luft transportiert, ohne dass man Hindernissen auf dem Weg dahin ausweichen muss. Die Geschichte von Ikarus und Dädalus, aber auch von fliegenden Teppichen sind nur zwei Beispiele davon. Diese Träume sind mit der Erfindung und Reifung des Hubschraubers zu einem zuverlässigen Fluggerät Realität geworden, welches in vielen Bereichen zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel geworden ist. Der Hubschrauber kann senkrecht vom Boden abheben und ebenso landen, sich in sämtliche Richtungen bewegen, und sollte die Bodenbeschaffenheit keine Landung zulassen, so kann er in geringster Höhe darüber schweben, Insassen ein- oder aussteigen lassen oder Fracht aufnehmen oder abladen. Daher ist er im Rettungsdienst zu Land, im Gebirge oder auf See, aber auch bei der Versorgung von Offshore-Anlagen nicht mehr wegzudenken. An dieser Stelle ist ein Zitat von Igor Sikorsky aus der Zeit um 1940 angebracht, als die – damals noch recht beschränkten – Fähigkeiten seines Hubschraubers in Frage gestellt wurden: *Wenn jemand eine Rettung braucht, kann ein Flugzeug hinfliegen und Blumen abwerfen, aber das ist auch schon alles. Ein Senkrechtstarter jedoch kann hinfliegen und sein Leben retten.*

Die rasante Entwicklung des Hubschraubers nach dem zweiten Weltkrieg wurde ganz besonders auch durch die ersten erfolgreichen Hubschrauber der Luftfahrtione Heinrich Focke und Anton Flettner in Deutschland von 1935–1945 geprägt. In dieser Zeit wurde auch die theoretische Behandlung nicht nur der Hubschrauberaerodynamik, sondern auch der Rotordynamik stark vorangetrieben, was freilich mit dem Ende des Krieges ein abruptes Ende fand. Die meisten deutschen Pioniere auf dem Gebiet der Hubschrauber sind anschließend nach Amerika emigriert, wo die weitere Entwicklung der Hubschrauber rasant vorangetrieben wurde. Es dauerte bis 1953, als in Deutschland die Luftforschung wieder zugelassen wurde und damit auch die Arbeit auf dem Hubschraubersektor mit der Gründung der Deutschen Studiengemeinschaft Hubschrauber (DSH) in Stuttgart wieder Fahrt aufnahm, welche 1969 in die Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt (DFVLR; das heutige Deutsche Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR)) integriert wurde. Bis 1955 sind etliche Fachbücher über die Hubschraubertheorie in englischer Sprache erschienen. Überraschenderweise gibt es – trotz der Vorreiterrolle in der Theorie, Erprobung und sogar Serienfertigung bis 1945 – jedoch kaum ein deutschsprachiges Lehrbuch zur grundlegenden Dynamik insbesondere des Hubschrauberrotors.

Diese Lücke soll mit diesem Lehrbuch geschlossen werden, das in moderner Form die Grundlagen und teilweise auch Feinheiten der theoretischen Behandlung des Drehflüglers darstellt und mit zahlreichen Übungen die Anwendung der Theorie vertieft. Die graphischen Darstellungen der mathematischen Zusammenhänge können vom Leser mit einfachen Tabellenkalkulationsprogrammen und den zur Verfügung gestellten Formeln nachvollzogen werden. Da praktisch die gesamte Fachliteratur in englischer Sprache publiziert wird, ist die hier verwendete Nomenklatur mit der darin üblichen Schreibweise konform und die jeweiligen englischen Fachbegriffe werden ebenfalls genannt.

Kap. 1 zeigt anhand von Unfällen der Drehflügelflugzeuge der Pioniere Focke, Flettner und Sikorsky die Bedeutung der Rotordynamik auf und erarbeitet die Grundlagen des Schwingungsverhaltens eines linearen Feder-Masse-Dämpfer Systems, denn dies ist die Grundlage zum Verständnis aller Probleme der Rotordynamik.

Die Dynamik der Schlagbewegung als wichtigste Bewegungsform eines Rotorblattes wird in Kap. 2 vorgestellt. Dies beinhaltet auch die mathematischen Methoden zur Ermittlung des Eigenschwingungsverhaltens sowie der dynamischen Antwort auf externe Erregung.

Gegenstand von Kap. 3 sind die Lösungsmethoden der Differentialgleichungen des Rotorblattes im drehenden Rotor, aber auch die Transformation der Bewegungsgleichungen in das nicht drehende, hubschrauberfeste Koordinatensystem.

Die zunächst isolierte Betrachtung der Schwenk- und Torsionsbewegung von Rotorblättern ist Inhalt des Kap. 4, worauf sich die verkoppelten Bewegungsgleichungen aller drei Freiheitsgrade anschließen.

Da Schwingungsprobleme von Hubschrauberrotoren – mit Ausnahme der quasi-stationären Divergenz – fast ausschließlich Schwingungen wenigstens mit der Rotordrehfrequenz oder auch deutlich höheren Frequenzen sind, kommt der Betrachtung instationärer Aerodynamik eine wichtige Rolle zu, welche in Kap. 5 beschrieben wird.

Damit sind alle Grundlagen geschaffen, um sich den aeroelastischen Problemen wie Flattern der Rotorblätter oder deren Torsionsdivergenz in Kap. 6 zu befassen.

Die Bodenresonanz wird in Kap. 7 behandelt und ist auch heute noch ein gefürchtetes Phänomen des Hubschraubers, wo die Schwenkbewegung mit dem Schwingungsverhalten der Hubschrauberzelle koppelt.

Möglichkeiten und Physik der hochfrequenten aktiven Rotorsteuerung über die Blattwurzel, mittels Klappen am Rotorblatt oder mittels spannweiteriger Verwindung werden in Kap. 8 dargestellt.

Abgerundet wird das Themenspektrum in Kap. 9 insbesondere mit der Modelltechnik im Rotorbereich, den verschiedenen Skalierungsmöglichkeiten sowie der notwendigen Ausrüstung mit Instrumentierung oder Messtechnik. Jedes Kapitel hat eine eigene Literaturliste, wobei Wert darauf gelegt wurde, die Originalquellen zu den verschiedenen in Anwendung kommenden Theorien zu zitieren. Zahlreiche Übungen vertiefen das Verständnis der theoretischen Darstellungen und die Lösungen dazu sind im Anhang gegeben. Ebenso finden sich dort einige Datenblätter zu historischen Hubschraubermodellen als auch der Bo105 als dem bisher erfolgreichsten deutschen in Serie gebauten Hubschrauber. Im Anhang befinden sich die Lösungen zu den Übungsaufgaben.

Danksagung

Dieses Buch verdankt seine Entstehung mehreren Faktoren. Zunächst ist der Mangel an ausführlicher deutschsprachiger Literatur zu den Grundlagen der Hubschrauberdy namik und ihren Besonderheiten zu erwähnen, während es in englischer Sprache eine Fülle von Literatur mit verschiedensten Schwerpunkten gibt. Des Weiteren spielt mein Auslandsstudium 1990–1991 an der University of Maryland eine wichtige Rolle, wo ich Vorlesungen zum Thema von einem der gegenwärtig prominentesten Vertreter der modernen Hubschrauberdy namik und Rotor-Aeroelastik, Prof. Inderjit Chopra, belegte. Ihm gilt mein Dank für dessen Konzept, die physikalischen Vorgänge anschaulich darzustellen, was den Stil dieses Buches mit geprägt hat. Den wichtigsten Anlass zur Erstellung war jedoch die Notwendigkeit, ein aktuelles Vorlesungsmanuskript für die entsprechende Vorlesung an der TU Braunschweig zu stellen, welche ich seit 2007 zu halten die Ehre habe.

Etwa 2000 Arbeitsstunden privater Zeit sind in dieses Werk geflossen, im Wesentlichen während der ersten zwei Jahre, dann in kontinuierlicher Kleinarbeit, um nach Möglichkeit alle Fehler zu eliminieren, die Entwicklungen aktiver Rotorsteuerung zu aktualisieren und vor allem die physikalischen Zusammenhänge so anschaulich wie möglich herauszuarbeiten. Allen Studenten, die mir im Laufe der Jahre mit ihren Fehlermeldungen, Kommentaren, Verbesserungsvorschlägen und Diskussionen zahllose Beiträge leisteten, zolle ich meine Anerkennung. Die finanzielle Honorierung von Fehlermeldungen hat hier große vorteilhafte Wirkung gezeigt.

Während sämtliche Grafen und Skizzen vom Autoren neu erstellt wurden, stammen fast alle Fotos aus Originalquellen. Insbesondere bin ich folgenden Einrichtungen zu tiefstem Dank verpflichtet, denn die Überlassung hochauflösender digitaler Bilder stellt eine große qualitative und quantitative Bereicherung dar.

- Airbus Helicopters Deutschland: Rainer Heger und Julia Sailer
- Alicia G. Tanrath
- Boeing Mesa: Vaidyanathan R. Anand
- Burkhard Domke
- NASA Ames Research Center: Thomas R. Norman
- Smithsonian Institution National Air and Space Museum: Roger Connor
- Universität Stuttgart (IAG): Markus Dietz und Ewald Krämer
- U.S. Air Force Helicopter Pilot Association: Robert P. Strout

Bezeichnungen

a	Schallgeschwindigkeit, m/s
a	dimensionslose Lage der Nickachse relativ zur Profilmitte, $a = x_a/(c/2)$
A	Rotorfläche, $A = \pi R^2$, m ²
A	Systemmatrix
B	dimensionsloser Radius der effektiven Blattspitze
c	Profiltiefe, m
c_{tip}	Profiltiefe an der Blattspitze, m
C_μ	Ausblasbeiwert
$C(k)$	Theodorsenfunktion
$C'(k)$	Loewyfunktion
C_d	Widerstandsbeiwert, $C_d = C_{d0} + C_{d1}\alpha_a + C_{d2}\alpha_a^2$
C_{d0}	Nullwiderstandsbeiwert
C_{d1}	linearer Anteil des Widerstandsbeiwertes
C_{d2}	quadratischer Anteil des Widerstandsbeiwertes
C_l	Auftriebsbeiwert, $C_l = C_{l\alpha}\alpha_a$
C_{l0}	Auftriebsbeiwert bei $\alpha_a = 0$
$C_{l\alpha}$	Auftriebsanstieg
$C_{l\mu}$	Auftriebsanstieg durch Ausblasung
C_H	Längskraftbeiwert des Rotors, $C_H = H/[\rho A(\Omega R)^2]$
C_{m_x}	Rollmomentenbeiwert des Rotors, $C_{m_x} = M_x/[\rho A(\Omega R)^2 R]$
C_{m_y}	Nickmomentenbeiwert des Rotors, $C_{m_y} = M_y/[\rho A(\Omega R)^2 R]$
C_P	Leistungsbeiwert, $C_P = P/[\rho A(\Omega R)^3]$
C_{Pi}	induzierter Leistungsbeiwert, $C_{Pi} = P_i/[\rho A(\Omega R)^3]$
C_{P0}	Profilleistungsbeiwert, $C_{P0} = P_i/[\rho A(\Omega R)^3]$
C_Q	Drehmomentenbeiwert, $C_Q = Q/[\rho A(\Omega R)^2 R]$
C_T	Schubbeiwert, $C_T = T/[\rho A(\Omega R)^2]$
C_Y	Seitenkraftbeiwert des Rotors, $C_Y = Y/[\rho A(\Omega R)^2]$
C	Dämpfungsmatrix
dy	differentielle radiale Elementbreite, m
D'	lokaler Widerstand je Längeneinheit, N/m
D	Widerstand des Hubschraubers, N

e_β	dimensionsloser Schlaggelenksabstand, $e_\beta = y_\beta/R$
e_ζ	dimensionsloser Schwenkgelenksabstand, $e_\zeta = y_\zeta/R$
e_{pl}	dimensionsloser Steuerlagerabstand, $e_{pl} = y_{pl}/R$
E	Young's Elastizitätsmodul, N/m ²
E_{kin}	kinetische Energie, N m
E_{pot}	potentielle Energie, N m
EI_x	Biegesteifigkeit der Schlagbewegung, N m ²
EI_z	Biegesteifigkeit der Schwenkbewegung, N m ²
f	effektive Widerstandsfläche des Rumpfes, m ²
f	Frequenz, Hz
FM	Leistungsgütegrad, $FM = P_i/P$
Fr	Froude-Zahl, $Fr = mgR^3/(EI)$
\mathbf{F}	Erregerkraftvektor
F'_x	Elementkraft in der Drehebene je Längeneinheit, N/m
F'_y	Elementkraft in radialer Richtung je Längeneinheit, N/m
F'_z	Elementkraft senkrecht zur Drehebene je Längeneinheit, N/m
GJ	Torsionssteifigkeit, N m ²
\mathbf{G}	Systemmatrix
h	Flughöhe, m
H	Rotorlängskraft, N
I_b	Massenträgheitsmoment der Schlagbewegung mit zentralem Gelenk, kg m ²
I_f	Massenträgheitsmoment um die Steuerachse, kg m ²
*I_f	dimensionsloses Massenträgheitsmoment um die Steuerachse, ${}^*I_f = I_f/I_b$
I_x	Flächenmoment bezüglich der Schlagbiegeachse, m ⁴
I_x	Koppelträgheitsmoment zwischen Schlag- und Torsionsbewegung, kg m ²
I_z	Flächenmoment bezüglich der Schwenkbiegeachse, m ⁴
I_β	Massenträgheitsmoment der Schlagbewegung mit Gelenksabstand, kg m ²
*I_x	dimensionsloses Koppelträgheitsmoment zwischen Schlag- und Torsionsbewegung, ${}^*I_x = I_x/I_b$
${}^*I_\beta$	dimensionsloses Massenträgheitsmoment der Schlagbewegung, ${}^*I_\beta = I_\beta/I_b$
$I_{\beta\alpha}$	Massenträgheitsmoment der Schlagbewegung bzgl. Kippbewegungen des Rotorkopfes, kg m ²
${}^*I_{\beta\alpha}$	dimensionsloses Massenträgheitsmoment der Schlagbewegung bzgl. Kippbewegungen des Rotorkopfes, ${}^*I_{\beta\alpha} = I_{\beta\alpha}/I_b$
I'_0	Massenträgheitsmoment um die Schwerpunktsachse je Längeneinheit, kg m ² /m
I'_Θ	Massenträgheitsmoment um die Steuerachse je Längeneinheit, $I'_\Theta = I'_0 + m'x_I^2$, kg m ² /m
I_ζ	Massenträgheitsmoment der Schwenkbewegung mit Gelenksabstand, kg m ²
k	reduzierte Frequenz, $k = \omega c/(2V)$
\bar{k}	mittlere reduzierte Frequenz

k_{tip}	reduzierte Frequenz an der Blattspitze, $k_{\text{tip}} = c/(2R)$
k_m	Trägheitsradius, m
$k_{p\beta}$	Schlag-Torsionskopplung, $k_{p\beta} = \tan \delta_3$
$k_{p\zeta}$	Schwenk-Torsionskopplung, $k_{p\zeta} = \tan \delta_4$
k_x	Längsgradient des induzierten Durchflusses
k_y	Quergradient des induzierten Durchflusses
k_β	Schlagfederkonstante, N m/rad
k_ζ	Schwenkfederkonstante, N m/rad
k_ϑ	Torsionsfederkonstante, N m/rad
k_Θ	Steifigkeit des Steuersystems, N m/rad
$K(k)$	Küssnerfunktion
K	Federmatrix
m'	Massenverteilung, kg/m
\dot{m}	Massenstrom, kg/s
L'	lokaler Auftrieb je Längeneinheit, N/m
L	Auftrieb, N
L'_{nc}	nicht zirkulatorischer Auftrieb je Längeneinheit, N/m
L'_{qs}	quasistationärer Auftrieb je Längeneinheit, N/m
M	Machzahl, $M = V/a$
M	Biegemoment, N m
M'_a	nicht zirkulatorisches Nickmoment je Längeneinheit, N m/m
M_b	Blattmasse, kg
M'_{nc}	nicht zirkulatorisches Nickmoment je Längeneinheit, N m/m
M'_{qs}	quasistationäres Nickmoment je Längeneinheit, N m/m
M_F	Schlagbiegemoment an der Blatteinspannung, N m
M_L	Schwenkbiegemoment an der Blatteinspannung, N m
M_x	Rollmoment des Rotors, N m
M_y	Nickmoment des Rotors, N m
M_{xF}	Rollmoment des Rumpfes (nur aerodynamisch), N m
M_y	Nickmoment des Rotors, N m
M_{yF}	Nickmoment des Rumpfes (nur aerodynamisch), N m
M_β	Schlagmoment aus Luftkräften, N m
\overline{M}_β	dimensionsloses Schlagmoment aus Luftkräften, $\overline{M}_\beta = M_\beta / [\rho A(\Omega R)^2 R]$
M_ζ	Schwenkmoment aus Luftkräften, N m
\overline{M}_ζ	dimensionsloses Schwenkmoment aus Luftkräften, $\overline{M}_\zeta = M_\zeta / [\rho A(\Omega R)^2 R]$
M'_Θ	aerodynamisches Nickmoment um die Steuerachse je Längeneinheit, N m/m
M	Massenmatrix
n	ganzzahliges Vielfaches der Rotordrehfrequenz
N_b	Blattzahl
p	Luftdruck, N/m ²
P	Gesamtleistung, N m/s
P_c	Steigleistung, N m/s

P_h	Leistung im Schwebeflug, N m/s
P_i	induzierte Leistung, N m/s
P_p	parasitäre Leistung, N m/s
P_0	Profilwiderstandsleistung, N m/s
Q	Drehmoment, N m
\mathbf{Q}	Transitionsmatrix
r	dimensionslose radiale Koordinate, $r = y/R$
R	Rotorradius, m
R_f	Radius des full-scale Rotors, m
R_m	Radius des Modellrotors, m
Re	Reynoldszahl, $Re = Vc/\nu$
s	Skalierungsfaktor, $S = R_m/R_f$
s	dimensionsloser komplexer Eigenwert
s_H	Eigenwert der Schlagbewegung im Schwebeflug
s_R	Eigenwert im drehenden System
S	Querkraft, N
S_r	radiale Scherkraft an der Blatteinspannung, N
S_x	tangentielle Scherkraft an der Blatteinspannung, N
S_z	vertikale Scherkraft an der Blatteinspannung, N
S_β	Schlagträgheitsmoment bzgl. Vertikalbeschleunigung, kg m^2
S_β^*	dimensionsloses Schlagträgheitsmoment bzgl. Vertikalbeschleunigung, $S_\beta^* = S_\beta/I_b$
t	Zeit, s
t	Profildicke, m
T	Schub, N
T	Temperatur, °C
v	horizontale Auslenkung der Schwenkbewegung, m
v_i	induzierte Geschwindigkeit normal zur Rotorebene (in derselben), m/s
$v_{i\infty}$	induzierte Geschwindigkeit normal zur Rotorebene (weit weg), m/s
V	Gesamtgeschwindigkeit, $V = \sqrt{V_P^2 + V_T^2} \approx V_T$, m/s
V_c	Steiggeschwindigkeit, $V_c = V_\infty \sin \Theta_{FP}$, m/s
V_G	Windböengeschwindigkeit, m/s
V_P	vertikale Geschwindigkeit, m/s
V_T	tangentielle Geschwindigkeit, m/s
\overline{V}_P	dimensionslose normale Geschwindigkeitskomponente, $\overline{V}_P = V_P/(\Omega R)$
\overline{V}_T	dimensionslose tangentielle Geschwindigkeitskomponente, $\overline{V}_T = V_T/(\Omega R)$
V_∞	Fluggeschwindigkeit des Hubschraubers, m/s
w	vertikale Auslenkung der Schlagbewegung, m
W	Gewichtskraft, N
x_a	Lage der Nickachse relativ zur Profilmittie, m
x_{cg}	horizontaler Abstand des Schwerpunktes vom Rotormast, positiv, wenn der Schwerpunkt vor dem Rotor liegt, m

x_I	Schwerpunktlage hinter der Steuerachse, m
x_{TR}	Abstand Heckrotorzentrum hinter dem Hauptrotorzentrum, m
y	radiale Koordinate, m
y_a	radiale Position des Profilbeginns, m
y_{cg}	seitlicher Abstand des Schwerpunktes vom Rotormast, positiv, wenn der Schwerpunkt rechts vom Mast ist, m
y_β	Schlaggelenksabstand, m
y_ζ	Schwenkgelenksabstand, m
y_{pl}	Steuerlagerabstand, m
Y	Rotorquerkraft, N
Y_P	Seitenkraft des Heckrotors, N
z_{cg}	Höhe des Rotorzentrums über dem Hubschrauberschwerpunkt, m
z_H	Vertikale Position des Rotorzentrums, m
α	Anstellwinkel des Referenzkoordinatensystems, rad
α_{TPP}	Anstellwinkel der Rotorebene, positiv aufnickend, rad
α_a	effektiver Anstellwinkel am Blattelement, $\alpha_a = \Theta - \phi \approx \Theta - V_P / V_T$, rad
α_i	induzierter Anstellwinkel, rad
α_{opt}	optimaler Anstellwinkel, rad
α_S	Rotormastneigungswinkel, positiv, wenn der Hubschrauber aufnickt, rad
α_x	dynamischer Rotorkopfrollwinkel, rad
α_y	dynamischer Rotorkopfnickwinkel, rad
β	Schlagwinkel, rad
β_0	stationärer Schlagwinkel, rad
β_{1C}	Längsschlagwinkel, rad
β_{1S}	Querschlagwinkel, rad
β_{nC}	n/rev Cosinus-Schlagwinkel, rad
β_{nS}	n/rev Sinus-Schlagwinkel, rad
β_P	Schlagkonus (Einbauwinkel), rad
β_T	Schlagbewegung des Trimmzustandes, rad
$\dot{\beta}^*$	dimensionslose Schlaggeschwindigkeit, $\dot{\beta}^* = \dot{\beta} / \Omega$
$\ddot{\beta}^{**}$	dimensionslose Schlagbeschleunigung, $\ddot{\beta}^{**} = \ddot{\beta} / \Omega^2$
γ	Lockzahl, $\gamma = \rho C_{l\alpha} c R^4 / I_\beta$
γ	Wirbelbelegung, m/s
γ_b	gebundene Wirbelbelegung, m/s
γ_W	Wirbelbelegung im Nachlauf, m/s
Γ	Zirkulation, m^2/s
δ_3	Einbauwinkel des Schlaggelenkes, rad
δ_4	Einbauwinkel des Schwenkgelenkes, rad
ζ	Schwenkwinkel, rad
κ	Verlustfaktor der induzierten Geschwindigkeiten

λ	Durchflussgrad, $\lambda = \lambda_i + \mu_z$
λ_c	dimensionslose Steiggeschwindigkeit, $\lambda_c = V_c/(\Omega R)$
λ_i	induzierter Durchflussgrad, $\lambda_i = v_i/(\Omega R)$
μ	Fortschrittsgrad, $\mu = V_\infty \cos \alpha / (\Omega R)$
μ_z	axialer Fortschrittsgrad, $\mu_z = -\mu \tan \alpha$
ν	kinematische Viskosität, m^2/s
ν	dimensionslose Frequenz, $\nu = \omega / \Omega$
ν_β	dimensionslose Schlageigenfrequenz, $\nu_\beta = \omega_\beta / \Omega$
$\nu_{\beta e}$	effektive dimensionslose Schlageigenfrequenz, $\nu_{\beta e}^2 = \nu_\beta^2 + (\omega_{\beta 0}/\Omega)^2$
ν_ζ	dimensionslose Schwenkeigenfrequenz, $\nu_\zeta = \omega_\zeta / \Omega$
$\nu_{\zeta e}$	effektive dimensionslose Schwenkeigenfrequenz, $\nu_{\zeta e}^2 = \nu_\zeta^2 + (\omega_{\zeta 0}/\Omega)^2$
ν_Θ	dimensionslose Torsionseigenfrequenz, $\nu_\Theta = \omega_\theta / \Omega$
ϕ	Anströmwinkel am Profilsegment, $\phi = \tan^{-1} V_P / V_T \approx V_P / V_T$, rad
ϕ_S	Rollwinkel des Rotormastes, positiv rechte Seite runter, rad
ψ	Azimut (Rotorumlaufwinkel), $\psi = \Omega t$, rad
ψ_m	Azimut des m-ten Blattes, rad
ρ	Luftdichte, kg/m^3
ρ_m	Massendichte des Rotorblattes, kg/m^3
σ	Flächendichte, $\sigma = N_b c / (\pi R)$
σ_e	äquivalente Flächendichte
σ_{tip}	Flächendichte an der Blattspitze
τ	Zeitverzögerungskonstante, s
Θ	Steuerwinkel, rad
Θ	Einstellwinkel = Torsion + Steuerung, rad
Θ_{tip}	Steuerwinkel an der Blattspitze, rad
Θ_{con}	eingegebener Steuerwinkel, rad
ϑ	Änderung des Steuerwinkels aufgrund Elastizität, $\vartheta = \Theta - \Theta_{\text{con}}$, rad
Θ_{FP}	Flugbahnwinkel, rad
Θ_0	Steuerwinkel an der Blattwurzel, rad
Θ_{1C}	Quersteuerwinkel, rad
Θ_{1S}	Längssteuerwinkel, rad
Θ_{75}	Steuerwinkel bei $0,75 R$, rad
Θ_{tw}	Eingebauter Verwindungswinkel pro Radius, rad
ω_d	Schwingungsfrequenz des gedämpften Systems, rad/s
ω_n	Eigenfrequenz, rad/s
$\omega_{\beta 0}$	Schlageigenfrequenz des nicht rotierenden Rotorblattes, rad/s
$\omega_{\zeta 0}$	Schwenkeigenfrequenz des nicht rotierenden Rotorblattes, rad/s
ω_Θ	Torsionseigenfrequenz des rotierenden Rotorblattes, rad/s
$\omega_{\Theta 0}$	Torsionseigenfrequenz des nicht rotierenden Rotorblattes, rad/s
Ω	Rotordrehfrequenz, rad/s
ΩR	Blattspitzengeschwindigkeit im Schwebeflug, m/s

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Allgemeines	1
1.2	Unfälle früher Drehflügler	3
1.3	Grundlagen der Schwingungsbewegung	7
1.4	Zur Definition der „kleinen Auslenkungen“	10
1.5	Schlussfolgerungen	12
	Literatur	13
2	Dynamik der Schlagbewegung	15
2.1	Einleitung	15
2.2	Das Rotorblatt ohne Schlaggelenksabstand	17
2.3	Das Rotorblatt mit Schlaggelenksabstand	20
2.4	Das gelenklose, elastische Rotorblatt	25
2.4.1	Randbedingungen	28
2.4.2	Dynamik des eingespannten, nicht rotierenden Balkens	29
2.4.3	Balkenfunktionen	32
2.5	Die Dynamik des rotierenden Balkens	33
2.6	Das Galerkin-Verfahren	35
2.7	Das Rayleigh-Ritz-Verfahren	39
2.8	Die Finite Element Methode	44
2.8.1	Die Entwicklung der Elementeigenschaften	45
2.8.2	Das Zusammenstellen der Elemente	48
2.8.3	Die Einbringung der Randbedingungen	50
2.9	Eigenformen und Eigenfrequenzen	51
2.10	Die Lösung des dynamischen Antwortproblems	53
2.10.1	Starres Blatt mit Schlaggelenksabstand	53
2.10.2	Elastisches Rotorblatt	53
2.10.3	Die Eigenformgleichungen	53

2.11	Die Fourierreihe als Lösung der Differentialgleichung	55
2.11.1	Die Substitutionsmethode (harmonic balance)	56
2.11.2	Die Operatorenmethode	59
2.11.3	Die numerische Integration	60
2.12	Die Ermittlung der Biegespannungen	60
2.12.1	Die Modalmethode	60
2.12.2	Die Kraftsummenmethode	61
2.12.3	Die modale Biegemomentmethode	61
2.13	Schlussfolgerungen	62
2.14	Übungsaufgaben	64
	Literatur	65
3	Lösungsmethoden der Differentialgleichung	67
3.1	Einleitung	67
3.2	Das nicht drehende Referenzsystem	67
3.3	Eigenwerte im drehenden und im nicht drehenden System	75
3.3.1	Eigenwerte im drehenden System	75
3.3.2	Eigenwerte im nicht drehenden System	76
3.3.3	Der Eigenwert höherer Frequenz	77
3.3.4	Der Eigenwert niedriger Frequenz	78
3.4	Methoden der Analyse	80
3.4.1	Systeme mit konstanten Koeffizienten	81
3.4.2	Stabilität der Systeme mit konstanten Koeffizienten	81
3.4.3	Dynamische Antwort der Systeme mit konstanten Koeffizienten	82
3.4.4	Systeme mit periodischen Koeffizienten	82
3.4.5	Floquet-Verfahren zur Stabilitätsanalyse	83
3.4.6	Floquet-Verfahren zum dynamischen Antwortproblem	84
3.4.7	Weitere Verfahren	88
3.5	Finite-Element-Methode in Zeit	89
3.6	Schlussfolgerungen	92
3.7	Übungsaufgaben	93
3.7.1	Fourier Koordinaten Transformation (FCT, Mehrblattkoordinaten)	93
3.7.2	Eigenwerte im drehenden und im nicht drehenden System	93
3.7.3	Methoden der Analyse: Floquet-Theorie, FEM in Zeit	94
	Literatur	94
4	Gekoppelte Schlag-, Schwenk- und Torsionsbewegung	97
4.1	Einleitung	97
4.2	Die Schwenkbewegung des starren Rotorblattes	97
4.3	Die Schwenkbewegung des elastischen Rotorblattes	101

4.3.1	Dynamik der Schwenkbewegung im rotierenden System	103
4.3.2	Balkenfunktionen	104
4.3.3	Berechnung der Eigenformen und -frequenzen mit Hilfe der FEM	105
4.4	Dynamik eines torsionsstarren, elastisch gelagerten Rotorblattes	106
4.5	Elastische Torsion	110
4.5.1	Torsionsdynamik des rotierenden Blattes	112
4.5.2	Balkenfunktionen der Torsion	112
4.6	Kombinierte Schlag- und Schwenkbewegung	113
4.6.1	Starres Rotorblatt	113
4.6.2	Elastisches Rotorblatt	119
4.7	Kombinierte Schlag- und Torsionsbewegung	122
4.7.1	Starres Rotorblatt	122
4.7.2	Elastisches Rotorblatt	125
4.8	Die Schlag-Torsionskopplung (δ_3 -Effekt)	126
4.9	Schwenk-Torsionskopplung (δ_4 -Effekt)	129
4.10	Gekoppelte Schlag-, Schwenk- und Torsionsbewegung	130
4.10.1	Starres Rotorblatt	130
4.10.2	Elastisches Rotorblatt	135
4.11	Die Reaktionskräfte am Blattanschluss und am Rotorkopf	142
4.12	Schlussfolgerungen	148
4.13	Übungsaufgaben	150
4.13.1	Schwenkbewegung	150
4.13.2	Blattanschluss am Rotorkopf, Torsion	150
4.13.3	Schlag-Schwenk-Torsionsbewegung und Kopplungen	151
Literatur	152
5	Instationäre Aerodynamik	153
5.1	Einleitung	153
5.2	Grundlegende Gleichungen der Fluidmechanik	154
5.3	Die Profiltheorie	156
5.4	Die Prandtl'sche Traglinientheorie	158
5.4.1	Stationäre Strömung	160
5.4.2	Instationäre Strömung	160
5.4.3	Die quasistationäre Näherung	162
5.5	Instationäre Aerodynamik	163
5.5.1	Harmonische Profilbewegungen, Theodorsen's Lösung	165
5.5.2	Das Böenproblem	172
5.5.3	Anwendung auf den Rotor	175
5.5.4	Der Nachlauf kurz hinter dem Rotorblatt	176
5.5.5	Der Einfluss der veränderlichen Geschwindigkeiten	177

5.6	Der Einfluss des wiederkehrenden Nachlaufes	178
5.7	Die Anwendung quasistationärer Aerodynamik im Rotor	179
5.8	Modell des dynamischen Durchflusgrades	185
5.8.1	Dynamischer Durchfluss im Schwebeflug	186
5.8.2	Dynamischer Durchfluss im Vorwärtsflug	186
5.9	Schlussfolgerungen	188
5.10	Übungsaufgaben	190
5.10.1	Instationäre Aerodynamik	190
5.10.2	Bewegungsgleichungen mit instationärer Aerodynamik	191
	Literatur	191
6	Aeroelastische Stabilität im Schwebeflug und Vorwärtsflug	193
6.1	Einleitung	193
6.2	Schlag-Schwenk-Flattern im Schwebeflug	197
6.2.1	Bewegungsgleichungen	197
6.2.2	Die Analyse der Determinante	200
6.2.3	Die Eigenwertanalyse	202
6.2.4	Beispiel zum Schlag-Schwenk-Flattern	203
6.2.5	Bemerkungen zum Schlag-Schwenk-Flattern	204
6.3	Schlag-Torsions-Flattern im Schwebeflug	209
6.3.1	Bewegungsgleichungen	209
6.3.2	Die Torsionsdivergenz	212
6.3.3	Schlag-Torsions-Flattern	214
6.3.4	Schlag-Torsions-Flattern des Zweiblattrotors	217
6.3.5	Stall-Flattern	219
6.4	Das Schlag-Schwenk-Torsions-Flattern im Schwebeflug	221
6.5	Die Schlagbewegung im Vorwärtsflug	228
6.5.1	Eigenwerte im Schwebeflug	230
6.5.2	Eigenwerte im Vorwärtsflug	231
6.5.3	Die Eigenwerte des Vorwärtsfluges im nicht drehenden System .	233
6.6	Schlag-Schwenk-Flattern im Vorwärtsflug	235
6.6.1	Stabilität der Schlag- und Schwenkbewegung im Vorwärtsflug .	237
6.6.2	Lösung mit Annahme konstanter Koeffizienten	238
6.6.3	Lösung mit Anwendung der Floquet-Theorie	239
6.6.4	Gekoppelte Trimmung	240
6.7	Schlussfolgerungen	240
6.8	Übungsaufgaben	242
6.8.1	Schlag-Schwenk-Flattern	242
6.8.2	Torsionsdivergenz, Schlag-Torsions-Flattern	243
	Literatur	244

7	Boden- und Luftresonanz im Schwebeflug	247
7.1	Einleitung	247
7.2	Die Schwenkbewegung im nicht drehenden System	250
7.3	Die Bodenresonanzgleichungen	252
7.3.1	Eigenwerte im drehenden und im nicht drehenden System	257
7.3.2	Das Deutsch-Stabilitätskriterium	261
7.4	Bodenresonanz des zweiblättrigen Rotors	263
7.5	Die Luftresonanz	266
7.5.1	Die Schlag-, Schwenk- und Rumpfnickbewegung im Vakuum	267
7.5.2	Die Schlag-, Schwenk-, Rumpfnick- und Rumpfrollbewegung mit Luftkräften	269
7.6	Schlussfolgerungen	272
7.7	Übungsaufgabe	272
	Literatur	273
8	Mechanismen zur Vibrations- und Lärmreduzierung	275
8.1	Einleitung	275
8.2	Periodische Blattkräfte und ihre Auswirkungen im nicht drehenden System	277
8.3	Vibrationsisolationssysteme	279
8.4	Vibrationsabsorber	279
8.5	Aktive Vibrationsunterdrückungssysteme	281
8.5.1	Definition aktiver Rotorsteuerung	281
8.5.2	Elemente und Klassifizierung aktiver Steuerung	282
8.5.3	Ausgeführte Beispiele	282
8.5.4	Aufbau eines HHC-Systems und sein Leistungsbedarf	286
8.6	Hubschrauberstörgrößen	287
8.6.1	Vibrationen	287
8.6.2	Lärmemissionen	288
8.6.3	Rotorinstabilitäten	290
8.6.4	Boden- und Luftresonanz	293
8.7	Technik der aktiven Rotorsteuerung	294
8.7.1	Höherharmonische Steuerung	294
8.7.2	Einzelblattsteuerung	296
8.7.3	Zukünftige Steuerungssysteme	296
8.7.4	Lokale Blattsteuerung	298
8.8	Aktive Unterdrückung der Hubschrauberstörgrößen	305
8.8.1	Aktive Vibrationsminderung	305
8.8.2	Aktive Minderung der Lärmemissionen	309
8.8.3	Korrelation des Lärm- und Vibrationspegels	318

8.9	Simulation von aktiver Rotorsteuerung	323
8.9.1	Anforderungen an die strukturdynamische Modellierung	323
8.9.2	Anforderungen an die aerodynamische Modellierung	323
8.9.3	Anforderungen an die Modellierung des Rotornachlaufes	325
8.9.4	Typische Modellierungen bei aktiver Steuerung	326
8.10	Schlussfolgerungen	328
Literatur	329
9	Weitere Themenbereiche der Rotordynamik	333
9.1	Einleitung	333
9.2	Tests mit dynamisch skalierten Rotormodellen	334
9.2.1	Starre Modelle	335
9.2.2	Froude-skalierte Modelle	336
9.2.3	Mach-skalierte Modelle	338
9.2.4	Herstellung der Modelle	340
9.2.5	Instrumentierung und Messtechnik	340
9.2.6	Test des Modells	342
9.2.7	Schlussfolgerungen	343
9.3	Aeroelastische Optimierung eines Rotors	343
9.3.1	Einleitung	343
9.3.2	Optimierungsmethode	344
9.3.3	Schlussfolgerungen	348
9.4	Dynamik von Rotoren in Faserverbundbauweise	348
9.4.1	Einleitung	348
9.4.2	Vereinfachte FVW-Balken-Analyse	350
9.4.3	Balken-Analyse mit Hilfe der FEM	351
9.4.4	Dynamik lagerloser Rotoren	351
9.4.5	Dynamik zirkulationsgesteuerter Rotoren	355
Literatur	357
A	Tabellen der Blattanschlusskräfte	361
B	Lösungen zu den Übungsaufgaben	369
Sachverzeichnis	411

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1.1	Prinzip eines Schwingers zweiter Ordnung	7
Abb. 1.2	Einfluss der Dämpfung auf die Vergrößerungsfunktion und den Nacheilwinkel	9
Abb. 1.3	Zur Näherung der Winkelfunktionen	11
Abb. 2.1	Blatteigenfrequenzen existierender Hubschrauber	16
Abb. 2.2	Kräfte am schlagenden Rotorblatt	17
Abb. 2.3	Verallgemeinertes Feder-Masse-Ersatzsystem der Schlagbewegung	19
Abb. 2.4	Feder-Masse-Ersatzsystem beim Rotor mit Schlaggelenksabstand	22
Abb. 2.5	Einfluss des Gelenksabstandes auf Parameter der Schlagbewegung	23
Abb. 2.6	Ermittlung des effektiven Schlaggelenksabstandes	24
Abb. 2.7	Rotierender elastischer Balken unter Deformation	25
Abb. 2.8	Kräfte am Balkenelement	26
Abb. 2.9	Zur Ermittlung des Flächenträgheitsmomentes eines Balkens	27
Abb. 2.10	Rotierendes Blatt	28
Abb. 2.11	Lösung für die Eigenwerte	31
Abb. 2.12	Eigenformen des nicht rotierenden Balkens	32
Abb. 2.13	Diskretisierung einer kontinuierlichen Verteilung	43
Abb. 2.14	FEM Modell des rotierenden Balkens	44
Abb. 2.15	Notation eines Elementes i in der FEM	45
Abb. 2.16	Randbedingungen bei gelenkiger Stützung	50
Abb. 2.17	Randbedingungen bei statisch überbestimmter Stützung	50
Abb. 2.18	Randbedingungen bei den Torsionsformen	51
Abb. 2.19	Eigenfrequenzen und Eigenformen des rotierenden Balkens	52
Abb. 2.20	Skizze eines Rotorblattes mit gesteuerter Blattspitze	57
Abb. 3.1	Darstellung der Blattbewegung für den differentiellen kollektiven Schlagmode	69
Abb. 3.2	Zur Bewegungsgleichung mit Rotorkopfbewegung	73
Abb. 3.3	Schlagwinkel bei der hochfrequenten Eigenform	78
Abb. 3.4	Definition der Anfangs- und Endzeit bei FEM in Zeit	90
Abb. 3.5	Diskretisierung einer Periode mit vier Zeitelementen	92
Abb. 4.1	Kräfte in der Schwenkbewegung	98

Abb. 4.2	Kräfte und Auslenkungen am schwenkenden Balken	102
Abb. 4.3	Hauptachsen eines Profils	103
Abb. 4.4	Randbedingungen des gelenkig gelagerten Rotorblattes	104
Abb. 4.5	Eigenfrequenzen und -formen der Schwenkbewegung des rotierenden Balkens	106
Abb. 4.6	Momente in der Torsionsbewegung des starren Blattes	107
Abb. 4.7	Zur Abschätzung der generalisierten Torsionsmassenträgheit	108
Abb. 4.8	Zum Momentengleichgewicht der elastischen Torsion	110
Abb. 4.9	Eigenfrequenzen und Eigenformen der Torsionsbewegung des rotierenden Blattes	113
Abb. 4.10	Kräfte der gekoppelten Schlag-Schwenkbewegung	114
Abb. 4.11	Zum Begriff der Corioliskraft	115
Abb. 4.12	Federmodell für elastischen Rotorkopf und -blattanschluss	117
Abb. 4.13	Kräfte in der elastischen Schlag-Schwenkbewegung	120
Abb. 4.14	Zur gekoppelten Schlag-Torsionsbewegung des starren Blattes	123
Abb. 4.15	Erzeugung einer Schlag-Torsionskopplung	126
Abb. 4.16	Erzeugung einer Schwenk-Torsionskopplung	129
Abb. 4.17	Blattkonfiguration der Schlag-Schwenk-Torsionsbewegung	130
Abb. 4.18	Kräfte in der Schlagbewegung	131
Abb. 4.19	Kräfte in der Schwenkbewegung	132
Abb. 4.20	Kräfte und Momente in der Torsionsbewegung	133
Abb. 4.21	Zur Schlag-, Schwenk-, Torsionskopplung des elastischen Balkens	135
Abb. 4.22	Beispiel für Eigenfrequenzdiagramme verschiedener Rotoren	138
Abb. 4.23	Beispiel für Eigenformen verschiedener Rotorblätter, Teil 1	140
Abb. 4.24	Beispiel für Eigenformen verschiedener Rotorblätter, Teil 2	141
Abb. 4.25	Koordinatensysteme zur Transformation der Kräfte	142
Abb. 4.26	Blattkräfte im Schwebeflug	147
Abb. 5.1	Profil im Luftstrahl	154
Abb. 5.2	Aufteilung in das Dicken- und Auftriebsproblem, NACA 23012	157
Abb. 5.3	Zum Verdrängungsproblem	157
Abb. 5.4	Zum Auftriebsproblem: Wirbeldichteverteilung $\gamma_b(x)$	157
Abb. 5.5	Nachlaufkonzept des Flügels mit Auftrieb	158
Abb. 5.6	Zum Nachlaufmodell der Prandtl'schen Traglinientheorie	159
Abb. 5.7	Wirbeldichtekonzept des bewegten Profils	161
Abb. 5.8	Zur quasistationären Annahme	162
Abb. 5.9	Zur physikalischen Interpretation der reduzierten Frequenz	166
Abb. 5.10	Eigenschaften der Theodorsenfunktion	167
Abb. 5.11	Verhältnis von nicht zirkulatorischen zu zirkulatorischen Auftriebskräften	169
Abb. 5.12	Radiale Verteilung der reduzierten Frequenzen	170
Abb. 5.13	Instationärer Auftriebsbeiwert bei Anstellwinkelschwingungen	171
Abb. 5.14	Normalgeschwindigkeit bei sprungförmiger Profilbewegung und Böe	173
Abb. 5.15	Normalgeschwindigkeit bei periodischer Profilbewegung und Böe	173

Abb. 5.16	Küssnerfunktion als Auftriebsantwort des periodischen Böenproblems. Bezugspunkt der Böe ist die Profilmitte	174
Abb. 5.17	Piziali's Modell des Nachlaufes	177
Abb. 5.18	Loewy's Modell des Wirbeldichtefeldes im Schwebeflug (Dreiblattrotor)	178
Abb. 5.19	Kräfte und Geschwindigkeiten am Blattelement	180
Abb. 6.1	Blattmodell zum Schlag-Schwenk-Flattern	197
Abb. 6.2	Stabilitätsgrenzen des Schlag-Schwenk-Flatters	203
Abb. 6.3	Stabilitätsgrenzen des Schlag-Schwenk-Flatters	204
Abb. 6.4	Zum Schlag-Torsions-Flattern	210
Abb. 6.5	Lage der Achsen im Profilschnitt	213
Abb. 6.6	Stabilitätsgrenzen der Torsionsdivergenz und des Schlag-Torsions- Flatters	217
Abb. 6.7	Zweiblattrotor mit elastischen Steuerstangen	218
Abb. 6.8	Stabilitätsgrenzen beim Zweiblattrotor	219
Abb. 6.9	Torsionsmoment an der Blattwurzel mit Stall-Flattern	220
Abb. 6.10	Schwenkdämpfung eines gelenklosen Rotors im Schwebeflug	226
Abb. 6.11	Schwenkfrequenz und -dämpfung	226
Abb. 6.12	Schlagfrequenz und -dämpfung	227
Abb. 6.13	Torsionsfrequenz und -dämpfung	227
Abb. 6.14	Eigenfrequenzen im Vakuum und Blattspitzenauslenkung	228
Abb. 6.15	Eigenwert der Schlagbewegung im Schwebeflug	231
Abb. 6.16	Einfluss des Fortschrittsgrades auf die Eigenwerte der Schlagbewegung	232
Abb. 6.17	Eigenwerte der Schlagbewegung im Vorwärtsflug, nicht drehendes System	234
Abb. 6.18	Geometrie des Rotors	235
Abb. 6.19	Einfluss verschiedener Parameter auf die Schwenkdämpfung	236
Abb. 7.1	Bodenresonanz früher Drehflügler	248
Abb. 7.2	Auswirkung von Bodenresonanz auf heutige Hubschrauber	248
Abb. 7.3	Bewegungsformen der Schwenkbewegung im nicht drehenden System	251
Abb. 7.4	Massenkräfte der Rotorkopfbewegung in der Schwenkbewegung	252
Abb. 7.5	Modellierung der Bodenresonanz	253
Abb. 7.6	Coleman-Diagramm zur Bodenresonanz, schwenkweicher Rotor	259
Abb. 7.7	Dämpfung in der Bodenresonanz	260
Abb. 7.8	Coleman-Diagramm zur Bodenresonanz, schwenksteifer Rotor	261
Abb. 7.9	Schwerpunktbewegung beim zweiblättrigen Rotor mit Schwenkbewegung	264
Abb. 8.1	Prinzip des Vibrationsabsorbers	280
Abb. 8.2	Pendelabsorber am Hauptrotor	280
Abb. 8.3	Steuerwinkel zur Flugsteuerung und bei aktiver Rotorsteuerung	282
Abb. 8.4	Klassifikation aktiver Rotorsteuerungskonzepte	283
Abb. 8.5	Charakteristika der Hubschraubervibrationen eines vierblättrigen Rotors	287
Abb. 8.6	Entstehung des BVI-Lärms	289

Abb. 8.7	Gemessene Druckverteilung während BVI (Messungen DLR 1992)	289
Abb. 8.8	Wirbelentstehung und Blatt/Wirbel-Interaktion	290
Abb. 8.9	Beispiele von Stößen und Ablösungen bei hoher Fluggeschwindigkeit	291
Abb. 8.10	Druckverteilung am Blattprofil bei hohen Anstellwinkeln	291
Abb. 8.11	Auftriebshysterese für ein schwingendes Profil mit Hinterkantenklappe	292
Abb. 8.12	Hysteresis des Momentes für ein schwingendes Profil	293
Abb. 8.13	Variation der Steuerstangenkraft beim Stall-Flattern	293
Abb. 8.14	HHC-Aktuatoren	295
Abb. 8.15	Bo105 S1 von ECD mit IBC Blattwurzelsteuerung und Mikrofonen am Landegestell	295
Abb. 8.16	IBC-Aktuatoren und Hardwarerealisierung	296
Abb. 8.17	IBC-Windkanaltests bei der NASA Ames	297
Abb. 8.18	Zukünftige integrierte Blattwurzelsteuerungssysteme	297
Abb. 8.19	Mehrach-Taumelscheibe (META) am Beispiel eines Rotors mit sechs Blättern	298
Abb. 8.20	Hinterkanten-Klappenkonzepte	299
Abb. 8.21	Full-scale Version eines Blattsegments mit Hinterkantenklappe, DLR 1998	300
Abb. 8.22	Flugversuchsträger BK117 von ECD mit Klappenrotor	300
Abb. 8.23	ONERA/DLR Modellrotor mit Hinterkantenklappen	301
Abb. 8.24	Full-scale Versionen von Klappensystemen	301
Abb. 8.25	Adaptive Profilgeometrie	302
Abb. 8.26	Direkte Verwindungskonzepte durch aktive Implantate	303
Abb. 8.27	Verteilte Aktuatorik auf dem Rotorblatt für direkte Verwindung	304
Abb. 8.28	Erreichte Blattspitzentorsion mit aktiver Verwindungssteuerung, DLR	304
Abb. 8.29	Hubschraubervibrationen im Vorwärtsflug	305
Abb. 8.30	Schlag- und Schwenkbiegemomente im Vorwärtsflug	306
Abb. 8.31	HHC-Einfluss auf Vibrationen und Schwenkbiegemomente	307
Abb. 8.32	Stereo-optische Messung der Blattposition	308
Abb. 8.33	Schlagbewegung der Blattspitze, gemessen mit SPR	309
Abb. 8.34	Torsionsbewegung der Blattspitze, gemessen mit SPR	309
Abb. 8.35	DLR Rotorversuchsstand im DNW	310
Abb. 8.36	Lärmkonturen ohne und mit aktiver Rotorsteuerung	311
Abb. 8.37	Variation des Lärmpegels mit der HHC-Phase im Landeanflug	311
Abb. 8.38	Blattinstrumentierung	312
Abb. 8.39	Innenansicht des DLR-Rotorversuchsstandes	312
Abb. 8.40	Blattdrücke ohne und mit HHC	313
Abb. 8.41	Versuchsaufbau zur Strömungssichtbarmachung	314
Abb. 8.42	Wirbel- und Blattpositionen ohne und mit HHC bei $\psi = 60^\circ$	315
Abb. 8.43	Tiefpassgefilterte Blattdrücke ohne und mit HHC	315
Abb. 8.44	LDV-Messanordnung des DLR 1994	316
Abb. 8.45	LDV-Messungen an vor- und rücklaufender Seite	316

Abb. 8.46	PIV-Messung am Rotor im DNW, 2001	317
Abb. 8.47	Geschwindigkeitsvektorfeld und Rotation der Strömung	318
Abb. 8.48	Wirbelflugbahn durch die Rotorebene ohne und mit HHC	318
Abb. 8.49	Lärm-Vibrations-Korrelation bei 4/rev HHC im Landeanflug	319
Abb. 8.50	RTA im 40 ft × 80 ft Windkanal der NASA Ames	320
Abb. 8.51	IBC-Aktuatoren am RTA	320
Abb. 8.52	Mikrofonanordnung im 40 ft × 80 ft Windkanal der NASA Ames	321
Abb. 8.53	Lärmessungen im DNW und 40 ft × 80 ft Windkanal der NASA Ames	321
Abb. 8.54	Lärm- und Vibrationskorrelation bei 2/rev IBC im Landeanflug	322
Abb. 8.55	Beispiel einer Hybridmodellierung	327
Abb. 9.1	Aeroelastische Optimierung – Blockschaltbild	344
Abb. 9.2	Vibrationsoptimierung: Rotorlasten, Gütefunktionswert und CPU-Bedarf	347
Abb. 9.3	Dämpfung der Eigenformen	348
Abb. 9.4	Konfiguration eines lagerlosen Rotors	352
Abb. 9.5	FEM-Modellierung des Blatthalses	353
Abb. 9.6	Prinzip des Rotors mit Zirkulationssteuerung	355

Tabellenverzeichnis

Tab. 2.1	Randbedingungen verschiedener Einspannungen	28
Tab. 2.2	Parameter der Eigenschwingungen des homogenen Balkens	32
Tab. 4.1	Eigenfrequenzen verschiedener Rotorblattanschlusstypen	110
Tab. 4.2	Blattwurzelkräfte und -momente im drehenden System	143
Tab. 4.3	Rotorkopfkräfte und -momente im nicht drehenden System	143
Tab. 9.1	Ähnlichkeitsparameter von starren Modellen	335
Tab. 9.2	Ähnlichkeitsparameter von Froude-skalierten Modellen	336
Tab. 9.3	Ähnlichkeitsparameter von Mach-skalierten Modellen	338
Tab. A.1	Vertikale Blattkraft → vertikale Rotorkopfkraft, Rotor mit 2–4 Blättern	361
Tab. A.2	Vertikale Blattkraft → vertikale Rotorkopfkraft, Rotor mit 5–7 Blättern	362
Tab. A.3	Horizontale Blattkräfte → Rotorwiderstand, Rotor mit 2–4 Blättern . . .	362
Tab. A.4	Horizontale Blattkräfte → Rotorwiderstand, Rotor mit 5–7 Blättern . .	363
Tab. A.5	Horizontale Blattkräfte → Rotorseitenkraft, Rotor mit 2–4 Blättern . .	364
Tab. A.6	Horizontale Blattkräfte → Rotorseitenkraft, Rotor mit 5–7 Blättern . .	365
Tab. A.7	Blattschlagmoment → Rotorrollmoment, Rotor mit 2–4 Blättern . . .	366
Tab. A.8	Blattschlagmoment → Rotorrollmoment, Rotor mit 5–7 Blättern . . .	366
Tab. A.9	Blattschlagmoment → Rotornickmoment, Rotor mit 2–4 Blättern . . .	367
Tab. A.10	Blattschlagmoment → Rotornickmoment, Rotor mit 5–7 Blättern . . .	367



Einleitung

1

1.1 Allgemeines

Das Ziel dieses Kurses ist es, die Hubschrauberdynamik zu studieren. Dabei wird der Schwerpunkt auf den Rotor als eines der Hauptelemente eines Hubschraubers fallen. Generell besteht die Hubschrauberdynamik aus folgenden Gebieten: das Eigenschwingsverhalten, das heißt die Ermittlung der Eigenfrequenzen (engl. natural frequency), Schwingungen aufgrund dynamischer Anregung (= das Antwortverhalten, engl. dynamic response) und die Aeroelastische Stabilität.

Es werden folgende Themen diskutiert werden: die physikalischen Phänomene, Methoden der Analyse und die Anwendungen auf den Hubschrauberentwurf. Um ein Verständnis der Materie zu erlangen, braucht man einen gewissen Grad der Vertrautheit in den Grundlagen der Hubschraubertheorie, der Schwingungslehre und den Grundlagen der Aerodynamik.

Die Dynamik von Hubschraubern (engl. Helicopter, Rotorcraft) ist grundlegend von komplexer Natur und vereint elastische, Trägheits- und aerodynamische Kräfte (engl. elastic, inertia and aerodynamic forces). Daher ist die Hubschrauberdy namik wesentlich schwieriger zu behandeln als die Starrflüglerdy namik und die Gründe dafür sind im Folgenden aufgelistet.

- **Rotation:**

Die Drehung der Rotorblätter ist der Hauptgrund der meisten hubschrauberrelevanten dynamischen Probleme. Aufgrund der Rotation entstehen sowohl komplizierte aerodynamische Kräfte, Massenträgheitskräfte und insbesondere Zentrifugalkräfte. Außerdem gibt es bei Frequenzen von Vielfachen der Rotordrehfrequenz die Möglichkeit der Resonanz.

- **Aerodynamische Randbedingungen:**

Im Vorwärtsflug entsteht ein unsymmetrisches Strömungsfeld im Rotorbereich, welches in allen möglichen Arten periodischer aerodynamischer Kräfte seinen Ausdruck findet. Diese wiederum erzeugen ein dynamisches Antwortproblem und können zu aeroelastischer Instabilität führen.

- **Unebene aerodynamische Oberflächen:**

Aus aerodynamischer Sicht ist der Hubschrauber kein schlanker Körper mit glatter Oberfläche. Insbesondere sind der Rumpf und der Rotorkopf mögliche Ursachen für einen gestörten Umströmungsvorgang, der sich in hohem Leistungsbedarf und in Vibrationen niederschlägt.

- **Strömungsablösung, Kompressibilität:**

Grundsätzlich variiert der Anstellwinkel sowohl entlang des Rotorblattes als auch in Umlaufrichtung erheblich. In der Tat ist im schnellen Vorwärtsflug ein beachtlicher Teil der Rotorebene auf der rücklaufenden Seite unter Rückanströmbedingungen zu finden und ein Teil des Blattes kommt in Bereiche von großen Anstellwinkeln und damit verbundenen Strömungsablösungen, die sich in starken Vibrationen äußern können. Umgekehrt kommt es an der vorlaufenden Seite gleichzeitig zu sehr hohen Unterschallmachzahlen (bis $M = 0,9$ und etwas darüber), was mit einer Stoßwellenbildung und einem entsprechenden Zuwachs an Widerstand verbunden ist. Außerdem wandert der Druckpunkt in Richtung Profilmitte und ein starkes aerodynamisches Nickmoment entsteht – allesamt führen diese Effekte zu großen statischen und vor allem dynamischen Kräften und Vibrationen.

- **Elastische Rotorblätter:**

Rotorblätter sind im Hinblick auf ihr Deformationsverhalten in Schlag-, Schwenk- und Torsionsrichtung grundsätzlich sehr elastische Gebilde. Dieses führt zu komplizierten bewegungsinduzierten Kräften, die vielfältige aeroelastische Probleme verursachen. Insbesondere ist die sehr schwach gedämpfte Schwenkbewegung eine Ursache vieler Probleme.

Die Grundlagen der Hubschraubertheorie gehen auf Glauert und Lock zurück [1, 2], die diese Theorie 1926/1927 im Zusammenhang mit der Markteinführung der Autogyros von de la Cierva entwickelten. Eine gute Gesamtübersicht der Hubschrauberdyamik ist in den Büchern von Johnson [3, 4] enthalten und die Grundlagen der Hubschrauberaerodynamik und -dynamik sind in dem Klassiker von Gessow und Myers [5] dargelegt. Weiter sind die Bücher von Bramwell [6] und Bielawa [7] zu empfehlen. Als Grundlektüre für die Aeroelastik des Flugzeuges sei auf die Standardwerke von Fung [8], Dowell [9], Bisselinghoff [10] (alle in Englisch) und von Försching [11] (in Deutsch) verwiesen. Darin sind auch die Grundlagen der Methoden nach Galerkin und Rayleigh-Ritz sowie die der instationären Aerodynamik ausführlich behandelt. Die Prinzipien der Aerodynamik idealer Fluide sind z. B. in [12] dargelegt. Außerdem wird auf das Buch von Meirovitch [13] hingewiesen, der die Grundlagen der Behandlung von strukturdynamischen Problemstellungen sehr ausführlich und mit vielen Beispielen beschreibt.

1.2 Unfälle früher Drehflügler

Nachfolgend sind einige Beispiele von Unfällen mit frühen Hubschrauberentwürfen der bekannten Pioniere Focke, Flettner und Sikorsky aufgeführt, die alle mit den damals noch weitgehend unbekannten Problemen der Rotordynamik zusammenhängen und in den Jahren 1938 bis 1945 auftraten. Sie sind in [14–17] dokumentiert. Auch **de la Cierva** hatte die Folgen von zu hohen dynamischen Beanspruchungen erfahren müssen [18].

Focke FW-61

Februar 1938: Beim Einfliegen sechs Tage vor den Schauflügen in der Deutschlandhalle ist ein Kardan im Fluge gebrochen. Die Maschine neigte sich, war nicht hoch, konnte aber nicht mehr gelandet werden, ohne dass Rumpf und Rotorträger knickten.

Focke Fa-223

August 1939: Beim ersten Versuchslauf gingen bei nur etwas stärkerem Gasgeben alle sechs Blätter der Maschine steil hoch bis an die oberen Anschläge; es sah aus wie zwei zusammengeklappte Regenschirme. Selbst beim Abdrosseln gingen sie erst auf sehr niedrige Drehzahlen hin langsam und unter eigentümlichen Schwankungen in die untere Lage zurück. Niemals war so etwas bei der FW-61 vorgekommen. Focke entdeckte schließlich, dass beim Aufwärtsgehen und Nachhintenzurückbleiben der Blätter der wahre Anstellwinkel so wächst, dass die Zunahme der Auftriebskräfte gegenüber der Zunahme der zentrifugalen Komponente, die die Blätter angespannt hält, überwog. Er entdeckte dabei, dass jedes gewöhnliche rechtwinklige Kardangelenk diese Erscheinung hervorruft. Man musste also von einer Instabilität der Blattstellung im Raum sprechen und die Kardangelenke mussten umkonstruiert werden. (Es handelt sich hier offensichtlich um eine statische Instabilität der Schlag-Schwenk-Torsionskopplung, in der Auswirkung ähnlich einer Torsionsdivergenz.)

März 1940: Es brach durch neue, ganz unerwartete Schwingungerscheinungen die bereits an der Fessel fliegende Maschine zusammen. (Es handelt sich hier vermutlich um Materialermüdung mit nachfolgendem Bruch aufgrund großer Schwingungsamplituden, vermutlich Luftresonanz.)

Februar 1941: Durch den Bruch einer fehlerhaften Schweißstelle, wie er freilich an jedem Normalflugzeug auch aufgetreten wäre, löste sich während eines Fluges der Verband des rechten Auslegergerüstes und hatte den Absturz der Maschine zur Folge. Das Flugzeug befand sich dabei in etwa 1700 m Höhe und der Flugzeugführer verließ nach dem Erkennen der Situation augenblicklich die Maschine durch Eindrücken der linken Bordwand. Der gerade mit dem Ablesen eines im Rumpf angebrachten Messinstrumentes beschäftigte Bordwart wurde von ihm noch gleichfalls zum Verlassen der Maschine aufgefordert, konnte dieser Aufforderung jedoch nicht schnell genug folgen und wurde dann möglicherweise durch die großen Zentrifugalkräfte der durch die Zerstörung des rechten Rotors stark trudelnden Maschine am Verlassen derselben gehindert.

In einem anderen Falle brach bei dem gleichen Muster eine Stoßstange der Steuerung eines Rotorblattes, worauf das jetzt ungesteuerte Blatt anfing, aus der Spitzenebene herauszulaufen und durch die sich ergebende Unwucht das Abfliegen des Rotors zur Folge hatte. Bis zur Klärung der Ursachen hatte dieser Unfall die Sperrung des Musters durch die Zulassungsbehörde zur Folge. Nach Abschluss der Untersuchung mussten die Steuerungsstoßstangen bei allen Maschinen verstärkt werden, bevor die Wiederzulassung erlaubt wurde.

Dezember 1943: Eine Fa 223 sollte im Hochgebirge bei Chamonix im Montblanc Massiv eine Anzahl in einer Hütte eingeschlossener Bergsteiger retten. Bei der Umkreisung eines hochgelegenen Hotels, um den Landeplatz auszumachen, stürzte die Maschine ab und beide Insassen waren tot. Augenzeugen sprachen von einem Bruch des rechten Rotors. Die Ursache war eine Schwebungsresonanz. (Es handelt sich hier vermutlich um Materialermüdung mit nachfolgendem Bruch aufgrund großer Schwingungsamplituden, vermutlich Luftresonanz.)

Fa-330

Anfang der 1940er: Im Windkanal Chalais-Meudon bei Paris erfährt eine Fa-330 Bodenresonanz. Bei Focke-Achgelis wird das Phänomen der Bodenresonanz erkannt, mathematisch behandelt und mit einem Großversuch bestätigt.

Flettner Fl-184

November 1937: Dieser Tragschrauber stürzte bei einem Erprobungsflug aus einer Höhe von 100 m ab. Die Maschine hatte nach dem Start eine weite Runde geflogen und wollte in einer etwas steilen und kurzen Linkskurve gegen den Wind zur Landung einschweben, als sie plötzlich in einem steilen Winkel von etwa 70° zum Sturzflug überging, aus dem der Flugzeugführer sie nicht mehr abfangen konnte. Da sich im Ausland bereits ähnliche Unfälle mit Tragschraubern zugetragen hatten und eine gewisse Analogie zu diesen festzustellen war, wurde auch hier die auslösende Ursache wahrscheinlich in einer falschen Einstellung des Höhenleitwerkes gesehen, das während des Fluges keine Verstellmöglichkeit besaß und somit nicht zum Wiederaufrichten der Maschine benutzt werden konnte.

Flettner Fl-265

Sommer 1939: Die von der Fw-61 im Jahre 1937 aufgestellten Weltrekorde sollten offiziell überboten werden. Vermutlich infolge mangelhafter Schmierung hatte das im unteren Getriebe befindliche Kegelräderpaar – und hierbei insbesondere das hochbelastete Ritzel der ersten Untersetzungsstufe – so hohe Betriebstemperaturen erreicht, dass die Zähne ihre Härte verloren und in der Krafrichtung deformiert wurden. Bei Vollgas-Horizontalflug drückten sich daraufhin die Zähne am Ritzel völlig zur Seite, so dass der Motor durchlief ohne noch Leistung auf den Rotor zu übertragen. Obwohl der Pilot bereits am gleichen Tage mehrere Umschaltungen vorgenommen hatte, erkannte er die Situation nicht, auch als die Maschine in den Gleitflug überging und die Rotordrehzahl merklich geringer wurde. Er versuchte, den Flugplatz zu erreichen, doch kamen kurz vorher die Rotoren fast zum

Stillstand und schlugen in etwa 30 m Höhe nach Erreichen eines extrem steilen Kegelwinkels zusammen, worauf die Maschine abstürzte. Sie geriet in Brand und wurde restlos zerstört. Dieser Unfall gab Veranlassung, die unbedingte Automatisierung der Umschaltung in den Tragschraubenflug zu fordern, welche dann auch bei den restlichen Mustern der Fl-265 noch erreicht wurde. Obwohl der Flugzeugführer schon vier gewollte Umschaltungen mit der gleichen Maschine und am gleichen Tage vorgenommen hatte, versagte er in dem Augenblick, in dem eine Umschaltung durch eine Störung notwendig wurde.

Flettner Fl-282

November 1944: Die Maschine geriet bei einem Flug in etwa 300 m Höhe in eine dicke Regenwolke. Der Flugzeugführer versuchte, durch starkes Drücken den unteren Rand der Wolke zu erreichen, wobei die Maschine eine ungewollt steile Lage annahm. Nach dem Austritt aus der Wolke versuchte der Flugzeugführer durch plötzliches Ziehen die Normallage wieder herzustellen. Der Rotor bäumte sich hierbei stark auf und ein Rotorflügel schlug gegen die Seitenflosse, wobei er einen Teil seiner Sperrholzbeplankung verlor. Dieser Flügel lief dann aus der Spur und schlug nach einiger Zeit mit einem Blatt des Gegenrotors zusammen, worauf die Maschine abstürzte. Die Ursache dieses Unfalles lag zweifellos in einer erheblichen flugmechanischen Überbeanspruchung, da die erreichte Geschwindigkeit weit über das zulässige Maß hinausgegangen war und das zu plötzliche Abfangen eine zu starke Durchbiegung des Drehflügel hervorgerufen hatte.

Sikorsky VS-300

September 1939: Erstflug in gefesselter Form, Igor Sikorsky am Steuer. Nach dem Start des Motors fing die Maschine an, heftig zu vibrieren, als der Rotor drehte, was sich beim Gasgeben noch verstärkte und die ganze Maschine auf dem Boden hin- und hersprang. Die Steuerhebel rüttelten heftig hin und her. Der Pilot wurde im Sitz so sehr umhergeworfen, dass die Umstehenden ihn nur unscharf erkennen konnten. Mehrere Gründe waren für die Erscheinungen verantwortlich: Unwuchten in den Rotorblättern, schlechter Spurlauf, ungleiche Schwenkdämpfer und Untermotorisierung, so dass im Bodeneffekt gerade so geschwebt werden konnte, aber vermutlich aufgrund des großen nötigen Kollektivsteuers bereits Strömungsablösungen begannen.

Dezember 1939: Eine Windböe erfasste den in geringer Höhe schwebenden Hubschrauber, ließ ihn abtreiben und beim Bodenkontakt umwerfen, wobei die Rotorblätter in den Boden schlugen und die Maschine erheblich beschädigt wurde. Der Grund war trotz zyklischer Steuerung eine ungenügende Steuerautorität des Piloten, die zum Stabilisieren im Schwebeflug gerade so ausreichte, aber nicht zur Kompensation größerer Störungen.

September 1940: Beim Einschweben zur Landung in ca. 5 m Höhe nach dem ersten Flug über mehr als nur dem Flugfeld selbst begann die Maschine heftig zu schütteln und rollte vehement erst zu einer, dann zu der anderen Seite und sank schnell zu Boden. Nach heftigem Aufprall konnte der Pilot, Igor Sikorsky persönlich, unverletzt aussteigen. Der Grund waren zu große Schwenkbewegungen und damit verbundene Unwuchten, die aufgrund fehlenden Öls in den Schwenkdämpfern entstanden waren. Diese waren absichtlich

nicht nachgefüllt worden, da man sich fragte, ob man auf die die Konstruktion doch sehr komplizierter machenden Schwenkdämpfer nicht auch verzichten könnte – und war um eine Erfahrung reicher.

September 1940: Beim Versuch, in niedriger Höhe von ca. 7 m Fluggeschwindigkeiten von ca. 60 km/h zu erreichen, brach einer der Ausleger der zwei horizontalen, für die Lagesteuerung verwendeten Heckrotoren ab und beschädigte den Antrieb des vertikalen Heckrotors. Dadurch war weder Lage- noch Giersteuerung mehr möglich und die Maschine vollführte eine halbe Rolle, bevor sie am Boden zerschellt. Wiederum war Igor Sikorsky am Steuer und konnte sich weitgehend unverletzt aus dem Wrack befreien. Der Grund war ein vermutlich bei dem vorgenannten Unfall bereits angebrochener Träger, der durch die dauernden Vibrationen einen Ermüdungsbruch hatte.

Oktober 1940: Ein Blattlager brach und das Heckrotorblatt flog weg. Die Unwucht verdrillte den Heckausleger, so dass das zweite Blatt auch abflog und am Rumpfgerüst zerschellte. Der fehlende Drehmomentenausgleich ließ die Maschine gieren, aber Sikorsky am Steuer konnte sofort landen.

März 1941: Bei Flugversuchen mit Schwimmern brach wieder ein Heckrotorblattlager mit gleichen Folgen; die Notwasserung verlief glimpflich.

Mai 1941: Bei einer Kurve mit Rückenwind waren die Steuerwinkel an ihren Grenzen angelangt und die Maschine hart gelandet, wobei das Fahrwerk brach und das Leitwerk erheblich beschädigt wurde. Wiederum war nicht ausreichende Steuerautorität der Grund.

Oktober 1941: Eine Landung mit Gummischläuchen für Wasserungen erzeugte schnell größer werdende Schüttelbewegungen der ganzen Maschine, die nach dem Abheben sofort verschwanden. Der Pilot Gluhareff schaltete daraufhin den Motor aus, die Maschine fiel aus ca. 3 m Höhe zu Boden, der Heckausleger knickte ab und der Heckrotor schlug in den Boden. Grund war die Bodenresonanz, da die Gummischläuche eine wesentlich weichere und ungedämpftere Feder darstellten als das bisherige Fahrwerk mit Oldämpfern.

Dezember 1941: Die im Nachfolgemodell XR-4 vorgesehene vollständig zyklische Steuerung ohne Schwenkdämpfer ist in die VS-300 zu Testzwecken eingebaut worden (bis dahin hatte sie nur kollektive Steuerung am Hauptrotor). Bei Nenndrehzahl begann ein leichtes, immer stärker werdendes Vibrieren, das aber ein Abheben erlaubte. Die kleinste zyklische Steuereingabe führte allerdings in wenigen Sekunden zu sehr großen Vibrationen, die zur umgehenden Landung zwangen. Der Grund wurde nach vielen Fehlversuchen in den fehlenden Schwenkdämpfern gefunden. Nach Einbau derselben traten die mit Boden- und Luftresonanz zusammenhängenden Probleme nicht mehr auf.

Sikorsky XR-4

Januar 1942: Bei Nenndrehzahl vor dem Erstflug schüttelte die Maschine aufgrund schlecht eingestellten Spurlaufs der Rotorblätter; eines lief höher als die anderen. Als Folge vollführte der Steuernüppel eine permanente Kreisbewegung, die vom Piloten nicht unterdrückt werden konnte.

April 1942: Bei Demonstrationsflügen wurde in 1500 m Höhe die Fluggeschwindigkeit zurückgenommen und die Maschine fing an, selbständig heftige Bewegungen zu

vollführen; Steuerautorität ging verloren und erst die Erhöhung der Fluggeschwindigkeit beseitigte das Problem. Vermutlich wurde die in dieser Höhe erreichbare Minimalgeschwindigkeit unterschritten und Strömungsablösungen an den Rotorblättern führten zu großen unkontrollierten Schlagbewegungen und damit den Hubschrauberbewegungen. Die Fahrtaufnahme ließ die Strömung wieder anliegen und beseitigte damit das Problem.

Auch **de la Cierva** hatte mit seinen Autogyros schlechte Erfahrungen mit dynamischen Lasten machen müssen.

Februar 1927: Zu dieser Zeit waren Schlaggelenke vorhanden, um durch die sich selbstständig einstellende Schlagbewegung die unsymmetrische Auftriebsverteilung im Vorwärtsflug zu kompensieren. Ein Rotorblattabsatz des vierblättrigen Rotors brach während des Fluges, die Maschine taumelte zu Boden und zerschellte. Der Pilot Frank Courtney kam fast unverletzt davon. Der Grund des Bruches waren zu große dauernde Wechsellasten in Schwenkrichtung der Rotorblätter. Die Einführung des Schwenkgelenkes mit Schwenkdämpfer beseitigte das Problem.

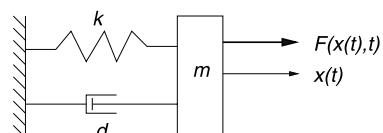
1936: Die **NACA** testet Pitcairn und Kellett Autogyros. Der Pilot H. Franklin Gregory erfuhr bei der Landung des Kellett XR-2 Autogyros eine Bodenresonanz, welche die Maschine in wenigen Sekunden zerstörte.

1937: NACA Langley Research Center: ein Kellett YG-1 Autogyrorotor zerlegt sich im Windkanal. Grund: Bodenresonanz. Dies begründet die numerische Untersuchung des Phänomens in den USA durch Coleman.

1.3 Grundlagen der Schwingungsbewegung

Da die Rotordynamik vom grundlegenden Verhalten eines linearen Schwingers bestimmt wird, ist das Verständnis des Prinzips und der Charakteristik eines Masse-Feder-Dämpfer-Systems der Schlüssel zum Verständnis der Schwingungen von Rotorblättern sowie der aeroelastischen Instabilitäten, die beim Drehflügler auftreten können. Für Grundlagen der Schwingungslehre gibt es eine Fülle von Lehrbüchern, beispielsweise [19], in Kurzform sind diese aber auch in [6] enthalten. Ein Swinger zweiter Ordnung ist schematisch in Abb. 1.1 dargestellt. Wenn periodische äußere Kräfte $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x})$ an einer Masse m wirken, welche mit einer Feder der Steifigkeit k befestigt ist, so wird – abhängig von der Dämpfung d – nach einer gewissen Einschwingzeit ein stationärer Schwingungszustand $x(t)$ erreicht, mit dem der Swinger (z. B. das Rotorblatt) auf die externen Kräfte (z. B. Luftkräfte) reagiert.

Abb. 1.1 Prinzip eines Schwingers zweiter Ordnung



Dies wird auch das dynamische Antwortproblem genannt. Es handelt sich also um eine erzwungene Schwingung mit Dämpfung, in der sowohl externe Kräfte wie auch aus der Struktur stammende Feder- und Massenträgheitskräfte und über diskrete Dämpfer mit einer Dämpfungskonstante d eingebrachte Kräfte wirken. Die Erregerkräfte können sowohl bewegungsunabhängige als auch bewegungsabhängige Terme enthalten. Die allgemeine Form einer dimensionsbehafteten und nach Division durch $mR\Omega^2$ dimensionslosen Differentialgleichung gemäß Abb. 1.1 (R sei eine Bezugslänge, zum Beispiel der Rotorradius, und Ω eine Bezugsfrequenz, zum Beispiel die Rotordrehfrequenz; x ist der translatorische Freiheitsgrad) wird durch die Forderung gewonnen, dass die Summe aller Kräfte Null sein muss und lautet:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + d\dot{x} + kx &= F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) & \left| \cdot \frac{1}{mR\Omega^2} \right. \\ q^{**} + 2Dv_x q^* + v_x^2 q &= Q(\psi, q, q^*, q^{**}) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Darin ist $q = x/R$ der dimensionslose Freiheitsgrad (generalisierte Koordinate), $Q = F/(mR\Omega^2)$ die dimensionslose (generalisierte) Erregerkraft, $\omega_x = \sqrt{k/m}$ die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems (dimensionslos: $v_x = \omega_x/\Omega$), $D = d/(2m\omega_x) = d/(2m\Omega v_x)$ das dimensionslose Dämpfungsmaß sowie die dimensionslose Zeit $\psi = \Omega t$ und ${}^* = d/(\Omega dt) = d/d\psi$ die dimensionslose zeitliche Ableitung. Auch ein rotatorischer Freiheitsgrad führt auf dieselbe dimensionslose Differentialgleichung: dann muss die Summe aller Momente um den Drehpunkt Null werden. In der dimensionsbehafteten Differentialgleichung ist dann die Masse m [kg] durch das Massenträgheitsmoment I [kg m^2] zu ersetzen und der translatorische Freiheitsgrad x [m] durch einen Winkel Θ [rad].

$$I\ddot{\Theta} + d_\Theta \dot{\Theta} + k_\Theta \Theta = M(t, \Theta, \dot{\Theta}, \ddot{\Theta}) \quad \left| \cdot \frac{1}{I\Omega^2} \right. \quad (1.2)$$

Durch Bezug auf $I\Omega^2$ erhält man die gleiche dimensionslose Differentialgleichung wie oben angegeben. Ein solches Feder-Masse-Dämpfer System hat in generalisierter Form unter Zuhilfenahme des Ansatzes ($\eta = \omega/\Omega$)

$$q = q_0 e^{i\omega t} = q_0 e^{i\eta\psi} \quad (1.3)$$

folgende Vergrößerungsfunktion $q/(q_0 Q) = V_x(v, D)$ und einen Phasenwinkel $\psi_x(v, D)$ auf eine dimensionslose generalisierte äußere Anregung Q mit der dimensionslosen Frequenz relativ zur Eigenfrequenz des ungedämpften Systems $v = \omega/\omega_x = \eta/v_x$:

$$V_x = \frac{1}{\sqrt{(1-v^2)^2 + (2Dv)^2}} \quad \psi_x = -\arctan \frac{2Dv}{1-v^2} + \frac{\pi}{2} \quad (1.4)$$

Solange die Dämpfung D kleiner als die kritische Dämpfung $1/\sqrt{2} \approx 0,7$ ist, erhält man ein schwingendes System mit einer Vergrößerungsfunktion $V_{x,\max} > 1$ und einem Nach-eilwinkel $\psi_x < 90^\circ$. Je geringer die Dämpfung ist, um so größer sind die Amplituden, bis bei fehlender Dämpfung eine Unstetigkeitsstelle erreicht wird.

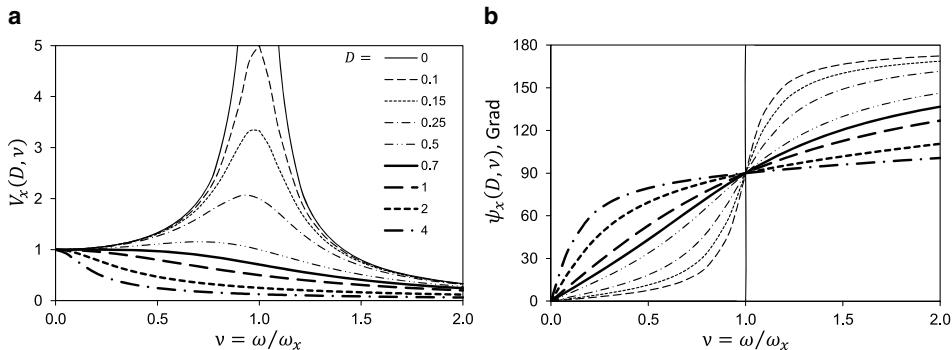


Abb. 1.2 Einfluss der Dämpfung auf die Vergrößerungsfunktion und den Nacheilwinkel. **a** Vergrößerungsfunktion, **b** Nacheilwinkel

In der Schlagbewegung von Rotorblättern sind die Luftkräfte immer sehr gut dämpfend, da eine Schlaggeschwindigkeit eine der Bewegung entgegengesetzte Luftkraft zur Folge hat. In der Schwenkbewegung jedoch ist die Luftkraftdämpfung aufgrund des geringen Widerstandes sehr klein, so dass in der Regel Schwenkdämpfer eingebaut werden müssen, um exzessive Schwenkbewegungen und davon erzeugte dynamische Kräfte klein zu halten. In der Torsionsbewegung können die Luftkräfte sogar negative Dämpfung einbringen, wenn Strömungsablösungen mit entsprechenden Hysteresen im Momentenbeiwert auftreten. Dies ist aber in der Regel nur über einen begrenzten Azimutbereich der Fall, so dass der Rest des Blattumlaufes wieder positiv gedämpft ist.

Im Fall einer Dämpfung $D > 1/\sqrt{2}$ ist die Vergrößerungsfunktion überall $V_x < 1$ und es gibt kein Überschwingen mehr. Wenn $D = 1$ bzw. $d/(2m) = \omega_x$, so erfolgt im Fall der Sprungantwort nur noch ein aperiodisches Abklingen ohne eine Schwingung; im Fall der erzwungenen Schwingung stellt sich eine Schwingung mit reduzierter Amplitude ein. Für $D > 1$ erhält man eine Kriechbewegung. Diese Sachverhalte sind in Abb. 1.2 zusammengefasst.

Geht man zunächst vom ungedämpften System aus, so verbleiben in Gl. 1.2 die Trägheitskräfte (proportional zur Beschleunigung \ddot{x}) und die Federkräfte (proportional zur Auslenkung x). Bei Erregerfrequenzen sehr viel kleiner als die Eigenfrequenz ist die Beschleunigung sehr klein und es dominieren die Federkräfte, so dass das System phasengleich mit der Erregung reagiert. Umgekehrt dominieren die Trägheitskräfte bei Frequenzen sehr viel größer als die Eigenfrequenz, so dass das System kaum noch auf eine Erregung reagiert. Bei Erregung mit der Eigenfrequenz sind beide Kräfte gleich groß und entgegengesetzt, so dass die Erregung keine Gegenkraft mehr erfährt und das System unendlich große Amplituden erreichen würde. Jede noch so geringe Dämpfung führt dann sowohl zu endlichen Amplituden als auch zu Phasennacheilungen des Systems. Da die Dämpfung proportional zu \dot{x} ist, stellt sie eine um 90° phasenverschobene Kraft dar und führt daher immer zu genau dieser Phasennacheilung bei Erregung in der Eigenfrequenz des ungedämpften Systems. Unterhalb dieser Frequenz ist die Phasennacheilung immer

kleiner als 90° und oberhalb dieser Frequenz immer größer als 90° , abhängig von der Größe der Dämpfungskonstante.

Wenn die Erregerkraft $F(\nu)$ periodisch ist, kann sie durch eine Fourierreihe repräsentiert werden und folglich wird auch die Systemantwort periodisch in der Frequenz ν sowie den Vielfachen davon sein. Dies ist insbesondere beim Drehflügler im stationären Vorwärtsflug gegeben, wo die Grundfrequenz die Rotordrehfrequenz Ω ist und die aerodynamischen Erregerkräfte ganzzahlige Vielfache dieser Grundfrequenz darstellen. In diesem Sinne stellt auch jede Rotorblattbewegung in jedem Freiheitsgrad einen Schwinger zweiter Ordnung dar und deren Auslenkung ist als Äquivalent der generalisierten Koordinate q anzusehen. Für den Fall eines starren, gelenkig angeschlossenen Blattes sind dies in der Schlagbewegung der Schlagwinkel β , in der Schwenkbewegung der Schwenkwinkel ζ und in der Torsionsbewegung der Torsionswinkel ϑ . Für alle diese kann man ebenfalls einen Fourieransatz derart machen, dass gilt (hier nur am Beispiel für den Schlagwinkel ausgeführt, für die anderen Freiheitsgrade in gleicher Weise anzusetzen):

$$\begin{aligned}\beta &= \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_{nC} \cos n\psi + \beta_{nS} \sin n\psi) \\ \dot{\beta} &= - \sum_{n=1}^{\infty} n (\beta_{nC} \sin n\psi - \beta_{nS} \cos n\psi) \\ \ddot{\beta} &= - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (\beta_{nC} \cos n\psi + \beta_{nS} \sin n\psi)\end{aligned}\quad (1.5)$$

Ist auch die Erregerkraft entsprechend durch eine Fourierreihe repräsentiert, so kann man einen Abgleich der Fourierreihen machen und erhält dann das Gleichungssystem zur Bestimmung der generalisierten Koordinatenamplituden β_{nC} und β_{nS} ; also den Cosinus- und Sinusanteilen der Schlagbewegung in der Frequenz n/rev ($n =$ ganzzahliges Vielfaches der Rotordrehfrequenz). Insbesondere kann man aus der Vergrößerungsfunktion und dem zugehörigen Diagramm der Phasennacheilung die Systemreaktion auf eine Erregerfrequenz bei n/rev ablesen.

1.4 Zur Definition der „kleinen Auslenkungen“

In der Regel sind die Bewegungsgleichungen der Schlag-, Schwenk- und Torsionsbewegung der Rotorblätter aufgrund ihrer Kinematik nichtlinear und daher schwierig zu behandeln. Eine ganz wesentliche Vereinfachung erhält man meist durch Annahme „kleiner Auslenkungen“, was eine Linearisierung ermöglicht und die Behandlung sehr erleichtert. Terme höherer Ordnung können dann weggelassen werden. Oft wird die Dynamik eines Systems um seine mittlere Lage herum untersucht, die man zuvor ermitteln muss. Beim Hubschrauber ist das der ausgetrimmte Betriebszustand (z. B. Schwebeflug, stationärer Vorwärts-, Steig-, Sink- oder Kurvenflug), was die Ermittlung der Lagewinkel des Hub-

schraubers sowie sämtlicher Steuerwinkel des Haupt- und Heckrotors erfordert. Dabei kommt meist ein nichtlineares Gleichungssystem zum Einsatz, welches numerisch iterativ gelöst wird.

Um diese Trimmlösung herum wird dann die Annahme kleiner Auslenkungen gemacht, um die Dynamik des Systems in diesem Betriebspunkt zu ermitteln. Dies sei am Beispiel des Schlagwinkels erläutert. Mit dem Index „Trimm“ ist die zum Trimmzustand gehörige Schlagbewegung, repräsentiert durch den Schlagwinkel β , versehen und die „kleine Auslenkung“ um diesen Trimmzustand herum sei mit δ bezeichnet.

$$\beta(\psi) = \beta_{\text{Trimm}}(\psi) + \delta\beta(\psi) \quad (1.6)$$

Die Frage ist nun, was genau ist eigentlich unter „kleine Auslenkungen“ zu verstehen? Ein wesentlicher Effekt der Annahme kleiner Auslenkungen ist die Näherung eigentlich nichtlinearer Funktionen durch linearisierte Ersatzfunktionen. So folgt für kleine Winkel $\delta\beta$ die übliche Näherung

$$\cos \delta\beta \approx 1 \quad \text{und} \quad \sin \delta\beta \approx \delta\beta \quad (1.7)$$

Nun muss noch geklärt werden, wie groß die „kleinen Auslenkungen“ sein dürfen, um als solche zu gelten und obige Näherungen anwenden zu dürfen. Die übliche Definition ist, dass der Fehler der Näherung 3–5 % nicht überschreiten sollte. Der Vergleich der trigonometrischen Funktionen mit ihren jeweiligen Näherungen und dem entstehenden Fehler ist in Abb. 1.3 dargestellt. Man erkennt, dass der Fehler bei der Näherung für die cos-Funktion schneller wächst als bei der sin-Funktion und bei einer Genauigkeitsschranke von 3 % der Winkelbereich bis 14° reicht, bei 5 % sogar bis 18° . Wenn man sich vor Augen führt, dass die hier angesetzte Näherung der trigonometrischen Funktionen nichts anderes ist als das erste Glied der jeweils zugehörigen Taylorreihenentwicklung, so kann

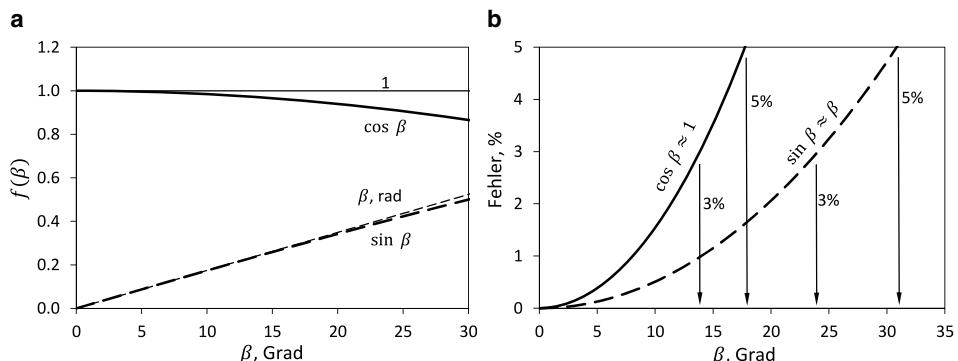


Abb. 1.3 Zur Näherung der Winkelfunktionen. **a** Winkelfunktion und Näherung, **b** Fehler der Näherung

man auf die Idee kommen, den Anwendungsbereich durch Hinzunahme des jeweils nächsten Gliedes der Taylorreihe erheblich zu erweitern, also:

$$\cos \delta\beta \approx 1 - \frac{\delta\beta^2}{2} \quad \text{und} \quad \sin \delta\beta \approx \delta\beta - \frac{\delta\beta^3}{6} \quad (1.8)$$

In der Tat erreicht der Fehler dann selbst bei 45° nicht mehr als 2,2 % in der cos-Funktion, aber damit wird der Ansatz wieder nichtlinear (denn es tauchen Terme $\delta\beta^2$ und $\delta\beta^3$ auf) und damit geht der große Vorteil der Linearisierung wieder verloren. Folglich kann festgehalten werden:

Die Näherung kleiner Winkel ist im Winkelbereich von $\pm 15^\circ$ gültig.

Daher sind alle Lösungen, die mit der Näherung für kleine Winkel gewonnen wurden, immer auf diese Randbedingung hin zu überprüfen.

1.5 Schlussfolgerungen

- Ein linearer Schwinger zweiter Ordnung wird durch Trägheitskräfte (proportional zur Beschleunigung), Dämpferkräfte (proportional zur Geschwindigkeit) und Federkräfte (proportional zur Lage) beschrieben.
- Das charakteristische Merkmal eines solchen Schwingers ist seine Eigenfrequenz, die sich aus der Masse und der Federkonstante berechnet.
- Das dynamische Antwortverhalten auf eine periodische Erregerkraft wird durch die sogenannte Vergrößerungsfunktion und die Phasennacheilungsfunktion beschrieben.
- Schwach gedämpfte Systeme sollten nicht in der Nähe der Eigenfrequenz erregt werden, da dann große Bewegungsamplituden entstehen, die zu großen Bauteilbelastungen und Materialversagen führen können. Gut gedämpfte Systeme können jedoch durchaus auch in der Eigenfrequenz erregt werden, da dann die Bewegungsamplituden moderat bleiben.
- Egal, welche Dämpfung wirkt, bei Erregung in der Eigenfrequenz ist die Phasennacheilung des Schwingers immer genau 90° . Ist die Erregerfrequenz kleiner als die Eigenfrequenz, so ist die Phasennacheilung – ja nach Größe der Dämpfung – immer mehr oder weniger kleiner als 90° . Bei Erregung oberhalb der Eigenfrequenz ist die Phasennacheilung – ja nach Größe der Dämpfung – immer mehr oder weniger größer als 90° .
- Die Annahme kleiner Winkel ist bis zu $\pm 15^\circ$ gültig und erlaubt die Linearisierung der trigonometrischen Funktionen um den Winkel 0° herum.

Literatur

1. H. Glauert, *A General theory of the autogyro*, ARC Reports and Memoranda 1111, 1926
2. C.N.H. Lock, *Further Development of Autogyro Theory, Part I and II*, ARC Reports and Memoranda 1127, 1927
3. W. Johnson, *Helicopter Theory*, ISBN 0 691 07971 4, Princeton University Press, 1980
4. W. Johnson, *Helicopter Aeromechanics*, ISBN 978 1 10 702807 4, Cambridge University Press, 2013
5. A. Gessow, G.C. Myers, *Aerodynamics of the Helicopter*, Macmillan Co., 1952; ISBN 0 804 44275 4, Continuum International Publishing Group Ltd., 1997
6. A.R.S. Bramwell, D.E.H. Balmford, G.T.S. Done, *Bramwell's Helicopter Dynamics*, ISBN 0 750 65075 3, Butterworth-Heinemann Ltd., 2001
7. R.L. Bielawa, *Rotary Wing Structural Dynamics and Aeroelasticity*, 2nd Edition, ISBN 1563476983, AIAA Education series, 2002
8. Y.C. Fung, *An Introduction to the Theory of Aeroelasticity*, ISBN 978-0-486-46936-2, Dover Publication, Mineola, 2008
9. E.H. Dowell, *A Modern Course in Aeroelasticity*, ISBN 978-1-4020-2039-1, Springer Verlag, Dordrecht, 2005
10. R.L. Bisplinghoff, R.L. Ashley, H. Halfman, *Aeroelasticity*, ISBN 0486691896, Dover Publication Inc., 1996
11. H. Försching, *Grundlagen der Aeroelastik*, ISBN 3540065407, Springer Verlag, 1974
12. K. Karamcheti, *Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics*, Robert E. Krieger Publishing Co., 1980
13. L. Meirovitch, *Analytical Methods in Vibration*, ISBN 9780023801402, Prentice Hall, The MacMillan Company, New York, 1967
14. H. Focke, *Mein Lebensweg*, ISBN 3931148912, Kurze-Schönholz und Ziesemer Verlagsge-sellschaft bR, Bremen, 1996
15. A. Betz (Hrsg.), *Monographien über Fortschritte der deutschen Luftfahrtforschung (seit 1939). N Überblick über die deutsche Entwicklung und Forschung auf dem Gebiete der Drehflügelflugzeuge*, redigiert von G. Süssingh, AVA Göttingen, 1946
16. C.L. Morris, *Pioneering the Helicopter*, McGraw-Hill Book Company Inc., New York, London, 1945
17. H. Pember, *The Story of the VS-300: The Aircraft that Launched an Industry*, Igor I. Sikorsky Historical Archives Inc., Stratford, Conn., 2000
18. C.J. Sanders, A.H. Rawson, *The book of the C.19 Autogiro*, Sir Isaac Pitman & Sons, Ltd., London, 1931
19. E. Brommundt, D. Sachau, *Schwingungslehre mit Maschinendynamik*, ISBN 978-3-8348-1396-1, Springer Vieweg, 2008



Dynamik der Schlagbewegung

2

2.1 Einleitung

Die Schlagbewegung ist die Bewegung des Rotorblattes, die senkrecht zur Drehebene stattfindet. In diesem Kapitel werden das Eigenschwingungsverhalten (ohne äußere Erregerkräfte) und danach das dynamische Antwortverhalten auf äußere Kräfte behandelt. Dazu wird zunächst ein einfaches Blattersatzmodell verwendet, das ein Schlaggelenk mit einem gewissen Abstand vom Rotorzentrum aufweist und sonst als starr angenommen wird. Später wird dann ein realistischeres Modell in Betracht kommen, wobei das Blatt dann als elastischer Balken angenommen wird. Hauptziel dieses Kapitels soll es sein, die verschiedenen mathematischen Hilfsmittel darzustellen, welche in Rotorproblemen Anwendung finden, sowie die Anwendung selbst auf die einfache Schlagbewegung aufzuzeigen. Es ist sehr wichtig, die Notwendigkeit und den Nutzen dieser Methoden am Beispiel des einfachen Schlagersatzmodells zu verstehen, damit man später die Erweiterung auf gekoppelte Blattbewegungen in den folgenden Kapiteln nachvollziehen kann.

Man muss dabei im Gedächtnis behalten, dass die Schlagbewegung alleine bereits einen wichtigen Schritt in das Verständnis der gekoppelten Dynamik des Rotorblattes darstellt. Die Kenntnis des Eigenschwingungsverhaltens ist von grundlegender Bedeutung für die Schlagantwort selber, für die aeroelastische Stabilität und mögliche Resonanzerscheinungen bei Vielfachen der Rotordrehfrequenz. In der Tat ist die erste Schlageigenfrequenz des rotierenden Blattes ein wichtiger physikalischer Parameter und ein Indikator für die Rotorleistungsfähigkeit als stationäre Größe wie auch für die Flugstabilität und die Flugdynamik. Als typischer Wert für ein gelenkig gelagertes Rotorblatt ist die Schlageigenfrequenz etwa das 1,03 bis 1,05-fache der Rotordrehfrequenz, während bei gelenklosen Rotoren diese Eigenfrequenz beim 1,08 bis 1,15-fachen liegt (siehe Abb. 2.1). Je größer dieser Wert ist, desto größer werden auch die Belastungen an der Blattwurzel werden und ebenso das Moment am Rotorkopf, was wiederum einen signifikanten Effekt auf die Flugeigenschaften (engl. handling qualities) und das Vibrationsniveau hat.

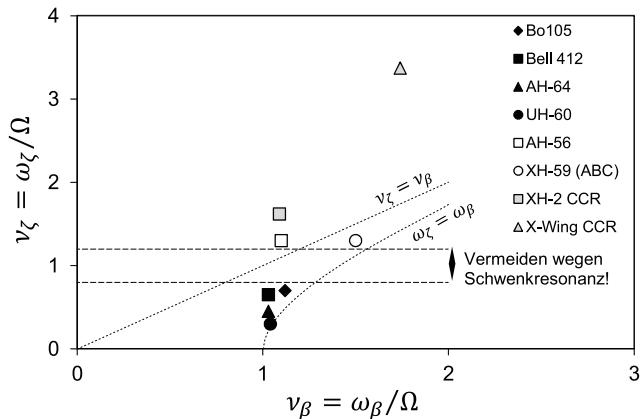


Abb. 2.1 Blatteigenfrequenzen existierender Hubschrauber

Interessante Ausnahmen sind folgende Hubschrauberrotoren. Die Sikorsky XH-59 Advanced Blade Concept (ABC) ist ein Experimentalhubschrauber mit Koaxialrotor für Geschwindigkeiten bis 518 km/h, wobei für eine maximale Blattspitzenmachzahl von 0,9 ein Fortschrittsgrad von etwa 0,9 erreicht wird. Damit die Blätter der gegenläufigen Rotoren nicht kollidieren, müssen entweder die Rotorköpfe einen großen Abstand haben, oder die Schlagsteifigkeit sehr groß sein, was zu der großen Schlageigenfrequenz führt. Der Kaman XH-2 Circulation Control Rotor (CCR) hatte ein normales Schlaggelenk, aber kein Schwenkgelenk und daher eine außergewöhnlich große Schwenkeigenfrequenz. Das Kollektiv wurde über eine Taumelscheibe eingestellt, die zyklische Steuerung jedoch erfolgte über Ausblasung an Schlitzten entlang der Hinterkante als direkte Auftriebssteuerung, wobei auch höherharmonische Ausblasung zur Vibrationsreduktion eingesetzt wurde. Damit die aerodynamischen Momente nicht durch Torsion des Blattes kompensiert wurden, waren auch die Torsionssteifigkeit und die Torsioneigenfrequenz sehr groß.

Noch extremere Verhältnisse finden sich beim NASA Rotor Systems Research Aircraft (RSRA) der NASA, wobei auf einer Sikorsky S-72 ein CCR-Rotor montiert war, der im Schnellflug stillgesetzt werden sollte und dann als X-förmiger Tragflügel (X-Wing) konzipiert war. Dies erfordert außergewöhnliche Steifigkeiten in Schlagen, Schwenken und Torsion und entsprechend groß sind die zugehörigen Eigenfrequenzen. Die Rotorblätter wiesen an Vorder- und Hinterkante Ausblaseschlitze auf und damit sollte die gesamte Primärsteuerung als auch die höherharmonische Steuerung zur Vibrationsreduktion betrieben werden. Es kam jedoch nur zum Roll-out und das Programm wurde vor dem Erstflug mit Rotor gestoppt.

Die Schlagbewegung des Rotorblattes stellt dessen fundamentalste Bewegungsart dar und ist daher seit den 1920er Jahren Gegenstand der mathematischen Behandlung. Daher ist die Literatur dazu sehr vielfältig, angefangen bei der Arbeit von Lock über die Autogyros [1] über die deutschen Untersuchungen zu Hubschraubern während des zweiten

Weltkrieges bei Focke und Flettner [2] bis zu den klassischen Lehrbüchern der Drehflügler, insbesondere [3–6].

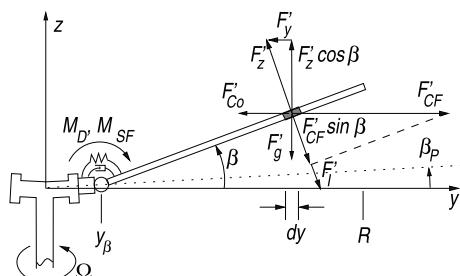
2.2 Das Rotorblatt ohne Schlaggelenksabstand

Hier wird das Blatt als in sich starr und auf der Drehachse gelenkig gelagert angenommen (dimensionsloser Gelenksabstand $e_\beta = y_\beta/R = 0$, siehe Abb. 2.2). Das Blatt hat nur einen Freiheitsgrad: die Schlagbewegung mit dem Schlagwinkel β relativ zur Drehebene des Rotors. Es sei außerdem angenommen, dass keine Schlagfeder am Gelenk angebracht sei (Steifigkeit $k_\beta = 0 \text{ N m/rad}$ bzw. eine Schlageigenfrequenz im nicht drehenden System von $\omega_{\beta 0} = 0 \text{ rad/s}$). Wenn man wie üblich die Annahme kleiner Winkel macht, was aufgrund der bei Hubschraubern im Allgemeinen großen Zentrifugalkräfte für den Schlagwinkel auch gerechtfertigt ist, so stellen sich die differentiellen Kräfte am Blattelement der Länge dy und der Massenverteilung m' wie folgt dar:

Kraft	Formel	Hebelarm	Kommentar
a) Massenträgheit:	$F'_I = m' \ddot{z} = m' y \ddot{\beta}$	y	I vom engl. inertia force
b) Zentrifugalkraft:	$F'_{CF} \sin \beta \approx m' y \Omega^2 \beta$	y	CF vom engl. centrifugal force
c) Aerodynamik:	F'_z	y	Normal zur Blattachse und Profilsehne
d) Gewicht:	$m' g \cos \beta \approx m' g$	y	Senkrecht nach unten

Im Folgenden kennzeichnet $' = d/dy$ die Ableitung nach der radialen Koordinate, also $F'_z = dF_z/dy$, $m' = dm/dy$, etc. Da die Gewichtskraft gegenüber den anderen Kräften normalerweise (außer bei kleinen Drehfrequenzen) vernachlässigbar ist, wird sie in der Regel weggelassen. Zur Verdeutlichung halte man sich vor Augen, dass der Auftrieb eines Blattes etwa dem Gesamtwiderstand des Hubschraubers, geteilt durch die Anzahl der Rotorblätter, entspricht, während die Gewichtskraft eines Blattes in der Regel weniger als 5 % davon beträgt. Zur Aufstellung der Differentialgleichung einer Drehbewegung muss die Summe aller Momente um das Drehgelenk Null sein. Das Momentengleichgewicht

Abb. 2.2 Kräfte am schlagen-den Rotorblatt



um das Schlaggelenk liefert dann

$$\begin{aligned}
 & \int_0^R (m' y^2 \ddot{\beta} + m' y^2 \Omega^2 \beta - y F'_z + m' y g) dy = 0 \\
 \Rightarrow & (\ddot{\beta} + \Omega^2 \beta) \int_0^R m' y^2 dy = \int_0^R y (F'_z - m' g) dy \\
 \text{mit} & \quad \int_0^R m' y^2 dy = I_b \quad \int_0^R m' y dy = J_b \\
 \text{und} & \quad \int_0^R y F'_z dy = M_\beta \tag{2.1}
 \end{aligned}$$

Da die im Träigkeitsterm und im Zentrifugalkraftterm auftretenden Integrale identisch sind, spielt die radiale Massenverteilung in der Schlagbewegung mit zentralem Schlaggelenk keine Rolle. I_b [kg m^2] wird das Massenträgheitsmoment der Schlagbewegung (engl. mass moment of inertia) genannt; die Einheit der Massenverteilung m' (engl. mass distribution) ist Masse/Längeneinheit [kg/m] und F'_z die aerodynamische Vertikalkraft/Längeneinheit [N/m], während J_b [kg m] das statische Massenmoment aus dem Blattgewicht bezüglich des Schlaggelenkes darstellt. M_β [N m] ist das Erregermoment aus Luftkräften. Für ein Blatt mit konstanter Massenverteilung m' folgt

$$I_b = m' \frac{R^3}{3} \quad J_b = m' \frac{R^2}{2} \tag{2.2}$$

somit lautet die Differentialgleichung der Schlagbewegung

$$\ddot{\beta} + \Omega^2 \beta = \frac{M_\beta}{I_b} - \frac{3g}{2R} \tag{2.3}$$

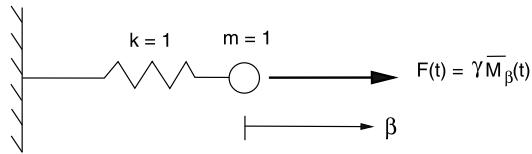
Stellt man nun die Zeit t in dimensionsloser Form durch den Umlaufwinkel des Rotorblattes ψ dar, der auch Azimut genannt wird,

$$\psi = \Omega t \quad \partial\psi = \Omega \partial t \quad \text{bzw.} \quad \partial t = \partial\psi / \Omega \tag{2.4}$$

so lässt sich die Differentialgleichung der Schlagbewegung mit Hilfe der folgenden Ableitungen dimensionslos darstellen.

$$\begin{aligned}
 \dot{\beta} &= \frac{\partial \beta}{\partial t} = \Omega \frac{\partial \beta}{\partial \psi} = \Omega \beta^* \\
 \ddot{\beta} &= \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = \Omega^2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial \psi^2} = \Omega^2 \beta^{**}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Abb. 2.3 Verallgemeinertes Feder-Masse-Ersatzsystem der Schlagbewegung



Somit folgt mit der dimensionslosen Gravitationskonstante $\bar{g} = g/(R\Omega^2)$ die Schlagbewegung in dimensionsloser Form zu (vergleiche mit der allgemeinen Form in Gl. 1.1)

$$** \beta + \beta = \gamma \bar{M}_\beta - \frac{3}{2} \bar{g} \quad (2.6)$$

Darin sind die sog. Lockzahl γ (benannt nach Lock, [1]) und das generalisierte Moment aus Luftkräften \bar{M}_β sowie der Term aus der Gewichtskraft enthalten. Die Lockzahl repräsentiert das Verhältnis von Luftkräften (zu erkennen an den für die Ermittlung der aerodynamischen Kräfte charakteristischen Parametern Luftdichte ρ , Profiltiefe c (engl. chord), Radius R und dem Auftriebsanstieg (engl. lift curve slope) $C_{l\alpha}$) im Zähler zu den Trägheitskräften im Nenner, repräsentiert durch das Massenträgheitsmoment I_b .

$$\gamma = \frac{\rho C_{l\alpha} c R^4}{I_b} = 3 \frac{\rho C_{l\alpha} c R}{m'} \quad \bar{M}_\beta = \frac{\int_0^R y F'_z dy}{\rho C_{l\alpha} c R^4 \Omega^2} \quad (2.7)$$

Der Wert der Lockzahl γ liegt typischerweise zwischen 5 und 10, wobei der kleinere Wert ein schweres Blatt (= große Massenträgheit) und der größere Wert ein leichtes Blatt kennzeichnet (Beispiel Bo105: $\gamma = 8$). Der Einfluss der Flughöhe findet sich in der davon abhängigen Luftdichte ρ wieder und die Machzahl am Rotorblatt ändert über Kompressibilitätseffekte den Auftriebsanstieg $C_{l\alpha}$. Diese Schlagbewegung kann durch ein einfaches Feder-Masse-System dargestellt werden, dessen dimensionslose Eigenfrequenz (der Vorfaktor vor dem Federterm β) genau $v_\beta^2 = 1 \Rightarrow v_\beta = 1/\text{rev}$, also identisch mit der Rotordrehfrequenz ist: $\omega_\beta = \Omega$, siehe Abb. 2.3.

$$\omega_\beta \equiv \Omega \quad \text{bzw.} \quad v_\beta = \frac{\omega_\beta}{\Omega} = 1 \quad (2.8)$$

Das anregende Luftkraftmoment \bar{M}_β ist von der Bewegung des Blattes abhängig und wird später eingehender behandelt. In dieser Konfiguration taucht ein Federterm auf, obwohl keine mechanische Feder angebracht ist. Dies ist das Resultat der Zentrifugalkraft, was man sich anhand eines einfachen Experiments veranschaulichen kann. Wenn man nämlich einen Stein an einen Faden (dessen Federsteifigkeit praktisch Null ist) knotet und sich mit ihm dreht, so wird er sich sehr bald als Reaktion auf die Zentrifugalkraft nach außen bewegen und die Eigenfrequenz der Bewegung senkrecht zur Drehebene wird die Drehfrequenz selber sein, egal, wie schnell man sich dreht.

Zum Schluss sei noch der Einfluss der Gewichtskraft diskutiert. Da sie eine Konstante ist, hat sie nur auf die statische Schlagauslenkung einen Einfluss, nicht aber auf die

Dynamik. Ohne Luftkräfte folgt

$$\beta = -\frac{3}{2}\bar{g} \quad (2.9)$$

Da ΩR für praktisch alle Hubschrauber eine konstante Blattspitzengeschwindigkeit darstellt und ca. 220 m/s beträgt, ist der Term \bar{g} proportional zu $1/\Omega$ bzw. zu R , d. h., mit wachsender Größe des Hubschraubers nimmt die Bedeutung des Gewichtsterms ebenso zu wie mit abnehmender Drehzahl beim Anfahren oder Stoppen des Rotors. Dies erkennt man auch daran, dass die statische Durchbiegung im stehenden Rotor bei kleinen Hubschraubern sehr gering ist, während sie bei großen Hubschraubern beachtliche Werte erreicht. Mit den Werten der Bo105 ($\Omega = 44$ rad/s) erhält man einen statischen Schlagwinkel von etwa $0,09^\circ$, also einen sehr kleinen Wert und daher meistens vernachlässigbar.

2.3 Das Rotorblatt mit Schlaggelenksabstand

Wieder wird die Annahme eines starren Blattes gemacht, aber das Schlaggelenk ist nun nicht mehr auf der Drehachse des Rotormastes, sondern etwas außerhalb mit einem Abstand y_β , dem Schlaggelenksabstand (engl. hinge offset), angebracht (Abb. 2.2). Die Kräfte am Element dy sind nun

Kraft	Formel	Hebelarm	Kommentar
a) Massenträgheit:	$m'\ddot{\beta}(y - y_\beta)$	$(y - y_\beta)$	Aus Beschleunigung
b) Zentrifugalkraft:	$m'y\Omega^2 \sin \beta$	$(y - y_\beta)$	Federkraft
c) Aerodynamik:	F'_z	$(y - y_\beta)$	Auftrieb
d) Gewicht:	$m'g \cos \beta$	$(y - y_\beta)$	Masse
e) Federmoment:	$k_\beta(\beta - \beta_P)$	-	Z. B. elastischer Blatthals

Der Vorkonuswinkel β_P (engl. precone) wird durch eine angenommene mechanische Feder k_β verursacht und stellt sich ein, wenn der Rotor nicht dreht und kein Moment aus Gravitationskräften wirkt, ist also die Federnulllage in Schwerelosigkeit. Die Schlagdifferentialgleichung erhält man wieder aus dem Momentengleichgewicht um das Schlaggelenk ($e_\beta = y_\beta/R$, $r = y/R$, $dr = dy/R$). Wie im vorangegangenen Abschnitt wird auch hier die Gewichtskraft als vernachlässigbar im Vergleich zu den anderen Kräften erachtet und daher nun weggelassen. Sie ist jedoch wichtig bei sehr kleinen Drehfrequenzen, also beim Starten des Rotors und beim Abstellen. Für kleine Winkel folgt

$$\int_{e_\beta}^1 \left[m'R^3(r - e_\beta)^2 \ddot{\beta} + m'R^3r\Omega^2(r - e_\beta)\beta - F'_zR^2(r - e_\beta) + m'gR^2(r - e_\beta) \right] dr + k_\beta(\beta - \beta_P) = 0. \quad (2.10)$$

$$\cdot dr + k_\beta(\beta - \beta_P) = 0.$$

Die darin enthaltenen Massenintegrale sind das Schlagträgheitsmoment sowie das Massenmoment aus der Zentrifugalkraft, die sich nun – im Gegensatz zum zentralen Schlag-

gelenk – voneinander unterscheiden. Daher spielt die radiale Massenverteilung nun eine Rolle.

$$\begin{aligned} \int_{e_\beta}^1 R^3 m'(r - e_\beta)^2 dr &= I_\beta \\ \int_{e_\beta}^1 R^3 m' r(r - e_\beta) dr &= \int_{e_\beta}^1 R^3 m'(r - e_\beta)^2 dr + \int_{e_\beta}^1 R^3 m' e_\beta(r - e_\beta) dr \\ &= I_\beta \left[1 + \frac{e_\beta \int_{e_\beta}^1 m'(r - e_\beta) dr}{\int_{e_\beta}^1 m'(r - e_\beta)^2 dr} \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

Somit folgt für die Schlagdifferentialgleichung

$$I_\beta \left\{ \ddot{\beta} + \Omega^2 \left[1 + \frac{e_\beta \int_{e_\beta}^1 m'(r - e_\beta) dr}{\int_{e_\beta}^1 m'(r - e_\beta)^2 dr} \right] \beta + \frac{k_\beta}{I_\beta} (\beta - \beta_P) \right\} = \int_{e_\beta}^1 F_z' R^2 (r - e_\beta) dr \quad (2.12)$$

und in dimensionsloser Form durch Bezug auf $I_b \Omega^2$ als Referenzwert des zentralen Schlaggelenkes

$$\overset{*}{I}_\beta \left(\ddot{\beta} + v_\beta^2 \beta \right) = \gamma \overline{M}_\beta + \frac{k_\beta}{I_b \Omega^2} \beta_P \quad (2.13)$$

Darin ist v_β die dimensionslose Schlageigenfrequenz und $\overset{*}{I}_\beta = I_\beta / I_b = 1 - 3e_\beta + 3e_\beta^2 - e_\beta^3 \approx 1 - 3e_\beta$. Nur für sehr kleine Werte des Schlaggelenksabstandes, wie sie bei Autogyros und den frühen Hubschraubern üblich war, ist dieses Verhältnis näherungsweise $\overset{*}{I}_\beta \approx 1$. Die dimensionslose Eigenfrequenz der Schlagbewegung wird nun vom Schlaggelenksabstand, der Steifigkeit der Schlagfeder und der Drehfrequenz bestimmt.

$$v_\beta^2 = 1 + \frac{e_\beta \int_{e_\beta}^1 m'(r - e_\beta) dr}{\int_{e_\beta}^1 m'(r - e_\beta)^2 dr} + \frac{k_\beta}{I_\beta \Omega^2} \quad (2.14)$$

Für ein Rotorblatt mit konstanter Massenverteilung $m' = \text{konst.}$ wird der zweite Term zu

$$\frac{e_\beta \int_{e_\beta}^1 (r - e_\beta) dr}{\int_{e_\beta}^1 (r - e_\beta)^2 dr} = \frac{3}{2} \frac{e_\beta}{1 - e_\beta} \approx \frac{3}{2} e_\beta \quad (2.15)$$

Natürlich erhält man für verschwindenden Gelenksabstand $e_\beta = 0$ die Ergebnisse des vorigen Abschnittes. Der dritte Term repräsentiert die Eigenfrequenz des nicht drehenden Rotors, welche von der Feder am Schlaggelenk verursacht wird und folgendermaßen

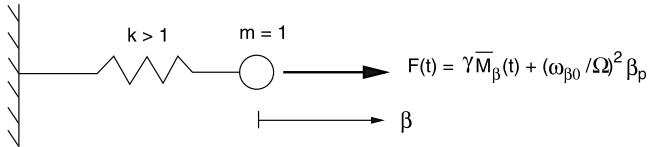


Abb. 2.4 Feder-Masse-Ersatzsystem beim Rotor mit Schlaggelenksabstand

definiert ist:

$$\frac{k_\beta}{I_\beta} = \omega_{\beta 0}^2 \quad \text{bzw.} \quad \omega_{\beta 0} = \sqrt{\frac{k_\beta}{I_\beta}} \quad (2.16)$$

Je größer die Drehfrequenz des Rotors ist, um so unbedeutender wird diese Schlaggegenfrequenz des nicht drehenden Rotors, da mit Ω der Federanteil der Zentrifugalkraft wächst, während k_β (und damit $\omega_{\beta 0}$) eine von Ω unabhängige Konstante ist. Das Verhältnis der Massenträgheitsmomente mit (I_β) und ohne Schlaggelenksabstand (I_b) ist aufgrund des meist kleinen Wertes für e_β ungefähr $I_\beta^* = I_\beta/I_b \approx 1$ und somit kann die Gleichung in folgender Form geschrieben werden, die man auch erhält, wenn man die Differentialgleichung von vornherein auf $I_\beta \Omega^2$ bezieht.

$$** + v_\beta^2 \beta = \gamma \overline{M}_\beta + \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} \right)^2 \beta_P \quad (2.17)$$

Man vergleiche das Ergebnis mit der allgemeinen Form von Gl. 1.1. Der Vorkonuswinkel (auch Einbaukonus genannt) β_P wird in der Regel verwendet, um das statische Schlagbiegemoment im Blattanschluss zu reduzieren und er beträgt ungefähr 2° bis 3° (Bo105: $2,5^\circ$). Auch diese Konfiguration lässt sich durch ein Feder-Masse-Ersatzsystem darstellen (Abb. 2.4). Die dimensionslose Eigenfrequenz dieses Systems ist bei konstanter Massenverteilung

$$v_\beta = \frac{\omega_\beta}{\Omega} = \sqrt{1 + \frac{3}{2} \frac{e_\beta}{1 - e_\beta} + \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} \right)^2} \quad (2.18)$$

Man beachte, dass die als konstant angenommene Massenverteilung zur Bestimmung der Eigenfrequenz hier keine Rolle spielt, sondern nur ein geometrischer Parameter, nämlich der Schlaggelenksabstand e_β . Nur in der Eigenfrequenz des nicht rotierenden Blattes $\omega_{\beta 0}$ steckt die Feder und Massenträgheit des Blattes. Dieser Ausdruck lässt sich noch für kleine Gelenksabstände sowie für den Fall einer sehr schwachen oder meist nicht vorhandenen mechanischen Feder vereinfachen auf

$$v_\beta \approx \sqrt{1 + \frac{3}{2} e_\beta} \approx 1 + 0,8 e_\beta \quad (2.19)$$

Dies ist erlaubt, da typischerweise der Wert für den Schlaggelenksabstand e_β eines gelenkigen Rotors 0,04 bis 0,06 beträgt. Die zuerst angegebene Näherung findet man in den

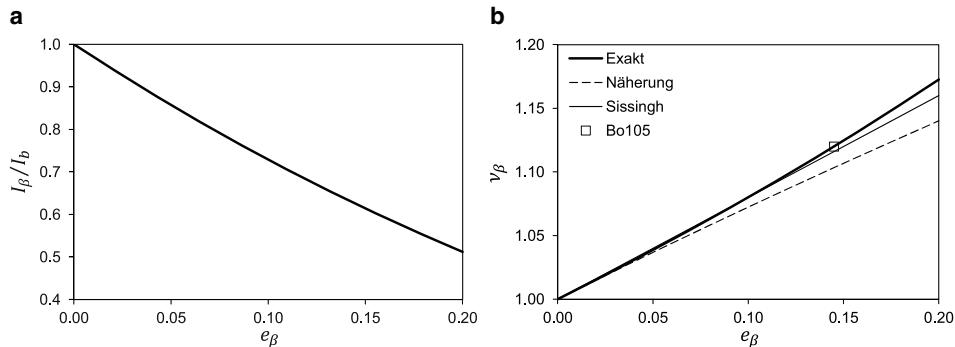


Abb. 2.5 Einfluss des Gelenksabstandes auf Parameter der Schlagbewegung. **a** Trägheitsmomentverhältnis I_β^* , **b** Schlageigenfrequenz

üblichen Textbüchern; die zweite wurde von Sissingh Anfang der 1940er Jahre angegeben [2] und stellt die ersten Terme der Taylorreihenentwicklung von Gl. 2.18 dar. Trotz ihrer Einfachheit (keine Wurzelfunktion) und obendrein höherer Genauigkeit bei größeren Schlaggelenksabständen ist sie in Vergessenheit geraten. In Abb. 2.5a ist der Einfluss des Gelenksabstandes auf das normierte Massenträgheitsmoment I_β^* und in Abb. 2.5b auf die Schrageigenfrequenz dargestellt. Die Näherung ist bis $e_\beta \approx 0,1$ für die Schrageigenfrequenz recht gut, für das Massenträgheitsmoment jedoch nur bei recht kleinen Werten des Gelenksabstandes. Daher werden die entsprechenden Gleichungen oft auf I_β anstelle von I_b bezogen. Man beachte, dass nun die Eigenfrequenz des nicht drehenden starren Blattes Null wird, wenn – wie oben vorausgesetzt – keine Feder im Gelenk wirkt.

Beispiel

Man berechne näherungsweise die Schrageigenfrequenz des rotierenden und gelenkig gelagerten Rotorblattes mit einem Schlaggelenksabstand von $y_\beta = 0,3$ m. Gegeben sind der Rotorradius $R = 6$ m und die Drehzahl von RPM = 360/min (Beachte: $\Omega = 2\pi \text{ RPM}/60$).

Lösung

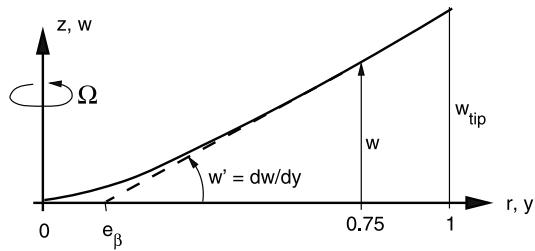
$$e_\beta = y_\beta/R = 0,05$$

$$v_\beta \approx \sqrt{1 + \frac{3}{2}e_\beta} = 1,037$$

$$\omega_\beta = \Omega v_\beta = 39,1 \text{ rad/s}$$

Um die Analyse des gelenklosen Rotors zu vereinfachen, kann man dessen Rotorblatt als ein starres und gelenkig mit einer entsprechenden mechanischen Feder gelagertes Blatt ansehen. Dieses Vorgehen ist für Untersuchungen der Flugstabilität und der aerodynamischen Stabilität sehr brauchbar, da dadurch die grundlegenden Eigenschaften richtig

Abb. 2.6 Ermittlung des effektiven Schlaggelenksabstandes



wiedergegeben werden können. Allerdings muss man dazu die erste Schlageigenfrequenz und die zugehörige erste Schlageigenform kennen, die entweder aus verfeinerten Rechenmethoden oder aus Experimenten ermittelt werden können. Mit diesen Werten kann dann der Schlaggelenksabstand und die Federsteifigkeit so abgestimmt werden, dass das Ersatzmodell diese Grundschwingungsform richtig beschreibt. Es gibt wieder viele Möglichkeiten, diese Abstimmung vorzunehmen.

Ein einfacher Weg dazu ist, die nicht rotierende (Gl. 2.16) und die rotierende Schlageigenfrequenz des Rotorblattes (Gl. 2.18, Näherung für kleine e_β) zu vergleichen. Gegeben sind die Drehfrequenz des Rotors Ω , die dabei vorhandene Schlageigenfrequenz v_β , die Eigenfrequenz im nicht drehenden System $\omega_{\beta 0}$ und das Massenträgheitsmoment I_β . Dann folgt mit den Näherungsformeln für die gesuchte Federsteifigkeit und den effektiven Schlaggelenksabstand

$$k_\beta = \omega_{\beta 0}^2 I_\beta$$

$$\text{aus } v_\beta^2 \approx \dots \text{ folgt } e_\beta \approx \frac{2}{3} \left[v_\beta^2 - \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} \right)^2 - 1 \right] \quad (2.20)$$

Diese Näherung hat sich als ausreichend genau für eine vereinfachte Untersuchung der Rotordynamik erwiesen. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Biegelinie des elastischen Blattes zu verwenden und die Steigung bei $3/4$ der Blattlänge ($r = 0,75$) zu extrapoliieren, um den effektiven Schlaggelenksabstand näherungsweise zu ermitteln (Abb. 2.6). Damit folgt

$$e_\beta \approx 1 - \frac{\frac{w_{\text{tip}}}{R}}{\left. \frac{dw}{dy} \right|_{0,75R}} \quad (2.21)$$

Danach wird die Federsteifigkeit aus der Schlageigenfrequenz des rotierenden Blattes ermittelt.

$$k_\beta \approx I_\beta \Omega^2 \left(v_\beta^2 - 1 - \frac{3}{2} e_\beta \right) \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} \right)^2 \approx v_\beta^2 - 1 - \frac{3}{2} e_\beta \quad (2.22)$$

Hierin kann die Federsteifigkeit auch negativ werden, da e_β ja vorgegeben wird, was durchaus zu unphysikalisch großen Abständen führen kann, welche die Federkonstante k_β dann wieder ausgleicht.

2.4 Das gelenklose, elastische Rotorblatt

Eine genauere Beschreibung eines gelenklosen Rotorblattes erhält man, wenn man es als elastischen Balken ansieht, der an der Blattwurzel gewissen Zwangsbedingungen unterliegt (Abb. 2.7). Das Blatt weist dann eine Durchbiegung unter gleichzeitiger Belastung durch eine irgendwie geartete Lastverteilung auf. Das Rotorblatt als schlanken Balken zu betrachten ist gerechtfertigt, da die Dimensionen des Querschnitts in der Regel erheblich kleiner als die Blatlänge sind. Außerdem muss man sich vor Augen halten, dass hier nur die Schlagbiegung betrachtet wird und sowohl Schwenken als auch Torsion ignoriert werden. Diese Freiheitsgrade werden in Kap. 4 behandelt.

Zunächst wird die generelle Bewegungsdifferentialgleichung der Schlagbewegung eines Balkens unter äußerer Belastung und rotierender Bewegung abgeleitet. Dazu bedient man sich in vorteilhafter Weise des Euler-Bernoulli-Theorems für schlanke Balken: eine Querschnittsfläche senkrecht zur neutralen Achse bleibt eine Ebene auch unter Deformation des Balkens. Da die Deformationen aufgrund von Scherkräften im Verhältnis zu denen aus Biegemomenten proportional zu $(t/R)^2$ in der Schlagbiegung und proportional zu $(c/R)^2$ in der Schwenkbiegung sind, ist diese Annahme für Rotorblätter gerechtfertigt, denn für übliche Rotorblätter ist $t \approx 0,1c$ und $c/R \approx 0,04 - 0,08$. Dies bedeutet, dass die Verformung durch Scherkräfte vernachlässigbar ist und daher hilft, die Biege- und Scherwirkung zu entkoppeln. Ebenfalls wird angenommen, dass die Rotation eines Balkenelementes, welche eine Biegung unweigerlich hervorruft, klein gegenüber der Durchbiegung selber ist. Außerdem wird die strukturelle Dämpfung vernachlässigt. Hier sind $f_Z(y, t)$ in [N/m] die vertikale und $f_H(y, t)$ die horizontale äußere (aerodynamische) Belastungsverteilung, und $w(y, t)$ in [m] ist die vertikale Deformation als Biegelinie. Nun betrachtet man die Kräfte am Element der Länge dy , siehe Abb. 2.8. Allgemein wird im Folgenden mit $' = d/dy$ die Ableitung nach der radialen Koordinate bezeichnet, sowohl für die Ableitung der Kräfte wie auch der Auslenkungen. Höhere Ableitungen erhalten eine entsprechende Anzahl von Ableitungsstrichen, also $'' = d^2/dy^2$ etc.

F'_I Massenträgheitskraft pro Längeneinheit dy , $F'_I = m' \ddot{w}$

f_Z äußere vertikale Belastung pro Längeneinheit dy

f_H äußere horizontale Belastung pro Längeneinheit dy , $f_H = m' y \Omega^2$

T axiale Kraft, positiv für Spannung, negativ für Kompression

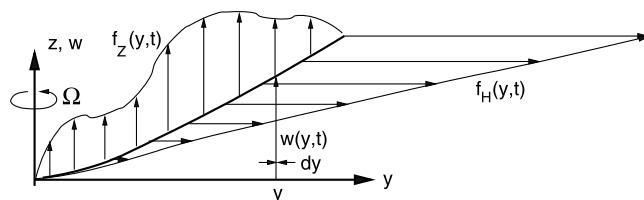
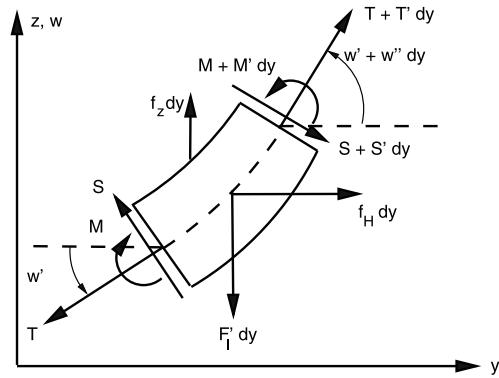


Abb. 2.7 Rotierender elastischer Balken unter Deformation

Abb. 2.8 Kräfte am Balkenelement



S Scherkraft an der Schnittebene, positiv wie im Bild gezeigt

M Biegemoment, positiv, wenn die Oberseite des Balkens unter Kompression steht

w' Steigung der Biegelinie; wird als klein angesehen $\Rightarrow \cos w' \approx 1, \sin w' \approx w'$

Nun wird das Gleichgewicht der Kräfte und Momente am Blattelement aufgestellt. In radialer Richtung erhält man

$$0 = T + T' dy - T + f_H dy - S w' + (S + S' dy) (w' + w'' dy) \quad (2.23)$$

oder, nachdem sich etliche Terme weglassen und diejenigen höherer Ordnung vernachlässigt werden, wobei gemäß Produktregel gilt: $(S w')' = S' w' + S w''$

$$0 = T' + f_H + (S w')' \quad (2.24)$$

Das Gleichgewicht in vertikaler Richtung bedingt

$$0 = f_Z dy + S - S - S' dy - m' \ddot{w} dy - T w' + (T + T' dy) (w' + w'' dy) \quad (2.25)$$

oder nach Auflösung und unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung

$$S' = f_Z - m' \ddot{w} + (T w')' \quad (2.26)$$

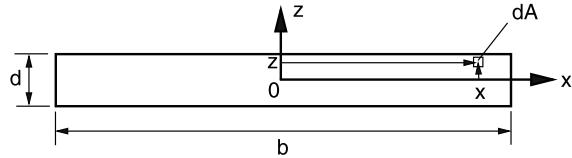
Die Ableitung der Scherkraft (S') ist also gleich der Verteilung der äußeren Belastung. Das Gleichgewicht der Momente um die rechte Seite ist (wiederum werden Terme höherer Ordnung weggelassen)

$$0 = M + S dy - M - M' dy \Rightarrow M' = S \quad (2.27)$$

Folglich ist die Ableitung des Momentes (M') gleich der Scherkraftverteilung. Aus der Balkenbiegetheorie stammt ebenfalls ein Ausdruck für das Biegemoment

$$M = EI_x w'' \quad (2.28)$$

Abb. 2.9 Zur Ermittlung des Flächenträgheitsmomentes eines Balkens



worin $E I_x$ die Biegesteifigkeit in $[N\text{m}^2]$ bezüglich der x -Achse im gezeigten Bild ist. E ist der Elastizitätsmodul, der den Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung eines Körpers darstellt (Beispiel Aluminium $E = 0,07 \text{ N/m}^2$; CFK $0,15 \text{ N/m}^2$) und I_x ist das Flächenträgheitsmoment um die x -Achse. Man stelle sich einen Balken mit rechteckigem Querschnitt vor, in dem x und z die Hauptachsen in der Querschnittsebene sind (Abb. 2.9).

$$I_x = \int_{\text{Querschnitt}} z^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-d/2}^{d/2} z^2 dx dz = \frac{bd^3}{12} \quad (2.29)$$

Entsprechend ist das Flächenträgheitsmoment um die z -Achse $I_z = b^3 d / 12$. Typische Profile weisen eine Dicke von $b/d \approx 10$ auf, so dass $I_z/I_x \approx b^2/d^2 = 100$ und damit $E I_z$ der Schwenkbewegung wesentlich größer als das $E I_x$ der Schlagbewegung ist. Damit folgt

$$S = M' = (E I_x w'')' \Rightarrow S' = M'' = (E I_x w'')'' \quad (2.30)$$

und schließlich nach Substitution in die Gleichung für die Vertikalkraft

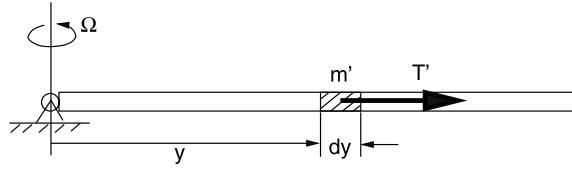
$$(E I_x w'')'' + m' \ddot{w} - (T w')' = f_z(y, t) \quad (2.31)$$

Damit hat man die partielle Differentialgleichung für Balkenbiegung erhalten (unter Vernachlässigung der Scherverformung und Biegerotation). Das Kräftegleichgewicht in horizontaler Richtung ist in Gl. 2.24 gegeben, worin der letzte Term von höherer Ordnung ist und daher weggelassen wird:

$$T' + f_H(y, t) = 0 \Rightarrow f_H(y, t) = -T' \quad (2.32)$$

Eine dynamische Bewegung in axialer Richtung wird also nicht berücksichtigt (weder aus elastischer Dehnung noch aus der kinematischen Verschiebung bei Schlagauslenkung); es gibt nur eine Gleichung für die auftretenden Längskräfte. Die Längsdehnung kann in der Regel vernachlässigt werden, da die Längssteifigkeit eines schlanken Balkens wesentlich größer ist als die Biegesteifigkeiten.

Da in statischen Problemen die äußeren Lasten gegeben sind, können die Scherkraft und das Biegemoment generell für jede radiale Stelle berechnet werden. Für dynamische Probleme sind die Massenträgheitsterme jedoch bewegungsabhängig und somit kann die Bewegungsgleichung nicht direkt gelöst werden.

Abb. 2.10 Rotierendes Blatt

Zunächst betrachte man sich die Gleichgewichtsbeziehung der Horizontalkraft eines rotierenden Rotorblattes (Abb. 2.10). Die linke Seite ist an der Rotationsachse eingespannt und man betrachte ein Element dy . Die differentielle Horizontalkraft, die an diesem Element angreift, ist die Zentrifugalkraft $f_H = m'y\Omega^2$. Für konstante Massenverteilung folgt

$$\begin{aligned} T' &= -f_H = -m'y\Omega^2 \\ T &= - \int_0^y T'dy = -m'\Omega^2 \frac{y^2}{2} + C \end{aligned} \quad (2.33)$$

An der Blattspitze ($y = R$) muss die Zentrifugalkraft verschwinden ($T = 0$), so dass die Integrationskonstante C bestimmt werden kann und es folgt

$$C = m'\Omega^2 \frac{R^2}{2} \Rightarrow T(y) = m'\Omega^2 \frac{R^2 - y^2}{2} = \int_y^R m'y\Omega^2 dy \quad (2.34)$$

Die Balkenbiegedifferentialgleichung Gl. 2.31 ist von vierter Ordnung in y , so dass man vier Randbedingungen – zwei an jeder Seite – braucht, um sie lösen zu können.

2.4.1 Randbedingungen

Man findet generell die Auslenkung und Steigung an den beiden Enden des Balkens aus der Geometrie des Problems, wohingegen die Scherkraft und das Biegemoment aus den Einspannbedingungen folgen, siehe Tab. 2.1. Zusätzlich zu der Abhängigkeit vom Ort ist die Bewegungsdifferentialgleichung noch von zweiter Ordnung in der Zeitvariablen, so dass noch zwei Anfangsbedingungen gefunden werden müssen. Zur Zeit $t = 0$ werden

Tab. 2.1 Randbedingungen verschiedener Einspannungen

a) Einfache Drehlagerung:	$w = 0$	$M = EI_x w'' = 0$
b) Fest eingespanntes Ende:	$w = 0$	$w' = 0$
c) Freies Ende:	$M = EI_x w'' = 0$	$S = (EI_x w'')' = 0$
d) Senkrechte Feder der Steifigkeit k_z :	$M = w'' = 0$	$S = (EI_x w'')' = -k_z w$
e) Drehfeder der Steifigkeit k_β :	$M = EI_x w'' = k_\beta w'$	$S = (EI_x w'')' = 0$

daher die Auslenkung w und die Geschwindigkeit $\partial w / \partial t = \dot{w}$ vorgeschrieben; in der Regel wird dies die Ruhelage $w(0)/R = 0$ und $(\partial w / \partial t(0)) / (\Omega R) = \dot{w}(0) / (\Omega R) = 0$ sein.

Als erster Schritt, die Blattdynamik zu verstehen, ist es angezeigt, die radialen Kräfte zunächst wegzulassen, was einem stehenden Rotorblatt oder einem Flügel eines Flugzeuges entspricht.

2.4.2 Dynamik des eingespannten, nicht rotierenden Balkens

Unter der Annahme eines gleichförmigen Balkens ($EI_x = \text{konst.}$, $m' = \text{konst.}$) ohne axiale Beanspruchung ($\Omega = 0 \text{ rad/s} \Rightarrow T = 0 \text{ N}$) erhält man aus Gl. 2.31 die partielle Differentialgleichung

$$EI_x w''' + m' \ddot{w} = f_Z(y, t) \quad (2.35)$$

Die Randbedingungen lauten

$$\begin{aligned} y = 0: \quad w &= 0 & w' &= 0 \\ y = R: \quad M &= EI_x w'' = 0 & S &= EI_x w''' = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Um das Eigenschwingungsverhalten zu ermitteln, muss man die homogene Lösung der Differentialgleichung betrachten, also die rechte Seite zu Null setzen (keine Anregungskraft: $f_Z = 0$). Mit dem Ansatz für harmonische Schwingungen des Balkens (also der Vorgabe des Systemverhaltens in der Zeit) erfolgt eine Trennung der Variablen Zeit t und Raum y :

$$w(y, t) = W(y)e^{i\omega t} \quad (2.37)$$

Der Term $e^{i\omega t}$ kann dann ausgeklammert werden. Damit wird aus der partiellen eine gewöhnliche Differentialgleichung mit der verbleibenden Variablen y

$$W(y)''' - \frac{m'\omega^2}{EI_x} W(y) = 0 \quad (2.38)$$

Mit folgendem Ansatz für die Balkenverformung (nun also der Vorgabe des Verformungstyps im Raum)

$$W(y) = W_0 e^{py} \quad \Rightarrow \quad W(y)''' = W_0 p^4 e^{py} \quad (2.39)$$

wird die Differentialgleichung in eine algebraische Gleichung umgewandelt, denn nun kann der Term e^{py} ausgeklammert werden.

$$p^4 = \frac{m'\omega^2}{EI_x} \quad (2.40)$$

Dies resultiert in vier Wurzeln des Typs $p = \pm\lambda, \pm i\lambda$ mit der Dimension [1/m]

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{m'\omega^2}{EI_x}} \quad (2.41)$$

Die allgemeine Lösung dazu lautet

$$\frac{W(y)}{W_0} = C \sinh \lambda y + D \cosh \lambda y + E \sin \lambda y + F \cos \lambda y \quad (2.42)$$

und man erhält so viele Verformungstypen wie es λ -Werte gibt, wobei jede dieser Lösungen die Randbedingungen erfüllen muss. Die Konstanten C, D, E, F werden über die Randbedingungen bestimmt, die zuvor in Gl. 2.36 angegeben waren. Die entstehenden vier Gleichungen lassen sich in Matrixform schreiben, wobei die in den jeweiligen Zeilen vorhandenen Konstanten $\lambda, \lambda^2, \lambda^3$ herausdividiert werden können.

$$\begin{bmatrix} W(0) \\ W'(0) \\ W''(R) \\ W'''(R) \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \lambda R & \cosh \lambda R & -\sin \lambda R & -\cos \lambda R \\ \cosh \lambda R & \sinh \lambda R & -\cos \lambda R & \sin \lambda R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \\ F \end{bmatrix} = 0 \quad (2.43)$$

Um eine nichttriviale Lösung zu erhalten, muss die Determinante der Matrix verschwinden. Diese Bedingung führt, wenn die Determinante aus der ersten Spalte berechnet wird, auf die transzendente Gleichung

$$\cos \lambda R = -\frac{1}{\cosh \lambda R} \quad \text{bzw.} \quad \cos \lambda R \cosh \lambda R = -1 \quad (2.44)$$

Die Lösungen kann man nun gewinnen, indem man jeweils die linken und rechten Seiten in einem Graph aufträgt und die Schnittpunkte findet (Abb. 2.11a). Man erhält unendliche viele Eigenwerte; die ersten sind näherungsweise

$$\begin{aligned} \frac{(\lambda R)_j}{\pi} &= 0,596864, 1,494176, 2,5 + 2,47 \cdot 10^{-4}, 3,5 - 1,07 \cdot 10^{-5}, \\ &\quad 4,5 + 0,46 \cdot 10^{-6}, 5,5 - 0,2 \cdot 10^{-7}, 6,5 + 0,09 \cdot 10^{-8}, \dots \\ &= j - \frac{1}{2} - \frac{\Delta_j}{(-10)^j} \end{aligned} \quad (2.45)$$

und die Abweichungen Δ_j sind in Abb. 2.11b angegeben, sie konvergieren gegen Null. Diese Eigenwerte repräsentieren die Eigenfrequenzen (engl. natural frequencies; auch Eigenfrequencies) des Balkens

$$\omega_j = (\lambda R)_j^2 \sqrt{\frac{EI_x}{m'R^4}} \quad j = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (2.46)$$

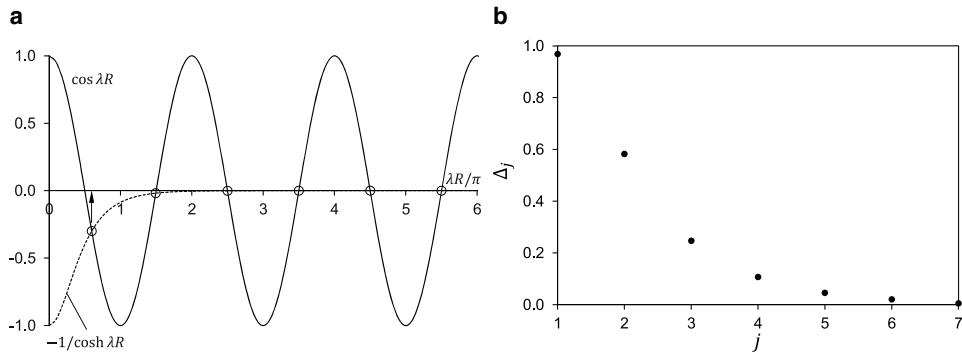


Abb. 2.11 Lösung für die Eigenwerte. **a** Grafische Eigenwertermittlung, **b** Abweichungen Δ_j

Da ein Körper so viele Eigenfrequenzen wie Freiheitsgrade hat, resultieren hier unendlich viele davon. Die korrespondierenden Eigenformen (engl. mode shapes) werden gewonnen, indem man eine beliebige der Konstanten zu Eins setzt und im Falle, dass dies F sei, folgt

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \sinh \lambda R & \cosh \lambda R & -\sin \lambda R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \cos \lambda R \end{bmatrix} (F) \quad (2.47)$$

Durch Inversion erhält man über die transponierte Adjunkte (wie folgt) oder direkt mit Hilfe der Cramerschen Regel die restlichen Koeffizienten C, D, E .

$$\begin{bmatrix} C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin \lambda R + \sinh \lambda R} \begin{bmatrix} -\cosh \lambda R & \sin \lambda R & 1 \\ \sin \lambda R + \sinh \lambda R & 0 & 0 \\ \cosh \lambda R & \sinh \lambda R & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \cos \lambda R \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\cosh \lambda R + \cos \lambda R}{\sinh \lambda R + \sin \lambda R} \\ -1 \\ -\frac{\cosh \lambda R + \cos \lambda R}{\sinh \lambda R + \sin \lambda R} \end{bmatrix}$$

Mit diesen Konstanten folgt für die Eigenform nach Einsetzen in Gl. 2.42

$$\frac{W(y)}{W_0} = \frac{\cosh \lambda R + \cos \lambda R}{\sinh \lambda R + \sin \lambda R} (\sinh \lambda y - \sin \lambda y) - \cosh \lambda y + \cos \lambda y \quad (2.49)$$

Zu jedem Eigenwert $(\lambda R)_j$ erhält man eine Eigenform W . Die homogenen Lösungen der Differentialgleichungen sind dann

$$W_{\text{hom}}(y, t) = W_{\text{hom}, j} \phi_j(y) e^{i \omega_j t} \quad (2.50)$$

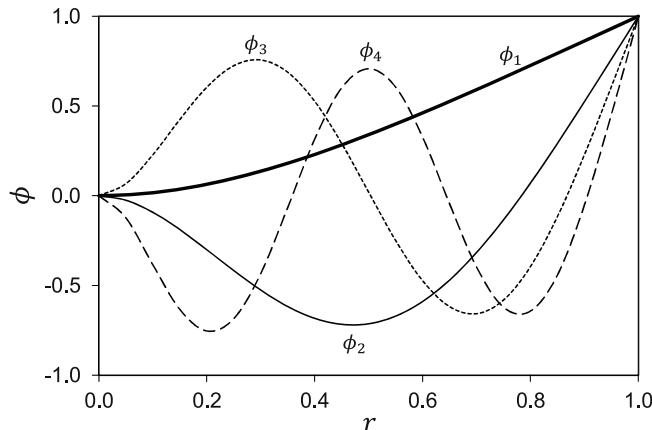


Abb. 2.12 Eigenformen des nicht rotierenden Balkens

worin ϕ_j normierte Eigenformen derart darstellen, dass sie die Amplitude „1“ am Balkenende besitzen. Die ersten vier Eigenformen sind im Folgenden mit ihren Eigenfrequenzen dargestellt (Abb. 2.12). Diese natürlichen Bewegungsformen der freien Schwingung repräsentieren die einem Balken eigenen Schwingungsformen (= Eigenformen) ohne externe Kräfte (also auch keine Luftkräfte, das entspricht der freien Schwingung im Vakuum), wenn er zu Schwingungen angeregt und dann sich selbst überlassen wird. Als Beispiel möge man sich einen Impuls an der Blattspitze angebracht vorstellen: er regt sämtliche Eigenformen an, da diese an der Spitzte ihre maximale Auslenkung aufweisen und somit auf Anregungen am sensibelsten reagieren. Da die höheren Eigenformen jedoch weitaus mehr Energie benötigen als die niederen, wird das Schwingungsverhalten durch die ersten drei bis vier Eigenformen in der Regel ausreichend genau beschrieben.

2.4.3 Balkenfunktionen

Die Kennwerte des nicht rotierenden Balkens sind für gleichförmige Balken mit verschiedenen Einspannbedingungen berechnet worden. Felgar und Young [7] haben diese Werte tabelliert, siehe Tab. 2.2. Die Eigenfrequenz des nicht rotierenden Balkens folgt aus Gl. 2.46. Eine sehr wichtige Eigenschaft dieser Eigenformen ist ihre Orthogonalität

Tab. 2.2 Parameter der Eigenschwingungen des homogenen Balkens

j	1	2	3	4	$j > 4$
$(\lambda R)_j$	1,8751	4,6941	7,8548	10,9955	$(2j - 1)\pi/2$

zueinander, das heißt, es gilt

$$\int_0^R m'(y) \phi_i(y) \phi_j(y) dy = \delta_{ij} M_i \quad \text{mit} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (2.51)$$

sowie

$$\int_0^R \phi_i(y) \left(EI_x(y) \phi_j''(y) \right)'' dy = \delta_{ij} M_i \omega_i^2 \quad (2.52)$$

Darin ist δ_{ij} das Kronecker Symbol mit der Eigenschaft $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und M_i ist die generalisierte Masse der i -ten Eigenform, die durch

$$M_i = \int_0^R m'(y) \phi_i^2(y) dy \quad (2.53)$$

definiert wird. Diese Balkenfunktionen sind von großem Wert, wenn man Näherungslösungen berechnen will und die Durchbiegung als Summe von unabhängigen Balkenbiegefunktionen auffasst. Wegen der Orthogonalität der Eigenformen erhält man in der Regel schnell konvergierende Lösungen. Für den homogenen Balken vereinfachen sich die Gleichungen zu (hier ist $' = d/dr$):

$$\begin{aligned} m' R \int_0^1 \phi_i(r) \phi_j(r) dr &= \delta_{ij} M_i \\ \frac{EI_x}{R^3} \int_0^1 \phi_i(r) \phi_j'''(r) dr &= \delta_{ij} M_i \omega_i^2 \\ M_i &= m' R \int_0^1 \phi_i^2(r) dr \end{aligned} \quad (2.54)$$

2.5 Die Dynamik des rotierenden Balkens

Das Eigenschwingungsverhalten eines rotierenden Balkens beliebiger Massen- und Steifigkeitsverteilung ohne äußere Erregerkräfte wird von der homogenen Lösung der allgemeinen Bewegungsdifferentialgleichung Gl. 2.31 erhalten.

$$(EI_x w'')'' - \overbrace{(Tw')}^{\text{neu}}' + m' \ddot{w} = 0 \quad (2.55)$$

worin T wie im vorangegangenen Abschnitt die Längskraft infolge Zentrifugalkrafteinflusses ist, siehe Gl. 2.34. Mit dem zuvor schon verwendeten Ansatz zur Trennung der Variablen Zeit t und Raum y

$$w(y, t) = W(y)e^{i\omega t} \quad (2.56)$$

erhält man nach Ausklammern des Terms $e^{i\omega t}$

$$(EI_x W'')'' - \left(W' \overbrace{\int_y^R m'y\Omega^2 dy}^T \right)' - m'\omega^2 W = 0 \quad (2.57)$$

Es gibt keine exakte analytische Lösung für diese Differentialgleichung, auch nicht für den homogenen Balken mit konstanter Massenverteilung und Steifigkeit. Um dennoch eine Lösung zu erhalten, muss man sich Näherungsverfahren bedienen, von denen die folgenden drei die am weitesten verbreiteten sind:

- a) Galerkin-Verfahren
- b) Rayleigh-Ritz-Verfahren
- c) Finite-Element-Methode (FEM)

Oft ist es von Vorteil, die oben genannte Differentialgleichung in dimensionsloser Form zu schreiben, indem man durch $m'_0 R \Omega^2$ dividiert und eine dimensionslose Koordinate $r = y/R$, eine dimensionslose Verformung $\eta = w/R$ und eine dimensionslose Massenverteilung $\mu_m = m'/m'_0$ sowie eine normierte Steifigkeitsverteilung $\mu_{EI} = EI_x/EI_{x0}$ verwendet. Hierin bedeutet $' = d/dr$ die dimensionslose radiale Ableitung.

$$v_0^2 (\mu_{EI} \eta'')'' - \left(\eta' \int_r^1 \mu_m r dr \right)' - \mu_m v^2 \eta = 0 \quad (2.58)$$

Der Parameter $v_0^2 = EI_{x0}/(m'_0 R^4 \Omega^2)$ repräsentiert die nicht rotierende Eigenfrequenz in dimensionsloser Form und $v = \omega/\Omega$ ist die Eigenfrequenz des rotierenden Balkens, bezogen auf die Drehfrequenz. Für den homogenen Balken vereinfacht sich dies zu

$$\eta''' - \frac{1}{2} [\eta'(1-r^2)]' - \left(\frac{v}{v_0} \right)^2 \eta = 0 \quad (2.59)$$

Dennoch gibt es dafür, aufgrund des Zentrifugalkraftterms in der Mitte, keine analytische Lösung und es müssen Näherungsverfahren wie oben angegeben verwendet werden, um die Eigenfrequenzen zu ermitteln. Bei den Verfahren nach Galerkin oder Rayleigh-Ritz wird mit Vorgabe der Verformung des Balkens die Eigenfrequenz analytisch ermittelt;

bei der FEM erfolgt nur die Vorgabe der Verformung des finiten Elementes und die Balkenverformung sowie die Eigenfrequenz können dann ausschließlich numerisch ermittelt werden, was den Computereinsatz erfordert.

2.6 Das Galerkin-Verfahren

Dieses Verfahren wurde nach Boris Grigorjewitsch Galerkin (1871–1945, Vorstand der sowjetischen Akademie der Wissenschaften) – einem russischen Ingenieur und Mathematiker – benannt und ist ein Näherungsverfahren zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen, welches er 1915 veröffentlichte [8]. Hier wird es angewendet, um die Eigenfrequenzen der Schlagbewegung näherungsweise zu bestimmen, indem man die zugehörigen Eigenformen vorgibt. Da die exakten Eigenformen unbekannt sind, nimmt man die Biegelinie als eine Serie von Funktionen an, von denen jede einzelne sämtliche Randbedingungen (also geometrische und die der Kräfte und Momente) erfüllen muss.

Wenn man diese Näherungslösung in die Differentialgleichung einsetzt, wird dies auf eine Gleichung für den erhaltenen Fehler hinauslaufen. Nun kann man durch sorgfältige Gewichtung der angenommenen Lösung diesen Fehler minimieren, wozu es mehrere Verfahren gibt. Im Galerkin-Verfahren wird das durch eine Wichtung des Fehlers und Integration über die Länge des Balkens bewerkstelligt, wobei jede der angenommenen Funktionen als Gewichtungsfunktion fungiert. Diese Methode ist sehr analog zu der Fehlerorthogonalisierung in Polynomen. Die Gleichgewichtsbeziehung für das drehende Rotorblatt lautet

$$(EI_x w'')'' - (Tw')' + m' \ddot{w} = f_Z(y, t) \quad (2.60)$$

Man verwendet folgenden Näherungsansatz für die Biegeverformung (Index app vom engl. approximate):

$$w_{\text{app}} = \sum_{i=1}^N \gamma_i(y) q_i(t) \quad (2.61)$$

Darin stellen die γ_i die angenommenen Biegelinien (= Ansatzfunktionen) als Näherung für die exakten Eigenformen ϕ_i dar und sie müssen jeweils alle Randbedingungen aus der Geometrie und den Kräften erfüllen. Die q_i sind die dimensionsbehafteten Auslenkungen, auch generalisierte Koordinaten genannt. Wenn nun w_{app} die exakte Lösung wäre, so würde die Differentialgleichung exakt erfüllt werden. Da es sich aber nur um eine Näherung handelt, wird es auf einen Fehler Err (vom engl. error) hinauslaufen

$$\text{Err} = m' \ddot{w}_{\text{app}} + (EI_x w_{\text{app}}'')'' - (Tw_{\text{app}}')' - f_Z \quad (2.62)$$

und es folgt nach Einsetzen des Ansatzes w_{app}

$$\text{Err} = \sum_{i=1}^N [m' \gamma_i \ddot{q}_i + (EI_x \gamma_i'')'' q_i - (Tw_i')' q_i] - f_Z \quad (2.63)$$

Nun muss man die Werte q_i finden, um diesen Fehler zu reduzieren. Dies macht man durch Orthogonalisierung mit der Gewichtungsfunktion γ_j .

$$\int_0^R \text{Err}(y, t) \gamma_j(y) dy = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2.64)$$

Einsetzen von Gl. 2.63 liefert

$$\sum_{i=1}^N \overbrace{\int_0^R \gamma_j m' \gamma_i dy}^{m_{ij}} \ddot{q}_i + \overbrace{\int_0^R \gamma_j (EI_x \gamma_i'')'' dy}^{k_{ij}, 1. \text{ Teil}} q_i - \overbrace{\int_0^R \gamma_j (T\gamma_i')' dy}^{k_{ij}, 2. \text{ Teil}} q_i - \overbrace{\int_0^R \gamma_j f_Z dy}^{Q_j} = 0 \quad (2.65)$$

für die $j = 1, \dots, N$ Ansatzfunktionen. Der erste Term repräsentiert die Trägheitskräfte, der zweite die Federkräfte aus der Balkensteifigkeit, der dritte die Federkräfte aus der Zentrifugalkraft und der letzte Term die äußere Anregung, z. B. aus Luftkräften. In Kurzform lassen sich die Integrale durch Koeffizienten repräsentieren:

$$\sum_{i=1}^N [m_{ij} \ddot{q}_i + k_{ij} q_i] = Q_j = Q_i \quad (2.66)$$

Darin sind Q_j generalisierte Erregerkräfte und

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \int_0^R \gamma_j m' \gamma_i dy \\ k_{ij} &= \int_0^R \gamma_j (EI_x \gamma_i'')'' dy - \int_0^R \gamma_j (T\gamma_i')' dy \\ Q_j &= \int_0^R \gamma_j f_Z dy = Q_i \end{aligned} \quad (2.67)$$

$Q_j = Q_i$, da für $j = i$ auch $\gamma_j = \gamma_i$ gilt. In Matrixform ist diese Schreibweise am kompaktesten:

$$\mathbf{m}_{ij} \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{k}_{ij} \mathbf{q}_i = \mathbf{Q}_i \quad (2.68)$$

Dieses stellt einen Satz gekoppelter Differentialgleichungen dar. Für das Eigenschwingungsverhalten setzt man wieder die rechte Seite zu Null (= Untersuchung der homogenen Differentialgleichung) und macht den Ansatz harmonischer Schwingungen

$$\mathbf{q}_i(t) = \mathbf{q}_i e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\mathbf{q}}_i(t) = -\omega^2 \mathbf{q}_i e^{i\omega t} \quad (2.69)$$

Damit erhält man

$$\omega^2 \mathbf{m}_{ij} \mathbf{q}_i = \mathbf{k}_{ij} \mathbf{q}_i \quad \text{bzw.} \quad (\omega^2 \mathbf{m}_{ij} - \mathbf{k}_{ij}) \mathbf{q}_i = \mathbf{0} \quad (2.70)$$

womit man die gekoppelten Differentialgleichungen auf ein System algebraischer Gleichungen reduziert hat. Dieses Eigenwertproblem kann mit einem der vielen Standardverfahren gelöst werden. Als Beispiel sei hier $N = 3$ angenommen

$$\omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Dieses wird drei Eigenwerte ergeben; für eine genauere Lösung sollte man aber einen größeren Wert für N annehmen. Im Falle der Rotorblattodynamik ist es nun vorteilhaft, die Balkenbiegefunktionen in die Näherungslösung einzusetzen, also $\gamma_i = \phi_i$

$$w_{\text{app}}(y, t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(y) q_i(t) \quad (2.72)$$

worin ϕ_i die Eigenformen des einseitig eingespannten homogenen nicht rotierenden Balkens darstellen. Mit Hilfe der Orthogonalitätsbeziehungen dieser Funktionen erhält man vereinfachte Ausdrücke für die Massen- und Steifigkeitsmatrix.

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \delta_{ij} M_i \\ k_{ij} &= \delta_{ij} \omega_{0i}^2 - \int_0^R \gamma_j(T \gamma_i')' dy \end{aligned} \quad (2.73)$$

Die axiale Kraft T ist für ein Blatt mit gleichförmiger Massenverteilung

$$T = \frac{m'}{2} \Omega^2 (R^2 - y^2) \quad (2.74)$$

und ω_{0i} ist die Eigenfrequenz der i -ten Eigenform des Balkens im nicht drehenden Zustand. Es sei ferner darauf hingewiesen, dass mit einer Division durch $m'_0 \Omega^2 R^2$ das Gleichungssystem auch dimensionslos gemacht werden kann. Der Vorfaktor ω^2 wird dann zum Frequenzverhältnis $v^2 = \omega^2 / \Omega^2$. Mit μ_m , μ_{EI} und v_0^2 wie zuvor folgt

$$\begin{aligned} v^2 \mathbf{m}_{ij} \mathbf{q}_j &= \mathbf{k}_{ij} \mathbf{q}_j \\ m_{ij} &= \int_0^1 \mu_m \gamma_i \gamma_j dr \\ k_{ij} &= v_0^2 \int_0^1 \gamma_j (\mu_{EI} \gamma_i'')'' dr - \frac{1}{2} \int_0^1 \gamma_j (\mu_m (1 - r^2) \gamma_i')' dr \end{aligned} \quad (2.75)$$

Das Verfahren ist recht einfach, aber es ist schwer, Ansatzfunktionen γ_i zu finden, die alle Randbedingungen erfüllen. Generell werden die Eigenfrequenzen bei dieser Methode als zu groß errechnet, das heißt, dass die wirklichen Werte der Eigenfrequenzen kleiner sind als die errechneten. Das liegt daran, dass das System aufgrund des Fehlers der zugrunde gelegten Ansatzfunktionen (dieser Fehler entspricht einer künstlichen Versteifung) nicht energieminimal ist. Außerdem wird der Fehler größer für die höheren Eigenformen, so dass man viele Ansatzfunktionen braucht, um auch die Eigenfrequenzen der höheren Eigenformen genau genug zu bestimmen. Die Genauigkeit der Eigenfrequenzen hängt natürlich von der Genauigkeit der verwendeten Ansatzfunktion ab.

Beispiel

Für ein gelenkloses Rotorblatt mit gleichförmiger Massenverteilung und konstantem $E I_x$ soll näherungsweise die erste Schlageigenfrequenz berechnet werden, wobei nur der erste Term einer Serie von Ansatzfunktionen verwendet werden soll. Dieser sei folgendermaßen gegeben:

$$w(r, t) = \gamma_1(r)q_1(t) \quad \text{mit} \quad \gamma_1(r) = 3r^2 - 2r^3 + 0,5r^4$$

Lösung

Die Randbedingungen sind

$$\begin{aligned} r = 0: \quad \gamma_1 &= 0 & \gamma'_1 &= 0 \\ r = 1: \quad M &= 0 \Rightarrow & S &= 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

Alle Randbedingungen werden von der angegebenen Funktion erfüllt, so dass die Ansatzfunktion verwendet werden kann. Es folgt weiter:

$$\begin{aligned} m_{11} &= m'R \int_0^1 \gamma_1^2 dr = \frac{26}{45}m'R \\ T &= \frac{m'R^2}{2}\Omega^2(1-r^2) \\ k_{11} &= \frac{EI_x}{R^3} \int_0^1 \gamma_1 \gamma_1''' dr - \frac{m'R\Omega^2}{2} \int_0^1 \gamma_1 [(1-r^2)\gamma_1']' dr \\ &= \frac{36}{5} \frac{EI_x}{R^3} + \frac{61}{90}m'R\Omega^2 \\ \omega_1^2 &= \frac{k_{11}}{m_{11}} = 12,46 \frac{EI_x}{m'R^4} + 1,173\Omega^2 \end{aligned}$$

Im nicht rotierenden System ist also

$$\omega_{01} = 3,53 \sqrt{\frac{EI_x}{m'R^4}}$$

und der exakte Wert des Vorfaktors liegt bei 3,516 (s. Tab. 2.2 und Gl. 2.46). Im rotierenden System erhält man unter der Annahme, dass für den Ausdruck $E I_x / (m' R^4 \Omega^2) = 0,1$ gesetzt werden kann, $\nu_1 = 1,555$, was dem exakten Wert von $\nu_1 = 1,5$ schon recht nahe kommt. Somit ist eine Ein-Term-Näherung bereits recht brauchbar, wenn man nur die Eigenfrequenz der ersten Schlagform berechnen will.

2.7 Das Rayleigh-Ritz-Verfahren

Dieses Verfahren wurde von John William Strutt, 3. Baron Rayleigh (1842–1919, einem englischen Physiker und Nobelpreisträger) [9] und dem schweizer Mathematiker und Physiker Walter Ritz (1878 – 1909, der seit 1901 in Göttingen wirkte) entwickelt [10]. Diese Methode basiert auf Energieprinzipien. Auch hier wird die Deformation als Summe von Ansatzfunktionen und deren zugehöriger generalisierter Koordinaten vorweggenommen, aber diese brauchen nur noch die geometrischen Randbedingungen zu erfüllen. Wenn man diesen Ansatz in den Ausdruck für die totale Energie einsetzt, der aus der kinetischen und der potentiellen Energie besteht (letztere wohnt den Deformationen in Form von Spannungen inne), kann der entstehende Ausdruck nicht in einen für minimale Energie übergehen, wie dies bei der exakten Lösung der Fall wäre. Wieder wird durch sorgfältige Gewichtung der Ansatzfunktionen unter Anwendung der Variationsrechnung der entstehende Fehler minimiert. Es wird auch hier das Beispiel des starr an der Wurzel eingespannten rotierenden Balkens nach Abb. 2.7 betrachtet und die Deformation formal wie im Galerkin-Verfahren angesetzt:

$$w_{\text{app}} = \sum_{i=1}^N \gamma_i(y) q_i(t) \quad (2.76)$$

Die geometrischen Randbedingungen lauten

$$y = 0: \quad w = 0 \quad w' = 0 \quad (2.77)$$

Die kinetische Energie ist (vergleiche mit $(m/2)V^2$ in der Kinetik oder mit $(\rho/2)V^2$ im Staudruck)

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} \int_0^R m' \dot{w}^2 dy = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \\ m_{ij} &= \int_0^R m' \gamma_i \gamma_j dy \end{aligned} \quad (2.78)$$

Die potentielle oder auch Spannungsenergie besteht aus einem Anteil aus der Biegung (elastische oder Federkraft, erster Term) und einem Anteil aus der Zentrifugalkraft (ent-

spricht $F_{CF}\beta$ der Schlagbewegung des starren Blattes, zweiter Term):

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= \frac{1}{2} \int_0^R EI_x (w'')^2 dy + \frac{1}{2} \int_0^R T (w')^2 dy = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N k_{ij} q_i q_j \\ k_{ij} &= \int_0^R EI_x \gamma_i'' \gamma_j'' dy + \int_0^R T \gamma_i' \gamma_j' dy \\ T &= \int_y^R m'y \Omega^2 dy \end{aligned} \quad (2.79)$$

Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen mit $\delta w = \sum_{i=1}^N \gamma_i \delta q_i$ erhält man die virtuelle Arbeit δW als das Produkt von Kraft und Weg zu

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_0^R f_Z \delta w dy = \sum_{i=1}^N Q_i \delta q_i \\ Q_i &= \int_0^R f_Z \gamma_i dy \end{aligned} \quad (2.80)$$

Q_i stellt wieder die generalisierte Erregerkraft dar. Die Minimierung der totalen Energie kann mit Hilfe der Lagrange'schen Gleichung ausgedrückt werden

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{\text{kin}}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_{\text{kin}}}{\partial q_i} + \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial q_i} = \frac{\partial \delta W}{\partial \delta q_i} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.81)$$

Nun setzt man die Energieausdrücke ein und erhält ein System von Differentialgleichungen

$$\sum_{j=1}^N (m_{ij} \ddot{q}_j + k_{ij} q_j) = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.82)$$

Dieses sind N gekoppelte Gleichungen und sie schreiben sich in Matrixform genauso wie beim Galerkin-Verfahren:

$$\mathbf{m}_{ij} \ddot{\mathbf{q}}_j + \mathbf{k}_{ij} \mathbf{q}_j = \mathbf{Q}_i \quad (2.83)$$

Für freie Schwingungen braucht man nur die homogene Lösung zu bestimmen und mit dem Ansatz

$$\mathbf{q}_j(t) = \mathbf{q}_j e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\mathbf{q}}_j(t) = -\omega^2 \mathbf{q}_j e^{i\omega t} \quad (2.84)$$

erhält man

$$\omega^2 \mathbf{m}_{ij} \mathbf{q}_j = \mathbf{k}_{ij} \mathbf{q}_j \quad \text{bzw.} \quad (\omega^2 \mathbf{m}_{ij} - \mathbf{k}_{ij}) \mathbf{q}_j = \mathbf{0} \quad (2.85)$$

womit man die gekoppelten Differentialgleichungen auf ein System algebraischer Gleichungen reduziert hat. Dieses kann mit einem der vielen Standardverfahren gelöst und die Eigenwerte ermittelt werden. Als Beispiel sei hier $N = 3$ angenommen

$$\omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

Bei Verwendung nur eines Terms $N = 1$ ist dann

$$\omega^2 = \frac{k_{11}}{m_{11}} = \frac{\int_0^R EI_x(\gamma'_1)^2 dy + \int_0^R T(\gamma'_1)^2 dy}{\int_0^R m' \gamma_1^2 dy} \quad (2.87)$$

Auch beim Rayleigh-Ritz-Verfahren lässt sich das Ergebnis in dimensionsloser Schreibweise aufstellen, man vergleiche mit dem Ergebnis des Galerkin-Verfahrens in Gl. 2.75.

$$\begin{aligned} v^2 \mathbf{m}_{ij} \mathbf{q}_j &= \mathbf{k}_{ij} \mathbf{q}_j \\ m_{ij} &= \int_0^1 \mu_m \gamma_i \gamma_j dr \\ k_{ij} &= v_0^2 \int_0^1 \mu_E I \gamma_i'' \gamma_j'' dr + \frac{1}{2} \int_0^1 \mu_m (1 - r^2) \gamma_i' \gamma_j' dr \end{aligned} \quad (2.88)$$

Auch dieses Verfahren ist recht einfach und es ist sogar leichter, Ansatzfunktionen γ_i zu finden, da diese nur die geometrischen Randbedingungen erfüllen müssen. Generell werden die Eigenfrequenzen auch bei dieser Methode aus den gleichen Gründen wie beim Galerkin-Verfahren als zu groß errechnet.

Beispiel

Man berechne die Eigenfrequenz eines gleichförmigen rotierenden Rotorblattes mit der folgenden Ansatzfunktion:

$$w(y, t) = \gamma_1(y) q_1(t) \quad \text{mit} \quad \gamma_1 = \left(\frac{y}{R} \right)^2 = r^2$$

Lösung

Die geometrischen Randbedingungen sind

$$r = 0: \quad \gamma_1 = 0 \quad \gamma_1' = 0$$

Die Ansatzfunktion erfüllt diese Bedingungen und ist damit verwendbar. Es folgt

$$m_{11} = m' R \int_0^1 \gamma_1^2 dr = \frac{m' R}{5}$$

$$k_{11} = EI_x \int_0^R (\gamma_1'')^2 dy + \int_0^R T(\gamma_1')^2 dy = 4 \frac{EI_x}{R^3} + \frac{8}{15} m' R \Omega^2$$

$$\omega_1^2 = \frac{k_{11}}{m_{11}} = 20 \frac{EI_x}{m' R^4} + 2,667 \Omega^2$$

Die Eigenfrequenz des nicht rotierenden Blattes (bei $\Omega = 0$) ist somit

$$\omega_{01} = 4,472 \sqrt{\frac{EI_x}{m' R^4}} \quad \text{Galerkin: } \omega_{01} = 3,53 \sqrt{\frac{EI_x}{m' R^4}}$$

Die exakte Lösung liegt bei 3,516, so dass die gewonnene Lösung nur als sehr grob angesehen werden kann. Man muss sich aber auch vor Augen halten, dass die Ansatzfunktion hier nur aus einem einzigen Term zweiter Ordnung bestand, während sie im Beispiel zur Anwendung des Galerkin-Verfahrens bereits von vierter Ordnung war. Im rotierenden System folgt mit $EI_x/(m' R^4 \Omega^2) = 0,1$

$$\nu_1 = 2,16 \quad \text{Galerkin: } \nu_1 = 1,555$$

Da die nicht rotierende Eigenfrequenz bereits zu groß war, ist die Eigenfrequenz im rotierenden System natürlich auch größer als beim Galerkin-Verfahren.

Beispiel

Ein in radialer Richtung zugespitztes Rotorblatt wird in zwei Hälften diskretisiert, von denen jede in sich gleiche Eigenschaften aufweist, siehe Abb. 2.13. So ist im inneren Abschnitt $EI_x/(EI_{x0}) = 0,8$ und im äußersten 0,5; die Massenverteilung innen $m'/m'_0 = 0,9$ und außen 0,7. Man berechne die erste Schlageigenfrequenz näherungsweise mit Hilfe der Rayleigh-Ritz-Methode, wobei folgender Ansatz zu verwenden ist ($r = y/R$):

$$w(y, t) = \gamma_1(y)q_1(t) = r^2 q_1(t)$$

Lösung

Die Erfüllung der geometrischen Randbedingungen wurde bereits aufgezeigt. Es folgt

$$m_{11} = 0,9m'_0 R \int_0^{0,5} r^4 dr + 0,7m'_0 R \int_{0,5}^1 r^4 dr = 0,14125m'_0 R$$

$$k_{11a} = 0,8 \frac{EI_{x0}}{R^3} \int_0^{0,5} (\gamma_1'')^2 dr + 0,5 \frac{EI_{x0}}{R^3} \int_{0,5}^1 (\gamma_1'')^2 dr = 2,6 \frac{EI_{x0}}{R^3}$$

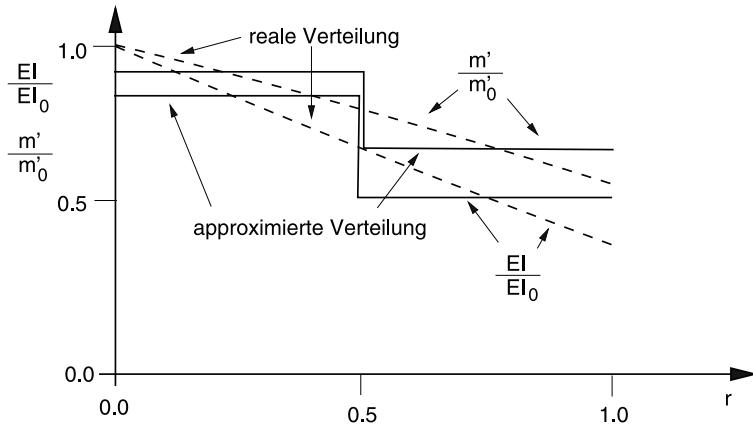


Abb. 2.13 Diskretisierung einer kontinuierlichen Verteilung

Die Zugkraft an der Stelle r ist

$$T(r) = m'_0 R^2 \Omega^2 \int_r^1 \mu_m r \, dr$$

Auch hier muss in die beiden Sektionen unterteilt werden

$$\begin{aligned} 0,5 < r < 1: \quad \mu_m &= 0,7 \quad T = 0,35m'_0 \Omega^2 R^2 (1 - r^2) \\ 0 < r < 0,5: \quad \mu_m &= 0,9 \quad T = m'_0 \Omega^2 R^2 (0,375 - 0,45r^2) \end{aligned}$$

Damit wird der Zentrifugalkraftanteil an k_{11}

$$\begin{aligned} k_{11b} &= 4m'_0 \Omega^2 R \left[\int_0^{0,5} (0,375 - 0,45r^2)r^2 \, dr + 0,35 \int_{0,5}^1 (1 - r^2)r^2 \, dr \right] \\ &= 0,188m'_0 \Omega^2 R \\ \omega_1^2 &= \frac{k_{11a} + k_{11b}}{m_{11}} = 18,41 \frac{EI_{x0}}{m'_0 R^4} + 1,33 \Omega^2 \end{aligned}$$

Die Eigenfrequenzen fallen hier nicht geringer als beim homogenen Balken aus, da sowohl geringere Steifigkeiten als auch geringere Massen angenommen wurden. Die nicht drehende Eigenfrequenz folgt zu $\omega_1 = 4,291 \sqrt{EI_{x0}/(m'_0 R^4)}$ und mit der Annahme von $EI_{x0}/(m'_0 R^4 \Omega^2) = 0,1$ wie zuvor folgt $\nu_1 = 1,78$.

2.8 Die Finite Element Methode

Finite Element Methoden sind sehr leistungsstarke Verfahren, um strukturelle Problemstellungen zu analysieren. Insbesondere ist dies der Fall, wenn komplizierte Geometrien oder andere Ungleichförmigkeiten vorliegen, wie zum Beispiel große Änderungen in den Steifigkeiten, Massenverteilungen etc. Schon vor 1900 waren die Grundsätze der FEM bekannt, es fehlte allerdings an den Rechenmaschinen, um umfangreichere Problemstellungen damit zu lösen. Daher hat die FEM erst mit der Verfügbarkeit von Rechenanlagen 1956 [11] ihren Aufschwung genommen. Die Bezeichnung FEM wurde von Ray W. Clough 1960 erstmals verwendet [12].

Da FEM leicht auf andere Konfigurationen adaptiert werden können, sind sie die Basis der modernen Strukturanalyse geworden. Die hier geschilderte FEM ist allerdings auf ein einfaches, auf Verschiebungen in nur einer Richtung basierendes Modell beschränkt, um das Prinzip zu verdeutlichen. Man stelle sich dazu einen rotierenden, an beiden Enden freien Balken vor, der in eine Anzahl von finiten Elementen (hier drei) zerlegt sei (Abb. 2.14). Es gibt vier Verbindungsstellen, die sogenannten Knoten (engl. nodes), von denen jeder zwei Freiheitsgrade (engl. degrees of freedom) besitzt: die vertikale Verschiebung (engl. translation) und die Drehung (engl. rotation) infolge Biegung. Insgesamt gibt es also acht Freiheitsgrade: vier vertikale Verschiebungen q_1, q_3, q_5, q_7 und vier Steigungen q_2, q_4, q_6, q_8 . Die FEM besteht hauptsächlich aus drei Schritten, die im Folgenden dargelegt werden:

1. Entwicklung der Elementeigenschaften
2. Zusammenstellen der Elemente
3. Einbringen der Randbedingungen

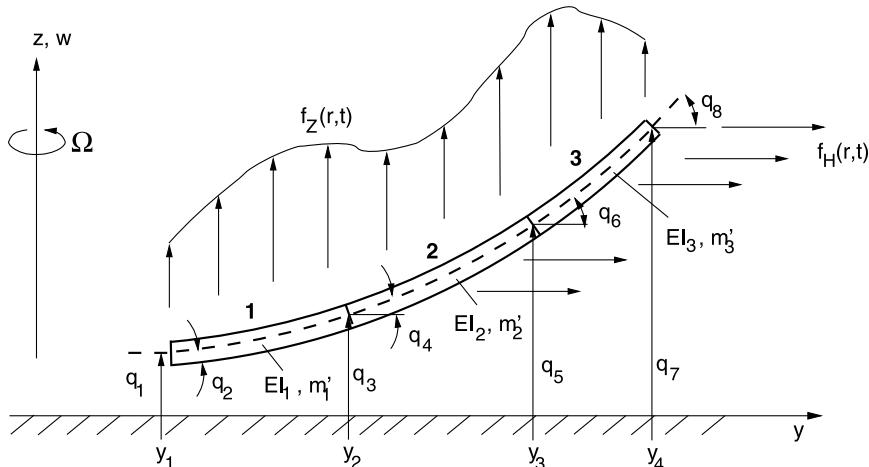


Abb. 2.14 FEM Modell des rotierenden Balkens

2.8.1 Die Entwicklung der Elementeigenschaften

Hier wird das Prinzip der virtuellen Verschiebungen verwendet, um die Elementeigenschaften zu formulieren. Dazu betrachtet man nur ein Element, welches vier Freiheitsgrade hat; zwei an jedem Ende. Wenn die Elementlänge mit l bezeichnet wird und x die lokale Elementkoordinate darstellt, muss man die vertikale Verschiebung dieses Elements in Form eines Polynoms dritter Ordnung als Ansatzfunktion annehmen (Abb. 2.15), da vier Randbedingungen zu erfüllen sind.

$$w(x, t) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (2.89)$$

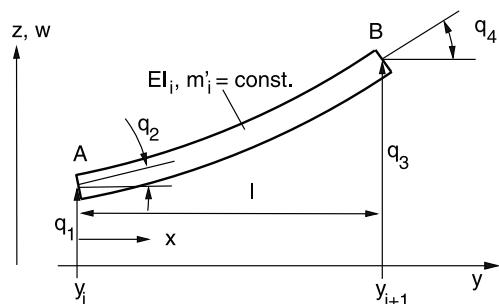
Diese angenommene Verschiebungsform muss folgende Randbedingungen an den Enden erfüllen ($' = d/dx$): Stetigkeit in der Verschiebung w und in der Steigung w' .

$$\begin{aligned} x = 0: \quad w &= q_1 = a_1 & w' &= q_2 = a_2 \\ x = l: \quad w &= q_3 & w' &= q_4 \end{aligned} \quad (2.90)$$

Dieser Ansatz schließt eine Stetigkeit der Biegemomente (zweite Ableitung, also w'') an den Elementgrenzen aus. Dies lässt sich durch einen Ansatz fünfter Ordnung beheben, erfordert jedoch zwei weitere Freiheitsgrade und Randbedingungen und vergrößert damit die Element- und Systemmatrizen. In Matrixform lauten diese Gleichungen ($l = y_{i+1} - y_i$)

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Abb. 2.15 Notation eines Elementes i in der FEM



und nach Inversion der Matrix erhält man die Koeffizienten a_i zu

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

Somit kann man die angenommene Verschiebungsfunktion in Abhängigkeit der vier Freiheitsgrade ausdrücken

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^4 H_i q_i \quad (2.93)$$

worin H_i (sogenannte Hermite'sche Polynome) die Formfunktionen darstellen und $\bar{x} = x/l$ die auf die Elementlänge bezogene dimensionslose Elementkoordinate ist, die sich von 0 (Elementanfang) bis 1 (Elementende) erstreckt.

$$\begin{aligned} H_1 &= 2\bar{x}^3 - 3\bar{x}^2 + 1 \\ H_2 &= [\bar{x}^3 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}]l \\ H_3 &= -2\bar{x}^3 + 3\bar{x}^2 \\ H_4 &= [\bar{x}^3 - \bar{x}^2]l \end{aligned} \quad (2.94)$$

Das weitere Vorgehen ist analog zu dem des Rayleigh-Ritz-Verfahrens. Zunächst werden die kinetische und die potentielle Energie des Elementes in Abhängigkeit der Knotenverschiebungen ausgedrückt. Für die kinetische Energie folgt ($' = d/dx$)

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \int_0^l m'_i \dot{w}^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l m'_i \left(\sum_{i=1}^4 H_i \dot{q}_i \right) \left(\sum_{j=1}^4 H_j \dot{q}_j \right) dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.95)$$

worin folgende Massenterme enthalten sind

$$m_{ij} = \int_0^l m'_i H_i H_j dx \quad (2.96)$$

Der Ausdruck für die potentielle Energie nimmt folgende Form an

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= \frac{1}{2} \int_0^l EI_i (w'')^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l T(x) (w')^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l EI_i \left(\sum_{i=1}^4 H''_i q_i \right) \left(\sum_{j=1}^4 H''_j q_j \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^l T(x) \left(\sum_{i=1}^4 H'_i q_i \right) \left(\sum_{j=1}^4 H'_j q_j \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 k_{ij} q_i q_j \end{aligned} \quad (2.97)$$

Die Steifigkeitsterme darin sind

$$k_{ij} = \int_0^l EI_i H_i'' H_j'' dx + \int_0^l T(x) H_i' H_j' dx \quad (2.98)$$

Besondere Aufmerksamkeit erfordert die Zentrifugalkraft $T(x)$ innerhalb des Elementes, basierend auf $T(y)$ des Balkens. Sie setzt sich zusammen aus dem Betrag am äußeren Ende des Elementes i , resultierend aus allen Beiträgen der außerhalb liegenden Elemente $j = i+1, \dots, N$ sowie dem Zuwachs innerhalb des Elementes i vom äußeren Elementende y_{i+1} bis zur Stelle y innerhalb. Folglich:

$$\begin{aligned} T(y) &= \int_y^R m' y \Omega^2 dy \\ &= \underbrace{\int_y^{y_{i+1}} m'_i y \Omega^2 dy}_{\text{innerhalb Element } i} + \underbrace{\sum_{j=i+1}^N \int_{y_j}^{y_{j+1}} m'_j y \Omega^2 dy}_{\text{alle Elemente außerhalb } i} \\ &= \frac{m'_i \Omega^2}{2} (y_{i+1}^2 - y^2) + \sum_{j=i+1}^N \frac{m'_j \Omega^2}{2} (y_{j+1}^2 - y_j^2) \end{aligned} \quad (2.99)$$

Nun muss noch die Koordinatentransformation ins Elementsystem bewerkstelligt werden. Mit $x = y - y_i$ folgt $y = y_i + x$ und $dy = dx$; also erhält man für die Zentrifugalkraft in der gesuchten Form

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{m'_i \Omega^2}{2} [y_{i+1}^2 - (y_i + x)^2] + \sum_{j=i+1}^N \frac{m'_j \Omega^2}{2} (y_{j+1}^2 - y_j^2) \\ &= \frac{m'_i \Omega^2}{2} (y_{i+1}^2 - y_i^2 - 2y_i x - x^2) + \sum_{j=i+1}^N \frac{m'_j \Omega^2}{2} (y_{j+1}^2 - y_j^2) \end{aligned} \quad (2.100)$$

Der erste Teil repräsentiert den Zuwachs innerhalb des Elementes i und der zweite Teil die Summe der Beiträge aller außerhalb liegenden Elemente. Die virtuelle Arbeit bei einer virtuellen Verschiebung ist das Produkt von Kraft f_Z und Weg δw , also

$$\delta W = \int_0^l f_Z(x) \delta w dx = \int_0^l f_Z(x) \sum_{i=1}^4 H_i \delta q_i dx = \sum_{i=1}^4 Q_i \delta q_i \quad (2.101)$$

mit der generalisierten Erregerkraft

$$Q_i = \int_0^l f_Z(x) H_i dx \quad (2.102)$$

Die genannten Energieausdrücke können bequemer in Matrixform geschrieben werden

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_i \mathbf{m}_{ij} \dot{\mathbf{q}}_j \\ E_{\text{pot}} &= \frac{1}{2} \mathbf{q}_i \mathbf{k}_{ij} \mathbf{q}_j \\ \delta W &= \mathbf{Q}_i \delta \mathbf{q}_i \end{aligned} \quad (2.103)$$

Man nehme nun einmal eine konstante Verteilung von m'_i und $E I_i$ innerhalb des Elementes an und stelle sich das linke Ende als an der Stelle y_i von der Drehachse entfernt vor. Dann lautet die Massenmatrix des Elementes (mit $l = y_{i+1} - y_i$)

$$\mathbf{m}_{ij} = m'_i \begin{bmatrix} \frac{13}{35}l & \frac{11}{210}l^2 & \frac{9}{70}l & -\frac{13}{420}l^2 \\ \frac{11}{210}l^2 & \frac{1}{105}l^3 & \frac{13}{420}l^2 & -\frac{1}{140}l^3 \\ \frac{9}{70}l & \frac{13}{420}l^2 & \frac{13}{35}l & -\frac{11}{210}l^2 \\ -\frac{13}{420}l^2 & -\frac{1}{140}l^3 & -\frac{11}{210}l^2 & \frac{1}{105}l^3 \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

und die Steifigkeitsmatrix des Elementes

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{ij} = E I_i &\left[\begin{array}{cccc} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{array} \right] + \frac{\Omega^2 A_i}{2} \left[\begin{array}{cccc} \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5l} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2l}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{l}{30} \\ -\frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{l}{30} & -\frac{1}{10} & \frac{2l}{15} \end{array} \right] \\ &- m'_i \Omega^2 \left[\begin{array}{cccc} \frac{3y_i}{5} + \frac{6l}{35} & \frac{ly_i}{10} + \frac{l^2}{28} & -\frac{3y_i}{5} - \frac{6l}{35} & -\frac{l^2}{70} \\ \frac{ly_i}{10} + \frac{l^2}{28} & \frac{l^2 y_i}{30} + \frac{l^3}{105} & -\frac{ly_i}{10} - \frac{l^2}{28} & -\frac{l^2 y_i}{60} + \frac{l^3}{70} \\ -\frac{3y_i}{5} - \frac{6l}{35} & -\frac{ly_i}{10} - \frac{l^2}{28} & \frac{3y_i}{5} + \frac{6l}{35} & \frac{l^2}{70} \\ -\frac{l^2}{70} & -\frac{l^2 y_i}{60} + \frac{l^3}{70} & \frac{l^2}{70} & \frac{l^2 y_i}{10} + \frac{3l^3}{70} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (2.105)$$

Darin sind die Koeffizienten A_i durch

$$A_i = \sum_{j=i+1}^N m'_j \left(y_{j+1}^2 - y_j^2 \right) \quad (2.106)$$

definiert. Die drei Teile der Steifigkeitsmatrix beinhalten der Reihe nach den Anteil der Steifigkeit des Elements, den Anteil der Zentrifugalkraft aller außerhalb liegenden Elemente und letztlich den Zuwachs an Zentrifugalkraft innerhalb des Elements.

2.8.2 Das Zusammenstellen der Elemente

Es wurden bisher die kinetische Energie, die potentielle Energie sowie die virtuelle Arbeit eines Elementes definiert. Der nächste Schritt ist, die einzelnen Elemente zu dem Gesamtsystem zusammenzustellen, um die Gesamtenergie- und Gesamtarbeitsausdrücke

zu erhalten. Als Beispiel sollen $N = 3$ Elemente angenommen werden, was auf insgesamt $4(N - 1) = 8$ Freiheitsgrade führt (Abb. 2.14). Die Steifigkeitsmatrix des ersten Elementes verbindet die Freiheitsgrade q_1 bis q_4 der Knoten 1 und 2 und ist daher in der linken oberen Ecke der Gesamtsteifigkeitsmatrix angesiedelt. Das mittlere Element verbindet die Freiheitsgrade q_3 bis q_6 der Knoten 2 und 3 und ist daher in der Mitte der Gesamtsteifigkeitsmatrix zu finden und das dritte Element verbindet die Freiheitsgrade q_5 bis q_8 der Knoten 3 und 4 und ist daher in der unteren rechten Ecke positioniert. Aufgrund des Zusammenstoßens der Elemente an den Knoten gibt es Kopplungen. Damit hat die Gesamtsteifigkeitsmatrix folgendes Aussehen

$$\mathbf{k}_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+2 & 1+2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+2 & 1+2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2+3 & 2+3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2+3 & 2+3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

Darin kennzeichnen die Zahlen den jeweiligen Beitrag des zugehörigen Elementes. Wie man sieht, ist es sehr einfach, die Gesamtsteifigkeitsmatrix aufzustellen und dies ist einer der Schlüssel des Erfolges der Finite-Element-Methoden, da dieses Zusammenstellen automatisiert vom Computer gemacht werden kann. Genau so wird auch die Gesamtmassematrix aufgestellt und auch der Kraftvektor auf der rechten Seite:

$$\mathbf{Q}_j = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+2 \\ 1+2 \\ 2+3 \\ 2+3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

Mit Anwendung der Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_{\text{kin, tot}}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_{\text{kin, tot}}}{\partial q_i} + \frac{\partial E_{\text{pot, tot}}}{\partial q_i} = \frac{\partial \delta W}{\partial \delta q_i} \quad (2.109)$$

die nur auf das Gesamtsystem und nicht auf die einzelnen Elemente angewendet werden darf, erhält man die Bewegungsdifferentialgleichungen genauso wie bei dem Galerkin- oder dem Rayleigh-Ritz-Verfahren

$$\mathbf{m}_{ij} \ddot{\mathbf{q}}_j + \mathbf{k}_{ij} \mathbf{q}_j = \mathbf{Q}_i \quad (2.110)$$

Darin sind \mathbf{m}_{ij} die Massenmatrix und \mathbf{k}_{ij} die Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems, \mathbf{q}_j der Vektor der generalisierten Koordinaten und \mathbf{Q}_i der Vektor der generalisierten Erregerkräfte. Im angegebenen Beispiel laufen die Indizes i und j von 1 bis 8. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix ist nun aber singulär, da hier noch die Starrkörperfreiheitsgrade enthalten sind, womit die Inversion zur Lösung des Systems noch nicht erfolgen kann. Der nächste Schritt lautet nun, die Randbedingungen einzuarbeiten. Beim Rayleigh-Ritz-Verfahren waren diese bereits in der Wahl der Ansatzfunktionen berücksichtigt worden.

2.8.3 Die Einbringung der Randbedingungen

Ein gelenkloses Rotorblatt ist an der Wurzel fest eingespannt und hat daher dort die Randbedingung

$$q_1 = q_2 = 0 \quad (2.111)$$

zu erfüllen. Damit kann man aus der vorigen Matrixgleichung die ersten zwei Reihen und Spalten entfernen, was zur Folge hat, dass die Steifigkeitsmatrix nicht mehr singulär ist und nun invertiert werden kann, da keine Starrkörperformen mehr enthalten sind. Bei einem einfach gestützten Balken (Abb. 2.16) sind die rotatorischen Freiheitsgrade nicht Null, aber die vertikale Auslenkung muss an den Stützpunkten verschwinden:

$$q_1 = q_7 = 0 \quad (2.112)$$

Hier sind also die erste und siebente Reihe und Spalte zu entfernen. Selbst statisch überbestimmte Systeme können sehr einfach gelöst werden. Als Beispiel sei ein einseitig fest und an der anderen Seite gelenkig gelagerter Balken genannt (Abb. 2.17). Hier sind also drei Spalten und drei Reihen zu entfernen.

$$q_1 = q_2 = q_7 = 0 \quad (2.113)$$

Generell sind die Massen- und Steifigkeitsmatrizen Bandmatrizen und man kann diese Eigenschaft nutzen, um die Computerzeit zum Invertieren als auch den erforderlichen

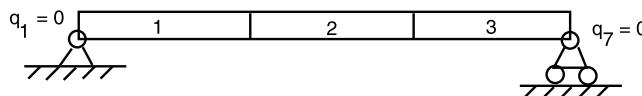


Abb. 2.16 Randbedingungen bei gelenkiger Stützung

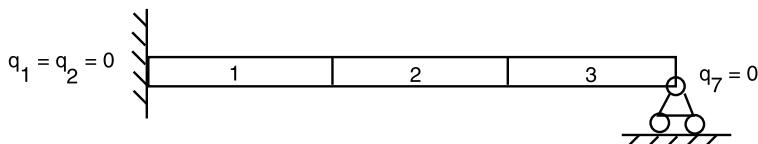
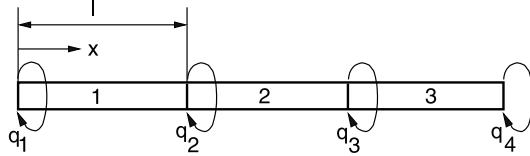


Abb. 2.17 Randbedingungen bei statisch überbestimmter Stützung

Abb. 2.18 Randbedingungen bei den Torsionsformen



Speicherbedarf zu reduzieren. Manchmal werden der Einfachheit halber auch konzentrierte Kräfte und Massen anstelle kontinuierlicher Verteilungen verwendet, was ebenfalls in Bandmatrizen resultiert.

Diese FEM kann ebenfalls auf andere Biegeformen erweitert werden, um auch die Schwenk- und Torsionsformen berechnen zu können. Für die Torsionsformen sind die Randbedingungen durch gleiche Verwindung an den Elementknoten gegeben (Abb. 2.18). Am Beispiel einer Diskretisierung mit drei Elementen hat man vier Freiheitsgrade (q_1, q_2, q_3, q_4) und innerhalb eines Elementes wird die Verwindung linear angesetzt

$$\Theta = H_1 q_1 + H_2 q_2 \quad (2.114)$$

worin die Formfunktionen durch

$$H_1 = 1 - \frac{x}{l} \quad \text{und} \quad H_2 = \frac{x}{l} \quad (2.115)$$

bestimmt sind (mit $l = y_{i+1} - y_i$). Da die Differentialgleichung der Torsion um zwei Ordnungen niedriger als die der Biegung ist, genügen auch Ansatzfunktionen, die lediglich die Stetigkeit der Verdrillung am Elementende gewährleisten; es sind daher nur noch zwei statt vier Randbedingungen zu erfüllen. Die Elementsteifigkeitsmatrix ist nachfolgend links und die Elementmassenmatrix rechts gegeben.

$$\mathbf{k}_{ij} = \frac{GJ_i}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{m}_{ij} = \frac{I'_{\Theta i} l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.116)$$

Um eine Verwindungsverteilung höherer Ordnung im Element zu erhalten, muss man interne Knoten im Element und die zugehörigen Randbedingungen anbringen.

2.9 Eigenformen und Eigenfrequenzen

Mit Hilfe eines der zuvor genannten Näherungsverfahren (Galerkin, Rayleigh-Ritz, FEM) kann man dann die Eigenformen und Eigenfrequenzen des rotierenden elastischen Blattes erhalten. Diese Eigenformen und Eigenfrequenzen repräsentieren die einer Struktur eigenen Bewegungsformen, wenn keine äußeren Kräfte angreifen (also im Vakuum) und es handelt sich hier um ungedämpfte Schwingungen. **Die Eigenfrequenzen und -formen im**

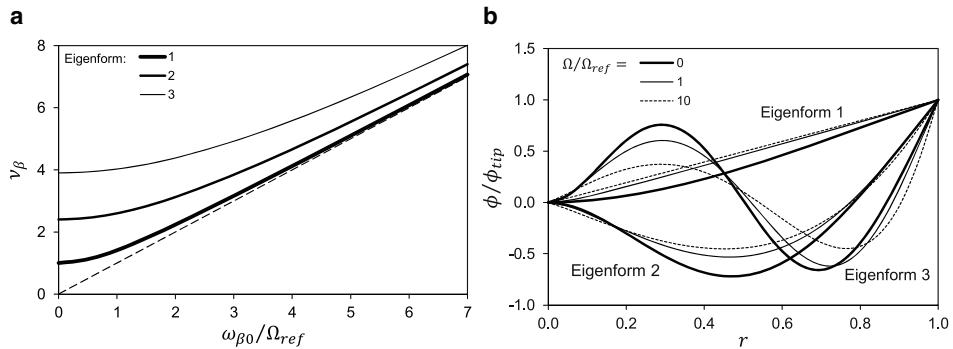


Abb. 2.19 Eigenfrequenzen und Eigenformen des rotierenden Balkens. **a** Eigenfrequenzen, $\Omega / \Omega_{\text{ref}} = 1$, **b** Eigenformen

rotierenden System hängen von denen des nicht rotierenden Systems ab. Dies ist besonders dann der Fall, wenn die Drehfrequenz sehr klein ist und daher weniger die Fliehkraft, sondern die Steifigkeit der Struktur das Schwingungsverhalten prägt. Bei hohen Drehfrequenzen dagegen verhält sich der Balken eher wie eine Kette oder ein Seil und die Eigenfrequenz der ersten Eigenform nähert sich immer mehr der Drehfrequenz selber an, da die Federwirkung der Fliehkraft über derjenigen der Struktur zunehmend dominiert.

In Abb. 2.19a sind zunächst die Eigenfrequenz des rotierenden, fest eingespannten Balkens konstanter $E I_x$ und m' -Verteilung über der Eigenfrequenz (bzw. Steifigkeit) des nicht rotierenden Balkens aufgetragen und man sieht, dass die Eigenfrequenzen des rotierenden Balkens stets größer sind als die des nicht rotierenden. Dies gilt auch für die höheren Eigenformen. Die Eigenform selbst hingegen ist nur wenig davon beeinflusst, wie man im rechten Graphen erkennt, Abb. 2.19b. Diese Eigenformen haben eine besondere Eigenschaft: sie sind orthogonal zueinander.

$$\int_0^R m' \phi_i \phi_j dy = \delta_{ij} M_i \quad \text{mit} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (2.117)$$

Die gezeigten Graphen wurden mit einem FEM-Modell, bestehend aus zehn Elementen gleicher Eigenschaften, berechnet.

Zusammenfassend kann man sagen, dass die bis in die 1950er Jahre eingesetzten Verfahren (Galerkin, Rayleigh-Ritz) für die manuelle Berechnung der Eigenfrequenzen unter Vorgabe der Gesamtverformungsfunktion brauchbare Näherungswerte lieferten, die aber ein hohes Maß an Erfahrung für die Auswahl dieser Funktionen erforderte. Seit Einführung von Computern finden praktisch ausschließlich FEM-Verfahren Anwendung, da sie sowohl die Eigenformen als auch die Eigenfrequenzen wesentlich genauer berechnen können und die notwendige Erfahrung sich auf eine geeignete Diskretisierung des Balkens beschränkt.

2.10 Die Lösung des dynamischen Antwortproblems

Nachdem in den vorangegangenen Abschnitten die Ermittlung des Eigenschwingungsverhaltens der Rotorblätter behandelt wurde, wird nun das Schwingungsverhalten auf dynamische Anregung untersucht (engl. dynamic response). Dazu braucht man zunächst einmal die Bewegungsdifferentialgleichung.

2.10.1 Starres Blatt mit Schlaggelenksabstand

$$\ddot{\beta} + \nu_{\beta}^2 \beta = \gamma \overline{M}_{\beta} + \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} \right)^2 \beta_P \quad (2.118)$$

Die Erregerkraft \overline{M}_{β} kann dabei bewegungsabhängige Terme enthalten, zum Beispiel solche, die proportional zu β , Θ sowie zu deren zeitlichen Ableitungen $\dot{\beta}$, $\dot{\Theta}$, $\ddot{\beta}$, $\ddot{\Theta}$ etc. sind. Ebenso können darin periodische Terme enthalten sein, was generell im Vorwärtsflug der Fall ist (wie z. B. $\mu \sin \psi$). Eine der einfachsten und am häufigsten verwendeten Methoden zur Lösung ist die Fourierreihe; diese Methode wird später beschrieben.

2.10.2 Elastisches Rotorblatt

$$(EI_x w'')'' + m' \ddot{w} - (Tw)' = f_Z(y, t) \quad (2.119)$$

Darin stellt f_Z die aerodynamische Anregung dar. Der erste Schritt zur Lösung ist auch hier die Ermittlung des Eigenschwingungsverhaltens. Danach wird die dynamische Antwort in der Regel mit Hilfe der Eigenformgleichungen gewonnen.

2.10.3 Die Eigenformgleichungen

Die dynamische Antwort auf eine Erregung wird hierbei als eine Summe der Eigenformen angenommen. Zum Beispiel sei die vertikale Auslenkung

$$w(y, t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(y) q_i(t) \quad (2.120)$$

worin $\phi_i(y)$ die i -te dimensionslose Eigenform (= Amplitudenverteilung in radialer Richtung) und $q_i(t)$ die i -te generalisierte dimensionsbehaftete Koordinate dieser Eigenform darstellt (= zeitliche Bewegung dieser Eigenform). Wenn man diese Näherung in die Bewegungsdifferentialgleichung einsetzt, mit den Eigenformen $\phi_j(y)$ multipliziert und über die Blatlänge integriert, gilt für alle $i \neq j$ aufgrund der Orthogonalität der Eigenformen

$$\int_0^R (DGL) \phi_j(y) dy = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2.121)$$

Für $i = j$ erhält man

$$M_i \ddot{q}_i + \omega_i^2 M_i q_i = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.122)$$

worin man das Produkt $\omega_i^2 M_i$ auch als generalisierte Steifigkeit K_i auffassen kann. Dies sind N auf der linken Seite ungekoppelte Differentialgleichungen, worin ω_i die Eigenfrequenz der i -ten Eigenform ist. Darin sind die generalisierten Massen M_i und die generalisierten Kräfte Q_i

$$M_i = \int_0^R m'(y) \phi_i^2(y) dy \quad Q_i = \int_0^R f_Z(y, t) \phi_i(y) dy \quad (2.123)$$

enthalten. Die generalisierten Erregerkräfte Q_i repräsentieren eine räumliche Filterung bzw. Gewichtung der verteilten Kräfte f_Z für die jeweilige Eigenform ϕ_i und das Integral über den Radius bedeutet die Summation aller derart gewichteten Kräfte zur effektiven Gesamtkraft. Diese kann durchaus Null sein, d. h., in dem Fall wird die betrachtete Eigenform von der angreifenden Lastverteilung nicht angeregt.

Beispiel

Man stelle sich $f_Z dy$ als eine an einem einzigen Punkt angreifende Kraft vor, die im Knoten der zweiten Eigenform von Abb. 2.19b angreift, also bei etwa $r = 0,8$. Dort hat die erste Eigenform eine positive Auslenkung von etwa $\phi_1(r = 0,8) = 0,75$, was die Gewichtung der Erregerkraft für diese Eigenform darstellt. Die zweite Eigenform hat hier einen Knoten, also $\phi_2(r = 0,8) = 0$ und damit wird die generalisierte Erregerkraft für diese Eigenform Null. Dies ist einleuchtend, da die Kraft an einem Punkt angreift, der sich in dieser Eigenform gar nicht bewegt. Die dritte Eigenform hingegen hat einen Wert von $\phi_3(r = 0,8) = -0,5$ und wird daher in umgekehrter Richtung als in Abb. 2.19b dargestellt ausgelenkt werden. Wenn die Erregerkraft jedoch an der Blattspitze bei $r = 1$ angreift, so haben dort alle Eigenformen die maximale Auslenkung von $\phi(r = 1) = 1$ und die generalisierte Erregerkraft ist für alle Eigenformen gleich groß.

Für die Erregerkraft f_Z gibt es nun zwei Möglichkeiten:

Fall 1: Die Erregerkraft ist von der Systembewegung w (bzw. den q_i) unabhängig

Dann ist Q_i nur eine Funktion der Zeit und damit hat man ein völlig ungekoppeltes System von N Differentialgleichungen. Somit kann man das ursprüngliche System vieler verkoppelner Massen und Federn in Form vieler unabhängiger einzelner Feder-Masse-Systeme umformen und diese unabhängig voneinander lösen. Ein Vielfreiheitsgradsystem reduziert sich somit auf viele Einfreiheitsgradsysteme und meistens reicht es aus, die Antwort der ersten drei bis vier Eigenformen zu ermitteln, um die Systemantwort genau genug

zu beschreiben. Dieses ist die Hauptvereinfachung, die man bei einem Vielkörpersystem anwenden kann, denn die höheren Eigenformen tragen in der Regel nur sehr wenig zum Gesamtschwingungsverhalten bei. Die Eigenformgleichungen werden nun gelöst, um die generalisierten Koordinaten q_1, q_2, \dots, q_N zu erhalten, wobei die bekannten Anfangsbedingungen zur Ermittlung dieser Lösung eingebracht werden müssen. Es gibt viele Wege, diese Gleichungen zu lösen. Die meistverwendeten Verfahren für die Rotoranwendungen sind die der Fourierreihe und die der numerischen Integration; beide werden später diskutiert. Für zeitlich beliebige Anregungen wird oft das Duhamel-Integral verwendet.

Fall 2: Die Erregerkraft ist von der Systembewegung w (bzw. den q_i) abhängig

Nun hängt f_Z sowohl von der Zeit t wie auch von der Systembewegung w (bzw. den q_i) ab. Generell können dies irgendwie geartete Abhängigkeiten sein ($a, b, c, d = \text{Konstanten}$):

$$f_Z(y, t) = \bar{f}_Z(y, t) + aw + b\dot{w} + cw' + d(\dot{w}') + \dots \quad (2.124)$$

Setzt man auch hier den Ansatz der Eigenformsumme für die Systemantwort ein, so erhält man für die generalisierten Erregerkräfte \bar{Q}_i der i -ten Eigenform

$$\bar{Q}_i = \sum_{j=1}^N (A_{ij} + C_{ij}) q_j + (B_{ij} + D_{ij}) \dot{q}_j + \dots + \bar{Q}_i \quad (2.125)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} \bar{Q}_i &= \int_0^R \bar{f}_Z(y, t) \phi_i \, dy & A_{ij} &= a \int_0^R \phi_i \phi_j \, dy & B_{ij} &= b \int_0^R \phi_i \phi_j \, dy \\ C_{ij} &= c \int_0^R \phi_i \phi'_j \, dy & D_{ij} &= d \int_0^R \phi_i \phi'_j \, dy \end{aligned} \quad (2.126)$$

Dies resultiert in ein System gekoppelter Differentialgleichungen, da alle q_j in jeder Gleichung auf der rechten Seite auftauchen und es ist nun kein konservatives System mehr. Die effektive Systemfeder und -masse werden durch die Kopplungen verändert und manchmal kann dies zu Instabilität führen, hier die sogenannte aerodynamische Instabilität. Es ist sehr viel schwieriger, diese Gleichungen zu lösen, aber auch dafür gibt es viele Verfahren. Zwei der am häufigsten angewandten Verfahren sind die Fourierreihe und die numerische Integration.

2.11 Die Fourierreihe als Lösung der Differentialgleichung

Solange es sich um einen stationären Betriebszustand handelt, ist es eigentlich ganz natürlich, eine Fourierreihe als Lösungsansatz für Rotorprobleme zu verwenden, da ja in den aerodynamischen Kräften viele periodische Terme enthalten sind. Somit ist es logisch,

dass auch die Systemantwort periodisch sein wird und aus einer Summe von Vielfachen der Drehfrequenz des Rotors besteht. Man stelle sich den Fall eines starren Rotorblattes vor, das mit einem Schlaggelenksabstand e_β gelenkig aufgehängt sei. Die Bewegungsdifferentialgleichung ist, wie bereits gezeigt wurde,

$$\ddot{\beta} + \nu_\beta^2 \beta = \gamma \bar{M}_\beta + \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} \right)^2 \beta_P \quad (2.127)$$

und die generalisierte Erregerkraft \bar{M}_β beinhaltet periodische Terme. Die Systemantwort $\beta(\psi)$ wird folglich auch als Linearkombination von sin- und cos-Termen angenommen

$$\beta(\psi) = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_{nC} \cos n\psi + \beta_{nS} \sin n\psi) \quad (2.128)$$

Darin sind die Koeffizienten $\beta_0, \beta_{nC}, \beta_{nS}$ zeitinvariante Konstanten und stellen das Blattverhalten in einem bestimmten Referenzsystem, hier dem rotierenden System, dar. Wenn man die generelle Antwort $\beta(\psi)$ in einer Periode 2π (also einer Rotordrehung von 360°) kennt, kann man die verschiedenen harmonischen Anteile der Bewegung $\beta(\psi)$ mit Hilfe der Fourieranalyse herausfiltern

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta(\psi) d\psi \\ \beta_{nC} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \beta(\psi) \cos n\psi d\psi \\ \beta_{nS} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \beta(\psi) \sin n\psi d\psi \end{aligned} \quad (2.129)$$

Diese Methode ist für die Ermittlung der stationären Systemantwort gut geeignet und man braucht generell nur die ersten paar Harmonischen (bis zu fünf), um eine gute Lösung zu erhalten. Dieses Vorgehen, die Vielfachen der Grundharmonischen zu berechnen, kann sehr nützlich sein, um experimentelle Daten zu analysieren.

Um die angegebene Differentialgleichung mit Hilfe der Fourierreihe zu lösen, gibt es zwei Ansätze: die Substitutionsmethode und die Operatorenmethode.

2.11.1 Die Substitutionsmethode (harmonic balance)

Man nimmt eine auf N Glieder begrenzte Reihe

$$\beta(\psi) = \beta_0 + \sum_{n=1}^N (\beta_{nC} \cos n\psi + \beta_{nS} \sin n\psi) \quad (2.130)$$

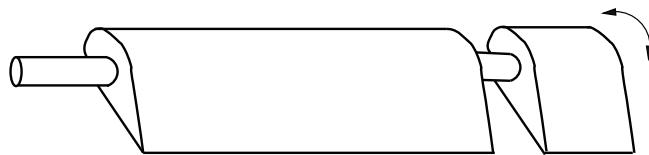


Abb. 2.20 Skizze eines Rotorblattes mit gesteuerter Blattspitze

als Lösung der Differentialgleichung an und setzt sie in diese ein. Dann fasst man Terme mit gleichen Faktoren zusammen:

$$1(\dots) + \sin \psi(\dots) + \cos \psi(\dots) + \sin 2\psi(\dots) + \dots = 0 \quad (2.131)$$

Dann muss jeder dieser Klammerterme (\dots) unabhängig voneinander Null sein, um diese Gleichung zu erfüllen. Dies resultiert in ein System gekoppelter algebraischer Gleichungen, das recht einfach gelöst werden kann. Allerdings ist es bei den höherharmonischen Termen nicht mehr ganz so einfach und es ist recht mühsam und fehleranfällig, diese Gleichungen aufzustellen. Da hier die Terme gleichen harmonischen Faktors auf der linken Seite mit denen auf der rechten Seite „ausbalanciert“ werden, wird dieses Verfahren auch „harmonic balance method“ genannt.

Beispiel

Ein Rotorblatt wurde als starres Blatt mit Feder am Schlaggelenk idealisiert, weist eine Eigenfrequenz im rotierenden System von $v_\beta = 1,1$ auf und befindet sich im Schwebeflugzustand. Das Blatt wird mit einem periodischen Auftrieb zu Schwingungen angeregt, der auf dem äußeren Viertel des Blattes produziert wird, indem dieser Blattteil mit $\Delta\Theta = 1^\circ \cos \psi$ angesteuert wird, siehe Abb. 2.20. Man berechne die dynamische Antwort mit Hilfe der auf die erste Harmonische begrenzten Fourierreihe $\beta = \beta_0 + \beta_{1C} \cos \psi + \beta_{1S} \sin \psi$. Man verwende $\gamma = 8$ und nehme an, dass der Durchfluss λ konstant sei.

Lösung

Die Differentialgleichung der Schlagbewegung lautet

$$\begin{aligned} \beta^{**} + v_\beta^2 \beta &= \gamma \overline{M}_\beta \\ M_\beta &= \frac{1}{2} \int_{y_\beta}^R (y - y_\beta) F'_z dy \\ \overline{M}_\beta &\approx \frac{1}{2} \int_0^1 r \left(\overline{V}_T^2 \Theta - \overline{V}_T \overline{V}_P \right) dr \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeiten darin sind

$$\bar{V}_T = r \quad \text{und} \quad \bar{V}_P = \lambda + r\beta^*$$

Somit folgt für das generalisierte Moment

$$\begin{aligned}\bar{M}_\beta &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[r^3 \left(\Theta - \beta^* \right) - r^2 \lambda \right] dr + \frac{1}{2} \int_{3/4}^1 r^3 \Delta \Theta dr \\ &= \frac{1}{8} \left(\Theta - \beta^* \right) - \frac{\lambda}{6} + \frac{175}{2048} \Delta \Theta\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis sowie den Ansatz für β setzt man in die Differentialgleichung ein und vergleicht die Terme gleichen Multiplikators. Damit folgt:

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \frac{\gamma}{v_\beta^2} \left(\frac{\Theta_0}{8} - \frac{\lambda}{6} \right) \\ \left(v_\beta^2 - 1 \right) \beta_{1C} + \frac{\gamma}{8} \beta_{1S} &= \gamma \frac{175}{2048} \Delta \Theta \\ \left(v_\beta^2 - 1 \right) \beta_{1S} - \frac{\gamma}{8} \beta_{1C} &= 0\end{aligned}$$

Der dynamische Teil ist verkoppelt und schreibt sich in Matrixform

$$\begin{bmatrix} 0,21 & 1 \\ -1 & 0,21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1C} \\ \beta_{1S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,684 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \Theta$$

Womit man als Lösung für die 1/rev-Schlagwinkel erhält:

$$\beta_{1C} = 0,137^\circ \quad \beta_{1S} = 0,655^\circ$$

Die Schlagreaktion aufgrund der dynamischen Blattspitzensteuerung erfolgt also um $\Delta\psi = \arctan \beta_{1S}/\beta_{1C} = 78,2^\circ < 90^\circ$ verschoben, da die Schlageigenfrequenz größer als 1/rev und damit die Anregungsfrequenz von 1/rev kleiner ist. Die Amplitude $\beta_1 = \sqrt{\beta_{1C}^2 + \beta_{1S}^2} = 0,67^\circ$ ist kleiner als die Steuerwinkelamplitude, da nur ein Teil des Blattes gesteuert wird.

2.11.2 Die Operatorenmethode

Es werden hierbei die folgenden Operatoren auf die Differentialgleichung angewandt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (DGL) d\psi &= 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (DGL) \cos n\psi d\psi &= 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (DGL) \sin n\psi d\psi &= 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.132)$$

Es ist dabei hilfreich, folgende trigonometrische Umformungen

$$\begin{aligned} \sin^2 \psi &= (1 - \cos 2\psi)/2 \\ \sin \psi \cos \psi &= (\sin 2\psi)/2 \quad \cos^2 \psi = (1 + \cos 2\psi)/2 \\ \sin \psi \cos^2 \psi &= (\sin \psi + \sin 3\psi)/4 \quad \sin^3 \psi = (3 \sin \psi - \sin 3\psi)/4 \\ \sin^2 \psi \cos \psi &= (\cos \psi - \cos 3\psi)/4 \quad \cos^3 \psi = (3 \cos \psi + \cos 3\psi)/4 \end{aligned} \quad (2.133)$$

und Summenformeln zu verwenden,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \cos n\psi_m &= f_n \cos n\psi \quad \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N (-1)^m \cos n\psi_m = g_n \cos n\psi \\ \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \sin n\psi_m &= f_n \sin n\psi \quad \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N (-1)^m \sin n\psi_m = g_n \sin n\psi \end{aligned} \quad (2.134)$$

worin

$$\begin{aligned} f_n &= \begin{cases} 1 & n = pN \\ 0 & n \neq pN \end{cases} \quad p = 1, 2, 3, \dots \\ g_n &= \begin{cases} 1 & n = \frac{N}{2} + pN \\ 0 & n \neq \frac{N}{2} + pN \end{cases} \quad p = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.135)$$

ist. Der Multiplikator p ist ganzzahlig und beginnt im Fall von f_n mit 1, bei g_n mit 0.

2.11.3 Die numerische Integration

Eine andere weit verbreitete Methode zur Lösung der Differentialgleichung ist die numerische Integration in kleinen Zeitschritten, wozu viele Verfahren entwickelt wurden. Die bekanntesten davon sind das Runge-Kutta-Verfahren, das Adams Predictor-Korrektorkorrektoren-Verfahren, das Gear-Verfahren variabler Ordnung usw. Hierbei muss man aufpassen, dass der Zeitschritt klein genug ist, um die höchsten auftretenden Frequenzen ausreichend genau (also mindestens sechs Abtastungen pro Periode) auflösen zu können. Für flugmechanische Untersuchungen mit der ersten Schlagform und einfachen globalen induzierten Durchflussmodellen hat man Frequenzen bis ca. 6/rev, braucht also 36 Zeitschritte je Rotorumdrehung, d. h. Zeitschritte von $\Delta\psi = 10^\circ$ Azimut sind ausreichend. Für Blatt-Wirbel-Interaktionsprobleme liegen die höchsten Frequenzen jedoch bei ca. 180/rev, folglich sind Schrittweiten von bis zu $0,25^\circ$, ggf. noch kleiner, erforderlich.

2.12 Die Ermittlung der Biegespannungen

Die Verteilung der Biegemomente (engl. bending moments) ist für den Entwurf (engl. design) der Rotorblätter sehr wichtig, um die Festigkeit gegen Bruch zu gewährleisten. Um die lokalen Spannungen (engl. stresses) und Dehnungen (engl. strains) zu berechnen, ist der erste Schritt, die Verteilung der Biegemomente zu ermitteln. Dazu gibt es zwei häufig verwendete Verfahren: die Modalmethode und die Kraftsummenmethode (engl. force summation method). Beide Verfahren sind in Analogie zu den bereits diskutierten Näherungsverfahren zu sehen, wo die Auslenkung als eine Reihe von Funktionen angesetzt wurde.

$$w = \sum_{i=1}^N \gamma_i(y) q_i(t) \quad (2.136)$$

Es wird hier angenommen, dass man bereits die Eigenformen γ_i und die generalisierten Koordinaten q_i als Systemantwort auf externe Erregung kennt.

2.12.1 Die Modalmethode

Das Biegemoment an der Stelle r war definiert als

$$M_x = EI_x w'' = EI_x \sum_{i=1}^N \gamma_i'' q_i \quad (2.137)$$

Von diesem Ausdruck kann man für homogene Materialverteilung leicht die lokalen Spannungen ermitteln (z = vertikale Koordinate innerhalb des betrachteten Querschnitts).

$$\sigma_y = \frac{M_x}{I_x} z = Ez \sum_{i=1}^N \gamma_i'' q_i \quad (2.138)$$

Die Biegespannungen sind proportional zu der zweiten Ableitung der Verformung w . Man braucht eine große Anzahl von Termen N , um die Spannungen genau genug zu ermitteln. Dieses Verfahren ist zwar einfach, aber es liefert ungenaue Ergebnisse bei kleinen N , was sich darin begründet, dass der Fehler in der Lösung mit der Ordnung der Ableitung wächst und hier die zweifache Ableitung der Eigenformen enthalten ist. Da beim Galerkin- und Rayleigh-Ritz-Verfahren die Gesamtverformung durch analytische Funktionen gegeben ist, ist deren zweite Ableitung überall stetig. Der Fehler ergibt sich dann durch die oft niedrige Ordnung der Ansatzfunktionen sowie dem Fehler der Ansatzfunktionen selbst. Bei dem hier gezeigten FEM-Verfahren ist die zweite Ableitung nur innerhalb des Elementes stetig, an den Elementgrenzen jedoch mit einem Sprung behaftet. Daher ist die Berechnung der Biegemomente über die Krümmung auch hier mit Vorsicht zu behandeln.

2.12.2 Die Kraftsummenmethode

Man kann das Biegemoment an der Stelle y auch ermitteln, indem man alle Kräfte an deren radialer Koordinate ρ mit ihrem Hebelarm $\rho - y$ (Vertikalkräfte) beziehungsweise $w(\rho) - w(y)$ (Horizontalkräfte) von der Blattspitze bis zur interessierenden Stelle y aufintegriert.

$$M_x(y, t) = \int_y^R \{(F_z' - m'\ddot{w})(\rho - y) - m'\Omega^2\rho[w(\rho) - w(y)]\} d\rho \quad (2.139)$$

Da hier eine Integration und keine Differentiation erfolgt, erhält man hier viel bessere Ergebnisse auch bei kleinen N . Allerdings ist diese Methode schwieriger anzuwenden als die Modalmethode.

2.12.3 Die modale Biegemomentmethode

Um die Probleme der Fehlervergrößerung bei Differentiation der Eigenformen in der Modalmethode zu reduzieren, kann man die Ergebnisse einer FEM verwenden, welche in diskreter Form die Auslenkungen $\phi(y)$ und deren Gradienten $\phi'(y)$ liefert. Höherwertige Ansätze für die Elementverformung einer FEM stellen auch die Stetigkeit der Biegemomente an den Elementgrenzen sicher und liefern damit auch die Verteilung $E I_x(y)\phi''(y)$. Selbst bei großen Steifigkeitsänderungen $E I_x$ werden die dort entstehenden Krümmungen ϕ'' das Produkt von beiden stetig werden lassen, so dass die Verteilung der modalen Biegemomente durch einen höherwertigen Polynomansatz in der Regel gut approximiert werden kann. Damit kann man an jeder beliebigen Stelle das Biegemoment

direkt ohne Ableitung der Eigenformen berechnen:

$$M_x(y, t) = \sum_{i=1}^N \gamma_{Mi}(y) q_i(t) \quad \text{worin}$$

$$\gamma_{Mi}(y) = EI_x(y) \phi''(y) = \sum_{k=0}^K c_{ki} r^k \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.140)$$

Auch die mit der Massenverteilung behafteten Teilintegrale der Kraftsummenmethode können vorab berechnet und als Polynom höherer Ordnung approximiert werden, so dass nach einer Rotorsimulation nur noch die resultierende Auftriebsverteilung numerisch integriert werden muss, um den Gesamtaufwand zu reduzieren.

$$M_{x1} = \sum_{i=1}^N \gamma_{M1i}(y) \ddot{q}_i(t) \quad \text{worin}$$

$$\gamma_{M1i}(y) = - \int_y^R m'(y) \phi_i(y) (\rho - y) d\rho = \sum_{k=0}^K c_{1ki} r^k$$

$$M_{x2} = \sum_{i=1}^N \gamma_{M2i}(y) q_i(t) \quad \text{worin}$$

$$\gamma_{M2i}(y) = - \int_y^R m'(y) \rho [\phi_i(\rho) - \phi_i(y)] d\rho = \sum_{k=0}^K c_{2ki} r^k \quad \text{mit } i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.141)$$

Dann reduziert sich das Integral der Kraftsummenmethode auf die Integration nur der Luftkräfte und Addition der vorberechneten modalen Biegemomentanteile.

$$M_x(y, t) = \int_y^R F'_z(\rho - y) d\rho + \sum_{i=1}^N [M_{x1}(y) \ddot{q}_i(t) + \Omega^2 M_{x2}(y) q_i(t)] \quad (2.142)$$

2.13 Schlussfolgerungen

- Die Schlagbewegung ist die fundamentale und wichtigste Bewegungsform eines Rotorblattes.
- Die Behandlung der Schlagbewegung als starres Blatt mit Schlaggelenk repräsentiert im Wesentlichen die erste Schlageigenform und ist für die Flugleistungsrechnung und die Trimmung eines Hubschraubers ausreichend.
- Bei zentralem Schlaggelenk ist die Eigenfrequenz immer gleich der Rotordrehfrequenz, unabhängig von der Blattmasse.

- Ein Schlaggelenksabstand vom Rotorzentrum erhöht die Eigenfrequenz. Grund ist, dass einerseits die Trägheitskräfte und deren Hebelarm zum Schlaggelenk beide mit wachsendem Gelenksabstand kleiner werden, während die Zentrifugalkräfte davon unbeeinflusst bleiben, lediglich deren Hebelarm zum Gelenk kleiner wird. Damit werden die Trägheitsmomente mit wachsendem Gelenksabstand schneller klein als die Rückstellmomente aus Zentrifugalkräften und somit wächst die Eigenfrequenz.
- Für die Berechnung von Vibrationen muss man das elastische Rotorblatt mit den Eigenformen und Eigenfrequenzen betrachten, die den interessierenden Frequenzbereich (Anzahl der Rotorblätter mal Rotordrehfrequenz) abdecken. Es gibt jedoch keine analytische Lösung selbst für den einfachsten Fall eines homogenen rotierenden Balkens. Daher kommen Näherungsverfahren in Ansatz.
- Manuell lösbarer Näherungsverfahren sind das Galerkin- und das Ritz-Verfahren, numerische Verfahren basieren auf der Finite-Element-Methode.
- Das Galerkin-Verfahren basiert auf der Differentialgleichung, zu der eine Ansatzfunktion als Ersatz einer Eigenform vorgegeben werden muss. Diese muss alle Randbedingungen aus der Geometrie der Einspannung und den Kräften am freien Ende erfüllen. Das Ergebnis ist die Eigenfrequenz, welche nur so gut sein kann wie die Güte der gewählten Ansatzfunktion.
- Das Ritz-Verfahren basiert auf Energieprinzipien. Auch hier muss eine Ansatzfunktion als Ersatz einer Eigenform vorgegeben werden, welche aber nur die Randbedingungen aus der Geometrie der Einspannung erfüllen muss und daher leichter zu finden ist. Das Ergebnis ist wieder die Eigenfrequenz, welche wie beim Galerkin-Verfahren nur so gut sein kann wie die Güte der gewählten Ansatzfunktion.
- Heute meistverwendet ist das Finite-Element-Verfahren, da es ausgesprochen flexibel ist und beliebige Änderungen der Balkeneigenschaften und -geometrie entlang seiner Länge berücksichtigen kann. Wie das Ritz-Verfahren basiert es auf Energieprinzipien. Das Rotorblatt wird dabei in viele einzelne Elemente (20 bis 100) jeweils kleiner Länge, aber in ihnen jeweils konstanten Balkeneigenschaften zerlegt. Die Freiheitsgrade im Element können von sehr niedriger Ordnung sein, zum Beispiel linear, aber für das gesamte Rotorblatt führt dies zu sehr vielen Freiheitsgraden, die insgesamt eine sehr nichtlineare Verformung ermöglichen. Zur Lösung werden wie beim Ritz-Verfahren die geometrischen Randbedingungen in das Gesamtsystem eingearbeitet. Damit lassen sich sowohl die Eigenformen wie die zugehörigen Eigenfrequenzen der Grundschwingung und der Oberschwingungen sehr genau berechnen.
- Die erhaltenen Eigenformen sind orthogonal zueinander. Dies entkoppelt die Bewegungsgleichung des Gesamtsystems und überführt diese in eine Gleichung mit vielen Freiheitsgraden in viele Bewegungsgleichungen jeweils nur eines Freiheitsgrades, was eine wesentliche Vereinfachung zur Lösung des dynamischen Antwortproblems darstellt. Eine Verkopplung gibt es jedoch immer über die Luftkräfte.
- Das dynamische Antwortproblem eines Rotorblattes auf Luftkräfte im stationären Flug ist immer geprägt von ganzzahligen Vielfachen der Rotordrehfrequenz, da die Luft-

kräfte ausschließlich diese beinhalten. Daher ist der Ansatz einer Fourierreihe für die Rotorblattbewegung einer jeden Eigenform im stationären Flug immer ausreichend.

- Im dynamischen Flug befindet sich der Rotor dauernd in sich ändernden Zuständen, die zwar immer auch die vorgenannte Periodizität beinhaltet, deren Amplituden sich jedoch dauernd ändern. Daher kommt hier nur die numerische Integration der Bewegungsgleichungen in Frage, um das dynamische Antwortproblem zu lösen.
- Die Ermittlung der Biegemomente kann relativ einfach mittels der Krümmungen der Eigenformen berechnet werden, was aber viele Eigenformen benötigt, um korrekte Ergebnisse zu erhalten. Ein starres Blatt hat zum Beispiel keine Krümmung und mit dieser Methode resultieren dann auch keine Biegemomente.
- Genauer, aber aufwändiger, ist die Biegemomentmethode, die alle Biegemomente von der Blattspitze bis zur interessierenden Stelle numerisch aufintegriert. Bei einem starren Blatt bleiben dann immer noch die aus den Luftkräften entstehenden Biegemomente übrig. Daher braucht man hier nur wenige Eigenformen für gute Ergebnisse.

2.14 Übungsaufgaben

1. Ein radial zugespitztes starres Blatt besteht aus zwei gleich langen in sich homogenen Abschnitten mit folgenden Werten an Torsionssteifigkeit: $0,9GJ_0$ innen und $0,7GJ_0$ außen. Die Torsionsträgheit I'_Θ sei jedoch über den Radius konstant. Man berechne die Torsionseigenfrequenz mit Hilfe der Rayleigh-Ritz Methode, wenn das Blatt mit Ω rotiert. Dazu verwende man folgenden Ansatz:

$$\gamma_1(y) = y/R = r$$

2. Für dasselbe Blatt berechne man die Torsionseigenfrequenz mit Hilfe der Galerkin Methode. Dazu verwende man folgende Ansatzfunktion:

$$\gamma_1(y) = y/R - (y/R)^2/2 = r - r^2/2$$

3. Für dasselbe Blatt verwende man die Finite-Element-Methode, wobei die Diskretisierung nur zwei Blattelemente umfassen soll und die Ansatzfunktion innerhalb eines Elementes der Länge l linear sei:

$$N_1 = 1 - x/l \quad N_2 = x/l$$

4. Man berechne die höherharmonische Schlagbewegung eines Rotorblattes, das mit folgender Blattwurzelsteuerung beaufschlagt wird:

$$\Theta(\psi) = \Theta_{4S} \sin 4\psi$$

Die Differentialgleichung der Schlagbewegung sei

$$\overset{**}{\beta} + \nu_{\beta}^2 \beta = \gamma \overline{M}_{\beta}$$

und das generalisierte Moment sowie die darin enthaltenen Geschwindigkeitskomponenten wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\overline{M}_{\beta} &= \frac{1}{2} \int_0^1 r \left(\overline{V}_T^2 \Theta - \overline{V}_P \overline{V}_T \right) dr \\ \overline{V}_T &= r + \mu \sin \psi \\ \overline{V}_P &= \lambda + r \overset{*}{\beta} + \mu \beta \cos \psi\end{aligned}$$

Man nehme an, dass die Schlagbewegung ausschließlich bei 4/rev erfolgt:

$$\beta(\psi) = \beta_{4C} \cos 4\psi + \beta_{4S} \sin 4\psi$$

Literatur

1. C.N.H. Lock, *Further Development of Autogyro Theory, Part I and II*, ARC Reports and Memoranda 1127, 1927
2. A. Betz, *Monographien über Fortschritte der deutschen Luftfahrtforschung (seit 1939). N Überblick über die deutsche Entwicklung und Forschung auf dem Gebiete der Drehflügelflugzeuge*, redigiert von G. Sissingh, AVA Göttingen, 1946
3. A. Gessow, G.C. Myers, *Aerodynamics of the Helicopter*, Macmillan Co., 1952; ISBN 0 804 44275 4, Continuum International Publishing Group Ltd., 1997
4. A.R.S. Bramwell, D.E.H. Balmford, G.T.S. Done, *Bramwell's Helicopter Dynamics*, ISBN 0 750 65075 3, Butterworth-Heinemann Ltd., 2001
5. W. Johnson, *Helicopter Theory*, ISBN 0 691 07971 4, Princeton University Press, 1980
6. R.L. Bielawa, *Rotary Wing Structural Dynamics and Aeroelasticity*, 2nd Edition, ISBN 1 563 47698 3, AIAA Education series, 2002
7. D. Young, R.P. Felgar, *Tables of Characteristic Functions Representing Normal Modes of Vibration of a Beam*, Engr. Res. Series No. 44, Bureau of Engr. Research, The University of Texas, Austin, TX, 1949
8. B.G. Galerkin, *On electrical circuits for the approximate solution of the Laplace equation*, (auf Russisch) Vestnik Inzh., Vol. 19, pp. 897–908, 1915
9. J.W. Strutt, 3. Baron Rayleigh, *The Theory of Sound*, Cambridge University Press, 1877
10. W. Ritz, *Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 135, S. 1–61, 1908
11. M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin, L.J. Topp, *Stiffness and deflection analysis of complex structures*, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 23, no. 9, pp. 805–823, 1956
12. R.W. Clough, *The finite element method in plane stress analysis*, 2nd Conference on Electronic Computation, ASCE Structural Division, Pittsburgh, PA, USA, 1960



Lösungsmethoden der Differentialgleichung

3

3.1 Einleitung

Die Differentialgleichungen der Blattfreiheitsgrade Schlagen, Schwenken und Torsion des starren Rotorblattes mit Gelenk (bei der Torsion mit einer Feder an der Einspannung) sind in der Regel lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, wie in Abschn. 1.3 dargestellt. Im Vorwärtsflug wirken jedoch nichtlineare periodische Luftkräfte an den Rotorblättern, so dass die Behandlung des dynamischen Antwortproblems komplizierter wird. Während die Blattbewegung für sich im drehenden Rotor- system betrachtet werden kann, wird die Dynamik des Rumpfes naturgemäß im nicht drehenden System erfolgen. Dynamische Probleme wie die Boden- und Luftresonanz, bei der die Rotorfreiheitsgrade mit den Rumpffreiheitsgraden koppeln, erfordern daher die Transformation entweder der Rotorfreiheitsgrade in das nicht drehende Rumpfsystem oder umgekehrt die Transformation der Rumpffreiheitsgrade in das drehende Rotorsystem.

In diesem Kapitel wird daher zunächst diese Transformation dargelegt und die physikalische Interpretation der transformierten Freiheitsgrade gegeben. Anschließend wird der Zusammenhang zwischen den Eigenwerten der Differentialgleichung im drehenden und im nicht drehenden System aufgezeigt. Im Anschluss wird die Behandlung der Differentialgleichungen mit konstanten und mit periodischen Koeffizienten skizziert. Während die Methoden zur Analyse der Systeme mit konstanten Koeffizienten weitgehend bekannt und verbreitet sind, sind diejenigen zur Analyse von Systemen mit periodischen Koeffizienten weniger bekannt und schwieriger in der Anwendung.

3.2 Das nicht drehende Referenzsystem

Bis hierher wurde die Schlagbewegung im drehenden Koordinatensystem beschrieben, wobei der Rotorkopf als raumfest angenommen wurde. Für einige Problemstellungen ist es aber notwendig, die Bewegung der Rotorblätter bzw. der Rotorebene (0 und 1/rev) und

ihrer Verwölbung ($2, 3, \dots /rev$) im nicht drehenden System zu beschreiben; insbesondere dann, wenn der Rotorkopf mitbewegt wird. Im Falle einer Böenstörung wird zum Beispiel der ganze Hubschrauber reagieren und man muss die Blattbewegung im nicht drehenden System beschreiben, um den Rotor und den Hubschrauberkörper als eine Einheit zu betrachten.

Es gibt viele andere Probleme wie die Bodenresonanz, die Dynamik der Hubschrauberzelle, den Trimmzustand, die Flugstabilität und so weiter zu berechnen, wo man die Blattbewegung im nicht drehenden System braucht. Die Transformation aus dem drehenden System in das nicht drehende System wird mit der Fourier Koordinaten Transformation bewerkstelligt (engl. FCT von Fourier Coordinate Transformation, auch MBC = multi-blade coordinates; im deutschsprachigen Raum auch Mehrblattkoordinaten genannt). Der Begriff der Mehrblattkoordinaten wurde von Hohenemser 1971/72 [1] eingeführt; die Einführung des Konzeptes erfolgte aber bereits 1943 durch Coleman [2]. Eine ausführliche und sehr anschauliche Darstellung findet man in [3, 4], außerdem sei auf [5, 6] verwiesen.

Die FCT wird verwendet, um die Blattbewegung vom rotierenden ins nicht rotierende System zu übertragen oder um die Rotorkopfbewegung vom nicht drehenden ins drehende System zu transformieren. Sie ist eine lineare Relation von N Freiheitsgraden im drehenden System und ebenso vielen Freiheitsgraden im nicht drehenden System. Damit ist sie eine physikalisch relevante Darstellung zum Beispiel der Schlagbewegung des Rotorblattes im drehenden System als eine Bewegung des gesamten Rotors im nicht drehenden System, was den Rotorkonus ($0/rev$), die Neigung der Rotorebene ($1/rev$), deren Verwölbung ($2/rev$ und höher) sowie die zeitliche Änderung dieser Größen bedeutet.

Die FCT eliminiert dabei periodische Koeffizienten in den Bewegungsgleichungen und vereinfacht sie damit wesentlich (außer bei Rotoren mit 2 Blättern, wie später gezeigt wird). Im Vorwärtsflug reduziert sie die Anzahl periodischer Koeffizienten in den Bewegungsgleichungen, verglichen mit deren Anzahl in der entsprechenden Bewegungsgleichung im drehenden System.

Nimmt man $\beta^{(m)}$ als die Schlagbewegung des m -ten Blattes eines N -blättrigen Rotors im drehenden System an ($m = 1, 2, \dots, N$), dann wird die transformierte Bewegung im nicht drehenden System durch $\beta_0, \beta_{nC}, \beta_{nS}$ und – bei gerader Blattzahl – noch durch $\beta_{N/2}$ beschrieben ($\beta^{(m)}$ kann beliebig viele harmonische Terme enthalten!):

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} &= \beta_0 \\ \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} \cos n\psi_m &= \beta_{nC} \\ \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} \sin n\psi_m &= \beta_{nS} \\ \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} (-1)^m &= \beta_{N/2} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Darin ist ψ_m der Azimut des m -ten Blattes

$$\begin{aligned}\psi_m &= \psi + m\Delta\psi \quad m = 1, 2, \dots, N \\ \psi &= \Omega t \\ \Delta\psi &= \frac{2\pi}{N}\end{aligned}\tag{3.2}$$

und N ist die Anzahl der Rotorblätter. Die inverse Transformation lautet (= Schlagbewegung des m -ten Rotorblattes im drehenden System)

$$\beta^{(m)} = \beta_0 + \sum_n (\beta_{nC} \cos n\psi_m + \beta_{nS} \sin n\psi_m) + \beta_{N/2}(-1)^m\tag{3.3}$$

Der letzte Term kommt nur in Ansatz, wenn die Anzahl der Blätter gerade ist ($N = 2, 4, 6, \dots$) und das Summenzeichen nimmt folgende Ausdrücke an:

$$N \text{ ungerade: } \sum_n = \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} \quad N \text{ gerade: } \sum_n = \sum_{n=1}^{\frac{N-2}{2}}\tag{3.4}$$

Bei einem dreiblättrigen Rotor sind somit im drehenden System $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \beta^{(3)}$ und im nicht drehenden System $\beta_0, \beta_{1C}, \beta_{1S}$ vorhanden. Am Beispiel eines vierblättrigen Rotors: im drehenden System sind $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \beta^{(3)}, \beta^{(4)}$ und im nicht drehenden System: $\beta_0, \beta_{1C}, \beta_{1S}, \beta_2$ vorhanden.

Um das Prinzip auf physikalischer Basis zu veranschaulichen, denke man sich einen vierblättrigen Rotor. Dann ist β_0 der Konuswinkel, β_{1C} die Längsneigung und β_{1S} die Querneigung der Blattspitzenebene, β_{2C} und β_{2S} sind reaktionslose Bewegungsformen, da sie im nicht drehenden System keine Kräfte verursachen und β_2 ist die kollektive Differentialform (engl. differential collective mode), siehe Abb. 3.1. Die FCT ist sehr

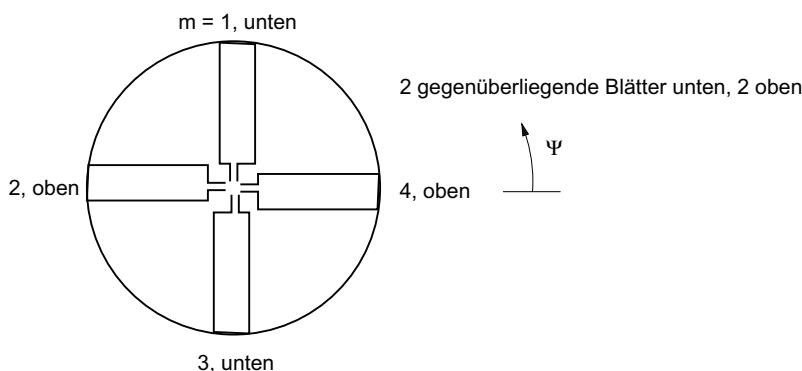


Abb. 3.1 Darstellung der Blattbewegung für den differentiellen kollektiven Schlagmodus

verschieden von der Fourierreihe und mit dieser nicht zu verwechseln, denn die FCT ist umkehrbar (was bei der Fourierreihe nicht der Fall ist) und die Koeffizienten der FCT ($\beta_0, \beta_{nC}, \beta_{nS}, \beta_{N/2}$) können Funktionen der Zeit sein, da die Schlagbewegung im drehenden System $\beta^{(m)}$ eine Funktion der Zeit ist. Außerdem hat die FCT nur eine endliche Zahl von N Gliedern. Die Fourierreihe dagegen hat unendlich viele Glieder, ist nicht reversibel und die Koeffizienten sind Konstanten. Im Folgenden werden die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsterme der Schlagbewegung des m -ten Blattes im drehenden System als Funktion der FCT-Koeffizienten des nicht drehenden Systems dargestellt.

$$\begin{aligned}\beta^{(m)} &= \beta_0 + \sum_n (\beta_{nC} \cos n\psi_m + \beta_{nS} \sin n\psi_m) + \beta_{N/2}(-1)^m \\ \dot{\beta}^{(m)} &= \dot{\beta}_0 + \sum_n \left[\left(\dot{\beta}_{nC} + n\beta_{nS} \right) \cos n\psi_m + \left(\dot{\beta}_{nS} - n\beta_{nC} \right) \sin n\psi_m \right] + \dot{\beta}_{N/2}(-1)^m \\ \ddot{\beta}^{(m)} &= \ddot{\beta}_0 + \sum_n \left[\left(\ddot{\beta}_{nC} + 2n\dot{\beta}_{nS} - n^2\beta_{nC} \right) \cos n\psi_m \right. \\ &\quad \left. + \left(\ddot{\beta}_{nS} - 2n\dot{\beta}_{nC} - n^2\beta_{nS} \right) \sin n\psi_m \right] + \ddot{\beta}_{N/2}(-1)^m\end{aligned}\tag{3.5}$$

Es ist wichtig, sich darüber klar zu sein, dass die Transformationen der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen vom drehenden ins nicht drehende System die Coriolis- (Terme mit $2n$) und Zentrifugalkräfte (Terme mit n^2) einführen. Auch die Differentialgleichung der Bewegung selbst kann derart in das nicht drehende System überführen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N (DGL) &= 0 \\ \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N (DGL) \cos n\psi_m &= 0 \\ \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N (DGL) \sin n\psi_m &= 0 \\ \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N (DGL)(-1)^m &= 0\end{aligned}\tag{3.6}$$

Manchmal ist es von Vorteil, diese Gleichungen im nicht drehenden System derart zu analysieren, dass man nur die Mittelwerte der Koeffizienten nimmt. Mit Hilfe von Gl. 3.2

und Gl. 3.5 folgt die erste Ableitung nach der Zeit zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N {}^*(\beta^{(m)}) &= {}^*\beta_0 \\ \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N {}^*(\beta^{(m)}) \cos n\psi_m &= {}^*\beta_{nC} + n{}^*\beta_{nS} \\ \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N {}^*(\beta^{(m)}) \sin n\psi_m &= {}^*\beta_{nS} - n{}^*\beta_{nC} \\ \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N {}^*(\beta^{(m)}) (-1)^m &= {}^*\beta_{N/2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

und die zweite Ableitung lautet (Terme mit $2n$: Coriolis-, mit n^2 : Zentrifugalkraft)

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N {}^{**}(\beta^{(m)}) &= {}^{**}\beta_0 \\ \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N {}^{**}(\beta^{(m)}) \cos n\psi_m &= {}^{**}\beta_{nC} + 2n{}^*\beta_{nS} - n^2{}^*\beta_{nC} \\ \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N {}^{**}(\beta^{(m)}) \sin n\psi_m &= {}^{**}\beta_{nS} - 2n{}^*\beta_{nC} - n^2{}^*\beta_{nS} \\ \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N {}^{**}(\beta^{(m)}) (-1)^m &= {}^{**}\beta_{N/2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Als Beispiel sei hier die Bewegungsdifferentialgleichung eines gelenkig gelagerten Rotorblattes im drehenden System gegeben, worin das dimensionslose Moment aus Luftkräften folgendermaßen gegeben ist [3]

$$\begin{aligned} \overline{M}_\beta &= \frac{1}{\rho C_{l\alpha} c R^4 \Omega^2} \int_0^R y F'_z dy = \frac{1}{2} \int_0^1 r (\overline{V}_T^2 \Theta - \overline{V}_T \overline{V}_P) dr \\ &= \left(\frac{1}{8} + \frac{\mu}{3} \sin \psi + \frac{\mu^2}{4} \sin^2 \psi \right) (\Theta_0 + \Theta_{1S} \sin \psi + \Theta_{1C} \cos \psi) \\ &\quad - \lambda \left(\frac{1}{6} + \frac{\mu}{4} \sin \psi \right) + \Theta_{tw} \left(\frac{1}{10} + \frac{\mu}{4} \sin \psi + \frac{\mu^2}{6} \sin^2 \psi \right) \\ &\quad - {}^*\beta \left(\frac{1}{8} + \frac{\mu}{6} \sin \psi \right) - \beta \mu \cos \psi \left(\frac{1}{6} + \frac{\mu}{4} \sin \psi \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Es folgt mit $\mu = 0$ im Schwebeflug für die Differentialgleichung der Schlagbewegung (alle Terme mit der Lockzahl γ stammen aus der Aerodynamik):

$$\overset{**}{\beta}^{(m)} + \frac{\gamma}{8} \overset{*}{\beta}^{(m)} + v_\beta^2 \beta^{(m)} = \frac{\gamma}{8} \Theta^{(m)} - \frac{\gamma}{6} \lambda + \frac{\gamma}{10} \Theta_{tw} \quad (3.10)$$

worin $\Theta^{(m)} = \Theta_0 + \Theta_C \cos \psi_m + \Theta_S \sin \psi_m$ die Blattsteuerung darstellt. Diese ist für einen vierblättrigen Rotor ($N = 4$) in das nicht drehende System zu transformieren. Die Anwendung der ersten vier Operatoren gemäß Gln. 3.1, 3.7 und 3.8 führt zu

$$\begin{aligned} \overset{**}{\beta}_0 + \frac{\gamma}{8} \overset{*}{\beta}_0 + v_\beta^2 \beta_0 &= \frac{\gamma}{8} \Theta_0 - \frac{\gamma}{6} \lambda + \frac{\gamma}{10} \Theta_{tw} \\ \overset{**}{\beta}_{nC} + 2n \overset{*}{\beta}_{nS} - n^2 \beta_{nC} + \frac{\gamma}{8} \left(\overset{*}{\beta}_{nC} + n \beta_{nS} \right) + v_\beta^2 \beta_{nC} &= \frac{\gamma}{8} \Theta_{nC} \\ \overset{**}{\beta}_{nS} - 2n \overset{*}{\beta}_{nC} - n^2 \beta_{nS} + \frac{\gamma}{8} \left(\overset{*}{\beta}_{nS} - n \beta_{nC} \right) + v_\beta^2 \beta_{nS} &= \frac{\gamma}{8} \Theta_{nS} \\ \overset{**}{\beta}_{N/2} + \frac{\gamma}{8} \overset{*}{\beta}_{N/2} + v_\beta^2 \beta_{N/2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Die erste und vierte Gleichung sind ungekoppelt, aber die zweite und dritte Gleichung sind miteinander verkoppelt und man kann sie in Matrixform schreiben. Für die Stabilitätsanalyse wird das homogene Differentialgleichungssystem betrachtet.

$$\begin{bmatrix} \overset{**}{\beta}_{nC} \\ \overset{**}{\beta}_{nS} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{8} & 2n \\ -2n & \frac{\gamma}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{*}{\beta}_{nC} \\ \overset{*}{\beta}_{nS} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_\beta^2 - n^2 & \frac{\gamma}{8}n \\ -\frac{\gamma}{8}n & v_\beta^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{nC} \\ \beta_{nS} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.12)$$

Darin sind Coriolisterme ($2n$), Luftkraftterme ($n\gamma/8$) und Zentrifugalkraftterme (n^2) enthalten, wobei die Coriolis- und Luftkraftterme die Gleichungen verkoppeln. Ein weiteres Beispiel soll das Prinzip veranschaulichen. Hier sei folgende homogene Bewegungsgleichung eines dreiblättrigen Rotors ($N = 3$) im Vorwärtsflug gegeben (Terme aus der Aerodynamik siehe Gl. 3.9):

$$\overset{**}{\beta}^{(m)} + \left(\frac{\gamma}{8} + \mu \frac{\gamma}{6} \sin \psi_m \right) \overset{*}{\beta}^{(m)} + \left(v_\beta^2 + \mu \frac{\gamma}{6} \cos \psi_m + \mu^2 \frac{\gamma}{8} \sin 2\psi_m \right) \beta^{(m)} = 0 \quad (3.13)$$

Mit Hilfe der FCT ist diese in das nicht drehende System zu übertragen.

$$\begin{aligned} \beta^{(m)} &= \beta_0 + \beta_{1C} \cos \psi_m + \beta_{1S} \sin \psi_m \\ \overset{*}{\beta}^{(m)} &= \overset{*}{\beta}_0 + \left(\overset{*}{\beta}_{1C} + \beta_{1S} \right) \cos \psi_m + \left(\overset{*}{\beta}_{1S} - \beta_{1C} \right) \sin \psi_m \\ \overset{**}{\beta}^{(m)} &= \overset{**}{\beta}_0 + \left(\overset{**}{\beta}_{1C} + 2\overset{*}{\beta}_{1S} - \beta_{1C} \right) \cos \psi_m + \left(\overset{**}{\beta}_{1S} - 2\overset{*}{\beta}_{1C} - \beta_{1S} \right) \sin \psi_m \\ \beta^{(m)} \sin 2\psi_m &= \beta_0 \sin 2\psi_m + \frac{\beta_{1C}}{2} (\sin \psi_m + \sin 3\psi_m) + \frac{\beta_{1S}}{2} (\cos \psi_m - \cos 3\psi_m) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Damit lauten die drei Gleichungen unter Anwendung von Gl. 3.6 im nicht drehenden System:

$$\begin{aligned}
 0 &= \beta_0^{**} + \frac{\gamma}{8}\beta_0^* + v_\beta^2\beta_0 + \mu\frac{\gamma}{12}\beta_{1S}^* + \mu^2\frac{\gamma}{16}(\beta_{1C} \sin 3\psi - \beta_{1S} \sin 3\psi) \\
 0 &= \beta_{1C}^{**} + \beta_{1C}^*\left(\frac{\gamma}{8} + \mu\frac{\gamma}{12} \sin 3\psi\right) + \beta_{1S}^*\left(2 - \mu\frac{\gamma}{12} \cos 3\psi\right) + \beta_0\left(\mu\frac{\gamma}{6} + \mu^2\frac{\gamma}{8} \sin 3\psi\right) \\
 &\quad + \beta_{1C}\left(v_\beta^2 - 1 + \mu\frac{\gamma}{6} \cos 3\psi\right) + \beta_{1S}\left(\mu\frac{\gamma}{6} \sin 3\psi + \frac{\gamma}{8} + \mu^2\frac{\gamma}{16}\right) \\
 0 &= \beta_{1S}^{**} + \beta_0\mu\frac{\gamma}{6} - \beta_{1C}^*\left(2 + \mu\frac{\gamma}{12} \cos 3\psi\right) + \beta_{1S}^*\left(\frac{\gamma}{8} - \mu\frac{\gamma}{12} \sin 3\psi\right) \\
 &\quad - \beta_0\mu^2\frac{\gamma}{8} \cos 3\psi + \beta_{1C}\left(\mu^2\frac{\gamma}{16} - \frac{\gamma}{8} + \mu\frac{\gamma}{6} \sin 3\psi\right) + \beta_{1S}\left(v_\beta^2 - 1 - \mu\frac{\gamma}{6} \cos 3\psi\right)
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Beispiel

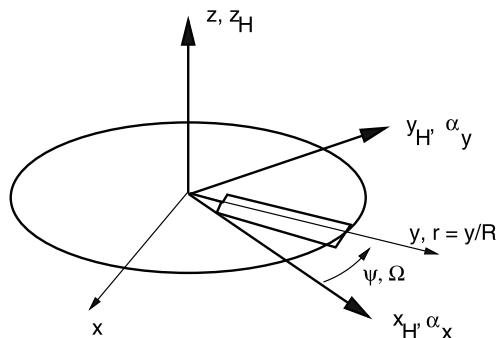
Ein Hubschrauber im Schwebeflug wird von einer vertikalen Böe erfasst. Diese hat die Geschwindigkeit V_G , eine vertikale Bewegung z_H als auch eine Roll- und Nickbewegung α_x, α_y des Rotorkopfes zur Folge (Abb. 3.2). Man stelle die Bewegungsgleichungen um den Referenzzustand im drehenden wie auch im nicht drehenden System auf, wobei ein Dreiblattrotor angenommen werden soll. Jedes Blatt wird als starr und mit einem kleinen Schlaggelenksabstand e_β am Schlaggelenk angenommen.

Lösung

Für ein Element am Radius y erhält man folgende Kräfte:

$$\begin{aligned}
 \text{Winkelbeschleunigung} &= y \left(\ddot{\alpha}_x \sin \psi_m - \ddot{\alpha}_y \cos \psi_m \right) \\
 \text{Coriolisbeschleunigung} &= 2\Omega y \left(\dot{\alpha}_x \cos \psi_m + \dot{\alpha}_y \sin \psi_m \right) \\
 \text{Vertikalbeschleunigung} &= z_H^{**}
 \end{aligned}$$

Abb. 3.2 Zur Bewegungsgleichung mit Rotorkopfbewegung



Die Blattbewegungsgleichung um das Schlaggelenk lautet (wobei z_H nun die auf den Radius R bezogene Auslenkung ist):

$$\begin{aligned} & \overset{*}{I}_\beta \left(\overset{**}{\beta} + v_\beta^2 \beta \right) + \overset{*}{I}_{\beta\alpha} \left[\left(\overset{**}{\alpha}_x \sin \psi_m - \overset{**}{\alpha}_y \cos \psi_m \right) + 2 \left(\overset{*}{\alpha}_x \cos \psi_m + \overset{*}{\alpha}_y \sin \psi_m \right) \right] \\ & + \overset{*}{S}_\beta \overset{**}{z}_H = \gamma \overline{M}_\beta \end{aligned}$$

worin

$$\begin{aligned} I_b &= \int_0^1 m' R^3 r^2 dr = \frac{m' R^3}{3} \\ \overset{*}{I}_\beta &= \frac{1}{I_b} \int_{e_\beta}^1 m' R^3 (r - e_\beta)^2 dr \approx 1 \\ \overset{*}{I}_{\beta\alpha} &= \frac{1}{I_b} \int_{e_\beta}^1 m' R^3 r (r - e_\beta) dr \approx 1 \\ \overset{*}{S}_\beta &= \frac{R}{I_b} \int_{e_\beta}^1 m' R^2 (r - e_\beta) dr \approx \frac{3}{2} \end{aligned}$$

sind. Das generalisierte Luftkraftmoment ist mit der dimensionslosen Böengeschwindigkeit $\lambda_G = V_G / (\Omega R)$

$$\begin{aligned} \overline{V}_P &= \lambda + r \overset{*}{\beta} - \lambda_G + \overset{*}{z}_H + r \left(\overset{*}{\alpha}_x \sin \psi - \overset{*}{\alpha}_y \cos \psi \right) \quad \overline{V}_T = r \\ \overline{M}_\beta &= \frac{1}{2} \int_{e_\beta}^1 (r - e_\beta) \left(\overline{V}_T^2 \Theta - \overline{V}_T \overline{V}_P \right) dr \end{aligned}$$

Damit folgt die Bewegungsgleichung im drehenden System zu

$$\begin{aligned} & \overset{*}{I}_\beta \left(\overset{**}{\beta} + v_\beta^2 \beta \right) + \overset{*}{I}_{\beta\alpha} \left[\left(\overset{**}{\alpha}_x + 2\overset{*}{\alpha}_y \right) \sin \psi - \left(\overset{**}{\alpha}_y - 2\overset{*}{\alpha}_x \right) \cos \psi \right] + \overset{*}{S}_\beta \overset{**}{z}_H \\ & = \frac{\gamma}{8} \left(\Theta - \overset{*}{\beta} - \overset{*}{\alpha}_x \sin \psi + \overset{*}{\alpha}_y \cos \psi \right) - \frac{\gamma}{6} \left(\lambda + \overset{*}{z}_H - \lambda_G \right) \end{aligned}$$

für die drei Blätter. Somit folgen die drei Gleichungen im nicht drehenden System mittels FCT zu

$$\begin{aligned} & \overset{*}{I}_\beta \left(\overset{**}{\beta}_0 + v_\beta^2 \beta_0 \right) + \overset{*}{S}_\beta \overset{**}{z}_H = \frac{\gamma}{8} \left(\Theta_0 - \overset{*}{\beta}_0 \right) - \frac{\gamma}{6} \left(\lambda + \overset{*}{z}_H - \lambda_G \right) \\ & \overset{*}{I}_\beta \left[\overset{**}{\beta}_{1C} + 2\overset{*}{\beta}_{1S} + (v_\beta^2 - 1)\beta_{1C} \right] - \overset{*}{I}_{\beta\alpha} \left(\overset{**}{\alpha}_y - 2\overset{*}{\alpha}_x \right) = \frac{\gamma}{8} \left(\Theta_{1C} - \overset{*}{\beta}_{1C} - \beta_{1S} + \overset{*}{\alpha}_y \right) \\ & \overset{*}{I}_\beta \left[\overset{**}{\beta}_{1S} - 2\overset{*}{\beta}_{1C} + (v_\beta^2 - 1)\beta_{1S} \right] + \overset{*}{I}_{\beta\alpha} \left(\overset{**}{\alpha}_x + 2\overset{*}{\alpha}_y \right) = \frac{\gamma}{8} \left(\Theta_{1S} - \overset{*}{\beta}_{1S} + \beta_{1C} - \overset{*}{\alpha}_x \right) \end{aligned}$$

3.3 Eigenwerte im drehenden und im nicht drehenden System

Die Eigenwerte, die hier ermittelt werden, haben eine mehr generelle Bedeutung, da sie die aerodynamischen Kräfte bereits mit enthalten. Wenn die aerodynamischen Kräfte und die strukturellen Dämpfungen vernachlässigt werden, erhält man wieder die Eigenfrequenzen des Blattes allein. Dazu wird im Folgenden ein vierblättriger Rotor im Schwebeflug untersucht, wobei nur die Schlagbewegung des starren Blattes betrachtet wird.

3.3.1 Eigenwerte im drehenden System

Die linearisierte Bewegungsgleichung lautet (homogenes System, d. h. rechte Seite = Null gesetzt)

$$\ddot{\beta}^{(m)} + \frac{\gamma}{8} \dot{\beta}^{(m)} + v_\beta^2 \beta^{(m)} = 0 \quad (3.16)$$

Dies ist ein typisches Feder-Masse Einfreiheitsgradsystem mit konstanten Koeffizienten, wobei der zweite Term aus aerodynamischer Dämpfung besteht. Eine generelle Lösung lautet

$$\beta^{(m)} = \bar{\beta}^{(m)} e^{s_R \psi} \quad (3.17)$$

Setzt man diesen Ansatz ein, so erhält man mit der imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$

$$\begin{aligned} 0 &= s_R^2 + \frac{\gamma}{8} s_R + v_\beta^2 \\ \Rightarrow s_R &= -\frac{\gamma}{16} \pm i \sqrt{v_\beta^2 - \left(\frac{\gamma}{16}\right)^2} = -\xi v_\beta \pm i v_\beta \sqrt{1 - \xi^2} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Verallgemeinert geschrieben lautet der Eigenwert

$$s = -\zeta \frac{\omega_n}{\Omega} + i \frac{\omega_d}{\Omega} \quad (3.19)$$

mit ζ als Dämpfungsverhältnis, ω_n als Eigenfrequenz des ungedämpften Systems und ω_d als Schwingungsfrequenz des gedämpften Systems. Der Eigenwert im rotierenden System s_R besteht aus einem konjugiert komplexen Paar und davon gibt es vier identische, um die vier Blätter zu repräsentieren. Der reelle Teil des Eigenwertes $Re(s_R)$ stellt die Dämpfung der Eigenform dar und der imaginäre Teil $Im(s_R)$ die Frequenz der gedämpften Schwingung.

Beispiel

Um ein Gefühl für diese Zahlen zu bekommen, nehme man einmal eine Lockzahl von $\gamma = 8$ und ein im Rotorkopfzentrum gelenkig angeschlossenes Blatt an, welches eine Eigenfrequenz von $v_\beta = \omega_n/\Omega = 1$ aufweist.

Lösung

Dann erhält man das Dämpfungsverhältnis $\zeta = \gamma/(16\nu_\beta) = 0,5$ und die Schwingungsfrequenz $\omega_d/\Omega = \nu_\beta \sqrt{1 - [\gamma/(16\nu_\beta)]^2} = 0,866/\text{rev}$. Die Schlagbewegung ist also sehr stark gedämpft und die Schwingungsfrequenz ist kleiner als 1/rev, was die Folge von großer aerodynamischer Dämpfung ist.

3.3.2 Eigenwerte im nicht drehenden System

Die homogene Bewegungsgleichung der Schlagbewegung im rotierenden System (rechte Seite = Null gesetzt) wird mittels der FCT in das nicht rotierende System übertragen. Die dann entstehenden Gleichungen lauten, wie bereits früher gezeigt (siehe Gl. 3.11),

$$\begin{aligned}\beta_0^{**} + \frac{\gamma}{8}\beta_0^* + \nu_\beta^2\beta_0 &= 0 \\ \beta_{nC}^{**} + 2n\beta_{nS}^* + \frac{\gamma}{8}\beta_{nC}^* + (\nu_\beta^2 - n^2)\beta_{nC} + \frac{\gamma}{8}n\beta_{nS} &= 0 \\ \beta_{nS}^{**} - 2n\beta_{nC}^* + \frac{\gamma}{8}\beta_{nS}^* + (\nu_\beta^2 - n^2)\beta_{nS} - \frac{\gamma}{8}n\beta_{nC} &= 0 \\ \beta_{N/2}^{**} + \frac{\gamma}{8}\beta_{N/2}^* + \nu_\beta^2\beta_{N/2} &= 0\end{aligned}\quad (3.20)$$

Darin ist für einen vierblättrigen Rotor $n = 1$ zu setzen. Die Lösung ist generell

$$\beta = \bar{\beta}e^{s\psi} \quad (3.21)$$

worin s der Eigenwert im nicht drehenden System sei. Die erste und letzte Gleichung sind identisch mit der im rotierenden System und daher sind die Eigenwerte für β_0 und $\beta_{N/2}$ identisch mit denen des rotierenden Systems:

$$s = s_R \quad (3.22)$$

Für die zweite und dritte Gleichung jedoch erhält man ein verkoppeltes System der folgenden Art:

$$\begin{bmatrix} s^2 + \frac{\gamma}{8}s + \nu_\beta^2 - n^2 & 2ns + \frac{\gamma}{8}n \\ -2ns - \frac{\gamma}{8}n & s^2 + \frac{\gamma}{8}s + \nu_\beta^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{nC} \\ \beta_{nS} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.23)$$

Durch Nullsetzen der Determinante erhält man die charakteristische Gleichung

$$\left(s^2 + \frac{\gamma}{8}s + \nu_\beta^2 - n^2\right)^2 + \left(2ns + \frac{\gamma}{8}n\right)^2 = 0 \quad (3.24)$$

und die Lösung gibt

$$s = -\frac{\gamma}{16} \mp i \sqrt{\nu_\beta^2 - \left(\frac{\gamma}{16}\right)^2} \pm in = s_R \pm in \quad (3.25)$$

Auch hier sind die Eigenwerte konjugiert komplexe Paare für β_{nC} und β_{nS} . Jedoch sind die Eigenwerte im nicht drehenden System um $\pm n/\text{rev}$ von denen des rotierenden Systems verschoben. Bemerkenswert ist, dass der Realteil in beiden Systemen gleich bleibt:

$$\operatorname{Re}(s) = \operatorname{Re}(s_R) \quad (3.26)$$

womit die Dämpfung und damit das exponentielle Ausschwingverhalten in beiden Systemen gleich ist. Aus der zweiten Bewegungsgleichung im nicht drehenden System erhält man für das Verhältnis der Amplituden

$$\begin{aligned} 0 &= \left(s^2 + \frac{\gamma}{8}s + v_\beta^2 - n^2 \right) \beta_{nC} + \left(2ns + \frac{\gamma}{8}n \right) \beta_{nS} \\ \Rightarrow \quad \frac{\beta_{nC}}{\beta_{nS}} &= -\frac{2ns + \frac{\gamma}{8}n}{s^2 + \frac{\gamma}{8}s + v_\beta^2 - n^2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Setzt man den oben ermittelten Eigenwert ein, so folgt

$$\frac{\beta_{nC}}{\beta_{nS}} = \pm i = e^{\pm i(\pi/2)} \quad (3.28)$$

Das positive Vorzeichen bedeutet, dass β_{nC} dem Winkel β_{nS} um $\pi/2 = 90^\circ$ voreilt. Wenn man sich die Eigenwerte näher betrachtet, so gibt es zwei Fallunterscheidungen; einen Fall mit hoher Frequenz ($s_R + i n$) und einen Fall mit niedriger Frequenz ($s_R - i n$). Diese werden im Folgenden diskutiert.

3.3.3 Der Eigenwert höherer Frequenz

Hier ist

$$s = s_R + i n \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta_{nC}}{\beta_{nS}} = i = e^{i(\pi/2)} \quad (3.29)$$

und β_{nC} eilt dem Winkel β_{nS} um $\pi/2 = 90^\circ$ vor.

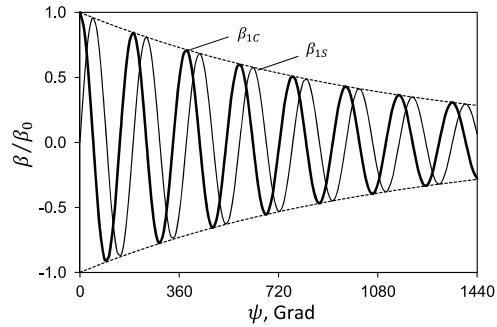
$$\begin{aligned} \beta_{nC}(\psi) &= \beta_{nC} e^{s\psi} = \beta_{nC} e^{(s_R+i n)\psi} \\ \beta_{nS}(\psi) &= \beta_{nS} e^{(s_R+i n)\psi} = -i \beta_{nC} e^{(s_R+i n)\psi} = \beta_{nC} e^{(s_R+i n)\psi - i(\pi/2)} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Die Schwingungsfrequenz ist

$$\frac{\omega_d}{\Omega} = \operatorname{Im}(s_R) + n = \sqrt{v_\beta^2 - \left(\frac{\gamma}{16} \right)^2} + n > 1/\text{rev} \quad (3.31)$$

und ist immer größer als die Drehfrequenz des Rotors. Da β_{nC} dem Winkel β_{nS} um $\pi/2$ voreilt, resultiert dies in einer progressiven Bewegungsform (engl. progressive mode). Bei

Abb. 3.3 Schlagwinkel bei der hochfrequenten Eigenform.
 $v_\beta = 1$, $\gamma = 8$, $\omega/\Omega = 1,866$



einem vierblättrigen Rotor ist zum Beispiel $n = 1$ und wenn es sich um einen Rotor mit Schlaggelenken handelt, ist die Eigenfrequenz im drehenden System v_β etwas größer als Eins. β_{nC} eilt β_{nS} um $\pi/2$ vor, was sich in einer rotierenden Schaukelbewegung der Blattspitzenebene in der Drehrichtung des Rotors äußert und eine Frequenz um 2/rev aufweist (Abb. 3.3).

3.3.4 Der Eigenwert niedriger Frequenz

Hier ist

$$s = s_R - i n \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta_{nC}}{\beta_{nS}} = -i = e^{-i(\pi/2)} \quad (3.32)$$

und β_{nC} eilt dem Winkel β_{nS} um $\pi/2 = 90^\circ$ nach.

$$\begin{aligned} \beta_{nC}(\psi) &= \beta_{nC} e^{(s_R - i n)\psi} \\ \beta_{nS}(\psi) &= \beta_{nC} e^{(s_R - i n)\psi + i(\pi/2)} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Hier gibt es nun zwei Möglichkeiten

Fall 1: $Im(s_R) < n$. Dann folgt

$$\beta_{nS}(\psi) = \beta_{nC} e^{-[(i n - s_R)\psi - i(\pi/2)]} \quad (3.34)$$

und β_{nC} eilt dem Winkel β_{nS} um $\pi/2$ vor, was also eine progressive Bewegungsform darstellt. Im Fall eines vierblättrigen Rotors $n = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_d}{\Omega} &= Im(s_R) = \sqrt{v_\beta^2 - \left(\frac{\gamma}{16}\right)^2} < 1/\text{rev} \\ 0 &< 1 - Im(s_R) \ll 1 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Auch hier findet die Schaukelbewegung der Blattspitzenebene in Drehrichtung des Rotors statt, aber mit sehr niedriger Frequenz.

Fall 2: $Im(s_R) > n$. Dann folgt

$$\beta_{nS}(\psi) = \beta_{nC} e^{[(s_R - i)n]\psi - i(\pi/2)} \quad (3.36)$$

und β_{nC} eilt dem Winkel β_{nS} um $\pi/2$ nach, was eine regressive Bewegungsform darstellt. Im Fall eines vierblättrigen Rotors ($n = 1$):

$$\frac{\omega_d}{\Omega} = Im(s_R) = \sqrt{v_\beta^2 - \left(\frac{\gamma}{16}\right)^2} > 1/\text{rev}$$

$$0 < Im(s_R) - 1 \ll 1 \quad (3.37)$$

Die Blattspitzenebene führt eine Schaukelbewegung entgegen der Drehrichtung des Rotors aus und auch hier ist die Frequenz dieser Bewegung sehr niedrig.

Beispiel

Ein vierblättriger Rotor hat eine Schlagfrequenz von $v_\beta = 1,12/\text{rev}$ im rotierenden System und eine Lockzahl von $\gamma = 8$ (diese Werte entsprechen ungefähr der Bo105). Man berechne die Eigenwerte im Schwebeflug im drehenden sowie im nicht drehenden System und erläutere die Natur der Bewegungsformen.

Lösung

Drehendes System: vier Blätter resultieren in vier identischen Eigenwerten.

$$s_R = -\frac{\gamma}{16} \pm i \sqrt{v_\beta^2 - \left(\frac{\gamma}{16}\right)^2} = -0,5 \pm i 1,002$$

Wie man sieht, ist $Im(s_R) = 1,002 > 1$, was für den Eigenwert niedriger Frequenz wichtig ist. Nicht drehendes System: Hier erhält man vier konjugiert komplexe Eigenwerte. Für β_0 und $\beta_{N/2}$ sind diese identisch mit denen des drehenden Systems

$$s = s_R = -0,5 \pm i 1,002$$

Für β_{1C} und β_{1S} jedoch hat man zwei Fälle:

$$s = s_R \pm i$$

1. Eigenwert hoher Frequenz: $s = -0,5 \pm i 2,002$; es handelt sich um eine progressive Bewegungsform.
2. Eigenwert niedriger Frequenz: $s = -0,5 \pm i 0,002$; hier ist es eine regressive Bewegungsform.

Beispiel

Für den Flattertest eines Rotorblattes wurde der Rotor durch periodische Bewegung der Taumelscheibe zu Schwingungen angeregt und die Systemantwort wurde mit Hilfe von

Sensoren auf allen vier Blättern gemessen. Die Antwort der niedrigsten Eigenform im nicht drehenden System wurde aus der Ausschwingkurve mit Hilfe der *moving block* Methode ermittelt und es wurde eine Frequenz von $f = 1,25 \text{ Hz}$ und ein Dämpfungs-
wert von $\zeta = 0,5$ errechnet. Man berechne die zugehörige Blatteigenfrequenz und den Dämpfungswert im drehenden System; die Rotordrehzahl war 350 RPM.

Lösung

Nicht drehendes System: Die Frequenz des gedämpften Systems ist $f = f_d = 1,25 \text{ Hz} \Rightarrow \omega_d = 7,854 \text{ rad/s}$ und $\zeta = 0,5$. Mit 350 RPM folgt $\Omega = 36,652 \text{ rad/s}$ und

$$\frac{\omega_d}{\Omega} = 0,2143$$

Die Eigenfrequenz ist mit der gedämpften Frequenz über

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

verbunden und es folgt

$$\frac{\omega_n}{\Omega} = 0,2474 \quad \text{und} \quad \zeta \frac{\omega_n}{\Omega} = 0,1237$$

Damit erhält man den Eigenwert im nicht drehenden System zu

$$s = \zeta \frac{\omega_n}{\Omega} \pm i \frac{\omega_d}{\Omega} = 0,1237 \pm i 0,2143$$

und im drehenden System folgt:

$$s_R = s + i = 0,1237 + i 1,2143$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = 0,1019 \quad \Rightarrow \quad \zeta = 0,101$$

Die gedämpfte Frequenz der Schwingung ist $\omega_d/\Omega = 1,2143/\text{rev}$ oder umgerechnet $f_d = 7,08 \text{ Hz}$.

3.4 Methoden der Analyse

In der Analyse rotierender Systeme ist man oft mit Differentialgleichungen, die periodische Koeffizienten enthalten, konfrontiert. Zum Beispiel beinhaltet die Bewegungsgleichung eines schlagenden Blattes im Vorwärtsflug viele periodische Terme. Für manche dynamischen Probleme erhält man auch Gleichungen mit konstanten Koeffizienten, was zum Beispiel im Schwebeflug der Fall ist. Die Methoden der Analyse für Systeme mit konstanten Koeffizienten sind einfach und bekannt, wohingegen diejenigen der Gleichungssysteme mit periodischen Koeffizienten wesentlich schwieriger und weniger bekannt sind.

3.4.1 Systeme mit konstanten Koeffizienten

Man denke sich N lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (3.38)$$

worin $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ quadratische Matrizen der Ordnung $N \times N$ sind und die Vektoren der Auslenkungen und ihrer zeitlichen Ableitungen $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$ sowie der Erregerkraft \mathbf{F} sind von der Ordnung $N \times 1$. Diese Gleichungen kann man in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung umschreiben

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K} & -\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

worin \mathbf{I} die Einheitsmatrix der Ordnung $N \times N$ und $\mathbf{0}$ die Nullmatrix der gleichen Ordnung darstellt. Definiert man nun den Vektor

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

welcher die Ordnung $2N \times 1$ hat, so lautet das neue Differentialgleichungssystem mit $2N$ Gleichungen erster Ordnung

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{G} \quad (3.41)$$

Darin sind folgende Systemmatrizen enthalten

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Solange \mathbf{M} nicht singulär ist, sind diese Gleichungen gültig.

3.4.2 Stabilität der Systeme mit konstanten Koeffizienten

Für Stabilitätsuntersuchungen setzt man die Erregerkraft zu Null, hier also \mathbf{F} bzw. \mathbf{G} . Dies resultiert in ein System homogener Differentialgleichungen und die allgemeine Lösung kann man mit dem Ansatz

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 e^{\lambda t} \quad (3.43)$$

gewinnen, denn dann folgt sofort mit der Einheitsmatrix \mathbf{I}

$$\mathbf{A}\mathbf{y}_0 = \lambda \mathbf{y}_0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad (3.44)$$

was ein normales algebraisches Eigenwertproblem darstellt und $2N$ Eigenwerte λ_k liefert. Diese sind normalerweise konjugiert komplex

$$\lambda_k = \alpha_k \pm i\omega_k \quad (3.45)$$

Der Realteil α_k repräsentiert die Dämpfung der Eigenform (= Abklingkonstante; die Ausschwingkurve wird von $e^{\alpha_k t}$ eingehüllt) und der Imaginärteil ω_k die Frequenz der gedämpften Schwingung. Wenn auch nur einer der Eigenwerte einen positiven Realteil aufweist, ist das System instabil. Die zugehörigen Eigenvektoren stellen die Beteiligung der verschiedenen Eigenformen dar.

3.4.3 Dynamische Antwort der Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wenn man stationäre Zustände betrachtet, sind die externen Erregerkräfte $F(t)$ generell periodisch und lassen sich durch ganzzahlige Vielfache der Drehfrequenz des Rotors ausdrücken. Als Beispiel sei eine Komponente in der m -ten Harmonischen vorhanden,

$$\mathbf{F}(t) = \operatorname{Re}(\mathbf{F}e^{i\omega_m t}) = \mathbf{F}_R \cos \omega_m t - \mathbf{F}_I \sin \omega_m t \quad (3.46)$$

worin $\mathbf{F} = \mathbf{F}_R + i\mathbf{F}_I$ eine generelle komplexe Erregeramplitude darstellt. Nimmt man die stationäre Antwort des Systems als

$$\mathbf{q}(t) = \operatorname{Re}(\mathbf{q}e^{i\omega_m t}) = \mathbf{q}_R \cos \omega_m t - \mathbf{q}_I \sin \omega_m t \quad (3.47)$$

an, worin $\mathbf{q} = \mathbf{q}_R + i\mathbf{q}_I$ eine generelle komplexe Systemantwort sei, substituiert beides in das Differentialgleichungssystem Gl. 3.38 und sortiert nach gleichen Multiplikatoren ($\sin \omega_m t, \cos \omega_m t$), so erhält man

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{H} \\ -\mathbf{H} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_R \\ \mathbf{q}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_R \\ \mathbf{F}_I \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

worin

$$\mathbf{G} = \mathbf{K} - \omega_m^2 \mathbf{M} \quad \text{und} \quad \mathbf{H} = \omega_m \mathbf{C} \quad (3.49)$$

sind. Für bekannte äußere Kräfte \mathbf{F}_R und \mathbf{F}_I kann man dieses Gleichungssystem lösen und die Bewegungsamplituden \mathbf{q}_R , \mathbf{q}_I berechnen. Generell kann man auch die Methode der finiten Differenzen verwenden, aber bei Rotorproblemen führt diese Methode zu komplizierten Ausdrücken.

3.4.4 Systeme mit periodischen Koeffizienten

Die Bewegungsdifferentialgleichungen lauten

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (3.50)$$

worin nun die Matrizen \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} periodische Terme enthalten. Auch dieses System kann man in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung umformen

$$\dot{\mathbf{y}} - \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{G} \quad (3.51)$$

worin \mathbf{A} und \mathbf{G} im Intervall $T = 2\pi$ periodisch sind, also $\mathbf{A}(\psi) = \mathbf{A}(\psi + 2\pi)$ etc.

3.4.5 Floquet-Verfahren zur Stabilitätsanalyse

Dieses Verfahren ist nach Achille Marie Gaston Floquet benannt, einen französischen Mathematiker (1847–1920), der auf dem Gebiet der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen gearbeitet und dieses Verfahren für die Lösung von Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten entwickelte. Die Anwendung auf Hubschrauberrotoren haben Peters und Hohenemser 1971 initiiert [7] und Friedman, Hammond und Woo weiter ausgearbeitet [8], auch Dugundji und Wendell stellen Lösungsmethoden für Differentialgleichungssysteme mit periodischen Koeffizienten vor [9]. Außerdem sei für die numerische Behandlung strukturdynamischer Probleme auf [10] verwiesen. Für Stabilitätsuntersuchungen setzt man wieder die rechte Seite des Systems Gl. 3.41 zu Null und sucht die Lösung in der generellen Form

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{C}_k e^{p_k t} \quad (3.52)$$

worin die Vektoren \mathbf{y} und \mathbf{C}_k die Länge $2N$ haben. \mathbf{B} hat die Ordnung $2N \times 2N$ und ist periodisch mit der Periode T . Die Periodizität bedingt

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(T) &= \mathbf{B}(0) \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{B}(0)\mathbf{C}_k \\ \mathbf{y}(T) &= \mathbf{B}(T)\mathbf{C}_k e^{p_k T} = \mathbf{B}(0)\mathbf{C}_k e^{p_k T} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Außerdem kann man $\mathbf{y}(T)$ als

$$\mathbf{y}(T) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{(1)} & \mathbf{y}^{(2)} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

schreiben, worin $\mathbf{y}^{(1)}$ die Lösung der Grundgleichung 3.41 bei $t = T$ mit $\mathbf{G}(t) = 0$ für die Anfangsbedingungen $y_1(0) = 1$ und alle anderen $y_i(0) = 0$ bedeutet. Mit der Matrix \mathbf{Q} , die alle diese Teillösungen enthält

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{(1)} & \mathbf{y}^{(2)} & \dots \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

und als Transitionsmatrix bezeichnet wird, folgt aus Gl. 3.53

$$\mathbf{y}(T) = [\mathbf{Q}]\mathbf{y}(0) = [\mathbf{Q}][\mathbf{B}(0)]\mathbf{C}_k = [\mathbf{Q}][\mathbf{B}(0)_1\mathbf{C}_1 + \mathbf{B}(0)_2\mathbf{C}_2 + \dots] \quad (3.56)$$

Eine andere Schreibweise ist, ebenfalls aus Gl. 3.53

$$\mathbf{y}(T) = [\mathbf{B}(0)]\mathbf{C}_k e^{p_k T} = [\mathbf{B}(0)_1\mathbf{C}_1 e^{p_1 T} + \mathbf{B}(0)_2\mathbf{C}_2 e^{p_2 T} + \dots] \quad (3.57)$$

Vergleicht man diese beiden, so folgt

$$[\mathbf{Q}]\mathbf{B}(0) = \lambda_k \mathbf{B}(0)_k \quad (3.58)$$

mit den Parametern

$$\lambda_k = e^{p_k T} \quad (3.59)$$

Dieses ist ein normales algebraisches Eigenwertproblem und λ_k sind die komplexen Eigenwerte der Transitionsmatrix $[\mathbf{Q}]$. Den Stabilitätsexponenten p_k ermittelt man dann aus diesen Eigenwerten zu

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{1}{T} \ln(\lambda_k) = \alpha_k + i\omega_k \\ \alpha_k &= \frac{1}{T} \ln |\lambda_k| = \frac{1}{2T} \ln[(\lambda_k)_R^2 + (\lambda_k)_I^2] \\ \omega_k &= \frac{1}{T} \tan^{-1} \left[\frac{(\lambda_k)_I}{(\lambda_k)_R} \right] \pm n \frac{2\pi}{T} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Darin ist α_k ein Maß für das Anwachsen oder Abklingen der Systemantwort. Ist dieser Wert positiv oder λ_k größer als Eins, so zeigt dies eine Instabilität der Eigenform an. ω_k repräsentiert die Frequenz der Schwingung, wobei die Grundfrequenz durch $2\pi/T$ gegeben ist. Das Problem ist nun aber, dass der \tan^{-1} viele Werte annehmen kann (ausgedrückt durch ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz $n2\pi/T$), so dass man nicht genau sagen kann, welcher Wert der richtige für ω_k ist. Hier muss man physikalische Überlegungen einbringen, um den richtigen Wert für n zu finden.

3.4.6 Floquet-Verfahren zum dynamischen Antwortproblem

Die Grundgleichung ist

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{G} \quad (3.61)$$

Die Lösung dieser Gleichung mit periodischen Koeffizienten kann man direkt durch numerische Integration erhalten. Dazu nimmt man beliebige Anfangsbedingungen an und wird in der Regel viele Zyklen benötigen, um eine konvergierende Lösung zu erhalten.

Durch gute Schätzung der Anfangswerte allerdings kann man den gesamten Einschwingvorgang mit allen transienten Verhaltensweisen umgehen und die stationäre dynamische Lösung kann man dann auch in nur einer einzigen Periode erhalten. Das Ziel der Floquet-Methode ist es, diese geeigneten Anfangswerte zu berechnen. Dazu nimmt man eine generelle Lösung der Form

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_H(t) + \mathbf{y}_p(t) \quad (3.62)$$

an, worin der Index H die homogene Lösung und der Index p die partikuläre anzeigt. Wenn nun $\mathbf{y}_E(t)$ die exakte Lösung (Index E) der Differentialgleichung für einen gegebenen Satz von Anfangsbedingungen ist, dann kann man eine Anzahl von zusätzlichen homogenen Lösungen $\Delta\mathbf{y}_H(t)$ für verschiedene Sätze von Anfangsbedingungen hinzufügen und würde eine neue Lösung erhalten:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_E(t) + \Delta\mathbf{y}_H(t) \quad (3.63)$$

Nun kann man alle homogenen Lösungen der Anfangsgleichung durch Nullsetzen von \mathbf{G} erhalten (insgesamt $2N$ Lösungen), indem man die folgenden Anfangsbedingungen verwendet: $y_1 = 1$ und alle anderen $y_i = 0$, dann $y_2 = 1$ und alle anderen $y_i = 0$, usw. Ein ähnlicher Satz von Lösungen wird für die Transitionsmatrix berechnet. Somit erhält man

$$\Delta\mathbf{y}_H(t) = [\mathbf{y}^{(1)}(t) \quad \mathbf{y}^{(2)}(t) \quad \dots] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = [\mathbf{Q}(t)]\mathbf{c} \quad (3.64)$$

Nun ist hier $[\mathbf{Q}(t)]$ die Transitionsmatrix zu jeder Zeitstelle t und

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_E(t) + [\mathbf{Q}(t)]\mathbf{c} \quad (3.65)$$

Für eine periodische Lösung in der Periode T bekommt man

$$\mathbf{y}(T) = \mathbf{y}(0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_E(T) + [\mathbf{Q}(T)]\mathbf{c} = \mathbf{y}_E(0) + [\mathbf{Q}(0)]\mathbf{c} \quad (3.66)$$

worin $[\mathbf{Q}(0)]$ eine Einheitsmatrix \mathbf{I} darstellt.

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= [\mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1}(\mathbf{y}_E(T) - \mathbf{y}_E(0)) \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{y}_E(0) + \mathbf{c} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Dies gibt die gesuchten Anfangsbedingungen. Wenn diese erst einmal bekannt sind, kann man die dynamische Antwort auf externe Erregung numerisch berechnen und man muss nicht mehr als einen Zyklus integrieren. Der Einfachheit halber kann man $\mathbf{y}_E(0) = 0$ wählen. Dies gibt

$$\mathbf{y}(0) = [\mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1}\mathbf{y}_E(T) \quad (3.68)$$

und darin ist $\mathbf{y}_E(T)$ die komplette Lösung der Ausgangsgleichung für Anfangsbedingungen des Wertes Null.

Die dargelegte Form der Anfangsbedingungen wurde 1983 von Dugundji aufgestellt [9]. Eine andere Form für die Anfangsbedingungen wurde von der Arbeitsgruppe um Friedmann 1979 für Windenergieanlagen aufgestellt [11],

$$\mathbf{y}(0) = [\mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1} \mathbf{Q} \int_0^T [\mathbf{Q}(t)]^{-1} \mathbf{G}(t) dt \quad (3.69)$$

worin man den Vektor $\mathbf{y}_E(T)$ nicht braucht. Diese Prozedur kann man auch auf nichtlineare Problemstellungen anwenden:

$$\dot{\mathbf{y}} - \mathbf{A}(t)\mathbf{y} = \mathbf{G}(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \quad (3.70)$$

worin der erregende Term auf der rechten Seite nichtlineare Terme enthält. Für mehr Details sehe man bei [9] und [11] nach.

Beispiel

Das dynamische Verhalten eines Systems sei durch folgende Differentialgleichungen beschrieben:

$${}^*x = x \sin \psi \quad \text{und} \quad {}^*\dot{y} = x e^{\cos \psi} + F \sin \psi$$

Mit Hilfe der Floquet-Methode ist das System auf Stabilität hin zu untersuchen.

Lösung

Aus der ersten Gleichung folgt eine Teillösung

$$x = c_1 e^{-\cos \psi} \Rightarrow {}^*x = c_1 e^{-\cos \psi} \sin \psi = x \sin \psi$$

Für Stabilitätsuntersuchungen setzt man die rechte Seite zu Null ($F = 0$) und erhält

$${}^*\dot{y} = x e^{\cos \psi} = c_1$$

und nach Integration

$$y = c_1 \psi + c_2$$

Nun wird die Transitionsmatrix berechnet; zunächst mit dem ersten Satz von Anfangsbedingungen

$$\psi = 0: \quad x = 1 \quad y = 0$$

Dies gibt

$$1 = c_1 e^{-\cos 0} \Rightarrow c_1 = e \quad \text{und} \quad 0 = c_1 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

An der Stelle T oder $\psi = 2\pi$ sind dann

$$x = ee^{-\cos 2\pi} = 1 = Q_{11} \quad \text{und} \quad y = 2\pi e = Q_{21}$$

Für den zweiten Satz von Anfangsbedingungen

$$\psi = 0: \quad x = 0 \quad y = 1$$

bekommt man

$$0 = c_1 e^{-\cos 0} \Rightarrow c_1 = 0 \quad \text{und} \quad 1 = c_1 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 1$$

und an der Stelle $\psi = 2\pi$: $x = 0 = Q_{12}$ und $y = 1 = Q_{22}$

Die Transitionsmatrix lautet also

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi e & 1 \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte folgen aus

$$\det[Q - \lambda I] = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 2\pi e & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

zu $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und dies ist ein Zustand neutraler oder indifferenter Stabilität.

Beispiel

Die Schlagbewegung eines Rotorblattes im Vorwärtsflug mit Luftkräften aus Gl. 3.9 sei im drehenden System gegeben als

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} + \frac{\gamma}{8} \left(1 + \frac{4\mu}{3} \sin \psi \right) \dot{\beta} + \left[v_\beta^2 + \frac{\gamma}{8} \left(\frac{4\mu}{3} \cos \psi + \mu^2 \sin 2\psi \right) \right] \beta \\ = \frac{\gamma}{8} \left(1 + \mu^2 + \frac{8\mu}{3} \sin \psi - \mu^2 \cos 2\psi \right) \Theta - \frac{\gamma}{6} \left(1 + \frac{3\mu}{2} \sin \psi \right) \lambda \\ + \frac{\gamma}{10} \left(1 + \frac{5\mu^2}{6} + \frac{5\mu^2}{2} \sin \psi - \frac{5\mu^2}{6} \cos 2\psi \right) \Theta_{tw} \end{aligned}$$

Für gegebenen Fortschrittsgrad und Steuerwinkel will man nun die Blattantwort für die ganze Umdrehung finden. Ohne zu lösen, zeige man die Schritte, um die Analyse mit der Floquet-Theorie durchzuführen.

Lösung

Die Lösung besteht aus fünf Schritten.

Schritt 1 Zunächst bringt man die Gleichung zweiter Ordnung auf zwei Gleichungen erster Ordnung:

$$\begin{bmatrix} * \\ \beta \\ ** \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left[v_\beta^2 + \frac{\gamma}{8}\left(\frac{4\mu}{3}\cos\psi + \mu^2\sin 2\psi\right)\right] & -\frac{\gamma}{8}\left(1 + \frac{4\mu}{3}\sin\psi\right) \\ * & * \\ + \left[\frac{\gamma}{8}\left(1 + \mu^2 + \frac{8\mu}{3}\sin\psi - \mu^2\cos 2\psi\right)\Theta - \frac{\gamma}{6}\left(1 + \frac{3\mu}{2}\sin\psi\right)\lambda\right] & \\ + \left[\frac{\gamma}{10}\left(1 + \frac{5\mu^2}{6} + \frac{5\mu^2}{2}\sin\psi - \frac{5\mu^2}{6}\cos 2\psi\right)\Theta_{tw}\right] & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ * \\ \beta \end{bmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Form $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{G}$

Schritt 2 Man berechnet $y_E(T = 2\pi)$ für das ganze System mit verschwindenden Anfangsbedingungen durch numerische Integration von $\psi = 0$ bis $\psi = 2\pi$:

$$\psi = 0: \quad \mathbf{y} = 0$$

Schritt 3 Die Transitionsmatrix wird berechnet: Man setzt $\mathbf{G} = 0$ und ermittelt die Antwort mit zwei Sätzen von Anfangsbedingungen:

Erster Satz ist: $\psi = 0: \beta = 1$ und $\dot{\beta} = 0$ gibt Q_{11} und Q_{21}

Zweiter Satz ist: $\psi = 0: \beta = 0$ und $\dot{\beta} = 1$ gibt Q_{12} und Q_{22}

Schritt 4 Man berechnet die Anfangsbedingungen $\mathbf{y}(0) = [\mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1}\mathbf{y}_E(T)$

Schritt 5 Mit Hilfe dieser Anfangsbedingungen kann man die dynamische Antwort an allen Zeitschritten ψ unter Anwendung numerischer Integration ermitteln, und zwar für das gesamte System.

3.4.7 Weitere Verfahren

Man kann auch versuchen, ein System mit periodischen Koeffizienten durch eines mit konstanten Koeffizienten als Näherung zu lösen. Eine solche Näherung mit konstanten Koeffizienten lässt sich mit Hilfe der FCT ins nicht drehende System übertragen und dieses neue System hat nur wenige periodische Terme, die durch eine Zeitmittelung zu konstanten Koeffizienten werden. Eine solche Näherungslösung ist für geringe bis mäßige Fortschrittsgrade noch recht gut und bis ca. $\mu = 0,3$ noch anwendbar. Für größere Fortschrittsgrade liefert sie immer noch Anhaltswerte für die Lösung mit Hilfe der Floquet-Theorie.

Das dynamische Antwortverhalten von Systemen mit periodischen Koeffizienten lässt sich prinzipiell auch mit dem Abgleich der Koeffizienten (engl. harmonic balance method) der verschiedenen Vielfachen der Grundharmonischen lösen. Dies wird jedoch sehr aufwändig, wenn die Koeffizienten analytisch berechnet werden, weil die Differentialgleichungen miteinander verkoppelt und nichtlinear sind.

Am gebräuchlichsten hat sich heutzutage jedoch die numerische Integration durchgesetzt.

3.5 Finite-Element-Methode in Zeit

FEM in Zeit ist ein ausgezeichnetes Verfahren, um die stationäre dynamische Antwort eines Rotorblattes zu berechnen, siehe z. B. [12]. Dies kann auf zwei Wegen gemacht werden.

1. Direkter Ansatz über Energieausdrücke:

$$\delta \int_{t_A}^{t_E} (E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}) dt - \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right] = 0 \quad (3.71)$$

Dies wird Hamilton's Prinzip in der schwachen Form genannt.

2. Indirekter Ansatz über die Differentialgleichung:

Man stelle sich ein Einfreiheitsgradsystem vor:

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = F(t) \quad (3.72)$$

In Variationsform lautet diese

$$\int_{t_A}^{t_E} (m\ddot{q} + c\dot{q} + kq - F)\delta q dt = 0 \quad (3.73)$$

wobei nach Anwendung der partiellen Integration auf den ersten Term

$$\int_{t_A}^{t_E} m\ddot{q}\delta q dt = m\dot{q}\delta q|_{t_A}^{t_E} - \int_{t_A}^{t_E} m\dot{q}\delta\dot{q} dt \quad (3.74)$$

folgt. Hierin ist m keine Funktion der Zeit und t_A ist die Anfangszeit des Intervalls sowie t_E die Endzeit.

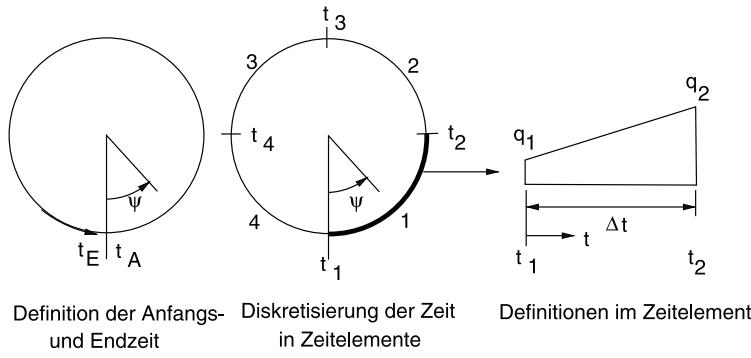


Abb. 3.4 Definition der Anfangs- und Endzeit bei FEM in Zeit

Diese zweite Methode wird nun erläutert. Damit folgt

$$\int_{t_A}^{t_E} (-m\ddot{q}\delta\dot{q} + c\dot{q}\delta q + kq\delta q - F\delta q) dt = -m\dot{q}\delta q|_{t_A}^{t_E} \quad (3.75)$$

Im Falle eines Rotors mit einer stationären periodischen Lösung ist $t_A = 0$ und $t_E = 2\pi$ sowie $q(t_A) = q(t_E)$ und $\dot{q}(t_A) = \dot{q}(t_E)$, siehe Abb. 3.4. Mit diesen Definitionen folgt

$$m\dot{q}\delta q|_{t_A}^{t_E} = 0 \quad (3.76)$$

Eine Zeitperiode wird nun in eine ganze Anzahl von Zeitelementen (nämlich die finiten Elemente der Zeit) zerlegt: $t_1 = t_A$ und $t_{N+1} = t_E$ (Abb. 3.4). Das erste Zeitelement hat eine Dauer (welche formal wie eine Länge behandelt wird) von Δt und die generalisierte Koordinate q ändert sich als einfachste Annahme linear in diesem Element (Abb. 3.4). Höhere Ordnungen sind natürlich auch möglich, jedoch aufwändiger und gewährleisten am Übergang von einem Element zum nächsten nicht nur die gleiche Auslenkung, sondern auch gleiche Gradienten. Der Einfachheit halber wird hier aber nur ein linearer Ansatz demonstriert.

$$q(t) = a_1 + a_2 t \quad (3.77)$$

Die Randbedingungen lauten:

$$\begin{aligned} t = t_1: \quad q &= q_1 = a_1 + a_2 t_1 \\ t = t_2: \quad q &= q_2 = a_1 + a_2 t_2 \end{aligned} \quad (3.78)$$

und damit

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1} = \frac{q_2 - q_1}{\Delta t} \\ a_1 &= \frac{q_1 t_2 - q_2 t_1}{\Delta t} \\ q(t) &= \left(1 - \frac{t - t_1}{\Delta t}\right) q_1 + \frac{t - t_1}{\Delta t} q_2 \\ \dot{q}(t) &= \frac{q_2 - q_1}{\Delta t} \end{aligned} \quad (3.79)$$

Damit erhält man aus dem anfänglichen Integral über die ganze Periode eine Summe von Integralen über jeweils kleine Abschnitte.

$$\int_{t_A}^{t_E} (\dots) dt = \sum_{l=1}^N \int_{t_l}^{t_{l+1}} (\dots) dt \quad (3.80)$$

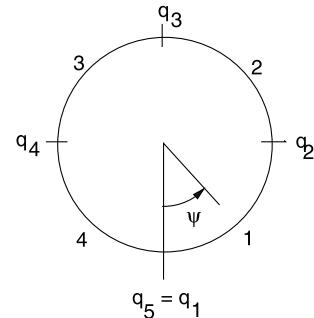
Am Beispiel des ersten Elementes:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} (-m\dot{q}\delta\dot{q} + c\dot{q}\delta q + kq\delta q - F\delta q) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ -\frac{m}{(\Delta t)^2} (q_2 - q_1)(\delta q_2 - \delta q_1) + \frac{c}{(\Delta t)^2} (q_2 - q_1)[(\Delta t - t + t_1)\delta q_1 + (t - t_1)\delta q_2] \right. \\ & \quad \left. + \frac{k}{(\Delta t)^2}[(\Delta t - t + t_1)q_1 + (t - t_1)q_2][(\Delta t - t + t_1)\delta q_1 + (t - t_1)\delta q_2] \right. \\ & \quad \left. - \frac{F}{\Delta t}[(\Delta t - t + t_1)\delta q_1 + (t - t_1)\delta q_2] \right\} dt \\ &= \begin{bmatrix} \delta q_1 & \delta q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta q_1 & \delta q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.81)$$

Darin sind folgende Koeffizienten enthalten:

$$\begin{aligned} A_{11} &= -\frac{m}{\Delta t} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{c}{(\Delta t)^2} (\Delta t - t + t_1) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{k}{(\Delta t)^2} (\Delta t - t + t_1)^2 dt \\ A_{12} &= \frac{m}{\Delta t} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{c}{(\Delta t)^2} (\Delta t - t + t_1) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{k}{(\Delta t)^2} (t - t_1)(\Delta t - t + t_1) dt \\ A_{21} &= \frac{m}{\Delta t} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{c}{(\Delta t)^2} (t - t_1) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{k}{(\Delta t)^2} (t - t_1)(\Delta t - t + t_1) dt \\ A_{22} &= -\frac{m}{\Delta t} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{c}{(\Delta t)^2} (t - t_1) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{k}{(\Delta t)^2} (t - t_1)^2 dt \\ I_1 &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{F}{\Delta t} (\Delta t - t + t_1) dt \\ I_2 &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{F}{\Delta t} (t - t_1) dt \end{aligned} \quad (3.82)$$

Abb. 3.5 Diskretisierung einer Periode mit vier Zeitelementen



Wenn zum Beispiel die Gesamtzahl der Zeitelemente $N = 4$ beträgt (siehe Bild Abb. 3.5), dann kann man die Koeffizienten der einzelnen Zeitschritte in die Matrix des Gesamtzeitbereichs einsortieren. In analoger Weise gilt das für den Lösungsvektor \mathbf{Q} .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} + a_{22}^{(4)} & a_{12}^{(1)} & 0 & a_{21}^{(4)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} + a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} + a_{11}^{(3)} & a_{12}^{(3)} \\ a_{12}^{(4)} & 0 & a_{21}^{(3)} & a_{22}^{(3)} + a_{11}^{(4)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \left\{ \begin{array}{l} I_1^{(1)} + I_2^{(4)} \\ I_1^{(2)} + I_2^{(1)} \\ I_1^{(3)} + I_2^{(2)} \\ I_1^{(4)} + I_2^{(3)} \end{array} \right\} \quad (3.83)$$

Schließlich erhält man die Lösung für die generalisierten Koordinaten

$$\mathbf{q} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q} \quad (3.84)$$

3.6 Schlussfolgerungen

- In vielen dynamischen Fragestellungen (Antwortproblem, Stabilitätsanalyse) spielen die Dynamik des Rumpfes (nicht drehendes System) und des Rotors (drehendes System) eine Rolle. Die Transformation der Freiheitsgrade des einen Systems in das andere bewerkstelligt die Fourier Koordinaten Transformation (FCT), auch Mehrblattkoordinaten genannt. Sie stellt eine lineare Relation zwischen N Freiheitsgraden des einen Systems und ebenso vielen Freiheitsgraden im anderen System dar.
- Die Eigenwerte einer Schwingungsbewegung im drehenden System (Dämpfungsmaß, Frequenz der gedämpften Schwingung) können mit der FCT im nicht drehenden System dargestellt werden. Die Eigenwerte der kollektiven Rotorblattbewegung und der kollektiven Differentialform sind identisch mit denen des drehenden Systems, aber die zyklischen Blattbewegungen sind im nicht drehenden System verkoppelt. Die Dämpfung ist dieselbe wie im drehenden System, aber die Frequenz der gedämpften Schwingung ist um $\pm 1/\text{rev}$ verschoben.
- Dadurch entsteht eine hochfrequente Schwingungsbewegung ($+1/\text{rev}$) und eine niederfrequente Schwingungsbewegung ($-1/\text{rev}$). Das Erscheinungsbild für einen außen

stehenden Beobachter ist eine Schaukelbewegung des Rotors in (progressiv) oder gegen (regressiv) die Rotordrehrichtung.

- Die Differentialgleichungssysteme im Schwebeflug haben konstante Koeffizienten in der Massen-, Dämpfungs- und Federmatrix. Die Stabilitätsanalyse kann auf bekannte Verfahren zurückgreifen.
- Im Vorwärtsflug haben die Differentialgleichungssystem jedoch periodische Koeffizienten, was die Lösung erheblich erschwert. Hier kann das Verfahren von Floquet sowohl für die Stabilitätsanalyse wie für das dynamische Antwortproblem verwendet werden. Meistens kommt jedoch die numerische Integration in Ansatz.
- Für stationäre Betriebszustände kann auch die Finite-Element-Methode in Zeit verwendet werden, für instationäre Betriebszustände wie Manöverflug jedoch nur noch die numerische Integration.

3.7 Übungsaufgaben

3.7.1 Fourier Koordinaten Transformation (FCT, Mehrblattkoordinaten)

1. Die Differentialgleichung der Schlagbewegung im Schwebeflug sei folgendermaßen im drehenden System gegeben:

$$\ddot{\beta} + \frac{\gamma}{8}\dot{\beta} + \nu_{\beta}^2\beta = \frac{\gamma}{8}\Delta\Theta$$

Darin sei $\Delta\Theta$ ein Blatteinstellwinkel, der durch eine Schlag-Torsionskopplung folgender Art erzeugt wird:

$$\Delta\Theta = K_1\beta \sin \psi + K_2\beta \sin 2\psi$$

Mit Hilfe der FCT übertrage man diese Differentialgleichung in das nicht drehende System, wobei ein 3-Blatt Rotor zugrunde gelegt werden soll.

2. Ein im Schwebeflug befindlicher Rotor wird von einer horizontalen Windböe erfasst, die eine vertikale Rotorkopfbewegung z_H und Winkelbewegungen um beide Achsen α_x und α_y erzeugt. Stellen sie die linearisierten Bewegungsgleichungen im drehenden wie im nicht drehenden System für einen 4-Blatt Rotor auf.

3.7.2 Eigenwerte im drehenden und im nicht drehenden System

1. Begründen Sie folgende Aussagen:
 - a) Die Fourier Koordinaten Transformation (FCT) ist grundverschieden von einer Fourierreihe.
 - b) Die Stabilität der Schlagbewegung alleine ist relativ unbedeutend.
 - c) Bei großen Flughöhen erhält man länger andauernde Einschwingvorgänge.

2. Drücken sie die folgenden zwei Differentialgleichungen höherer Ordnung durch Gleichungen erster Ordnung aus:

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 \ddot{q}_1 + a_2 \ddot{q}_2 + a_3 \dot{q}_1 + a_4 q_2 + a_5 \\ 0 &= b_1 \ddot{q}_1 + b_2 \ddot{q}_2 + b_3 \dot{q}_1 + b_4 \end{aligned}$$

3. Ein Rotor mit 4 % Schlaggelenksabstand wird zuerst im Vakuum betrieben, dann in Luft. Diskutieren sie die Art der Eigenwerte im drehenden und im nicht drehenden System für beide Zustände am Beispiel eines vierblättrigen Rotors mit einer Lockzahl von $\gamma = 8$.

3.7.3 Methoden der Analyse: Floquet-Theorie, FEM in Zeit

1. Begründen Sie folgende Aussagen:
 - a) Ein hohes Niveau von Vibrationen im nicht drehenden System muss nicht bedeuten, dass auch große dynamische Belastungen im drehenden System auftreten und umgekehrt.
 - b) Warum ist die Finite Element Methode in Zeit bestens zur Berechnung der Systemantwort in einem stationären Betriebszustand geeignet? Kann man damit auch transiente Vorgänge berechnen?
 - c) Eine Versteifung der Rotorblätter kann auch in einer kürzeren Lebensdauer derselben resultieren.
2. Mit Hilfe der Floquet-Theorie soll die Stabilität des folgenden Systems untersucht werden:

$$\overset{*}{x} = \sin \psi \quad \text{und} \quad \overset{*}{y} = 4x \sin \psi + \sin 2\psi$$

3. Man entwickle eine Finite Element Formulierung in der Zeit mit $N = 4$ Zeitelementen, um die stationäre Schlagbewegung im Schwebeflug zu berechnen:

$$\overset{**}{\beta} + \frac{\gamma}{8} \overset{*}{\beta} + \nu_\beta^2 \beta = \frac{\gamma}{8} \Theta_n - \frac{\gamma}{6} \lambda \quad \text{mit} \quad \Theta_n = \Theta_{nS} \sin n\psi + \Theta_{nC} \cos n\psi$$

Literatur

1. K.H. Hohenemser, S.-K. Yin, *Some Applications of the Method of Multiblade Coordinates*, Journal of the AHS, Vol. 17, no. 3, pp. 3–12, 1972
2. R.P. Coleman, *Theory of Self-Excited Mechanical Oscillations of Hinged Rotor Blades*, NACA ARR 3G29, 1943
3. W. Johnson, *Helicopter Theory*, ISBN 0 691 07971 4, Princeton University Press, 1980
4. W. Johnson, *Helicopter Aeromechanics*, ISBN 978 1 10 702807 4, Cambridge University Press, 2013

5. A.R.S. Bramwell, D.E.H. Balmford, G.T.S. Done, *Bramwell's Helicopter Dynamics*, ISBN 0 750 65075 3, Butterworth-Heinemann Ltd., 2001
6. R.L. Bielawa, *Rotary Wing Structural Dynamics and Aeroelasticity*, 2nd Edition, ISBN 1563476983, AIAA Education series, 2002
7. D.A. Peters, K.H. Hohenemser, *Application of the Floquet Transistion Matrix to Problems of Lifting Rotor Stability*, Journal of the AHS, Vol. 16, No. 2, pp. 25–33, 1971
8. P.P. Friedmann, C.E. Hammond, T.H. Woo, *Efficient Treatment of Periodic Systems with Application to Stability Problems*, Int. Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, No. 7, pp. 1117–1136, 1977
9. J. Dugundji, J.H. Wendell *Some Analysis Methods for Rotating Systems with Periodic Coefficients*, AIAA Journal, Vol. 21, No. 6, pp. 890–897, 1983
10. L. Meirovitch, *Computational Methods in Structural Dynamics*, ISBN: 90–286-0580-0, Sijthoff and Noordhoff, 1980
11. S.B.R. Kottapalli, P.P. Friedmann, A. Rosen, *Aeroelastic Stability and Response of Horizontal Axis Wind Turbine Blades*, AIAA Journal, Vol. 17, No. 12, pp. 1381–1389, 1979
12. M. Borri, *Helicopter Rotor Dynamics by Finite Element Time Approximation*, Comput. Math. Appl. A, Vol. 12, No. 1, pp. 149–160, 1986



Gekoppelte Schlag-, Schwenk- und Torsionsbewegung

4

4.1 Einleitung

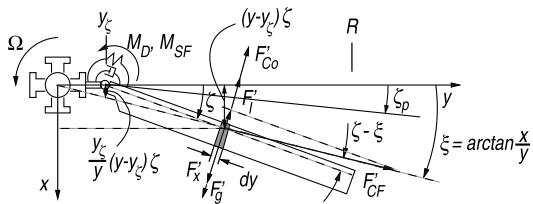
Das Ziel dieses Kapitels ist, die Bewegungsdifferentialgleichungen eines simultan schlagenden, schwenkenden und Torsionsbewegungen ausführenden Rotorblattes zu verstehen. Zur Vorbereitung dazu wurde in Kap. 2 die entkoppelte Schlagbewegung diskutiert. Als Fortsetzung dessen wird zunächst die ungekoppelte Schwenk- und danach die ungekoppelte Torsionsbewegung behandelt. Grundsätzlich hat man dabei besonders auf die elastischen Terme sowie die der Massenträgheit zu achten; bei der Betrachtung der gekoppelten Bewegung werden dann die Koppelterme einer besonderen Aufmerksamkeit unterzogen. Um die Bewegungsdifferentialgleichungen herzuleiten, wird der Newton'sche Ansatz verwendet. Man kann auch den Lagrange'schen Ansatz auf die potentielle und die kinetische Energie des Körpers verwenden, aber da dies kein physikalisch anschaulicher Weg ist, hilft dies nicht bei dem Verständnis der verschiedenen Kräfte. Ferner werden die resultierenden Kräfte an der Blattwurzel im rotierenden System sowie die Rotorkräfte im nicht drehenden System hergeleitet.

Die verkoppelten Bewegungsgleichungen stellen die Grundlage der aeroelastischen Stabilitätsanalyse der Rotorblattbewegung dar. Umfangreiche Darstellungen dieser Thematik findet man in [1–3].

4.2 Die Schwenkbewegung des starren Rotorblattes

Zunächst wird das Rotorblatt als starr mit dem ausschließlichen Freiheitsgrad der Schwenkbewegung (engl. lead-lag motion) in der Drehebene um ein Schwenkgelenk (engl. lag hinge) außerhalb des Rotorzentrums, wie in Abb. 4.1 dargestellt, angenommen. Dieses einfache Modell kann auch für eine Näherung eines gelenklos gelagerten Rotorblattes verwendet werden, wenn man eine Schwenkfeder um das Schwenkgelenk einführt,

Abb. 4.1 Kräfte in der Schwenkbewegung



um die Steifigkeit des Blathalses zu simulieren. Hier wird die Schwenkbewegung positiv in Richtung des Luftwiderstandes, also gegen die Drehrichtung des Rotors angenommen. Die differentiellen Kräfte an der radialen Stelle y in der Rotorebene – unter der Annahme kleiner Winkel – sind dann

Kraft	Formel	Hebelarm	Kommentar
a) Massenträgheit:	$F'_I = m'(y - y_\xi)\ddot{\xi}$	$y - y_\xi$	Aus Beschleunigung
b) Zentrifugalkraft:	$F'_{CF} = m'y\Omega^2(y_\xi/y)\xi$	$y - y_\xi$	Federterm
c) Aerodynamik:	F'_x	$y - y_\xi$	Widerstand
d) Coriolis:	$F'_{Co} = 2m'\Omega(y - y_\beta)\beta\dot{\beta}$	$y - y_\beta$	Aus der Schlagbewegung
e) Federmoment:	$k_\xi(\xi - \xi_p)$	–	Um das Schwenkgelenk
f) Dämpfermoment:	$d_\xi\xi$	–	Um das Schwenkgelenk

Die Corioliskraft aus einer Schwenkbewegung wird oft vernachlässigt, da die radiale Verschiebung eines Massenpunktes auf dem Rotorblatt relativ zur Rotordrehachse bei einer Schwenkbewegung aufgrund der Kinematik viel geringer ausfällt als in der Schlagbewegung. Anders verhält es sich mit der Corioliskraft aus einer Schlagbewegung, die Schwenkmomente erzeugt, welche oft größer als das Moment aus Luftkräften ist und letztlich zur Einführung des Schwenkgelenkes geführt hat. Während de la Cierva dieses Gelenk aus der Erfahrung des Bruches der Blattwurzel einführte, hat Just bei Focke dies mathematisch nachgewiesen.

Hier wird jedoch zunächst die isolierte Schwenkbewegung ohne Schlagen betrachtet. Aufgrund der kleinen Luftkräfte gibt es nur wenig aerodynamische Dämpfung in der Schwenkbewegung und daher ist ein mechanischer Dämpfer notwendig. Fanden früher vor allem Reib- oder Öldämpfer Verwendung, so werden heute meist Elastomerdämpfer eingesetzt, welche gleichzeitig auch eine Federwirkung mit sich bringen und daher ebenfalls ein Federmoment erzeugen. Eine besondere Beachtung verdient hier das Moment aus der Zentrifugalkraft, denn dieses weist einen fundamentalen Unterschied im Vergleich zur Schlagbewegung auf. Bei jener ist nämlich die Wirkungslinie parallel zur y -Achse, während in der Schwenkbewegung die Wirkungslinie fast in Richtung der Blattachse weist und nur eine wesentlich kleinere Komponente (nämlich $F'_{CF} \sin(\xi - \xi)$ als senkrecht zur Blattachse wirkend) das Rückstellmoment bildet (vgl. in der Schlagbewegung: $F'_{CF} \sin \beta$). Es ist

$$\sin(\xi - \xi) \approx \xi - \frac{x}{y} \approx \xi - \xi \frac{y - y_\xi}{y} = \xi \frac{y_\xi}{y} \quad (4.1)$$

Der entsprechende Ausdruck in der Schlagbewegung war β , so dass wegen der generell kleinen Werte der Gelenksabstände der Multiplikator y_ζ/y die Federwirkung der Zentrifugalkraft erheblich herabsetzt, und zwar umso mehr, je geringer der Gelenksabstand zur Rotorachse ist.

Ein eingebauter Schwenkwinkel wird meist – im Gegensatz zur Schlagbewegung – nicht verwendet ($\zeta_P = 0$), da das Schwenkmoment aus aerodynamischen Kräften nur etwa 1/40 des entsprechenden Schlagmomentes beträgt und daher keine Entlastung der statischen Schwenkbiegemomente notwendig ist. Außerdem ist das Flächenträgheitsmoment und damit EI_z in der Schwenkbewegung aufgrund der Querschnitte im Blatt, aber meist auch im Blatthals, wesentlich größer als in der Schlagbewegung; siehe Gl. 2.29. Umgekehrt ist ein Schwenkdämpfer nötig, da die aerodynamische Dämpfung ebenfalls wesentlich geringer als in der Schlagbewegung ausfällt. Die Differentialgleichung der Schwenkbewegung erhält man aus der Summe der Momente um das Schwenkgelenk, welche Null sein muss.

$$\int_{y_\zeta}^R \left[m'(y - y_\zeta)^2 \ddot{\xi} + m' \Omega^2 y (y - y_\zeta) \frac{y_\zeta}{\gamma} \dot{\xi} - F'_x (y - y_\zeta) \right] dy + d_\zeta \dot{\xi} + k_\zeta \xi = 0 \quad (4.2)$$

Mit der Definition des Massenträgheitsmomentes um das Schwenkgelenk

$$I_\zeta = \int_{y_\zeta}^R m'(y - y_\zeta)^2 dy \quad (4.3)$$

folgt

$$I_\zeta \left(\ddot{\xi} + 2D_\zeta v_\zeta \dot{\xi} + v_\zeta^2 \xi \right) = \frac{1}{\Omega^2} \int_{y_\zeta}^R F'_x (y - y_\zeta) dy \quad (4.4)$$

worin v_ζ die dimensionslose Schwenkeigenfrequenz im drehenden System darstellt und wie folgt definiert ist:

$$v_\zeta^2 = \frac{k_\zeta}{I_\zeta \Omega^2} + \frac{y_\zeta \int_{y_\zeta}^R m'(y - y_\zeta) dy}{I_\zeta} = \left(\frac{\omega_{\zeta 0}}{\Omega} \right)^2 + y_\zeta \frac{S_\zeta}{I_\zeta} \quad (4.5)$$

Der zweite Term darin stellt eine Rückstell- bzw. Federwirkung der Zentrifugalkraft dar und verschwindet, wenn das Schwenkgelenk auf der Drehachse liegt – im Gegensatz zur Schlagbewegung. Der erste Term stammt von der am Schwenkgelenk angebrachten Drehfeder und liefert die Schwenkeigenfrequenz des nicht drehenden Rotors $\omega_{\zeta 0} = \sqrt{k_\zeta/I_\zeta}$. Die Massenmomente lassen sich bei konstanter Massenverteilung direkt integrieren:

$$\begin{aligned} S_\zeta &= m' \frac{(R - y_\zeta)^2}{2} = \frac{m' R^2}{2} (1 - e_\zeta)^2 \\ I_\zeta &= m' \frac{(R - y_\zeta)^3}{3} = \frac{m' R^3}{3} (1 - e_\zeta)^3 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Damit wird die Schwenkeigenfrequenz

$$\nu_{\xi}^2 = \left(\frac{\omega_{\xi 0}}{\Omega}\right)^2 + \frac{3}{2} \frac{e_{\xi}}{1 - e_{\xi}} \approx \left(\frac{\omega_{\xi 0}}{\Omega}\right)^2 + \frac{3}{2} e_{\xi} \quad (4.7)$$

Man vergleiche dies mit dem Ergebnis für die Eigenfrequenz der Schlagbewegung in Gl. 2.18: der Zentrifugalkraftanteil ist in der Schwenkeigenfrequenz um den Wert „1“ geringer! Wenn das Schwenkgelenk auf der Drehachse liegt und keine Schwenkfeder angebracht ist, so ist die Schwenkeigenfrequenz Null. Physikalisch bedeutet dies, dass die Rotorwelle dreht und die Blätter nicht, denn es gibt kein Moment, welches sie zum Drehen veranlassen würde. Führt man nur einen Dämpfer ein, so würde sich eine konstante Drehzahldifferenz zwischen Rotorwelle und Blättern einstellen. Erst eine Feder bewirkt, dass die Rotorblätter mit gleicher Drehzahl, aber einer Winkeldifferenz zur Welle, rotieren. So wohl die zuvor genannte Drehzahldifferenz als auch die Winkeldifferenz hängen von der Größe des Momentes aus Luftkräften (Reibungswiderstand und induzierter Widerstand), also der benötigten Antriebsleistung, ab.

Üblich sind Schwenkgelenksabstände von $e_{\xi} = 0,04\text{--}0,06$ bei gelenkig gelagerten Rotoren und $e_{\xi} = 0,08\text{--}0,15$ bei gelenklosen bzw. lagerlosen Rotoren. Ein besonderes Beispiel ist der Bo46 Rotor mit einem Gelenksabstand von $e_{\xi} = 0,4$. Oft sind Schlag- und Schwenkgelenk identisch, so dass $I_{\beta} = I_{\xi}$ gilt. In der Schlagbewegung war als einheitliche Bezugsgröße das Massenträgheitsmoment des homogenen Blattes mit zentralem Schlaggelenk verwendet worden (I_b), was daher auch hier Verwendung findet. Die oben angegebene Differentialgleichung Gl. 4.4 schreibt sich in dimensionsloser Form durch Bezug auf $I_b \Omega^2$ und $\dot{I}_{\xi}^* = I_{\xi}/I_b \approx 1$ für kleine Gelenksabstände:

$$\ddot{\zeta}^{**} + 2D_{\xi}\nu_{\xi} \dot{\zeta}^* + \nu_{\xi}^2 \zeta = \gamma \overline{M}_{\xi} \quad (4.8)$$

Da die Dämpfung in den aerodynamischen Kräften – im Gegensatz zur Schlagbewegung – sehr klein ist (vorwiegend Widerstand) und nach Möglichkeit auch sehr klein gehalten wird, um den Leistungsbedarf des Rotors zu reduzieren, ist die Schwenkbewegung grundsätzlich sehr schwach gedämpft und daher immer im Verdacht, an vielen aeroelastischen Instabilitäten beteiligt zu sein. Insbesondere kann ein Rotor mit sehr elastischer Blattwurzel (also kleiner Eigenfrequenz $\omega_{\xi 0}$) in eine mechanische Instabilität geraten – die sogenannte Bodenresonanz – die später noch behandelt wird. Dies ist auch der Hauptgrund für den Einbau von mechanischen Schwenkdämpfern (engl. lag damper) in die meisten der existierenden Rotoren. Ein Vergleich der ungekoppelten Eigenfrequenzen der Schlag- (siehe Gl. 2.18) und der Schwenkbewegung im drehenden System bei Annahme eines starren Blattes an einem Gelenk außerhalb der Drehachse liefert als Näherung für kleine e_{β} und e_{ξ} :

$$\nu_{\beta}^2 = 1 + \frac{3}{2} e_{\beta} + \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega}\right)^2 \quad \text{und} \quad \nu_{\xi}^2 = \frac{3}{2} e_{\xi} + \left(\frac{\omega_{\xi 0}}{\Omega}\right)^2 \quad (4.9)$$

Da die beiden Gelenke generell eng beieinander liegen, ist es für die Herleitungen einfacher, sie als auf dem selben Platz liegend anzunehmen:

$$e_\beta = e_\zeta = e \quad (4.10)$$

Bei Rotorblättern mit gleicher Steifigkeit im Wurzelbereich in Schlag- wie in Schwenkrichtung (engl. matched stiffness) sind auch die Eigenfrequenzen beim stehenden Rotor identisch

$$\omega_{\beta 0} = \omega_{\zeta 0} \quad (4.11)$$

was zu einer wichtigen Relation zwischen den Eigenfrequenzen im drehenden System führt

$$\nu_\beta^2 = 1 + \nu_\zeta^2 \quad (4.12)$$

Beispiel

Ein typischer Gelenksabstand $e = 0,06$ führt zu $\nu_\zeta^2 = 0,09$, folglich zu $\nu_\zeta = 0,3/\text{rev}$ und zu $\nu_\beta^2 = 1,09$ bzw. $\nu_\beta = 1,045/\text{rev}$.

Beispiel

Die Bo46 mit $e_\zeta = 0,4$ liefert $\nu_\zeta^2 = \frac{3}{2} \frac{0,4}{1-0,4} = 1$, also: $\nu_\zeta = 1/\text{rev}$.

4.3 Die Schwenkbewegung des elastischen Rotorblattes

Eine bessere Modellvorstellung ist, das Rotorblatt als elastischen Balken zu betrachten, der Bewegungen in der Drehebene normal zur radialen Achse ausführt. Es wird ausschließlich die Schwenkbewegung als Freiheitsgrad angenommen und die Kopplungen mit anderen Eigenformen werden später eingeführt. Wie bei der Schlagbewegung werden auch hier radiale Verschiebungen aufgrund der Kinematik oder aufgrund elastischer Dehnungen vernachlässigt. Dieses Modell kann man auch auf gelenkig gelagerte Rotorblätter anwenden, wenn man mehr als nur die Starrblattschwingungsform berechnen will. Die Kräfte am elastischen Balken an der Stelle ρ sind in Abb. 4.2 gegeben (' = d/dy):

Kraft	Formel	Hebelarm um die Stelle y	Kommentar
a) Massenträgheit:	$m' \ddot{v}(\rho)$	$\rho - y$	Aus Beschleunigung
b) Zentrifugalkraft:	$m' \rho \Omega^2$	$v(\rho) \frac{y}{\rho} - v(y)$	Federterm
c) Aerodynamik:	f_x	$\rho - y$	Widerstand

Die Auslenkung in der Drehebene sei mit v bezeichnet und erfolgt normal zu der Balkenposition des Ruhezustandes (in Analogie zur Schlagbewegung). Nun wird das Momentengleichgewicht um eine radiale Stelle y aufgestellt, indem alle Kräfte mit ihrem

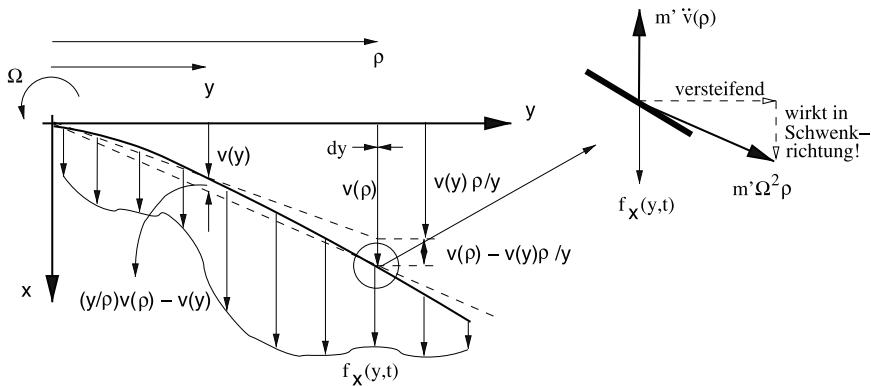


Abb. 4.2 Kräfte und Auslenkungen am schwenkenden Balken

zugehörigen Hebelarm – von der Blattspitze beginnend – bis zur betrachteten Stelle y aufintegriert werden:

$$EI_z v'' = M_z(y) = \int_y^R \left\{ [f_x - m' \ddot{v}(\rho)] (\rho - y) - m' \rho \Omega^2 \left[\frac{y}{\rho} v(\rho) - v(y) \right] \right\} d\rho \quad (4.13)$$

Zum Vergleich: der Term in der rechten eckigen Klammer lautete in der Schlagbewegung: $[w(\rho) - w(y)]$. Der Vorfaktor y/ρ stammt aus der Geometrie der Schwenkbewegung und verringert die Rückstellwirkung der Zentrifugalkraft, ganz analog zur Bewegung des starren Blattes. Für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen ist es vorteilhaft, sich des Leibnitz-Theorems zu bedienen. Gl. 4.13 stellt eine Gleichung der Form

$$\phi = \int_{u_1(y)}^{u_2(y)} f(\rho, y) d\rho \quad (4.14)$$

dar und man sucht eine Form, die nur noch von y abhängt:

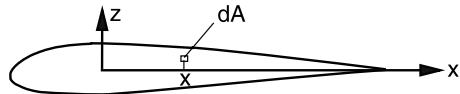
$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \int_{u_1(y)}^{u_2(y)} f' d\rho + u'_2(y) f(u_2(y), y) - u'_1(y) f(u_1(y), y) \quad (4.15)$$

Aus der elementaren Balkenbiegetheorie stammt

$$M_z = EI_z v'' \quad M'_z = S_x \quad M''_z = f_x \quad (4.16)$$

Darin sind M_z das Moment der externen Kräfte von der Blattspitze bis zu der Stelle y , S_x die Scherkraft und f_x die äußere Lastverteilung, wie in der Schlagbiegung bereits gezeigt.

Abb. 4.3 Hauptachsen eines Profils



E ist der Elastizitätsmodul (siehe elastische Schlagbewegung) und I_z ist das Flächenträgheitsmoment um die z -Achse:

$$I_z = \int_{\text{Querschnitt}} x^2 dA \quad (4.17)$$

wobei x und z die Hauptachsen eines Profilquerschnittes seien, siehe Abb. 4.3, und dA ein differentielles Flächenelement des Querschnittes. Wenn man den Ausdruck für das Moment $M_z(y)$ zweimal ableitet und das Theorem von Leibnitz anwendet, so folgt in Verbindung mit dem vorher aufgestellten Momentengleichgewicht von Gl. 4.13

$$(EI_z v'')'' - (Tv')' + m'\ddot{v} - m'\Omega^2 v = f_x(y, t) \quad (4.18)$$

Der letzte Term auf der linken Seite $-m'\Omega^2 v$ hat kein Äquivalent in der entsprechenden Differentialgleichung der Schlagbewegung Gl. 2.31, ansonsten ist der Rest der Gleichung identisch. Darin lautet die an der Stelle y wirkende Zentrifugalkraft

$$T(y) = \int_y^R m'\Omega^2 \rho d\rho \quad (4.19)$$

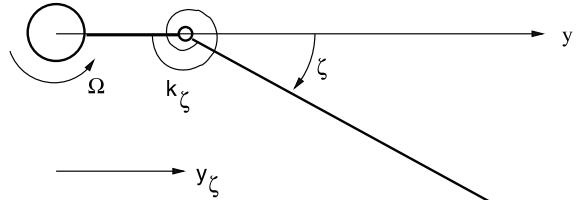
Natürlich kann man diese Gleichung auch genau so wie die Schlagdifferentialgleichung herleiten. Der erste Term stammt von der Steifigkeit des Balkens, der zweite und vierte kommt von der Zentrifugalkraft, wobei der vierte Term $(-m'\Omega^2 v)$ eine Feder in Schwenkrichtung darstellt, die es in der Schlagbewegung nicht gibt. Der dritte Term stellt die Massenträgheit dar und die rechte Seite die Komponente der Luftkraft in der Drehebene. Die Randbedingungen des Balkens sind ganz analog zu denen in der Schlagbewegung.

4.3.1 Dynamik der Schwenkbewegung im rotierenden System

Das Eigenschwingungsverhalten der reinen Schwenkbewegung wird von der homogenen Bewegungsgleichung gewonnen

$$(EI_z v'')'' - (Tv')' + m'\ddot{v} - m'\Omega^2 v = 0 \quad (4.20)$$

Abb. 4.4 Randbedingungen des gelenkig gelagerten Rotorblattes



Die Randbedingungen eines einseitig fest eingespannten Balkens sind

$$\begin{aligned} y = 0: \quad v &= 0 & v' &= 0 \\ y = R: \quad M_z &= EI_z v'' = 0 & S_x &= (EI_z v'')' = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

und für ein gelenkig gelagertes Rotorblatt mit einem Gelenksabstand y_ζ hat man (siehe Abb. 4.4)

$$\begin{aligned} y = y_\zeta: \quad v &= 0 & M_z &= k_\zeta \zeta = k_\zeta v' \\ y = R: \quad M_z &= EI_z v'' = 0 & S_x &= (EI_z v'')' = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Im Folgenden wird nur noch das gelenklose Rotorblatt betrachtet werden. Eine geschlossene Lösung der Differentialgleichung gibt es nur für ein nicht rotierendes Rotorblatt konstanter Eigenschaften wie Masse und Steifigkeit. Beim rotierenden Blatt muss man Näherungsverfahren wie z.B. von Galerkin (Abschn. 2.6), Rayleigh-Ritz (Abschn. 2.7) oder die FEM (Abschn. 2.8) anwenden, um Eigenformen und Eigenfrequenzen zu ermitteln. Diese Verfahren wurden bereits vorgestellt.

4.3.2 Balkenfunktionen

Die analytische Lösung für die Eigenschwingungsformen eines nicht rotierenden Balkens sind für verschiedene Randbedingungen von Felgar und Young 1949 berechnet und tabelliert worden [4]; siehe dazu Kap. 2. Die Differentialgleichung lautet ohne Zentrifugalkräfte ($\Omega = 0 \Rightarrow T = 0$): $(EI_z v'')'' + m' \ddot{v} = 0$. Die Eigenfrequenzen des homogenen Balkens berechnen sich dann aus folgenden Eigenwerten (siehe auch Gl. 2.46)

$$\omega_j = (\lambda R)^2 \sqrt{\frac{EI_z}{m' R^4}} \quad (4.23)$$

Die Balkenfunktionen (= Eigenformen) sind orthogonal zueinander und es gelten die gleichen Beziehungen wie in den Balkenfunktionen der Schlagbewegung:

$$\int_0^R m'(y) \phi_i(y) \phi_j(y) dy = \delta_{ij} M_i \quad \text{mit} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (4.24)$$

sowie

$$\int_0^R \phi_i(y) \left(EI_z(y) \phi_j''(y) \right)'' dy = \delta_{ij} M_i \omega_i^2 \quad (4.25)$$

4.3.3 Berechnung der Eigenformen und -frequenzen mit Hilfe der FEM

In Analogie zur Berechnung der Eigenfrequenzen und -formen der Schlagbewegung im drehenden System kann man auch bei der Schwenkbewegung diese charakteristischen Parameter mit Hilfe der FEM berechnen. Es sind lediglich modifizierte Energieausdrücke zu verwenden und für die kinetische Energie (siehe auch Gl. 2.95) eines Balkenelementes der Länge l folgt

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \int_0^l m' \dot{v}^2 dx \quad (4.26)$$

sowie für die potentielle Energie (siehe auch Gl. 2.97)

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \int_0^l \left[EI_z v'' + T(x) (v')^2 - m' \Omega^2 v^2 \right] dx \quad (4.27)$$

Darin ist x die Elementkoordinate (siehe Abb. 2.15), l die Elementlänge und $' = d/dx$. Der Ausdruck für die kinetische Energie ist also unverändert, während der für die potentielle Energie im Vergleich zur elastischen Schlagbewegung einen zusätzlichen Term aufweist ($-m' \Omega^2 v^2$), der eine „Entsteifung“ (die ebenfalls von der Zentrifugalkraft stammt) darstellt, so dass die Rückstellwirkung der Zentrifugalkraft in der Schwenkbewegung also erheblich geringer als in der Schlagbewegung ist. Somit lauten die Massen- und Steifigkeitsmatrizen der Elemente:

$$\begin{aligned} [\mathbf{m}_{ij}]_{\text{lag}} &= [\mathbf{m}_{ij}]_{\text{flap}} \\ [\mathbf{k}_{ij}]_{\text{lag}} &= [\mathbf{k}_{ij}]_{\text{flap}} - m_i \Omega^2 \begin{bmatrix} \frac{13}{35}l & \frac{11}{210}l^2 & \frac{9}{70}l & -\frac{13}{420}l^2 \\ \frac{11}{210}l^2 & \frac{1}{105}l^3 & \frac{13}{420}l^2 & -\frac{1}{140}l^3 \\ \frac{9}{70}l & \frac{13}{420}l^2 & \frac{13}{35}l & -\frac{11}{210}l^2 \\ -\frac{13}{420}l^2 & -\frac{1}{140}l^3 & -\frac{11}{210}l^2 & \frac{1}{105}l^3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.28)$$

In Abb. 4.5 sind Ergebnisse einer FEM-Rechnung für die Eigenfrequenzen und Eigenformen dargestellt und man braucht meistens 4–10 Elemente. Man braucht mehr Elemente, wenn sehr kleine Eigenfrequenzen im nicht drehenden System berechnet werden sollen ($\nu_\zeta < 0,1$). Man vergleiche mit den Ergebnissen der Schlagbewegung in Abb. 2.19!

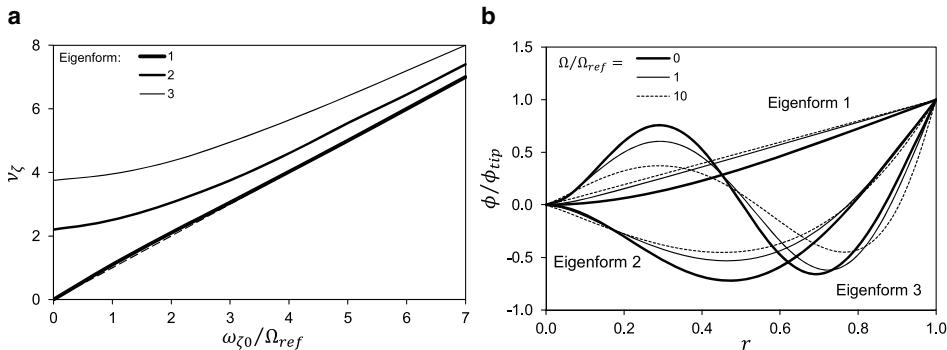


Abb. 4.5 Eigenfrequenzen und -formen der Schwenkbewegung des rotierenden Balkens. **a** Eigenfrequenzen, $\Omega/\Omega_{ref} = 1$, **b** Eigenformen

4.4 Dynamik eines torsionsstarren, elastisch gelagerten Rotorblattes

Dies wird auch starre Torsion (engl. rigid torsion or feather motion) genannt. Dabei wird das Blatt als starr angenommen und es hat nur einen Freiheitsgrad, nämlich den der Drehbewegung um die Steuerachse. Die gesamte Blatt- und Steuersystemelastizität wird als Feder an der Stelle der Steuerstange oder als Drehfeder mit der Steifigkeit k_Θ um die Steuerachse angenommen. Diese Art der Modellierung ist angebracht, da typischerweise beim Rotorblatt die Steifigkeit der Steuerstange (engl. pitch link) und die des Steuersystems kleiner sind als die des Blattes. Als Vorzeichenkonvention wird ein positiver Torsionswinkel $\vartheta = \Theta - \Theta_{con}$ als Aufnicken des Blattes vereinbart. Θ ist der gesamte Einstellwinkel, Θ_{con} der Steuerwinkel (vom engl. control angle) und ϑ der Torsionswinkel. Der prinzipielle Aufbau der starren Torsion ist in Abb. 4.6 mit den darin wirkenden differentiellen Kräften am Radius y dargestellt. Diese sind im Einzelnen:

Moment	Formel	Kommentar
a) Massenträgheit:	$m'x_I \ddot{\Theta}$	Um die Steuerachse, der Hebelarm x_I repräsentiert die Schwerpunktlage hinter der Steuerachse
b) Massenträgheit:	$I'_0 \ddot{\Theta}$	Um die Massenachse
c) Propellermoment:	$I'_\Theta \Omega^2 \Theta$	Um die Steuerachse, wobei $I'_\Theta = I'_0 + m'x_I^2$ das Massenträgheitsmoment um die Steuerachse ist
d) Aerodynamik:	M'_Θ	Um die Steuerachse
e) Federmoment:	$k_\Theta(\Theta - \Theta_{con})$	Um die Steuerachse aufgrund elastischer Steuerstange am Ort der Steuerstange y_{pl}

Das unter c) genannte Propellermoment hat seine Ursache in den Zentrifugalkräften, die das Rotorblatt wieder in seine unausgelenkte Lage drehen wollen. Zum Verständnis sei Abb. 4.6 angeführt. Man beobachte dazu zwei Massenelemente auf beiden Seiten der Steuerachse. Diese werden von der Zentrifugalkraft nach außen gezogen, wobei mit einem

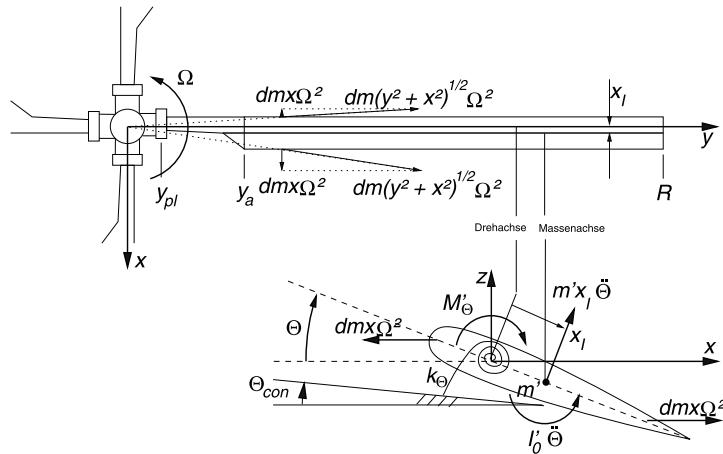


Abb. 4.6 Momente in der Torsionsbewegung des starren Blattes

Einstellwinkel Θ ein Kräftepaar entsteht. Die Komponente in der Profilebene ist $dm\Omega^2x$. Wenn nun das Blatt aufnickt, so wirkt das Kräftepaar der Nicklage entgegen

$$\int_{\text{Querschnitt}} (\Omega^2 x dm)(x\Theta) = I'_\Theta \Omega^2 \Theta \quad (4.29)$$

Dieses Moment wird auch Tennisschlägermoment genannt, da die kreisförmige Bewegung des Tennisschlägers um die Körperachse der Drehbewegung des Rotorblattes entspricht und ein Einstellwinkel des Schlägers diesen in die Drehebene zurückzudrehen versucht. Die Summe der Momente um die Steuerachse liefert

$$\int_{y_{pl}}^R (m'x_I^2\ddot{\Theta} + I'_0\ddot{\Theta} + I'_\Theta \Omega^2 \Theta - M'_\Theta) dy + k_\Theta(\Theta - \Theta_{con}) = 0 \quad (4.30)$$

Mit der Abkürzung für das Gesamtmassenträgheitsmoment um die Steuerachse

$$I_f = \int_{y_{pl}}^R I'_\Theta dy \quad (4.31)$$

erhält man die Differentialgleichung

$$I_f(\ddot{\Theta} + \Omega^2\Theta) + I_f \omega_{\Theta 0}^2(\Theta - \Theta_{con}) = \int_{y_{pl}}^R M'_\Theta dy \quad (4.32)$$

worin $\omega_{\Theta 0} = \sqrt{k_{\Theta}/I_f}$ die Torsionseigenfrequenz der Starrblatttorsion im nicht rotierenden System darstellt. In dimensionsloser Form folgt durch Bezug auf $I_b \Omega^2$:

$$I_f^* \left(\ddot{\Theta}^{**} + \nu_{\Theta}^2 \Theta \right) = \gamma \bar{M}_{\Theta} + I_f^* \left(\frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega} \right)^2 \Theta_{\text{con}} \quad (4.33)$$

Darin ist das dimensionslose aerodynamische Moment enthalten

$$\bar{M}_{\Theta} = \frac{1}{\rho C_{l\alpha} c \Omega^2 R^4} \int_{y_{pl}}^R M'_{\Theta} dy \quad (4.34)$$

sowie das auf das Massenträgheitsmoment der Schlagbewegung (mit zentralem Schlaggelenk) normierte Torsionsträgheitsmoment

$$I_f^* = \frac{I_f}{I_b} \quad (4.35)$$

und ν_{Θ} ist die dimensionslose Eigenfrequenz der Torsionsbewegung im drehenden System:

$$\nu_{\Theta}^2 = 1 + \left(\frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega} \right)^2 \quad (4.36)$$

Während die Torsionseigenfrequenz aufgrund der Steuersystemsteifigkeit im nicht drehenden System normalerweise sehr viel größer als zum Beispiel die Schlageligenfrequenz ist, so ist die Massenträgheit der Torsionsbewegung um Größenordnungen kleiner als die der Schlagbewegung. Falls keine Torsionsfeder angebracht wird (oder die Steuerstange gebrochen ist, also $\omega_{\Theta 0}/\Omega = 0$), so wirkt ausschließlich das Propellermoment als Rückstellfeder und die Eigenfrequenz ist gleich der Drehfrequenz des Rotors ($\omega_{\Theta 0} = \Omega$ bzw. $\nu_{\Theta} = 1/\text{rev}$). Als typischer Wert für ν_{Θ} kann man 4 bis 10/rev annehmen; torsionsweiche Rotoren wie die Bo105 auch geringer (3,6/rev). Der Grund dafür liegt in der wesentlich größeren Torsionssteifigkeit des Profilquerschnittes im Vergleich zur Biegesteifigkeit in Schlägen oder Schwenken, die wegen der auftretenden Biegemomente nicht zu groß sein darf.

Um eine Größenordnung für I_f^* zu erhalten, kann man von einem einfachen Balkenmodell rechteckigen Querschnitts als Ersatz für ein Profil ausgehen, siehe Abb. 4.7. Die

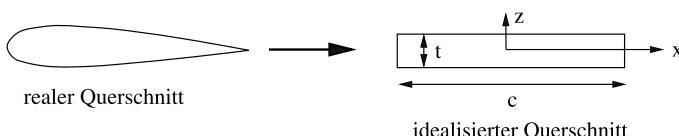


Abb. 4.7 Zur Abschätzung der generalisierten Torsionsmassenträgtheit

Massenverteilung sei homogen und die Dichte sei ρ_m ; ferner sei $x_I = 0$, $t \ll c$ und $m' = \rho_m t c$.

$$\begin{aligned} I'_0 &= \rho_m (I_x + I_z) = \rho_m \left(\frac{ct^3}{12} + \frac{tc^3}{12} \right) \approx \frac{\rho_m tc^3}{12} = \frac{m'c^2}{12} \\ I_f &= \int_0^R I'_0 dy = \frac{m'Rc^2}{12} \\ I_b &= \frac{m'R^3}{3} \\ \Rightarrow \quad I_f^* &= \frac{I_f}{I_b} = \frac{1}{4} \left(\frac{c}{R} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Normalerweise ist das Verhältnis von Profiltiefe zu Radius $c/R \approx 1/20 = 0,05$ (Bo105: $c/R = 0,054$), so dass $I_f^* = 0,00063$ und damit eine sehr kleine Zahl im Vergleich zu $I_\beta^* \approx I_\zeta^* \approx 1$ ist.

$\Theta = \Theta_{\text{con}} + \vartheta$ ist der Gesamteinstellwinkel aus Steuerung Θ_{con} und elastischer Torsion ϑ , so dass die Differentialgleichung für die elastische Torsion, die es zu berechnen gilt (da die Steuerung ja eine Zwangsvorgabe im Sinne einer Fußpunkterregung darstellt), nach Umstellung erhalten wird. Die Torsion wird also sowohl von Luftkräften über M'_Θ als auch über die Steuerung angeregt.

$$\begin{aligned} I_f^* \left(\vartheta + v_\Theta^2 \vartheta \right) &= \gamma \overline{M}_\Theta + I_f^* \left\{ \left[\left(\frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega} \right)^2 - v_\Theta^2 \right] \Theta_{\text{con}} - \Theta_{\text{con}}^{**} \right\} \\ &= \gamma \overline{M}_\Theta - I_f^* \left(\Theta_{\text{con}} + \Theta_{\text{con}}^{**} \right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Als Beispiel für die Anregung über ein Pilotensteuer (kollektive und zyklische Blattverstellung mit 0 und 1/rev) und auch für eine höherharmonische Blattwurzelsteuerung (mit 2 bis N_{HHC} /rev) ist der Steuerwinkel folgendermaßen gegeben:

$$\begin{aligned} \Theta_{\text{con}} &= \Theta_0 + \Theta_{1C} \cos \psi + \Theta_{1S} \sin \psi \\ \Rightarrow \quad \Theta_{\text{con}} + \Theta_{\text{con}}^{**} &= \Theta_0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{\text{con}} &= \sum_{n=2}^{N_{\text{HHC}}} \Theta_{nC} \cos n\psi + \Theta_{nS} \sin n\psi \\ \Rightarrow \quad \Theta_{\text{con}} + \Theta_{\text{con}}^{**} &= \sum_{n=2}^{N_{\text{HHC}}} (1 - n^2) (\Theta_{nC} \cos n\psi + \Theta_{nS} \sin n\psi) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Wie man sieht, kompensieren sich für $n = 1$ die Propellermomente und die Trägheitsmomente, daher verbleibt bei normaler Pilotensteuerung nur das Propellermoment aus dem

Tab. 4.1 Eigenfrequenzen verschiedener Rotorblattanschlussarten

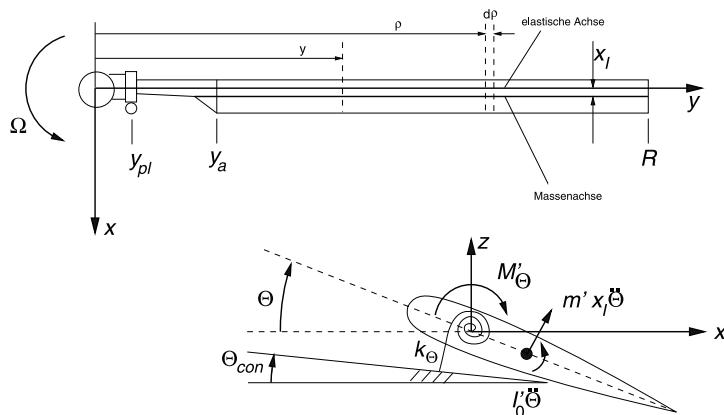
Art	Rotortyp	Bereich	Bo105	XH2-CCR	X-Wing CCR
ν_β	gelenkig	1,02–1,06/rev		1,09/rev	
ν_β	gelenklos	1,08–1,11/rev	1,12/rev		1,74/rev
ν_ζ	gelenkig	0,2–0,4/rev		1,62/rev	
ν_ζ	gelenklos	0,6–0,7/rev	0,7/rev		3,37/rev
ν_Θ	gelenklos	4,0–10,0/rev	3,6/rev	9,10/rev	17,43/rev

Kollektivsteuer. Die typischen Bereiche der dimensionslosen Eigenfrequenzen im drehenden System sind für gelenkige und gelenklose Rotoren in Tab. 4.1 gegeben.

4.5 Elastische Torsion

Eine bessere Modellierung ist, das Rotorblatt als elastischen Balken zu betrachten und es wird dann eine vom Radius abhängige elastische Verwindungsverteilung aufweisen. Es wird wieder nur die reine Torsionsbewegung untersucht und die Koppelterme mit anderen Bewegungsformen außer Acht gelassen. Eine radiale Verschiebung aufgrund Verdrillung wird – in Analogie zur elastischen Schlag- und Schwenkbewegung – ebenfalls vernachlässigt. Die Torsion erfolgt um die elastische Achse und der Einfachheit halber wird diese als eine gerade Linie und auf der Steuerachse liegend angenommen.

Mit der Änderung des Steuerwinkels um Θ an der radialen Stelle ρ , welche aus der elastischen Blattverwindung ϑ (inklusive der elastischen Steuersystemnachgiebigkeit) besteht, kann man wieder das Momentengleichgewicht aufstellen. Dazu sei auf Abb. 4.8 verwiesen. Es wirken folgende differentielle Momente:

**Abb. 4.8** Zum Momentengleichgewicht der elastischen Torsion

Moment aus	Formel	Kommentar
a) Massenträgheitskraft:	$m'x_I\ddot{\Theta}$	Hebelarm x_I um die elastische Achse
b) Massenträgheit:	$I'_0\ddot{\Theta}$	Um die Massenachse
c) Propellermoment:	$I'_\Theta\Omega^2\Theta$	Um die elastische Achse
d) Aerodynamik:	M'_Θ	Um die $c/4$ -Achse
e) Federmoment:	$k_\Theta(\Theta - \Theta_{\text{con}})$	Am Steuerlager

Das Moment an der radialen Stelle y ist dann das Integral aller Momente von der Blattspitze bis dorthin:

$$M(y) = \int_y^R [M'_\Theta - m'x_I^2\ddot{\Theta} - I'_0\ddot{\Theta} - I'_\Theta\Omega^2\Theta] d\rho = \int_y^R [M'_\Theta - I'_\Theta(\ddot{\Theta} + \Omega^2\Theta)] d\rho \quad (4.41)$$

Die Torsionstheorie schlanker Balken liefert

$$M(y) = -GJ\Theta' = -GJ\vartheta' \quad (4.42)$$

Darin ist GJ die Torsions- oder Drillsteifigkeit [N m^2], worin G das Schubmodul [N/m^2] und J die St. Venant'sche Torsionskonstante (auch ein Flächenträgheitsmoment, analog zu I_x in der Schlag- und I_z in der Schwenkbewegung) darstellt [m^4]. Die erste Ableitung davon liefert die äußere Momentenverteilung und mit Anwendung des Leibnitz-Theorems erhält man

$$I'_\Theta(\ddot{\Theta} + \Omega^2\Theta) - (GJ\Theta')' = M'_\Theta \quad (4.43)$$

Der Effekt der Steuerelastizität kann hier durch die Randbedingungen eingebracht werden. So ist der Anschluss der Steuerstange bei einem Radius y_{pl} (vom engl. pitch link) außerhalb der Drehachse des Rotors gelegen und man nimmt an, dass das Blatt von hier bis zur Drehachse torsionsstarr sei. Dann lauten die Randbedingungen für den Fall einer elastischen Steuerstange der Steifigkeit k_Θ [anstelle eines Steuerwinkels Θ_{con} wird ein Moment eingebracht: $M_{SF} = k_\Theta(\Theta - \Theta_{\text{con}})$]:

$$\begin{aligned} y = y_{pl}: \quad GJ\Theta' &= -M_{SF} = -k_\Theta(\Theta - \Theta_{\text{con}}) = -k_\Theta\vartheta(y_{pl}) \\ y = R: \quad GJ\Theta' &= 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Für einen fest eingespannten Balken lauten die Randbedingungen ($\Theta_{\text{con}} = 0$):

$$\begin{aligned} y = 0: \quad \Theta &= 0 \\ y = R: \quad GJ\Theta' &= 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

Für eine starre Steuerstange mit Fußpunkterregung folgt ($k_\Theta \rightarrow \infty \implies \Theta - \Theta_{\text{con}} \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} y = y_{pl}: \quad \Theta &= \Theta_{\text{con}} \\ y = R: \quad GJ\Theta' &= 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

4.5.1 Torsionsdynamik des rotierenden Blattes

Das Eigenschwingungsverhalten wird wieder aus der homogenen Differentialgleichung gewonnen:

$$I'_\Theta (\ddot{\Theta} + \Omega^2 \Theta) - (GJ \Theta')' = 0 \quad (4.47)$$

Durch Nullsetzen der Drehfrequenz $\Omega = 0$ rad/s kann man die Grundgleichung des nicht rotierenden Systems erhalten, aus der die zugehörige Eigenfrequenz $\omega_{\Theta 0}$ folgt.

$$I'_\Theta \ddot{\Theta} - (GJ \Theta')' = 0 \quad (4.48)$$

Damit kann man die Eigenfrequenz im drehenden System ω_Θ leicht ableiten, indem man die Eigenfrequenz beider Gleichungen miteinander vergleicht.

$$\omega_\Theta^2 = \omega_{\Theta 0}^2 + \Omega^2 \quad \Rightarrow \quad v_\Theta = \frac{\omega_\Theta}{\Omega} = \sqrt{\left(\frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega}\right)^2 + 1} \quad (4.49)$$

Darin stellt $\omega_{\Theta 0}$ die Eigenfrequenz des nicht drehenden Rotorblattes und ω_Θ die des drehenden Blattes dar. Die Eigenform bleibt von der Rotation und den damit verbundenen Zentrifugalkräften unberührt und damit konstant im Gegensatz zu denen der Schlag- und Schwenkbewegung. Es sei bemerkt, dass $\omega_{\Theta 0}$ sowohl die Blattsteifigkeit als auch die Steuersystemsteifigkeit beinhaltet.

4.5.2 Balkenfunktionen der Torsion

Die Eigenschwingungsparameter eines gleichförmigen Balkens mit verschiedenen Randbedingungen sind in entsprechender Literatur zur Theorie des schwingenden Balkens bereits berechnet und tabelliert worden. Für einen einseitig eingespannten homogenen Balken können die Eigenformen durch Sinus-Funktionen dargestellt werden, siehe Abb. 4.9b. Man vergleiche mit den Ergebnissen der Schlagbewegung in Abb. 2.19 und denen der Schwenkbewegung in Abb. 4.5! Es fällt auf, dass am Ort der Einspannung nur die Auslenkung, nicht aber die Steigung derselben Null ist. An der Blattspitze ist die Steigung Null, da dort das Moment verschwindet.

$$\phi_j(y) = \sqrt{2} \sin \lambda_j y \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (4.50)$$

mit den Eigenwertparametern

$$(\lambda R)_j = \pi(j - 0,5) \quad (4.51)$$

Die Eigenfrequenz des nicht rotierenden Blattes ergibt sich daraus zu

$$\omega_{j0} = (\lambda R)_j \sqrt{\frac{GJ}{I'_\Theta R^2}} = (\lambda R)_j \sqrt{\frac{GJ}{m' k_m^2 R^2}} \quad (4.52)$$

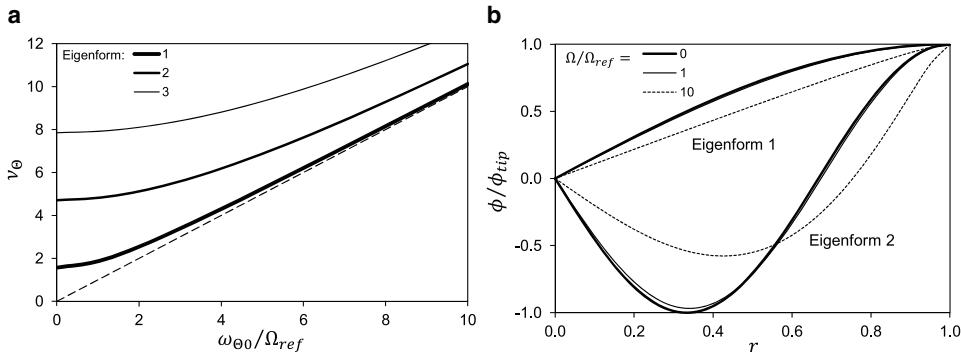


Abb. 4.9 Eigenfrequenzen und Eigenformen der Torsionsbewegung des rotierenden Blattes. **a** Eigenfrequenzen, $\Omega = \Omega_{ref}$, **b** Eigenformen, alle Ω

Darin ist k_m der Trägheitsradius (engl. radius of gyration). Auch hier sind die Eigenformen orthogonal zueinander, es gilt also

$$\int_0^R I'_\Theta \phi_i \phi_j dy = \delta_{ij} I_\Theta \quad \text{mit} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (4.53)$$

und die Eigenfrequenzen des rotierenden Blattes sind

$$\omega_j^2 = \omega_{j0}^2 + \Omega^2 \quad (4.54)$$

Die Eigenfrequenzen des rotierenden Balkens in Abhängigkeit der Eigenfrequenz (bzw. Steifigkeit) des nicht rotierenden Balkens sind in Abb. 4.9a aufgetragen. Je größer die Steifigkeit, um so größer ist auch die Eigenfrequenz. Die Eigenfrequenz des rotierenden Balkens ist wegen des verstetigenden Einflusses der Zentrifugalkraft über das Propellermoment immer größer als die des nicht rotierenden Blattes, ganz analog zu den Eigenfrequenzen in der Schlag- und Schwenkbewegung. Die Eigenformen sind im Betriebsbereich von Hubschrauberrotoren praktisch identisch mit denen des nicht rotierenden Balkens wie in Abb. 4.9b angegeben, im Gegensatz zur Schlag- und Schwenkbewegung, wo die Zentrifugalkraft die nicht rotierenden Eigenformen bereits modifiziert. Erst bei sehr viel größeren Drehfrequenzen werden auch die Torsionsformen selbst verändert.

4.6 Kombinierte Schlag- und Schwenkbewegung

4.6.1 Starres Rotorblatt

Zunächst sei das Blatt als starr angenommen und an einem kombinierten Schlag- und Schwenkgelenk aufgehängt ($y_\beta = y_\zeta$). Dies entspricht zwar nicht immer der Realität,

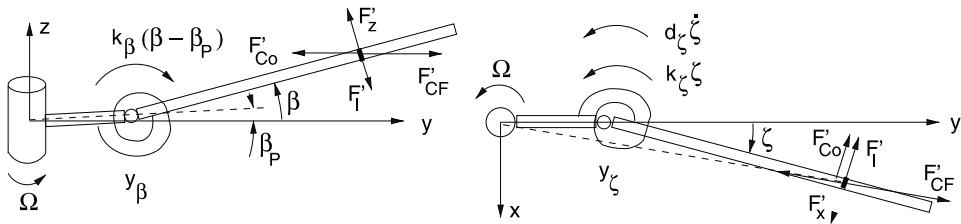


Abb. 4.10 Kräfte der gekoppelten Schlag-Schwenkbewegung

ist aber einfacher zu handhaben und für kleine Abweichungen davon braucht man nur die resultierenden Eigenfrequenzen etwas zu modifizieren. Diese Modellierung ist sowohl bei einem gelenkig gelagerten Rotorblatt mit einer großen Torsionseigenfrequenz als auch bei einem gelenklos gelagerten Rotorblatt brauchbar. Nun sind die Schlag- und Schwenkbewegung durch Coriolis- als auch durch aerodynamische Kräfte gekoppelt. Die Vereinbarung über positive Schlag- und Schwenkwinkel bleibt ungeändert und die verschiedenen angreifenden Kräfte am Radius y sind in Abb. 4.10 dargestellt. Diese sind im Einzelnen:

Kräfte in der Schlagbewegung

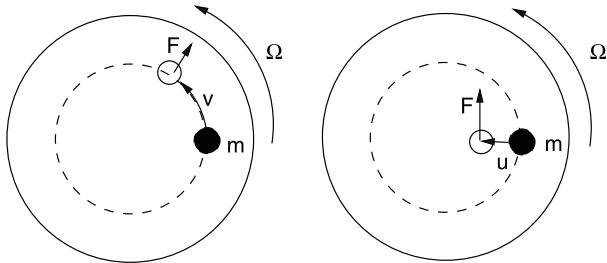
Kraft	Formel	Hebelarm	Kommentar
a) Massenträgheit:	$m'(y - y_\beta)\ddot{\beta}$	$y - y_\beta$	Um das Schlaggelenk
b) Zentrifugalkraft:	$m'y\Omega^2\beta$	$y - y_\beta$	Federterm
c) Corioliskraft:	$2m'\Omega(y - y_\zeta)\dot{\zeta}\beta$	$y - y_\beta$	Darin ist $(y - y_\zeta)\dot{\zeta}$ die Änderung der Umfangsgeschwindigkeit durch eine Schwenkbewegung
d) Aerodynamik:	F'_z	$y - y_\beta$	Auftrieb
e) Federmoment:	$k_\beta(\beta - \beta_P)$	–	Um das Schlaggelenk

Kräfte in der Schwenkbewegung

Kraft	Formel	Hebelarm	Kommentar
a) Massenträgheit:	$m'(y - y_\zeta)\ddot{\zeta}$	$y - y_\zeta$	Um das Schwenkgelenk
b) Zentrifugalkraft:	$m'y\Omega^2(y_\zeta/y)\zeta$	$y - y_\zeta$	Federterm
c) Corioliskraft:	$2m'\Omega(y - y_\beta)\beta\dot{\beta}$	$y - y_\zeta$	Darin ist $(y - y_\beta)\beta\dot{\beta}$ die Radialgeschwindigkeit durch eine Schlagbewegung
d) Aerodynamik:	F'_x	$y - y_\zeta$	Widerstand
e) Federmoment:	$k_\zeta\zeta$	–	Um das Schwenkgelenk

Zunächst sollte man einen Blick auf die Ursache der Corioliskraft werfen. Dazu stelle man sich eine Person auf einer drehenden Scheibe stehend vor, die sich am Radius y befindet, Abb. 4.11. Wenn diese Person auf konstantem Radius in die Drehrichtung läuft, so

Abb. 4.11 Zum Begriff der Corioliskraft



dass die effektive Drehgeschwindigkeit der Person größer wird, dann hat sie mehr Drehmoment als notwendig wäre, um auf dem Radius zu bleiben und wird demzufolge nach außen gezogen, was eine Folge der Corioliskraft ist, die hier in Richtung der Zentrifugalkraft wirkt. Bewegt sich die Person in radialem Richtung, zum Beispiel zur Kreismitte, so wird weniger Drehmoment benötigt als sie hat und daher erfährt die Person eine Winkelbeschleunigung in Drehrichtung durch die sog. Corioliskraft.

$$F'_{Co} = 2m'\Omega v \quad \text{bzw.} \quad 2m'\Omega u \quad (4.55)$$

Darin ist v die Tangentialgeschwindigkeit der Person (im ersten Fall: Schwenkgeschwindigkeit in der Schlaggleichung) bzw. u die Radialgeschwindigkeit (im zweiten Fall: von der Schlaggeschwindigkeit erzeugte Radialgeschwindigkeit in der Schwenkgleichung). In beiden Fällen ist der Ausdruck derselbe und er resultiert aus dem Drehimpulserhaltungssatz. Diese Kraft wurde nach Gaspard Gustave de Coriolis benannt, der sie 1835 herleitete [5]. Die Zunahme der Umfangsgeschwindigkeit v aufgrund einer Schwenkbewegung erzeugt eine Corioliskraft, die wie die Zentrifugalkraft radial nach außen gerichtet ist, folglich wirkt auch nur die Komponente $F_{Co} \sin \beta \approx F_{Co}\beta$ in der Schlagbewegung. Die nach innen gerichtete radiale Geschwindigkeit u aufgrund einer Schlagbewegung wiederum erzeugt eine Corioliskraft in Drehrichtung des Rotors und geht damit in voller Größe in die Schwenkbewegung ein.

$$\begin{aligned} v &= -\frac{d}{dt} [y_\xi + (y - y_\xi) \sin \xi] = -(y - y_\xi) \cos \xi \dot{\xi} \approx -(y - y_\xi) \dot{\xi} \\ u &= \frac{d}{dt} [y_\beta + (y - y_\beta) \cos \beta] = -(y - y_\beta) \sin \beta \dot{\beta} \approx -(y - y_\beta) \beta \dot{\beta} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Nun lautet das Momentengleichgewicht um das Schlaggelenk mit der Vereinfachung $y_\beta = y_\xi$

$$\begin{aligned} \int_{y_\beta}^R & \left[m'(y - y_\beta)^2 \ddot{\beta} + m'y\Omega^2(y - y_\beta)\beta - 2m'(y - y_\beta)^2\Omega\beta\dot{\xi} - F'_z(y - y_\beta) \right] dy \\ & + k_\beta(\beta - \beta_P) = 0 \end{aligned} \quad (4.57)$$

oder auch

$$I_\beta(\ddot{\beta} + v_\beta^2 \Omega^2 \beta - 2\Omega \dot{\zeta} \beta) = \omega_{\beta 0}^2 I_\beta \beta_P + \int_{e_\beta}^1 R^2 F'_z(r - e_\beta) dr \quad (4.58)$$

worin die ungekoppelte dimensionslose Schlag-eigenfrequenz im drehenden System durch

$$v_\beta^2 = 1 + \frac{e_\beta \int_{e_\beta}^1 R^2 m'(r - e_\beta) dr}{I_\beta} + \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} \right)^2 \quad (4.59)$$

bestimmt ist. In analoger Form folgt für das Momentengleichgewicht in der Schwenkbewegung mit der gleichen Vereinfachung $y_\beta = y_\zeta$

$$\begin{aligned} & \int_{y_\zeta}^R \left[m'(y - y_\zeta)^2 \ddot{\zeta} + m' y_\zeta \Omega^2 (y - y_\zeta) \zeta + 2m' (y - y_\zeta)^2 \Omega \beta \dot{\beta} - F'_x (y - y_\zeta) \right] dy \\ & + k_\zeta \zeta = 0 \end{aligned} \quad (4.60)$$

oder auch

$$I_\zeta(\ddot{\zeta} + v_\zeta^2 \Omega^2 \zeta + 2\Omega \beta \dot{\beta}) = \int_{e_\zeta}^1 R^2 F'_x(r - e_\zeta) dr \quad (4.61)$$

worin die ungekoppelte dimensionslose Schwenkeigenfrequenz im drehenden System durch

$$v_\zeta^2 = \frac{e_\zeta \int_{e_\zeta}^1 R^2 m'(r - e_\zeta) dr}{I_\zeta} + \left(\frac{\omega_{\zeta 0}}{\Omega} \right)^2 \quad (4.62)$$

bestimmt ist. Wenn man beide Gleichungen durch $I_b \Omega^2$ dividiert und ferner annimmt, dass näherungsweise $I_\beta \approx I_\zeta \approx I_b$ sei (was für die üblichen kleinen Gelenksabstände auch gut zutrifft), dann erhält man die Bewegungsgleichungen 4.58 und 4.61 in dimensionsloser Form zu

$$\begin{aligned} & \overset{**}{\beta} + v_\beta^2 \beta - 2\beta \overset{*}{\zeta} = \gamma \overline{M}_\beta + \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} \right)^2 \beta_P \\ & \overset{**}{\zeta} + v_\zeta^2 \zeta + 2\beta \overset{*}{\beta} = \gamma \overline{M}_\zeta \end{aligned} \quad (4.63)$$

worin die generalisierten Luftkraftmomente durch folgende Ausdrücke gegeben sind:

$$\begin{aligned} \overline{M}_\beta &= \frac{1}{\rho C_{l\alpha} c R^4 \Omega^2} \int_{e_\beta}^1 R^2 F'_z(r - e_\beta) dr \\ \overline{M}_\zeta &= \frac{1}{\rho C_{l\alpha} c R^4 \Omega^2} \int_{e_\zeta}^1 R^2 F'_x(r - e_\zeta) dr \end{aligned} \quad (4.64)$$

Die Schlag- und Schwenkbewegung sind also sowohl durch Massenkräfte (in Form der Corioliskräfte) als auch durch aerodynamische Kräfte (auf der rechten Seite) gekoppelt. Beide Gleichungen sind aufgrund der Terme $\beta\dot{\beta}$ und $\beta\dot{\zeta}$ nichtlinear und daher schwierig zu lösen, aber man kann sie um einen Referenzzustand (z. B. den Trimmzustand) herum linearisieren. Zum Beispiel sei die resultierende Schlagbewegung

$$\beta_{\text{res}} = \beta_0 + \beta \quad \Rightarrow \quad \overset{*}{\beta}_{\text{res}} = \overset{*}{\beta} \quad \text{und} \quad \overset{**}{\beta}_{\text{res}} = \overset{**}{\beta} \quad (4.65)$$

worin β_0 den Trimmkonuskinkel darstellt und β eine (kleine) dynamische Auslenkung um diesen Zustand herum. Somit erhält man die linearisierten Bewegungsgleichungen (engl. small perturbation equations), indem man die Terme höherer Ordnung wie $\overset{*}{\beta}\dot{\zeta}$ und $\overset{*}{\beta}\beta$ als klein gegenüber den anderen Termen annimmt und daher vernachlässigt.

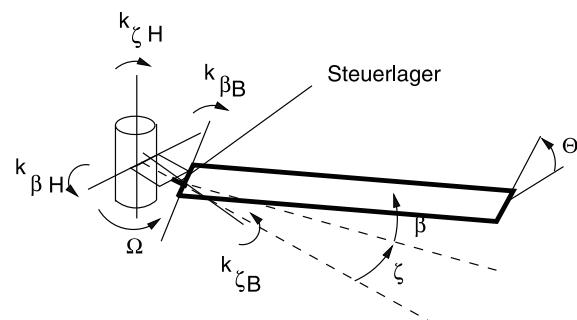
$$\begin{aligned} \overset{**}{\beta} + v_{\beta}^2 \beta - 2\beta_0 \overset{*}{\zeta} &= \gamma \overline{M}_{\beta} + \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} \right)^2 \beta_P \\ \overset{**}{\zeta} + v_{\zeta}^2 \zeta + 2\beta_0 \overset{*}{\beta} &= \gamma \overline{M}_{\zeta} \end{aligned} \quad (4.66)$$

Im Folgenden wird der Vorkonus β_P als konstanter Term der Einfachheit halber weggelassen, der für die Trimmung, aber weniger für die Dynamik darin von Bedeutung ist. Da die aerodynamischen Momente in der Schwenkbewegung \overline{M}_{ζ} sehr viel kleiner als die entsprechenden Momente \overline{M}_{β} in der Schlagbewegung sind (da $C_d \ll C_l$), ist der nichtlineare Term der Corioliskraft in der Schwenkbewegung sehr wichtig, während der entsprechende Term in der Schlagbewegung eine deutlich geringere Rolle spielt.

Beispiel

Die Rotorblatt- (Index B) und Rotorkopfsteifigkeiten (Index H vom engl. hub) seien durch zwei orthogonale Federsysteme repräsentiert, die einerseits am Rotorkopf befestigt sind und andererseits am Steuerlager, siehe Abb. 4.12. Das Blattfedersystem, welches mit dem Kollektivwinkel mitrotiert, produziert einen erheblichen Kreuzkopplungsanteil der Schlagmomente auf die Schwenkbewegung und umgekehrt. Das Rotorkopffedersystem dagegen wird vom Kollektivsteuer nicht beeinflusst und ist orthogonal

Abb. 4.12 Federnmodell für elastischen Rotorkopf und -blattanschluss



zum Rotormast ausgerichtet. Man stelle die Schlag- und Schwenkgleichungen für folgende drei Fälle auf:

- a) Rotorkopf flexibel und Blatt starr
- b) Blatt flexibel und Rotorkopf starr
- c) Beide flexibel

Lösung

- a) Rotorkopf flexibel und Blatt starr:

$$\begin{aligned}\ddot{\beta} + v_\beta^2 \beta - 2\dot{\beta} \dot{\zeta} &= \gamma \overline{M}_\beta \\ \ddot{\zeta} + v_\zeta^2 \zeta + 2\dot{\beta} \dot{\beta} &= \gamma \overline{M}_\zeta \\ v_\beta^2 &= 1 + \frac{k_{\beta H}}{I_\beta \Omega^2} = 1 + \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega}\right)^2 \\ v_\zeta^2 &= \frac{k_{\zeta H}}{I_\beta \Omega^2} = \left(\frac{\omega_{\zeta 0}}{\Omega}\right)^2\end{aligned}$$

- b) Blatt flexibel und Rotorkopf starr:

Mit Hilfe von Abb. 4.12 lassen sich die Beziehungen zwischen dem Schlag- und Schwenkwinkel im Rotorebenensystem (β, ζ) und denen im um den Steuerwinkel Θ gedrehten System (β_1, ζ_1) aufstellen. Zunächst erfolgt die Transformation in das um Θ gedrehte System, in dem die Blattfedern definiert sind. Dort werden die Momente aufgestellt und anschließend in das Rotorkopfsystem um Θ zurücktransformiert, wo man die verkoppelte Beziehung zwischen den Schlag- und Schwenkwinkeln und den Anschlussmomenten in Matrixform aufstellen kann. Aufgrund der Schräglage der Blattfedern hat jede Feder in jedem Moment einen Anteil.

$$\begin{array}{ll}\beta_1 = \beta \cos \Theta - \zeta \sin \Theta & \text{Trafo ins um } \Theta \\ \zeta_1 = \beta \sin \Theta + \zeta \cos \Theta & \text{gedrehte System} \\ M_{\beta 1} = k_{\beta B} \beta_1 & \text{Momente im um } \Theta \\ M_{\zeta 1} = k_{\zeta B} \zeta_1 & \text{gedrehten System} \\ M_\beta = M_{\beta 1} \cos \Theta + M_{\zeta 1} \sin \Theta & \text{Trafo ins ungedrehte} \\ M_\zeta = -M_{\beta 1} \sin \Theta + M_{\zeta 1} \cos \Theta & \text{System}\end{array}$$

$$\begin{bmatrix} M_\beta \\ M_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad \text{Matrixschreibweise}$$

$$\begin{aligned}k_{11} &= k_{\beta B} \cos^2 \Theta + k_{\zeta B} \sin^2 \Theta \\ k_{12} &= k_{21} = (k_{\zeta B} - k_{\beta B}) \sin \Theta \cos \Theta \\ k_{22} &= k_{\beta B} \sin^2 \Theta + k_{\zeta B} \cos^2 \Theta\end{aligned} \quad \text{Koeffizienten}$$

c) Beide flexibel: Anwendung der Kettenregel

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \beta \\ \zeta \end{bmatrix}_{\text{res}} &= \begin{bmatrix} \beta \\ \zeta \end{bmatrix}_{\text{Blatt}} + \begin{bmatrix} \beta \\ \zeta \end{bmatrix}_{\text{Rotorkopf}} \\ \begin{bmatrix} M_\beta \\ M_\zeta \end{bmatrix} &= \mathbf{K}_1 \begin{bmatrix} \beta \\ \zeta \end{bmatrix}_{\text{Blatt}} = \mathbf{K}_2 \begin{bmatrix} \beta \\ \zeta \end{bmatrix}_{\text{Rotorkopf}} \\ \mathbf{K}_{\text{eff}}^{-1} &= \mathbf{K}_1^{-1} + \mathbf{K}_2^{-1} \end{aligned}$$

Nun kann man mit Hilfe der Federsteifigkeitsverhältnisse die Angelegenheit vereinfachen:

$$\begin{aligned} R &= \frac{k_\beta}{k_{\beta B}} = \frac{k_\zeta}{k_{\zeta B}} \\ \frac{k_\beta}{k_{\beta H}} &= 1 - R = \frac{k_\zeta}{k_{\zeta H}} \\ \mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} \frac{k_\beta \cos^2 \Theta + k_\zeta \sin^2 \Theta}{R} & \frac{(k_\zeta - k_\beta) \sin \Theta \cos \Theta}{R} \\ \frac{(k_\zeta - k_\beta) \sin \Theta \cos \Theta}{R} & \frac{k_\beta \sin^2 \Theta + k_\zeta \cos^2 \Theta}{R} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} \frac{k_\beta}{1-R} & 0 \\ 0 & \frac{k_\zeta}{1-R} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{\text{eff}} &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} k_\beta + R(k_\zeta - k_\beta) \sin^2 \Theta & \frac{R}{2}(k_\zeta - k_\beta) \sin 2\Theta \\ \frac{R}{2}(k_\zeta - k_\beta) \sin 2\Theta & k_\zeta - R(k_\zeta - k_\beta) \sin^2 \Theta \end{bmatrix} \\ \Delta &= 1 + R(1 - R) \frac{(k_\zeta - k_\beta)^2}{k_\beta k_\zeta} \sin^2 \Theta \end{aligned}$$

4.6.2 Elastisches Rotorblatt

Nun wird das Rotorblatt als elastischer Balken betrachtet, der gleichzeitig in der Drehebene als auch normal dazu Bewegungen ausführt. Ferner wird angenommen, dass die Kräfte an der Balkenhauptachse angreifen und es keine strukturelle Kopplung zwischen den Bewegungen gibt. Gemäß Abb. 4.13 treten folgende Kräfte am Radius ρ auf und erzeugen ein Moment bezüglich der betrachteten Stelle y :

Kräfte in der Schlagbewegung

Kraft	Formel	Hebelarm	Kommentar
a) Massenträgheit:	$F'_l = m' \ddot{w}(\rho)$	$\rho - y$	Aus Beschleunigung
b) Zentrifugalkraft:	$F'_{CF} = m' \rho \Omega^2$	$w(\rho) - w(y)$	Federterm
c) Corioliskraft:	$F'_{Co} = 2m' \Omega \dot{v}(\rho)$	$w(\rho) - w(y)$	Aus der Schwenkbewegung
d) Aerodynamik:	F'_z	$\rho - y$	Auftrieb

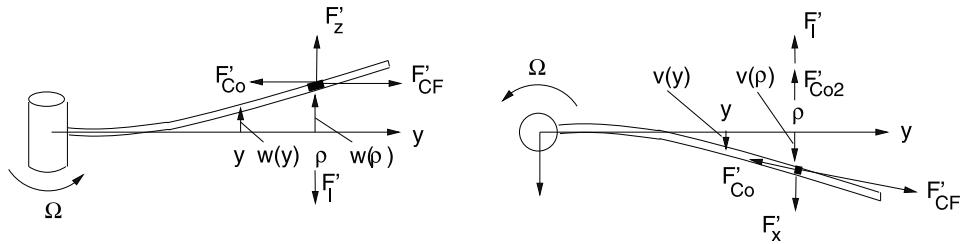


Abb. 4.13 Kräfte in der elastischen Schlag-Schwenkbewegung

Das Momentengleichgewicht um die Stelle y liefert:

$$M'_x(y) = \int_y^R [F'_z - m' \ddot{w}(\rho)](\rho - y) - [m' \Omega^2 \rho - 2m' \Omega \dot{v}(\rho)][w(\rho) - w(y)] d\rho \quad (4.67)$$

Kräfte in der Schwenkbewegung

Kraft	Formel	Hebelarm	Kommentar
a) Massenträgheit:	$F'_I = m' \ddot{v}(\rho)$	$\rho - y$	Aus Beschleunigung
b) Zentrifugalkraft:	$F'_{CF} = m' \rho \Omega^2$	$\frac{y}{\rho} v(\rho) - v(y)$	Federterm
c) Corioliskraft:	$F'_{Co} = 2m' \Omega \dot{v}(\rho)$	$v(\rho) - v(y)$	Aus Schwenkbewegung
d) Corioliskraft:	$F'_{Co2} = 2m' \Omega \dot{u}(\rho)$	$\rho - y$	Aus Schlagbewegung
e) Aerodynamik:	F'_x	$\rho - y$	Widerstand

In der Schwenkbewegung ist die radiale Verschiebung u und damit auch die radiale Verschiebungsgeschwindigkeit \dot{u} von der Schlagbewegung verursacht. Die zweite Corioliskraft resultiert aus dieser radialen Verkürzung $\dot{u}(\rho)$ des Blattes, während die erste aus der Schwenkgeschwindigkeit $\dot{v}(\rho)$ resultiert. Die radiale Verkürzung u kann aus der Kinetik der Schlag- und Schwenkauslenkung berechnet werden, wenn man eine elastische Dehnung des Blattes vernachlässigt. Sie ist das Integral über die Quadrate der lokalen Gradienten der Auslenkung ($\Delta y/R = 1 - \cos w' \approx 1 - (1 - w'^2/2) = w'^2/2$) und in gleicher Form resultiert eine radiale Verschiebung aufgrund einer Schwenkauslenkung. Es folgt

$$u(\rho) = -\frac{1}{2} \int_0^\rho (v'^2 + w'^2) dy \quad (4.68)$$

was eine radiale Geschwindigkeit

$$\dot{u}(\rho) = - \int_0^\rho (v' \dot{v}' + w' \dot{w}') dy \quad (4.69)$$

und eine Kraft in der Schwenkebene von $F'_{Co2} = 2m'\Omega\dot{u}(\rho)$ verursacht. Das Momentengleichgewicht um die Stelle y liefert:

$$M'_z(y) = \int_y^R \left\{ [F'_x - m'\ddot{v}(\rho)](\rho - y) - m'\Omega^2\rho \left[\frac{y}{\rho} v(\rho) - v(y) \right] + 2m'\Omega\dot{v}(\rho)[v(\rho) - v(y)] - 2m'\Omega \left[\int_0^\rho (v'\dot{v}' + w'\dot{w}') dy \right] (\rho - y) \right\} d\rho \quad (4.70)$$

Beide Momente $M_z(y)$ und $M_x(y)$ werden nun zweimal nach y differenziert und gemäß der elementaren Balkenbiegetheorie den entsprechenden Ausdrücken der Elastizitätsmodule und Biegegradienten gleichgesetzt:

$$M''_x = (EI_x w'')'' \quad \text{und} \quad M''_z = (EI_z v'')'' \quad (4.71)$$

Mit Hilfe des zuvor genannten Leibnitz-Theorems kann man dann die Gleichung für die Schlagbewegung herleiten

$$(EI_x w'')'' + m'\ddot{w} - (w'T(y))' + \left(w' \int_y^R 2m'\Omega\dot{v} d\rho \right)' = F'_z \quad (4.72)$$

$$T(y) = \int_y^R m'\Omega^2\rho d\rho$$

und für die Schwenkbewegung folgt

$$(EI_z v'')'' + m'\ddot{v} - (v'T(y))' - m'\Omega^2v + \left(v' \int_y^R 2m'\Omega\dot{v} d\rho \right)' + 2m'\Omega \int_0^y (v'\dot{v}' + w'\dot{w}') d\rho = F'_x \quad (4.73)$$

Die Terme $(w' \int \dots \dot{v} d\rho)'$ und $(v' \int \dots \dot{v} d\rho)'$ in den vorangegangenen Gleichungen stellen Corioliskräfte dar, während der Term $-m'\Omega^2v$ aus Zentrifugalkräften stammt, entsteifend wirkt und in der Gleichung für die Schlagbewegung nicht enthalten ist. Nun wird mit $m'_0\Omega^2R$ dividiert, um die Gleichungen dimensionslos zu machen. Die neuen dimensionslosen Auslenkungen sind $\xi = v/R$, $\eta = w/R$ und $r = y/R$. Dann lauten obige Bewegungsgleichungen mit $' = d/dr$, $\mu_m = m'/m'_0$, $\mu_{Ex} = EI_x/EI_{x0}$,

$\mu_{Ez} = EI_z/EI_{z0}$, $v_{x0}^2 = EI_{x0}/(m'_0\Omega^2 R^4)$ und $v_{z0}^2 = EI_{z0}/(m'_0\Omega^2 R^4)$:

$$\begin{aligned} v_{x0}^2 (\mu_{Ex}\eta'')'' + \mu_m \eta^{**} + 2 \left(\eta' \int_r^1 \mu_m \xi^* dr \right)' - \left(\eta' \int_r^1 \mu_m r dr \right)' &= \frac{F'_z}{m'_0 \Omega^2 R} \\ v_{z0}^2 (\mu_{Ez}\xi'')'' + \mu_m \left(\xi^{**} - \xi \right) - \left(\xi' \int_r^1 \mu_m r dr \right)' + 2 \left(\xi' \int_r^1 \mu_m \xi^* dr \right)' \\ + 2\mu_m \int_0^r \left(\xi'^* \xi^{**'} + \eta'^* \eta^{**'} \right) dr &= \frac{F'_x}{m'_0 \Omega^2 R} \end{aligned} \quad (4.74)$$

Die Randbedingungen lauten für ein gelenkloses Rotorblatt

$$\begin{aligned} y = 0: \quad v = w = 0 \quad v' = w' = 0 \\ y = R: \quad EI_z v'' = EI_x w'' = 0 \quad (EI_z v'')' = (EI_x w'')' = 0 \end{aligned} \quad (4.75)$$

Mit Hilfe dieser Randbedingungen können die gekoppelten Schlag-Schwenk-Bewegungs-gleichungen gelöst werden. Wenn eine Änderung im Steuerwinkel dazukommt, so stellt dies eine weitere Kopplung dar, die mit hinzugenommen werden muss. Dieses wird später unter der verkoppelten Schlag-, Schwenk- und Torsionsbewegung behandelt werden.

4.7 Kombinierte Schlag- und Torsionsbewegung

4.7.1 Starres Rotorblatt

Das Rotorblatt wird hier zunächst wieder als starr angenommen und hat zwei Freiheitsgrade, die Schlag- und Torsionsbewegung. Somit wird ein gelenkig gelagertes Blatt mit Steuersystemelastizität modelliert. Ferner wird angenommen, dass das Drehgelenk für die Steuerung außerhalb des Schlaggelenkes liegt und eine Schlagbewegung keine Änderung des Steuerwinkels hervorruft, also keine δ_3 -Kopplung vorliegt. Diese Geometrie sowie die in der Profilebene wirkenden Kräfte sind in Abb. 4.14 dargestellt.

Kräfte in der Schlagbewegung

Kraft	Formel	Hebelarm	Kommentar
a) Massenträgheit:	$F'_I = m'(y - y_\beta)\ddot{\beta}$	$y - y_\beta$	Aus der Schlagbewegung
b) Massenträgheit:	$m'x_I\ddot{\Theta}$	$y - y_\beta$	Aus der Torsionsbewegung
c) Zentrifugalkraft:	$F'_{CF} = m'y\Omega^2$	$(y - y_\beta)\beta - x_I\Theta$	Aus der Schlaglage
d) Aerodynamik:	F'_z	$y - y_\beta$	Auftrieb
e) Federmoment:	$k_\beta(\beta - \beta_P)$		

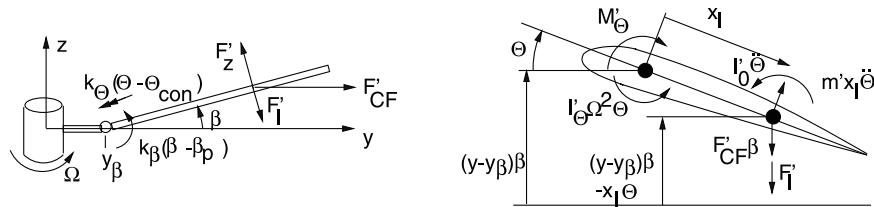


Abb. 4.14 Zur gekoppelten Schlag-Torsionsbewegung des starren Blattes

In c) wird mit dem Hebel x_I eine geringe Rückkopplung der Torsion in die Schlagbewegung erzeugt.

Kräfte in der Torsionsbewegung

Kraft	Formel	Hebelarm	Kommentar
a) Massenträgheit:	$m'x_I\ddot{\Theta}$	x_I	Aufgrund eines Abstandes der Massen- von der Steuerachse
b) Massenträgheit:	$I'_0\ddot{\Theta}$	–	Moment um die Massenachse
c) Massenträgheit:	$F'_I = m'(y - y_\beta)\ddot{\beta}$	x_I	Aus der Schlagbewegung
d) Propellermoment:	$I'_\Theta\Omega^2\Theta$	–	Aus Zentrifugalkräften
e) Zentrifugalkraft:	$F'_{CF}\beta = m'y\Omega^2\beta$	x_I	Aus Zentrifugalkräften
f) Corioliskraft:	$F'_{Co} = 2m'\Omega(y - y_\beta)\beta\dot{\beta}$	$x_I\Theta$	Aus der Schlagbewegung
g) Aerodynamik:	M'_Θ	–	Nickmoment
h) Federmoment:	$k_\Theta(\Theta - \Theta_{con})$	–	Aus der Steuersteifigkeit

Insbesondere wird in c) mit dem Hebel x_I eine wichtige Rückkopplung der Schlagbewegung und in e) eine wichtige Rückkopplung der Zentrifugalkraft in Verbindung mit der Schlaglage in die Torsion erzeugt. Das Coriolismoment aus der Schlagbewegung wird wegen höherer Ordnung meist weggelassen. Das Momentengleichgewicht um das Schlaggelenk liefert

$$\int_{y_\beta}^R \left[m'(y - y_\beta)^2\ddot{\beta} - m'x_I(y - y_\beta)\ddot{\Theta} + m'y\Omega^2[(y - y_\beta)\beta - x_I\Theta] - F'_z(y - y_\beta) \right] dy + k_\beta(\beta - \beta_P) = 0 \quad (4.76)$$

Das Momentengleichgewicht um die Steuerachse liefert an der Stelle des Steuerlagers

$$\int_{y_{pl}}^R \left[(I'_0 + m'x_I^2)\ddot{\Theta} - \overbrace{m'x_I(y - y_\beta)\ddot{\beta}}^{\text{neu}} + I'_\Theta\Omega^2\Theta - M'_\Theta - \overbrace{m'y\Omega^2\beta x_I}^{\text{neu}} \right] dy + k_\Theta(\Theta - \Theta_{con}) = 0 \quad (4.77)$$

Wieder empfiehlt es sich, diese Gleichungen dimensionslos zu machen, indem sie auf $I_b \Omega^2$ bezogen werden. Dabei wird vereinfachend ein kleiner Schlaggelenksabstand angenommen, so dass in der Schlagbewegung $(y - y_\beta)\ddot{\Theta} \approx y\ddot{\Theta}$ ist und analog in der Torsionsbewegung $(y - y_\beta)\ddot{\beta} \approx y\ddot{\beta}$. Außerdem wird $\dot{I}_\beta = I_\beta/I_b \approx 1$ gesetzt. Man erhält dann die gekoppelten Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} + \nu_\beta^2 \beta - \dot{I}_x \left(\ddot{\Theta} + \Theta \right) &= \gamma \overline{M}_\beta + \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} \right)^2 \beta_P \\ \dot{I}_f \left(\ddot{\Theta} + \nu_\Theta^2 \Theta \right) - \dot{I}_x \left(\ddot{\beta} + \beta \right) &= \gamma \overline{M}_\Theta + \dot{I}_f \left(\frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega} \right)^2 \Theta_{\text{con}} \end{aligned} \quad (4.78)$$

Darin ist \dot{I}_x mit dem Abstand der Massen- von der Steuerachse x_I verbunden und stellt einen wichtigen Koppelfaktor dar; \overline{M}_β und \overline{M}_Θ sind die dimensionslosen aerodynamischen Schlag- und Torsionsmomente.

$$\begin{aligned} \dot{I}_x &= \frac{I_x}{I_b} = \frac{1}{I_b} \int_{e_{pl}}^1 m' R^2 r x_I \, dr \\ \overline{M}_\beta &= \frac{1}{\rho C_{l\alpha} c \Omega^2 R^4} \int_{e_\beta}^1 R^2 F'_z(r - e_\beta) \, dr \\ \overline{M}_\Theta &= \frac{1}{\rho C_{l\alpha} c \Omega^2 R^4} \int_{e_{pl}}^1 R M'_\Theta \, dr \end{aligned} \quad (4.79)$$

Da insbesondere der Auftrieb eine Funktion des Blatteinstellwinkels ist, existiert über die aerodynamischen Kräfte eine wichtige Verkopplung der Torsion mit der Schlagbewegung. $e_{pl} = y_{pl}/R$ ist die dimensionslose radiale Position des Steuerlagers (Anschluss des Steuerhorns, engl. pitch arm, an die Steuerstange, engl. pitch link, als Verbindung zur Taumelscheibe, engl. swash plate). Die Gleichungen sind durch Massenträgheits- und Zentrifugalkraftterme gekoppelt. Wenn die Massenachse auf die Steuerachse fällt, so ist $\dot{I}_x = 0$ und diese Kopplung über Massenkräfte verschwindet, so dass Schlag- und Torsionsbewegung entkoppelt werden können; die Kopplung in den Luftkräften bleibt natürlich bestehen. Hierin liegt ein Grund, warum die Hersteller versuchen, die Massenachse (also den Schwerpunkt) exakt auf die Steuerachse zu bringen. Um ein Gefühl für die Größenordnung dieser Koppelgröße zu bekommen, kann man von gleichförmigen Blättern ausgehen. Dann ist

$$\dot{I}_x = x_I \frac{\frac{m' R^2}{2}}{\frac{m' R^3}{3}} = \frac{3}{2} \frac{x_I}{R} = \frac{3}{2} \frac{x_I}{c} \frac{c}{R} \quad (4.80)$$

Lässt man eine Abweichung der Massenachse von nur 1 % der Profiltiefe zu ($x_I/c = 0,01$) und nimmt ein typisches Verhältnis $R/c = 20$ an, so folgt $\overset{*}{I}_x = 0,00075$, eine sehr kleine Zahl, die im Vergleich zu den restlichen Termen der Schlagbewegung der Größenordnung 1 vernachlässigbar ist. In der Torsionsbewegung aber, wo auch $\overset{*}{I}_f$ sehr klein ist (es wurde bei der isolierten Betrachtung der Torsion $\overset{*}{I}_f = (1/4)(c/R)^2 = 0,00063$ errechnet), spielt dieser Term jedoch eine sehr wichtige Rolle. Somit lassen sich die Gleichungen weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned} \overset{**}{\beta} + v_\beta^2 \beta &= \gamma \overline{M}_\beta + \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} \right)^2 \beta_P \\ \overset{*}{I}_f \left(\overset{**}{\Theta} + v_\Theta^2 \Theta \right) - \overset{*}{I}_x \left(\overset{**}{\beta} + \beta \right) &= \gamma \overline{M}_\Theta + \overset{*}{I}_f \left(\frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega} \right)^2 \Theta_{\text{con}} \end{aligned} \quad (4.81)$$

Die Schlagbewegung lässt sich also entkoppelt betrachten, während die Torsionsbewegung von Massenkräften der Schlagbewegung beeinflusst wird, wenn $x_I \neq 0$ ist. Aber: Θ und $\dot{\Theta}$ beeinflussen die Auftriebskraft, gehen daher direkt in M_β ein und damit existiert auch in der Schlagbewegung immer eine Kopplung mit der Torsion über die aerodynamischen Kräfte.

4.7.2 Elastisches Rotorblatt

Beispiel

Man stelle die Bewegungsgleichungen und die Randbedingungen eines gelenkig angeschlossenen elastischen Rotorblattes auf, wobei Schlaggelenk und Steuerstangenanschluss am selben Ort seien.

Lösung

Die Schlagbiegegleichung lautet mit den zugehörigen Randbedingungen:

$$\begin{aligned} (EIw'')'' - (Tw')' + m'\ddot{w} - m'x_I\ddot{\Theta} + \left[(y\Theta)' \int_y^R m'\Omega^2 x_I d\rho \right]' &= f_z(y, t) \\ y = y_\beta: \quad w = 0 \quad EIw'' = k_\beta w' \\ y = R: \quad EIw'' = 0 \quad (EIw'')' = 0 \end{aligned}$$

Für die Torsionsgleichung erhält man nebst zugehörigen Randbedingungen:

$$\begin{aligned} (GJ\Theta')' + I'_\Theta \ddot{\Theta} + I'_\Theta \Omega^2 \Theta - m'x_I \ddot{w} + y \left(w' \int_y^R m'\Omega^2 x_I d\rho \right)' &= M'_\Theta(y, t) \\ y = y_{pl}: GJ\Theta' = -k_\Theta(\Theta - \Theta_{\text{con}}) \quad y = R: GJ\Theta' = 0 \end{aligned}$$

4.8 Die Schlag-Torsionskopplung (δ_3 -Effekt)

Unter Schlag-Torsionskopplung (engl. pitch-flap coupling) versteht man eine kinematische Rückkopplung der Schlagbewegung auf den Steuerwinkel, also die Torsionsbewegung des Blattes. Diese Art der Kopplung spielt eine wichtige Rolle sowohl in der Flugstabilität und den Flugeigenschaften des Hubschraubers als auch in der aeroelastischen Stabilität des Rotorblattes. Es gibt viele Wege, eine Schlag-Torsionskopplung zu erzeugen.

- a) Ein schräg liegendes Schlaggelenk (engl. skewed hinge), siehe Abb. 4.15a.

Wenn das Schlaggelenk nicht normal zur Blattachse verläuft, so ist eine Schlagbewegung automatisch mit einer Änderung im Einstellwinkel verbunden. Diese beträgt

$$\Delta\Theta = -\tan \delta_3 \beta = -k_{p\beta} \beta \quad (4.82)$$

worin δ_3 der Einbauwinkel des Schlaggelenkes ist. Diese Konstruktion wird oft bei Heckrotoren verwendet (Beispiel Bo105: $\delta_3 = 45^\circ \Rightarrow \Delta\Theta = -\beta$). Eine umgekehrte Wirkung kann man demzufolge durch eine Schräglage in die andere Richtung erzielen.

- b) Position der Steuerstange, siehe Abb. 4.15b.

Ein anderer Weg, eine Schlag-Torsionskopplung zu erzielen, ist, die Steuerstange radial außerhalb der Schlaggelenksachse zu positionieren. Der Steuerwinkel des Blattes wird durch eine Vertikalbewegung der Steuerstange verursacht. Wenn nun die Steuerstange nicht auf der Schlaggelenksachse liegt, so wird ein virtuelles Schlaggelenk

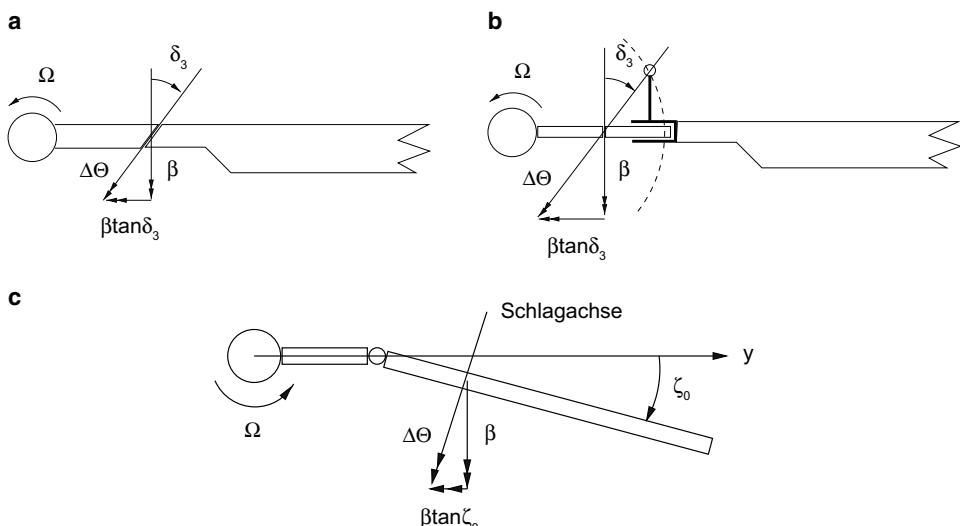


Abb. 4.15 Erzeugung einer Schlag-Torsionskopplung. **a** schräg liegendes Schlaggelenk **b** radiale Position der Steuerstange **c** Wirkung der Schwenkgelenkposition auf die Schlag-Torsionskopplung

gebildet, das schief liegt und somit eine Schlag-Torsionskopplung erzeugt. Auch hier stellt der Winkel des virtuellen Gelenkes den δ_3 -Winkel dar und es gilt Gl. 4.82. Eine umgekehrte Wirkung erzielt man, indem die Steuerstange auf der anderen Seite des Blatthalses angeschlossen wird.

- c) Position des Schwenkgelenkes, siehe Abb. 4.15c.

Wenn das Schlaggelenk radial außerhalb des Schwenkgelenkes liegt, so kann man auch damit einen δ_3 -Effekt erzielen, der proportional zur stationären Schwenkauslenkung ist. Eine Schlagbewegung resultiert in einer Steuerwinkeländerung, da auch hier das effektive Schlaggelenk schief liegt:

$$\delta_3 = \zeta_0 \quad (4.83)$$

Es sei angemerkt, dass diese Art der Kopplung auch bei gelenklosen Rotoren möglich ist, indem man die Steifigkeitsverteilung des Blatthalses so hintrimmt, dass das effektive Schlaggelenk außerhalb des effektiven Schwenkgelenkes liegt. Dennoch ist diese Kopplung recht schwach, da der mittlere Schwenkwinkel recht klein ist.

- d) Verwendung der Regelungstechnik

Mit Hilfe eines Reglers, der die gemessene Schlagbewegung auf den Steuerwinkel rückkoppelt (engl. feedback controller), kann man jeden gewünschten Wert einer Schlag-Torsionskopplung erhalten, wobei $k_{p\beta}$ die Reglerverstärkung darstellt. Um dies bei mehrblättrigen Rotoren ($N > 3$) zu verwirklichen, muss jedoch der Aktuator im rotierenden System sein oder man braucht mehrere Taumelscheiben mit je maximal drei Blättern. Man braucht also Sensoren im drehenden System und eine Daten- und Energieversorgung zum nicht drehenden System, in dem sich auch die Regler selbst befinden. Dies ist sehr aufwändig und teuer, die Reglercharakteristik kann aber jeder Flugsituation angepasst werden.

Der Faktor $k_{p\beta}$ stellt die Schlag-Torsionskopplung dar und ist positiv definiert, wenn ein hochschlagendes Blatt ein Abnicken verursacht, was Luftkräfte erzeugt, die der Schlagbewegung entgegen wirken. Dies stellt für die Schlagbewegung eine aerodynamische Feder dar (die Kraft ist proportional zur Auslenkung), weil ein verkleinerter Anstellwinkel weniger Auftrieb bedeutet und damit eine Rückstellkraft (= Federkraft) erzeugt.

Für die Berechnung der Schlagbewegung im Schwebeflug inklusive Schlag-Torsionskopplung wird ein gelenkig angeschlossenes, starres Rotorblatt angenommen. Ferner sei sowohl der Steuerwinkel als auch der Durchfluss gleichförmig. Die Bewegungsgleichung im Schwebeflug lautet:

$$\ddot{\beta} + \frac{\gamma}{8}\dot{\beta} + v_\beta^2\beta = \frac{\gamma}{8}\Theta - \frac{\gamma}{6}\lambda \quad (4.84)$$

Unter Einfluss einer Schlag-Torsionskopplung wird der Steuerwinkel durch den Schlagwinkel verändert.

$$\Theta = \Theta_{\text{con}} + \Delta\Theta = \Theta_{\text{con}} - k_{p\beta}\beta \quad (4.85)$$

Also lautet die Bewegungsgleichung mit Schlag-Torsionskopplung

$$\ddot{\beta}^{**} + \frac{\gamma}{8}\dot{\beta}^* + \left(v_{\beta}^2 + \frac{\gamma}{8}k_{p\beta}\right)\beta = \frac{\gamma}{8}\Theta_{\text{con}} - \frac{\gamma}{6}\lambda \quad (4.86)$$

und die neue effektive Schlageigenfrequenz im drehenden System ist (Index e von effektiv)

$$v_{\beta e}^2 = v_{\beta}^2 + \frac{\gamma}{8}k_{p\beta} \quad \Rightarrow \quad v_{\beta e} = \sqrt{1 + \frac{3}{2}\frac{e_{\beta}}{1-e_{\beta}} + \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega}\right)^2 + \frac{\gamma}{8}k_{p\beta}} \quad (4.87)$$

Die Schlag-Torsionskopplung hat also einen direkten Einfluss auf die Schlageigenfrequenz im drehenden System. Durch einen negativen δ_3 -Winkel ist es auch möglich, diese Eigenfrequenz auf Werte unter 1 zu bringen.

Beispiel

Durch die Schräglage δ_3 des Schlaggelenkes konnte die Schlageigenfrequenz im rotierenden System um 25 % gesenkt werden. Man berechne den Winkel dieser Schräglage für einen Rotor mit einer Lockzahl von $\gamma = 8$ und einem Abstand des Schlaggelenkes von $e_{\beta} = 6\%$ des Rotorradius (siehe Abb. 4.15).

Lösung

Unter Einfluss einer Schlag-Torsionskopplung folgt

$$\begin{aligned} v_{\beta}^2 &= 1 + \frac{3}{2}e_{\beta} = 1,09 \\ v_{\beta e}^2 &= 0,75^2 v_{\beta}^2 = v_{\beta}^2 + \frac{\gamma}{8}k_{p\beta} \\ k_{p\beta} &= \frac{8}{\gamma}v_{\beta}^2(0,75^2 - 1) = -0,4769 = \tan \delta_3 \\ \delta_3 &= -25,5^\circ \end{aligned}$$

Somit liegt eine negative Schräglage des Schlaggelenkes vor, da die Schlageigenfrequenz gesenkt und nicht erhöht wurde.

Im Allgemeinen nutzt man den δ_3 Effekt jedoch, um die Schlageigenfrequenz zu erhöhen und somit das Gesamtsystem Rotor effektiv zu verstiften. Beim Heckrotor, der nur eine kollektive Blattverstellung hat, dient das dazu, die Amplitude der Schlagbewegung vor allem bei hohen Fortschrittsgraden in moderaten Grenzen zu halten.

4.9 Schwenk-Torsionskopplung (δ_4 -Effekt)

Die Schwenk-Torsionskopplung (engl. pitch-lag coupling) ist eine mechanische Rückkopplung der Schwenkbewegung auf den Einstellwinkel des Rotorblattes.

$$\Delta\Theta = -k_{p\zeta}\zeta \quad (4.88)$$

Darin stellt $k_{p\zeta}$ die Schwenk-Torsionskopplung dar und ist positiv, wenn eine Schwenkbewegung nach hinten ein Abnicken des Blattes bewirkt und damit den Anstellwinkel und folglich auch den Widerstand verringert. Diese Kopplung hat einen wichtigen Einfluss auf die aeroelastische Stabilität des Rotorblattes, insbesondere bei gelenk- und lagerlosen Rotorsystemen, die oft in einem Teil der Flugveloppe aeromechanisch instabil sind. Auch hier gibt es verschiedene Wege, diese Kopplung zu erreichen.

- a) Durch ein schief liegendes Schwenkgelenk, siehe Abb. 4.16a.

Wenn das Schwenkgelenk nicht normal zur Blattachse verläuft, so verursacht eine Schwenkbewegung eine Änderung des Einstellwinkels der Form

$$\begin{aligned} \Delta\Theta &= -\tan\delta_4\zeta \\ k_{p\zeta} &= \tan\delta_4 \end{aligned} \quad (4.89)$$

worin δ_4 den Winkel der Schieflage des Schwenkgelenkes bedeutet. Eine negative Kopplung kann wiederum durch Schräglage in anderer Richtung bewirkt werden.

- b) Position des Schlaggelenkes, siehe Abb. 4.16b.

Wenn das Schwenkgelenk außerhalb des Schlaggelenkes positioniert ist, so führt dies zu einer Schwenk-Torsionskopplung proportional zur stationären Schlagauslenkung

$$\delta_4 = -\beta_0 \quad (4.90)$$

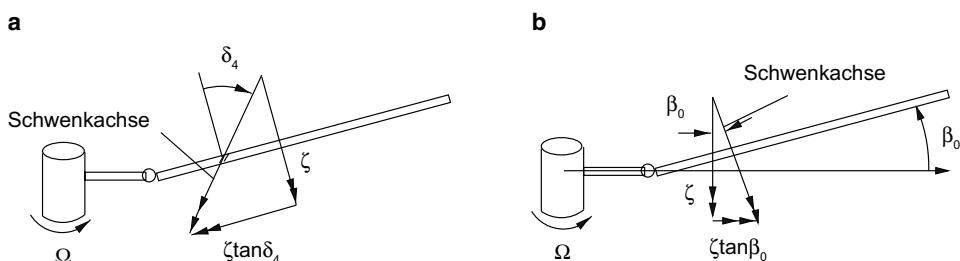


Abb. 4.16 Erzeugung einer Schwenk-Torsionskopplung. **a** schief liegendes Schwenkgelenk **b** Gelenkreihenfolge

c) Position der Steuerstange

Auch durch Schrägstellung der Steuerstange kann man eine Schwenk-Torsionskopplung einführen. Diese ist allerdings sehr nichtlinear und wird vom Flugzustand beeinflusst, da sie von der Taumelscheibenposition abhängt.

d) Einsatz eines Reglers

Durch Rückkopplung der gemessenen Schwenkbewegung mit Hilfe eines Reglers und Aktuatoren im drehenden System kann man jeden Betrag einer Schwenk-Torsionskopplung einführen, ganz analog zur Schlag-Torsionskopplung. Bei Rotoren mit mehr als drei Blättern kann auch eine Mehrfachtaumelscheibe verwendet werden, analog zur δ_3 -Kopplung in der Schlagbewegung.

4.10 Gekoppelte Schlag-, Schwenk- und Torsionsbewegung

4.10.1 Starres Rotorblatt

Das Blatt wird zunächst als starr und gelenkig aufgehängt angenommen, wobei nun drei Freiheitsgrade zugelassen werden. Die Reihenfolge der Gelenke sei von der Drehachse ausgehend: erst Schlaggelenk, dann Schwenkgelenk, dann Torsionslager (siehe Abb. 4.17). Wenn sich diese Reihenfolge ändert, so ändern sich die nichtlinearen Terme der Bewegungsgleichungen. Das hier angegebene Modell kann man sowohl für gelenkig gelagerte als auch für gelenklose Rotoren verwenden (für letztere als Näherung). Der Einfachheit halber werden hier jedoch alle Gelenke auf einem Punkt angenommen ($e_\beta = e_\zeta = e_{pl}$) und die wichtigen nichtlinearen Terme bis zur zweiten Ordnung mitgenommen. Im Folgenden werden die einzelnen Kräfte jeder Bewegungsform analysiert.

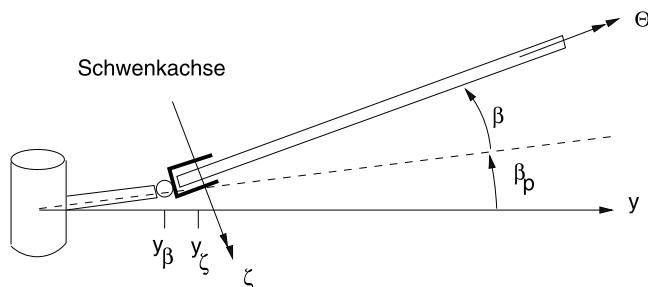
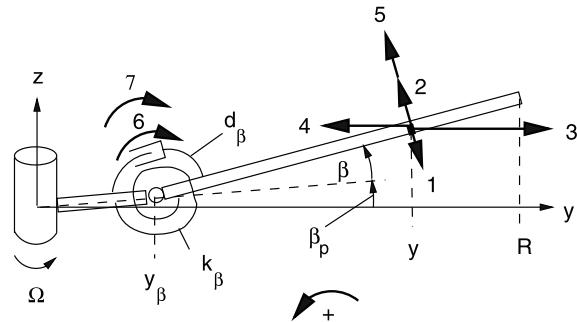


Abb. 4.17 Blattkonfiguration der Schlag-Schwenk-Torsionsbewegung

Abb. 4.18 Kräfte in der Schlagbewegung



I. Die Schlagbewegung

Mit Hilfe von Abb. 4.18 kann man folgende Kräfte beobachten:

Kraft	Formel	Hebelarm	Kommentar
1. Massenträgheit:	$m' \ddot{\beta} (y - y_\beta)$	$y - y_\beta$	Aus Schlagbeschleunigung
2. Massenträgheit:	$m' x_I \ddot{\Theta}$	$y - y_\beta$	Aus Torsionsbeschleunigung
3. Zentrifugalkraft:	$m' y \Omega^2 (y - y_\beta) \beta - x_I \Theta$	$(y - y_\beta) \beta - x_I \Theta$	Aus Schlaglage
4. Corioliskraft:	$2m' \Omega \dot{\zeta} (y - y_\zeta)$	$y - y_\beta$	Aus Schwenkbewegung
5. Aerodynamik:	$F'_z (y - y_\beta)$	$y - y_\beta$	Auftrieb
6. Federmoment:	$k_\beta (\beta - \beta_p)$	–	Z. B. elastischer Blatthals
7. Dämpfermoment:	$d_\beta \dot{\beta}$	–	Formal für strukturelle Dämpfung

Ein mechanischer Dämpfer ist in der Schlagbewegung meist nicht vorhanden, da sie aerodynamisch ausreichend gedämpft ist; das Dämpfermoment kann jedoch für die innere Reibung der Struktur formal eingeführt werden. Darin ist die Dämpferkonstante

$$d_\beta = 2D_\beta \omega_{\beta 0} I_\beta \quad (4.91)$$

mit D_β als viskosem Dämpfungsverhältnis der Schlagbewegung und $\omega_{\beta 0}$ als der Schlageingenfrequenz im nicht drehenden System. Das Gleichgewicht der Momente um das Schlaggelenk liefert:

$$\int_{y_\beta}^R [m'(y - y_\beta)^2 \ddot{\beta} - m' x_I (y - y_\beta) \ddot{\Theta} + m' \Omega^2 y (y - y_\beta) \beta - m' \Omega^2 y x_I \Theta - 2m' \Omega (y - y_\beta)^2 \beta \dot{\zeta} - F'_z (y - y_\beta)] dy + k_\beta (\beta - \beta_p) + 2D_\beta \omega_{\beta 0} I_\beta \dot{\beta} = 0 \quad (4.92)$$

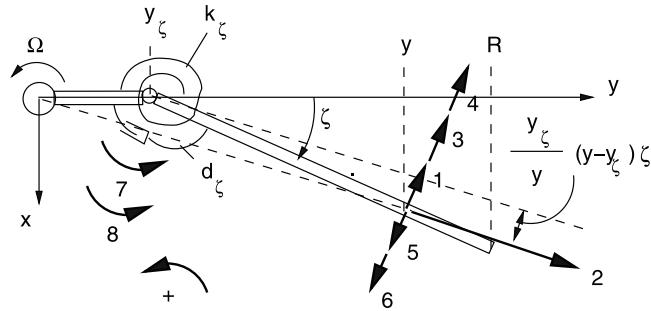


Abb. 4.19 Kräfte in der Schwenkbewegung

Durch Division mit $I_b \Omega^2$ und der Annahme von $I_\beta \approx I_b$ sowie $(y - y_\beta) \ddot{\Theta} \approx y \ddot{\Theta}$ folgt die dimensionslose Gleichung

$$\beta^{**} + v_\beta^2 \beta + 2 \frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} D_\beta \beta - 2 \beta \xi^* - I_x^* (\ddot{\Theta} + \Theta) = \gamma \bar{M}_\beta + \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} \right)^2 \beta_P \quad (4.93)$$

II. Die Schwenkbewegung

Mit Hilfe von Abb. 4.19 kann man folgende Kräfte beobachten:

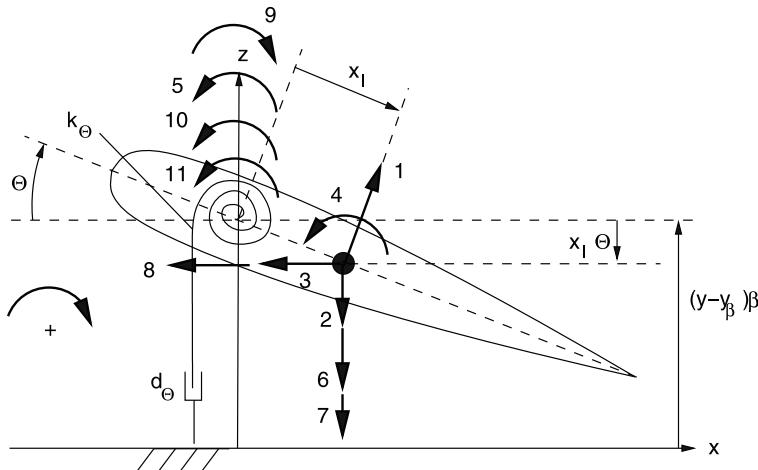
Kraft	Formel	Hebelarm	Kommentar
1. Massenträgheit:	$m' \ddot{\xi}(y - y_\xi)$	$y - y_\xi$	Aus Beschleunigung
2. Zentrifugalkraft:	$m' y \Omega^2 (y_\xi / y) \xi$	$y - y_\xi$	Aus Schwenklage
3. Corioliskraft:	$2m' \Omega (y - y_\beta) \beta \dot{\beta}$	$y - y_\xi$	Aus Schlagbewegung
4. Corioliskraft:	$2m' \Omega (y - y_\xi) \beta \dot{\xi}$	$y - y_\xi$	Aus Schwenkbewegung
5. Corioliskraft:	$m' x_I \dot{\Theta} \beta$	$y - y_\xi$	Aus Torsionsbewegung
6. Aerodynamik:	F'_x	$y - y_\xi$	Widerstand
7. Federmoment:	$k_\xi \xi$	—	Z. B. elastischer Blattenschaft
8. Dämpfmoment:	$d_\xi \dot{\xi}$	—	Schwenkdämpfer und Struktur

Darin ist die Dämpferkonstante

$$d_\xi = 2D_\xi \omega_{\xi 0} I_\xi \quad (4.94)$$

mit D_ξ als viskosem Dämpfungsverhältnis der Schwenkbewegung und $\omega_{\xi 0}$ als der Schwenkeigenfrequenz im nicht drehenden System. Das Gleichgewicht der Momente um das Schwenkgelenk liefert

$$\int_{y_\xi}^R [m'(y - y_\xi)^2 \ddot{\xi} + m' \Omega^2 e_\xi (y - y_\xi) \xi + 2m' \Omega (y - y_\xi)^2 \beta (\dot{\beta} + \dot{\xi}) - 2m' x_I (y - y_\xi) \Omega \beta \dot{\Theta} - F'_x (y - y_\xi)] dy + k_\xi \xi + 2D_\xi \omega_{\xi 0} I_\xi \dot{\xi} = 0 \quad (4.95)$$

**Abb. 4.20** Kräfte und Momente in der Torsionsbewegung

Durch Division mit $I_b \Omega^2$ und der Annahme von $I_\zeta \approx I_b$ folgt die dimensionslose Gleichung

$$\zeta^{**} + v_\zeta^2 \zeta + 2 \left(\frac{\omega_{\zeta 0}}{\Omega} D_\zeta + \beta \right) \zeta^* + 2\beta \beta^* - I_x^* 2\beta \dot{\Theta} = \gamma \bar{M}_\zeta \quad (4.96)$$

III. Die Torsionsbewegung

Mit Hilfe von Abb. 4.20 kann man folgende Kräfte beobachten:

Kraft	Formel	Hebelarm	Kommentar
1. Massenträgheit:	$m' x_I \ddot{\Theta}$	x_I	Aufgrund eines Abstandes der Schwerpunktsachse von der Steuerachse
2. Massenträgheit:	$m' (y - y_\beta) \ddot{\beta}$	x_I	Aus der Schlagbewegung
3. Massenträgheit:	$m' (y - y_\beta) \ddot{\zeta}$	$x_I \Theta$	Aus der Schwenkbewegung, vernachlässigt wegen höherer Ordnung
4. Massenträgheit:	$I_0' \ddot{\Theta}$	–	Moment um die Schwerpunktsachse
5. Propellermoment:	$I_\theta' \Omega^2 \Theta$	–	Aus Zentrifugalkraft
6. Zentrifugalkraft:	$m' y \Omega^2 \beta$	x_I	Aus der Schlagbewegung
7. Corioliskraft:	$2m' \Omega y \beta \dot{\zeta}$	x_I	Aus der Schwenkbewegung
8. Corioliskraft:	$2m' \Omega y \beta \dot{\beta}$	$x_I \Theta$	Aus der Schlagbewegung
9. Aerodynamik:	M'_θ	–	Nickmoment
10. Federmoment:	$k_\theta (\Theta - \Theta_{con})$	–	Aus Steuersystemsteifigkeit
11. Dämpfermoment:	$d_\theta \dot{\Theta}$	–	Formal für die Strukturdämpfung

Darin ist die Dämpferkonstante

$$d_\theta = 2D_\theta \omega_{\theta 0} I_\theta \quad (4.97)$$

mit D_Θ als viskosem Dämpfungsverhältnis der Torsionsbewegung und $\omega_{\Theta 0}$ als der Torsionseigenfrequenz im nicht drehenden System. Das Gleichgewicht der Momente um die Steuerachse liefert mit der vereinfachenden Annahme $y_\beta = y_\zeta = y_{pl}$

$$0 = \int_{y_{pl}}^R \left[m' x_I^2 \ddot{\Theta} - m' x_I (y - y_\beta) (\ddot{\beta} + \Theta \ddot{\xi}) + I'_0 \ddot{\Theta} + I'_\Theta \Omega^2 \Theta - m' x_I \Omega^2 y \beta - 2m' x_I \Omega y \beta (\dot{\zeta} + \dot{\beta} \Theta) - M'_\Theta \right] dy + k_\Theta (\Theta - \Theta_{con}) + 2I_\Theta \omega_{\Theta 0} D_\Theta \dot{\Theta} \quad (4.98)$$

Durch Division mit $I_b \Omega^2$ und $I_\beta \approx I_\zeta \approx I_b$ folgt

$$\begin{aligned} & I_f^* \left(\Theta^{**} + 2 \frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega} D_\Theta \Theta^* + v_\Theta^2 \Theta \right) - I_x^* \left(\beta^{**} + \zeta^* \Theta \right) - 2 I_x^* \beta \left(\beta \Theta + \zeta^* \right) - I_x^* \beta \\ &= \gamma \overline{M}_\Theta + I_f^* \left(\frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega} \right)^2 \Theta_{con} \end{aligned} \quad (4.99)$$

Die drei Gl. 4.93, 4.96 und 4.99 können in Matrixform geschrieben werden, wobei dann die Kopplungen deutlich werden:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -I_x^* \\ 0 & 1 & 0 \\ -I_x^* & -I_x \Theta & I_f^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^{**} \\ \zeta^{**} \\ \Theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} D_\beta & -2\beta & 0 \\ 2\beta & 2 \left(\frac{\omega_{\zeta 0}}{\Omega} D_\zeta + \beta \right) & -2I_x^* \beta \\ -2I_x \beta \Theta & -2I_x^* \beta & 2 \frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega} D_\Theta I_f^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^* \\ \zeta^* \\ \Theta \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} v_\beta^2 & 0 & -I_x^* \\ 0 & v_\zeta^2 & 0 \\ -I_x^* & 0 & I_f^* v_\Theta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \zeta \\ \Theta \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} \overline{M}_\beta \\ \overline{M}_\zeta \\ \overline{M}_\Theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} \right)^2 \beta_P \\ 0 \\ I_f^* \left(\frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega} \right)^2 \Theta_{con} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.100)$$

Die Terme $-I_x^* \Theta$ in der Massenmatrix (das stellt eine Rückkopplung der Massenträgheit der Schwenkbewegung in die Torsion dar) und $-2I_x^* \beta \Theta$ in der Dämpfungsmatrix (dies ist eine Rückkopplung von Corioliskräften der Schlagbewegung in die Torsion) führen Nichtlinearitäten ein, können jedoch wegen höherer Ordnung vernachlässigt werden. Diese Gleichungen sind über die Massenträgsterme gekoppelt; die Trägheits- und Steifigkeitsmatrix sind symmetrisch und die Dämpfungsmatrix besteht aus zwei Teilen. Zunächst ist da die viskose Dämpfung in der Hauptdiagonalen (wobei meist weder Schlag- noch Torsionsdämpfer vorhanden sind, also $D_\beta = D_\Theta = 0$), dazu kommt noch der Anteil aus den Corioliskräften in den Nebendiagonalen (2β , $2I_x \beta$), welche die Matrix nichtsymmetrisch und das Gleichungssystem nichtlinear werden lassen. Obwohl diese Anteile nichtlinear sind, haben sie eine wichtige Koppelwirkung.

Die kompletten nichtlinearen Gleichungen für diese Gelenkfolge wurden von Chopra 1983 aufgestellt [6]. Wenn sich die Reihenfolge der Gelenke ändert, so erhält man einen neuen Satz von Gleichungen mit verschiedenen Koppeltermen. Als Beispiel dafür sei auf Chopra/Dugundji (1979) verwiesen [7], wo die nichtlinearen Gleichungen für folgende Anordnung aufgestellt wurden: Steuerlager innen, dann Schlag- und zuletzt Schwengeelenk.

4.10.2 Elastisches Rotorblatt

Für heutige Rotorblätter ist es angebracht, diese als elastischen Balken zu betrachten, der sowohl schlagen, schwenken als auch tordieren kann, wobei diese Bewegungen durch Massenträgheiten wie auch durch Luftkräfte gekoppelt sind. Die Herleitung der Bewegungsgleichungen ist recht langwierig und aufwändig und viele Autoren haben diese Gleichungen auf verschiedenen Wegen und mit verschiedenen Vereinfachungen aufgestellt. Im Wesentlichen sind diese Unterschiede in dem Ordnungsverfahren der nichtlinearen Terme gelegen. Unter den beachtenswerten Arbeiten auf diesem Gebiet sind vor allem die von Houbold und Brooks (1958 [8]), Hodges und Dowell (1974 [9]) und Johnson (1977 [10]) zu nennen. Neuerdings werden auch verallgemeinerte Bewegungsgleichungen von Hodges verwendet (2015 [11]).

Das Rotorblatt wird als verwundeter Balken idealisiert. Aufgrund der Steuerung und der Verwindung gibt es eine strukturelle Kopplung der Schlag- und Schwenkbewegung. Auf die Details der Herleitung wird hier verzichtet; es werden lediglich die Bewegungsgleichungen für gleichförmige Blätter angegeben (Skizze siehe Abb. 4.21). Folgende Annahmen stecken in den Gleichungen:

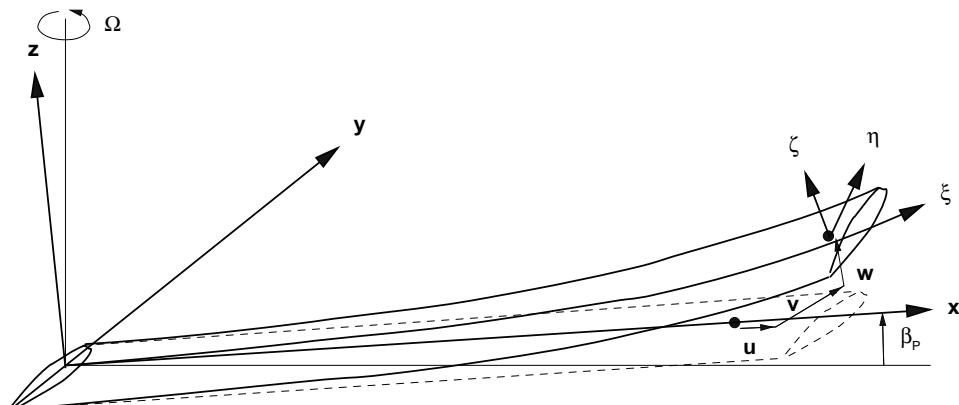


Abb. 4.21 Zur Schlag-, Schwenk-, Torsionskopplung des elastischen Balkens

- a) Gleichförmige Blätter
- b) Schlanke Blätter
- c) Kleine Auslenkungen (Terme 2. Ordnung werden noch mitgenommen; 3. und höherer Ordnung weggelassen)
- d) Keine Vorverwindung, kein Schwenkkonus
- e) Die Blattwurzelachse geht durch den Rotormast
- f) Die Spannungsachse liegt auf der elastischen Achse

Neue Bezeichnungen sind (x_I ist wieder die Rücklage der Massenachse von der elastischen Achse und positiv, wenn der Schwerpunkt hinter der elastischen Achse liegt):

k_A Trägheitsradius

$m' k_{m1}^2$ Massenträgheitsmoment der Schlagbewegung

$m' k_{m2}^2$ Massenträgheitsmoment der Schwenkbewegung

$m' k_m^2$ Massenträgheitsmoment der Torsionsbewegung

Damit folgt für die Schlagbewegung:

$$\begin{aligned}
 & [EI_y + (EI_z - EI_y) \sin^2 \Theta] w''' + (EI_z - EI_y) \frac{\sin 2\Theta}{2} v'''' \\
 & + (EI_z - EI_y) [\cos 2\Theta (\vartheta v'')'' + \sin 2\Theta (\vartheta w'')''] - \frac{m'}{2} \Omega^2 [w'(R^2 - y^2)]' \\
 & + m' \ddot{w} + 2m' \Omega \beta_P \dot{v} - 2m' \Omega \left(w' \int_y^R \dot{v} dy \right) - m' x_I \ddot{\vartheta} \\
 & + [m' x_I (\Omega^2 y \vartheta \cos \Theta + 2\Omega \dot{v} \sin \Theta)]' = L_w - m \Omega^2 y \beta_P
 \end{aligned} \tag{4.101}$$

Die Schwenkbewegung lautet

$$\begin{aligned}
 & [EI_z - (EI_z - EI_y) \sin^2 \Theta] v''' + (EI_z - EI_y) \frac{\sin 2\Theta}{2} w'''' \\
 & + (EI_z - EI_y) [\cos 2\Theta (\vartheta w'')'' - \sin 2\Theta (\vartheta v'')''] - \frac{m'}{2} \Omega^2 [v'(R^2 - y^2)]' \\
 & + m' \ddot{v} - m' \Omega^2 v - 2m' \Omega \beta_P \dot{w} - 2m' \Omega \int_0^y (v' \dot{v}' + w' \dot{w}') dy \\
 & - 2m' \Omega \left(v' \int_y^R \dot{v} dy \right)' + m' x_I \ddot{\vartheta} \sin \Theta + 2m' \Omega x_I (\dot{v}' \cos \Theta + \dot{w}' \sin \Theta) \\
 & - m' \Omega^2 x_I \sin \Theta \vartheta = L_v
 \end{aligned} \tag{4.102}$$

und die Gleichung für die Torsion ist

$$\begin{aligned}
 & -GJ\vartheta'' + (EI_z - EI_y) \left[(w''^2 - v''^2) \frac{\sin 2\Theta}{2} + v''w'' \cos 2\Theta \right] \\
 & - \frac{m'}{2} \Omega^2 k_A^2 [\vartheta'(R^2 - y^2)]' + m'k_m^2 \ddot{\vartheta} + m'\Omega^2(k_{m2}^2 - k_{m1}^2)\vartheta \cos 2\Theta \\
 & - m'x_I[\Omega^2 y(w' \cos \Theta - v' \sin \Theta) - (\ddot{v} - \Omega^2 v) \sin \Theta + w \cos \Theta] \\
 & = M_\vartheta - m'\Omega^2(k_{m2}^2 - k_{m1}^2) \frac{\sin 2\Theta}{2} \tag{4.103}
 \end{aligned}$$

Hong und Chopra haben ein generelles gekoppeltes Gleichungssystem der Schlag-, Schwenk- und Torsionsbewegung eines Rotorblattes in Faserverbundbauweise aufgestellt (1985 [12]). In diesen Gleichungen sind die Verschiebungen kompatibel zueinander und es wurden auch die generellen Ausdrücke für die Energie hergeleitet, die bei einer FEM-Analyse benötigt werden. Sivaneri und Chopra (1982 [13]) haben eine auf Hamilton's Prinzip basierende FEM-Modellierung aufgestellt, um die Dynamik der Schlag-, Schwenk- und Torsionsbewegung zu analysieren.

In Abb. 4.22a und b sind die Blattgeometrie, Dicken- und Verwindungsverteilung eines elastischen, gelenklosen Rotorblattes (Bo105 Modellrotor des DLR) und eines ebenso gelenklos gelagerten Rotorblattes einer Windenergieanlage (NREL 5MW) gegeben. Es fällt auf, dass die relative Dicke des Windanlagenblattes wesentlich größer ist als die des Hubschrauberblattes und damit entsprechend größere Schlagbiege- und Torsionssteifigkeiten mit sich bringt. Auch im Blattanschluss zum Rotorkopf hat das Blatt der Windenergieanlage eine wesentlich größere Profiltiefe als das Hubschrauberblatt, so dass hier auch die Schwenksteifigkeit wesentlich größer ist. Das Verhältnis von Profiltiefe zum Rotorradius ist für beide Rotoren hingegen sehr ähnlich. Außerdem ist die Verwindung in umgekehrter Richtung, was daran liegt, dass der Hubschrauberrotor Schub im Schwebe- und Horizontalflug erzeugen muss und dementsprechend eine negative Verwindung hat. Im Gegensatz dazu wird der Rotor einer Windenergieanlage aerodynamisch gesehen wie ein Rotor im schnellen senkrechten Sinkflug betrieben, was eine positive Verwindung erfordert. Der Gesamtbetrag der Blattverwindung ist beim Hubschrauber nur halb so groß wie bei der Windenergieanlage, weil er eine große Bandbreite von Betriebsbedingungen abdecken muss, während die Windenergieanlage im Wesentlichen für einen einzigen Betriebspunkt optimiert werden kann.

Darunter sind in Abb. 4.22c und d die jeweils zugehörigen Eigenfrequenzen über der Rotordrehfrequenz aufgetragen. Die Daten wurden mit Hilfe der FEM-Formulierung errechnet. Bei einem Vergleich mit Messungen ist üblicherweise die Übereinstimmung der ersten drei Eigenformen von Messung und Rechnung recht gut, während für die höheren Eigenformen die Ergebnisse meist schlechter werden. Diese Darstellung nennt man Fan- oder Eigenfrequenzdiagramm (engl. fan diagram) oder auch Southwell-Diagramm [14], der es vermutlich erstmalig 1921 so darstellte. Später wurde es 1937 auch von Hohenemser verwendet [15].

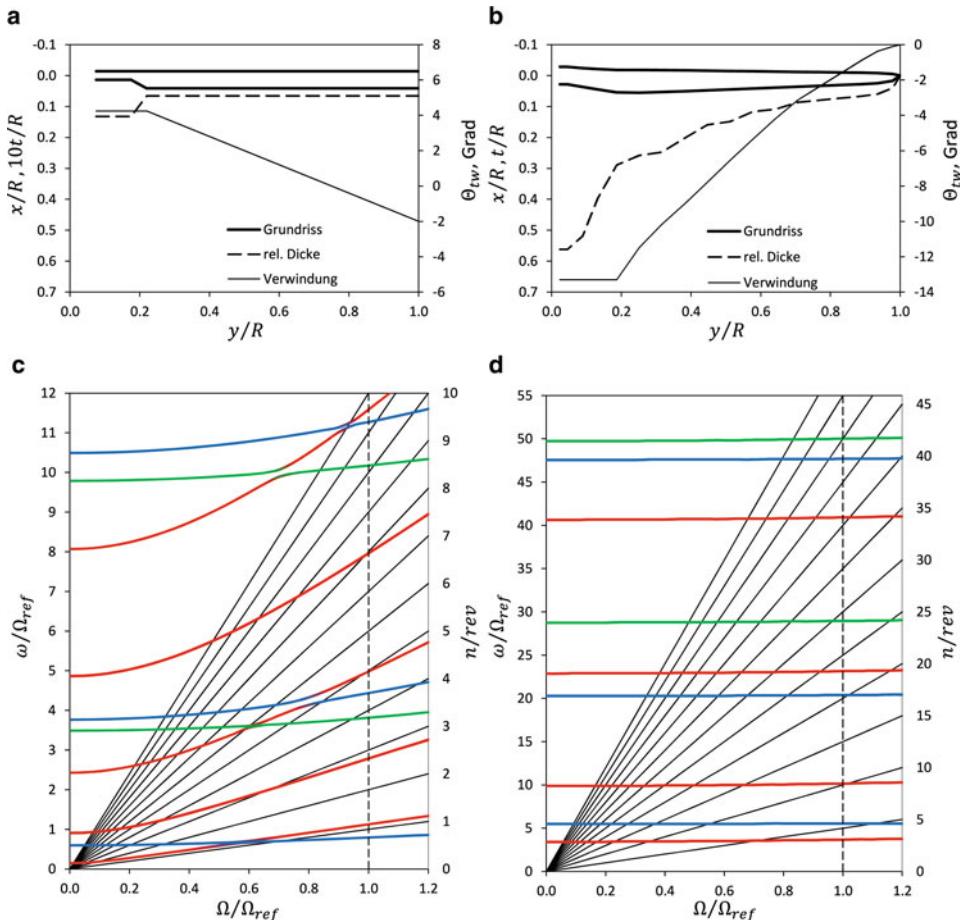


Abb. 4.22 Beispiel für Eigenfrequenzdiagramme verschiedener Rotoren. **a** Bo105 Modellrotorblatt, Geometrie, **b** NREL 5MW Rotorblatt, Geometrie, **c** Bo105 Modellrotor, $R = 2 \text{ m}$, $\Omega_{ref} = 110 \text{ rad/s}$, $\Omega R = 220 \text{ m/s}$, **d** NREL 5MW Windenergierotor, $R = 63 \text{ m}$, $\Omega_{ref} = 1,2698 \text{ rad/s}$, $\Omega R = 80 \text{ m/s}$. *Rot:* Schlagen, *blau:* Schwenken, *grün:* Torsion. *Linke Spalte:* Bo105 Hubschrauber; *rechte Spalte:* NREL 5MW Windenergianlage

Es fällt auf, dass die Eigenfrequenzen eines Hubschrauber-Rotorblattes Abb. 4.22c relativ stark von Zentrifugalkräften beeinflusst werden und mit zunehmender Rotordrehzahl wachsen, da ein zunehmender Anteil der Steifigkeit von Fliehkräften stammt. Diese wirkt, wie in den vorangegangenen Kapiteln diskutiert, besonders in den Schlag-eigenformen (rot), weniger in den Schwenk-eigenformen (blau) und am geringsten in den Torsion-eigenformen (grün). Umgekehrt findet man beim Rotorblatt einer Windenergianlage Abb. 4.22d kaum Änderungen der Eigenfrequenzen. Diese Unterschiede begründen sich in der Konstruktion und im Betriebszustand.

Während Rotorblätter von Hubschraubern in der Regel als relativ biegeweiche dünne Balken betrachtet werden können (Dicke um 12 % Profiltiefe) und als gelenk- oder lagerlose Rotoren im Blattbereich schlanke Querschnitte haben, die große Krümmungen erlauben, weisen Rotorblätter von Windenergieanlagen eher Eigenschaften von Propellern auf. Sie haben große kreisförmige Querschnitte im Anschlussbereich zum Rotorkopf, die sehr große Steifigkeit mit sich bringen. Anschließend folgen die größten Profiltiefen mit sehr großer relativer Dicke von über 40 % der Profiltiefe und auch im weiteren Verlauf des Blattes sind die relativen Dicken recht groß, selbst an der Blattspitze betragen sie noch ca. 18 % der Profiltiefe.

Des Weiteren zeigt ein Blick auf die Blattspitzengeschwindigkeit ΩR , dass diejenige eines Hubschraubers in diesem Beispiel etwa 2,75 mal größer als die einer Windenergieanlage ist und daher Rotorblätter von Hubschraubern viel größeren Zentrifugalkräften ausgesetzt sind, gleichzeitig aber, wie zuvor erläutert, eine wesentlich geringere Steifigkeit mit sich bringen. Dies erklärt den großen Einfluss der Drehzahl auf die Eigenfrequenz der Rotorblätter von Hubschraubern und den geringen Einfluss auf diejenigen von Windenergieanlagen.

Das Fandiagramm hat eine große Bedeutung für den Rotorentwurf. Darin kann die Lage der Eigenfrequenzen bei jeder Rotordrehzahl Ω und insbesondere bei der Nenndrehzahl (Ω_{ref} bzw. 1/rev) relativ zu ganzzahligen Vielfachen der Rotordrehfrequenz (n /rev) abgelesen werden, aber auch die relative Änderung zu diesen, wenn man die Drehfrequenz nach oben oder unten ändern würde. Da die Schlagbewegung in der Regel aerodynamisch gut gedämpft ist, macht es nicht viel aus, wenn deren Eigenfrequenzen auf oder in unmittelbarer Nähe zu n /rev liegen.

Bei den Schwenk- und den Torsioneigenfrequenzen achtet man jedoch sehr genau darauf, einen Frequenzabstand von mindestens 0,2/rev zu den ganzzahligen Vielfachen n /rev zu halten, da diese sehr viel weniger aerodynamisch gedämpft sind – insbesondere die Schwenkbewegung – und dann in Resonanz zu den anregenden Luft- und Massenkräften schwingen würden. Aufgrund geringer Dämpfung würden große Amplituden entstehen sowie damit verbunden große strukturelle Belastungen, die eine Verringerung der Lebensdauer der Bauteile zur Folge hätten. In der Hubschrauberzelle kann man davon unter Umständen gar nichts merken, insbesondere, wenn der Rotor viele Blätter hat. Bei geringen Blattzahlen (zwei- bis vierblättrige Rotoren) steigen dann jedoch spürbar die Vibratoren im Hubschrauberrumpf.

Des Weiteren kann man erkennen, welche Eigenformen miteinander koppeln oder nicht. Kreuzen sich die Kurven einfach, so gibt es keine Kopplungen der zugehörigen Eigenformen. Nähern sich die Kurven jedoch einander an, laufen über einen gewissen Drehzahlbereich parallel zueinander, um sich danach wieder voneinander zu entfernen, so gibt es zwischen den zugehörigen Eigenformen eine starke Kopplung. Dies kann man oft zwischen Torsions- und Schlag-eigenformen beobachten, wenn ein Abstand $x_I \neq 0$ vorliegt und sowohl jede Schlagbeschleunigung als auch jede Schlaglage über die Zentrifugalkraft ein Moment in der Torsion erzeugt.

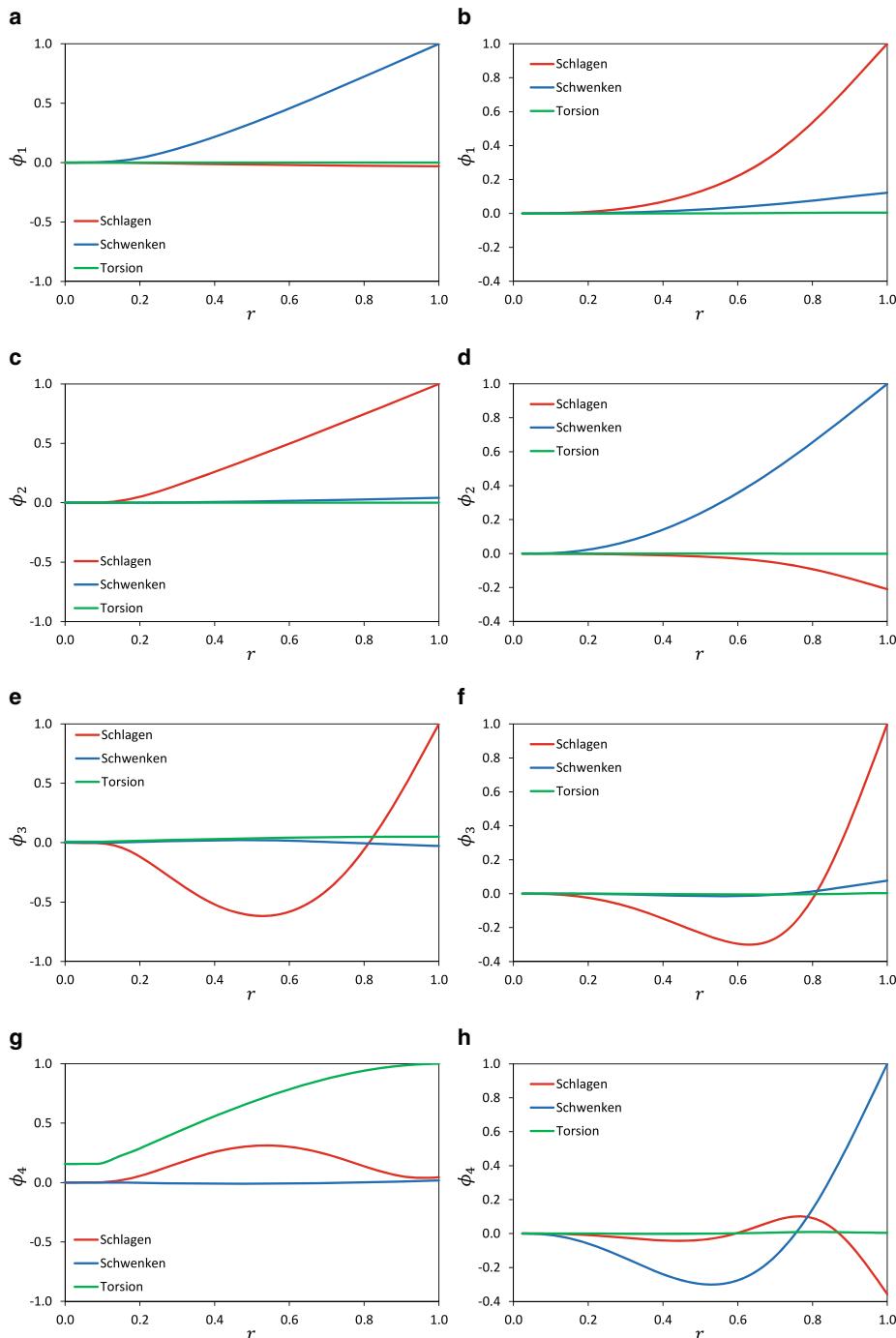


Abb. 4.23 Beispiel für Eigenformen verschiedener Rotorblätter, Teil 1. **a** 1. Eigenform Bo105, **b** 1. Eigenform NREL, **c** 2. Eigenform Bo105, **d** 2. Eigenform NREL, **e** 3. Eigenform Bo105, **f** 3. Eigenform NREL, **g** 4. Eigenform Bo105, **h** 4. Eigenform NREL

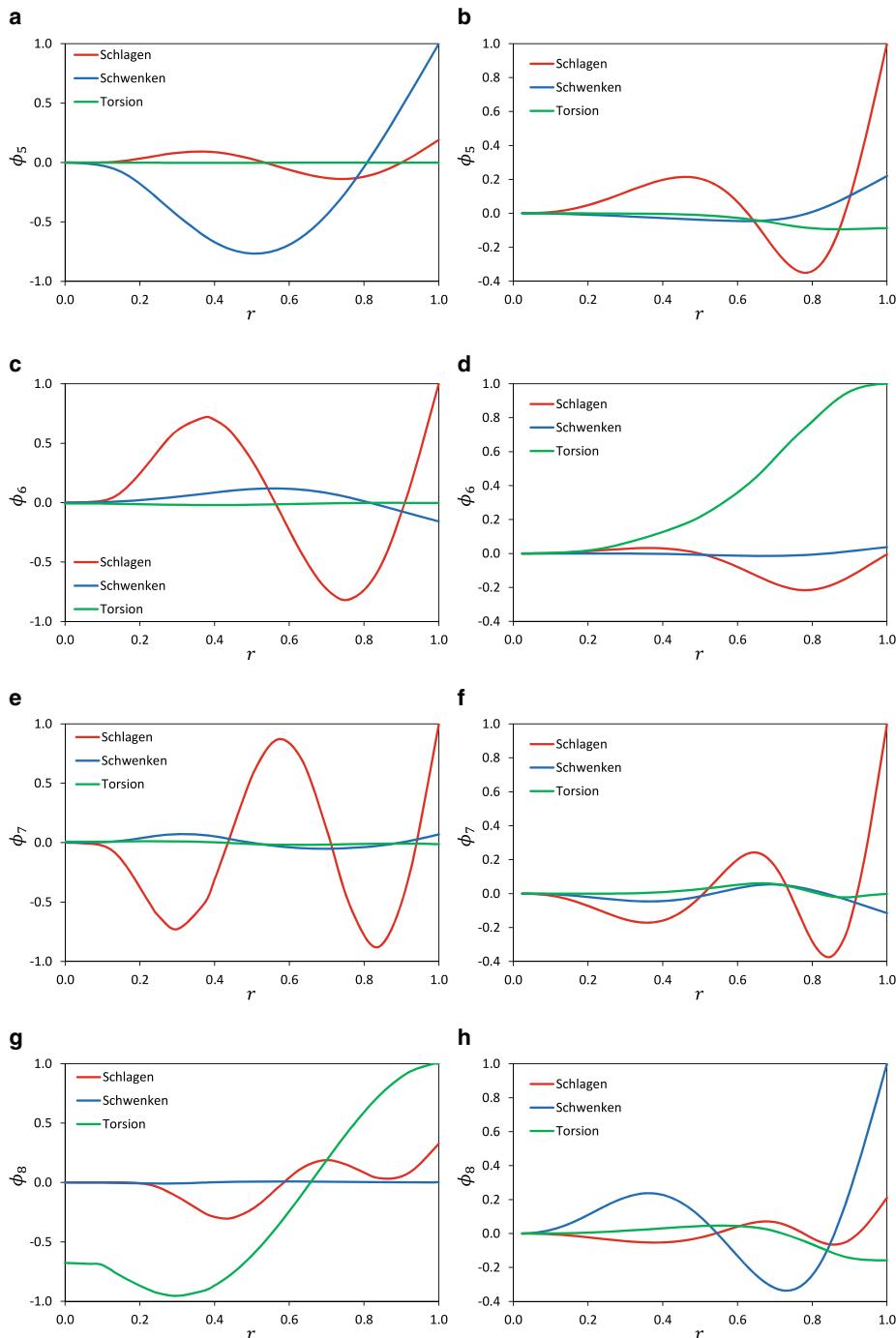


Abb. 4.24 Beispiel für Eigenformen verschiedener Rotorblätter, Teil 2. **a** 5. Eigenform Bo105, **b** 5. Eigenform NREL, **c** 6. Eigenform Bo105, **d** 6. Eigenform NREL, **e** 7. Eigenform Bo105, **f** 7. Eigenform NREL, **g** 8. Eigenform Bo105, **h** 8. Eigenform NREL

Da sowohl Rotorblätter von Hubschraubern als auch die von Windenergieanlagen in der Regel einige Abweichungen der elastischen Achse, der Massenachse, der Spannungsachse etc. als auch konstruktiv von einer geraden Linie abweichen, entstehen immer auch gekoppelte Eigenformen. Dies bedeutet, dass zwar in der Regel eine Bewegungsform, also Schlägen, Schwenken oder Torsion, deutlich dominiert, die beiden anderen Bewegungsformen aber gleichzeitig auch Auslenkungen aufweisen. Bei stark verkoppelten Eigenformen, insbesondere wo sich zwei Eigenfrequenzen sehr nahe kommen, werden dann beide Bewegungsformen in beiden Eigenformen praktisch gleich groß enthalten sein. In Abb. 4.23 sind die ersten vier zu Abb. 4.22 gehörigen Eigenformen einander gegenübergestellt, wobei die Auslenkungen jeweils auf den maximalen Wert von 1 normiert wurden.

Bei allen Eigenformen fällt auf, dass das Rotorblatt des Hubschraubers bereits kurz hinter der Einspannung große Krümmungen aufweist und im weiteren Verlauf, insbesondere bei den höheren Eigenformen, eher mit einer Seilschwingung zu vergleichen ist. Im Gegensatz dazu weist das Rotorblatt der Windenergieanlage erst bei wesentlich größeren Radien Verbiegungen auf. Dies drückt die große Steifigkeit im Bereich des Blattes bis etwa zum halben Radius aus. Außerdem sind in Abb. 4.24 noch die Eigenformen 5 bis 8 gegeben.

Die Torsionsformen des Bo105 Modellrotorblattes weisen bereits an der Einspannung eine Auslenkung auf. Dies begründet sich in der Randbedingung, welche anstelle einer starren Einspannung die Weichheit des Steuerungssystems darunter als äquivalente Feder eingearbeitet wurde.

4.11 Die Reaktionskräfte am Blattanschluss und am Rotorkopf

Im rotierenden System (Abb. 4.25a) sind die Blattwurzelkräfte und -momente wie in Tab. 4.2 angegeben definiert.

Die Blattkräfte werden über den Blatthals und den Rotorkopf auf den Hubschrauber übertragen, wobei die tatsächlich weitergeleiteten Kräfte und Momente aus der Summe aller Blattkräfte und -momente bestehen. Diese Rotorkopfreaktionskräfte sind wichtig für

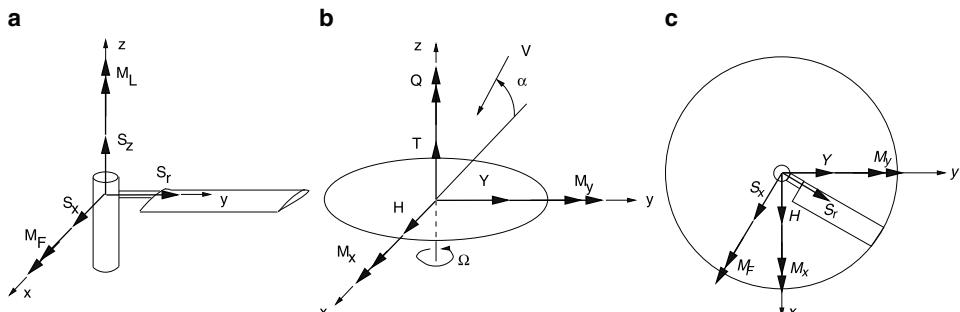


Abb. 4.25 Koordinatensysteme zur Transformation der Kräfte. **a** drehendes System, **b** nicht drehendes System, **c** Transformation: drehend → nicht drehend

Tab. 4.2 Blattwurzelkräfte und -momente im drehenden System

S_z	=	Vertikale Scherkraft
S_x	=	Horizontale Scherkraft
S_r	=	Radiale Scherkraft
M_F	=	Schlagbiegemoment
M_L	=	Schwenkbiegemoment

Tab. 4.3 Rotorkopfkräfte und -momente im nicht drehenden System

T	=	Schub, positiv nach oben
H	=	Rotorwiderstand, positiv nach hinten
Y	=	Seitenkraft, positiv nach rechts
M_x	=	Rollmoment, positiv linkskippend
M_y	=	Nickmoment, positiv aufnickend
Q	=	Drehmoment, positiv gegen die Drehrichtung

die Trimmung, die Vibrationen, die Stabilität und die Steuerung des Hubschraubers. Nach Transformation ins nicht drehende System (Abb. 4.25b und c) entstehen aus den Rotorkopfkräften die sog. Rotorkomponenten, siehe Tab. 4.3. Die x -Achse des nicht drehenden Rotorkopfsystems zeigt nach hinten, die y -Achse nach Steuerbord (engl. star board) und die z -Achse nach oben.

Diese zeitabhängigen Kräfte und Momente am Rotorkopf im nicht drehenden System werden durch Summierung der Blattwurzelkräfte und -momente aller N Blätter gewonnen und können auch dimensionslos gemacht werden:

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_{m=1}^N S_z^{(m)} & \gamma \frac{C_T}{\sigma C_{l\alpha}} &= \frac{R}{I_b \Omega^2} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N S_z^{(m)} \\
 H &= \sum_{m=1}^N (S_r^{(m)} \cos \psi_m + S_x^{(m)} \sin \psi_m) & \gamma \frac{C_H}{\sigma C_{l\alpha}} &= \frac{R}{I_b \Omega^2} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N (S_r^{(m)} \cos \psi_m + S_x^{(m)} \sin \psi_m) \\
 Y &= \sum_{m=1}^N (S_r^{(m)} \sin \psi_m - S_x^{(m)} \cos \psi_m) & \gamma \frac{C_Y}{\sigma C_{l\alpha}} &= \frac{R}{I_b \Omega^2} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N (S_r^{(m)} \sin \psi_m - S_x^{(m)} \cos \psi_m) \\
 M_x &= \sum_{m=1}^N M_F^{(m)} \sin \psi_m & \gamma \frac{C_{Mx}}{\sigma C_{l\alpha}} &= \frac{1}{I_b \Omega^2} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N M_F^{(m)} \sin \psi_m \\
 M_y &= \sum_{m=1}^N -M_F^{(m)} \cos \psi_m & \gamma \frac{C_{My}}{\sigma C_{l\alpha}} &= \frac{1}{I_b \Omega^2} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N -M_F^{(m)} \cos \psi_m \\
 Q &= \sum_{m=1}^N M_L^{(m)} & \gamma \frac{C_Q}{\sigma C_{l\alpha}} &= \frac{1}{I_b \Omega^2} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N M_L^{(m)}
 \end{aligned} \tag{4.104}$$

N ist die Anzahl der Rotorblätter, $\psi_m = \psi + m\Delta\psi$ die Azimutposition des m -ten Blattes und $\Delta\psi = 2\pi/N$ der azimutale Blattabstand. Eine Generalisierung der Blattscherkräfte

kann in folgender Weise geschehen:

$$S_z^{(m)} = S_{z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} (S_{z_{nC}} \cos n\psi_m + S_{z_{nS}} \sin n\psi_m) \quad (4.105)$$

Somit folgt

$$T = NS_{z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^N (S_{z_{nC}} \cos n\psi_m + S_{z_{nS}} \sin n\psi_m) \quad (4.106)$$

Mit Hilfe der Summenformeln von Kap. 2 erhält man dann

$$T = NS_{z_0} + \sum_{p=1}^{\infty} N (S_{z_{pNC}} \cos pN\psi + S_{z_{pNS}} \sin pN\psi) \quad (4.107)$$

Die erste Komponente ist der stationäre Schub. Die vibratorischen Anteile im nicht drehenden System finden generell nur bei pN/rev statt und werden auch von der pN/rev -Blattkomponente im drehenden System verursacht. Genauso kann man auch die Radial- und Widerstandskraft des Blattes generalisieren.

$$\begin{aligned} S_r^{(m)} &= S_{r_0} + \sum_{n=1}^{\infty} (S_{r_{nC}} \cos n\psi_m + S_{r_{nS}} \sin n\psi_m) \\ S_x^{(m)} &= S_{x_0} + \sum_{n=1}^{\infty} (S_{x_{nC}} \cos n\psi_m + S_{x_{nS}} \sin n\psi_m) \end{aligned} \quad (4.108)$$

Die Rotorwiderstandskraft erhält man analog zum Schub, die Summierung ergibt schließlich unter Zuhilfenahme der trigonometrischen Summenformeln von Kap. 2

$$\begin{aligned} H &= \frac{N}{2} \sum_{p=1}^{\infty} [(S_{r_{(pN-1)C}} - S_{x_{(pN-1)S}}) \cos pN\psi + (S_{r_{(pN-1)S}} + S_{x_{(pN-1)C}}) \sin pN\psi] \\ &\quad + \frac{N}{2} \sum_{p=0}^{\infty} [(S_{r_{(pN+1)C}} + S_{x_{(pN+1)S}}) \cos pN\psi + (S_{r_{(pN+1)S}} - S_{x_{(pN+1)C}}) \sin pN\psi] \end{aligned} \quad (4.109)$$

und in ähnlicher Weise für die Seitenkraft

$$\begin{aligned} Y &= \frac{N}{2} \sum_{p=1}^{\infty} [-(S_{r_{(pN-1)S}} + S_{x_{(pN-1)C}}) \cos pN\psi + (S_{r_{(pN-1)C}} - S_{x_{(pN-1)S}}) \sin pN\psi] \\ &\quad + \frac{N}{2} \sum_{p=0}^{\infty} [(S_{r_{(pN+1)S}} - S_{x_{(pN+1)C}}) \cos pN\psi - (S_{r_{(pN+1)C}} + S_{x_{(pN+1)S}}) \sin pN\psi] \end{aligned} \quad (4.110)$$

Auch hier bestehen die Rotorkomponenten im nicht drehenden System aus den stationären und pN/rev -Anteilen. Dabei ist allerdings zu beachten, dass die pN/rev -Komponenten im nicht drehenden System aus den $(pN - 1)/\text{rev}$ und $(pN + 1)/\text{rev}$ -Anteilen des drehenden Systems gebildet werden. In analoger Weise nimmt man auch die Blattbiegemomente in Schlägen und Schwenken als Fourierreihe an.

$$M_F^{(m)} = M_{F_0} + \sum_{n=1}^{\infty} (M_{F_{nC}} \cos n\psi_m + M_{F_{nS}} \sin n\psi_m) \quad (4.111)$$

und

$$M_L^{(m)} = M_{L_0} + \sum_{n=1}^{\infty} (M_{L_{nC}} \cos n\psi_m + M_{L_{nS}} \sin n\psi_m) \quad (4.112)$$

Daraus erhält man dann folgende Rotorkomponenten im nicht drehenden System

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{N}{2} \sum_{p=1}^{\infty} [M_{F_{(pN-1)C}} \sin pN\psi - M_{F_{(pN-1)S}} \cos pN\psi] \\ &\quad + \frac{N}{2} \sum_{p=0}^{\infty} [-M_{F_{(pN+1)C}} \sin pN\psi + M_{F_{(pN+1)C}} \cos pN\psi] \end{aligned} \quad (4.113)$$

als Rollmoment und als Nickmoment folgt

$$\begin{aligned} M_y &= -\frac{N}{2} \sum_{p=1}^{\infty} [M_{F_{(pN-1)C}} \cos pN\psi + M_{F_{(pN-1)S}} \sin pN\psi] \\ &\quad - \frac{N}{2} \sum_{p=0}^{\infty} [M_{F_{(pN+1)C}} \cos pN\psi + M_{F_{(pN+1)C}} \sin pN\psi] \end{aligned} \quad (4.114)$$

Wie man sieht, verbleiben im nicht drehenden System, also der Hubschrauberzelle, nur die sogenannten Blattzahlharmonischen Frequenzen pN/rev , mit $p = 1, 2, 3, \dots$ und N als Blattzahl. Diese Kräfte und Momente im nicht drehenden System werden von den pN/rev Kräften und Momenten im drehenden System gebildet, wenn beide achsengleich sind (was nur bei Schub T und Drehmoment Q der Fall ist) und aus den $pN \pm 1/\text{rev}$ Kräften und Momenten im drehenden System, wenn keine Achsengleichheit vorliegt, also mit dem Blattazimut transformiert werden muss (was für die Kräfte H und Y sowie das Roll- und Nickmoment M_x, M_y der Fall ist). Somit folgt als wichtige Erkenntnis:

Der Rotor stellt ein breitbandiges Frequenzfilter dar, denn nur die Blattzahlharmonischen pN/rev sind in der Hubschrauberzelle spürbar und alle dazwischen liegenden Frequenzen, die sog. „Nebenharmonischen“, tilgen sich gegenseitig im Rotorkopf.

Die Konsequenz daraus ist, dass ein Hubschrauber umso vibrationsärmer ist, je mehr Blätter am Rotorkopf angebracht sind. Dies ist auch ein Grund dafür, dass neue Generationen von Hubschraubern eines bestimmten Typs oft ein Rotorblatt mehr erhalten als der

Vorgänger. Natürlich ist das auch eine Kostenfrage, aber es ergibt sich damit auch immer eine Leistungssteigerung im Schub und damit eine Vergrößerung der Nutzlast.

Die im Anh. A aufgeführten Tabellen geben für den 2- bis 7-Blatt-Rotor die Umsetzung der Blattkomponenten im drehenden System zu den resultierenden Rotorkomponenten im nicht drehenden System an.

Beispiel

Bei einem vierblättrigen Rotor sei die radiale Kraft an der Blattwurzel im drehenden System durch

$$S_r^{(m)} = S_0 \sin 3\psi_m \quad m = 1, 2, 3, 4$$

gegeben. Man berechne die zugehörigen Komponenten des Rotors im nicht drehenden System.

Lösung

Die Längs- und Querkraft:

$$H = \sum_{m=1}^4 (S_0 \sin 3\psi_m) \cos \psi_m = \frac{S_0}{2} \sum_{m=1}^4 (\sin 4\psi_m + \sin 2\psi_m) = 2S_0 \sin 4\psi$$

$$Y = \sum_{m=1}^4 (S_0 \sin 3\psi_m) \sin \psi_m = \frac{S_0}{2} \sum_{m=1}^4 (\cos 2\psi_m - \cos 4\psi_m) = -2S_0 \cos 4\psi$$

Beispiel

Bei einem dreiblättrigen Rotor wurde ein 2/rev-Schlagbiegemoment gemessen und in der Form

$$M_F^{(m)} = M_0 \sin 2\psi_m \quad m = 1, 2, 3$$

dargestellt. Man berechne Nick- und Rollmoment im nicht drehenden System.

Lösung

Das Nick- und Rollmoment:

$$M_y = - \sum_{m=1}^3 (M_0 \sin 2\psi_m) \cos \psi_m = -\frac{M_0}{2} \sum_{m=1}^3 (\sin 3\psi_m + \sin \psi_m) = -\frac{3}{2} M_0 \sin 3\psi$$

$$M_x = \sum_{m=1}^3 (M_0 \sin 2\psi_m) \sin \psi_m = \frac{M_0}{2} \sum_{m=1}^3 (\cos \psi_m - \cos 3\psi_m) = -\frac{3}{2} M_0 \cos 3\psi$$

Die Ergebnisse stimmen mit den Werten der Tabellen überein.

Ausgehend von den Blattanschlusskräften und -momenten des Beispiels im letzten Abschnitt folgen dann im nicht drehenden System:

$$\begin{aligned}
 \text{Schub: } C_T &= \frac{\sigma C_{l\alpha}}{6} \left[(2\Theta - \lambda) \zeta_0^* - \beta_0^* \right] - \frac{3}{2} \frac{\sigma C_{l\alpha}}{\gamma} \beta_0^{**} \\
 \text{Widerstandskraft: } \gamma 2 \frac{C_H}{\sigma C_{l\alpha}} &= \frac{\gamma}{6} (\Theta - 2\lambda) \left(\beta_{1S}^* - \beta_{1C} \right) - \frac{3}{2} \zeta_{1S}^{**} \\
 \text{Seitenkraft: } \gamma 2 \frac{C_Y}{\sigma C_{l\alpha}} &= \frac{\gamma}{6} (\Theta - 2\lambda) \left(\beta_{1C}^* + \beta_{1S} \right) + \frac{3}{2} \zeta_{1C}^{**} \\
 \text{Rollmoment: } \gamma 2 \frac{C_{Mx}}{\sigma C_{l\alpha}} &= \left(v_\beta^2 - 1 - \frac{3}{2} e_\beta \right) \beta_{1S} \\
 \text{Nickmoment: } \gamma 2 \frac{C_{My}}{\sigma C_{l\alpha}} &= - \left(v_\beta^2 - 1 - \frac{3}{2} e_\beta \right) \beta_{1C} \\
 \text{Antriebsmoment: } C_Q &= \frac{\sigma C_{l\alpha}}{\gamma} \left(v_\zeta^2 - \frac{3}{2} e_\zeta \right) \zeta_0
 \end{aligned} \tag{4.115}$$

Beispiel

Die gekoppelten Schlag-, Schwenk-Bewegungsgleichungen eines gelenkig gelagerten Rotorblattes seien im Schwebeflug durch

$$\begin{aligned}
 \ddot{\beta} + \frac{\gamma}{8} \dot{\beta}^* - [2\beta_0 - \frac{\gamma}{8} (2\Theta - \lambda)] \dot{\zeta}^* + v_\beta^2 \beta &= 0 \\
 \ddot{\zeta}^{**} + [2\beta_0 - \frac{\gamma}{8} (\Theta - 2\lambda)] \dot{\beta}^* + v_\zeta^2 \zeta &= 0
 \end{aligned}$$

gegeben. Man berechne die verschiedenen Kräfte und Momente am Blatthals und danach die resultierenden Rotorkomponenten. Dazu dient Abb. 4.26a und b.

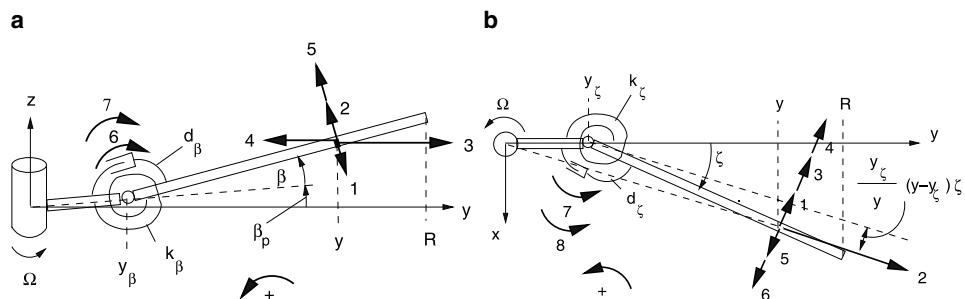


Abb. 4.26 Blattkräfte im Schwebeflug. **a** Schlagbewegung, **b** Schwenkbewegung

Lösung

Der elementare Auftrieb setzt sich aus

$$F_z' \approx L' = \frac{\rho}{2} C_{l\alpha} c \Omega^2 R^3 (\bar{V}_T^2 \Theta - \bar{V}_T \bar{V}_P)$$

zusammen, mit

$$\bar{V}_T = r \quad \bar{V}_P = \lambda \quad \delta \bar{V}_T = r \zeta^* \quad \delta \bar{V}_P = r \beta^*$$

Es wirken dann mit einigen Näherungen für kleine Gelenksabstände sowie $\beta_P = \zeta_P = 0$ folgende Kräfte mit den ihnen zugehörigen Hebelarmen:

Term	Schlagbewegung			Schwenkbewegung		
	Nr.	Kraft	Arm	Nr.	Kraft	Arm
Massenträgheit	1	$r \beta^{**}$	r	1	$r \zeta^{**}$	r
Zentrifugalkraft	3	r	$r \beta$	2	r	$r e_\zeta$
Corioliskraft	4	$2 \zeta^* r$	$r \beta$	3	$2 \beta^* r$	r
Luftkraft	2	F_z'	r	5	F_x'	r

Nun folgen für die Anschlusskräfte an der Blattwurzel:

$$\text{vertikale Querkraft: } S_z = \int_0^R -m' r \ddot{\beta} + L' dy = \frac{I_b \Omega^2}{R} \left[\frac{\gamma}{6} (2\Theta - \lambda) \zeta^* - \frac{\gamma}{6} \beta^* - \frac{3}{2} \beta^{**} \right]$$

$$\text{horizontale Querkraft: } S_x = \frac{I_b \Omega^2}{R} \left[-\frac{\gamma}{6} (\Theta - 2\lambda) \beta^* + \frac{3}{2} \left(\zeta - \zeta^{**} - \beta_0 \beta^* \right) \right]$$

$$\text{Radialkraft: } S_r = \frac{I_b \Omega^2}{R} \left(\frac{3}{2} - 3 \zeta^* \right)$$

$$\text{Schlagmoment: } M_F = I_b \Omega^2 \beta \left(v_\beta^2 - 1 - \frac{3}{2} e_\beta \right)$$

$$\text{Schwenkmoment: } M_L = I_b \Omega^2 \zeta \left(v_\zeta^2 - \frac{3}{2} e_\zeta \right)$$

4.12 Schlussfolgerungen

- Die Schwenkbewegung wird mathematisch wie die Schlagbewegung behandelt. Ihre Eigenfrequenz ist jedoch in der Regel deutlich unterhalb der Rotordrehfrequenz, was an einer wesentlich geringeren Rückstellwirkung der Zentrifugalkräfte liegt als dies bei

der Schlagbewegung der Fall ist. Außerdem ist die aerodynamische Dämpfung sehr viel kleiner, da die Widerstandsänderung aufgrund einer Schwenkgeschwindigkeit viel geringer ist als eine Auftriebsänderung aufgrund einer Schlaggeschwindigkeit. Daher müssen in der Regel mechanische Schwenkdämpfer für ausreichende Dämpfung sorgen.

- Die Torsionsbewegung hat eine Eigenfrequenz, die in der Regel sehr viel größer als die Rotordrehfrequenz ist. Dies ist auch erstrebenswert, da die an der Blattwurzel eingesetzten Blattwinkel am ganzen Blatt wirken sollen und nicht durch elastische Torsion „verschluckt“ oder zeitversetzt an der Blattspitze ankommen sollen. Die aerodynamische Dämpfung ist in der Regel ausreichend, wenn auch deutlich geringer als die der Schlagbewegung. Die Eigenfrequenz wird im Wesentlichen von der Torsionssteifigkeit bestimmt und nur wenig von Zentrifugalkräften zusätzlich verstieft.
- Eine wichtige Kopplung existiert zwischen der Schlag- und der Schwenkbewegung mittels Corioliskräften. Diese stellen in der Schwenkbewegung sogar eine größere Erregerkraft dar als die Luftkräfte.
- Durch Schrägstellen der Schlag- und Schwenkgelenksachse kann man kinematisch beide Bewegungen in eine auf- oder abnickende Änderung des Blatteinstellwinkels überführen. Damit kann man die Eigenfrequenzen aerodynamisch vergrößern oder auch verkleinern.
- Die Lage der Massenachse relativ zur Drehachse des Steuerwinkels hat eine stark verkoppelnde Wirkung einer Schlagbewegung auf die Torsionsbewegung, weniger der Schwenkbewegung auf die Torsion. Sämtliche Massenkräfte der Schlag- (und Schwenk-)bewegung haben dann einen Hebelarm zur Drehachse der Torsion und die entstehenden Momente erreichen schon bei geringen Abständen von wenigen % der Profiltiefe die gleiche Größenordnung wie die Massenträgheitsmomente der Torsion selbst. Daher wird immer versucht, durch Zusatzmassen in der Rotorblattnase die Massenachse auf die Drehachse zu bringen.
- Die Abhängigkeit der Eigenfrequenzen von der Rotordrehzahl wird im Fandiagramm dargestellt. Es zeigt auf, bei welchen Rotordrehzahlen sich Eigenfrequenzen verschiedener Eigenformen kreuzen, miteinander koppeln oder ganzzählige Vielfache der Rotorfrequenz bilden. Damit liefert es dem Ingenieur klare Aussagen über mögliche Bereiche der Betriebsdrehzahlen. Um die Betriebsdrehzahl herum sollte weder eine Schwenk- noch eine Torsionseigenfrequenz liegen, diese sollten einen Mindestabstand von ca. 0,2/rev zu Vielfachen der Rotordrehfrequenz aufweisen. Bei Schlageigenformen ist das nicht nötig, da diese aerodynamisch sehr gut gedämpft sind.
- Obwohl von jedem einzelnen Rotorblatt in der Regel eine große Bandbreite von Frequenzen der Kräfte und Momente an den Rotorkopf übertragen werden, findet man im nicht drehenden System des Hubschrauberrumpfes nur die sogenannten „Blattzahlharmonischen“ wieder (mN/rev), denn alle Zwischenfrequenzen tilgen sich gegenseitig im Rotorkopf. Will man also dynamische Kräfte und damit Vibrationen im Rumpf vermeiden, so muss man möglichst viele Rotorblätter am Rotorkopf anbringen.

4.13 Übungsaufgaben

4.13.1 Schwenkbewegung

1. Begründen Sie folgende Aussagen:
 - a) Bei Hubschrauberrotoren wird eine Schwenkeigenfrequenz im drehenden System von $0,8/\text{rev} < \nu_\zeta < 1,4/\text{rev}$ durch konstruktive Maßnahmen im Allgemeinen vermieden.
 - b) Bei einem sehr steifen gelenklosen Rotor wuchs die Schwenkamplitude sehr schnell, als das Kollektiv vergrößert wurde.
 - c) Während eines Windkanaltests eines Rotors wurde mit einem Beschleunigungssensor, der in der Nähe des Rotorkopfes befestigt war, ein $1/\text{rev}$ Signal gemessen und der Test umgehend abgebrochen.
 - d) Bei einem HHC-System zur Unterdrückung von Vibrationen wurde die Blattwurzel mit $3, 4,$ und $5/\text{rev}$ gleichzeitig angesteuert, um die $4/\text{rev}$ Vibrationen am Pilotensitz zu minimieren.
 - e) Der Rotor stellt ein Frequenzfilter für viele Vielfache der Rotordrehfrequenz dar.
2. Man berechne die Schwenkeigenfrequenz eines gelenklosen Rotorblattes im drehenden System, das einen schwenkweichen Blauthals im Bereich $l \leq r \leq l + l_1$ hat, in dem die Schwenksteifigkeit $E I_z$ deutlich kleiner ist als überall sonst.

4.13.2 Blattanschluss am Rotorkopf, Torsion

1. Begründen Sie folgende Aussagen:
 - a) Wie muss ein Tennisschläger gehalten werden, um dem Ball eine Drehung entgegen des Uhrzeigersinns zu erteilen (top spin)?
 - b) Während eines Windkanaltests brach eine Steuerstange und das Modell wurde heftig durchgeschüttelt. Wenn Sie Testingenieur wären, was würden Sie umgehend tun?
 - c) Wenn die Steuerachse auf der Massenachse liegt, gibt es keine strukturellen Kopplungen zwischen der Schlag- und Torsionsbewegung. In der Realität sind diese Bewegungsformen dennoch gekoppelt.
 - d) Ein kleiner Abstand der Massenachse von der elastischen Achse wird einen sehr kleinen Einfluss auf die Schlagbewegung haben, aber wahrscheinlich einen erheblichen Einfluss auf die Torsionsbewegung.
2. Die Weichheiten des Blattes und des Rotorkopfes werden durch zwei orthogonale Federsysteme repräsentiert, die für den Rotorkopf innerhalb des Drehlagers für die Steuerung und für das Blatt außerhalb dessen angesetzt werden, siehe Abb. 4.12. Es gibt eine Kopplung zwischen der Schlag- und der Schwenkbewegung, sobald eines der beiden Federpakete um einen Winkel gedreht wird. Die den Rotorkopf darstellenden Federn seien mit einem Winkel Θ_1 voreingestellt und die Federn des Blattes seien um den Kollektivwinkel Θ_0 relativ zu den Federn des Rotorkopfes gedreht. Stellen Sie die Schlag-Schwenkgleichungen für folgende Fälle auf:

- a) Rotorkopf flexibel und Blatt starr
 - b) Blatt flexibel und Rotorkopf starr
 - c) Rotorkopf und Blatt flexibel
3. Leiten Sie die Gleichungen für die elastische Schlag- und Schwenkbiegung her und vereinfachen Sie diese für den Fall eines starren Rotors mit einem Gelenksabstand.

4.13.3 Schlag-Schwenk-Torsionsbewegung und Kopplungen

1. Begründen Sie folgende Aussagen:
 - a) Corioliskräfte sind für Propeller weniger wichtig als für Hubschrauberrotoren
 - b) Eine schräg stehende Steuerstange kann in einer Schlag-Torsionskopplung resultieren
 - c) Die Torsions- und die Schwenkbewegung sind über Trägheitskräfte gekoppelt, wenn die Schwerpunktsachse nicht auf der elastischen Achse liegt.
 - d) Das Fandiagramm zeigt ein schmales Band von möglichen Drehfrequenzen an.
 - e) Ein Δ_3 -Effekt kann sehr vorteilhaft sein, wenn an eine Böenabminderung gedacht wird.
 - f) Im Prinzip ist es bei schwenkweichen Rotoren möglich, gleiche Steifigkeiten in Schlägen und Schwenken zu erhalten.
 - g) Die Corioliskräfte erzeugen eine Schwenkbewegung mit $2/\text{rev}$, die zu der Schlagbewegung bei $1/\text{rev}$ proportional ist.
 - h) Für herkömmliche Rotorblätter kann die radiale Dehnung aus den Bewegungsdifferentialgleichungen eliminiert werden.
 - i) Die Steuerstangen erfahren große dynamische Belastungen. Nennen Sie die Ursachen.
2. Berechnen Sie näherungsweise die Schlag-Torsionskopplung in Form des δ_3 -Winkels für einen gelenklosen Rotor mit folgenden Daten:

Lage des Steuerlagers	$y_{pl} = 0,6 \text{ m}$
Schlageigenfrequenz	$f_{\beta 0} = 1 \text{ Hz}$
Radius	$R = 6 \text{ m}$
Lockzahl	$\gamma = 8$
Drehzahl	$\text{RPM} = 300$.

3. Die Schlag- und Schwenkbewegungsgleichungen eines gelenklosen Rotors im Vakuum sind folgendermaßen gegeben:

$$\begin{aligned}\ddot{\beta} - 2\beta_0 \dot{\zeta} + \nu_\beta^2 \beta &= 0 \\ \ddot{\zeta} + 2\beta_0 \dot{\beta} + 2D_\zeta \frac{\omega_{\zeta 0}}{\Omega} \dot{\zeta} + \nu_\zeta^2 \zeta &= 0\end{aligned}$$

Wenn man den effektiven Gelenksabstand mit e und die Federsteifigkeit mit k bezeichnet,

- zeigen Sie die Kräfte und Momente am Blattgelenk im drehenden System
- berechnen Sie die Rotorkopfkräfte und -momente im nicht drehenden System.

Literatur

1. W. Johnson, *Helicopter Theory*, ISBN 0 691 07971 4, Princeton University Press, 1980
2. A.R.S. Bramwell, D.E.H. Balmford, G.T.S. Done, *Bramwell's Helicopter Dynamics*, ISBN 0 750 65075 3, Butterworth-Heinemann Ltd., 2001
3. R.L. Bielawa, *Rotary Wing Structural Dynamics and Aeroelasticity*, 2nd Edition, ISBN 1 563 47698 3, AIAA Education series, 2002
4. D. Young, R.P. Felgar, *Tables of Characterisitc Functions Representing Normal Modes of Vibration of a Beam*, Engr. Res. Series No. 44, Bureau of Engineering Research, The University of Texas, Austin, TX, 1949
5. G.G. de Coriolis, *Memoire sur les équations du mouvements relatifs des Systèmes de corps*, Journal de l'Ecole Royale Polytechnique, Vol. 24, No. 15, pp. 142–154, 1835
6. I. Chopra, *Dynamic Analysis of Constant-Lift and Free-Tip Rotors*, Journal of the AHS, Vol. 28, No. 1, pp. 24–33, 1983
7. I. Chopra, J. Dugundji, *Nonlinear Dynamic Response of a Wind Turbine Blade*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 63, No. 2, pp. 265–286, 1979
8. J.C. Houbold, G.W. Brooks, *Differential Equations of Motion for Combined Flapwise Bending, Chordwise Bending, and Torsion of Twisted, Nonuniform Rotor Blades*, NASA Report 1346, 1958
9. J.C. Hodges, E.H. Dowell, *Nonlinear Equations of Motion for elastic Bending and Torsion of Twisted Nonuniform Blades*, NASA TND 7818, 1974
10. W. Johnson, *Aeroelastic Analysis for Rotorcraft in Flight or in a Wind Tunnel*, NASA TND 8515, 1977
11. J.C. Hodges, *Unified Approach for Accurate and Efficient Modeling of Composite Rotor Blade Dynamics: The Alexander A. Nikolsky Honorary Lecture*, Journal of the AHS, Vol. 60, No. 1, pp. 1–28, 2015
12. C.H. Hong, I. Chopra, *Aeroelastic Stability Analysis of a Composite Blade*, Journal of the AHS, Vol. 30, No. 2, pp. 57–67, 1985
13. N.T. Sivaneri, I. Chopra, *Dynamic Stability of a Rotor Blade Using Finite Element Theory*, AIAA Journal, Vol. 25, no. 5, pp. 716–723, 1982
14. R.V. Southwell, B.S. Gough, *On the free transverse vibrations of airscrew blades*, ARC R&M 766, 1921
15. K. Hohenemser, *Zur Festigkeit von umlaufenden und quer zur Drehebene belasteten Stäben, die gelenkig an die Drehachse angeschlossen sind*, Ingenieur Archiv, Bd. 8, Nr. 3, S. 203–213, 1937



Instationäre Aerodynamik

5

5.1 Einleitung

In der Rotordynamik spielen neben Massenkräften und elastischen Kräften im Allgemeinen auch die Luftkräfte eine wichtige Rolle. Da es sich bei dynamischen Prozessen, insbesondere beim Rotor, um Schwingungen in einer großen Bandbreite von Frequenzen handelt – vor allem im Vorwärtsflug – sind folglich auch die dynamischen, also instationären, Luftkräfte von Bedeutung. Dies gilt sowohl für das dynamische Antwortproblem, wo die aerodynamischen Kräfte ganzzahlige Vielfache der Rotordrehfrequenz sind, als auch bei aeroelastischen Instabilitäten, die in der Regel bei anderen Frequenzen auftreten, die meistens von den Eigenfrequenzen der beteiligten Schwingungsformen der Rotorblätter und des Rumpfes dominiert sind.

Unter instationärer Aerodynamik (engl. unsteady aerodynamics) versteht man die zeitabhängige Entstehung der aerodynamischen Kräfte und Momente. Das Ziel ist hier, die grundlegenden Prinzipien der instationären Aerodynamik rotierender Flügel zu diskutieren, ohne dabei die mathematischen Einzelheiten allzu sehr zu vertiefen. Im Vergleich zum Starrflügler gibt es beim Drehflügler einige Besonderheiten.

Zu diesen gehören die sich mit der Zeit periodisch ändernden Geschwindigkeiten in Betrag und Richtung, dem periodischen Wechsel zwischen inkompressiblen und kompressiblen Strömungszuständen, die Interaktion eines Rotorblattes mit seinem eigenen Nachlauf (engl. wake) und dem Nachlauf der anderen Rotorblätter (insbesondere mit den Blattspitzenwirbeln, BVI (engl. blade-vortex interaction) genannt), das instationäre und hochgradig nichtlineare induzierte Geschwindigkeitsfeld, Schräganblasung (engl. yawed flow) und komplizierte Blattbewegungen. Außerdem treten oft Strömungsablösungen aufgrund großer Anstellwinkel sowie Gebiete mit rückwärtiger Anströmung auf. Neben einer großen Bandbreite von Unterschallmachzahlen wird auch eine große Bandbreite von Reynoldszahlen während einer Rotordrehung durchlaufen.

Zunächst ist es wichtig, die grundlegenden Prinzipien der instationären Starrflügler-aerodynamik zu verstehen und diese dann, sofern möglich, auf den rotierenden Flügel

anzuwenden. Als Literatur zur instationären Aerodynamik sei allgemein auf [1–3] und speziell auf die Anwendung bei Drehflüglern auf [4] verwiesen.

5.2 Grundlegende Gleichungen der Fluidmechanik

Man stelle sich ein reibungsfreies ($Re \rightarrow \infty$; engl. non-viscous; dies bedeutet, dass die reibungsbehaftete Grenzschicht auf der Körperoberfläche unendlich dünn ist), nicht wärmeleitendes, inkompressibles (Machzahl $M = 0$; engl. incompressible; dies bedeutet, dass die Dichte konstant ist und von Druckänderungen unbeeinflusst bleibt) Fluid in einem Strömungszustand um einen festen profilierten Körper vor, siehe Abb. 5.1. Inkompressibel bedeutet auch, dass sich Druckstörungen mit unendlicher Geschwindigkeit ausbreiten, so dass, wenn sich an einem beliebigen Ort eine Störung (Druck, Wirbeldichte, Quelle, Senke etc.) befindet, deren Auswirkung sofort im gesamten Raum spürbar ist. Dies bedeutet physikalisch eine unendlich große Schallgeschwindigkeit (engl. speed of sound). Diese Annahmen sind also nur für kleine Störungen im Niedergeschwindigkeitsbereich gültig.

Man stelle sich ein in einem Windkanal befestigtes Profil vor, das vom Strömungsmedium (dem Fluid) umströmt wird. Es ist nun von Interesse, den Zustand des Fluids an jedem Punkt x, y, z zu jeder Zeit t zu bestimmen. Der Strömungszustand besteht aus sechs Variablen, nämlich dem Druck p (engl. pressure), der Dichte ρ (engl. density), der Temperatur T und den drei Geschwindigkeitskomponenten u, v, w in den Richtungen der Koordinatenachsen x, y, z . Im Allgemeinen will man die Druckverteilung auf dem Körper errechnen, dessen Integration den Auftrieb und das Nickmoment um eine Bezugsachse (in der Regel die $c/4$ -Linie) liefert. Da der Widerstand auch wesentliche Anteile aus der Reibung beinhaltet, reicht die Druckverteilung für die Widerstandsberechnung nicht aus.

Nimmt man die Reibungseffekte mit in die Rechnung, so werden die Gleichungen außerordentlich schwierig zu lösen, selbst für die einfachsten Fälle. Um die Mathematik der Problemstellung zu vereinfachen, werden die Druck- und Widerstandsterme entkoppelt und das Auftriebsproblem wird mit der Annahme reibungsfreier Strömung gelöst. Die Reibungseffekte spielen nur in der unmittelbaren Nähe der Oberfläche in der Grenzschicht (engl. boundary layer) eine wichtige Rolle und beeinflussen den Widerstand sowie das

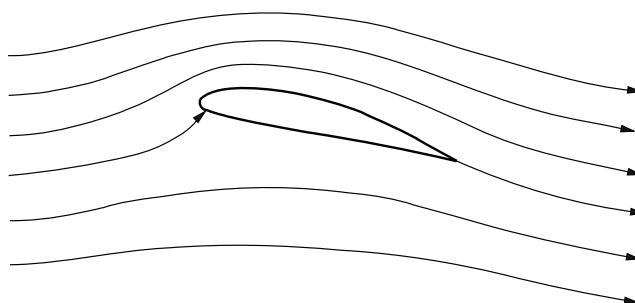


Abb. 5.1 Profil im Luftstrahl

Ablöseverhalten des Profils (engl. stall). Der Widerstand wird getrennt davon betrachtet, indem entweder empirische Ansätze oder Messdaten verwendet werden. In den meisten Fällen mit anliegender Strömung spielt die Reibung, welche von der Zähigkeit (oder auch Viskosität, engl. viscosity) des Fluids verursacht wird, bei der Lösung für die Druckverteilung keine nennenswerte Rolle. Effekte der Strömungsablösung werden jedoch von der Grenzschicht stark beeinflusst und ihr Zustand (Laminar, turbulent oder eine Mischung aus beiden) spielt dann eine große Rolle.

Die grundlegenden Gleichungen der Fluidmechanik für reibungsfreie Strömungszustände sind (vergleiche mit der Herleitung der induzierten Geschwindigkeiten mit Hilfe der Strahltheorie):

- Der Kontinuitäts- oder Massenerhaltungssatz:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\rho \vec{V}) = 0 \quad (5.1)$$

worin die Geschwindigkeit als Vektor enthalten ist

$$\vec{V} = \vec{i} u + \vec{j} v + \vec{k} w \quad (5.2)$$

- Der Impulserhaltungssatz oder Newton's Gesetz:

$$\rho \frac{D \vec{V}}{Dt} = - \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) p + \rho \vec{f} \quad (5.3)$$

Dies sind drei Gleichungen, wobei D/Dt das totale Derivativ darstellt

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (5.4)$$

und \vec{f} die wirkende Körperkraft ist, welche ebenfalls aus drei Komponenten besteht:

$$\vec{f} = \vec{i} f_x + \vec{j} f_y + \vec{k} f_z \quad (5.5)$$

Wenn die Zähigkeit bzw. die Viskosität mit einbezogen wird, werden diese Gleichungen auch Navier-Stokes Gleichungen genannt.

- Der Energieerhaltungssatz: Aus dem ersten Gesetz der Thermodynamik resultiert (T = Temperatur in K)

$$\rho c_V \frac{DT}{Dt} = \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (5.6)$$

Dies drückt aus, dass die innere Energie gleich der geleisteten mechanischen Arbeit ist, worin c_V die spezifische Wärmekonstante bei konstantem Volumen darstellt. Eine der einfachsten Energieerhaltungsgleichungen ist Bernoulli's Gleichung.

- Die Zustandsgleichung idealer Gase:

$$p = \rho \mathfrak{R} T \quad (5.7)$$

worin \mathfrak{R} die Rankine'sche Gaskonstante ist (für Luft: 287,058 J/(kg K)).

Damit hat man sechs Grundgleichungen mit sechs Unbekannten, die es zu bestimmen gilt. Dies sieht zunächst nicht sehr schwer aus, aber in der Realität ist es unmöglich, eine geschlossene analytische Lösung selbst für die allereinfachsten Fälle zu finden. Daher muss man diese entweder aufwändig mit Hilfe von CFD-Verfahren (CFD = computational fluid dynamics) berechnen oder sich auf eine näherungsweise Lösung beschränken. Eine solche stellt in diesem Fall die sogenannte Profiltheorie schlanker Körper unendlicher Streckung (engl. thin airfoil theory) zur Berechnung des Auftriebs und Nickmomentes dar. Dies reduziert das dreidimensionale Problem auf ein zweidimensionales.

5.3 Die Profiltheorie

Hierbei wird ein dünnes Profil als Schnitt eines unendlich langen Flügels angenommen, so dass die von ihm hervorgerufenen Störungen in der Strömung auch klein sind und in der Ebene des Schnittes verbleiben (zweidimensionales Problem). Zunächst nehme man stationäre Strömung wie in Abb. 5.1 an. Grundlegende Annahmen sind:

- Es wird eine ebene Strömung angenommen, also handelt es sich nur noch um ein zweidimensionales Problem.
- Die Störungen in der Strömung sind klein und die Strömung liegt an der Oberfläche an (keine Ablösung).
- An der Oberfläche des Körpers gibt es ausschließlich Tangentialgeschwindigkeiten (sie wird nicht durchströmt).
- Die Hinterkante ist spitz zulaufend und wird daher nicht umströmt (Kutta'sche Abflussbedingung).

Das Problem eines gewölbten Profils mit einer gewissen Dicke wird dann in zwei Probleme aufgespalten, siehe Abb. 5.2. Das erste Problem ist das der Umströmung des dünnen symmetrischen Profiltropfens, welches auch das Verdrängungsproblem genannt wird. Hier werden sowohl der Anstellwinkel wie auch die Wölbung zu Null gesetzt, was eine symmetrische Druckverteilung auf Ober- und Unterseite bewirkt. Der Profiltropfen wird durch eine Quell-Senken-Verteilung auf seiner Sehne ersetzt, siehe Abb. 5.3. Diese Quell-Senken-Verteilung ist zunächst eine Unbekannte und das Problem wird gelöst, indem man die Bedingung an der Oberfläche des Tropfens nutzt: dort dürfen nur tangentiale Geschwindigkeiten auftreten. Mit der errechneten Quell-Senken-Verteilung kann man dann das Geschwindigkeitsfeld und die Druckverteilung ermitteln. Der Tropfen al-

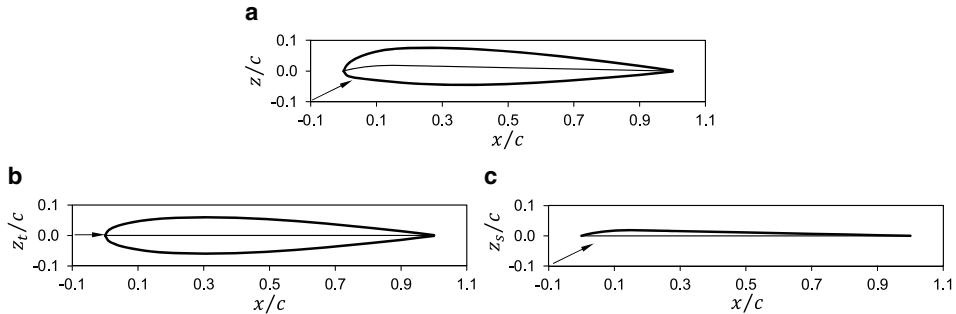


Abb. 5.2 Aufteilung in das Dicken- und Auftriebsproblem, NACA 23012. **a** Gewölbtes, dickes Profil = **b** Tropfen ohne Anstellwinkel + **c** Skelettligne mit Anstellwinkel

lein bewirkt keinen Auftrieb. Um den Tropfen hinten zu schließen, muss die Summe aller Quellen und Senken Null sein.

Das zweite Problem ist die Auftriebsberechnung. Dazu wird die Dicke des Profils zu Null gesetzt und die gewölbte Skelettligne mit einem Anstellwinkel versehen. Es wird dann die Skelettligne mit einer Wirbeldichtebelegung angenommen und die Lösung für die entstehende Geschwindigkeits- und Druckverteilung ist logischerweise nicht symmetrisch, siehe Abb. 5.4. Als Hilfen zur Bestimmung der Wirbeldichtebelegung dienen die Kutta'sche Abflussbedingung an der Hinterkante und die Bedingung der tangentialen Strömung entlang der Skelettligne, das heißt, sie wird nicht normal dazu durchströmt. Danach kann man die Druckverteilung bestimmen; Glauert z. B. hat 1929 eine Fourierreihe angesetzt, um dieses Problem zu lösen [5]. Für die ebene Platte ist die Birnbaum'sche Normalverteilung von 1923 eine bekannte Lösung [6].

Abb. 5.3 Zum Verdrängungsproblem. **a** Tropfen ohne Anstellwinkel, **b** Quell-Senkenverteilung

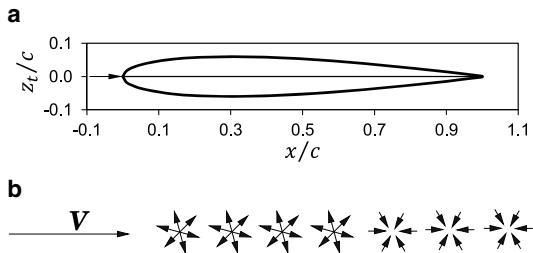
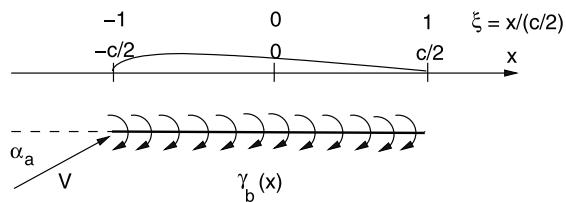


Abb. 5.4 Zum Auftriebsproblem: Wirbeldichteverteilung $\gamma_b(x)$



Die Superposition der Geschwindigkeitsfelder aus Verdrängung- und Auftriebsproblem (Tropfen und Wirbeldichte) liefert die Umströmung des angestellten dicken Profils wie in Abb. 5.1 skizziert.

5.4 Die Prandtl'sche Traglinientheorie

Für den Flügel endlicher Streckung muss man die Umströmung der Flügelenden berücksichtigen, die dazu führt, dass der Auftrieb am Flügelende verschwindet (engl. blade tip losses). Im Zusammenhang mit dem Auftrieb entsteht eine (sog. gebundene) Zirkulation um den Tragflügel (engl. bound circulation). An den Flügelenden ist der Auftrieb aufgrund der Umströmung derselben Null und daher muss die Zirkulation dort verschwinden, was bedeutet, dass die Zirkulation entlang der Spannweite variiert. Wann immer eine Änderung der Zirkulation in Spannweitenrichtung erfolgt, wird gemäß des 1. Helmholtz'schen Wirbelerhaltungssatzes (siehe unten) der Gradient dieser Zirkulation als Wirbeldichte in den Nachlauf hinter dem Flügel in Form von sog. Längswirbeldichte abgehen (engl. trailed vorticity). Wenn diese Änderung der Zirkulation kontinuierlich erfolgt, so gibt es auch eine kontinuierliche Wirbeldichtefläche hinter dem Flügel (engl. continuous vorticity sheet; siehe Abb. 5.5). Die Helmholtz'schen Wirbelerhaltungssätze lauten:

1. Eine Wirbellinie kann in einem Strömungsfeld weder beginnen noch enden, sondern sie bildet entweder einen geschlossenen Wirbelring oder reicht von einer Grenze des Strömungsbereichs an eine andere.
2. Kein Fluidelement kommt in Drehung, welches sich nicht von Anfang an bereits in Drehung befindet.

Mit der vereinfachenden Annahme, dass die Zirkulation über den ganzen Flügel konstant ist und an den Spitzen abrupt auf Null zurückgeht, kann man den Nachlauf durch

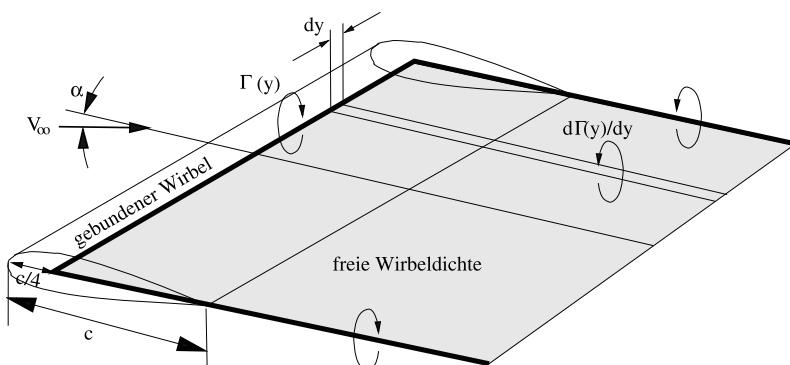
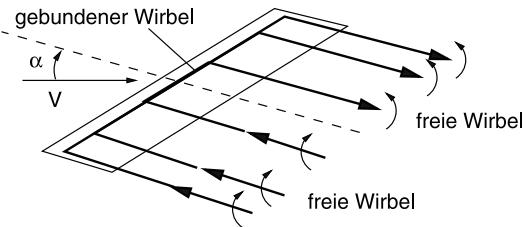


Abb. 5.5 Nachlaufkonzept des Flügels mit Auftrieb

Abb. 5.6 Zum Nachlaufmodell der Prandtl'schen Traglinientheorie



zwei konzentrierte Blattspitzenwirbel ersetzen. Dieses Konzept wurde erstmals 1907 von Lanchester [7] aufgestellt und gibt ein gutes globales Bild der Flügelleistung, ist aber unbrauchbar für lokale Berechnungen.

Eine bessere Modellierung erhält man, wenn man den Flügel und seinen Nachlauf durch eine Reihe separater Wirbelemente diskretisiert, wie dies von Prandtl [8] vorgeschlagen wurde, siehe Abb. 5.6. Dabei werden die spannweitig orientierten Wirbel auf der $c/4$ -Linie des Flügels positioniert und als gebundene (oder auch tragende) Wirbel bezeichnet. Die Wirbel im Nachlauf sind die freien Wirbel, wobei dort kein Druckunterschied auftreten darf, da sich ja kein fester Körper zwischen den Wirbelschichten befindet. Diese Nachlaufwirbelschichten werden mit der Fluggeschwindigkeit weggetragen (engl. wake convection). Bei Flügeln mit großer Streckung (engl. aspect ratio) kann man den gebundenen Teil der Wirbel als einen einzigen Wirbel variabler Stärke betrachten und dann heißt diese Modellierung Prandtl'sche Traglinientheorie. Werden statt diskreten Wirbeln kontinuierliche Wirbeldichteveilungen sowohl in Profiltiefen- wie auch in Spannweitenrichtung angesetzt, so heißt sie Tragflächentheorie, die von Prandtl 1920 veröffentlicht wurde [8].

Für stationäre Strömungszustände in zweidimensionaler Strömung gibt es keine abgehenden Wirbeldichten in der zuvor genannten Form; bei instationären Zuständen jedoch ändert sich der Auftrieb mit der Zeit und dann gibt es aufgrund der Helmholtz'schen Wirbelerhaltungssätze eine kontinuierliche Abgabe von parallel zum Flügel orientierter Wirbeldichte in den Nachlauf (engl. shed vorticity), deren Stärke nun der zeitlichen Änderung der gebundenen Zirkulation entspricht. Besonders die Wirbeldichte kurz hinter dem Profil spielt eine wichtige Rolle bei der Berechnung der instationären Druckverteilung auf dem Profil.

Das Problem der Auftriebsberechnung wird nun mit Hilfe der Profiltheorie angegangen. Die Profilsehne sei mit Wirbeldichte unbekannter Stärke versehen, siehe Abb. 5.4. Die Profiltiefe sei c , die Wölbung z eine gegebene Funktion der Profilkordinate x und wegen der Annahme kleiner Störungen sei $z(x) \ll c$. Die Strömung wird als stationär, reibungsfrei und inkompressibel angenommen. Außerdem wird eine zweidimensionale Strömung vorausgesetzt.

5.4.1 Stationäre Strömung

Die gewölbte Skeletlinie wird vereinfacht durch eine an die gerade Profilsehne gebundene Wirbeldichteverteilung $\gamma_b(x)$ ersetzt (engl. bound vorticity, siehe Abb. 5.4) und die von ihr verursachte induzierte Geschwindigkeit an jeder Stelle x auf der Sehne ist durch das Biot-Savart'sche Wirbelinduktionsgesetz gegeben. Es wird ein Koordinatensystem mit Ursprung in der Profilmittte eingeführt, so dass die Vorderkante bei $x = -c/2$ und die Hinterkante bei $x = c/2$ liegt, siehe Abb. 5.4.

$$v_i(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{\gamma_b(\xi)}{\xi - x} d\xi \quad (5.8)$$

Der effektive Anstellwinkel an jeder Stelle ist die Summe von geometrischem Anstellwinkel der gewölbten Skeletlinie $\alpha(x)$ und induziertem Anstellwinkel $\alpha_i(x)$, welcher sich unter Annahme kleiner Winkel aus

$$\alpha_i(x) = \arctan \frac{v_i(x)}{V} \approx \frac{v_i(x)}{V} \quad (5.9)$$

bestimmt. Nun gilt es, die Wirbeldichte derart zu bestimmen, dass die Strömung überall tangential zur Skeletlinie $z_s(x)$ verläuft.

$$\frac{dz_s(x)}{dx} = \alpha + \alpha_i(x) = \alpha + \frac{1}{2\pi V} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{\gamma_b(\xi)}{\xi - x} d\xi \quad (5.10)$$

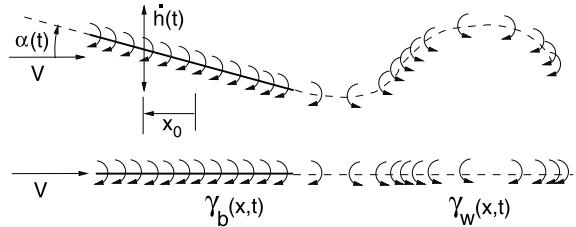
Die Kutta'sche Abflussbedingung führt auf die Forderung verschwindender Wirbeldichte an der Hinterkante: $\gamma_b(x = c/2) = 0$. Glauert setzte eine Fourierreihe an, um die Lösung zu bestimmen [5]. Eine weitere Lösung stammt von Birnbaum [6]. In dimensionsloser Schreibweise der klassischen Aerodynamik wird nun die Koordinate x auf die halbe Profiltiefe $c/2 = s$ (vom engl. semi-chord) bezogen, so dass die Integralgrenzen dann -1 und $+1$ betragen.

5.4.2 Instationäre Strömung

Hier spielt zusätzlich noch die freie Wirbeldichte γ_w (engl. wake (or shed wake) vorticity) im Nachlauf hinter dem Profil eine wichtige Rolle. Man nehme an, dass das Profil vertikale Bewegungen $h(t)$ (engl. plunge or heave motion; positiv nach unten) und Anstellwinkelbewegungen $\alpha(t)$ um die elastische Achse ausführen kann (engl. pitch motion; positiv aufnickend).

Abb. 5.7 Wirbeldichtekonzept

des bewegten Profils



Da jede Änderung des Anstellwinkels eine Auftriebs- und damit auch Zirkulationsänderung bewirkt, muss aufgrund der Energieerhaltungssätze die zeitliche Änderung der gebundenen Zirkulation gleichzeitig eine ebenso große Zirkulation am Beginn des Nachlaufs mit umgekehrtem Vorzeichen entstehen lassen. Es werden nun gebundene Wirbeldichte γ_b und freie Wirbeldichte γ_w existieren, siehe Abb. 5.7.

Nun ist der Auftrieb von den Induktionen beider Wirbeldichten abhängig. Bei instationärer Bewegung spielt die (zeitlich unveränderliche) Wölbung keine Rolle mehr und die induzierten Geschwindigkeiten auf der Skelettskizze resultieren aus Beiträgen der an ihr gebundenen und der freien Wirbeldichte im Nachlauf hinter dem Profil. Der Einfachheit halber werden beide auf einer geraden Linie liegend angenommen (siehe unterer Teil der Abb. 5.7).

$$v_i(x, t) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-c/2}^{c/2} \frac{\gamma_b(\xi, t)}{\xi - x} d\xi + \int_{c/2}^{\infty} \frac{\gamma_w(\xi, t)}{\xi - x} d\xi \right] \quad (5.11)$$

Die Geschwindigkeitsverteilung normal zur Skelettskizze ist nun zeit- und ortsabhängig.

$$w_{\text{eff}}(x, t) = V\alpha(t) + \dot{h}(t) + \dot{\alpha}(t)(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\text{eff}} = \frac{w_{\text{eff}}}{V} \quad (5.12)$$

Wieder muss die resultierende Strömung tangential zur momentanen – nun zeitabhängigen – Lage der Skelettskizze verlaufen und darf diese nicht durchströmen, also $w_{\text{eff}}(x, t) = 0$ für $x < c$.

$$\begin{aligned} w_{\text{eff}}(x, t) + v_i(x, t) &= V\alpha(x, t) + \dot{h}(t) + \dot{\alpha}(t)(x - x_0) \\ &+ \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-c/2}^{c/2} \frac{\gamma_b(\xi, t)}{\xi - x} d\xi + \int_{c/2}^{\infty} \frac{\gamma_w(\xi, t)}{\xi - x} d\xi \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Die Gesamtzirkulation des Profils ist das Integral über die gebundene Wirbeldichte

$$\Gamma(t) = \int_{-c/2}^{c/2} \gamma_b(x, t) dx \quad (5.14)$$

und die in den Nachlauf an der Profilhinterkante abgehende Wirbeldichte setzt sich aus dem zeitlichen Gradienten dieser Zirkulation $d\Gamma/dt = \dot{\Gamma}$ zusammen:

$$\gamma_w(c/2, t) = -\frac{\dot{\Gamma}(t)}{V} \quad (5.15)$$

und für $x > c/2$, also im Rest des Nachlaufes:

$$\gamma_w(x, t) = -\frac{\dot{\Gamma}\left(t - \frac{x-c/2}{V}\right)}{V} \quad (5.16)$$

Generell liegt hier die vereinfachende Annahme zugrunde, dass die abgehende Wirbeldichte mit der Geschwindigkeit der Strömung weggetragen wird und der Nachlauf keine Deformationen durch vertikale Bewegung der Profilhinterkante oder durch Selbstinduktion erfährt, also geradlinig bleibt, was eine erhebliche Vereinfachung der Realität darstellt. Die Kutta'sche Abflussbedingung an der Hinterkante lautet zu jedem Zeitpunkt $\gamma_b(c/2, t) = 0$.

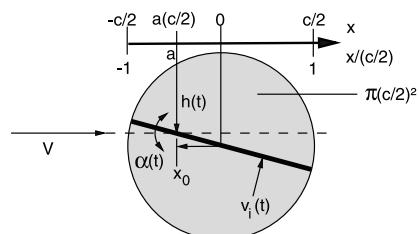
Die Lösung der obigen Gleichungen kann für einige spezielle Fälle (z. B. harmonische Schwingungen) gefunden werden, wenn man eine Fourierreihe als Lösungsansatz heranzieht. Ein wichtiges Ergebnis der instationären inkompressiblen Profiltheorie ist, dass die Normalgeschwindigkeiten am 3/4-Punkt des Profils ($w_{3/4}$) für die Berechnung des zirkulatorischen Anteils des Auftriebes und Momentes maßgeblich sind.

Die Lösung des instationären Problems ist für sprungförmige Anstellwinkeländerungen von Wagner (1925, [9]) und für harmonische Schwingungen von Theodorsen (1935, [10]) und Küssner (1936, [11]) angegeben worden.

5.4.3 Die quasistationäre Näherung

Hierunter versteht man eine besondere Betrachtungsweise der dynamischen Vorgänge. Dazu wird zu jedem Zeitpunkt die momentane Bewegung des Profils sozusagen eingefroren und ein effektiver Anstellwinkel aus der momentanen Profilbewegung errechnet (Abb. 5.8; darin erfolgt die Drehbewegung $\alpha(t)$ um einen Punkt $x_0 = ac/2$ relativ zur Profilmittte und die Vertikalbewegung dieses Punktes ist $h(t)$), um die aerodynamischen

Abb. 5.8 Zur quasistationären Annahme



schen Kräfte daraus in der stationären Weise zu ermitteln. Hier wird also die Dynamik nur zur Ermittlung des Anstellwinkels verwendet, ohne eine Amplituden- oder Phasenänderung der aerodynamischen Antwort aufgrund des Nachlaufes mit einzubeziehen. Dies entspricht der Vernachlässigung des Nachlaufes. Hier genügt es, die Normalgeschwindigkeit $w_{3/4}$ bzw. den Anstellwinkel am 3/4-Punkt des Profils zu ermitteln ($x = c/4$; man beachte: Ursprung ist in der Profilmitte), der sich aus

$$w_{3/4}(t) = V\alpha(t) + \dot{h}(t) + \dot{\alpha}(t) \left(\frac{c}{4} - a \frac{c}{2} \right) \Rightarrow \alpha_{3/4} = \frac{w_{3/4}}{V} \quad (5.17)$$

ergibt und der Auftriebsbeiwert ist dann

$$C_l(t) = C_{l\alpha}\alpha_{3/4}(t) \quad (5.18)$$

so dass sich der resultierende quasistationäre (engl. quasi-steady) Auftrieb aus

$$L'_{qs}(t) = \frac{\rho}{2}V^2 c C_l(t) \quad (5.19)$$

berechnet. Der Auftriebsanstieg $C_{l\alpha}$ kann aus der stationären Profiltheorie oder von Messungen des Profils genommen werden. In der Profiltheorie ist der aerodynamische Neutralpunkt bei 1/4 der Profiltiefe ($x = -c/4$) bzw. $a = -0,5$ gelegen und die Wölbung spielt in der instationären Aerodynamik keine Rolle. Es ist interessant zu beobachten, dass bei der Auftriebsberechnung in instationärer inkompressibler Strömung die Normalgeschwindigkeiten am 3/4 Punkt des Profils von besonderer Bedeutung sind. Daher wird bei der Berechnung des stationären, quasistationären sowie instationären Auftriebes der Anstellwinkel an diesem Punkt des Profils ermittelt. Interessanterweise spielt bei einer Lage der Drehachse von $a = 0,5$, also Drehachse am 3/4 Punkt des Profils, der Term mit $\dot{\alpha}$ keine Rolle mehr und es folgt

$$\alpha_{3/4}(t, a = 0,5) = \alpha(t) + \frac{\dot{h}(t)}{V} \quad (5.20)$$

In aller Regel werden bei Hubschraubern jedoch sowohl die Drehachse als auch die elastische Achse bei 1/4 der Profiltiefe, also bei $a = -0,5$, liegen. Damit folgt:

$$\alpha_{3/4}(t, a = -0,5) = \alpha(t) + \frac{\dot{h}(t)}{V} + \frac{\dot{\alpha}(t)c}{2V} \quad (5.21)$$

5.5 Instationäre Aerodynamik

Die Profiltheorie der instationären (engl. unsteady) Aerodynamik geht von einem unendlich langen Flügel in inkompressibler, reibungsfreier Strömung aus. Dieser Flügel hat zwei Freiheitsgrade: den der Anstellwinkeländerung $\alpha(t)$ um eine irgendwo bei $x = ac/2$ gelegene Achse sowie den der Vertikalbewegung $h(t)$ (wie in Abb. 5.8). Die entstehenden instationären Luftkräfte können nun in zwei Kategorien eingestuft werden: in die

zirkulatorischen (engl. circulatory) und die nicht zirkulatorischen (engl. non-circulatory) Anteile. Erstere sind durch eine zeitabhängige Zirkulation verursacht worden, ihr Ursprung liegt also in einer Wirbeldichteverteilung auf dem Profil und im Nachlauf. Die nicht zirkulatorischen Kräfte sind Massenträgheitskräfte und werden nur von lokalen Beschleunigungen verursacht. Sie werden auch virtuelle oder scheinbare Massenkräfte genannt (engl. virtual or apparent mass). Diese verschiedenen Kräfte werden im Folgenden näher betrachtet.

Als Vorzeichenkonvention sei die Vertikalgeschwindigkeit $\dot{h}(t)$ als positiv für eine Abwärtsbewegung vereinbart sowie die Anstellwinkelbewegung als positiv, wenn die Profilvorderkante sich aufwärts bewegt (beides vergrößert den Auftrieb). Das zugrunde liegende Koordinatensystem hat seinen Ursprung in der Profilmittle und die Referenzlänge ist daher die halbe Profiltiefe, siehe Abb. 5.8. Die Komponenten des Auftriebs sind $L'_{1,2,3}$ als Kraft pro spannweitiger Längeneinheit und das Moment ist M'_a entsprechend als Moment pro Längeneinheit, daher jeweils mit $' = d/dy$ versehen.

- Der Auftrieb L'_1 ist zirkulatorischen Ursprungs und wirkt bei $1/4$ der Profiltiefe.

$$L'_1 = \frac{\rho}{2} V^2 c C_{l\alpha} \left[\alpha(t) + \frac{\dot{h}(t)}{V} + \frac{\dot{\alpha}(t)c}{2V} (0.5 - a) \right] f(k) = L'_{qs} f(k) \quad (5.22)$$

wobei a die auf $c/2$ bezogene dimensionslose Lage der Nickachse relativ zur Profilmittle darstellt und in halben Profiltiefen als Einheit eingesetzt wird. Positiv ist a , wenn die Nickachse hinter der Profilmittle liegt, siehe Abb. 5.8. $f(k)$ ist eine von der sogenannten reduzierten Frequenz k (engl. reduced frequency) abhängige komplexe Übertragungsfunktion, auf die später noch eingegangen wird.

- Der Auftrieb L'_2 ist nicht zirkulatorischen Ursprungs. Dieser wirkt in der Profilmittle und besteht aus dem Produkt der bewegten Luftmasse und der Beschleunigung derselben an der Profil sehne. Dies kann man sich als einen Zylinder um das Profil vorstellen, wobei die Profiltiefe c den Durchmesser darstellt, siehe Abb. 5.8. Die Luftmasse innerhalb dieses Zylinders, also $\rho\pi(c/2)^2$, wird von der Profilbewegung erfasst und bewirkt Trägheitskräfte.

$$L'_2 = \rho\pi \left(\frac{c}{2} \right)^2 \left[\ddot{h}(t) - a \frac{c}{2} \ddot{\alpha}(t) \right] \quad (5.23)$$

- Der Auftrieb L'_3 ist ebenfalls nicht zirkulatorischen Ursprungs mit Wirkungspunkt bei $3/4$ Profiltiefe. Physikalisch ist diese Kraft von der Art einer Zentrifugalkraft und proportional dem Produkt von Anströmgeschwindigkeit und Anstellwinkeländerung (was eine Beschleunigung darstellt) und auch eine Trägheitskraft bewirkt:

$$L'_3 = \rho\pi \left(\frac{c}{2} \right)^2 [V(t)\alpha(t)] \cdot \approx \rho\pi \left(\frac{c}{2} \right)^2 V \dot{\alpha}(t) \quad (5.24)$$

Im Ausdruck auf der rechten Seite wurde angenommen, dass die Geschwindigkeit V näherungsweise konstant ist. Insbesondere im schnellen Vorwärtsflug muss diese Annahme fallen gelassen und der Term $\dot{V}\alpha$ mitgenommen werden.

- Das Nickmoment M'_a nicht zirkulatorischen Ursprungs, ebenfalls eine Trägheitskraft.

$$M'_a = -\rho \pi \left(\frac{c}{2}\right)^4 \frac{\ddot{\alpha}(t)}{8} \quad (5.25)$$

Der gesamte Auftrieb und das resultierende Moment um die Drehachse bei a sind nun

$$\begin{aligned} L' &= L'_1 + L'_2 + L'_3 &= L'_c + L'_{nc} \\ M' &= (a + 0,5) \frac{c}{2} L'_1 + a \frac{c}{2} L'_2 + (a - 0,5) \frac{c}{2} L'_3 + M'_a &= M'_c + M'_{nc} \end{aligned} \quad (5.26)$$

wobei die Abkürzungen $L'_c = L'_1 = L'_{qs} f(k)$ und $L'_{nc} = L'_2 + L'_3$ bedeuten. Der Einfluss der abgehenden Wirbeldichte in den Nachlauf auf die Kräfte und Momente steckt nur in den zirkulatorischen Anteilen, und zwar in der Funktion $f(k)$ in L'_1 . Mit $a = -0,5$ (typisch für Hubschrauber) folgt für das Moment

$$M' = -\frac{c}{4} L'_2 - \frac{c}{2} L'_3 + M'_a = -\pi \rho \left(\frac{c}{2}\right)^3 \left[\frac{\ddot{h}(t)}{2} + V \dot{\alpha}(t) + \frac{3c}{16} \ddot{\alpha}(t) \right] \quad (5.27)$$

Wie man sieht, weist das Moment dann keine zirkulatorischen Anteile auf. Der wichtigste Term darin ist $V \dot{\alpha}$. Auch hier ist im schnellen Vorwärtsflug der Term $\dot{V} \alpha$ einzuführen.

5.5.1 Harmonische Profilbewegungen, Theodorsen's Lösung

Man stelle sich vor, dass der Flügel harmonische Schwingungen mit der Frequenz ω in seinen beiden Freiheitsgraden Schlagen und Drehen ausführt:

$$h(t) = \bar{h} e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad \alpha(t) = \bar{\alpha} e^{i\omega t} \quad (5.28)$$

Damit muss auch die Wirbeldichte im Nachlauf periodisch sein und ihre Intensität wird sich mit der Schwingungsfrequenz ändern. Die davon abhängigen zirkulatorischen Anteile der Luftkräfte hängen von der sogenannten reduzierten Frequenz k ab, die wie folgt definiert ist:

$$k = \frac{\omega c}{2V} \quad (5.29)$$

Sie gibt an, wie lang eine Schwingungsperiode im Nachlauf ($= \omega/V$) des Profils in Vielfachen der halben Profiltiefe ($c/2$) als Bezugslänge ist. Der Kehrwert der reduzierten Frequenz ist die dimensionslose Wellenlänge einer Periode (also der Weg $(V/\omega)/(c/2)$, den das Profil während einer Schwingung zurücklegt) und gibt damit an, wie weit weg die Wirbeldichte im Nachlauf vom erzeugenden Profil entfernt ist. Diese Entfernung ist ja ein direktes Maß für den Einfluss, den sie mittels Induktion noch haben kann. Zur Veranschaulichung sei auf Abb. 5.9 verwiesen. Im oberen Teil (Abb. 5.9a) erfolgte eine Schwingungsperiode innerhalb einer Profiltiefe $= 2(c/2)$, das Ereignis ist also in Bezug auf die Profiltiefe hochfrequent: $k = 1/2 = 0,5$. Im unteren Teil (Abb. 5.9b) legt in

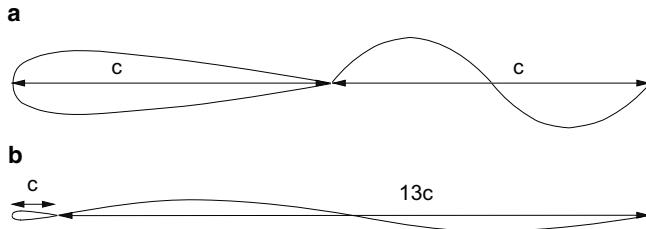


Abb. 5.9 Zur physikalischen Interpretation der reduzierten Frequenz, **a** große reduzierte Frequenz, **b** kleine reduzierte Frequenz

diesem Beispiel das Profil $13c = 26(c/2)$ während einer Schwingungsperiode zurück, also ist $k = 1/26 \approx 0,04$ und die Änderungen am Profil daher recht niederfrequent, also quasistationär. Als Grenze zwischen quasistationärer und instationärer Betrachtungsweise gilt $k = 0,05$. Der Auftrieb erfährt eine Amplituden- und Phasenänderung, die durch die Theodorsen-Funktion $C(k)$ (engl. lift deficiency function) beschrieben wird und 1935 analytisch als exakte Lösung der schwingenden ebenen Platte in inkompressibler Strömung mit der Methode der konformen Abbildung aufgestellt wurde [10].

Bereits 1922 hatte Birnbaum [12] mit der Methode der Wirbeldichtebelegung (Singularitätenverfahren) einen Lösungsansatz beschrieben, der von Küssner 1936 [11] vollendet wurde und naturgemäß zur selben Funktion $C(k)$ führte. Davon beeinflusst sind natürlich nur die zirkulatorischen – also von Wirbeldichte durch Induktion erzeugten – Anteile, während die nicht zirkulatorischen ja ausschließlich durch die Beschleunigungsterme definiert sind.

$$L' = L'_{qs} C(k) + L'_{nc} \quad (5.30)$$

Die Abminderung des zirkulatorischen Auftriebes durch die Theodorsenfunktion variiert von $|C(k)| = 1$ bei stationärer Strömung ($k = 0$) und bei sehr kleinen reduzierten Frequenzen bis zu $|C(k)| = 0,5$ für den Grenzfall unendlicher Frequenz ($k \rightarrow \infty$). Der imaginäre Anteil bewirkt eine Phasennacheilung der Auftriebsantwort relativ zum momentanen Anstellwinkel. Diese Auftriebsabminderung repräsentiert den Einfluss der abgehenden Wirbeldichte auf die zirkulatorischen Anteile des Auftriebs und Momentes und reduziert generell die Amplitude der quasistationären Betrachtungsweise. Die exakte Formulierung der Theodorsenfunktion lautet:

$$\begin{aligned} C(k) &= F(k) + i G(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + i H_0^{(2)}(k)} \quad \text{mit} \quad H_n^{(2)}(k) = J_n(k) - i Y_n(k) \\ F(k) &= \frac{J_1(k) [J_1(k) + Y_0(k)] - Y_1(k) [J_0(k) - Y_1(k)]}{[J_1(k) + Y_0(k)]^2 + [J_0(k) - Y_1(k)]^2} \\ G(k) &= -\frac{J_1(k) [J_0(k) - Y_1(k)] + Y_1(k) [J_1(k) + Y_0(k)]}{[J_1(k) + Y_0(k)]^2 + [J_0(k) - Y_1(k)]^2} \end{aligned} \quad (5.31)$$

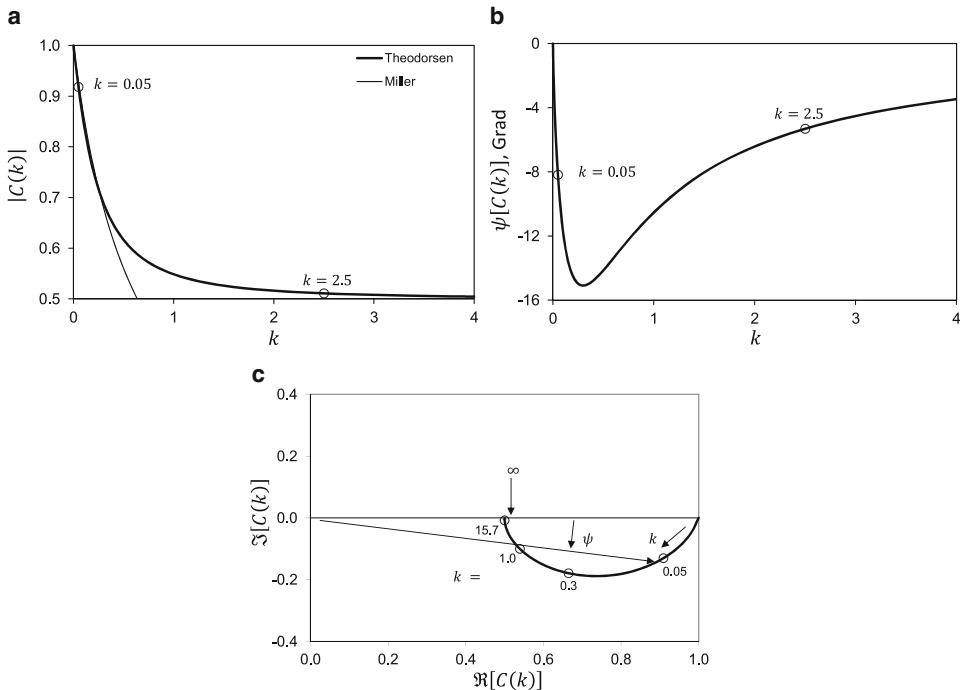


Abb. 5.10 Eigenschaften der Theodorsenfunktion. **a** Amplitude, **b** Phase, **c** Theodorsenfunktion

Darin sind $H_n^{(2)}(k)$, $n = 0, 1$ die sogenannten Hankel'schen Zylinderfunktionen zweiter Art der nullten und ersten Ordnung enthalten, die auf den Besselfunktionen nullter und erster Ordnung $J_n(k)$, $n = 0, 1$ sowie den Weber- oder auch Neumann-Funktionen gleicher Ordnung $Y_n(k)$, $n = 0, 1$ basieren. Diese Funktionen deuten darauf hin, dass es sich bei der Lösung des Problems des schwingenden Profils um das Problem einer Wellengleichung handelt, was auch einleuchtend ist, da der Nachlauf eine wellenförmige Belegung von Wirbeldichte aufweist, deren Rückinduktion auf den Ort des Profils mit diesen Funktionen beschrieben wird. In Abb. 5.10 sind Amplitude und Phase dieser Funktion dargestellt; man kann die Funktion $C(k)$ als einen Rückkopplungsparameter des Nachlaufs ansehen. Mit dieser Funktion lauten die Auftriebs- und Momentenausdrücke bei harmonischer Bewegung (mit $C_{l\alpha} = 2\pi$):

$$\begin{aligned}
 L' &= 2\pi\rho \frac{c}{2} VC(k) \left[V\alpha + \dot{h} + \frac{c}{2}\dot{\alpha}(0.5 - a) \right] + \rho\pi \left(\frac{c}{2} \right)^2 \left(\ddot{h} - a \frac{c}{2}\ddot{\alpha} + V\dot{\alpha} \right) \\
 M' &= 2\pi\rho \left(\frac{c}{2} \right)^2 V(a + 0.5)C(k) \left[V\alpha + \dot{h} + \frac{c}{2}\dot{\alpha}(0.5 - a) \right] \\
 &\quad + \rho\pi \left(\frac{c}{2} \right)^3 \left[a \left(\ddot{h} - a \frac{c}{2}\ddot{\alpha} \right) + (a - 0.5)V\dot{\alpha} - \frac{c}{2} \frac{\ddot{\alpha}}{8} \right]
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Für die Ermittlung eines typischen Wertes einer reduzierten Frequenz k , bei der ein Rotorblatt arbeitet, kann folgende Herleitung verwendet werden. Im Schwebeflug ist die lokale Anströmgeschwindigkeit $V = \Omega y$ abhängig von der radialen Position y und die Frequenz von Schwingungen ist generell irgendein ganzzahliges Vielfaches der Drehfrequenz des Rotors: $\omega = n\Omega$. Dann folgt mit $r = y/R$:

$$k = \frac{\omega c}{2V} = \frac{n\Omega c}{2\Omega y} = \frac{n}{r} \frac{c}{2R} = \frac{n}{r} k_{\text{tip}} \quad (5.33)$$

Als repräsentativer Radius kann $r = 0,75$ angesehen werden und als typischen Wert für das Profiltiefen/Radius-Verhältnis kann man $k_{\text{tip}} = c/(2R) \approx 1/40$ nehmen. Damit folgt

$$k = n \cdot \begin{cases} 0,025 & r = 1 \\ 0,03333 & r = 0,75 \\ 0,05 & r = 0,5 \\ 0,125 & r = 0,2 \end{cases} \quad (5.34)$$

Dies sind gleichzeitig die reduzierten Frequenzen für Schwingungen mit $n = 1/\text{rev}$, wie sie bei der zyklischen Rotorsteuerung durch den Piloten auftreten. Wie man sieht, befinden sich dann die Bereiche des Rotorblattes außerhalb des halben Radius in quasistationären Zuständen mit $k < 0,05$ und die Innenbereiche bereits in instationärer Strömung. Da der weitaus größte Teil des Auftriebes auf der äußeren Hälfte des Rotorblattes erzeugt wird, kann man also in der Regel quasi-stationär rechnen, solange man keine höherharmonischen Ereignisse am Rotorblatt vorfindet. Doch bereits der Staudruck im Vorwärtsflug erzeugt Frequenzen mit $n = 0, 1$ und $2/\text{rev}$; das Pilotensteuer beinhaltet 0 und $1/\text{rev}$, so dass die Überlagerung schon Frequenzen bis zu $3/\text{rev}$ erzeugt, die dann instationäre Aerodynamik erfordern.

Bemerkenswert ist, dass die reduzierte Frequenz beim Rotor nicht mehr direkt von der physikalischen Schwingungsfrequenz abhängt, sondern – im Gegensatz zum Flächenflugzeug – nur von den geometrischen Größen des Rotorblattes. Im Falle einer $1/\text{rev}$ -Schwingung ist dann bei $r = 0,75$ für die dort vorliegende reduzierte Frequenz gemäß Abb. 5.10a die Amplitude mit 0,97 zu multiplizieren und die Phasennacheilung beträgt 6° , siehe Abb. 5.10b. In diesem Falle kann man die instationären Einflüsse vernachlässigen; natürlich liegen bei kleineren Radien auch größere reduzierte Frequenzen vor, wo sie nicht vernachlässigt werden können. Beispiel: $r = 0,2$ mit $k = 0,125$, $|C(k)| = 0,83$ und einer Phasennacheilung von 12° . Generell aber wird der meiste Auftrieb weiter außen erzeugt, so dass man auf die Effekte im Innenbereich oft verzichten kann und die quasistationäre Betrachtungsweise für die $1/\text{rev}$ Komponenten ausreicht. Man beachte, dass diese Aussagen nur für den zirkulatorischen Anteil des Auftriebes gelten!

Beispiel

Man berechne die reduzierte Frequenz eines Verkehrsflugzeugs im Reise- und Landeanflug, wobei $f = 0,5 \text{ Hz}$ und $c = 6 \text{ m}$ sind.

Lösung

Eine Reisefluggeschwindigkeit von $M = 0.8$ entsprechend $V = 270 \text{ m/s}$ führt zu einer reduzierten Frequenz von $k = 2\pi f_c/(2V) = 0,035$ und ist damit quasistationär. Im Landeanflug mit $V = 60 \text{ m/s}$ erhöht sich die reduzierte Frequenz bei gleicher Schwingungsfrequenz schon auf $k = 0,157$, also rein instationär. Da die Phygoide in der Regel wesentlich niederfrequenter ist, ist diese immer quasistationär zu behandeln. Die Anstellwinkelschwingung jedoch erfordert aufgrund ihrer höheren Schwingungsfrequenz in der Regel bereits instationäre Behandlung in der Aerodynamik.

Es ist nun noch wichtig zu wissen, bei welchen reduzierten Frequenzen die nicht zirkulatorischen Anteile von Bedeutung sind. Für harmonische Schwingungen $h/(c/2) = \bar{h}_0 \cos \psi$ und $\alpha = \alpha_0 \cos \psi$ folgt aus Gl. 5.32 für das Verhältnis der Amplituden

$$\frac{|L'_{nc}|}{|L'_c|} = \frac{k}{2|C(k)|} \cdot \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+(ak)^2}} & \text{Schlagen } (h) \\ \frac{1}{\sqrt{1+[(0.5-a)k]^2}} & \text{Drehen } (\alpha) \end{cases} \quad (5.35)$$

Das Ergebnis ist in Abb. 5.11 zusammengefasst. Nur für kleine und mittlere reduzierte Frequenzen bis etwa $k = 0,25$ dominieren die zirkulatorischen Anteile, ab etwa $k = 1$ sind zirkulatorische und nicht zirkulatorische Anteile ungefähr gleich groß und für noch höhere reduzierte Frequenzen dominieren die nicht zirkulatorischen Anteile. Dann wird es zunehmend auch von Bedeutung, wo die Drehachse der Drehbewegung liegt. Bei Rotoren befindet sie sich meistens bei $a = -0,5$. Ferner stellt sich die Frage, ob beim Rotor die Anstellwinkeländerungen oder die Schlaggeschwindigkeiten dominieren. Die vertikale Geschwindigkeit am Blattelement ist $\dot{h}/V = \dot{\beta}y/(\Omega y) = \overset{*}{\beta}$ und ist damit im Schwebeflug unabhängig von der radialen Position. Ebenfalls wurde im Schwebeflug für

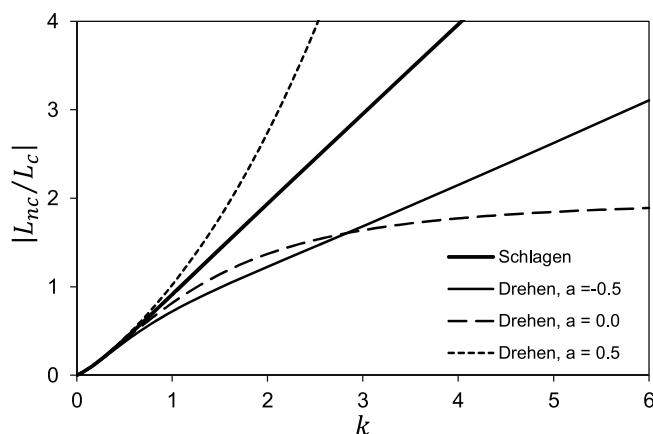


Abb. 5.11 Verhältnis von nicht zirkulatorischen zu zirkulatorischen Auftriebskräften

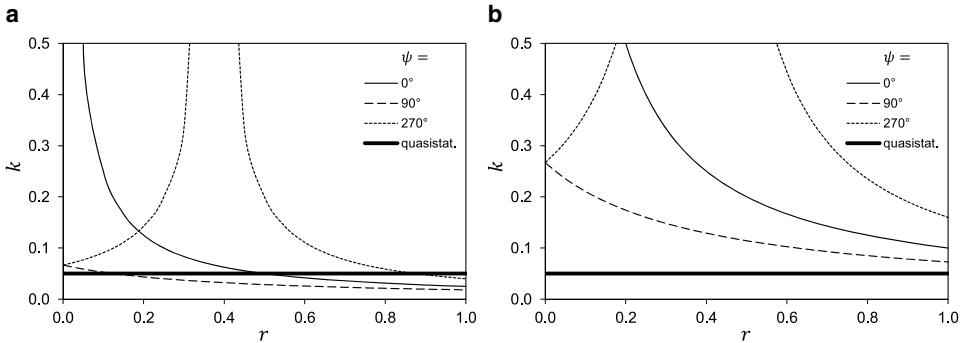


Abb. 5.12 Radiale Verteilung der reduzierten Frequenzen. **a** $n = 1/\text{rev}$, **b** $n = 4/\text{rev}$, $\mu = 0,375$, $k_{\text{tip}} = c/(2R) = 0,025$

ein zentrales Schlaggelenk gefunden, dass die Amplitude der Schlagbewegung genau so groß ist wie die der zyklischen Blattwinkelsteuerung. Folglich sind beide Anteile in der instationären Aerodynamik von gleich großer Bedeutung.

Im Vorwärtsflug des Hubschraubers ist die reduzierte Frequenz aufgrund der periodisch variierenden Geschwindigkeit eine Funktion von Radius und Azimut. Mit $V = \Omega R(r + \mu \sin \psi)$ folgt:

$$k = \frac{n}{r + \mu \sin \psi} \frac{c}{2R} \quad (5.36)$$

Folglich ist dort, wo eine große Geschwindigkeit vorherrscht – also an der vorlaufenden Seite, z. B. $\psi = 90^\circ$ – die lokale reduzierte Frequenz klein (im Nenner steht dann $r + \mu$), an der rücklaufenden Seite ($\psi = 270^\circ$) wegen der geringeren Geschwindigkeit jedoch recht groß ($r - \mu$). Ein Beispiel für einen schnellen Vorwärtsflug mit $\mu = 0,375$ ist in Abb. 5.12a für die Azimutpositionen $\psi = 0^\circ, 90^\circ$ und 270° gegeben. Die Werte bei $\psi = 0^\circ$ sind mit denen bei 180° identisch, da dort die Fluggeschwindigkeit wegen $\sin \psi = 0$ nicht eingeht und damit repräsentieren diese gleichzeitig den Schwebeflugzustand. Wie man erkennt, kann für $r > 0,5$ die quasistationäre Näherung im Schwebeflug gut verwendet werden. Im schnellen Vorwärtsflug jedoch gilt dies nur für die vorlaufende Seite. An der rücklaufenden Seite ist der Strömungszustand wegen der kleinen Geschwindigkeit bereits hochgradig instationär. Da die Geschwindigkeit bei $\psi = 270^\circ$ und $r = \mu$ gerade Null wird, ist dort eine Singularität vorhanden. Radien von $r < 0,2$ brauchen nicht beachtet werden, da dies meist – durch den unprofilierten Blatthals bedingt – keine tragenden Bereiche sind.

Im Falle einer höherharmonischen Steuerung jedoch, zum Beispiel mit $4/\text{rev}$, siehe Abb. 5.12b, beträgt die errechnete reduzierte Frequenz bereits das Vierfache, also für die repräsentative Stelle im Schwebeflug $k = 0,133$, was zu einer Amplitudenabminderung auf 0,85 und einer Phasennacheilung von 12° führt. Daher muss man die instationären Effekte bei allen höherfrequenten Vorgängen mit einbeziehen.

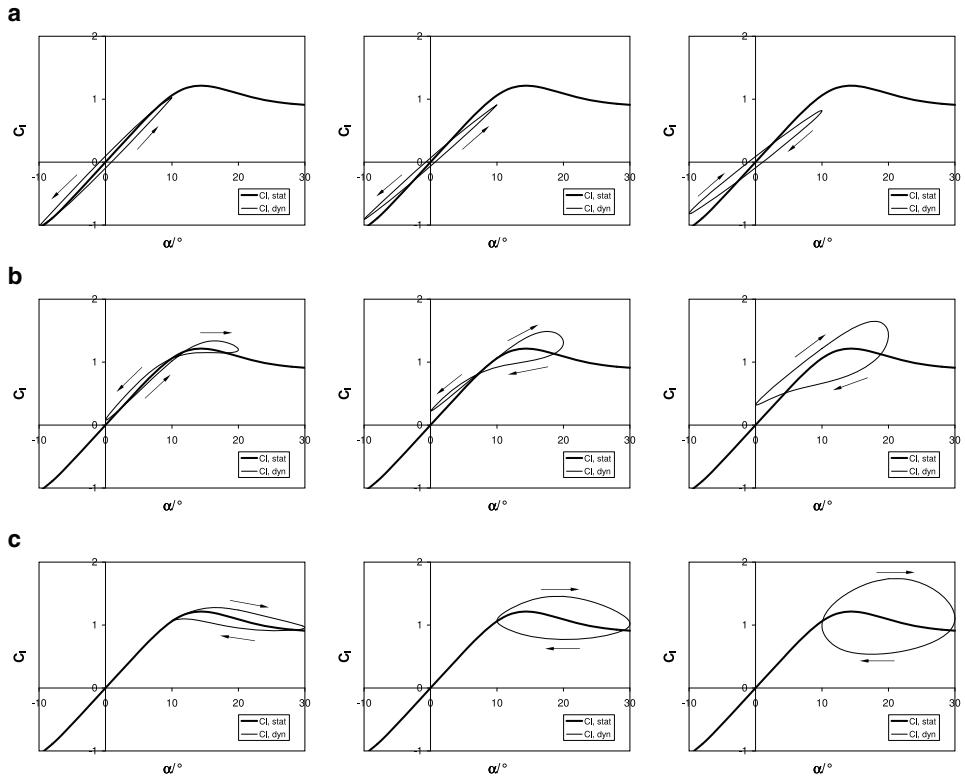


Abb. 5.13 Instationärer Auftriebsbeiwert bei Anstellwinkelschwingungen. **a** $\alpha_0 = 0^\circ$, **b** $\alpha_0 = 10^\circ$, **c** $\alpha_0 = 20^\circ$. $\alpha = \alpha_0 + 10^\circ \sin \psi$, $\alpha_{\text{Stall}} = 12^\circ$, $k = 0,05, 0,15, 0,3$

Im Allgemeinen werden reduzierte Frequenzen von $k \leq 0,05$ als quasistationär und solche von $k > 0,05$ als instationär bezeichnet. Achtung: oft wird in der Literatur die reduzierte Frequenz auch auf die ganze Profiltiefe c bezogen, was einen Faktor von 2 ausmacht! Dann lautet $k = \omega c / V$ und die Werte sind doppelt so groß, so dass die Grenze der quasistationären Strömung für diese Definition bei $k = 0,1$ liegt.

Als Beispiel der Auswirkungen der instationären Aerodynamik auf den Auftriebsbeiwert in anliegender wie abgelöster Strömung in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz ist Abb. 5.13 gegeben. Die Anstellwinkelschwingung erfolgt in diesem Beispiel um die 1/4-Linie des Profils mit konstanter Amplitude von $\Delta\alpha = 10^\circ$ um einen mittleren Anstellwinkel von $\alpha_0 = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ mit den reduzierten Frequenzen $k = 0,05, 0,15, 0,3$. Im Bereich anliegender Strömung Abb. 5.13a hat die zunehmende reduzierte Frequenz eine Reduktion des Auftriebsanstieges zur Folge, was dem Betrag der Theodorsenfunktion $|C(k)|$ entspricht. Außerdem ist eine Phasennacheilung zu beobachten, die eine Hysterese bewirkt. Des Weiteren hat die zunehmende reduzierte Frequenz zur Folge, dass die Hysterese zunächst dicker wird. Bei großen reduzierten Frequenzen jedoch wird die Hysterese

wieder dünner (hier nicht gezeigt) und kehrt sogar ihren Drehsinn um (siehe Abb. 5.13a für $k = 0,3$), was eine Folge der an Bedeutung zunehmenden nicht zirkulatorischen Kräfte ist.

Im Bereich um den Anstellwinkel der Strömungsablösung (hier $\alpha_{\text{stall}} = 12^\circ$) herum, siehe Abb. 5.13b, hat man einen weiteren Effekt zu beobachten: der maximale Auftrieb wird größer als derjenige der stationären Aerodynamik. Dies ist eine Folge der in instationärer Bewegung verzögerten Strömungsablösung und des ebenso verzögerten Wiederaufliegens der Strömung. Die reduzierte Frequenz hat hier eine sehr große Auswirkung auf die Form der Hysterese, die im Bereich der kleineren Anstellwinkel gegen den Uhrzeigersinn, im Bereich großer Anstellwinkel im Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Die größte reduzierte Frequenz in diesem Beispiel bewirkt eine komplett Änderung der Hysterese derart, dass sie nur noch im Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Schließlich ist in Abb. 5.13c noch der Fall einer Schwingung in vollständig abgelöster Strömung zu finden. Hier bleibt bei jeder reduzierten Frequenz der Umlaufsinn gleich, jedoch wird die Hysterese mit zunehmender reduzierter Frequenz immer dicker.

5.5.2 Das Böenproblem

Die bisherigen Betrachtungsweisen der instationären Aerodynamik beziehen sich auf ein sich bewegendes Profil in ansonsten ruhender oder sich gleichförmig bewegender Strömung. Für alle flugmechanischen Betrachtungen und für solche zur Stabilität von Rotorblättern ist das auch völlig ausreichend. Es gibt jedoch Strömungszustände mit sehr kleiner Wellenlänge relativ zur Profiltiefe, die mit diesen Übertragungsfunktionen nicht mehr behandelt werden können. Dieses ist das Problem der Blatt-Wirbel-Interaktion (engl. blade vortex interaction, BVI), welches ein typisches Böenproblem (engl. gust response) darstellt.

Es ist unmittelbar einsichtig, dass die Normalgeschwindigkeitsverteilung auf der Profilsehne bei einer Profilbewegung konstant (z. B. Schlagbewegung) oder linear verläuft (z. B. Drehbewegung um die Steuerachse). Ein Blattspitzenwirbel hat jedoch ein rotatorisches Geschwindigkeitsfeld und der Durchmesser eines solchen Wirbels ist in der Regel nur etwa 1/10 einer Profiltiefe. Während der Passage eines Wirbels entlang der Profilsehne erfährt diese also ein ganz anderes Geschwindigkeitsfeld als bei Profilbewegungen. Daher ist die aerodynamische Auswirkung auch eine andere. Bei großen Wellenlängen jedoch (also kleinen reduzierten Frequenzen) sind die Geschwindigkeitsgradienten einer solchen Böe über der Profilsehne fast linear und daher ganz analog zur Profilbewegung selbst zu handhaben. Zur Verdeutlichung ist in Abb. 5.14a das Problem der vertikalen Profilbewegung (z. B. die Schlagbewegung des Rotorblattes) und in Abb. 5.14b das Problem des Einflyges in eine Böe konstanter Vertikalgeschwindigkeit dargestellt. Wie man sofort sieht, ist im Fall der Profilbewegung die Normalgeschwindigkeit über die gesamte Profillänge vorhanden, im Böenproblem wandert die Normalgeschwindigkeit mit der Anströmgeschwindigkeit von vorne nach hinten über das Profil hinweg. Bei periodischen Bewegungen,

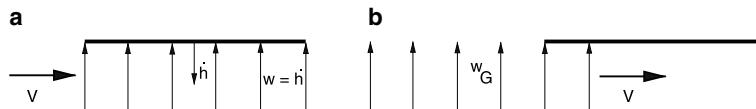


Abb. 5.14 Normalgeschwindigkeit bei sprungförmiger Profilbewegung und Böe. **a** Profilbewegung (Schlagen) **b** Einflug in eine Vertikalböe

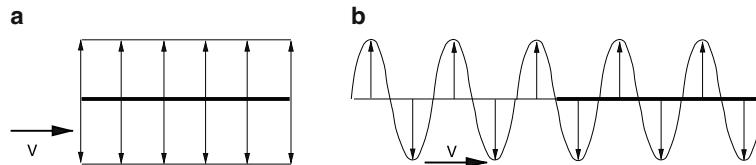


Abb. 5.15 Normalgeschwindigkeit bei periodischer Profilbewegung und Böe. **a** Profilbewegung (Schlagen) **b** Einflug in eine sinusförmige Vertikalböe

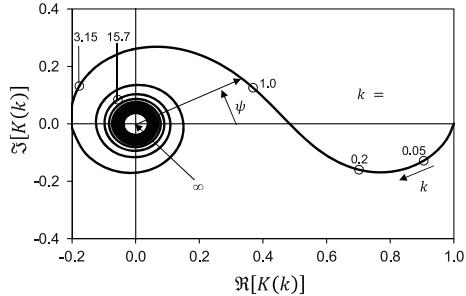
wie in Abb. 5.15 dargestellt, ist dann im Fall der Profilbewegung Abb. 5.15a nur eine zeitliche, nicht aber örtliche Variation zu finden, während bei einer sinusförmigen Böe Abb. 5.15b mehrere Schwingungen entlang der Profiltiefe auftreten können und die Wirkungen der Wellen sich teilweise gegenseitig tilgen. Im Grenzfall sehr großer Frequenz werden dann im Fall der Profilbewegung aufgrund der nicht zirkulatorischen Anteile (also der Beschleunigung der umgebenden Luft) auch sehr große Auftriebe resultieren, während im Fall der Böe praktisch keine Auftriebsreaktion mehr eintritt, egal, wie groß die Böenamplitude ist.

Das periodische Böenproblem hat Küssner 1936 [11] erstmalig behandelt, wobei er als Äquivalent zu dem Fall eines ebenen Profils in einer sinusförmigen Wellenströmung eine sich sinusförmig verformende Profilsehne in gerader Parallelströmung ansetzte. Die resultierende Vertikalgeschwindigkeitsverteilung auf der Profiloberfläche ist in beiden Fällen dieselbe. 1938 löste Sears im Rahmen seiner Dissertation das Problem mit Hilfe der konformen Abbildung und wies auch auf einen Fehler in Küssner's Herleitung hin; siehe Sears 1940 [13]. Die entsprechende Übertragungsfunktion $K(k)$ setzt sich aus der Theodorsenfunktion und den Besselfunktionen wie folgt zusammen.

$$\begin{aligned} K(k) &= C(k) [J_0(k) - i J_1(k)] + i J_1(k) \\ &= F(k) J_0(k) + G(k) J_1(k) + i \{G(k) J_0(k) + J_1(k) [1 - F(k)]\} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Diese Übertragungsfunktion ist beim Böenproblem anstelle der Theodorsenfunktion zu verwenden und sie ist in Abb. 5.16 dargestellt. Wie man sieht, verhält sie sich bei kleinen und mäßigen reduzierten Frequenzen bis $k \approx 0,2$ ganz ähnlich wie die Theodorsenfunktion, was nicht verwunderlich ist, denn dann befindet sich nur ein Bruchteil des Sinusverlaufs der Böe über dem Profil, was in etwa als konstante Verteilung mit zeitvariabler Amplitude gedeutet werden kann. Bei höheren reduzierten Frequenzen jedoch kommen

Abb. 5.16 Küssnerfunktion als Auftriebsantwort des periodischen Böenproblems. Bezugspunkt der Böe ist die Profilmitte



die Gradienten des Böenverlaufs über dem Profil zunehmend zum Tragen und dann bestimmen sie auch die Phasenlage der Auftriebsantwort ganz beträchtlich. Die Funktion läuft spiralförmig auf den Ursprung zu, das heißt, dass bei unendlicher reduzierter Frequenz der Grenzfall eintritt, dass sich alle Auf- und Abwindanteile auf dem Profil gegenseitig tilgen. Daher ist dann die Auftriebsreaktion Null, ausgedrückt durch $K(k \rightarrow \infty) = 0$. Da es beim Böenproblem keine nicht zirkulatorischen Anteile gibt (das Profil bewegt sich ja nicht) wird beim Böenproblem die gesamte Auftriebsantwort über den zirkulatorischen Anteil definiert.

Zur Verdeutlichung führe man sich die reduzierten Frequenzen vor Augen, die von einer Blatt-Wirbel-Interaktion herrühren. Experimente haben gezeigt, dass der Wirbelkerndurchmesser etwa $0,1c$ beträgt, mithin die Wellenlänge einer entsprechenden Periode doppelt so groß ist, also $0,2c$ (es könnten also maximal fünf solche sinusförmigen Böen entlang des Profils verteilt sein). Die Umlaufbahn der Blattspitze ist $2\pi R$ und mit der bisherigen Annahme $c/R = 1/20$ folgt, dass die einzelne Böe eine Wellenlänge in Bezug zur Wellenlänge der Rotorumdrehung von $0,2c/(2\pi R) = 0,00159$ hat. Der Kehrwert ist die dimensionslose Frequenz, also stellt die Böe einer solchen Blatt-Wirbel-Interferenz eine Schwingung von 628/rev als typische BVI-Frequenz an der Blattspitze dar. Im Innenbereich des Rotors, z. B. beim Blattbeginn bei ca. $0,2R$, folgt eine Wellenlänge von $0,2c/(2\pi 0,2R) = 0,00796$ bzw. eine Schwingung mit 126/rev.

Die reduzierte Frequenz einer 1/rev-Blattbewegung an der Blattspitze war $k(n = 1, r = 1) = c/(2R)$ und mit den gleichen Annahmen für das Verhältnis von c/R wie zuvor folgt $k = 0,025$. Folglich resultiert für die reduzierte Frequenz der Böe des BVI-Problems:

$$k_{\text{BVI}} = \frac{628k(n = 1) = 15,7}{126k(n = 1) = 3,14} \quad r = 1 \quad (5.38)$$

Der zugehörige Wert der Küssnerfunktion ist in Abb. 5.16 mit eingetragen. Es ist $|K| \approx 0,1$, während die Theodorsen-Funktion einen Wert von $|C| \approx 0,5$ aufweist, zuzüglich der nicht zirkulatorischen Anteile, die bei so hohen Frequenzen bereits den wesentlichen Anteil der Auftriebsantwort ausmachen. Es ist unmittelbar einsichtig, dass bei so hohen reduzierten Frequenzen die Auftriebsantwort sowohl in Phase wie in Amplitude von der-

jenigen der Blattbewegung deutlich abweicht und daher das BVI-Problem grundsätzlich mit einer anderen Übertragungsfunktion behandelt werden muss als das der Profilbewegung. Außerdem muss der Kontrollpunkt an der Profilnase liegen, denn im Gegensatz zur Profilbewegung kann man bei der Böe nicht vom 3/4-Punkt auf die Geschwindigkeitsverteilung von der Vorderkante bis zu diesem Punkt schließen, wenn die Böe eine unbekannte Form hat.

5.5.3 Anwendung auf den Rotor

Nun gilt es, die Ergebnisse der instationären Profiltheorie auf den Rotor anzuwenden. Die grundlegende Darstellung dieser Anwendung wurde von Johnson gegeben [14], siehe auch [4]. Im Falle eines Starrflüglers hat ein Flügel nur zwei Freiheitsgrade: die Torsion und die Schlagbewegung. Im Rotor aber sind sowohl die Strömungs- als auch die Bewegungsverhältnisse sehr viel komplizierter und der Einfachheit halber werden die Blattbewegungen mit in die Strömungsgrößen übertragen. Die normal zum Profil verlaufende Geschwindigkeitskomponente kann mit Hilfe von Abb. 5.8 gewonnen werden.

$$w(x, t) = \dot{h} + V\alpha + \dot{\alpha} \left(x - a \frac{c}{2} \right) \quad (5.39)$$

Die ersten beiden Anteile stellen die Geschwindigkeiten aus der Schlagbewegung und der Anstellwinkellage dar, die über das Profil konstant sind. Der dritte Anteil stammt von einer Nickbewegung des Rotorblattes und erzeugt eine lineare Änderung der Normalgeschwindigkeit über der Profilsehne. Damit muss der Auftrieb der anliegenden Strömung auch proportional zu diesen Anteilen sein und die Ausdrücke für Auftrieb und Moment folgen aus Gl. 5.32 (mit w bei $x = c/4$, was dem 3/4-Punkt auf der Profilsehne entspricht) zu

$$\begin{aligned} L' &= 2\pi\rho \frac{c}{2} VC(k) \left[V\alpha + \dot{h} + \frac{c}{2}\dot{\alpha}(0.5 - a) \right] + \rho\pi \left(\frac{c}{2} \right)^2 \left[(V\alpha + \dot{h}) - a \frac{c}{2} \ddot{\alpha} \right] \\ M' &= 2\pi\rho \left(\frac{c}{2} \right)^2 V(a + 0.5) C(k) \left[V\alpha + \dot{h} + \frac{c}{2}\dot{\alpha}(0.5 - a) \right] \\ &\quad + \rho\pi \left(\frac{c}{2} \right)^3 \left[a(V\alpha + \dot{h}) - \frac{V}{2}\dot{\alpha} - \frac{c}{2} \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\alpha} \right] \end{aligned} \quad (5.40)$$

Wenn man die Kräfte in dieser Weise schreibt, braucht man die lokalen Bewegungen an jedem Ort des Profils nicht zu berechnen, aber man muss die Mittelwerte und linearen Verteilungen der Geschwindigkeitskomponenten über die Profiltiefe kennen. In Rotoranwendungen ist es üblich, die Normalgeschwindigkeit \bar{V}_P und die Tangentialgeschwindigkeit \bar{V}_T zu bestimmen, siehe Abb. 5.8. Dann entsprechen die Vertikalgeschwindigkeit $\dot{h} = -V_P$, $\alpha = \Theta$ und $\dot{\alpha} = \dot{\Theta}$. Als einfacher Fall soll ein gelenkig gelagerter Rotor herangezogen werden, der sich im Vorwärtsflug befindet. Die Drehachse des Rotorblattes

ist in der Regel bei $1/4$ der Profiltiefe, also bei $a = -0,5$, gelegen. Dann ist ($\lambda = \lambda_{HP}$ in der Rotormastebene)

$$\begin{aligned} \frac{V\alpha + \dot{h}}{\Omega R} &= \bar{V}_T \Theta - \bar{V}_P \\ \bar{V} &\approx \bar{V}_T = r + \mu \sin \psi \\ \bar{V}_P &= \lambda + r \overset{*}{\beta} + \mu \overset{*}{\beta} \cos \psi \\ \lambda &= \lambda_{TPP} - \mu \beta_{1C} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Setzt man die Geschwindigkeitskomponenten ein und leitet den ersten Ausdruck nach der Zeit ab, so folgt in dimensionsloser Schreibweise:

$$\frac{(V\alpha + \dot{h})}{\Omega^2 R} = (r + \mu \sin \psi) \overset{*}{\theta} + \mu \cos \psi \overset{*}{\theta} - (r \overset{**}{\beta} + \mu \overset{*}{\beta} \cos \psi - \mu \overset{*}{\beta} \sin \psi) \quad (5.42)$$

Bei Annahme konstanten induzierten Durchflusses ist die zeitliche Ableitung desselben $\overset{*}{\lambda}_i = 0$, ansonsten – nämlich mit $\lambda_i = \lambda_{i0}(1 + rk_x \cos \psi)$ – würde in der Klammer noch ein Term $\overset{*}{\lambda}_i = -\lambda_{i0}rk_x \sin \psi$ stehen.

5.5.4 Der Nachlauf kurz hinter dem Rotorblatt

Der Nachlauf kurz hinter dem Profil spielt eine wichtige Rolle in der Ermittlung der instationären Luftkräfte, da er aufgrund seines geringen Abstandes zum Profil wegen des Biot-Savart'schen Induktionsgesetzes eine bedeutende Rückwirkung durch seine Induktion ausübt. Beim Rotor hat dieser Nachlauf die Form einer Helix und ist damit geometrisch äußerst komplex; aber der Haupteinfluss auf die entstehenden Kräfte wird nur vom ersten Teil dieses Nachlaufes ausgeübt, der etwa die ersten 45° im Azimut ab Blatthinterkante nach hinten umfasst. Somit wird die Berechnung des Nachlaufeinflusses gewaltig erleichtert, wenn man sich nur auf dieses Nahfeld (engl. near wake) beschränkt.

Miller hat 1964 [15] eine Näherung für die Profiltheorie aufgestellt, der eine kleine reduzierte Frequenz zugrunde liegt. Dann kann man die komplexe Theodorsen-Funktion durch folgenden rein reellen Ausdruck approximieren:

$$C(k) \approx F(k) \approx \frac{1}{1 + \frac{\pi}{2}k} \quad G(k) = 0 \quad (5.43)$$

Diese Funktion ist bis zu reduzierten Frequenzen von etwa $k = 0,4$ für die Amplitudenabminderung recht gut, siehe Abb. 5.10, hat jedoch keine Phasennacheilung, da der Imaginärteil Null ist.

Im Jahre 1966 wurde von Piziali [16] ein anderer Ansatz gemacht, der den Nachlauf durch viele diskrete Wirbel simuliert, siehe Abb. 5.17, mittlere Darstellung. Dabei wurde ein Wirbelabstand von $d = 2\pi V/(N\Omega)$ verwendet, wobei hier N die Anzahl der Wirbel

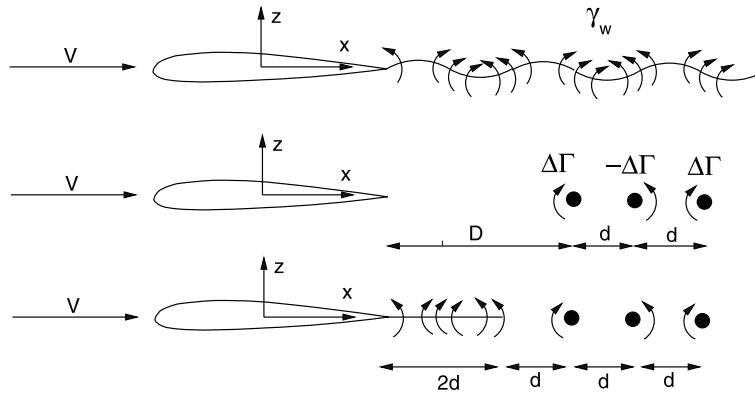


Abb. 5.17 Piziali's Modell des Nachlaufes

pro Umlauf bedeutet. Typischerweise waren dies 5 bis 8. Der Abstand des ersten Wirbels von der Profilhinterkante ist $D = d/2 - 3c/2$. Eine verfeinerte Version davon wurde von Daughaday und Piziali 1966 aufgestellt [17]. Dabei wird im ersten Teil hinter dem Profil eine kontinuierliche Wirbeldichteschicht angenommen, siehe Abb. 5.17 unten.

5.5.5 Der Einfluss der veränderlichen Geschwindigkeiten

Das rotierende Blatt hat im Vorwärtsflug an jeder Stelle eine periodisch variierende Geschwindigkeit:

$$\bar{V}_T = r + \mu \sin \psi \quad \Rightarrow \quad \overset{*}{\bar{V}}_T = \mu \cos \psi \quad (5.44)$$

Da die variierende Komponente von derselben Größenordnung wie der Mittelwert ist, muss man den Einfluss der variierenden Geschwindigkeiten mit in die Analyse einbeziehen, und zwar sowohl den direkten Einfluss über den Staudruck, als auch den indirekten über die Wirbeldichte im Nachlauf. Dies resultiert in folgenden Effekten:

- Zusätzliche nicht zirkulatorische Kräfte durch das Zeitderivativ $d(V\alpha)/dt = \dot{V}\alpha + V\dot{\alpha}$
- Zusätzliche zirkulatorische Kräfte aufgrund der Dehnung und Stauchung des Nachlaufes.

Eine einfache Näherung kann dabei oft sehr nützlich sein, indem man die lokalen Effekte durch den Mittelwert der lokalen Theodorsen-Funktion ersetzt, also nur den Hauptwert der reduzierten Frequenz verwendet. Die exakte Lösung für die ebene Platte in inkompressibler Strömung mit Anstellwinkelschwingung und periodischer Anströmung gleicher Frequenz wurde von Isaacs 1946 [18] und eine oft verwendete Näherung von Greenberg 1947 [19] aufgestellt. Die Erweiterung auf eine komplette Fourierreihe in der

Anstellwinkelschwingung um eine beliebige Achse auf der Profil sehne, kombiniert mit einer ebenfalls aus einer kompletten Fourierreihe bestehenden Vertikalbewegung, erstellte van der Wall 1991 [20].

5.6 Der Einfluss des wiederkehrenden Nachlaufes

Im Schwebeflug treibt der Nachlauf des Rotors, insbesondere bei geringem Schub, relativ langsam von der Rotorebene nach unten weg. Daher muss man im Rahmen der instationären Luftkräfte den Effekt dieser Wirbeldichtefelder auf die Auftriebsentwicklung mit einbeziehen. Im Falle sehr großen Schubes oder im schnellen Vorwärtsflug wird die Wirbelschleppen schnell weggetragen und hat kaum noch Effekte auf den Rotor.

Loewy entwickelte 1957 [21] ein zweidimensionales Modell für die instationäre Aerodynamik eines Rotors im Schwebeflug, siehe Abb. 5.18. Der Blattindex sei m und die Wiederholung des Nachlaufes wird durch n repräsentiert. Die Nachlauffelder haben einen Abstand h voneinander. Im Falle eines einblättrigen Rotors werden alle diese Wirbeldichtefelder von demselben Rotorblatt ($m = 0$, fett gezeichnet) erzeugt und der wiederkehrende Nachlauf wird als Serie von Wirbeldichtelagen mit einem vertikalen Abstand h dargestellt. Der Nachlauf aller anderen Blätter ($m > 0$) existiert dann nicht. Im Schwebeflug ist die lokale Umfangsgeschwindigkeit konstant in der Zeit und die Wirbeldichtelagen sind parallel zueinander. Der Abstand hängt vom Durchflussgrad ab und dieser ist

$$\lambda = \frac{1}{2\pi \Omega R} \left[\int_{c/2}^{\infty} \frac{\gamma_w}{x - \xi} d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{w_n}}{(x - \xi)^2 + h^2 n^2} d\xi \right] \quad (5.45)$$

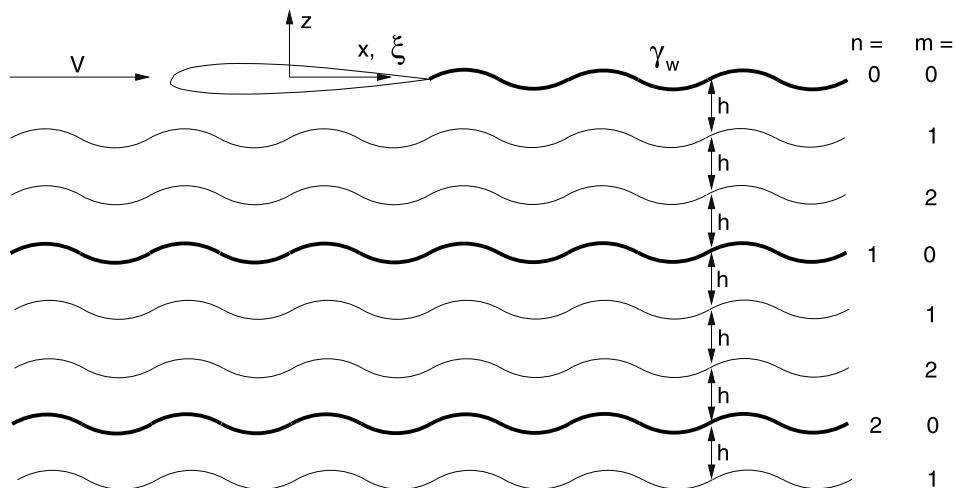


Abb. 5.18 Loewy'sches Modell des Wirbeldichtefeldes im Schwebeflug (Dreiblattrotor)

und der Auftrieb des Segmentes ist

$$L' = C'(k)L'_{qs} + L'_{nc} \quad (5.46)$$

Darin ist $C'(k)$ die Loewy-Funktion, die wie die Theodorsen-Funktion die reduzierte Frequenz als Parameter aufweist und zusätzlich von dem Abstand der Wirbeldichtelagen h abhängt. Im Prinzip ist diese Funktion eine erweiterte Theodorsen-Funktion. Bei einem N -blättrigen Rotor wird dieses Nachlaufmodell schnell sehr kompliziert, da der Nachlauf aller anderen Blätter ($m > 0$) mit hinzugenommen werden muss, siehe Abb. 5.18. Für ganzzahlige Verhältnisse von Schwingungsfrequenz zu Drehfrequenz und kleine reduzierte Frequenzen wurde aus diesem Modell eine einfache Näherungsformel abgeleitet:

$$C'(k) \approx F'(k) \approx \frac{1}{1 + \frac{\pi\sigma}{4\lambda_0}} \quad G'(k) = 0 \quad (5.47)$$

Auch hier ist der Imaginärteil Null (also keine Phasennacheilung) und λ_0 ist der stationäre Anteil des Durchflussgrades. Somit wird die Auftriebsamplitude zwar abgemindert, aber es tritt keine Phasennacheilung ein. Für typische Werte eines Rotors, nämlich $\lambda_0 \approx 0,06$, $h/(c/2) \approx 3$ und $\sigma \approx 0,1$ ist der Wert der Loewy-Funktion dann $C'(k) \approx 0,5$. Diese Abminderung ist sehr wichtig bei der Bestimmung der Lasten und der Stabilität, da sie die Schlagdämpfung erheblich reduzieren kann, denn diese lautet dann $(\gamma/8)C'(k)\beta^*$.

Die Folgerung von Miller

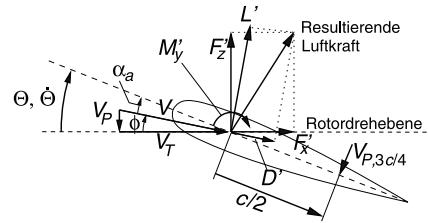
Wenn die Frequenzen der Schwingungen des Systems ganzzahlige Vielfache der Rotor-drehfrequenz erreichen, muss man die instationäre Theorie verwenden, um die große Reduktion im Auftriebsanstieg richtig zu berechnen. Für diesen Fall wurde obige Näherung aufgestellt. Wichtig ist ebenfalls der Nachlauf im Nahfeld des ersten Quadranten hinter dem Rotorblatt. In diesem Fall wirkt der Auftrieb bei 1/4 der Profiltiefe und wird vom Anstellwinkel bei 3/4 der Profiltiefe gebildet. Im Falle nicht ganzzahliger Vielfacher der Drehfrequenz sind die Beiträge des Fernfeldes vernachlässigbar, da sie sich gegenseitig weitgehend auslöschen.

5.7 Die Anwendung quasistationärer Aerodynamik im Rotor

In den meisten Rotorsimulationsprogrammen wird die quasistationäre, zweidimensionale Profiltheorie verwendet, um die Effekte der instationären Strömung wenigstens näherungsweise zu berücksichtigen. Man stelle sich die Strömungsverhältnisse am Blattelement wie in Abb. 5.19 dargestellt vor. Die resultierende Geschwindigkeit ist

$$\frac{V}{\Omega R} = \sqrt{\overline{V}_T^2 + \overline{V}_P^2} \quad (5.48)$$

Abb. 5.19 Kräfte und Geschwindigkeiten am Blattelement



und die Auftriebs- und Widerstandskraft des Elementes sowie das Moment um den aerodynamischen Neutralpunkt (Index ac = aerodynamic center) sind

$$\begin{aligned} L' &= \frac{\rho}{2} V^2 c C_l \\ D' &= \frac{\rho}{2} V^2 c C_d \\ M'_{ac} &= \frac{\rho}{2} V^2 c^2 C_m \end{aligned} \quad (5.49)$$

Die resultierenden Elementkräfte in der Rotorkopfebene sowie das Moment um die elastische Achse lauten dann

$$\begin{aligned} F'_z &= L' \cos \phi - D' \sin \phi \\ F'_x &= L' \sin \phi + D' \cos \phi \\ M'_a &= M'_{ac} - L' x_a \end{aligned} \quad (5.50)$$

Darin ist x_a der Abstand des aerodynamischen Neutralpunktes von der elastischen Achse (positiv, wenn der Neutralpunkt hinter der elastischen Achse liegt). Die radiale Kraft kann im Vorwärtsflug wichtig sein und besteht aus zwei Komponenten. Zunächst ist da die Komponente der Widerstandskraft in radialer Richtung, die durch den Querströmwinkel V_R/V , also durch die radiale Anströmung, berechnet wird. Dann wirkt noch die Komponente der Vertikalkraft in radialer Richtung, die durch den Schlagwinkel β bestimmt wird.

$$F'_r = D' \frac{V_R}{V} - F'_z \beta \quad (5.51)$$

Mit der Transformation zum Rotorkopfsystem durch den Einströmwinkel ϕ

$$\sin \phi = \frac{V_p}{V} \quad \cos \phi = \frac{V_T}{V} \quad (5.52)$$

folgt

$$\begin{aligned} F'_z &= \frac{\rho}{2} c (C_l V_T V - C_d V_P V) \\ F'_x &= \frac{\rho}{2} c (C_l V_P V + C_d V_T V) \\ F'_r &= \frac{\rho}{2} c (C_d V_R V) - F'_z \beta \\ M'_a &= \frac{\rho}{2} c^2 \left(C_m - \frac{x_a}{c} C_l \right) V^2 \end{aligned} \quad (5.53)$$

Diese Kräfte enthalten die Rotorblattbewegungen und daher die bewegungsabhängigen aerodynamischen Kräfte. Um die Analyse zu vereinfachen, werden die Geschwindigkeits-

komponenten in zwei Teile zerlegt, einen stationären und einen dynamischen um diesen statischen herum (sog. Störgrößen, engl. perturbation):

$$\begin{aligned} V_{T,P,R} &= (V_{T,P,R})_{\text{Trimm}} + \delta V_{T,P,R} \\ \Theta &= \Theta_{\text{Trimm}} + \delta \Theta \\ \beta &= \beta_{\text{Trimm}} + \delta \beta \end{aligned} \quad (5.54)$$

Die Trimmkomponenten stammen aus der stationären Betriebsbedingung des Rotors und die dynamischen Störgrößen resultieren von dynamischer Blattbewegung oder aus Böen. Genau so werden auch die Kräfte in einen stationären und einen dynamischen Teil zerlegt.

$$\begin{aligned} F'_{z,x,r} &= (F'_{z,x,r})_{\text{Trimm}} + \delta F'_{z,x,r} \\ M'_a &= (M'_a)_{\text{Trimm}} + \delta M'_a \end{aligned} \quad (5.55)$$

Der Bequemlichkeit halber wird im Folgenden der Zusatz „Trimm“ bei den Geschwindigkeiten weggelassen. Es folgen die Trimmkräfte zu

$$\begin{aligned} (F'_z)_{\text{Trimm}} &= \frac{\rho}{2} c (C_l V_T V - C_d V_P V) \\ (F'_x)_{\text{Trimm}} &= \frac{\rho}{2} c (C_l V_P V + C_d V_T V) \\ (F'_r)_{\text{Trimm}} &= \frac{\rho}{2} c C_d V_R V - F'_z \beta \\ (M'_a)_{\text{Trimm}} &= \frac{\rho}{2} c^2 \left(C_m - \frac{x_a}{c} C_l \right) V^2 \end{aligned} \quad (5.56)$$

In diesen Gleichungen werden die aerodynamischen Beiwerte für die Trimmrechnung berechnet. Die Störgrößen der Beiwerte werden mit den Störgrößen der Geschwindigkeiten ermittelt. Diese sind

$$\begin{aligned} \delta V &= \delta \sqrt{V_P^2 + V_T^2} = \frac{V_P \delta V_P + V_T \delta V_T}{V} \\ \delta \alpha_a &\approx \delta \left(\Theta - \frac{V_P}{V_T} \right) = \delta \Theta + \frac{V_P \delta V_T - V_T \delta V_P}{V_T^2} \end{aligned} \quad (5.57)$$

Die aerodynamischen Beiwerte sind grundsätzlich eine Funktion der Machzahl und des Anstellwinkels. Damit sind die Störgrößen in den Beiwerten durch folgende Derivate gegeben:

$$\delta C_{l,d,m} = C_{(l,d,m)_a} \delta \alpha_a + C_{(l,d,m)_M} \delta M \quad (5.58)$$

Die Machzahl ist an irgendeiner radialen Stelle

$$M = M_{\text{tip}} \frac{V}{V_{\text{tip}}} = M_{\text{tip}} \frac{V}{\Omega R} \quad (5.59)$$

und damit folgt für die Machzahländerung

$$\delta M = M_{\text{tip}} \frac{\delta V}{\Omega R} = M \frac{V_P \delta V_P + V_T \delta V_T}{V^2} \quad (5.60)$$

Nun kann man die Ausdrücke für die Störgrößen in den Kräften erhalten:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta F_z'}{\frac{\rho}{2}c} &= (C_{l\alpha}\delta\alpha_a + C_{lM}\delta M)V_T V + C_l\delta V_T V + C_l V_T \delta V - (C_{d\alpha}\delta\alpha + C_{dM}\delta M)V_P V \\
 &\quad - C_d\delta V_P V - C_d V_P \delta V \\
 &= \delta V_T \left[\frac{V_P V}{V_T^2} (V_T C_{l\alpha} - V_P C_{d\alpha}) + \frac{V_T^2}{V} (C_l + M C_{lM}) + V C_l - \frac{V_P V_T}{V} (C_d + M C_{dM}) \right] \\
 &\quad + \delta V_P \left[-\frac{V}{V_T} (V_T C_{l\alpha} - V_P C_{d\alpha}) + \frac{V_P V_T}{V} (C_l + M C_{lM}) - V C_d - \frac{V_P^2}{V} (C_d + M C_{dM}) \right] \\
 &\quad + \delta\Theta [C_{l\alpha} V V_T - C_{d\alpha} V V_P]
 \end{aligned} \tag{5.61}$$

In analoger Weise werden die anderen Komponenten aufgestellt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta F_x'}{\frac{\rho}{2}c} &= \delta V_T \left[\frac{V_P V}{V_T^2} (V_P C_{l\alpha} + V_T C_{d\alpha}) + \frac{V_T^2}{V} (C_d + M C_{dM}) + V C_d + \frac{V_P V_T}{V} (C_l + M C_{lM}) \right] \\
 &\quad + \delta V_P \left[-\frac{V}{V_T} (V_P C_{l\alpha} + V_T C_{d\alpha}) + \frac{V_P V_T}{V} (C_d + M C_{dM}) + V C_l + \frac{V_P^2}{V} (C_l + M C_{lM}) \right] \\
 &\quad + \delta\Theta [C_{l\alpha} V V_P + C_{d\alpha} V V_T] \\
 \frac{\delta F_r'}{\frac{\rho}{2}c} &= \delta V_T \left[\frac{V_P V_R V}{V_T^2} C_{d\alpha} + \frac{V_T V_R}{V} (C_d + M C_{dM}) \right] - \frac{\delta F_z'}{\frac{\rho}{2}c} \beta - \frac{F_z'}{\frac{\rho}{2}c} \delta\beta \\
 &\quad + \delta V_P \left[-\frac{V_R V}{V_T} C_{d\alpha} + \frac{V_P V_R}{V} (C_d + M C_{dM}) \right] + \delta V_R [V C_d] + \delta\Theta [V V_R C_{d\alpha}] \\
 \frac{\delta M_a'}{\frac{\rho}{2}c^2} &= \delta V_T \left[2V_T \left(C_m - C_l \frac{x_a}{c} \right) + \frac{V_P V^2}{V_T^2} \left(C_{m\alpha} - C_{l\alpha} \frac{x_a}{c} \right) + M V_T \left(C_{mM} - C_{lM} \frac{x_a}{c} \right) \right] \\
 &\quad + \delta V_P \left[2V_P \left(C_m - C_l \frac{x_a}{c} \right) - \frac{V^2}{V_T} \left(C_{m\alpha} - C_{l\alpha} \frac{x_a}{c} \right) + M V_P \left(C_{mM} - C_{lM} \frac{x_a}{c} \right) \right] \\
 &\quad + \delta\Theta \left[C_{m\alpha} - C_{l\alpha} \frac{x_a}{c} \right]
 \end{aligned} \tag{5.62}$$

Zu diesen Störgrößen werden noch die Luftkräfte nicht zirkulatorischen Ursprungs addiert. Die wichtigste Komponente stammt von dem aerodynamischen Effekt auf den Momentenbeiwert, dem Moment aus scheinbarer Masse M'_{nc} .

$$\delta M'_a = (\delta M'_a)_{\text{circ}} + M'_{nc} \tag{5.63}$$

Die nicht zirkulatorischen Anteile sind mit $a = -0,5$

$$\begin{aligned}
 L'_{nc} &= \rho\pi \left(\frac{c}{2}\right)^2 \Omega^2 R \left[r\overset{*}{\Theta} + \frac{1}{4} \frac{c}{R} \overset{**}{\Theta} - r\overset{**}{\beta} \right] \\
 M'_{nc} &= \rho\pi \left(\frac{c}{2}\right)^3 \Omega^2 \frac{R}{2} \left[-r \left(\overset{*}{\Theta} - \overset{**}{\beta} \right) - r\overset{*}{\Theta} - \frac{3}{8} \frac{c}{R} \overset{**}{\Theta} \right]
 \end{aligned} \tag{5.64}$$

Das resultierende nicht zirkulatorische Moment ist dann

$$M'_{nc} - L'_{nc} x_a = \rho \pi \left(\frac{c}{2} \right)^3 \Omega^2 R \left[r \left(\frac{1}{2} + 2 \frac{x_a}{c} \right)^{**} \beta - r \left(1 + 2 \frac{x_a}{c} \right)^* \Theta - \frac{c}{2R} \left(\frac{3}{8} + \frac{x_a}{c} \right)^{**} \Theta \right] \quad (5.65)$$

Unter Anwendung der Annahme kleiner Winkel vereinfachen sich die Ausdrücke ganz erheblich:

$$\begin{aligned} F'_z &\approx L' \\ F'_x &\approx L' \frac{V_p}{V_T} + D' \\ F'_r &\approx -F'_z \beta \\ \alpha_a &\approx \Theta - \frac{V_p}{V_T} \end{aligned} \quad (5.66)$$

Weiterhin wird ein symmetrisches Profil angenommen. Es folgt für die aerodynamischen Beiwerte

$$\begin{aligned} C_l &= C_{l\alpha} \alpha_a = C_{l\alpha} \left(\Theta - \frac{V_p}{V_T} \right) \\ C_d &= C_{d0} \\ C_m &= C_{m0} \end{aligned} \quad (5.67)$$

Generell wird die Hauptkomponente der Strömungsgeschwindigkeit von V_T gebildet und näherungsweise $V \approx V_T$ gesetzt. Damit erhält man für die Trimmkräfte (der Index *Trim* wird der Einfachheit halber weggelassen)

$$\begin{aligned} F'_z &= \frac{\rho}{2} c C_{l\alpha} (V_T^2 \Theta - V_T V_p) \\ F'_x &= \frac{\rho}{2} c C_{l\alpha} \left(V_T V_p \Theta - V_p^2 + \frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} V_T^2 \right) \\ F'_r &= -F'_z \beta \\ M'_a &= \frac{\rho}{2} c^2 C_{l\alpha} \left[\frac{C_{m0}}{C_{l\alpha}} (V_T^2 + V_p^2) - \frac{x_a}{c} (V_T^2 \Theta - V_T V_p) \right] \end{aligned} \quad (5.68)$$

und für die Störgrößen

$$\begin{aligned} \frac{\delta F'_z}{\frac{\rho}{2} c C_{l\alpha}} &= \delta V_T (2V_T \Theta - V_p) - \delta V_p V_T + \delta \Theta V_T^2 \\ \frac{\delta F'_x}{\frac{\rho}{2} c C_{l\alpha}} &= \delta V_T \left(V_p \Theta + 2 \frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} V_T \right) + \delta V_p (V_T \Theta - 2V_p) + \delta \Theta V_T V_p \\ \frac{\delta F'_r}{\frac{\rho}{2} c C_{l\alpha}} &= -\frac{\delta F'_z}{\frac{\rho}{2} c C_{l\alpha}} \beta - \delta \beta (V_T^2 \Theta - V_T V_p) \\ \frac{\delta M'_a}{\frac{\rho}{2} c^2 C_{l\alpha}} &= \delta V_T \left[2 \frac{C_{m0}}{C_{l\alpha}} V_T + \frac{x_a}{c} (V_p - 2V_T \Theta) \right] + \delta V_p \left(2 \frac{C_{m0}}{C_{l\alpha}} V_p + \frac{x_a}{c} V_T \right) - \delta \Theta \frac{x_a}{c} V_T^2 \end{aligned} \quad (5.69)$$

Beispiel

In einem zirkulationsgesteuerten Rotor ist der Auftriebsbeiwert sowohl eine Funktion des Anstellwinkels als auch des Ausblasebeiwertes C_μ , $C_l = C_l(\alpha_a, C_\mu)$, worin der Ausblasebeiwert durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$C_\mu = \frac{\dot{m} V_{\text{jet}}}{\frac{\rho}{2} V^2 c}$$

Man berechne sowohl den stationären Wert des Auftriebs als auch die Störgröße darin als Funktion der Variablen V_T und V_P sowie des Steuerwinkels Θ .

Lösung

$$\delta L' = \rho c C_l V \delta V + \frac{\rho}{2} V^2 c \delta C_l$$

$$\delta C_l = C_{l\alpha} \delta \alpha_a + C_{l\mu} \delta C_\mu$$

$$\delta C_\mu = -2C_\mu \frac{\delta V}{V}$$

δV und $\delta \alpha_a$ waren bereits gegeben. Somit folgt für den stationären Teil und den Störgrößenteil des Auftriebs

$$\begin{aligned} L' &= \frac{\rho}{2} V^2 c C_l \\ \frac{\delta L'}{\frac{\rho}{2} c} &= \delta V_T \left(2V_T C_l + \frac{V_P V^2}{V_T^2} C_{l\alpha} - 2V_T C_\mu C_{l\mu} \right) \\ &\quad + \delta V_P \left(2V_P C_l - \frac{V^2}{V_T} C_{l\alpha} - 2V_P C_\mu C_{l\mu} \right) + \delta \Theta V^2 C_{l\alpha} \end{aligned}$$

Beispiel

Man ermittle für einen gelenkig gelagerten Rotor im Schwebeflug die Bewegungsgleichung der Schlagbewegung bei variierendem Steuerwinkel. Um die instationäre Aerodynamik zu berücksichtigen, nehme man den Wert der Theodorsen-Funktion bei $3/4$ Radius. Der Schlaggelenksabstand betrage $e_\beta = 0,06$, die elastische Achse sei in der Profilmittte und die Massenachse bei $c/4$ gelegen.

Lösung

Aus der Position der elastischen Achse folgt, dass der Abstand der Drehachse von der Profilmittte gleich Null ($a = 0$) und ferner der Abstand der Massenachse von der elastischen Achse $x_I/c = 1/4$ ist. Aus dem Schlaggelenksabstand folgt die Eigenfrequenz

im drehenden System zu $v_\beta^2 = 1,09$ und weiter:

$$\begin{aligned}\gamma \Delta \overline{M}_\beta &= \overset{**}{\beta} + v_\beta^2 \beta - \frac{3}{2} \frac{x_I}{R} \left(\overset{**}{\Theta} + \overset{*}{\Theta} \right) \\ \Delta \overline{M}_\beta &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{r}{2} \left[\delta \overline{V}_T (2 \overline{V}_T \Theta - \overline{V}_P) - \delta \overline{V}_P \overline{V}_T + \delta \Theta \overline{V}_T^2 \right] C(k) + r \overline{L}_{nc} dr \\ \overline{V}_T &= r \quad \overline{V}_P = \lambda \quad \delta \overline{V}_T = 0 \quad \delta \overline{V}_P = r \overset{*}{\beta} - \frac{1}{4} \frac{c}{R} \overset{*}{\Theta} \quad \delta \Theta = \Theta\end{aligned}$$

Die mittlere reduzierte Frequenz ist bei $r = 0,75$ zu nehmen, also $V = 0,75 \Omega R$

$$\bar{k} = \frac{\omega c}{2V} = \frac{2}{3} \frac{\omega c}{\Omega R} = \frac{2}{3} \frac{c}{R}$$

Nun folgt der nicht zirkulatorische Auftrieb zu

$$\bar{L}_{nc} = \frac{\pi \rho c^2}{2 \rho C_{l\alpha} c \Omega^2 R^4} \left(\delta \overset{*}{\Theta} V_T - \delta V_P \right)$$

Schließlich erhält man das dimensionslose aerodynamische Moment mit $C_{l\alpha} = 2\pi$

$$\Delta \overline{M}_\beta = \frac{C(\bar{k})}{8} \left[-\overset{*}{\beta} + \frac{1}{3} \frac{c}{R} \overset{*}{\Theta} + \overset{*}{\Theta} \right] + \frac{1}{24} \frac{c}{R} \left(\overset{*}{\Theta} - \overset{**}{\beta} \right) + \frac{1}{64} \left(\frac{c}{R} \right)^2 \overset{**}{\Theta}$$

5.8 Modell des dynamischen Durchflussgrades

Typische Rechenverfahren verwenden als Durchflussmodell den stationären Durchflussgrad aus der Strahltheorie. Grundsätzlich wird aber der Rotornachlauf bei instationären Vorgängen auch instationär sein und in einen dynamischen Durchflussgrad resultieren (engl. dynamic inflow). Dieser dynamische Durchfluss kann ein sehr wichtiger Faktor bei der Berechnung der instationären Luftkräfte sein und somit einen großen Einfluss auf das dynamische Rotorverhalten ausüben. Die Komponenten des dynamischen Durchflusses werden naturgemäß an die dynamischen Rotorlasten wie Schub, Roll- und Nickmoment gekoppelt sein, wobei die Art der Kopplung noch Thema der aktuellen Forschung ist. Um eine Analyse durchführen zu können, muss man Vereinfachungen einführen. So ist eine mögliche Herleitung der Kopplung mittels der instationären Strahltheorie machbar. Die grundlegende Vereinfachung ist hier, dass die Rotorkräfte relativ langsam Veränderungen unterliegen (also Annahme der quasistationären Strömung), so dass die Strahltheorie sowohl für die statischen wie die dynamischen Komponenten des Durchflusses gültig ist.

Beide Komponenten werden im Folgenden untersucht. Die Arbeiten zum dynamischen Durchflussmodell wurden bereits um 1943 von Hohenemser angeregt [22], aber erst 1973 mit Messungen von Hohenemser und Crews initiiert [23].

5.8.1 Dynamischer Durchfluss im Schwebeflug

Im Schwebeflug kann man ein gleichförmiges Feld induzierter Geschwindigkeiten annehmen. Mit Hilfe der Strahltheorie wird der Durchflussgrad an den Schub gekoppelt.

$$\lambda = \text{sign}(C_T) \kappa \sqrt{\left| \frac{C_T}{2} \right|} \quad (5.70)$$

Den Faktor κ kann man zum Anpassen an Messungen heranziehen; im Schwebeflug ist er etwa mit $\kappa \approx 1,15$ gegeben. Ein einfaches Modell dynamischen Durchflusses im Schwebeflug ist dann durch folgende Differentialgleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} \tau \dot{\lambda} + \lambda &= \text{sign}(C_T) \kappa \sqrt{\left| \frac{C_T}{2} \right|} \\ \tau \delta \dot{\lambda} + \lambda &= \kappa^2 \frac{\delta C_T}{4\lambda_0} \end{aligned} \quad (5.71)$$

Darin ist τ eine Zeitverzögerungskonstante und kann in der folgenden Form angenähert werden

$$\tau \approx \frac{0,85}{4\lambda_0 \Omega} \quad (5.72)$$

λ_0 ist der statische Wert des Durchflusses. Der Schubbeiwert besteht hier aus zwei Komponenten, dem statischen und dem Störgrößenanteil.

5.8.2 Dynamischer Durchfluss im Vorwärtsflug

Auch hier kann man die vereinfachende Annahme machen, dass der Durchfluss in der Rotorebene konstant ist. Dann ist der induzierte Durchfluss

$$\lambda_i = \frac{C_T}{2\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}} \quad (5.73)$$

worin λ_i die induzierte Komponente und λ die Gesamtheit des Durchflusses bezeichnet.

$$\lambda = \lambda_i - \mu \tan \alpha \quad (5.74)$$

Hierin stellt α die Neigung der Rotorebene gegen die Flugrichtung dar (positiv aufnicken). Eine Verbesserung gegenüber dem einfachen Modell konstanter Verteilung stellt die Einführung einer mit $1/\text{rev}$ veränderlichen Verteilung dar, was der Einführung linearer Verteilungen in x und y entspricht.

$$\lambda_i = \lambda_0(1 + k_x r \cos \psi + k_y r \sin \psi) \quad (5.75)$$

Die Koeffizienten k_x und k_y repräsentieren die Ungleichförmigkeit der Verteilung in Längs- und Querrichtung. Typischerweise ist $k_x > 0$ und $k_y < 0$. Dies bedeutet, dass der induzierte Durchfluss an der Hinterseite und der rücklaufenden Seite größer ist. Bei größeren Fortschrittsgraden wird k_y zunehmend größer und k_x kann dann durch den Wert 1 ersetzt werden. Die klassische Wirbeltheorie kann verwendet werden, um die Koeffizienten zu ermitteln und es gibt einige Näherungsformeln dafür. Eine der bekannteren ist die von Drees (1949) [24].

$$k_x = \frac{4}{3} \left[(1 - 1,8\mu^2) \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2} - \frac{\lambda}{\mu} \right] \quad k_y = -2\mu \quad (5.76)$$

Der dynamische Durchfluss ist im Vorwärtsflug sehr viel schwieriger zu handhaben als im Schwebeflug. Eine einfache Modellierung der Störgrößen des dynamischen Durchflusses kann in folgender Form aufgebaut sein

$$\delta\lambda_i = \lambda_u + r(\lambda_{1C} \cos \psi + \lambda_{1S} \sin \psi) \quad (5.77)$$

Die darin befindlichen Durchflusskomponenten stellen der Reihe nach die Störgröße in der konstanten Verteilung und den linearen Verteilungen in Längs- und Querrichtung dar. Diese Komponenten sind mit den Störgrößen des Schubes, Nick- und Rollmomentes verbunden, die man durch Subtraktion des Mittelwertes von den totalen Größen dieser Rottorkomponenten gewinnt. Eine einfache Relation zwischen diesen Störgrößen kann man mittels der Strahltheorie aufstellen:

$$\begin{bmatrix} \tau_T \dot{\lambda}_u \\ \tau_M \dot{\lambda}_{1C} \\ \tau_M \dot{\lambda}_{1S} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_u \\ \lambda_{1C} \\ \lambda_{1S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2(\lambda_0 + \sqrt{\mu^2 + \lambda_0^2})} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{\mu^2 + \lambda_0^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{\mu^2 + \lambda_0^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta C_T \\ \delta C_{My} \\ \delta C_{Mx} \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

Die darin enthaltenen Zeitverzögerungskonstanten sind

$$\tau_T = \frac{0,42}{\mu \Omega} \quad \tau_M = \frac{0,22}{\mu \Omega} \quad (5.79)$$

Eine alternative Form wurde 1980 von Pitt und Peters entwickelt [25]:

$$[\mathbf{M}] \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_u \\ \dot{\lambda}_{1C} \\ \dot{\lambda}_{1S} \end{bmatrix} + [\mathbf{L}]^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_u \\ \lambda_{1C} \\ \lambda_{1S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_T \\ C_{My} \\ C_{Mx} \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

Die enthaltenen Matrizen sind von der Größenordnung 3x3 und es gibt viele verschiedene Formen dieser Matrizen. Bei Verwendung der einfachen Strahltheorie sind sie Diagonalmatrizen, bei anderen Theorien können sie aber auch vollständig belegt sein. Oft verwendet wird folgender Satz von Matrizen (beachte: der Anstellwinkel der Blattspitzenebene α ist pos. aufnickend):

$$[\mathbf{L}] = \frac{1}{C_V} \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & \frac{15\pi}{64} \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} \\ 0 & -\frac{4}{1-\sin\alpha} & 0 \\ \frac{15\pi}{64} \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} & 0 & -\frac{4}{1-\sin\alpha} \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} \frac{128}{75\pi} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{16}{45\pi} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{45\pi} \end{bmatrix}$$

Der Parameter C_V charakterisiert den Massenfluss

$$C_V = \frac{\mu^2 + \lambda(\lambda + \lambda_i)}{\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}} \quad (5.82)$$

Nun werden in der dynamischen Analyse die dynamischen Durchfluskomponenten als zusätzliche Freiheitsgrade behandelt. Noch komplexer, aber auch detaillierter ist der Ansatz von Peters and He [26]. Diese Modellierungen werden von der Arbeitsgruppe um Peters ständig weiterentwickelt und man suche dazu nach aktuellen Publikationen. Es ist interessant zu beobachten, dass die Koeffizienten in den Matrizen mit denen des globalen Abwindmodells nach Mangler und Squire [27] korrelieren.

5.9 Schlussfolgerungen

- Grundsätzlich sind alle Betriebszustände eines Hubschraubers mit instationärer Aerodynamik behaftet. Selbst im Schwebeflug sorgt der Rumpf unter dem Rotor mit seiner Verdrängungsströmung für periodische Anstellwinkeländerungen am Rotorblatt. Im Vorwärtsflug variiert die Anströmgeschwindigkeit der Rotorblätter mit 1/rev, die Luftkräfte (Auftrieb, Widerstand, Nickmoment) sind proportional zum Staudruck, also dem Quadrat der Geschwindigkeit, und damit proportional zu 0, 1 und 2/rev. Dieser multi-

pliziert sich mit dem Steuerwinkel, der wiederum 0 und 1/rev beinhaltet, so dass durch das Produkt mit dem Staudruck bereits Luftkräfte mit bis zu 3/rev Frequenzinhalt entstehen. Darauf reagiert das Rotorblatt und erzeugt seinerseits weitere Anstellwinkeländerungen, so dass letztlich ein großes Spektrum von ganzzahligen Vielfachen der Rotordrehfrequenz entsteht.

- Der Nachlauf hinter dem Rotorblatt ist immer dreidimensional verformt und daher sehr schwierig analytisch zu behandeln. Globale Nachlaufmodelle beinhalten nur den mittleren Abwind, modifiziert um Längs- und Quergradienten, und decken damit nur den Frequenzbereich 0 und 1/rev ab. Dies reicht für die Trimm- und Leistungsrechnung, nicht aber für Vibrationen oder aeroelastische Stabilitätsuntersuchungen.
- Die instationäre zweidimensionale Profiltheorie liefert die wichtigsten Eigenschaften instationärer Aerodynamik: eine Phasennacheilung der Luftkräfte in Abhängigkeit der reduzierten Frequenz.
- Die reduzierte Frequenz ist beim Drehflügler – im Gegensatz zum Starrflügler – nicht von der Rotordrehzahl, sondern nur von geometrischen Parametern des Rotorblattes abhängig (Rechteckblatt, Schwebeflug): $k = nk_{\text{tip}}/r$, worin $k_{\text{tip}} = c/(2R)$ die reduzierte Frequenz der Grundschwingung (1/rev) an der Blattspitze bedeutet, $n = 1, 2, 3, \dots$ die ganzzahligen Vielfachen der Rotordrehfrequenz repräsentiert und die von der radialen Koordinate inverse Abhängigkeit durch $1/r$ zu erkennen ist.
- im Vorwärtsflug ist die Anströmgeschwindigkeit am vorlaufenden Blatt größer und damit die reduzierte Frequenz kleiner, während am rücklaufenden Blatt die Anströmgeschwindigkeit reduziert ist und damit die reduzierten Frequenzen größer sind als im Schwebeflug: $k = nk_{\text{tip}}/(r + \mu \sin \psi)$. Damit erhält man an jeder radialen und azimutalen Stelle andere reduzierte Frequenzen.
- Die Bereiche etwa von Blattmitte bis zur Spitze sind für $n = 1$ in der Regel quasistationär zu behandeln, die Bereiche innerhalb instationär, jedoch sind dort die Staudrücke viel kleiner, so dass der Fehler quasistationärer Aerodynamik dort nicht groß ist. Anstellwinkeländerungen mit $n \geq 2/\text{rev}$ jedoch sind bis zur Blattspitze instationär. Aeroelastische Problemstellungen brauchen daher meist instationäre Aerodynamik.
- Die wichtigsten instationären aerodynamischen Eigenschaften werden für harmonische Blattbewegungen (Schlagen, Schwenken, Torsion, Anstellwinkeländerungen) durch die Theodorsenfunktion beschrieben. Das periodische Böenproblem ist jedoch grundsätzlich verschieden davon und wird durch die Searsfunktion beschrieben. Zum Beispiel stellt die Blatt-Wirbel-Interaktion eine sehr hochfrequente Böe für das Rotorblattprofil dar, denn die Wellenlänge der Böe beträgt nur Bruchteile der Profiltiefe.
- Im Schwebeflug befinden sich die Nachlaufflächen unter dem Rotor und können die aerodynamische Dämpfung erheblich reduzieren. Im Vorwärtsflug schwimmen die Nachlaufflächen dagegen schnell weg. Allerdings können im Sinkflug die Blattspitzenwirbel die Rotorebene durchtreten und von Rotorblättern durchflogen werden, was zu starkem Impulslärm aufgrund dieser Blatt-Wirbel-Interaktionen führt.

5.10 Übungsaufgaben

5.10.1 Instationäre Aerodynamik

1. Begründen Sie folgende Aussagen:
 - a) Zeigen Sie die Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen den grundlegenden strömungsphysikalischen Gleichungen und den Grundgleichungen der Strukturmechanik.
 - b) Bei Drehflüglern sind die instationären aerodynamischen Kräfte wesentlich schwieriger als beim Flächenflugzeug zu bestimmen.
 - c) Die Annahme quasistationärer Aerodynamik unterschätzt die Dämpfung in der Torsionsbewegung.
 - d) In einem zweidimensionalen Windkanaltest wurden die instationären aerodynamischen Kräfte von Anstellwinkel- und Vertikalschwingungen gemessen. Trotz gleicher effektiver Anstellwinkelamplituden und -frequenzen waren die Messergebnisse unterschiedlich.
 - e) Theodorsen's Funktion $C(k)$ wird auch als Rückkopplungsparameter einer Blattbewegung bezeichnet.
 - f) Die Theorie dünner Profile stellt keine gute Näherung für die Aerodynamik abgelöster Strömung dar.
 - g) Je größer die Gebiete mit abgelöster Strömung auf der rücklaufenden Seite des Rotors, um so größer sind auch die Vibrationen.
 - h) Der Wirbeldichtenachlauf hinter dem Rotorblatt aufgrund zeitlicher Änderung der Blattzirkulation spielt im Schwebeflug eine größere Rolle als im Vorwärtsflug.
 - i) Gibt es einen Unterschied in der Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten einerseits mittels der Strahltheorie und andererseits mittels der Traglinientheorie?
 - j) Die wiederkehrenden Nachlaufflächen können bei der Berechnung von höherharmonischer Steuerung wichtig sein.
 - k) Die Berücksichtigung instationärer Aerodynamik im Vorwärtsflug ist nicht einfach.
 - l) Miller's Näherung für den Wirbeldichtenachlauf ist eine grobe Näherung bei der Rotorberechnung.
 - m) Die Methode des dynamischen Durchflusses ist eine Näherung für instationäre Kräfte auch für geringe Frequenzen.
 - n) Piloten würden den Transitionsbereich im Flug lieber vermeiden.
2. Bei einem zirkulationsgesteuerten Rotor ist das aerodynamische Moment eine Funktion des geometrischen Anstellwinkels, des Ausblasebeiwertes und der Machzahl: $C_{m0.5} = f(\alpha, C_\mu, M)$. Darin ist der Ausblasebeiwert folgendermaßen gegeben:

$$C_\mu = \frac{\dot{m}_j V_j}{\frac{\rho}{2} V^2 c}$$

Hier ist V_j die Geschwindigkeit des Ausblasestrahls (Index j vom engl. jet) und \dot{m}_j dessen Massenstrom. Das Rotorblatt hat einen konstanten Steuerwinkel und der

Auftriebsvektor wird durch Regelung der Ausblasung eingestellt. Berechnen Sie das linearisierte Moment in Abhängigkeit der Strömungskomponenten V_T und V_P sowie des Steuerwinkels Θ (stationäre und linearisierte Werte). Berücksichtigen Sie auch die nicht zirkulatorischen Anteile.

5.10.2 Bewegungsgleichungen mit instationärer Aerodynamik

- Leiten Sie die Gleichung der Schlagbewegung für einen gelenkigen Rotor im Schweflug her. Um die instationären aerodynamischen Kräfte zu berücksichtigen, verwenden Sie die Theorie dünner Profile und eine angenäherte Form der Auftriebsabminderungsfunktion bei 75 % Radius. Die elastische Achse sei bei der Profilmitte gelegen. Weitere Werte sind:

Schlaggelenksabstand	$e_\beta = 0,06$	Steuerwinkel	$\Theta_4 = 1^\circ$
Lockzahl	$\gamma = 5$	Steuerphase	$\psi_4 = 0^\circ$
Radius	$R/c = 20$	Massenachse	$x_I/c = 0,25$
Auftriebsanstieg	$C_{l\alpha} = 5,7$	aerodynamische Achse	$x_a/c = -0,25$

- Leiten sie die Schlagantwort eines Rotors mit zentralem Schlaggelenk auf eine plötzliche konstante Vertikalböe V_g her. Nehmen Sie dazu eine Einfreiheitsgradbewegung in Schlägen an und verwenden Sie die Methode des dynamischen Durchflusses.

Literatur

- R.L. Bisplinghoff, R.L. Ashley, H. Halfman, *Aeroelasticity*, ISBN 0486691896, Dover Publication Inc., 1996
- H. Försching, *Grundlagen der Aeroelastik*, ISBN 3540065407, Springer Verlag, 1974
- K. Karamcheti, *Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics*, Robert E. Krieger Publishing Co., 1980
- J.G. Leishman, *Principles of Helicopter Aerodynamics*, ISBN 0 521 66060 2, Cambridge University Press, 2000
- H. Glauert, *The Force and Moment on an Oscillating Aerofoil*, Tech. Rep. Aero. Res. Comm. 1242, 1929.
- W. Birnbaum, *Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie (Aufgrund von Rechnungen von W. Ackermann)*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 3, Nr. 4, S. 290–297, 1923
- F.W. Lanchester, *Aerodynamics: Constituting the First Volume of a Complete Work on Aerial Flight*, Archibald Constable & Co., London, 442 p., 1907
- L. Prandtl, *Tragflächen-Auftrieb und -Widerstand in der Theorie*, Jahrbuch der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt (WGL), Vol. 5, pp. 37–65, 1920
- H. Wagner, *Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln*, Dissertation Göttingen 1924 und: Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 5, Nr. 1, S. 17–35, 1925

10. T. Theodorsen, *General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter*, NACA Report 496, 1935
11. H.G. Küssner, *Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Flügeln*, Luftfahrt Forschung Bd. 13, Lfg. 12, S. 410–424, 1936
12. W. Birnbaum, *Das ebene Problem des schlagenden Flügels*, Dissertation Göttingen 1922 und: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 4, Nr. 4, S. 277–292, 1924
13. W.R. Sears, *Some Aspects of Non-Stationary Airfoil Theory and Its Practical Application*, Dissertation Stanford 1938 und: Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 8, No. 3, pp. 104–108, 1941
14. W. Johnson, *Application of Unsteady Airfoil Theory to Rotary Wings*, Journal of Aircraft, Vol. 17, No. 4, pp. 285–286, 1980
15. R.H. Miller, *Theoretical Determination of Rotor Blade Harmonic Airloads*, MIT Report, Cambridge, Mass., 1964
16. R.A. Piziali, *Method for Solution of the Aeroelastic Response Problem for Rotating Wings*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 4, No. 3, pp. 445–489, 1966
17. H. Daughaday, R.A. Piziali, *An Improved Computational Model For Predicting the Unsteady Aerodynamic Loads of Rotor Blades*, Journal of the AHS, Vol. 11, No. 3, pp. 3–10, 1966
18. R. Isaacs, *Airfoil Theory for Rotary Wing Aircraft*, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 13, pp. 218–220, 1946
19. J.M. Greenberg, *Some Considerations on an Airfoil in an Oscillating Stream*, NACA TN 1372, 1947
20. B.G. van der Wall, J.G. Leishman, *On the Influence of Time-Varying Flow Velocity on Unsteady Aerodynamics*, Journal of the AHS, Vol. 39, No. 4, pp. 25–36, 1994
21. R.G. Loewy, *A Two-Dimensional Approximation to the Unsteady Aerodynamics of Rotary Wings*, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 24, No. 2, pp. 81–106, 1957
22. A. Betz (Hrsg.), *Monographien über Fortschritte der deutschen Luftfahrtforschung (seit 1939). N Überblick über die deutsche Entwicklung und Forschung auf dem Gebiete der Drehflügelflugzeuge*, redigiert von G. Sissingh, AVA Göttingen, 1946
23. K.H. Hohenemser, S.T. Crews, *Model Tests on Unsteady Rotor Wake*, Journal of Aircraft, Vol. 10, No. 1, pp. 58–60, 1973
24. Ir.J. Meijer Drees, *A Theory of Airflow Through Rotors and its Application to Some Helicopter Problems*, Journal of the Helicopter Association of Great Britain, Vol. 3, No. 2, pp. 79–104, 1949
25. D.M. Pitt, D.A. Peters, *Theoretical Prediction of Dynamic-Inflow Derivatives*, Vertica, Vol. 5, No. 1, pp. 21–34, 1981
26. D.A. Peters, C.J. He, *A Closed-Form Aerodynamic Theory for Lifting Rotors in Hover and Forward Flight*, 43rd Annual Forum of the AHS, Saint Louis, Missouri, 1987
27. K.W. Mangler, H.B. Squire, *The Induced Velocity Field of a Rotor*, ARC Reports and Memoranda 2642, 1950



Aeroelastische Stabilität im Schweben- und Vorwärtsflug

6

6.1 Einleitung

Der Begriff der aeroelastischen Stabilität umschreibt alle statischen und dynamischen Instabilitäten, die in einem Freiheitsgrad wie Schlägen, Schwenken oder Torsion alleine, meistens aber durch Kopplung zweier davon oder aller drei zusammen, auftreten können. Als statische Instabilität ist die Torsionsdivergenz (engl. torsion divergence) bekannt. Die dynamische Instabilität wird mit Flattern (engl. flutter) bezeichnet und es gibt verschiedene Arten davon. Aufgrund des Entwicklungsvorsprungs vor Drehflüglern traten diese Phänomene und deren analytische Behandlung zunächst bei Flächenflugzeugen auf. Der Bruch von Langley's Eindecker 1903 ist wahrscheinlich auf Torsionsdivergenz zurückzuführen und das Flattern der Flügel, Leitwerke oder der Ruder war ein permanentes Problem bis zum Ende des zweiten Weltkrieges, da die Fluggeschwindigkeiten mit der Zeit rapide zunahmen und damit auch die Luftkräfte. Eine Theorie der Torsionsdivergenz und ihrer Beseitigung wurde 1926 von Reissner [1] entwickelt, das Flügel-Ruderflattern und Gegenmaßnahmen wurde 1922 von Baumhauer beschrieben [2].

Das Flatterphänomen ist eine aeroelastische Instabilität, die durch die Kopplung von aerodynamischen, elastischen (= Federkräften) und Massenkräften (= Trägheitskräften) verursacht wird; diese miteinander in Wechselwirkung stehenden Kräfte werden auch als Collar-Dreieck bezeichnet [3]. Beim Flattern handelt es sich um eine selbsterregte Schwingung (engl. self-excited oscillation), die in ihrer Wirkungsweise von derjenigen der Resonanz oder der dynamischen Antwort völlig verschieden ist, da sie erstens keine äußere Anregung braucht und zweitens die Amplituden stetig wachsen. Das dynamische Antwortproblem beinhaltet immer eine stationäre dynamische Antwort mit begrenzten Amplituden auf eine dynamische Anregung.

Obwohl die seit ca. 1926 vermarkteten Autogyros oft dynamische Probleme aufwiesen, hat man diese gerne dem Piloten angelastet. Die speziellen aeroelastischen Probleme

von Drehflüglern wurden jedoch erst während des zweiten Weltkrieges in Deutschland untersucht, wo sowohl Focke als auch Flettner Hubschrauber in Serie bauten. Bereits 1940 wurden für die Entwicklung der Focke-Achgelis Fa 223 Flatterrechnungen angestellt [4] und zeitgleich in England die dynamischen Probleme von Rotoren beschrieben [5]. Die auch bei Autogyros auftretende Bodenresonanz wurde 1943 in Deutschland bei Focke [6] und in Amerika von Coleman [7] untersucht und mathematisch beschrieben.

Die speziellen Problematiken des Flatterns von Rotorblättern wurde von Ham 1973 ausführlich dargelegt [8]. Das Ziel dieses Kapitels ist, die grundsätzliche Wirkungsweise des Rotorblattflatterns im Schwebeflug zu verstehen, wobei hier die Bewegungsgleichungen im Vergleich zum Vorwärtsflug noch einfach sind, da im Schwebeflug die Anströmgeschwindigkeit der Rotorblätter konstant ist, während im Vorwärtsflug aufgrund der variierten Anströmgeschwindigkeit viele periodische Terme hinzukommen. Somit sind das dynamische Antwortproblem als auch die Flatterrechnung im Vorwärtsflug sehr viel schwieriger als im Schwebeflug zu lösen, wo es relativ leicht ist, die statische Gleichgewichtslage des Rotorblattes zu bestimmen und um diesen Betriebszustand herum eine linearisierte Stabilitätsanalyse durchzuführen.

Es gibt viele Flattermöglichkeiten. Zwei der häufigsten Arten sind das Schlag-Schwenk-Flattern und das Schlag-Torsions-Flattern. Beim Rotorblattentwurf muss man sehr sorgfältig darauf achten, dass bei kritischen Flugsituationen genügend Sicherheitsspielraum zu den Stabilitätsgrenzen gewährleistet ist. Diese Instabilitäten werden im Detail untersucht werden, wobei einfache Blattkonfigurationen zugrunde gelegt werden. Man kann die hier betrachteten Zweifreiheitsgradsysteme aber leicht zu komplexeren Modellen ausbauen.

Der Vorwärtsflugzustand bringt eine zusätzliche Dimension von Komplexität in die Analyse der Hubschrauberaeroelastik ein. Die Anströmverhältnisse in der Rotorebene sind unsymmetrisch sowie instationär und ein Teil der Rotorblätter ist auf der rücklaufenden Seite entweder im Bereich der Strömungsablösung oder sogar unter Rückanströmbedingungen anzutreffen, während sich die Blattspitze an der vorlaufenden Seite der Schallgeschwindigkeit nähert. Die Komplexität wird daher von den aerodynamischen Lasten verursacht, die ausgesprochen schwierig in den Griff zu bekommen sind:

- periodische Anströmung der Rotorblätter aus Überlagerung von Rotation und Fluggeschwindigkeit,
- periodische Steuerwinkeländerungen,
- ungleichförmiges induziertes Geschwindigkeitsfeld mit Blattspitzenwirbeln,
- Kompressibilitätseffekte und Stöße auf der vorlaufenden Seite,
- rückwärtige Anströmung und dynamische Strömungsablösung an der rücklaufenden Seite,
- unterschiedliche Schräganströmung der Blattelemente fast überall in der Rotorebene,
- elastische Blattbewegungen in allen Freiheitsgraden,

- Auswirkung der Rumpfumströmung in der Rotorebene,
- turbulenter Nachlauf („Totwasser“) hinter dem Rotorkopf.

Die Bewegungsgleichungen der Rotorblätter im Vorwärtsflug beinhalten nun viele periodische Terme und daher muss man spezielle mathematische Verfahren heranziehen, um diese zu lösen. Für die Untersuchung der aeroelastischen Stabilität im Vorwärtsflug sind folgende Schritte zu durchlaufen:

1. Die Trimmrechnung, welche die Hubschauberorientierung im Raum und die zugehörigen Steuerwinkel ermittelt.
2. Die stationäre (und dabei gleichzeitig dynamische) Systemantwort, welche die ausgelenkte Position des Rotorblattes in Abhängigkeit des Umlaufwinkels für eine Rotorumdrehung berechnet.
3. Die Stabilitätsanalyse, basierend auf einem Störgrößenansatz um die stationäre dynamische Systemantwort herum.

Dabei müssen die Nichtlinearitäten erhalten bleiben, es handelt sich also um nichtlineare periodische Gleichungen. Daher empfiehlt es sich, die Gesamtbewegungen der Rotorblätter durch ein paar Eigenformen anzunähern. Typischerweise sind dies zwei bis drei Schlagformen (Eigenfrequenzen bei etwa 1/rev, 2,7/rev, 5/rev), zwei Schwenkformen (Eigenfrequenzen bei etwa 0,3/rev und 4,5/rev) und eine Torsion (Eigenfrequenz bei etwa 4–8/rev), so dass der Frequenzbereich bis etwa 6/rev abgedeckt ist, was für die Leistungsrechnung völlig ausreicht. Insbesondere für torsionsweiche Rotoren, wie zum Beispiel den der Bo105, spielt die elastische Torsion des Blattes bereits bei der Trimmung eine wichtige Rolle. Die Trimmung und die stationäre dynamische (periodische) Blattbewegung als Antwort auf die periodischen Luftkräfte werden in einem Schritt gelöst.

Für die Berechnung von Vibrationen muss der durch die Blattschwingungsformen abgedeckte Frequenzbereich an die Blattzahl angepasst werden, denn die Vibrationen im nicht drehenden System der Hubschrauberzelle finden mit ganzzahligen Vielfachen der Blattzahlharmonischen N_b/rev statt und werden von den Frequenzen bis $(N_b + 1)/\text{rev}$ im drehenden System verursacht. Um diese ausreichend genau zu berechnen, sollte der Frequenzbereich der Blattdynamik $(N_b + 2)/\text{rev}$ abdecken. Beispiel: bei einem 7-Blatt-Rotor sollten im drehenden System wenigstens all die Eigenformen in Schlägen, Schwenken und Torsion angesetzt werden, deren Eigenfrequenzen bis $N_b + 2 = 9/\text{rev}$ betragen.

Die Stabilitätsanalyse basiert auf den um den Trimmzustand herum aufgestellten linearisierten Bewegungsgleichungen. Diese werden dann in Differentialgleichungen für die Eigenformen transformiert. Solange nur Vibrationen oder die Belastung von Komponenten (wie z. B. die Biegemomente in den Rotorblättern) Gegenstand der Berechnung sind, muss man keine Stabilitätsrechnung durchführen, sondern braucht nur das dynamische Antwortproblem lösen.

Eine Möglichkeit – insbesondere für Boden- und Luftresonanz – ist, die Bewegungsgleichungen im nicht drehenden System aufzustellen, indem man die FCT verwendet, da dann weniger periodische Terme enthalten sind als im drehenden System. Dann kann man eine Näherungslösung verwenden, indem man alle periodischen Terme vernachlässigt, was die Anwendung der Lösungsmethoden von Systemen mit konstanten Koeffizienten ermöglicht, jedoch nur im nicht drehenden System und für Fortschrittsgrade von $\mu \leq 0,3$ anwendbar ist.

Alternativ dazu ist die Methode des Gleichgewichts der harmonischen Terme für jede der Harmonischen (dies wird zum Beispiel in Programmen wie CAMRAD [9] oder HOST [10] verwendet) zu sehen. Eine andere gebräuchliche Methode ist die Floquet-Theorie im drehenden oder nicht drehenden System [11, 12]. Allerdings ist die Bestimmung der Wurzel des Eigenwertproblems schwierig, da die Frequenz nicht eindeutig ist ($\omega \pm n\pi/2$) und das n darin durch Erfahrung oder mit Hilfe der Methode der konstanten Koeffizienten bestimmt werden muss.

Vermutlich ist jedoch die numerische Integration der Bewegungsgleichungen am weitesten verbreitet (insbesondere in industriellen Rechenverfahren), da hierin jedwede Art von Nichtlinearitäten enthalten sein kann. Die Systemdämpfung kann mittels der *Moving Block Methode* ermittelt werden. Schließlich gibt es noch die Methode der Finiten Elemente in der Zeit, die bei der University of Maryland entwickelt und betrieben wird (UMARC [13]). Dies hat den Vorteil eines geringen Rechenzeitbedarfs, ist robust und sehr flexibel, aber nur für den eingeschwungenen Zustand verwendbar wie auch die Methode des Gleichgewichts der harmonischen Terme.

Ein weiterer Ansatz ist die Lösung im drehenden System, die wiederum mittels Floquet-Theorie, numerischer Integration oder der Methode des Gleichgewichts der harmonischen Terme geschieht. Wenn man ein dynamisches Durchflussmodell verwendet, so ist es bequemer, im nicht drehenden System zu bleiben.

Um die Grundlagen der aeroelastischen Stabilität des Vorwärtsfluges zu verstehen und zu untersuchen, wird hier mit einem einfachen Blattersatzmodell mit nur einem Freiheitsgrad – der Schlagbewegung – begonnen. Später wird dann ein zweiter Freiheitsgrad – die Schwenkbewegung – hinzugenommen.

Die Tendenz der Hubschrauberhersteller geht heute zu gelenklosen und lagerlosen bzw. elastomergelagerten Rotoren, da dann die Manövriertfähigkeit des Hubschraubers größer als bei klassischen voll gelenkigen Rotoren ist und außerdem aufgrund der reduzierten Anzahl mechanischer Teile die Wartungskosten und damit die Betriebskosten gesenkt werden können. Ein Problem bei lagerlosen Rotoren ist der mehrfache Lastpfad, da sowohl der elastische Blatthals (engl. flex beam) als auch die Steuertüte (engl. torque tube) Kräfte übertragen.

Insbesondere der seit ca. 2008 vorhandene Trend zur Entwicklung von Hochgeschwindigkeitshubschraubern, die wegen der im Schnellflug auftretenden Kompressibilitätseffekte die Drehzahl des Rotors so weit absenken, dass die größte Machzahl an der Blattspitze $M = 0,9$ nicht überschreitet, haben sehr große Fortschrittsgrade bis $\mu = 0,8$, manchmal bis 1, und damit sehr große Ablösegebiete auf der rücklaufenden Seite.

6.2 Schlag-Schwenk-Flattern im Schwebeflug

6.2.1 Bewegungsgleichungen

Diese Instabilität kommt nur bei Drehflüglern mit hoher Schwenksteifigkeit und damit großer Schwenkeigenfrequenz vor und ist daher im Bereich der Starrflügler unbekannt, außer hinsichtlich der Propeller. Die Schlag- und Schwenkbewegung sowie instationäre aerodynamische Kräfte sind daran beteiligt. Die Schlagbewegung alleine ist sehr gut gedämpft, da die bewegungsinduzierten Luftkräfte als Dämpfer wirken. Die Schwenkbewegung alleine ist zwar aerodynamisch nur schwach gedämpft (da die Widerstandsbeiwerte wesentlich kleiner als die Auftriebsbeiwerte sind), aber nicht instabil. Beide Bewegungsformen zusammen sind über die Corioliskräfte und die aerodynamischen Kräfte gekoppelt; es gibt aber keine Möglichkeit des Flatterns, wenn die aerodynamischen Kräfte weggelassen werden. Dasselbe trifft zu, wenn man die Corioliskräfte weglässt. Daher spielen in dieser Flatterform sowohl die aerodynamischen Kräfte wie auch die Corioliskräfte eine sehr wichtige Rolle. Grundlegende Arbeiten dazu wurden von Hohenemser 1967 eingeleitet [14].

Um dieses Phänomen zu verstehen, kann man ein einfaches Rotorblattmodell im Schwebeflug untersuchen. Hierbei ist das Blatt als starr mit einem Schlag- und Schwenkgelenk zu verstehen und es hat zwei Freiheitsgrade: Schlagen und Schwenken. Der Einfachheit halber werden beide Gelenke am gleichen Ort angenommen. Falls gelenklose Rotorblätter modelliert werden sollen, werden zusätzlich Federn an den Gelenken angebracht, um die gewünschten Schlag- und Schwenkeigenfrequenzen im drehenden und im nicht drehenden System zu simulieren, siehe Abb. 6.1. Die zugehörigen Kräfte sind Abschn. 4.6.1 zu entnehmen. Dann lauten die linearisierten Bewegungsgleichungen um den Trimmzustand herum in dimensionsloser Form gemäß Gl. 4.66 unter Einbeziehung einer Schwenkdämpfung

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} + \nu_{\beta}^2 \beta - 2\beta_0 \dot{\zeta} &= \gamma \delta \overline{M}_{\beta} + \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} \right)^2 \beta_P \\ \ddot{\zeta} + \nu_{\zeta}^2 \zeta + 2\beta_0 \dot{\beta} + 2 \frac{\omega_{\zeta 0}}{\Omega} D_{\zeta} \dot{\zeta} &= \gamma \delta \overline{M}_{\zeta} \end{aligned} \quad (6.1)$$

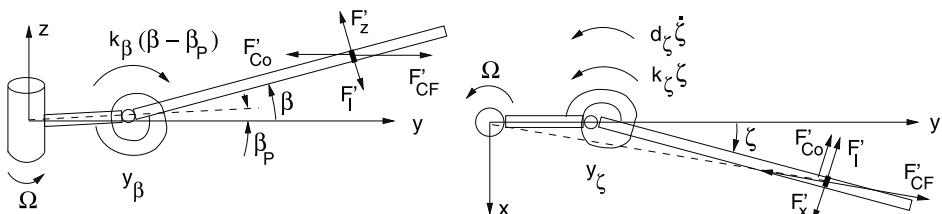


Abb. 6.1 Blattmodell zum Schlag-Schwenk-Flattern

β_0 ist die statische Auslenkung der Schlagbewegung (= Schlagkonuskinkel), die sich aus dem Gleichgewicht von aerodynamischen Kräften und Zentrifugalkräften aus den stationären Anteilen der Bewegungsgleichungen einstellt und kann wie auch der stationäre Schwenkwinkel ζ_0 aus den stationären Anteilen der Bewegungsgleichungen ermittelt werden:

$$\begin{aligned} v_\beta^2 \beta_0 &= \gamma \bar{M}_{\beta 0} + \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} \right)^2 \beta_P \\ v_\zeta^2 \zeta_0 &= \gamma \bar{M}_{\zeta 0} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Hierin ist β_P der Vorkonuswinkel und da der stationäre Schwenkwinkel ζ_0 in den linearisierten Bewegungsgleichungen nicht auftaucht, ist er daher unbedeutend und braucht nicht notwendigerweise ermittelt werden. Manchmal wird das Dämpfungsverhältnis des Schwenkdämpfers durch die Eigenfrequenz im drehenden System definiert; dann wird der entsprechende Term der Bewegungsgleichung durch $2D_\zeta v_\zeta \dot{\zeta}$ beschrieben. Um die aerodynamischen Kräfte einzuführen, wird die quasistationäre Betrachtungsweise angewendet, wozu Abb. 5.19 dient. Die aerodynamischen Kräfte unter der Annahme kleiner Winkel sind dann gemäß Gl. 6.3:

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{V_P^2 + V_T^2} \approx V_T \\ \phi &= \tan^{-1} \frac{V_P}{V_T} \approx \frac{V_P}{V_T} \\ \alpha_a &= \Theta - \phi \approx \Theta - \frac{V_P}{V_T} \\ C_l &= C_{l0} + C_{l\alpha} \alpha_a \approx C_{l\alpha} \alpha_a \\ C_d &= C_{d0} + C_{d1} \alpha_a + C_{d2} \alpha_a^2 \approx C_{d0} \\ L' &= \frac{\rho}{2} V^2 c C_l \\ D' &= \frac{\rho}{2} V^2 c C_d \\ F'_z &= L' \cos \phi - D' \sin \phi \approx L' \\ F'_x &= L' \sin \phi + D' \cos \phi \approx \frac{V_P}{V_T} L' + D' \end{aligned} \quad (6.3)$$

Mit Hilfe der Annahme kleiner Winkel folgt

$$\begin{aligned} F'_z &\approx L' = \frac{\rho}{2} C_{l\alpha} c (V_T^2 \Theta - V_P V_T) \\ F'_x &\approx D' + L' \frac{V_P}{V_T} = \frac{\rho}{2} C_{l\alpha} c \left(\frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} V_T^2 + V_P V_T \Theta - V_P^2 \right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

und die Störgrößen dazu gemäß $(\partial/\partial V_T)\delta V_T + (\partial/\partial V_P)\delta V_P + (\partial/\partial \Theta)\delta \Theta$ lauten

$$\begin{aligned} \delta F'_z &= \frac{\rho}{2} C_{l\alpha} c [\delta V_T (2V_T \Theta - V_P) - \delta V_P V_T + \delta \Theta V_T^2] \\ \delta F'_x &= \frac{\rho}{2} C_{l\alpha} c \left[\delta V_T \left(2 \frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} V_T + V_P \Theta \right) + \delta V_P (V_T \Theta - 2V_P) + \delta \Theta V_P V_T \right] \end{aligned} \quad (6.5)$$

Die Geschwindigkeitskomponenten bestehen aus den stationären Anteilen und den Störgrößen:

$$\begin{aligned}\bar{V}_T &= r & \bar{V}_P &= \lambda & \Theta &= \Theta_0 - k_{p\beta}\beta_0 - k_{p\xi}\xi_0 \\ \delta\bar{V}_T &= -r \quad \xi^* & \delta\bar{V}_P &= r \beta^* & \delta\Theta &= -k_{p\beta}\beta - k_{p\xi}\xi\end{aligned}\quad (6.6)$$

Das Schlagmoment setzt sich aus dem Integral über die lokalen Kräfte, multipliziert mit dem Hebelarm $y - y_\beta$, zusammen. Der Einfachheit halber kann man aber – zumindest bei kleinen Gelenksabständen – auch den Einfluss des Gelenksabstandes weglassen ($y_\beta \approx 0$), wenn man die aerodynamische Anregung berechnen will. Dies hat sich als eine brauchbare Näherung erwiesen. Damit folgt

$$\begin{aligned}\delta\bar{M}_\beta &= \frac{1}{\rho C_{l\alpha} c \Omega^2 R^4} \int_0^R \delta F'_z y \, dy \\ \delta\bar{M}_\xi &= \frac{1}{\rho C_{l\alpha} c \Omega^2 R^4} \int_0^R \delta F'_x y \, dy\end{aligned}\quad (6.7)$$

Das stationäre Luftkraftmoment erhält man mit Gl. 6.4 zu:

$$\begin{aligned}\bar{M}_\beta &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\bar{V}_T^2 \Theta - \bar{V}_P \bar{V}_T \right) r \, dr = \frac{\Theta}{8} - \frac{\lambda}{6} \\ \bar{M}_\xi &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} \bar{V}_T^2 + \bar{V}_P \bar{V}_T \Theta - \bar{V}_P^2 \right) r \, dr = \frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} \frac{1}{8} + \frac{\lambda}{6} \Theta - \frac{\lambda^2}{4} \approx 0\end{aligned}\quad (6.8)$$

Dabei war vorausgesetzt worden, dass sowohl der Steuerwinkel als auch der Durchflussgrad konstant entlang des Rotorblattes sind. Da der Schwenkkonus ξ_0 unbedeutend ist, ist das stationäre Luftkraftmoment in Schwenkrichtung ebenfalls vernachlässigbar. Der Grund liegt in der Widerstandskraft, die um ein Vielfaches kleiner als der Auftrieb ist. Nun folgen die Luftkraftmomente der Störgrößen aus Gl. 6.7 zu

$$\begin{aligned}\delta\bar{M}_\beta &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\delta\bar{V}_T (2\bar{V}_T \Theta - \bar{V}_P) - \delta\bar{V}_P \bar{V}_T + \delta\Theta \bar{V}_T^2 \right] r \, dr \\ &= -\xi^* \left(\frac{\Theta}{4} - \frac{\lambda}{6} \right) - \frac{\beta^*}{8} - \frac{1}{8} (k_{p\beta}\beta + k_{p\xi}\xi) \\ \delta\bar{M}_\xi &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\delta\bar{V}_T \left(2\frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} \bar{V}_T + \bar{V}_P \Theta \right) + \delta\bar{V}_P (\bar{V}_T \Theta - 2\bar{V}_P) + \delta\Theta \bar{V}_P \bar{V}_T \right] r \, dr \\ &= -\xi^* \left(\frac{1}{4} \frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} + \frac{\lambda}{6} \Theta \right) + \beta^* \left(\frac{\Theta}{8} - \frac{\lambda}{3} \right) - \frac{\lambda}{6} (k_{p\beta}\beta + k_{p\xi}\xi)\end{aligned}\quad (6.9)$$

Die stationäre Lösung für den Schlagkonus und den mittleren Schwenkwinkel liefert

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \frac{\gamma}{v_{\beta e}^2} \left(\frac{\Theta_0}{8} - \frac{\lambda}{6} \right) + \frac{1}{v_{\beta e}^2} \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} \right)^2 \beta_P \\ \zeta_0 &= \frac{\gamma}{v_{\zeta e}^2} \left(\frac{1}{8} \frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} + \frac{\lambda}{6} \Theta - \frac{\lambda^2}{4} \right) \approx 0\end{aligned}\quad (6.10)$$

sowie die effektiven Eigenfrequenzen der Schlag- und Schwenkbewegung im drehenden System:

$$\begin{aligned}v_{\beta e}^2 &= v_\beta^2 + \frac{\gamma}{8} k_{p\beta} \\ v_{\zeta e}^2 &= v_\zeta^2 + \frac{\gamma}{6} k_{p\zeta} \lambda\end{aligned}\quad (6.11)$$

Die gekoppelten Schlag-Schwenk-Flattergleichungen lauten nun in Matrixform

$$\begin{bmatrix} \beta \\ \zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{8} & -2\beta_0 + \gamma \left(\frac{\Theta}{4} - \frac{\lambda}{6} \right) \\ 2\beta_0 - \gamma \left(\frac{\Theta}{8} - \frac{\lambda}{3} \right) & 2 \frac{\omega_{\zeta 0}}{\Omega} D_\zeta + \gamma \left(\frac{1}{4} \frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} + \frac{\lambda}{6} \Theta \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{\beta e}^2 & \frac{\gamma}{8} k_{p\zeta} \\ \frac{\gamma}{6} k_{p\beta} \lambda & v_{\zeta e}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \zeta \end{bmatrix} = 0\quad (6.12)$$

Um dieses Gleichungssystem zu lösen, muss man die stationäre Trimmrechnung zuerst durchführen, da die Werte des Durchflusses λ und des kollektiven Steuerwinkels $\Theta = \Theta_0$ benötigt werden. Mit diesem erhält man dann den statischen Schlagwinkel β_0 aus Gl. 6.10. Natürlich bedingt bereits die einfache Blattelemententheorie, dass sich mit konstantem Steuerwinkel keine konstante Durchflussverteilung über den Radius erreichen lässt, aber im Rahmen dieser Abschätzung macht diese Verletzung der Physik nicht so viel aus. Aus der einfachen Strahltheorie folgt

$$\lambda = \lambda_i (\lambda_c = 0) = \lambda_h = \kappa \sqrt{\frac{C_T}{2}}\quad (6.13)$$

Wenn man den Schub aus der Strahltheorie und gemäß Blattelemententheorie vergleicht, so folgt für den Steuerwinkel

$$C_T = \sigma C_{l\alpha} \left(\frac{\Theta_0}{6} - \frac{\lambda}{4} \right) \Rightarrow \Theta_0 = \frac{6C_T}{\sigma C_{l\alpha}} + \frac{3}{2} \lambda\quad (6.14)$$

Um die gekoppelten Flattergleichungen zu lösen, kommen zwei Methoden in Frage: die der Analyse der Determinante und die der Eigenwertanalyse.

6.2.2 Die Analyse der Determinante

Wenn man die Schlag- und Schwenkbewegung als harmonische Bewegung mit einem komplexen dimensionslosen Frequenzparameter $s = \delta + i\nu$ mit $\nu = \omega/\Omega$ annimmt

$$\beta(\psi) = \beta e^{s\psi} \quad \text{und} \quad \zeta(\psi) = \zeta e^{s\psi}\quad (6.15)$$

so folgt nach kurzer Rechnung aus Gl. 6.12

$$\begin{bmatrix} s^2 + \frac{\gamma}{8}s + v_{\beta e}^2 & -(2\beta_0 - \frac{\gamma}{4}\Theta + \frac{\gamma}{6}\lambda)s + \frac{\gamma}{8}k_{p\xi} \\ (2\beta_0 - \frac{\gamma}{8}\Theta + \frac{\gamma}{3}\lambda)s + \frac{\gamma}{6}k_{p\beta}\lambda & s^2 + \left(2\frac{\omega_{\xi 0}}{\Omega}D_\xi + \frac{\gamma}{4}\frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} + \frac{\gamma}{6}\lambda\Theta\right)s + v_{\zeta e}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \zeta \end{bmatrix} = 0 \quad (6.16)$$

Für die nichttriviale Lösung für den Frequenzparameter s muss die Determinante der Matrix Null sein, was zu einem Polynom vierten Grades führt:

$$As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E = 0 \quad (6.17)$$

worin die Koeffizienten A bis E folgende Ausdrücke haben:

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= \frac{\gamma}{8} + 2\frac{\omega_{\xi 0}}{\Omega}D_\xi + \frac{\gamma}{4}\frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} + \frac{\gamma}{6}\lambda\Theta \\ C &= v_{\beta e}^2 + v_{\zeta e}^2 + \frac{\gamma}{8}\left(B - \frac{\gamma}{8}\right) + \left(2\beta_0 - \frac{\gamma}{4}\Theta + \frac{\gamma}{6}\lambda\right)\left(2\beta_0 - \frac{\gamma}{8}\Theta + \frac{\gamma}{3}\lambda\right) \\ D &= v_{\beta e}^2\left(B - \frac{\gamma}{8}\right) + \frac{\gamma}{8}v_{\zeta e}^2 - \frac{\gamma}{8}k_{p\xi}\left(2\beta_0 - \frac{\gamma}{8}\Theta + \frac{\gamma}{3}\lambda\right) + \frac{\gamma}{6}k_{p\beta}\lambda\left(2\beta_0 - \frac{\gamma}{4}\Theta + \frac{\gamma}{6}\lambda\right) \\ E &= v_{\beta e}^2 v_{\zeta e}^2 - \frac{\gamma}{8}\frac{\gamma}{6}k_{p\xi}k_{p\beta}\lambda \end{aligned} \quad (6.18)$$

Als kritische Flattergrenze ist die Bedingung verschwindender Systemdämpfung anzusehen, so dass der Frequenzparameter s rein imaginär wird: $s = i\nu$. Setzt man dies in das Polynom ein, so erhält man

$$A\nu^4 - iB\nu^3 - C\nu^2 + iD\nu + E = 0 \quad (6.19)$$

Die Gleichung ist dann erfüllt, wenn die Real- und Imaginärteile jeder für sich zu Null gesetzt werden, so dass zwei Gleichungen resultieren:

$$\begin{aligned} A\nu^4 - C\nu^2 + E &= 0 \\ -B\nu^3 + D\nu &= 0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

Aus der zweiten Gleichung folgt sofort $\nu^2 = D/B$ und nach Einsetzen in die erste Gleichung erhält man ein Kriterium für die Systemstabilität, das sog. Routh-Hurwitz-Kriterium. Edward John Routh (1831–1907) war ein englischer Mathematiker, während Adolf Hurwitz (1859–1919) ebenfalls als Mathematiker in Deutschland wirkte. Beide untersuchten unter anderem die Stabilität dynamischer Systeme und veröffentlichten zeitgleich entsprechende Stabilitätskriterien [15, 16].

$$R = AD^2 - CDB + EB^2 = 0 \quad (6.21)$$

Für $R > 0$ ist das System stabil, für $R < 0$ instabil.

Die am Anfang des Abschnittes aufgestellte Behauptung, dass bei Weglassen der Luft- oder Corioliskräfte keine Instabilität möglich ist, wird nun überprüft. Im Fall ohne Luftkräfte verschwinden alle Terme mit der Lockzahl γ . Außerdem erhält man ohne Luftkräfte $\beta_0 = 0$, so dass

$$A = 1 \quad B = 2 \frac{\omega_{\zeta 0}}{\Omega} D_{\zeta} \quad C = v_{\beta}^2 + v_{\zeta}^2 \quad D = v_{\beta}^2 B \quad E = v_{\beta}^2 v_{\zeta}^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = D/B = v_{\beta}^2 \quad (6.22)$$

und aus der ersten Gleichung von Gl. 6.20 folgt damit $0 = 0$, also existiert dann keine Möglichkeit der Instabilität. Wenn keine Corioliskräfte wirken, dann entfällt der Faktor $2\beta_0$ in der Nebendiagonalen der Dämpfungsmaatrix bzw. in den Koeffizienten C und D . Es zeigt sich, dass auch dann keine Möglichkeit der Instabilität existiert.

Die Prozedur zur Lösung des allgemeinen Falles wird im Folgenden erläutert. Gegeben sind die Rotorcharakteristika in Form folgender Kennwerte:

$$\gamma, \sigma, C_{l\alpha}, C_{d0}, k_{p\beta}, k_{p\zeta}, D_{\zeta}, v_{\beta}, v_{\zeta}, \beta_P, \omega_{\beta 0}/\Omega, \omega_{\zeta 0}/\Omega$$

Dann sind der Reihe nach folgende Operationen durchzuführen:

1. Berechne den Trimmzustand für einen gegebenen spezifischen Rotorbelastungsgrad C_T/σ . Das Ergebnis sind der Kollektivwinkel Θ_0 nach Gl. 6.14 und der Durchflussgrad λ nach Gl. 6.13.
2. Berechne den stationären Schlagwinkel β_0 nach Gl. 6.10.
3. Berechne die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung A bis E nach Gl. 6.18.
4. Berechne den Wert des Stabilitätskriteriums $R = AD^2 - CDB + EB^2$ nach Gl. 6.21.

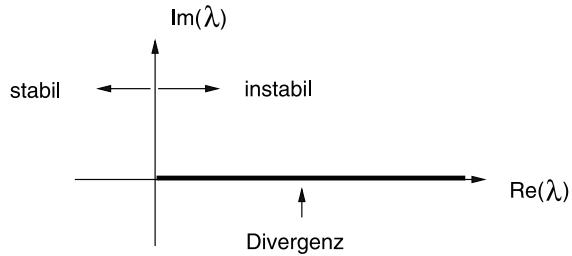
Wenn $R = 0$ herauskommt, so befindet man sich am Rande der Stabilität. Ist $R \neq 0$, so wähle man einen anderen spezifischen Rotorbelastungsgrad und wiederhole die gesamte Prozedur so lange, bis man bei $R = 0$ anlangt, um die Stabilitätsgrenze zu bestimmen. Dabei ist es sinnvoll, zunächst in größeren Schritten vorzugehen, um dann bei der Vorzeichenumkehr von R mit kleineren Schritten den spezifischen Rotorbelastungsgrad der Flattergrenze zu ermitteln. Natürlich kann die Gl. 6.19 auch mit irgendeiner der Standardroutinen auf Computern direkt gelöst werden, was in der Regel auf komplexe Nullstellen als Ergebnis führt, deren Realteil eine Dämpfung und deren Imaginärteil die Frequenz angibt. Wenn eine der Nullstellen rein imaginär wird, so hat man den Fall der Stabilitätsgrenze erreicht (Dämpfung = Realteil = Null).

6.2.3 Die Eigenwertanalyse

Die Bewegungsgleichungen können in Form eines Feder-Masse-Schwingers interpretiert werden und lauten generell (siehe Gl. 6.12)

$$[\mathbf{M}] \begin{bmatrix} ** \\ \beta \\ ** \\ \zeta \end{bmatrix} + [\mathbf{C}] \begin{bmatrix} * \\ \beta \\ * \\ \zeta \end{bmatrix} + [\mathbf{K}] \begin{bmatrix} \beta \\ \zeta \end{bmatrix} = 0 \quad (6.23)$$

Abb. 6.2 Stabilitätsgrenzen des Schlag-Schwenk-Flatters



Die Dämpfungs- und Federmatrix sind hierin nicht symmetrisch. Mit Hilfe der früher gezeigten Verfahren kann man dieses System zweiter Ordnung in eines erster Ordnung überführen und dieses als ein Eigenwertproblem lösen. Dann erhält man zwei konjugiert komplexe Eigenwerte, also insgesamt vier Eigenwerte, welche die generelle Form

$$\lambda = \lambda_{Re} + i\lambda_{Im} \quad (6.24)$$

haben (λ ist hier nicht zu verwechseln mit dem Durchflussgrad!). Auch hier stellt der Realteil die Dämpfung und der Imaginärteil die Frequenz dar. Wenn irgendeiner der Eigenwerte einen positiven Realteil besitzt, ist das System instabil und die Stabilitätsgrenze wird durch $\lambda_{Re} = 0$ definiert. Eine andere Möglichkeit ist, dass der Imaginärteil verschwindet ($\lambda_{Im} = 0$), was eine Instabilität bei der Frequenz Null, also eine statische Instabilität bedeutet. Hier ist dies die Divergenz, siehe Abb. 6.2. Man erhält reelle, positive Eigenwerte.

6.2.4 Beispiel zum Schlag-Schwenk-Flattern

In Abb. 6.3a ist das Ergebnis einer Beispielrechnung dargestellt, wobei der spezifische Rotorbelastungsgrad C_T/σ der freie Parameter ist. Die der Rechnung zu Grunde liegenden Werte sind im Bild mit angegeben. Die dargestellten Flattergrenzen wurden mit der Determinantenmethode errechnet und für einen gegebenen Schubbeiwert ist das Rotorblatt instabil, wenn es sich innerhalb der ellipsenförmigen Stabilitätsgrenze befindet. Die wenig gedämpfte Schwenkeigenform wird instabil und um dies zu verdeutlichen, ist in Abb. 6.3b das Dämpfungsverhältnis der Schwenkform aufgetragen. Dazu wurde die Schlageigenfrequenz konstant gehalten und die Schwenkeigenfrequenz variiert, um den kritischen Bereich zu zeigen; diese Rechnung wurde mit der Eigenwertanalyse gemacht. Es ist aus dem kleinen Gradienten, mit dem die Dämpfungskurve in den negativen Bereich hineingeht, zu erkennen, dass die auftretenden Instabilitäten schwache Flatterformen sind und daher relativ leicht mit einem kleinen Betrag struktureller Dämpfung in der Schwenkrichtung stabilisiert werden können.

Die Schlag-Schwenk-Flatterform ist also eine Instabilität der Schwenkbewegung und tritt daher auch mit der Frequenz der Schwenkeigenform ein. Da es sich hier um nied-

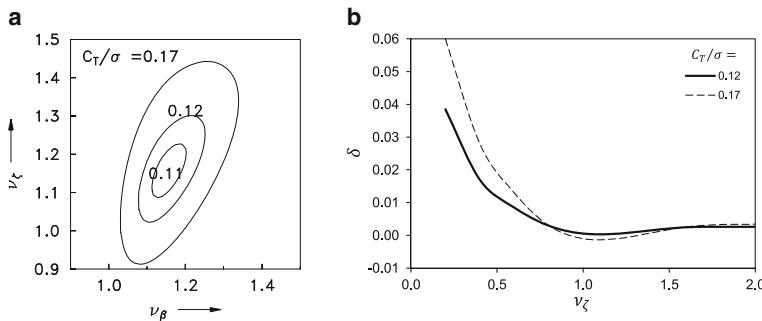


Abb. 6.3 Stabilitätsgrenzen des Schlag-Schwenk-Flutters. **a** Stabilitätsgrenzen, von innen nach außen: $C_T/\sigma = 0.11, 0.12, 0.17$, **b** Dämpfung des Eigenwertes δ als Funktion der Schwenkeigenfrequenz, $v_\beta = 1.1$, $\gamma = 8$, $\sigma = 0.05$, $k_{p\beta} = 0$, $k_{p\zeta} = 0$, $\omega_{b0}/\Omega = 0$, $\beta_P = 0^\circ$, $C_{l\alpha} = 2\pi$, $C_{d0} = 0.01$, $D_\zeta = 0$, $\omega_{\zeta 0}/\Omega = 0$

rige Frequenzen (um 1/rev) handelt, sind die Effekte der instationären Aerodynamik gering und man kann quasistationäre Ansätze verwenden. Es ist zu beobachten, dass diese Instabilität nur bei großem spezifischem Rotorbelastungsgrad auftreten kann. Da ab $C_T/\sigma \approx 0.12$ in zunehmendem Maße Strömungsablösungen auftreten und dann die linearisierte Annahme der Aerodynamik teilweise nicht mehr gilt, muss bei so großen Rotorbelastungsgraden eigentlich mit modifizierter Aerodynamik gerechnet werden, da z. B. $C_{l\alpha} \rightarrow 0$ strebt, was die aerodynamische Dämpfung erheblich vermindert.

Es ist interessant zu beobachten, dass bei gelenklosen Rotoren ohne jegliche konstruktive Schlag-Torsions- und Schlag-Schwenkkopplung $k_{p\beta} = k_{p\zeta} = 0$ die kritische Flattergrenze bei verschwindendem Vorkonus und $v_\beta = v_\zeta = 1,15/\text{rev}$ auftritt. Der Rotor ist bei Schlageigenfrequenzen im drehenden System von weniger als 1/rev oder größer als 1,4/rev generell stabil.

6.2.5 Bemerkungen zum Schlag-Schwenk-Flutter

1. Gelenkig gelagerter Rotor:

Wenn keine konstruktiven Kopplungen vorliegen ($k_{p\beta} = k_{p\zeta} = 0$) und kein Gelenksabstand vorhanden ist ($e_\beta = e_\zeta = 0$), so ist die Schlageigenfrequenz $v_\beta = 1$. Dann lautet die stationäre Lösung für den Schlagwinkel aus Gl. 6.10

$$\beta_0 = \frac{\gamma}{8}\Theta_0 - \frac{\gamma}{6}\lambda$$

Der Koppelterm in den Bewegungsgleichungen, hier in derjenigen der Schlagbewegung, lautet damit aus Gl. 6.12 (die rechte Seite folgt, wenn man links das Ergebnis

für β_0 einsetzt):

$$\left[-2\beta_0 + \gamma \left(\frac{\Theta_0}{4} - \frac{\lambda}{6} \right) \right] \dot{\xi}^* = \frac{\gamma}{6} \lambda \dot{\xi}^*$$

Dieser Term ist klein im Verhältnis zur Schlagdämpfung ($\gamma\beta/8$) und daher vernachlässigbar, was zu einer weitgehenden Entkopplung der Schlagbewegung von der Schwenkbewegung führt. Im Falle eines gelenkig gelagerten Rotorblattes ohne Gelenksabstand ist das Rotorblatt immer stabil im Hinblick auf Schlag-Schwenk-Flattern. Dennoch ist der Koppelterm in der Schwenkbewegungsgleichung wichtig, wenn man die dynamischen Kräfte am Rotorkopf berechnen will. Dieser lautet in Gl. 6.16 (die rechte Seite folgt, wenn man links β_0 wie zuvor angegeben einsetzt):

$$\left(2\beta_0 - \frac{\gamma}{8} \Theta_0 + \frac{\gamma}{3} \lambda \right) \dot{\beta}^* = \frac{\gamma}{8} \Theta_0 \dot{\beta}^*$$

Der Term ist von gleicher Größe wie die Schwenkdämpfungsterme, also nicht vernachlässigbar.

2. Idealer Vorkonus:

Im Falle eines idealen Vorkonus befinden sich im Arbeitszustand des Rotors die Momente aus Zentrifugalkraft und aerodynamischen Kräften im Gleichgewicht, so dass $\beta_0 \approx \beta_P$ ist. Aus der stationären Lösung folgt mit der Näherung für kleine e_β :

$$\begin{aligned} v_{\beta e}^2 \beta_0 &\approx v_{\beta e}^2 \beta_P = \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} \right)^2 \beta_P + \frac{\gamma}{8} \Theta - \frac{\gamma}{6} \lambda \\ v_{\beta e}^2 &= 1 + \frac{3}{2} e_\beta + \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} \right)^2 + \frac{\gamma}{8} k_{p\beta} \\ \Rightarrow \beta_P &= \frac{\gamma}{1 + \frac{3}{2} e_\beta + \frac{\gamma}{8} k_{p\beta}} \left(\frac{\Theta}{8} - \frac{\lambda}{6} \right) \end{aligned}$$

Somit hängt der Vorkonus nicht von der Schlageigenfrequenz im nicht drehenden System $\omega_{\beta 0}$ (also zum Beispiel einer Schlagfeder oder der Blattanschlusssteifigkeit) ab. Auch hier wird die Schlagbewegung weitgehend von der Schwenkbewegung entkoppelt sein, was zu einer stabilen Konfiguration im Hinblick auf Schlag-Schwenk-Flattern führt. Bei Abweichung davon, also $\beta_0 \neq \beta_P$, kann ein Vorkonus auch destabilisierend wirken.

3. Einfluss des Schubbeiwertes:

Grundsätzlich ist das Schlag-Schwenk-Flattern eine Instabilität bei hohem Schub, womit ein großer Kollektivwinkel erforderlich ist. Dies führt auch zu einem relativ großen Wert im Durchflussgrad λ . Die Folge ist, dass die Koppeltermen, besonders in der Schwenkbewegung, mit wachsendem Schub schnell größer werden und umgekehrt bei geringem Schub auch nur sehr kleine Kopplungen vorliegen und das Rotorblatt dann frei von dieser Instabilität ist.

4. Einfluss der elastischen Kopplung:

Wenn die elastische Achse nicht mit den Schlag- und Schwenkachsen übereinander liegt, werden die Schlag- und Schwenkbewegung elastisch gekoppelt. Diese Kopplung erlaubt den Energietransfer von der schwach gedämpften Schwenkbewegung in die gut gedämpfte Schlagbewegung und dadurch werden Rotoren mit niedriger Schwenkeigenfrequenz stabilisiert. Rotoren mit relativ hoher Schwenkeigenfrequenz jedoch werden durch geringe elastische Kopplungen entdämpft, wohingegen bei großen Kopplungen auch hier stabilisierende Wirkung eintritt.

5. Rotoren mit gleicher Steifigkeit in Schlag- und Schwenkrichtung:

Die gleiche Steifigkeit in Schlag- und Schwenkrichtung wird durch einen kreisförmigen Blatthals erreicht, wie das bei Propellern der Fall ist. Damit sind die Eigenfrequenzen der Schlag- und Schwenkbewegung im nicht drehenden System identisch, was, wenn bisher auch nicht gezeigt, in eine Entkopplung der Bewegungen Schlagen, Schwenken und Torsion auf strukturellem Wege mündet. Dieses wiederum bedeutet, dass die Torsion weniger Einfluss auf die Schlag- und Schwenkstabilität hat und damit das Rotorblatt stabilisiert.

6. Einfluss struktureller Dämpfung:

Die Schlagbewegung ist durch aerodynamische Kräfte gut gedämpft und die strukturelle Dämpfung ist in der Schlagbewegung vernachlässigbar. Die Schwenkbewegung ist jedoch nur sehr schwach aerodynamisch gedämpft und daher kann eine Instabilität der gekoppelten Schlag-Schwenkbewegung, die ja eine Instabilität der Schwenkbewegung darstellt, mit einem relativ kleinen Betrag struktureller Dämpfung in der Schwenkbewegung stabilisiert werden. Natürlich kann dies auch durch einen mechanischen Schwenkdämpfer an der Blattwurzel geschehen.

7. Einfluss der Schlag-Torsionskopplung:

Diese Kopplung, sei sie durch Torsionsdynamik oder durch rein kinematische Vorgänge erzeugt, wird in diesem Zweifreiheitsgradsystem durch eine entsprechende Feder dargestellt:

$$\Delta\Theta = -k_{p\beta}\beta$$

Ein positiver Wert der Kopplung erhöht die Schlageigenfrequenz (siehe unter 2.), aber der Einfluss auf die Stabilitätsgrenzen des Schlag-Schwenk-Flatterns ist gering.

8. Einfluss der Schwenk-Torsionskopplung:

Auch diese Kopplung wird durch eine Feder dargestellt:

$$\Delta\Theta = -k_{p\xi}\xi$$

Ein negativer Wert der Kopplung (Zurückschwenken führt zum Aufnicken) stabilisiert Rotoren mit kleiner Schwenkeigenfrequenz und eine positive Kopplung führt zur Stabilisierung schwenksteifer Rotoren. Der Einfluss auf die Schwenkeigenfrequenz ist

$$v_{\xi e}^2 = \frac{3}{2}e_\xi + \left(\frac{\omega_{\xi 0}}{\Omega}\right)^2 + \frac{\gamma}{6}\lambda k_{p\xi}$$

9. Einfluss der Torsion:

Wenn die Torsionseigenfrequenz relativ gering ist, muss man die Torsion in die Stabilitätsanalyse mit einbeziehen, was jedoch bei großen Torsionseigenfrequenzen ($\nu_\Theta > 5/\text{rev}$) nicht notwendig ist. Entweder lässt man die Torsion ganz aus der Rechnung heraus, oder man nimmt eine Näherung in Form eines quasistatischen Torsionsmodells an, das die Steifigkeitsterme approximiert. Generell lauten die gekoppelten Bewegungsgleichungen von Schlagen, Schwenken und Torsion:

$$[\mathbf{M}] \begin{bmatrix} \beta \\ \zeta \\ \Theta \end{bmatrix} + [\mathbf{C}] \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\zeta} \\ \dot{\Theta} \end{bmatrix} + [\mathbf{K}] \begin{bmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{\zeta} \\ \ddot{\Theta} \end{bmatrix} = 0$$

Wenn man nur die statischen Steifigkeitsterme in der Torsionsgleichung behält, also $m_{3i} = c_{3i} = 0$, $i = 1, 2, 3$, so erhält man

$$k_{31}\beta + k_{32}\zeta + k_{33}\Theta = 0$$

und daraus lässt sich Θ eliminieren:

$$\Theta = -\frac{k_{31}}{k_{33}}\beta - \frac{k_{32}}{k_{33}}\zeta$$

Dieses setzt man in die Schlag- und Schwenkbewegungsgleichung ein und man erhält wieder ein Zweifreiheitsgradsystem, in dem aber die effektiven Koppelsterme, die von der Torsion verursacht werden, enthalten sind. Die primäre Ursache dieser Koppelsterme ist aerodynamischer Natur.

10. Einfluss des Stallverhaltens:

Da das Schlag-Schwenk-Flattern generell bei großem spezifischen Schubbeiwert C_T/σ , also bei großen Steuerwinkeln eintritt, liegen auch weitgehend große Anstellwinkel vor und es ist sehr wahrscheinlich, dass über gewisse Teile des Rotorblattes Strömungsabriss auftritt. Die Wirkung ist primär in den dann entstehenden Auftriebshysteresen zu sehen, welche die Schlagbewegung entdämpfen, da der Auftriebsanstieg kleiner oder sogar negativ wird, denn bei stationärer Betrachtungsweise sinkt der Auftrieb bei Anstellwinkeln über dem Stallwinkel wieder ab. Außerdem treten bei Strömungsablösung in aller Regel große negative aerodynamische Momente auf, was sehr destabilisierend wirken kann.

11. Einfluss der Kompressibilität:

Im Bereich der Blattspitze treten transsonische Strömungen auf und diese sind bedeutend, da dort auch die größten Staudrücke vorliegen. In transsonischer Strömung wandert der Neutralpunkt nach hinten in Richtung zur Profilmitte, was ein großes aerodynamisches Moment um die elastische Achse bewirkt. Ebenso steigen sowohl der Auftriebsgradient $C_{l\alpha}$ als auch der Widerstandsbeiwert C_d stark an und die transsonischen Effekte können sehr destabilisierend wirken.

Beispiel

Die aerodynamischen Beiwerte eines zirkulationsgesteuerten Rotors sind eine Funktion des Anstellwinkels sowie des Ausblaskoeffizienten:

$$C_l = C_{l\alpha}\alpha_a + C_{l\mu}C_\mu$$

$$C_d = C_{d0} + C_{d\mu}C_\mu$$

Mit Hilfe der quasistationären Aerodynamik leite man die Bewegungsgleichungen des Schlag-Schwenk-Flatters im Schwebeflug her.

Lösung

$$\ddot{\beta} + v_\beta^2 \beta - 2\beta_0 \dot{\zeta} = \gamma \delta \bar{M}_\beta + \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} \right)^2 \beta_P$$

$$\ddot{\zeta} + v_\zeta^2 \zeta + 2\beta_0 \dot{\beta} + 2D_\zeta \frac{\omega_{\zeta 0}}{\Omega} \zeta = \gamma \delta \bar{M}_\zeta$$

Die Störgröße der Vertikalkraft ist dann

$$\frac{F'_z}{\frac{\rho}{2}c} = C_l V_T V - C_d V_P V$$

$$\frac{\delta F'_z}{\frac{\rho}{2}c} = \delta C_l V_T V + C_l \delta V_T V + C_l V_T \delta V - \delta C_d V_P V - C_d \delta V_P V - C_d V_P \delta V$$

$$\delta C_l = C_{l\alpha} \delta \alpha + C_{l\mu} \delta C_\mu$$

$$\delta C_d = C_{d\mu} \delta C_\mu$$

$$\delta C_\mu = -2C_\mu \frac{\delta V}{V}$$

$$\delta V = \frac{V_T \delta V_T + V_P \delta V_P}{V}$$

$$\delta \alpha = \delta \Theta - \frac{V_T \delta V_P - V_P \delta V_T}{V_T^2}$$

In analoger Weise wird für F'_x vorgegangen. Somit folgt für die Störkräfte

$$\begin{aligned} \frac{\delta F'_z}{\frac{\rho}{2}c} &= \delta V_T \left[\frac{V_P V_T}{V} \left(C_{l\alpha} \frac{V^2}{V_T^2} + C_{d\mu} C_\mu - C_{d0} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{V_T^2}{V} + V \right) \left(\Theta - \frac{V_P}{V_T} \right) C_{l\alpha} - \left(\frac{V_T^2}{V} - V \right) C_{l\mu} C_\mu \right] \\ &\quad + \delta V_P \left\{ -V C_{l\alpha} + \frac{V_P V_T}{V} \left[C_{l\alpha} \left(\Theta - \frac{V_P}{V_T} \right) - C_{l\mu} C_\mu \right] \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{V_P^2}{V} + V \right) (C_{d0} + C_{d\mu} C_\mu) \right\} + \delta \Theta C_{l\alpha} V_T V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta F'_x}{\frac{\rho}{2}c} &= \delta V_T \left\{ C_{l\alpha} \frac{V_P^2}{V_T^2} V + \frac{V_P V_T}{V} \left[C_{l\alpha} \left(\Theta - \frac{V_P}{V_T} \right) - C_{l\mu} C_\mu \right] \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{V_T^2}{V} + V \right) (C_{d0} + C_{d\mu} C_\mu) \right\} \\ &+ \delta V_P \left[-\frac{V_P V_T}{V} \left(C_{l\alpha} \frac{V^2}{V_T^2} - C_{d\mu} C_\mu + C_{d0} \right) + \left(\frac{V_P^2}{V} + V \right) C_{l\alpha} \left(\Theta - \frac{V_P}{V_T} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(V - \frac{V_P^2}{V} \right) C_{l\mu} C_\mu \right] + \delta \Theta C_{l\alpha} V_P V \end{aligned}$$

Im Schwebeflug kann man nun folgende dimensionslose Geschwindigkeiten einführen:

$$\bar{V}_T = r \quad \bar{V}_P = \lambda \quad \delta \bar{V}_T = -r \overset{*}{\zeta} \quad \delta \bar{V}_P = r \overset{*}{\beta} \quad \delta \Theta = -k_{p\beta} \beta - k_{p\zeta} \zeta \quad V \approx V_T$$

und man erhält damit die Bewegungsgleichungen, wobei die Quadrate und höheren Ordnungen in λ weggelassen wurden:

$$\begin{aligned} \overset{**}{\beta} + \left(\frac{\gamma}{8} - \frac{\gamma}{6} \lambda \Theta + \frac{\gamma}{8} \frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} + \frac{\gamma}{8} \frac{C_{d\mu}}{C_{l\alpha}} C_\mu + \frac{\gamma}{6} \frac{C_{l\mu}}{C_{l\alpha}} C_\mu \right) \overset{*}{\beta} + \left(v_\beta^2 + \frac{\gamma}{8} k_{p\beta} \right) \beta \\ + \left(-2\beta_0 + \frac{\gamma}{4} \Theta - \frac{\gamma}{6} \lambda + \frac{\gamma}{6} \frac{C_{d\mu}}{C_{l\alpha}} \lambda C_\mu - \frac{\gamma}{6} \frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} \lambda \right) \overset{*}{\zeta} + \frac{\gamma}{8} k_{p\zeta} \zeta = 0 \\ \overset{**}{\zeta} + \left(\frac{2\omega_{\zeta 0}}{\Omega} D_\zeta + \frac{\gamma}{4} \frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} + \frac{\gamma}{6} \lambda \Theta - \frac{\gamma}{6} \frac{C_{l\mu}}{C_{l\alpha}} C_\mu \lambda \right) \overset{*}{\zeta} + \left(v_\zeta^2 + \frac{\gamma}{6} k_{p\zeta} \lambda \right) \zeta \\ + \left(2\beta_0 - \frac{\gamma}{8} \Theta - \frac{\gamma}{8} \frac{C_{l\mu}}{C_{l\alpha}} C_\mu - \frac{\gamma}{6} \frac{C_{d\mu}}{C_{l\alpha}} C_\mu \lambda + \frac{\gamma}{3} \lambda + \frac{\gamma}{6} \frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} \lambda \right) \overset{*}{\beta} + \frac{\gamma}{6} k_{p\beta} \lambda \beta = 0 \end{aligned}$$

6.3 Schlag-Torsions-Flattern im Schwebeflug

6.3.1 Bewegungsgleichungen

An dieser Flatterform sind nur die Schlag- und die Torsionsbewegung beteiligt und sie wird auch als der klassische Flatterfall bezeichnet, da eine ähnliche Form auch beim Starrflügler auftritt. Es gibt jedoch eine Reihe von Unterschieden zwischen dem Schlag-Torsions-Flattern des Starr- und des Drehflüglers:

1. Es gibt eine wichtige Kopplung durch die Zentrifugalkräfte, wenn die Massenachse nicht mit der elastischen Achse übereinstimmt.
2. In der Torsionsgleichung wirkt das Propellermoment, welches ebenfalls von Zentrifugalkräften verursacht wird.
3. Die aerodynamischen Kräfte sind beim Drehflügler sehr viel schwieriger zu handhaben; besonders, wenn die Nachlaufschleppen dicht unter den Blättern liegen.
4. Im Vorwärtsflug liegen beim Drehflügler zusätzlich periodische Erregerkräfte vor.

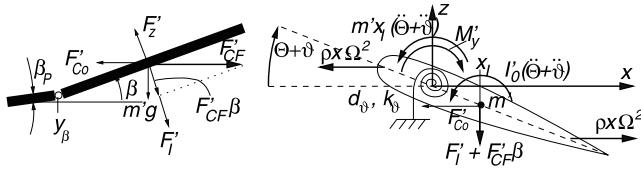


Abb. 6.4 Zum Schlag-Torsions-Flattern

Aus diesen Unterschieden folgt, dass man die Ergebnisse der Starrflügler nicht direkt übernehmen kann. Anhand eines einfachen Ersatzmodells mit zwei Freiheitsgraden, wobei das Schlaggelenk außerhalb der Drehachse sei und sich das Torsionslager außerhalb des Schlaggelenkes befindet (siehe Abb. 6.4), lassen sich jedoch gute Erkenntnisse gewinnen. Auch hier wird nur der Schwebeflugzustand betrachtet. Die dimensionslosen linearisierten Bewegungsgleichungen lauten gemäß Gln. 4.78 und 4.100 aus Abschn. 4.7, wo auch die zugehörigen Kräfte aufgeführt sind:

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} + v_\beta^2 \beta - I_x (\ddot{\Theta} + \Theta) \\ = \gamma \overline{M}_\beta + \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} \right)^2 \beta_P \\ I_f (\ddot{\Theta} + v_\Theta^2 \Theta + 2 \frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega} D_\Theta \dot{\Theta}) - I_x (\ddot{\beta} + \beta) + I_f k_{p\beta} \left(\frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega} \right)^2 \beta \\ = \gamma \overline{M}_\Theta + I_f \left(\frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega} \right)^2 \Theta_{con} \end{aligned} \quad (6.25)$$

D_Θ ist der viskose Dämpfungscoefficient der Torsionsbewegung und auf die Eigenfrequenz im nicht drehenden System bezogen. Die Eigenfrequenzen im drehenden System lauten

$$\begin{aligned} v_\beta^2 &= 1 + \frac{3e_\beta}{2(1-e_\beta)} + \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} \right)^2 \\ v_\Theta^2 &= 1 + \left(\frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.26)$$

Nun werden die aerodynamischen Kräfte ermittelt, wozu ebenfalls Abb. 6.4 dient. Die statischen generalisierten Luftkraftmomente sind dann

$$\begin{aligned} \overline{M}_\beta &= \frac{1}{\rho C_{l\alpha} c \Omega^2 R^4} \int_0^R y (L'_c + L'_{nc}) dy \\ \overline{M}_\Theta &= \frac{1}{\rho C_{l\alpha} c \Omega^2 R^4} \int_0^R (-x_a L' + M'_{nc}) dy \end{aligned} \quad (6.27)$$

Darin ist x_a der Abstand vom aerodynamischen Neutralpunkt (bei $c/4$) zur elastischen Achse und positiv zur Profilhinterkante hin. Ältere Rotorblätter sind mit symmetrischen

Profilen versehen und daher ist dann $C_{m0} = 0$; moderne Blätter haben jedoch gewölbte Profile mit $C_{m0} \neq 0$. Außerdem ist meist $x_a = 0$ oder nur ein kleiner Wert. Das nicht zirkulatorische Moment hat jedoch einen wichtigen Dämpfungseinfluss. Mit Hilfe des Wertes der Theodorsenfunktion an einer charakteristischen radialen Stelle des Rotorblattes (3/4 Radius) folgt für den zirkulatorischen Anteil des lokalen Auftriebes

$$L'_c = \frac{\rho}{2} C_{l\alpha} c (V_T^2 \Theta - V_P V_T) \bar{C}(k) \quad (6.28)$$

Damit erhält man für die generalisierten aerodynamischen Störmomente ($k_{\text{tip}} = c/(2R)$; $\bar{x}_a = x_a/c$)

$$\begin{aligned} \delta \bar{M}_\beta &= \frac{\bar{C}(k)}{2} \int_0^1 \left[\delta \bar{V}_T (2 \bar{V}_T \Theta - \bar{V}_P) - \delta \bar{V}_P \bar{V}_T + \delta \Theta \bar{V}_T^2 \right] r dr + \int_0^1 \bar{L}_{nc} r dr \\ \delta \bar{M}_\Theta &= -\bar{C}(k) \bar{x}_a k_{\text{tip}} \int_0^1 \left[\delta \bar{V}_T (2 \bar{V}_T \Theta - \bar{V}_P) - \delta \bar{V}_P \bar{V}_T + \delta \Theta \bar{V}_T^2 \right] dr + \int_0^1 \bar{M}_{nc} dr \\ \bar{L}_{nc} &= \frac{k_{\text{tip}}}{4} \left[r \overset{*}{\Theta} - r \overset{*}{\beta} + \frac{k_{\text{tip}}}{2} (1 + 2\bar{x}_a) \overset{**}{\Theta} \right] \\ \bar{M}_{nc} &= \frac{k_{\text{tip}}^2}{4} \left[r \left(\frac{1}{2} + 2\bar{x}_a \right) \overset{**}{\beta} - r (1 + 2\bar{x}_a) \overset{*}{\Theta} - k_{\text{tip}} \left(\frac{3}{8} + \bar{x}_a \right) \overset{**}{\Theta} \right] \end{aligned} \quad (6.29)$$

Der einzige wichtige Term des nicht zirkulatorischen Momentes stammt in der Regel von der Nickgeschwindigkeit $\overset{*}{\Theta}$ und nur dieser wird im Folgenden beibehalten. Im nicht zirkulatorischen Auftrieb wird der Term mit $\overset{**}{\Theta}$ vernachlässigt, da er im Vergleich zu den anderen Termen meistens klein ist. Es ist wichtig zu beachten, dass hier der Auftriebsanstieg mit 2π angenommen wurde; wenn andere Werte verwendet werden sollen, so sind die nicht zirkulatorischen Anteile mit $2\pi/C_{l\alpha}$ zu multiplizieren. Vom nicht zirkulatorischen Auftrieb werden die Terme der Nickgeschwindigkeit und der Schlaggeschwindigkeit beibehalten. Die stationären und die Störgeschwindigkeiten sind hier

$$\bar{V}_T = r \quad \bar{V}_P = \lambda \quad \delta \bar{V}_T = 0 \quad \delta \bar{V}_P = r \overset{*}{\beta} - k_{\text{tip}} (1 + 2\bar{x}_a) \overset{*}{\Theta} \quad \delta \Theta = \Theta - k_{p\beta} \beta \quad (6.30)$$

Nun folgen die generalisierten Störmomente einschließlich der nicht zirkulatorischen Anteile gemäß Kap. 5 zu

$$\begin{aligned} \delta \bar{M}_\beta &= \frac{\bar{C}(k)}{8} \left[-\overset{*}{\beta} + \frac{4}{3} k_{\text{tip}} (1 + 2\bar{x}_a) \overset{*}{\Theta} + \Theta - k_{p\beta} \beta \right] + \frac{k_{\text{tip}}}{12} \left(\overset{*}{\Theta} - \overset{*}{\beta} \right) \\ \delta \bar{M}_\Theta &= -\frac{\bar{C}(k)}{3} \bar{x}_a k_{\text{tip}} \left[-\overset{*}{\beta} + \frac{3}{2} k_{\text{tip}} (1 + 2\bar{x}_a) \overset{*}{\Theta} + \Theta - k_{p\beta} \beta \right] - \frac{k_{\text{tip}}^2}{8} (1 + 2\bar{x}_a) \overset{*}{\Theta} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Setzt man diese in die Bewegungsgleichungen ein, so folgt ein System von zwei gekoppelten Bewegungsdifferentialgleichungen in Matrixform

$$\begin{bmatrix} 1 & -I_x^* \\ I_x^* & I_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^* \\ \Theta^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{8} [\bar{C}(k) + \frac{2}{3} k_{\text{tip}}] & -\frac{\gamma}{6} k_{\text{tip}} [(1 + 2\bar{x}_a) \bar{C}(k) + \frac{1}{2}] \\ -\frac{\gamma}{3} k_{\text{tip}} \bar{x}_a \bar{C}(k) & \frac{2\gamma}{3} k_{\text{tip}}^2 \bar{x}_a (1 + 2\bar{x}_a) \bar{C}(k) + \frac{\gamma}{8} k_{\text{tip}}^2 (1 + 2\bar{x}_a) + 2I_f \frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega} D_\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^* \\ \Theta^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_\beta^2 + \frac{\gamma}{8} \bar{C}(k) k_{p\beta} & -\frac{\gamma}{8} \bar{C}(k) - I_x^* \\ I_f k_{p\beta} (\frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega})^2 - I_x^* + \frac{\gamma}{3} \bar{x}_a k_{\text{tip}} \bar{C}(k) k_{p\beta} & I_f v_\Theta^2 + \frac{\gamma}{3} \bar{x}_a k_{\text{tip}} \bar{C}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \Theta \end{bmatrix} = 0 \quad (6.32)$$

Dies ist ein System zweiter Ordnung und genau so behandelbar wie ein Feder-Masse-Schwinger mit Dämpfung. Beachtenswert ist nun, dass die effektive Schlagfrequenz auch von der Theodorsenfunktion abhängt.

$$v_{\beta e}^2 = v_\beta^2 + \frac{\gamma}{8} \bar{C}(k) k_{p\beta} \quad (6.33)$$

Es gibt viele Lösungswege. Zwei der häufigsten sind wiederum entweder die Nullstellen der Determinante zu finden oder die Eigenwertanalyse. Generell sind hier zwei Formen der Instabilität möglich:

1. das statische Auskippen, was auch Torsionsdivergenz genannt wird,
2. die dynamische Instabilität, welche das Schlag-Torsions-Flattern repräsentiert.

6.3.2 Die Torsionsdivergenz

Unter bestimmten Betriebsbedingungen führt bereits eine sehr kleine Störung dazu, dass der elastische Torsionswinkel immer größer wird und schließlich das Rotorblatt abschert. Dies wird statische Torsionsdivergenz genannt und die Dynamik des Systems spielt hier keine Rolle. Grundsätzlich kann nur die Torsion in dieser Art instabil werden.

Man kann die Bewegungsgleichungen als ein Eigenwertproblem lösen und erhält im Allgemeinen zwei konjugiert komplexe Eigenwertpaare λ . Im Falle der Torsionsdivergenz ist der Realteil größer Null und der Imaginärteil identisch Null, so dass zwei rein reelle Eigenwerte vorliegen, siehe Abb. 6.2. Aufgrund des verschwindenden Imaginärteils ist die Frequenz der Eigenform Null und daher sind Geschwindigkeits- oder Beschleunigungsterme bedeutungslos, was die Bewegungsgleichungen sehr vereinfacht, da die ersten beiden Matrizerterme dann wegfallen und nur der Federterm übrig bleibt; ferner ist der Wert der

Theodorsenfunktion reell und mit $\bar{C}(k) = 1$ einzusetzen.

$$\begin{bmatrix} v_{\beta e}^2 & -\frac{\gamma}{8} - I_x^* \\ I_f^* k_{p\beta} \left(\frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega} \right)^2 - I_x^* + \frac{\gamma}{3} \bar{x}_a k_{\text{tip}} k_{p\beta} & I_f^* v_{\Theta}^2 + \frac{\gamma}{3} \bar{x}_a k_{\text{tip}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \Theta \end{bmatrix} = 0 \quad (6.34)$$

Setzt man die Determinante davon zu Null, so erhält man eine Gleichung zur Bestimmung der Grenze zwischen Stabilität und Torsionsdivergenz

$$R = 0 = v_{\beta e}^2 \left(I_f^* v_{\Theta}^2 + \frac{\gamma}{3} \bar{x}_a k_{\text{tip}} \right) + \left[I_f^* k_{p\beta} \left(\frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega} \right)^2 - I_x^* + \frac{\gamma}{3} \bar{x}_a k_{\text{tip}} k_{p\beta} \right] \left(\frac{\gamma}{8} + I_x^* \right) \quad (6.35)$$

Unter Vernachlässigung der Schlag-Torsionskopplung $k_{p\beta}$ erhält man einen sehr einfachen Ausdruck für die Forderung der Stabilität, die durch das Routh-Hurwitz-Kriterium mit $R > 0$ gekennzeichnet ist

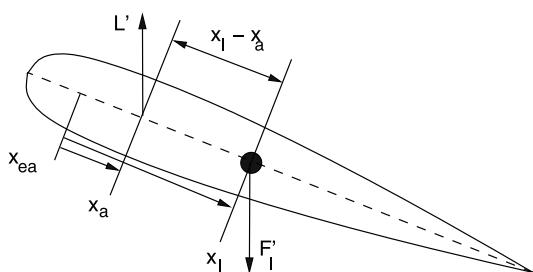
$$I_x^{*2} + \frac{\gamma}{8} I_x^* - v_{\beta}^2 \frac{\gamma}{3} \bar{x}_a k_{\text{tip}} < I_f^* v_{\beta}^2 v_{\Theta}^2 \quad (6.36)$$

mit $I_x^* = (3/2)x_I/R$. Da der Abstand des Schwerpunktes von der elastischen Achse x_I normalerweise recht klein ist, kann man das Quadrat dieses Terms wegen höherer Ordnung weglassen und ferner ist die Schlageigenfrequenz im drehenden System in der Regel etwas größer als Eins, so dass in etwa $v_{\beta}^2/8/9 \approx 1$ ist. Es folgt als Stabilitätskriterium

$$\frac{x_I - x_a}{R} < \frac{16}{3\gamma} I_f^* v_{\beta}^2 v_{\Theta}^2 \approx \frac{6}{\gamma} I_f^* v_{\Theta}^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{x_I - x_a}{c} < \frac{3}{\gamma k_{\text{tip}}} I_f^* v_{\Theta}^2 \quad (6.37)$$

Somit hängt die Torsionsdivergenz vom Abstand zwischen Massenachse und aerodynamischem Neutralpunkt ab und die Lage der elastischen Achse spielt überhaupt keine Rolle (siehe Abb. 6.5). Dies steht im Gegensatz zum Starrflügler, wo für die Torsionsdivergenz der Abstand von elastischer Achse zum Neutralpunkt von Bedeutung ist. Der Grund dafür liegt in der ganz unterschiedlichen Physik, die beim Rotor der Divergenz zugrunde liegt.

Abb. 6.5 Lage der Achsen im Profilschnitt



Mit wachsendem Schub wird auch der Schlagkonuswinkel größer. Wenn nun der Schwerpunkt einen Abstand zum Neutralpunkt hat, so bewirkt die Zentrifugalkraft ein Moment proportional zur Schlagauslenkung und torquiert das Rotorblatt – ein sehr dominanter Effekt, der beim Starrflügler aufgrund fehlender Zentrifugalkraft nicht auftritt. Ist der Schwerpunkt hinter dem Neutralpunkt, nickt das Blatt noch weiter auf, produziert noch mehr Auftrieb, erhält noch mehr Konus und schert schließlich ab. Liegt der Schwerpunkt vor dem Neutralpunkt, so nickt das Blatt ab, produziert weniger Auftrieb und stabilisiert sich so von selbst, was aber auch auf Verlust der Steuerwirksamkeit hinausläuft.

Beispiel

Nimmt man folgende typische Werte eines Rotors an:

$$\gamma = 8 \quad v_\beta = 1,1 \quad \dot{I}_f^* = 0,001 \quad \frac{R}{c} = 20 \Rightarrow k_{\text{tip}} = 0,025$$

So folgt

$$\frac{x_I - x_a}{R} \stackrel{!}{<} 0,00075v_\Theta^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{x_I - x_a}{c} \stackrel{!}{<} 0,016v_\Theta^2$$

Am Beispiel der Bo105 mit $v_\Theta = 3,6/\text{rev}$ folgt $\Delta x/c \stackrel{!}{<} 0,21$, d.h. das Blatt ist noch steif genug, um erhebliche Rücklagen der Massenachse hinter dem Neutralpunkt zuzulassen.

Da normalerweise der Neutralpunkt sehr nah am $c/4$ -Punkt liegt, folgt, dass die Lage des Schwerpunktes vor oder auf dem Neutralpunkt liegen muss, um frei von Torsionsdivergenz zu sein. Die Hauptparameter zur Beeinflussung des Divergenzverhaltens sind:

1. ein Abstand der Massenachse vom $c/4$ -Punkt;
2. die Torsionseigenfrequenz im nicht drehenden System (also die Torsionssteifigkeit, die durch $\omega_{\Theta 0}$ in v_Θ^2 eingeht).

Eine dritte Möglichkeit besteht natürlich noch in der Änderung der Rotordrehzahl selbst (kleinere Drehzahl), aber diese ist meist auf ein eng begrenztes Gebiet festgelegt, um nicht in andere Resonanzen und damit verbundene dynamische Probleme zu gelangen.

6.3.3 Schlag-Torsions-Flattern

Diese selbsterregte Schwingungsform wird durch die Kopplung der Schlag- und Torsionsbewegung verursacht und der Grenzfall der Stabilität ist durch verschwindende Realteile der Eigenwerte (= verschwindende Systemdämpfung) gekennzeichnet. Da diese Flatterform vom Schub unabhängig auftritt, braucht man vorher keine Trimmrechnung durchzuführen und diese Flatterform kann auch bei Nullschub auftreten. Auch hier kann man entweder über die Ermittlung der Nullstellen der Determinante oder durch die Eigenwertanalyse zur Lösung gelangen. Zunächst zur Determinantenmethode: Mit der Annahme harmonischer Schwingungen, wobei $s = \delta + i\nu$ wieder die komplexe dimensionslose

Frequenz bedeutet,

$$\beta(\psi) = \beta e^{s\psi} \quad \text{und} \quad \Theta(\psi) = \Theta e^{s\psi} \quad (6.38)$$

folgt aus den Bewegungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} s^2 + \frac{\gamma}{8} [\bar{C}(k) + \frac{2}{3} k_{\text{tip}}] s + v_{\beta e}^2 & -I_x^* s^2 - \frac{\gamma}{12} k_{\text{tip}} [1 + 2(1 + 2\bar{x}_a) \bar{C}(k)] s \\ -I_x^* s^2 - \frac{\gamma}{3} \bar{x}_a k_{\text{tip}} \bar{C}(k) s & -I_x^* - \frac{\gamma}{8} \bar{C}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \Theta \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -I_x^* s^2 - \frac{\gamma}{3} \bar{x}_a k_{\text{tip}} \bar{C}(k) s & I_f^* s^2 + I_f^* 2 \frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega} D_{\Theta} s + I_f^* v_{\Theta}^2 + \frac{\gamma}{3} \bar{x}_a k_{\text{tip}} \bar{C}(k) \\ + I_f^* k_{p\beta} \left(\frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega} \right)^2 - I_x^* & + \frac{\gamma}{2} k_{\text{tip}}^2 (1 + 2\bar{x}_a) [\bar{x}_a \bar{C}(k) + \frac{1}{4}] s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \Theta \end{bmatrix} = 0 \quad (6.39)$$

Die Determinante wird wieder ein Polynom vierten Grades in s sein

$$As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E = 0 \quad (6.40)$$

und das Stabilitätskriterium für das stabile System nach Routh-Hurwitz lautet wie gehabt:

$$R = AD^2 - CDB + EB^2 > 0 \quad (6.41)$$

Die darin enthaltenen Koeffizienten sind

$$A = I_f^* - I_x^2$$

$$B = I_f^* \left\{ 2 \frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega} D_{\Theta} + \frac{\gamma}{8} \left[\bar{C}(k) + \frac{2}{3} k_{\text{tip}} \right] \right\} + \frac{\gamma}{2} k_{\text{tip}}^2 (1 + 2\bar{x}_a) \left[\frac{1}{4} + \bar{x}_a \bar{C}(k) \right]$$

$$- \frac{\gamma}{3} I_x^* k_{\text{tip}} \left[\frac{1}{2} + (1 + 4\bar{x}_a) \bar{C}(k) \right]$$

$$C = I_f^* (v_{\Theta}^2 + v_{\beta e}^2) + \frac{\gamma}{3} \bar{x}_a k_{\text{tip}} \bar{C}(k)$$

$$+ \left[\bar{C}(k) + \frac{2}{3} k_{\text{tip}} \right] \left(\frac{\gamma}{4} k_{\text{tip}} \right)^2 (1 + 2\bar{x}_a) \left[\frac{1}{4} + \bar{x}_a \bar{C}(k) \right]$$

$$- I_x^* \left[2 I_x^* + \frac{\gamma}{8} \bar{C}(k) - k_{p\beta} I_f^* \left(\frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega} \right)^2 + \frac{\gamma}{3} \bar{x}_a k_{\text{tip}} \bar{C}(k) k_{p\beta} \right]$$

$$+ \frac{\gamma}{8} I_f^* 2 \frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega} D_{\Theta} \left[\bar{C}(k) + \frac{2}{3} k_{\text{tip}} \right] - \left(\frac{\gamma}{3} k_{\text{tip}} \right)^2 \bar{x}_a \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} (1 + 2\bar{x}_a) \bar{C}(k) \right] \bar{C}(k)$$

$$D = \frac{\gamma}{8} \left[\bar{C}(k) + \frac{2}{3} k_{\text{tip}} \right] \left[I_f^* v_{\Theta}^2 + \frac{\gamma}{3} \bar{x}_a k_{\text{tip}} \bar{C}(k) \right] - \frac{\gamma}{3} \bar{x}_a k_{\text{tip}} \bar{C}(k) \left[I_x^* + \frac{\gamma}{8} \bar{C}(k) \right]$$

$$+ v_{\beta e}^2 \left\{ I_f^* 2 \frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega} D_{\Theta} + \frac{\gamma}{2} k_{\text{tip}}^2 (1 + 2\bar{x}_a) \left[\frac{1}{4} + \bar{x}_a \bar{C}(k) \right] \right\}$$

$$+ \frac{\gamma}{4} k_{\text{tip}} \left[\frac{k_{p\beta}}{3} I_f^* \left(\frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega} \right)^2 - \frac{1}{3} I_x^* + \frac{8}{3} \bar{x}_a k_{\text{tip}} \bar{C}(k) k_{p\beta} \right] [1 + 2(1 + 2\bar{x}_a) \bar{C}(k)]$$

$$E = v_{\beta e}^2 \left[I_f^* v_{\Theta}^2 + \frac{\gamma}{3} \bar{x}_a k_{\text{tip}} \bar{C}(k) \right]$$

$$+ \left[k_{p\beta} I_f^* \left(\frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega} \right)^2 - I_x^* + \frac{\gamma}{3} \bar{x}_a k_{\text{tip}} \bar{C}(k) k_{p\beta} \right] \left[I_x^* + \frac{\gamma}{8} \bar{C}(k) \right] \quad (6.42)$$

Wenn man quasistationäre Aerodynamik annimmt, demzufolge den Effekt der instationären Aerodynamik durch die abgehende Wirbeldichte vernachlässigt (also $\bar{C}(k) = 1$ setzt) und ebenfalls die Schlag-Torsionskopplung $k_{p\beta}$ weglässt, kann man wiederum eine einfache Näherungsformel erhalten (ohne Angabe der Herleitung, siehe z. B. Johnson [3])

$$\frac{x_I - x_a}{R} < 2k_{\text{tip}}^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\gamma}{24} \right) \quad \text{bzw.} \quad \frac{x_I - x_a}{c} < k_{\text{tip}} \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\gamma}{24} \right) \quad (6.43)$$

Auch hier ist der Abstand der Massenachse vom aerodynamischen Neutralpunkt die wichtige Größe und wenn der Schwerpunkt auf oder vor dem Neutralpunkt liegt, so gibt es keine Möglichkeit des Flatterns. Diese Bedingung aus der Divergenz und diesem Flattertyp sind der Grund, weshalb die Hersteller so große Anstrengungen unternehmen, die Massenachse nach vorne zu bringen.

Die Eigenwertanalyse betrachtet die Bewegungsgleichungen als die eines Feder-Masse-Schwingers mit Dämpfung und löst diese als ein Eigenwertproblem. Man erhält zwei konjugiert komplexe Eigenwertpaare, also vier Eigenwerte. Wenn nun irgendeiner dieser Eigenwerte einen positiven Realteil aufweist, ist das System instabil; bei $\lambda_{Re} = 0$ ist der Grenzfall der Stabilität erreicht. Durch folgende Maßnahmen kann man die Schlag-Torsions-Flatterform stabilisieren:

1. Erhöhung der Blatttorsions- sowie der Steuersystemsteifigkeit (oder Reduktion der Blattmasse und damit Reduktion von I'_Θ als auch Vergrößerung von γ) und damit Vergrößerung von $\omega_{\Theta 0}$ und letztlich v_Θ .
2. Die Massenachse nach vorne verlagern (Blei oder Wolfram in die Blattnase oder besser von der Grundkonzeption eine leichte Hinterpartie entwickeln).
3. Die Torsionsdämpfung durch mechanische Dämpfer (schwierig) oder aufgeklebtes Dämpfungsband auf das Steuersystem erhöhen. Letzteres ist aber nur schwach wirksam.

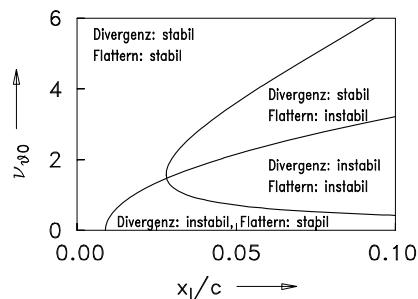
Ein Beispiel für die Stabilitätsgrenzen im Hinblick auf Torsionsdivergenz und Schlag-Torsions-Flattern ist in Abb. 6.6 dargestellt. Man erkennt, dass für Torsionssteifigkeiten von $v_{\Theta 0} = \omega_{\Theta 0}/\Omega > 2$ hinsichtlich der Divergenz und des Schlag-Torsions-Flatterns wesentlich größere Schwerpunktsabstände zugelassen werden können. Außerdem ist bei einem torsionsweichen Rotor die Divergenz der bestimmende Faktor, während bei einem torsionssteifen Rotor der Flatterfall die Stabilität bestimmt. Beispiel Bo105 Modellrotor: $\omega_{\Theta 0}/\Omega = 3,6$, $x_I/c = 0,041$ liegt knapp über der Flattergrenze. Der Einfluss einer größeren Blattmasse, aber auch einer größeren Flughöhe ist in einer kleineren Lockzahl zu finden.

Beispiel

Ein gelenkiger Rotor habe folgende Daten: $\gamma = 8$, $k_{p\beta} = 0$ sowie

$$I_f^* = 0,001 \quad k_{\text{tip}} = 0,025 \quad e_\beta = 0,06 \quad \frac{x_{cg}}{c} = 0,35 \quad \frac{x_{ea}}{c} = 0,2 \quad \frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega} = 3$$

Abb. 6.6 Stabilitätsgrenzen der Torsionsdivergenz und des Schlag-Torsions-Flatters.
 $v_\beta = 1, \gamma = 12, k_{\text{tip}} = 0,025, \bar{x}_a = 0, I_f^* = 0,001, C(k) = 1, k_{p\beta} = 0$



Man untersuche:

- Ist das Blatt frei von der Torsionsdivergenz?
- Kann das Blatt in Schlag-Torsions-Flattern geraten, wenn $x_{ea}/c = 0,25$?

Man nehme der Einfachheit halber $C(k) = 1$ an.

Lösung

Für die Torsionsdivergenz folgt unter Anwendung der Näherungsformel, wobei der aerodynamische Neutralpunkt bei $c/4$ angenommen wird:

$$\begin{aligned} v_\beta^2 &= 1,09 \\ \frac{x_I - x_a}{R} &= 0,005 < \frac{16}{3\gamma} v_\beta^2 I_f^* v_\Theta^2 = 0,0073 \end{aligned}$$

Somit ist das Blatt frei von Torsionsdivergenz. Aus den Flattergleichungen folgt

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{cc} 1 & -0,01125 \\ 0,01125 & 0,001 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \beta^{**} \\ \Theta^{**} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} 1 & -0,0533 \\ 0,00333 & 0,000825 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \beta^* \\ \Theta^* \end{bmatrix} \\ &+ \left[\begin{array}{cc} 1,09 & -1 \\ 0,01125 & 0,01333 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \beta \\ \Theta \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Damit folgt für das Routh-Hurwitz-Kriterium: $R = 5,18 \cdot 10^{-8}$ und das Blatt ist sehr schwach stabil.

6.3.4 Schlag-Torsions-Flattern des Zweiblattrotors

Der Zweiblattrotor stellt eine Sonderform dar, da die beiden Blätter in der Regel nicht separat gelenkig gelagert sind wie bei Mehrblatttoren, sondern ein zentrales Schlaggelenk aufweisen, die beiden Blätter aber untereinander starr miteinander verbunden sind (sog. Wippgelenk). Dieses System hat als Starrblattbewegung ausschließlich die Kipp-

bewegung um das zentrale Gelenk, zusätzlich die elastischen Freiheitsgrade in Schlägen (symmetrisch und gegengleich) sowie Schwenken. Hier wird jedoch nur die Starrblattbewegung in Schlägen und Torsion betrachtet. So ein Rotor kann eine Instabilität der Schlag-Torsions-Bewegung aufweisen, die als *blade weaving* bezeichnet und als eine Pendelbewegung sichtbar wird. Erstmals wurde diese Instabilität von Coleman und Stempin 1946 untersucht [17], was mit den frühen Entwicklungen bei Bell Helicopters, die auf dem Zweiblattrotor basierten, in Zusammenhang steht.

Nimmt man die Elastizität des Steuergestänges als Feder in der Torsionsbewegung und die Starrblattbewegung (des gesamten Rotors) in Schlägen als alleinige Freiheitsgrade an, so spielen sowohl der eingebaute Konus β_P im Zentrum als auch der mittlere kollektive Steuerwinkel Θ_0 eine wichtige Rolle, siehe Abb. 6.7. Grundsätzlich kommen die Bewegungsgleichungen des Schlag-Torsions-Flatterns wieder in Ansatz, jedoch mit zusätzlichen Termen, die sich aus der Kinematik dieses Rotortyps ableiten. Außerdem kommen modifizierte Trägheitsmomente zustande, denn nicht das Einzelblatt, sondern der gesamte Rotor als „starre Einheit“ ist in Bewegung. Nach Bramwell [18] lassen sich die effektiven Massenträgheitsmomente des starren Zweiblattrotors aus denen des bisher beschriebenen Einzelblattes wie folgt bilden:

$$\begin{aligned} I_\Theta^{(W)} &\approx 2(I_\Theta + I_\beta \beta_P^2) \\ I_\beta^{(W)} &\approx 2I_\beta \\ I_\zeta^{(W)} &\approx 2(I_\zeta - I_\beta \beta_P^2) \end{aligned} \quad (6.44)$$

Das Torsionsträgheitsmoment wird beim Wipptor also durch den Vorkonus mit dem Massenträgheitsmoment der Schlagbewegung deutlich vergrößert, bei verschwindendem Konus verschwindet auch die Kopplung. Aufgrund des Vorkonus hat auch die Zentrifugalkraft eine bisher vernachlässigte geringere Rückstellwirkung; außerdem entstehen zusätzliche Terme aus den Winkelgeschwindigkeiten der Schlag- und Torsionsbewegung. Die linearisierten Bewegungsgleichungen lauten nun:

$$\begin{aligned} I_\beta^{(W)} \ddot{\beta} + \Omega^2 (I_\zeta^{(W)} - I_\Theta^{(W)}) \beta - (I_\Theta^{(W)} + I_\beta^{(W)} - I_\zeta^{(W)}) \Omega \dot{\Theta} &= M_\beta \\ I_\Theta^{(W)} \ddot{\Theta} + d_\Theta \dot{\Theta} + [\Omega^2 (I_\zeta^{(W)} - I_\beta^{(W)}) + k_\Theta] \Theta + (I_\Theta^{(W)} + I_\beta^{(W)} - I_\zeta^{(W)}) \Omega \dot{\beta} &= M_\Theta \end{aligned} \quad (6.45)$$

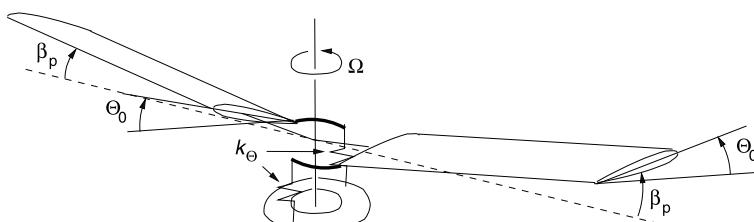
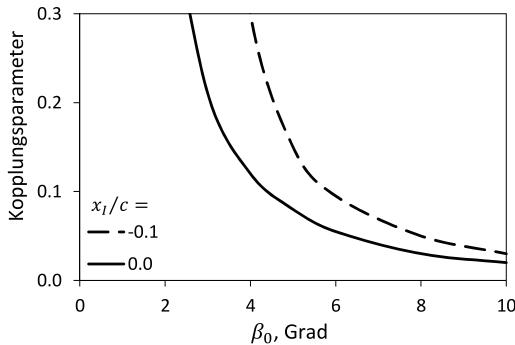


Abb. 6.7 Zweiblattrotor mit elastischen Steuerstangen

Abb. 6.8 Stabilitätsgrenzen beim Zweiblattrotor



Die instationären aerodynamischen Schlag- und Torsionsmomente liefern wie zuvor Beiträge proportional zu $\dot{\beta}$, $\dot{\Theta}$ und Θ ; sofern man die nicht zirkulatorischen Anteile der Luftkräfte mitnimmt, auch proportional zu $\ddot{\beta}$ und $\ddot{\Theta}$. Das weitere Vorgehen ist identisch mit dem des vorangegangenen Abschnittes. Nach Einsetzen der in Gl. 6.44 gegebenen Massenträgheitsmomente wird man in der Torsionsgleichung einen großen Einfluss der Schlaggeschwindigkeit finden (proportional zu $2I_\beta\beta_p^2\Omega\dot{\beta}$, was im Vergleich zum Massenträgheitsmoment der Torsionsbewegung groß ist), während umgekehrt ein eher unbedeutender Term in der Gleichung der Schlagbewegung zu finden ist: $2\beta_p^2\Omega\dot{\Theta}$ (was im Vergleich zum Massenträgheitsmoment der Schlagbewegung vernachlässigbar ist). Ohne Vorkonus verschwinden diese Kopplungsterme. Diese zusätzlichen Terme destabilisieren das verkoppelte Gleichungssystem vorwiegend mit zunehmendem Vorkonus; der kollektive Steuerwinkel hat einen geringeren Einfluss.

Diese Kopplungsterme führen bemerkenswerter Weise sogar dazu, dass selbst eine vor der $c/4$ -Achse liegende Massenachse dennoch zu Instabilität führen kann, wenn der Vorkonus nur groß genug ist, siehe Abb. 6.8. Eine Stabilisierung erfordert dann eine deutliche Zunahme der Steuersteifigkeit k_Θ und damit der Eigenfrequenz der Torsion. Wenn die Instabilität erreicht wird, äußert sich dies in einer wellenförmigen Pendelbewegung des Rotors. Ohne Konuswinkel ist dieser Rotortyp immer stabil hinsichtlich Schlag-Torsions-Flattern.

6.3.5 Stall-Flattern

In den 1960er Jahren kam die Forderung nach höheren Fluggeschwindigkeiten, als sie Hubschrauber aufgrund der Kompressibilitätsprobleme an der vorlaufenden und der Stallprobleme an der rücklaufenden Seite des Rotors erreichen können, auf. Die Lösung war, den Rotor vom Auftrieb durch Tragflächen zu entlasten und seine Vortriebsfunktion von Düsentriebwerken weitgehend zu übernehmen. Um die größte Machzahl am vorlaufenden Rotorblatt nicht über 0,9 wachsen zu lassen, muss man die Rotordrehzahl reduzieren, dann allerdings auch größere Gebiete mit abgelöster Strömung auf der rücklaufenden Sei-

te des Rotors in Kauf nehmen. Dies führt zur Strömungsablösung an den Rotorblättern und gegebenenfalls zu instabilen Torsionsschwingungen. Flugversuche wurden dazu mit einer gut instrumentierten Sikorsky S-61F 1965 durchgeführt [19] und die theoretische Behandlung durch numerische Simulation entwickelt, insbesondere von Carta [20].

Beim Flug nahe der Grenze der Flugveloppe – insbesondere bei sehr großen Fluggeschwindigkeiten und/oder Lastvielfachen – treten an der rücklaufenden Seite aufgrund großer Anstellwinkel Strömungsablösungen auf, die mit großen aerodynamischen Nickmomenten behaftet sind, denn der Druckpunkt wandert bei Strömungsablösung (Stall) vom $c/4$ -Punkt des Profils hin zur halben Profiltiefe und hat damit einen großen Hebelarm zur Drehachse des Rotorblattes. Während der Strömungsablösung lösen sich von der Profilvorderkante einigermaßen periodisch Wirbel ab, die Wechselwirkungen im Auftrieb und Nickmoment mit sich bringen. Daraus wird das Rotorblatt mit elastischer Torsion reagieren, insbesondere dann, wenn die aerodynamische Erregerfrequenz in die Nähe der Torsionseigenfrequenz des Blattes kommt. Im Wesentlichen ist das ein reines Torsionsschwingen ohne nennenswerte Beiträge aus der Schlag- oder Schwenkbewegung.

Um den Stallpunkt herum liefern die instationären aerodynamischen Momente oft eine negative Dämpfung, das heißt, es wird dann Energie ins System gespeist, anstelle dieser Energie zu entziehen. Dies kann dann zum Stall-Flattern führen. Allerdings ist dieses Phänomen in der Regel auf die rücklaufende Rotorseite begrenzt und die Strömung legt sich wegen kleiner Anstellwinkel am Ende der rücklaufenden Seite wieder an, so dass ab dort wieder positive Dämpfung vorliegt und die zunächst angefachte Schwingung wieder abklingt. Messungen an einer Sikorsky S-61F haben dies ebenso gezeigt wie Windkanalversuche mit Modellrotoren. Das Blattwurzelmoment in Torsion, Abb. 6.9, zeigt deutlich, wie auf der rücklaufenden Seite das Blattwurzelmoment plötzlich zunehmend große Amplituden erfährt, um dann auf der vorlaufenden Seite schnell wieder ruhig zu werden. Die Torsionsamplituden können dabei mehrere Grad erreichen. Diese Torsionsmomente erzeugen eine hohe Materialbelastung sowohl im Rotorblatt wie auch in den Steuerstangen,

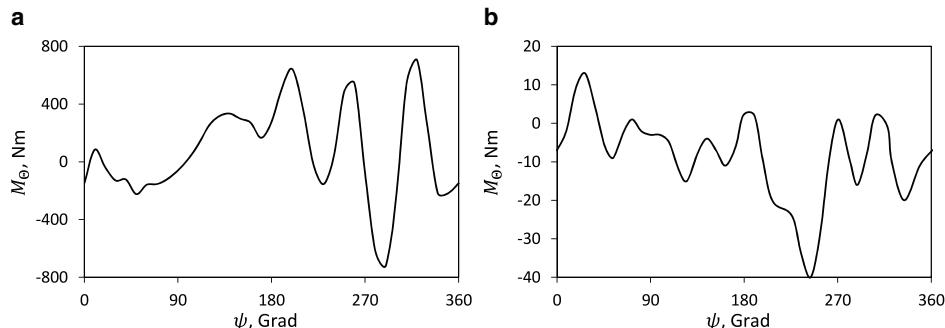


Abb. 6.9 Torsionsmoment an der Blattwurzel mit Stall-Flattern. **a** S-61F Hubschrauber, Flugversuch, $C_T/\sigma = 0,0579$, $\mu = 0,48$, $M_{90^\circ} = 0,873$, **b** 7AD Modellrotor, Windkanaltest, $C_T/\sigma = 0,11$, $\mu = 0,40$, $M_{90^\circ} = 0,633$

der Taumelscheibe und den darunter liegenden Steuerungselementen und Aktuatoren und ist daher zu vermeiden. Grundsätzlich sind Gebiete mit Strömungsablösung auf der rücklaufenden Seite des Rotors bei sehr großen Fortschrittsgraden unvermeidlich. Der Entwurf von gewölbten Profilen mit großem Anstellwinkel der Strömungsablösung hilft etwas, die Problematik zu verringern und heute werden Profile entwickelt, deren Nickmoment während des Stalls nach Möglichkeit nicht allzu groß ausfällt. In der Regel sind das jedoch dicke, stark gewölbte Profile, die wiederum auf der vorlaufenden Seite bei den wesentlich größeren Machzahlen große Nickmomente und Widerstände bei anliegender Strömung erzeugen, so dass hier immer ein Kompromiss zu suchen ist. Eine große Torsionssteifigkeit, mithin große Torsionseigenfrequenz, reduziert meist die Torsionsamplituden und damit auch die Materialbelastung.

6.4 Das Schlag-Schwenk-Torsions-Flattern im Schwebeflug

Die bisher verwendeten Zweifreiheitsgradsysteme des Schlag-Schwenk-Flatters und des Schlag-Torsions-Flatters sind analog zu den Betrachtungen des Starrflüglers. Eine Verbesserung für den Drehflügler stellt die Einbeziehung des jeweils dritten Freiheitsgrades dar und das Rotorblatt kann schlagen, schwenken und tordieren, wobei das Blatt selbst als starr angesehen werden kann und entsprechende Gelenke mit Federn vorgesehen werden, um die Modellierung der Realität anzupassen und die Eigenfrequenzen richtig zu erfassen. Dann sind automatisch die Schlag-Schwenk- und Schlag-Torsions-Flatterformen mit enthalten.

Die Bewegungsgleichungen dieses Systems wurden bereits in Kap. 4 angegeben und die generalisierten aerodynamischen Kräfte wurden in Kap. 5 dargelegt. Man erhält drei gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Freiheitsgrade β , ζ , Θ , die als ein Eigenwertproblem gelöst werden können. Die Eigenwerte liefern dann die Aussage, ob das System stabil ist oder nicht. Bei diesem Dreifreiheitsgradsystem ist die Gelenkreihenfolge von erheblicher Bedeutung und man kann sehr unterschiedliche Ergebnisse erhalten, wenn man bei gleichen Eigenschaften der Blattstruktur die Reihenfolge der Gelenke ändert. Bei den meisten Rotoren ist die Reihenfolge: innen das Schlag-, dann das Schwenk- und außen das Steuergelenk gegeben und für Details der Analyse kann man zum Beispiel bei Chopra (1983) nachsehen [21].

Dennoch helfen die Zweifreiheitsgradsysteme, die Prinzipien der wirkenden Physik zu verstehen und die wichtigen Koppelterme zu identifizieren. Außerdem haben sie sich als sehr nützlich im Rotorentwurf und bei der Rotorentwicklung erwiesen.

Eine weitere Verbesserung ist, das Rotorblatt als elastischen Balken aufzufassen, welches Biegungen in Schlag- und Schwenkrichtung haben sowie elastisch tordieren kann. Mehrere Autoren haben diesen Fall untersucht, um die aeroelastische Stabilität eines elastischen Rotorblattes zu berechnen (siehe [22–25]). Die Bewegungsgleichungen dazu sind in Kap. 4 für ein homogenes Blatt gegeben und die instationären aerodynamischen Kräfte wiederum in Kap. 5.

Gewöhnlich wird die Eigenformmethode verwendet, um sowohl den Trimmzustand als auch die aeroelastische Stabilität eines elastischen Rotorblattes zu berechnen, indem entweder die gekoppelten Eigenschwingungsformen des drehenden Systems verwendet werden (Galerkin, Rayleigh-Ritz-Methode, FEM), oder man nimmt die ungekoppelten Eigenformen des nicht drehenden Systems. Generell werden dabei die Trimmauslenkungen als groß angenommen und dadurch die nichtlinearen Gleichungen erhalten. Die Flattergleichungen sind dann linearisierte Bewegungsgleichungen um diesen Trimmzustand herum.

Mit der Eigenformmethode wird es jedoch immer schwerer, geometrische Variationen zu handhaben. Als Beispiel sei hier die Modellierung eines lagerlosen Rotorblattes genannt, das mehrere Balken als Blattwurzel hat. Daher ist die Finite Element Methode (FEM) möglicherweise die beste Methode, um flexibel im Hinblick auf verschiedene Geometrien zu sein. Dabei wird das Rotorblatt in eine Reihe von Balkenelementen zerlegt und die Energieprinzipien liefern die Näherung der elastischen Kräfte und der Massenkräfte eines jeden Elements. Danach erhält man die globalen Bewegungsgleichungen, indem die Elemente zusammengefasst werden, wobei jede Art von Ungleichförmigkeiten leicht einzuarbeiten ist. Die FEM ist sehr flexibel und kann mit nur wenigen Änderungen an jede Konfiguration angepasst werden. Zum Beispiel kann man die Balken eines lagerlosen Rotors an der Blattwurzel leicht erfassen, siehe [26, 27].

Im Hinblick auf die aerodynamischen Kräfte wird meistens die zweidimensionale Blattelemententheorie angewandt, kombiniert mit den nicht zirkulatorischen Kräften instationärer Bewegung. Es werden dabei lineare Ansätze für Auftrieb, Widerstand und das aerodynamische Moment verwendet; typischerweise in der Art

$$C_l = C_{l\alpha}\alpha \quad C_d = C_{d0} \quad C_m = 0 \quad (6.46)$$

Der Vergleich von Theorie und Messung von skalierten Modellen hat jedoch gezeigt, dass nichtlineare aerodynamische Effekte die niederfrequente Schlag-Schwenk-Torsionsstabilität fundamental beeinflussen können. Dann ist es zum Beispiel besser

$$\begin{aligned} C_l &= C_{l0} + C_{l\alpha}\alpha_a + c_2\alpha_a|\alpha_a| \\ C_d &= C_{d0} + d_1\alpha_a^2|\alpha_a| \\ C_m &= C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha_a \end{aligned} \quad (6.47)$$

zu verwenden, solange man im Bereich anliegender Strömung ohne Ablösungen bleibt. Einige Verfahren verwenden tabellierte nichtlineare Profilbeiwerte, die aus Messungen gewonnen wurden. In einer linearisierten Stabilitätsanalyse werden dann auch die aerodynamischen Beiwerte um ihren Trimmzustand herum linearisiert, was sich als einfacher Weg erwiesen hat.

$$\begin{aligned} C_l &= C_l(\alpha_0) + \frac{\partial C_l}{\partial \alpha}(\alpha_0)\Delta\alpha_a \\ C_d &= C_d(\alpha_0) + \frac{\partial C_d}{\partial \alpha}(\alpha_0)\Delta\alpha_a \\ C_m &= C_m(\alpha_0) + \frac{\partial C_m}{\partial \alpha}(\alpha_0)\Delta\alpha_a \\ \alpha_a &= \alpha_0 + \Delta\alpha_a \end{aligned} \quad (6.48)$$

Der induzierte Durchfluss wird mit der einfachen Strahltheorie berechnet. Dabei wird die Annahme gleichförmigen Durchflusses weit verbreitet verwendet, obwohl dies nur bei ideal verwundenen Blättern im Schwebeflug gerechtfertigt ist. Es wurde jedoch beobachtet, dass kleine Veränderungen im Durchfluss keine nennenswerten Änderungen der Stabilität mit sich bringen.

Die Annahme quasistationärer Aerodynamik scheint für die niederfrequenten Schwingungen ausreichend zu sein. Bei den höherfrequenten Flatterformen wie Schlag-Torsions-Flattern muss man allerdings die instationäre Aerodynamik berücksichtigen, was durch eine Modifikation der zirkulatorischen Beiwerte mit Hilfe einer geeigneten Abmindefunktion geschieht. Dann lauten die aerodynamischen Beiwerte, linearisiert um den Betriebszustand:

$$\begin{aligned} C_l &= C_l(\alpha_0) + \frac{\partial C_l}{\partial \alpha}(\alpha_0) \Delta \alpha_a C(k) \\ C_d &= C_d(\alpha_0) + \frac{\partial C_d}{\partial \alpha}(\alpha_0) \Delta \alpha_a \\ C_m &= C_m(\alpha_0) + \frac{\partial C_m}{\partial \alpha}(\alpha_0) \Delta \alpha_a C(k) \end{aligned} \quad (6.49)$$

Darin ist $C(k)$ die Übertragungsfunktion nach Theodorsen und k die reduzierte Frequenz, siehe Abschn. 5.5.1. Da k von der lokalen Geschwindigkeit abhängt und diese wiederum vom Radius, ist die reduzierte Frequenz ein geometrischer Parameter, der mit zunehmendem Radius kleiner wird. Im Schwebeflug ist für $C(k)$ die Loewy-Funktion (Abschn. 5.6) einzusetzen, da die wiederkehrenden Nachlaufschleppen – vor allem bei kleinem Schubbeiwert – einen Einfluss haben.

Im Vorwärtsflug ist die Theodorsenfunktion womöglich eine bessere Wahl; beide allerdings sind genau genommen nur im inkompressiblen Bereich und auch nur für das zweidimensionale Problem gültig. Grundsätzlich gibt es dabei aber zwei Schwierigkeiten: Zunächst einmal variiert die reduzierte Frequenz im Vorwärtsflug mit dem Radius und dem Azimut (siehe Abb. 5.12a), außerdem ist die Theodorsenfunktion eine komplexe Zahl. Zum ersten Problem kann man die FEM in Ansatz bringen, da sie das Blatt in mehrere Bereiche aufteilt, von denen jeder eine konstante Geschwindigkeit und damit reduzierte Frequenz in sich aufweist, die in der Mitte des Elementes genommen wird. Zum zweiten Problem folgt, dass die Bewegungsgleichungen komplex werden und es keinen einfachen Weg gibt, diese dann zu lösen. Man kann dann den Imaginärteil der Theodorsenfunktion vernachlässigen und nur mit dem Realteil arbeiten, was aber nur in bestimmten Bereichen von reduzierten Frequenzen zulässig ist: bei sehr kleinen und sehr großen.

Eine andere Methode, instationäre Aerodynamik einfließen zu lassen, ist, ein dynamisches Durchflussmodell zu verwenden. Wie in Abschn. 5.8 gezeigt wurde, sind die Komponenten des Durchflusses mit den Störgrößen der Rotorkomponenten gekoppelt. Im Schwebeflug ist das Modell recht einfach und durch

$$\overset{*}{\lambda} + \lambda = \text{sign}(C_T) \kappa^2 \frac{\Delta C_T}{4\lambda_0} \quad (6.50)$$

gegeben. λ ist darin die Störgröße des Durchflusses mit dem stationären Wert λ_0 .

Die dynamische Blattbewegung wird als kleine Auslenkung um eine statische Biegung aufgefasst. Diese statische Auslenkung hat einen wichtigen Einfluss auf die aeroelastische Stabilität; sie wird im Schwebeflug iterativ ermittelt, indem man die nichtlinearen Gleichungen verwendet und z. B. ein Newton-Raphson Verfahren oder eine andere Methode anwendet sowie alle zeitabhängigen Terme weglässt, da es sich um eine statische Lösung handelt. Im nächsten Schritt werden die Eigenschwingungscharakteristika des rotierenden Blattes um dieses Gleichgewicht herum ermittelt. Dazu werden alle aerodynamischen Terme weggelassen sowie die Dämpfungsmatrix zu Null gesetzt. Man erhält dann reelle Eigenwerte. Als letzter Schritt wird die aeroelastische Stabilität untersucht, was normalerweise nur mit den niedrigsten zuvor ermittelten Eigenformen geschieht (etwa sechs von den unendlich vielen). Dabei erhält man ein komplexes Eigenwertproblem, wobei eine negative Dämpfung irgendeiner Eigenform (= positiver Realteil eines Eigenwertes) eine Instabilität des Systems anzeigt.

Eine Korrelation experimentell ermittelten Daten mit analytischen Ergebnissen verschiedener Programme zur Berechnung der Rotorblattstabilität wurde beim Integrated Technology Rotor (ITR) Methodology Workshop (1983) vorgestellt [28]. Ein Beispiel daraus mit einem gelenklosen Rotorblatt wird hier kurz vorgestellt; es wurde die FEM in Anwendung gebracht und das Blatt in sieben Elemente zerlegt. Jedes dieser Elemente hat zwei Endknoten und drei innere Knoten, insgesamt hat jedes Element 15 Freiheitsgrade. Jeder Endknoten hat sechs Freiheitsgrade: axiale Auslenkung u , Schwenkauslenkung und -steigung v, v' , Schlagauslenkung und -steigung w, w' sowie elastische Verwindung Φ . Die Eingabedaten sind im Folgenden aufgelistet:

$$\begin{aligned} \text{RPM} &= 1000 & \gamma &= 5,3 & \sigma &= 0,057 & k_{\text{tip}} &= 0,045 & C_{l\alpha} &= 6 \\ \beta_P &= 0^\circ & \Theta_{tw} &= 0^\circ & x_{ac} &= x_{ea} & x_I &= x_{ea} & C_{d0} &= 0,01 \end{aligned}$$

Die aerodynamischen Beiwerte wurden mit

$$\begin{aligned} C_l &= C_{l\alpha}\alpha_a - 10\alpha_a|\alpha_a| \\ C_d &= C_{d0} + 11,1\alpha_a^4 \\ C_m &= 0 \end{aligned}$$

angesetzt. Die Elemente werden von der Blattspitze beginnend durchnummertiert und haben nachfolgende auf den Radius bezogene Längen; außerdem sind die reduzierten Frequenzen gleich mit angegeben.

Element	1	2	3	4	5	6	7
r	0,95	0,85	0,75	0,65	0,475	0,2225	0,0475
Δr	0,1	0,1	0,1	0,1	0,25	0,255	0,095
k	0,066	0,074	0,084	0,097	0,133	0,283	1,326
$F(k)$	0,8825	0,8699	0,8547	0,8363	0,7922	0,6746	0,5262

Die strukturellen Eigenschaften sind

Element		1 – 6	7
Schlagsteifigkeit	$\frac{EI_x}{m'_0\Omega^2 R^4}$	0,005239	0,1477
Schwenksteifigkeit	$\frac{EI_z}{m'_0\Omega^2 R^4}$	0,1067	0,1866
Torsionssteifigkeit	$\frac{GJ}{m'_0\Omega^2 R^4}$	0,00157	0,00116
Torsionsträgheitsmoment	$\frac{k_m^2}{R^2} = \frac{k_u^2}{R^2}$	0,000647	0,0131
Massenverteilung	$\mu_m = \frac{m'}{m'_0}$	1	12,1

Die Eigenfrequenzen des nicht drehenden Rotorblattes sind

$$\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} = 0,311/\text{rev} \quad \frac{\omega_{\zeta 0}}{\Omega} = 1,32/\text{rev} \quad \frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega} = 2,3/\text{rev}$$

und die strukturelle Schwenkdämpfung ist mit $2D_\zeta\omega_{\zeta 0}/\Omega = 0,0196$ gegeben. Die bei einem kollektiven Steuerwinkel von $\Theta_0 = 0^\circ$ ermittelten Eigenfrequenzen im drehenden System sind

$$\nu_\beta = 1,17/\text{rev} \quad \nu_\zeta = 1,43/\text{rev} \quad \nu_\Theta = 2,97/\text{rev}$$

Die folgenden Veröffentlichungen diskutieren Probleme der aeroelastischen Stabilität im Schwebeflug für verschiedene Rotortypen:

- Gelenklose Rotoren: Hodges und Ormiston (1976) [29]
- Zirkulationsgesteuerte Rotoren: Chopra/Johnson (1979) [30], Chopra (1984) [31]
- Kunstfaserblätter: Hong und Chopra (1985) [32]
- Lagerlose Rotoren: Sivaneri/Chopra (1984) [27], Chopra (1984) [31], Hong/Chopra (1985) [32], Hodges (1979) [33]
- Tiltrotor (JVX, XV-15): Johnson (1975) [34]

Ein Vergleich verschiedener Rechenverfahren mit Messdaten ist in den Abb. 6.10 bis 6.14 dargestellt (aus [28]). Es zeigt sich, dass zum Teil sehr große Unterschiede zwischen den Ergebnissen der Verfahren bestehen.

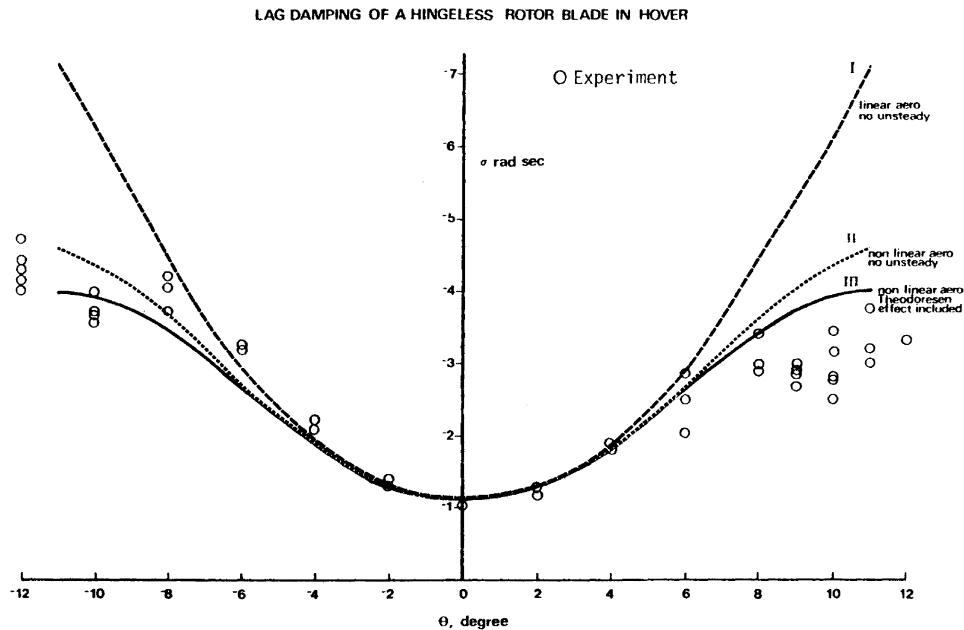


Abb. 6.10 Schwenkdämpfung eines gelenklosen Rotors im Schwebeflug (aus [28])

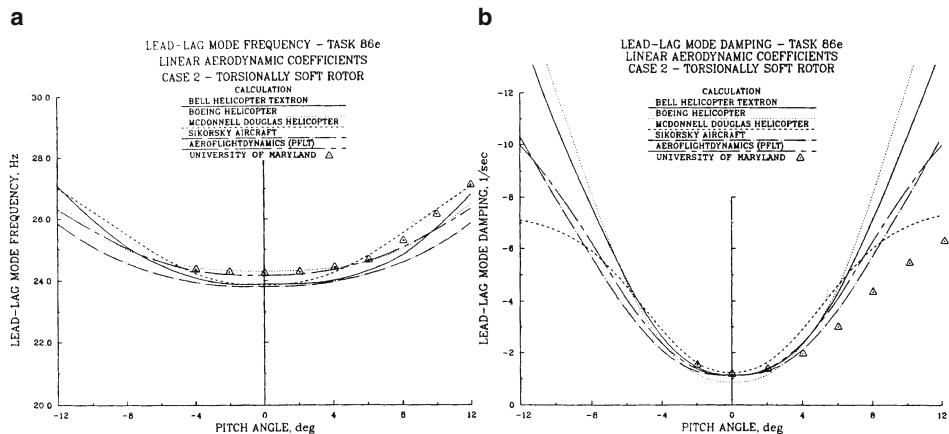


Abb. 6.11 Schwenkfrequenz (a) und -dämpfung (b) (aus [28])

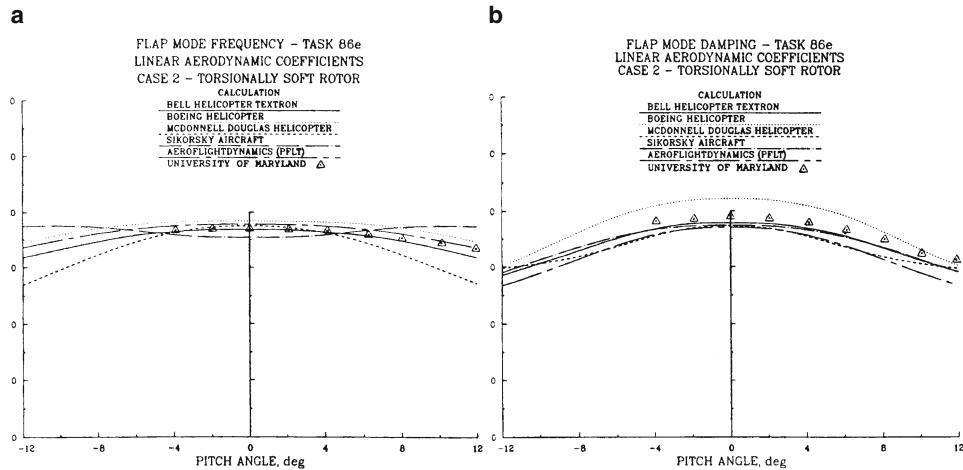


Abb. 6.12 Schlagfrequenz (a) und -dämpfung (b) (aus [28])

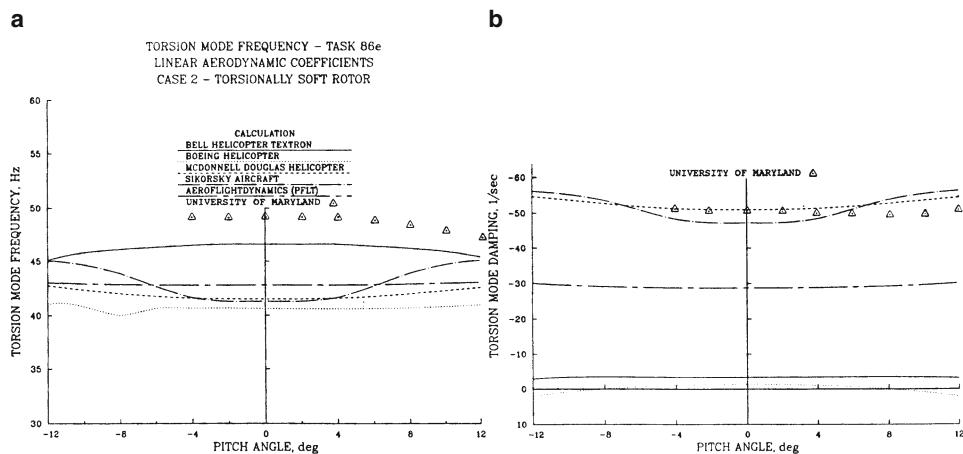


Abb. 6.13 Torsionsfrequenz (a) und -dämpfung (b) (aus [28])

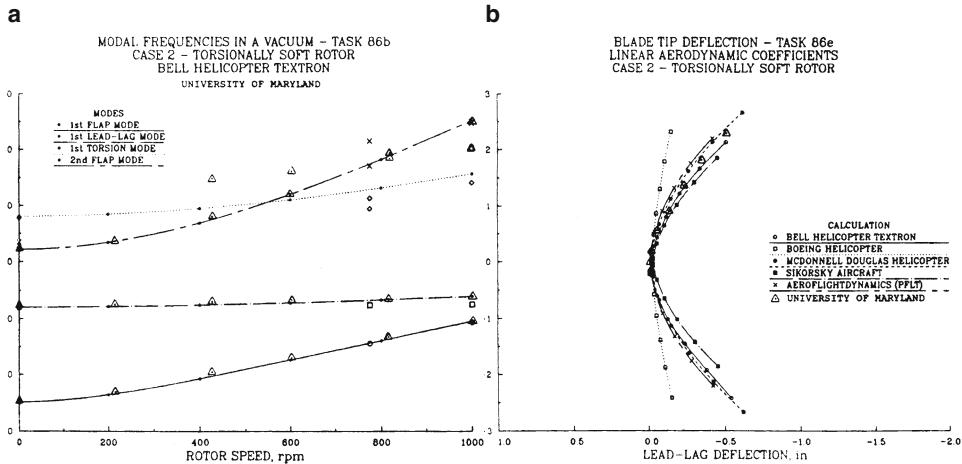


Abb. 6.14 Eigenfrequenzen im Vakuum und Blattspitzenauslenkung (aus [28]). **a** Fandiagramm, **b** Schwenklage

6.5 Die Schlagbewegung im Vorwärtsflug

Das Rotorblatt wird wieder als starr und – der Einfachheit halber – mit einem Schlaggelenk in der Drehachse angenommen und es befindet sich in einem Strömungsfeld, wie es im Vorwärtsflug erzeugt wird. Die dimensionslose Differentialgleichung der Schlagbewegung des starren, gelenkig gelagerten Rotorblattes lautet, wie bereits gezeigt wurde, (Annahme: kleine Gelenksabstände, also $I_b \approx I_\beta$)

$$\ddot{\beta} + v_\beta^2 \beta = \gamma \bar{M}_\beta \quad (6.51)$$

Das darin enthaltene dimensionslose aerodynamische Moment lautet nun

$$\bar{M}_\beta = \frac{1}{\rho C_{l\alpha} c \Omega^2 R^4} \int_0^R y F'_z dy \quad (6.52)$$

und die lokale Vertikalkraft am Blattelement ist durch

$$F'_z = \frac{\rho}{2} V^2 c C_{l\alpha} \left(\Theta - \arctan \frac{V_p}{V_T} \right) \approx \frac{\rho}{2} c C_{l\alpha} (V_T^2 \Theta - V_p V_T) \quad (6.53)$$

definiert. Die Schwierigkeiten resultieren aus denjenigen Geschwindigkeitskomponenten, welche periodische Terme enthalten, und wachsen mit dem Fortschrittsgrad μ .

$$\begin{aligned} \bar{V}_T &= r + \mu \sin \psi \\ \bar{V}_p &= r \dot{\beta} + \lambda + \mu \beta \cos \psi \end{aligned} \quad (6.54)$$

Der Fortschrittsgrad kann für kleine Rotorebenenneigungswinkel α durch

$$\mu = \frac{V_\infty \cos \alpha}{\Omega R} \approx \frac{V_\infty}{\Omega R} \quad (6.55)$$

angenähert werden. Allerdings nimmt im schnellen Vorwärtsflug bei V_{\max} der Rotorneigungswinkel erhebliche Werte von $\alpha < -10^\circ$ an. Somit erhält man für das anregende Moment aus Luftkräften bei Verwendung stationärer Aerodynamik

$$\bar{M}_\beta = \frac{1}{2} \int_0^1 r \left(\bar{V}_T^2 \Theta - \bar{V}_P \bar{V}_T \right) dr \quad (6.56)$$

Unter der vereinfachenden Annahme eines starren unverwundenen Rotorblattes ist der Steuerwinkel entlang des Blattes konstant. Außerdem wird ein konstanter induzierter Durchfluss angenommen, was eine weitere erhebliche Vereinfachung darstellt. Dann folgt

$$\begin{aligned} \bar{M}_\beta = & \left(\frac{1 + \mu^2}{8} + \frac{\mu}{3} \sin \psi - \frac{\mu^2}{8} \cos 2\psi \right) \Theta - \left(\frac{1}{8} + \frac{\mu}{6} \sin \psi \right) \dot{\beta} - \left(\frac{1}{6} + \frac{\mu}{4} \sin \psi \right) \lambda \\ & - \left(\frac{\mu}{6} \cos \psi + \frac{\mu^2}{8} \sin 2\psi \right) \beta \end{aligned} \quad (6.57)$$

Die darin enthaltenen, vom Schlagwinkel und seinen zeitlichen Ableitungen abhängigen Terme werden auf die linke Seite der Bewegungsgleichung der Schlagbewegung gebracht und man erhält:

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} + \gamma \left(\frac{1}{8} + \frac{\mu}{6} \sin \psi \right) \dot{\beta} + \left[v_\beta^2 + \gamma \left(\frac{\mu}{6} \cos \psi + \frac{\mu^2}{8} \sin 2\psi \right) \right] \beta \\ = \gamma \left[\left(\frac{1 + \mu^2}{8} + \frac{\mu}{3} \sin \psi - \frac{\mu^2}{8} \cos 2\psi \right) \Theta - \left(\frac{1}{6} + \frac{\mu}{4} \sin \psi \right) \lambda \right] \end{aligned} \quad (6.58)$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten. Wenn man eine Schlag-Torsionskopplung mit einbezieht, so muss man nur den Steuerwinkel Θ durch $\Theta - k_{p\beta} \beta$ ersetzen und erhält dann

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} + \gamma \left(\frac{1}{8} + \frac{\mu}{6} \sin \psi \right) \dot{\beta} \\ + \left[v_\beta^2 + \gamma \left(\frac{\mu}{6} \cos \psi + \frac{\mu^2}{8} \sin 2\psi \right) + \gamma \left(\frac{1 + \mu^2}{8} + \frac{\mu}{3} \sin \psi - \frac{\mu^2}{8} \cos 2\psi \right) k_{p\beta} \right] \beta \\ = \gamma \left[\left(\frac{1 + \mu^2}{8} + \frac{\mu}{3} \sin \psi - \frac{\mu^2}{8} \cos 2\psi \right) \Theta - \left(\frac{1}{6} + \frac{\mu}{4} \sin \psi \right) \lambda \right] \end{aligned} \quad (6.59)$$

6.5.1 Eigenwerte im Schwebeflug

Zunächst wird der Schwebeflugzustand untersucht, wo der Fortschrittsgrad $\mu = 0$ ist. Dann reduziert sich die Bewegungsgleichung der Schlagbewegung zu

$$\ddot{\beta} + \frac{\gamma}{8}\dot{\beta} + \left(v_{\beta}^2 + \frac{\gamma}{8}k_{p\beta}\right)\beta = \frac{\gamma}{8}\Theta - \frac{\gamma}{6}\lambda \quad (6.60)$$

Die Systemstabilität kann mit Hilfe der Eigenwerte dieser Gleichung bestimmt werden. Diese sind

$$s = -\frac{\gamma}{16} \pm i\sqrt{v_{\beta}^2 + \frac{\gamma}{8}k_{p\beta} - \left(\frac{\gamma}{16}\right)^2} \quad (6.61)$$

Man erhält also zwei konjugiert komplexe Eigenwerte, wovon der Realteil die Dämpfung und der Imaginärteil die Schwingungsfrequenz des gedämpften Systems ω_d beschreibt.

$$\Im(s) = \frac{\omega_d}{\Omega} = \sqrt{v_{\beta}^2 + \frac{\gamma}{8}k_{p\beta} - \left(\frac{\gamma}{16}\right)^2} \quad (6.62)$$

Die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems beinhaltet nur die ersten beiden Terme in der Wurzel

$$v_{\beta e} = \sqrt{v_{\beta}^2 + \frac{\gamma}{8}k_{p\beta}} \quad (6.63)$$

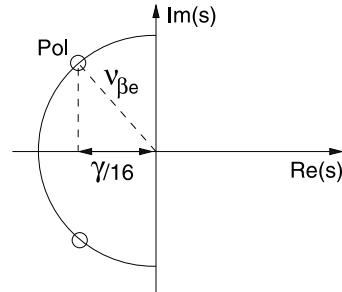
und das Dämpfungsverhältnis D_{β} ist durch

$$D_{\beta} = -\frac{\Re(s)}{|s|} = \frac{\gamma}{16v_{\beta e}} \quad (6.64)$$

definiert. Somit hängt die Dämpfung der Schlagbewegung von der Lockzahl γ ab und ist immer eine positive Zahl. Daher ist auch nie mit einer Instabilität der Schlagbewegung alleine zu rechnen und bei einer typischen Lockzahl von $\gamma = 8$ und ohne Schlag-Torsionskopplung wird dieses Dämpfungsverhältnis sogar $D_{\beta} = 0,5$; ein sehr großes Dämpfungsverhältnis, wenn man sich die rein strukturelle Dämpfung von etwa $D_{\beta} = 0,015$ vor Augen hält. Diese große Dämpfung resultiert aus aerodynamischen Kräften, die durch die Schlagbewegung selbst verursacht werden. So erzeugt eine Schlaggeschwindigkeit nach oben eine Anströmung von oben, die den Anstellwinkel reduziert, also eine Kraft nach unten – entgegen der Schlaggeschwindigkeit – erzeugt. Den Einfluss der Flughöhe auf die Dämpfung findet man in der Lockzahl, welche proportional zur Luftdichte ist. Mit zunehmender Höhe nimmt die Dichte ab und damit auch die aerodynamische Dämpfung. Daher dauern Schwingungsprozesse in großen Höhen länger als in Bodennähe und die Frequenz der gedämpften Schwingung ist größer, wie aus obigen Gleichungen hervorgeht.

Man muss jedoch bedenken, dass diesem Resultat überall anliegende Strömung zugrunde liegt; im Bereich abgelöster Strömung reduziert sich der Auftriebsanstieg $C_{l\alpha}$ erheblich oder ändert gar sein Vorzeichen, was einen erheblichen Einfluss auf die Systemdämpfung haben wird. Umgekehrt wächst die Dämpfung im Bereich des vorlaufenden Blattes insbesondere im Bereich der Blattspitze, da der Auftriebsanstieg in kompressibler Strömung der Prandtl-Glauert'schen Regel folgt und proportional zu $1/\sqrt{1 - M^2}$ wächst.

Abb. 6.15 Eigenwert der Schlagbewegung im Schwebeflug



Bei einem vierblättrigen Rotor werden vier solcher Eigenwerte vorliegen. Diese Eigenwerte werden immer in der linken Hälfte der komplexen Zahlebene liegen, wie in Abb. 6.15 dargestellt ist, da die Eigenwerte immer gut gedämpft sind.

6.5.2 Eigenwerte im Vorwärtsflug

Nun ist die Bewegungsgleichung mit den periodischen Koeffizienten zu lösen. Sie ist im drehenden System aufgestellt und ein möglicher Lösungsweg ist die numerische Lösung unter Zuhilfenahme der Floquet-Theorie. Zusätzlich zu der Abhängigkeit der Lösung von den Parametern v_β , γ und $k_{p\beta}$ im Schwebeflug kommt im Vorwärtsflug noch der Parameter μ hinzu. Im langsamem Vorwärtsflug dominieren die Schwebeflugeigenwerte, während im schnellen Vorwärtsflug der Einfluss von μ von großer Bedeutung ist. Im Folgenden wird $k_{p\beta} = 0$ gesetzt, um die Analyse einfacher zu halten und es werden drei verschiedene Rotortypen untersucht.

- Bei einem typischen gelenkig gelagerten Rotor mit zentralem Schlaggelenk sei $v_\beta = 1$ und $\gamma = 12$ (was sehr leichten Blättern entspricht), so folgen die Eigenwerte der Schlagbewegung im Schwebeflug zu

$$s_H = -\frac{12}{16} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{12}{16}\right)^2} = -\frac{3}{4} \pm i \sqrt{\frac{7}{16}} \quad (6.65)$$

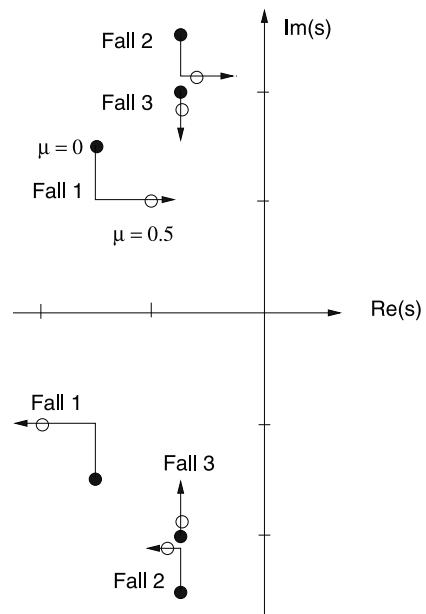
Die Schwingungsfrequenz $\omega_d/\Omega = 0,66/\text{rev}$ ist also in der Nähe von $0,5/\text{rev}$.

- Betrachtet man einen typischen gelenklosen Rotor mit $v_\beta = 1,15$ und $\gamma = 6$ (was mittelschweren Blättern nahe kommt), so lauten die Eigenwerte im Schwebeflug:

$$s_H = -\frac{3}{8} \pm i \sqrt{1,15^2 - \frac{9}{64}} \quad (6.66)$$

Hier ist die Schwingungsfrequenz $\omega_d/\Omega = 1,09/\text{rev}$, also nahe bei $1/\text{rev}$.

Abb. 6.16 Einfluss des Fortschrittsgrades auf die Eigenwerte der Schlagbewegung



3. Bei einer Kombination, also einem gelenkig gelagerten Rotor mit mittelschweren Blättern ($\nu_\beta = 1$ und $\gamma = 6$) folgt

$$s_H = -\frac{3}{8} \pm i \sqrt{1 - \frac{9}{64}} \quad (6.67)$$

Hier liegt die Schwingungsfrequenz mit $\omega_d/\Omega = 0,93/\text{rev}$ zwischen $0,5/\text{rev}$ und $1/\text{rev}$.

Wenn nun ein Fortschrittsgrad hinzukommt, so verändern die Eigenwerte ihre Lage in der komplexen Zahlenebene und bilden mit zunehmendem Fortschrittsgrad Wurzelortskurven, die für die genannten drei Fälle in Abb. 6.16 schematisch gezeigt sind.

Wenn die Schwebeflugeigenwerte nicht nah bei einem Vielfachen von $0,5/\text{rev}$ liegen, wie dies im Fall 3 gegeben ist, so bleibt die Dämpfung unberührt und die Frequenz ändert sich nur mit dem Quadrat des Fortschrittsgrades μ ; eine Änderung von zweiter Ordnung. Wenn wie im Fall 1 die Schwebefluftrfrequenz nahe bei $0,5/\text{rev}$ liegt, so erfahren die Eigenwerte eine Änderung erster Ordnung in μ . Es kann dabei eine Entdämpfung entstehen, die eventuell sogar in eine Instabilität mündet, was eine charakteristische Eigenschaft von Systemen mit periodischen Koeffizienten darstellt.

Für den Fall 2 mit Schwebefluftrfrequenzen nahe bei $1/\text{rev}$ findet man ein ähnliches Verhalten wie im Fall 1. Die Frequenz nimmt mit wachsendem μ ab, während die Dämpfung nahezu ungeändert bleibt. Wenn die Frequenz jedoch ein Vielfaches von $0,5/\text{rev}$ erreicht, so führt eine weitere Vergrößerung des Fortschrittsgrades zu einer Entdämpfung der oberen Wurzel und einer größeren Dämpfung der unteren Wurzel, wobei die Frequenz etwa konstant bleibt.

Will man den Fortschrittsgrad über $\mu = 0,3$ noch weiter vergrößern, so muss man auch Rückanströmgebiete und höhere Schwingungsformen mit einbeziehen. Für weitere Details sehe man bei Johnson nach [3].

6.5.3 Die Eigenwerte des Vorwärtsfluges im nicht drehenden System

Mit Hilfe der FCT werden die Bewegungsgleichungen in das nicht drehende System übertragen. Im Falle eines dreiblättrigen Rotors ist $\beta^{(m)} = \beta_0 + \beta_{1C} \cos \psi_m + \beta_{1S} \sin \psi_m$. Das entstehende Gleichungssystem lautet in Matrixform:

$$\begin{bmatrix} \beta_0^{**} \\ \beta_{1C}^{**} \\ \beta_{1S}^{**} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{8} & 0 & \mu \frac{\gamma}{12} \\ 0 & \frac{\gamma}{8} + \mu \frac{\gamma}{12} \sin 3\psi & 2 - \mu \frac{\gamma}{12} \cos 3\psi \\ \mu \frac{\gamma}{6} & -2 - \mu \frac{\gamma}{12} \cos 3\psi & \frac{\gamma}{8} - \mu \frac{\gamma}{12} \sin 3\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0^* \\ \beta_{1C}^* \\ \beta_{1S}^* \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} v_\beta^2 & \mu^2 \frac{\gamma}{16} \sin 3\psi & -\mu^2 \frac{\gamma}{16} \cos 3\psi \\ \mu \frac{\gamma}{6} & v_\beta^2 - 1 & \frac{\gamma}{8} + \mu^2 \frac{\gamma}{16} \\ +\mu^2 \frac{\gamma}{8} \sin 3\psi & +\mu \frac{\gamma}{6} \cos 3\psi & +\mu \frac{\gamma}{6} \sin 3\psi \\ -\mu^2 \frac{\gamma}{8} \cos 3\psi & -\frac{\gamma}{8} + \mu^2 \frac{\gamma}{16} & v_\beta^2 - 1 \\ & +\mu \frac{\gamma}{6} \sin 3\psi & -\mu \frac{\gamma}{6} \cos 3\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_{1C} \\ \beta_{1S} \end{bmatrix} \quad (6.68)$$

In analoger Weise folgt für den vierblättrigen Rotor mit $\beta^{(m)} = \beta_0 + \beta_{1C} \cos \psi_m + \beta_{1S} \sin \psi_m + \beta_2 (-1)^m$:

$$\begin{bmatrix} \beta_0^{**} \\ \beta_{1C}^{**} \\ \beta_{1S}^{**} \\ \beta_2^{**} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{8} & 0 & \mu \frac{\gamma}{12} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{8} & 2 & \mu \frac{\gamma}{6} \sin 2\psi \\ -\mu \frac{\gamma}{16} & -2 & \frac{\gamma}{8} & -\mu \frac{\gamma}{6} \cos 2\psi \\ 0 & \mu \frac{\gamma}{12} \sin 2\psi & -\mu \frac{\gamma}{12} \cos 2\psi & \frac{\gamma}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0^* \\ \beta_{1C}^* \\ \beta_{1S}^* \\ \beta_2^* \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} v_\beta^2 & 0 & 0 & \mu^2 \frac{\gamma}{8} \sin 2\psi \\ \mu \frac{\gamma}{6} & v_\beta^2 - 1 & \frac{\gamma}{8} + \mu^2 \frac{\gamma}{16} & \mu \frac{\gamma}{6} \cos 2\psi \\ 0 & +\mu^2 \frac{\gamma}{16} \sin 4\psi & -\mu^2 \frac{\gamma}{16} \cos 4\psi & \\ & -\frac{\gamma}{8} + \mu^2 \frac{\gamma}{16} & v_\beta^2 - 1 & \mu \frac{\gamma}{8} \sin 2\psi \\ \mu^2 \frac{\gamma}{8} \sin 2\psi & \mu \frac{\gamma}{6} \cos 2\psi & \mu \frac{\gamma}{6} \sin 2\psi & v_\beta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_{1C} \\ \beta_{1S} \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad (6.69)$$

Es ist bemerkenswert, dass der dreiblättrige Rotor im nicht drehenden System ausschließlich $3/\text{rev}$ -Terme als periodische Koeffizienten aufweist, während der vierblättrige Rotor sowohl $2/\text{rev}$ als auch $4/\text{rev}$ -Terme hat. Daher werden die dynamischen Kräfte im nicht

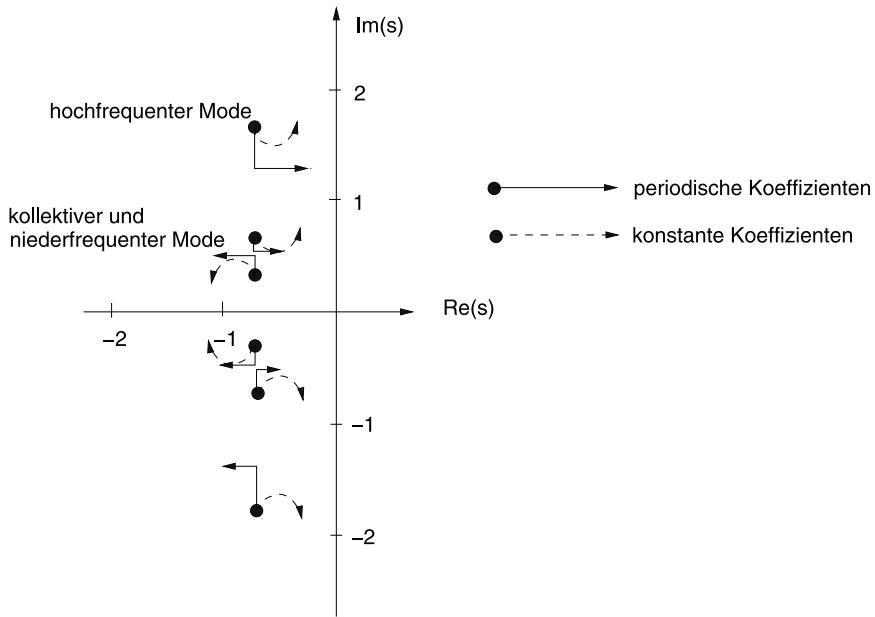


Abb. 6.17 Eigenwerte der Schlagbewegung im Vorwärtsflug, nicht drehendes System

drehenden System bei einem Rotor mit ungerader Blattzahl bei N/rev stattfinden und bei einem Rotor mit gerader Blattzahl bei N/rev und $\frac{N}{2}/\text{rev}$. Als Beispiel sei der dreiblättrige Rotor mit $v_\beta = 1$ und $\gamma = 12$ gegeben. Im drehenden System hat man drei identische Eigenwerte

$$s_R = -\frac{3}{4} \pm i \sqrt{\frac{7}{16}} \quad (6.70)$$

und im nicht drehenden System erhält man ebenfalls drei Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \text{Konuswinkel} \quad & s = s_R \\ \text{hochfrequente Schwingung} \quad & s = s_R + i \\ \text{niederfrequente Schwingung} \quad & s = s_R - i \end{aligned} \quad (6.71)$$

Im Vorwärtsflug kann man nun die Eigenwerte bei verschiedenen Fortschrittsgraden ermitteln. Eine einfache Methode ist, die periodischen Terme zu vernachlässigen und das System als solches mit konstanten Koeffizienten aufzufassen. Bei kleinen Fortschrittsgraden ($\mu < 0,1$) sind dann die Lösungen noch recht gut, insbesondere gilt dies für die niederfrequente Schwingungsform. Diese Methode funktioniert jedoch nicht im drehenden System!

Die zweite Methode ist die numerische Lösung mittels Floquet-Theorie. Auch die Methode des harmonischen Gleichgewichts kann im nicht drehenden System verwendet werden. In Abb. 6.17 ist ein Beispiel mit der Floquet-Theorie gezeigt und wird mit der Näherung konstanter Koeffizienten verglichen. Natürlich ist das Stabilitätsverhalten unabhängig von der Wahl des Referenzsystems.

6.6 Schlag-Schwenk-Flattern im Vorwärtsflug

Nun wird ein Rotorblatt mit zwei Freiheitsgraden angenommen, hier der Schlag- und Schwenkbewegung eines starren Blattes um entsprechende Gelenke, siehe Abb. 6.18. Die Gelenksabstände sind an die Eigenschwingungsfrequenz des zu betrachtenden (ggf. geilenlosen oder lagerlosen) Rotorblattes angepasst und ein Schwenkdämpfer ist vorhanden. Die Bewegungsgleichungen lauten dann im drehenden System

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}^{**} + v_{\beta}^2 \beta - 2\dot{\beta} \dot{\zeta} &= \gamma \overline{M}_{\beta} + \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} \right)^2 \beta_P \\ \ddot{\zeta}^{**} + v_{\zeta}^2 \zeta + 2\dot{\beta} \dot{\zeta} + 2\frac{\omega_{\zeta 0}}{\Omega} D_{\zeta} \dot{\zeta} &= \gamma \overline{M}_{\zeta} \end{aligned} \quad (6.72)$$

Daraus folgen die linearisierten Bewegungsgleichungen zu

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}^{**} + v_{\beta}^2 \beta - 2\beta_T \dot{\zeta} &= \gamma \delta \overline{M}_{\beta} \\ \ddot{\zeta}^{**} + v_{\zeta}^2 \zeta + 2\left(\beta_T \dot{\beta} + \beta_T \dot{\zeta}\right) + 2\frac{\omega_{\zeta 0}}{\Omega} D_{\zeta} \dot{\zeta} &= \gamma \delta \overline{M}_{\zeta} \end{aligned} \quad (6.73)$$

Der Index T gibt an, dass es sich um das (stationäre dynamische) Ergebnis der Bewegung aus der Trimmrechnung handelt. Die aerodynamischen Kräfte werden mit der quasi-stationären Betrachtungsweise ermittelt und die Gebiete mit Rückanströmung vernachlässigt. Dann sind die lokalen Kräfte gemäß Abb. 5.19 folgendermaßen gegeben:

$$\begin{aligned} F'_z &\approx \frac{\rho}{2} C_{l\alpha} c (V_T^2 \Theta - V_T V_P) \\ F'_x &\approx \frac{\rho}{2} C_{l\alpha} c \left(\frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} V_T^2 + V_T V_P \Theta - V_P^2 \right) \end{aligned} \quad (6.74)$$

Die entsprechenden Störgrößen sind

$$\begin{aligned} \delta F'_z &\approx \frac{\rho}{2} C_{l\alpha} c [\delta V_T (2V_T \Theta - V_P) - \delta V_P V_T + \delta \Theta V_T^2] \\ \delta F'_x &\approx \frac{\rho}{2} C_{l\alpha} c \left[\delta V_T \left(2V_T \frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} + V_P \Theta \right) + \delta V_P (V_T \Theta - 2V_P) + \delta \Theta V_T V_P \right] \end{aligned} \quad (6.75)$$

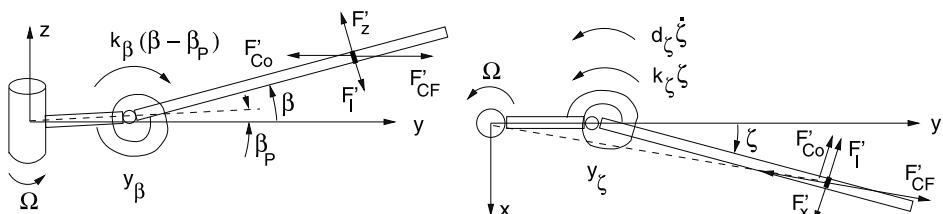


Abb. 6.18 Geometrie des Rotors

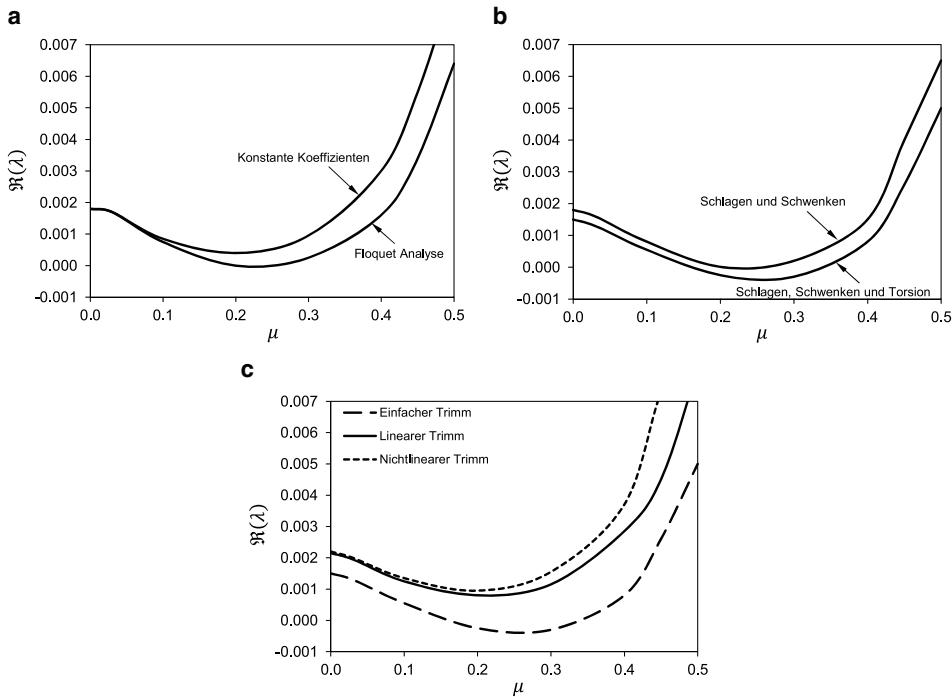


Abb. 6.19 Einfluss verschiedener Parameter auf die Schwenkdämpfung. **a** Annahme konstanter Koeffizienten, **b** Einfluss der Torsion, $v_\Theta = 5/\text{rev}$, **c** Einfluss der Modellierung

Zur Vereinfachung der Analyse wird der Effekt einer radialen Kraft vernachlässigt. Die Strömungskomponenten sind hierin in dimensionsloser Form durch

$$\begin{aligned}\bar{V}_T &= r + \mu \sin \psi \\ \bar{V}_P &= \lambda + r \overset{*}{\beta} + \mu \beta \cos \psi\end{aligned}\quad (6.76)$$

gegeben. Entsprechend folgt für die Störgrößen (ζ ist positiv gegen die Drehrichtung angenommen, siehe Abb. 6.18)

$$\begin{aligned}\delta \bar{V}_T &= -r \overset{*}{\zeta} - \mu \zeta \cos \psi \\ \delta \bar{V}_P &= r \overset{*}{\beta} + \mu \beta \cos \psi \\ \delta \Theta &= -k_{p\beta} \beta - k_{p\zeta} \zeta\end{aligned}\quad (6.77)$$

Die Lösung des Systems von Bewegungsgleichungen besteht nun aus zwei Schritten, erstmals der Trimmrechnung und zweitens der Stabilitätsrechnung.

6.6.1 Stabilität der Schlag- und Schwenkbewegung im Vorwärtsflug

Dazu nimmt man an, dass die Flatterbewegung von kleiner Auslenkung um den Trimmzustand herum ist und der getrimmte Schwenkwinkel sowohl statisch wie dynamisch Null sei. Dann erhält man aus der Trimmrechnung folgenden Steuer-, Schlag- und Schwenkwinkelverlauf: (Index $T = \text{Trimm}$)

$$\begin{aligned}\Theta_T &= \Theta_0 + \Theta_{1C} \cos \psi + \Theta_{1S} \sin \psi \\ \beta_T &= \beta_0 + \beta_{1C} \cos \psi + \beta_{1S} \sin \psi \\ \dot{\beta}_T^* &= -\beta_{1C} \sin \psi + \beta_{1S} \cos \psi \\ \zeta_T &= 0 \\ \dot{\zeta}_T^* &= 0\end{aligned}\tag{6.78}$$

Diese Lösung wird in die Bewegungsgleichungen eingesetzt und auch in die Ausdrücke für die aerodynamischen generalisierten Momente.

$$\begin{aligned}\delta \overline{M}_\beta &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\delta \overline{V}_T (2\overline{V}_T \Theta_T - \overline{V}_P) - \delta \overline{V}_P \overline{V}_T + \delta \Theta \overline{V}_T^2 \right] r dr \\ \delta \overline{M}_\zeta &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\delta \overline{V}_T \left(2\overline{V}_T \frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} + \overline{V}_P \Theta_T \right) + \delta \overline{V}_P (\overline{V}_T \Theta_T - 2\overline{V}_P) + \delta \Theta \overline{V}_P \overline{V}_T \right] r dr\end{aligned}\tag{6.79}$$

Mit deren Ergebnis erhält man ein Gleichungssystem folgender Art:

$$\begin{bmatrix} \beta \\ \zeta \end{bmatrix}^{**} + \mathbf{C}(\psi) \begin{bmatrix} \beta \\ \zeta \end{bmatrix}^* + \mathbf{K}(\psi) \begin{bmatrix} \beta \\ \zeta \end{bmatrix} = 0\tag{6.80}$$

Die darin auftretenden Matrizen sind von der Größe 2×2 und haben die in Gln. 6.81 und 6.82 angegebenen Elemente (alle Elemente mit γ stammen aus der Aerodynamik, alle anderen aus den linearisierten Bewegungsgleichungen).

$$\begin{aligned}c_{11}(\psi) &= \frac{\gamma}{8} + \frac{\gamma}{6} \mu \sin \psi \\ c_{12}(\psi) &= -\frac{\gamma}{8} \beta_T^* - \frac{\gamma}{6} (\lambda + \mu \beta_T \cos \psi) + \frac{\gamma}{4} \Theta_T + \frac{\gamma}{3} \mu \Theta_T \sin \psi - 2\beta_T \\ c_{21}(\psi) &= -\frac{\gamma}{8} \Theta_T - \frac{\gamma}{6} \Theta_T \mu \sin \psi + \frac{\gamma}{4} \beta_T^* + \frac{\gamma}{3} (\lambda + \mu \beta_T \cos \psi) + 2\beta_T \\ c_{22}(\psi) &= \frac{\gamma}{8} \Theta_T \beta_T^* + \frac{\gamma}{6} \Theta_T (\lambda + \mu \beta_T \cos \psi) + \frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} \left(\frac{\gamma}{4} + \frac{\gamma}{3} \mu \sin \psi \right) + 2 \frac{\omega_{\xi_0}}{\Omega} D_\xi\end{aligned}\tag{6.81}$$

$$\begin{aligned}
k_{11}(\psi) &= \frac{\gamma}{8} [k_{p\beta} (1 + \mu^2 - \mu^2 \cos 2\psi) + \mu^2 \sin 2\psi] + \frac{\gamma}{6} \mu \cos \psi + \frac{\gamma}{3} k_{p\beta} \mu \sin \psi + v_\beta^2 \\
k_{12}(\psi) &= \frac{\gamma}{8} [k_{p\xi} (1 + \mu^2 \sin 2\psi) - \mu^2 \beta_T (1 + \cos 2\psi)] - \frac{\gamma}{6} \mu \overset{*}{\beta}_T \cos \psi \\
&\quad + \frac{\gamma}{4} \mu (\mu \Theta_T \sin 2\psi - \lambda \cos \psi) + \frac{\gamma}{3} \mu (k_{p\xi} \sin \psi - \Theta_T \cos \psi) \\
k_{21}(\psi) &= \frac{\gamma}{8} \left[k_{p\beta} \overset{*}{\beta}_T + \mu^2 \sin 2\psi (k_{p\beta} \beta_T - \Theta_T) \right] \\
&\quad + \frac{\gamma}{6} \mu \left[k_{p\beta} \overset{*}{\beta}_T \sin \psi + (k_{p\beta} \beta_T - \Theta_T) \cos \psi \right] \\
&\quad + \frac{\gamma}{6} k_{p\beta} \lambda + \frac{\gamma}{4} \mu [k_{p\beta} \lambda \sin \psi + \mu \beta_T (1 + \cos 2\psi)] \\
&\quad + \left(\frac{\gamma}{3} \overset{*}{\beta}_T + \frac{\gamma}{2} \lambda \right) \mu \cos \psi + 2\overset{*}{\beta}_T \\
k_{22}(\psi) &= \frac{\gamma}{8} \left[\beta_T \Theta_T \mu^2 (1 + \cos 2\psi) + k_{p\xi} \left(\overset{*}{\beta}_T + \beta_T \mu^2 \sin 2\psi \right) \right] \\
&\quad + \frac{\gamma}{6} \left[\left(k_{p\beta} \beta_T + \overset{*}{\beta}_T \Theta_T \right) \mu \cos \psi + k_{p\xi} (\lambda + \mu \overset{*}{\beta}_T \sin \psi) \right] \\
&\quad + \frac{\gamma}{4} \mu \left[\lambda (k_{p\xi} \sin \psi + \Theta_T \cos \psi) + \frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} \mu \sin 2\psi \right] + \frac{\gamma}{3} \frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} \mu \cos \psi + v_\xi^2
\end{aligned} \tag{6.82}$$

Die Stabilität des Systems wird nun aus der Lösung der Bewegungsgleichungen um die Trimmlösung herum gefunden. Zwei mögliche Lösungswege sind:

1. die Annahme konstanter Koeffizienten
2. die Anwendung der Floquet-Theorie

6.6.2 Lösung mit Annahme konstanter Koeffizienten

Die Koeffizienten der Matrizen \mathbf{C} und \mathbf{K} beinhalten periodische Koeffizienten und diese werden als konstante Mittelwerte approximiert, indem man den Mittelwert einer Periode berechnet. Somit folgt

$$c_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_{ij}(\psi) d\psi \quad \text{und} \quad k_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_{ij}(\psi) d\psi \tag{6.83}$$

und dies resultiert in die in Gln. 6.84 und 6.85 angegebenen Koeffizienten ohne periodische Terme. Damit sind die Bewegungsgleichungen mit konstanten Koeffizienten versehen und können als normales Eigenwertproblem gelöst werden.

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{\gamma}{8} \\ c_{12} &= -\frac{\gamma}{12}\mu\beta_{1C} + \frac{\gamma}{6}(\mu\Theta_{1S} - \lambda) + \frac{\gamma}{4}\Theta_0 - 2\beta_0 \\ c_{21} &= -\frac{\gamma}{12}\mu\Theta_{1S} - \frac{\gamma}{8}\Theta_0 + \frac{\gamma}{6}\mu\beta_{1C} + \frac{\gamma}{3}\lambda + 2\beta_0 \\ c_{22} &= \frac{\gamma}{16}(\Theta_{1C}\beta_{1S} - \Theta_{1S}\beta_{1C}) + \frac{\gamma}{12}\mu(\Theta_0\beta_{1C} + \Theta_{1C}\beta_0) \\ &\quad + \frac{\gamma}{6}\Theta_0\lambda + \frac{\gamma}{4}\frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} + 2\frac{\omega_{\xi 0}}{\Omega}D_{\xi} \end{aligned} \quad (6.84)$$

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{\gamma}{8}k_{p\beta}(1 + \mu^2) + v_{\beta}^2 \\ k_{12} &= -\frac{\gamma}{12}\mu\beta_{1S} + \frac{\gamma}{8}[k_{p\xi}(1 + \mu^2) - \mu^2\beta_0] + \frac{\gamma}{6}\mu\Theta_{1C} \\ k_{21} &= -\frac{\gamma}{12}\mu\Theta_{1C} + \frac{\gamma}{6}(\lambda k_{p\beta} + \mu\beta_{1S}) - \frac{\gamma}{4}\mu^2\beta_0 \\ k_{22} &= \frac{\gamma}{32}\mu^2(\Theta_{1S}\beta_{1S} + 3\Theta_{1C}\beta_{1C}) + \frac{\gamma}{12}\mu\Theta_0\beta_{1S} \\ &\quad + \frac{\gamma}{8}\mu(\lambda\Theta_{1C} + \mu\Theta_0\beta_0) + \frac{\gamma}{6}k_{p\xi}\lambda + v_{\xi}^2 \end{aligned} \quad (6.85)$$

6.6.3 Lösung mit Anwendung der Floquet-Theorie

Als ersten Schritt muss man die Floquet'sche Transitionsmatrix berechnen. Dazu transformiert man die Bewegungsgleichungen in ein System erster Ordnung der Form

$$\overset{*}{\mathbf{q}} = [\mathbf{A}(\psi)]\mathbf{q} \quad (6.86)$$

worin folgende Vektoren und Matrizen enthalten sind

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \beta \\ \xi \\ * \\ \beta \\ * \\ \xi \end{bmatrix} \quad [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{K} & -\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (6.87)$$

Um die Floquet'sche Transitionsmatrix $[\mathbf{Q}]$ zu bestimmen, wird das System erster Ordnung durch numerische Integration (z. B. mit einem Runge-Kutta-Verfahren) mit den Einheits-Anfangsbedingungen gelöst. Der Wert der Lösung bei $\psi = 2\pi$ liefert die jeweiligen Elemente der Transitionsmatrix. So erhält man zum Beispiel mit $\beta = 1$ und $\xi = \overset{*}{\beta} = \overset{*}{\xi} = 0$ als Anfangswerte als Lösung nach einer Periode die Elemente $Q_{11}, Q_{21}, Q_{31}, Q_{41}$. Nach der Ermittlung der Transitionsmatrix ermittelt man die

Eigenwerte durch die Gleichung

$$\lambda \mathbf{q} = [\mathbf{Q}] \mathbf{q} \quad (6.88)$$

Wenn der Betrag irgendeines der Eigenwerte, also $|\lambda|$, größer als Eins ist, so ist das System instabil. Beispielhaft sind für eine spezielle Rotorkonfiguration mit den nachfolgenden Charakteristika die Stabilitätsrechnungen für verschiedene Fortschrittsgrade berechnet und die Ergebnisse in Abb. 6.19 dargestellt worden. Zuvor wurde die Trimmlösung ermittelt.

$$\begin{aligned} v_\beta &= 1,15 & v_\zeta &= 1,4 & \gamma &= 5 & \sigma &= 0,05 & C_T/\sigma &= 0,2 \\ k_{p\beta} &= 0 & k_{p\zeta} &= 0 & \beta_P &= 0 & C_{l\alpha} &= 2\pi & C_{d0} &= 0,01 \\ f/A &= 0,01 & z_{cg}/R &= 0,2 & x_{cg} &= 0 & y_{cg} &= 0 & C_{m_{xF}} &= C_{m_{yF}} = 0 \end{aligned}$$

Schlussfolgerungen Solange der Fortschrittsgrad klein ist ($\mu < 0,1$), liefert die Methode der Annahme konstanter Koeffizienten ausreichend genaue Ergebnisse; bis $\mu = 0,3$ noch gute Näherungen. Die Schlag-Schwenkstabilität im Vorwärtsflug hängt sehr stark von der Trimmlösung ab. So sind die Ergebnisse einer Schubtrimmung sehr unterschiedlich von denen der Momententrimmung. Außerdem wird bei größeren Fortschrittsgraden der Rotordurchfluss erheblich vom Rumpf beeinflusst, so dass die Rumpfumströmungseffekte mit in die Rechnung einfließen müssen. Die impliziten periodischen Komponenten (aus Steuerung und Schlagbewegung) sowie die expliziten (aus Fortschrittsgrad und Azimut) sind in der Stabilitätsanalyse der Schlag-Schwenkbewegung von Bedeutung. Der Torsionsfreiheitsgrad hat einen großen Einfluss auf die Stabilität, wenn die Torsionseigenfrequenz relativ gering ist.

6.6.4 Gekoppelte Trimmung

Die ungekoppelte Trimmung des Hubschraubers liefert Steuerwinkel und Lagewinkel sowie Startwerte für die Iteration der gekoppelten Trimmung. Die stationäre dynamische Blattbewegung erhält man aus der Berechnung der zeitabhängigen Blattbewegung mit Hilfe der FEM in Zeit-Methode, den Modalgleichungen und der harmonic balance Methode oder durch numerische Integration. Die gekoppelte Trimmung des Hubschraubers besteht aus der iterativen Bestimmung der Steuerwinkel und Lagewinkel, wobei die nichtlinearen Gleichgewichtsbeziehungen des Hubschraubers erfüllt werden müssen. Die Hubschraubertrimmung und Blattdynamik werden iterativ als eine gekoppelte Lösung mit Hilfe z. B. der Newton'schen Methode berechnet.

6.7 Schlussfolgerungen

- Aeroelastische Probleme von Hubschrauberrotoren sind sehr unterschiedlich von denen der Starrflügler, da die Zentrifugalkräfte immer eine wichtige Rolle spielen, oft auch Corioliskräfte. Beide gibt es beim Starrflügler nicht. Außerdem sind die aerodyn-

mischen Kräfte sehr viel schwieriger zu berücksichtigen, da die reduzierten Frequenzen sowohl vom Radius wie auch vom Azimut abhängen.

- Das Schlag-Schwenk-Flattern ist eine Instabilität, die eine Nähe der Eigenfrequenzen der Schlag- und Schwenkbewegung erfordert. Da die Schlageigenfrequenz grundsätzlich $\geq 1/\text{rev}$ ist, erfordert dies einen ausgesprochen schwenksteifen Rotor, um auch die Schwenkeigenfrequenz so groß zu bekommen. Dies ist eher bei Propellern oder Windenergierotoren der Fall. Außerdem tritt sie nur bei sehr großem Rotorschub auf. Dies ist eine schwache Flatterform mit Kopplungstermen nur in der Dämpfungsmatrix, die aus Corioliskräften und aerodynamischen Kräften besteht. Sie kann mit einem geringen Maß an Schwenkdämpfung stabilisiert werden. Da die Instabilität eine Frequenz in der Nähe von $1/\text{rev}$ hat, reicht quasistationäre Aerodynamik.
- Die Torsionsdivergenz tritt auf, wenn die Massenachse eine zu große Ablage von der aerodynamischen Achse hat. Zentrifugalkräfte haben eine Komponente normal zur Drehachse des Blattes, sobald ein Schlagwinkel entsteht. Bei Rücklage der Massenachse erzeugt diese Kraft ein aufnickendes Moment, die entstehende Torsion des Blattes einen vergrößerten Anstellwinkel, dieser mehr Auftrieb, was den Schlagwinkel und damit die vorgenannte Komponente der Fliehkraft vergrößert. Nur die Torsionssteifigkeit steht dem Moment entgegen. Die Torsionsdivergenz ist ein relativ langsamer Prozess und daher reicht stationäre Aerodynamik zur Behandlung aus.
- Das Schlag-Torsions-Flattern hat ebenfalls die Ablage der Massenachse von der aerodynamischen Achse als wichtigsten Parameter. Kopplungen zwischen Schlägen und Torsion findet man in der Trägheits-, Dämpfungs- und Federmatrix. Die Flatterfrequenz hängt stark von der Torsioneigenfrequenz und damit der Torsionssteifigkeit ab und erfordert instationäre Aerodynamik. Wie bei der Torsionsfrequenz gilt: je größer die Torsionssteifigkeit, umso größer der tolerierbare Abstand der Massenachse.
- Ein Sonderfall ist das Schlag-Torsions-Flattern des Zweiblattrotors, da wegen der starren Verbindung der Rotorblätter untereinander die Massenträgheitsmomente größer sind und über den Vorkonuswinkel das Massenträgheitsmoment der Schlagbewegung in das der Torsion und der Schwenkbewegung einkoppelt. Die Steifigkeit der Blattwinkelsteuerung als wichtige Komponente der Torsionssteifigkeit muss groß sein, um diese Instabilität zu beseitigen.
- Stall-Flattern stellt eine Sonderform von Instabilitäten der Hubschrauberrotoren dar. Es tritt nur im schnellen Flug mit hohem Rotorschub und dann auch nur auf der rücklaufenden Seite auf, da dort große Anstellwinkel mit Strömungsablösung erreicht werden. Die dabei auftretenden aerodynamischen Nickmomente können das Blatt zu instabilen Torsionsschwingungen anfachen, die jedoch auf den Bereich der rücklaufenden Seite beschränkt bleiben, da auf der vorlaufenden Seite mit den dortigen kleinen Anstellwinkeln wieder aerodynamische Dämpfung vorliegt. Die Torsionsschwingungen führen zu periodischen Strömungsablösungen, die negative aerodynamische Dämpfung mit sich bringen und damit die Schwingung anfachen. Nur sehr große Torsionsstei-

figkeit oder Vermeidung dieser Flugsituationen hilft, diese Flatterform zu vermeiden. Da sie auf die rücklaufende Seite des Rotors begrenzt bleibt, ist sie nur mit großen dynamischen Lasten verbunden, der Rotor bleibt aber – wenn auch eingeschränkt – steuerbar.

- Im Schwebeflug haben alle Flatterformen konstante Koeffizienten in den Systemmatrizen, während im Vorwärtsflug die aerodynamischen Komponenten periodische Terme aufweisen. Dies macht die Lösung im Vorwärtsflug ungleich schwieriger. Im Flugbereich konventioneller Hubschrauber bis $\mu = 0,3$ kann man die Koeffizienten über eine Rotordrehung mitteln und erhält dann wieder konstante Koeffizienten. Für noch größere Fortschrittsgrade muss dann allerdings die Floquet-Theorie oder die numerische Simulation verwendet werden.

6.8 Übungsaufgaben

6.8.1 Schlag-Schwenk-Flattern

1. Begründen Sie folgende Aussagen:
 - a) Flattern ist etwas anderes als Resonanz.
 - b) Schlag-Schwenk-Flattern ist grundsätzlich ein nichtlineares Phänomen.
 - c) Die Schlag- und Schwenkbewegung sind durch Dämpfungsterme gekoppelt, die bei höherem Schub bedeutender werden.
 - d) Für das Schlag-Schwenk-Flattern ist eine Δ_3 -Kopplung wesentlich unbedeutender als eine Schwenk-Torsionskopplung Δ_4 .
 - e) Gelenklose Rotoren sind für Schlag-Schwenk-Flattern anfälliger.
 - f) Schlagen sie vor, wie ein Blatt im Hinblick auf Schlag-Schwenk-Flattern verbessert werden könnte.
2. Die Eigenfrequenzen bei stehendem Rotor wurden mit $f_{\beta 0} = 2,5 \text{ Hz}$ in der Schlagbewegung und mit $f_{\zeta 0} = 5 \text{ Hz}$ in der Schwenkbewegung gemessen. Ermitteln Sie, ob das Blatt stabil in Hinsicht auf Schlag-Schwenk-Flattern im Schwebeflug ist. Gegeben sind:

Lockzahl	$\gamma = 8$
Flächendichte	$\sigma = 0,05$
Drehzahl	RPM = 300
spezifischer Schubbeiwert	$C_T/\sigma = 0,25$

3. Die Profilbeiwerte können generell folgendermaßen beschrieben werden:

$$\begin{aligned} C_l &= C_{l0} + C_{l\alpha}\alpha \\ C_d &= C_{d0} + C_{d\alpha}\alpha^2 \end{aligned} \tag{6.89}$$

- a) Stellen sie die linearisierten aerodynamischen Kräfte $\delta F'_z$ und $\delta F'_x$ auf.
- b) Zeigen sie die Ähnlichkeit zwischen diesem Fall und der konventionellen Annahme mit $C_d = C_{d0}$, wenn $C_{d\alpha} \ll C_{l\alpha}$ angenommen wird, für den Fall der Schlag-Schwenk-Gleichungen.
4. Leiten sie die Schlag-Schwenk-Flattergleichungen für einen ideal verwundenen Rotor mit folgendem Koppelterm her: $\Delta\Theta = k_{p\zeta}^* \zeta$.

6.8.2 Torsionsdivergenz, Schlag-Torsions-Flattern

1. Begründen Sie folgende Aussagen:
 - a) Bei der Torsionsdivergenz von Rotoren ist die Lage der elastischen Achse unbedeutend.
 - b) Die Hersteller machen große Anstrengungen, um die Massenachse und die elastische Achse auf die $c/4$ -Linie zu bekommen.
 - c) Schlag-Torsions-Flattern ist unabhängig vom Schub des Rotors.
 - d) Durch eine einfache Abschätzung wurde ein Rotorblatt als instabil bezüglich des Schlag-Torsions-Flatters befunden. Die Flatterfrequenz wurde zu 15 Hz berechnet. Während des Schwebeflugtests war der Rotor bei einer Drehzahl von 300 RPM stabil. Als die Drehzahl jedoch geringfügig reduziert wurde, begann er, wild zu schütteln und instabil zu sein.
 - e) Während eines Windkanaltests eines Rotors wurde eine große Amplitude eines Dehnungsmessstreifens an der Blattwurzel gemessen. Wie würden Sie herausfinden, ob es sich um einen Flatterfall oder um eine normale dynamische Antwort auf äußere Kräfte handelt? Falls es Flattern sein sollte, welcher Art ist es?
2. Folgende Daten eines gelenkigen Rotors sind gegeben:

Schlaggelenksabstand	$e_\beta = 0,06$
Lockzahl	$\gamma = 8$
Verhältnis der Träigkeitsterme	$I_f^* = 0,001$
Radius	$R = 6 \text{ m}$
Profiltiefe	$c = 0,3 \text{ m}$
Torsionsfrequenz	$f_{\Theta 0} = 14 \text{ Hz}$
elastische Achse	$x_{ea}/c = 0,35$
Massenachse	$x_I/c = 0,35$
Drehzahl	RPM = 420

- a) Berechnen Sie, ob das Blatt frei von Torsionsdivergenz ist.
- b) Ist das Blatt frei von Schlag-Torsions-Flattern?

Literatur

1. H. Reissner, *Neuere Probleme aus der Flugzeugstatik*, Zeitschrift für Flugwissenschaften und Motorluftschiffahrt, Vol. 17, no. 7, pp. 137–146, 179–192, 384–393, 1926
2. A.G. Von Baumhauer, C. Koning, *On the Stability of Oscillations of an Aeroplane Wing*, NACA TM 223, 1923
3. A.R. Collar, *The First Fifty Years of Aeroelasticity*, Aerospace, Vol. 2, no. 5, pp. 12–20, 1978
4. Ficker, *Flatterrechnung Fa 223*, ZWB, LFA Bericht, 1940
5. R.H. Prewitt, R.A. Wagner, *Frequency and Vibration Problems of Rotors*, Journal of the Aero-nautical Sciences, Vol. 7, No. 10, pp. 444–450, 1940
6. H. Focke, *Fortschritte des Hubschraubers*, Schriften der deutschen Akademie der Luftfahrtfor-schung, Heft 1070/43 g, 1943
7. R.P. Coleman, *Theory of Self-Excited Mechanical Oscillations of Hinged Rotor Blades*, NACA ARR 3G29, 1943
8. N.D. Ham, *Helicopter Blade Flutter*, AGARD Report 607, 1973
9. W. Johnson, *CAMRAD II, Comprehensive Analytical Model of Rotorcraft Aerodynamics and Dynamics*, Johnson Aeronautics, 1992
10. B. Benoit, A.-M. Dequin, K. Kampa, W. von Grünhagen, P.-M. Basset, B. Gimonet, *HOST, a General Helicopter Simulation Tool for Germany and France*, AHS 56th Annual Forum, Virgi-nia Beach, VA, Mai 2–4, 2000
11. P.P. Friedmann, S.B.R. Kottapalli, *Coupled Flap-Lag-Torsional Dynamics of Hingeless Rotor Blades in Forward Flight*, Journal of the AHS, Vol. 24, No. 4, pp. 28–36, 1975
12. I.-C. Shih, A.M. Spence, R. Celi, *Semi-Analytical Sensitivity of Floquet Characteristic Ex-pONENTS with Application to Rotary-Wing Aeroelasticity*, Journal of Aircraft, Vol. 33, No. 2, pp. 322–330, 1996
13. I. Chopra, G. Bir, *University of Maryland Advanced Rotor Code: UMARC*, AHS Aeromechanics Specialists Conference, San Francisco, CA, Jan. 19–21, 1994
14. K.H. Hohenemser, P.W. Heaton, Jr., *Aeroelastic Instability of Torsionally Rigid Helicopter Blades*, Journal of the AHS, Vol. 12, No. 2, pp. 1–3, 1967
15. E.J. Routh, *A Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies*, 4th ed., Macmillan, Lon-don; *Part I: The elementary part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies*, 385 p., 1882; *Part II: The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies*, 343 p., 1884
16. A. Hurwitz, *Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt*, Mathematische Annalen Nr. 46, Leipzig, pp. 273–285, 1895
17. R.P. Coleman, C.W. Stempin, *A Preliminary Theoretical Study of Aerodynamic Instability of a Two-Bladed Helicopter Rotor*, NACA RM L6H23, 1946
18. A.R.S. Bramwell, D.E.H. Balmford, G.T.S. Done, *Bramwell's Helicopter Dynamics*, ISBN 0 750 65075 3, Butterworth-Heinemann Ltd., 2001
19. R.M. Segel, D.S. Jenney, W. Gerdes, *Final Report NH-3A (Sikorsky S-61f) Flight Test Program*, Sikorsky Aircraft Report SER-611344, 1969
20. F.O. Carta, *An Analysis of the Stall Flutter Instability of Helicopter Rotor Blades*, Journal of the American Helicopter Society, Vol. 12, No. 4, pp. 1–18, 1967
21. I. Chopra, *Dynamic Analysis of Constant-Lift and Free-Tip Rotors*, Journal of the American Helicop-ter Society, Vol. 28, no. 1, pp. 24–33, 1983
22. G.H. Saunders, *Recent Developments in the Dynamics of Advanced Rotor Systems*, NASA TM 86669, 1985
23. P. Friedmann, *Recent Developments in Rotary Wing Aeroelasticity*, Journal of Aircraft, Vol. 14, No. 11, pp. 1027–1041, 1977

24. P. Friedmann, *Formulation and Solution of Rotary-wing Aeroelastic Stability and Response Problems*, VERTICA, Vol. 7, No. 2, pp. 101–141, 1983
25. R.A. Ormiston, *Investigation of Hingeless Rotor Stability*, Vertica, Vol. 7, No. 2, pp. 143–181, 1983
26. N.T. Sivaneri, I. Chopra, *Dynamic Stability of a Rotor Blade Using Finite Element Analysis*, AIAA Journal, Vol. 20, no. 5, pp. 716–723, 1982
27. N.T. Sivaneri, I. Chopra, *Finite Element Analysis for Bearingless Rotor Blade Aeroelasticity*, Journal of the AHS, Vol. 29, No. 2, pp. 42–51, 1984
28. *Integrated Technology Rotor Methodology Assessment Workshop*, NASA CP 10007, 1983
29. D.H. Hodges, R.A. Ormiston, *Stability of Elastic Bending and Torsion of Uniform Cantilever Rotor Blades in Hover with Variable Structural Coupling*, NACA TND 8192, 1976
30. I. Chopra, W. Johnson, *Flap-lag-torsion Aeroelastic Stability of Circulation Controlled Rotors*, Journal of the AHS, Vol. 23, No. 2, pp. 37–46, 1979
31. I. Chopra, *Aeroelastic Analysis of an Elastic Circulation-Controlled Rotor Blade in Hover*, VERTICA, Vol. 8, No. 4, pp. 353–371, 1984
32. C.H. Hong, I. Chopra, *Aeroelastic Stability Analysis of a Composite Blade*, Journal of the AHS, Vol. 30, No. 2, pp. 57–67, 1985
33. D.H. Hodges, *An Aeromechanical Stability Analysis for Bearingless Rotor Helicopters*, Journal of the AHS, Vol. 24, No. 1, pp. 2–9, 1979
34. W. Johnson, *Analytical Modeling Requirements for Tilting Proprotor Aircraft Dynamics*, NASA TND-8013, 1975



Boden- und Luftresonanz im Schwebeflug

7

7.1 Einleitung

Mit Bodenresonanz (engl. ground resonance) wird eine dynamische Instabilität bezeichnet, die aus der Kopplung der regressiven Schwenkbewegung des Rotorblattes mit der translatorischen Rotorkopfbewegung in der Drehebene entsteht. Sie tritt meist auf, wenn der Hubschrauber auf dem Boden steht und der Rotor vom Stillstand auf Betriebsdrehzahl gebracht wird; kann aber auch nach der Landung beim Herunterfahren der Drehzahl in Erscheinung treten. Da die Schwenkeigenfrequenz von der Drehfrequenz abhängt, die Rumpfeigenfrequenzen jedoch nicht, gibt es Drehzahlbereiche, in denen eine Frequenznähe von Rumpf- und Schwenkeigenfrequenz auftritt und dann die Bedingungen für Bodenresonanz gegeben sind. Da Luftkräfte keine nennenswerte Bedeutung haben, tritt diese Instabilität auch im Vakuum auf. In der Regel wird der Drehflügler zerstört, wenn Bodenresonanz auftritt (siehe Abb. 7.1) und die einzige Möglichkeit, ihr zu entgehen, ist das sofortige Abheben vom Boden.

Die explosive Charakteristik der Bodenresonanz liegt in der großen kinetischen Energie begründet, die im drehenden Rotor enthalten ist. Eine von der Schwenkbewegung verursachte Unwucht regt den Rumpf zu Schwingungen an, die sehr schnell große Amplituden erreichen und die Belastungsgrenzen vom Rotormast, den Getriebestreben und des Landegestells überschreiten. Die von der Taumelscheibe auf die Pilotensteuer übertragenen Kräfte werden so groß, dass der Pilot den Steuernüppel nicht mehr halten kann. Die Rotorblätter können dabei sowohl den Heckausleger als auch das Cockpit zerschlagen und das Ergebnis nur wenige Sekunden nach Beginn ist in der Regel die totale Zerstörung des Hubschraubers, was ebenfalls oft den Tod der Insassen bedeutet. Allein in den USA sind von 1990 bis 2005 34 Bodenresonanzfälle aufgetreten, wobei nur diejenigen mit Personenschäden erfasst sind. Damit ist die Bodenresonanz auch heute noch ein gefürchtetes Ereignis. Da die Hubschrauber heute mit ausreichender Sicherheit hinsichtlich Bodenresonanz gebaut werden, liegen die Gründe des Auftretens meist in schlechter Wartung der Dämpfer, Federungen und des Fahrwerks oder durch den Betrieb auf ungeeignetem Boden.



Abb. 7.1 Bodenresonanz früher Drehflügler: Sikorsky R5, 1946. © U.S. Air Force Helicopter Pilot Association

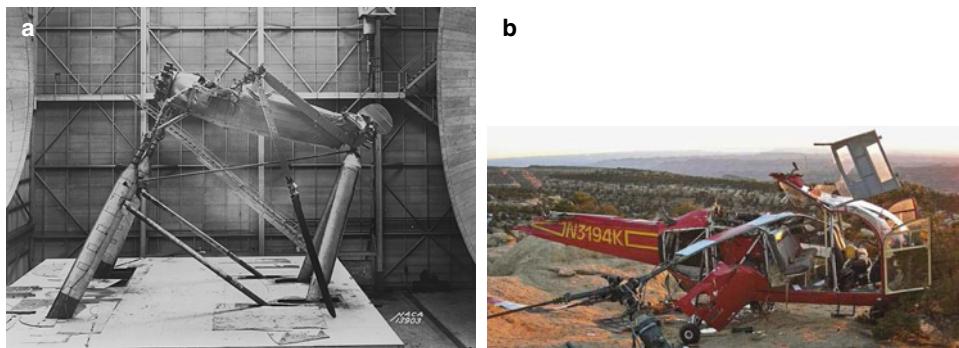


Abb. 7.2 Auswirkung von Bodenresonanz auf heutige Hubschrauber. **a** Kellet YG-1 im NACA Langley Windkanal, 1937. © Smithsonian Institution National Air and Space Museum, **b** Alouette III, 2005. © Alicia Tanrath

begründet. Weitere Beispiele von durch Bodenresonanz zerstörten Hubschraubern sind in Abb. 7.2 zu finden.

Das Phänomen der Bodenresonanz wurde beobachtet, seitdem Drehflügler gebaut wurden. Insbesondere bei den Autogyros, die ab ca. 1930 vermarktet wurden, trat dieses Problem häufiger auf, wurde zunächst aber nicht als eigenständiges Problem einer mechanischen Instabilität erkannt. Es wurde mit der Umschreibung *rotor roughness* bezeichnet und in der Regel nicht als Problem der Konstruktion, sondern meist als Fehler des Piloten interpretiert. Erst als bei der NACA Langley während eines Autogyrotests im Windkanal ohne Piloteneinwirkung Bodenresonanz auftrat und das Gerät zerstörte, erkannte man, dass es sich um ein physikalisches Phänomen handelte und analysierte es systematisch, was im Wesentlichen in den Arbeiten von Coleman dokumentiert ist [1, 2].

Erstmals wurde diese Möglichkeit zur Instabilität auf rechnerischem Wege von Cigling, einem Mitarbeiter von Focke, zu Beginn der 40er Jahre entdeckt und der Nachweis

auch der Bedeutungslosigkeit der Luftkräfte bereits damals durch einen Großversuch mit Metallstangen als Ersatz für die Rotorblätter erbracht, siehe [3]. Unmittelbar danach trat dieses Phänomen an einer im Windkanal von Chalais-Meudon gefesselten Fa-330 auf. Auch Prewitt 1940 in England [4] und Hohenemser 1943 in Deutschland [5] beschäftigten sich mit dieser Problematik. Bekannt wurde die analytische Behandlung jedoch im Wesentlichen durch Coleman und Feingold, die zwischen 1942 [1] und 1947 daran arbeiteten und entsprechend heißt das zugehörige Diagramm auch Coleman-Diagramm. Die Zusammenfassung dieser Arbeiten erfolgte 1958 [2].

Bei diesem Phänomen liegt eine *Resonanz* vor, weil im Falle der Instabilität eine der Schwenkfrequenzen im nicht drehenden System genau die Eigenfrequenz der Hubschrauberzelle mit Fahrwerk trifft. Eigentlich ist Resonanz ein hier fälschlicherweise gebrauchter Begriff, denn Resonanz bedeutet zwar eine Schwingung mit großer Amplitude und entsprechend hohen Lasten, stellt aber die stabile dynamische Antwort eines gedämpften Systems dar, während Bodenresonanz eine selbsterregte Instabilität durch Kopplung zweier schwingungsfähiger Systeme ist. *Bodenresonanz* wird sie genannt, weil diese Instabilität nur auftritt, solange der Hubschrauber Grundberührungen hat. Darin liegt auch der Grund, dass das Fahrwerk und die Zellenstruktur für diese dynamische Erscheinung wichtig sind. Sie wird auch mechanische Instabilität genannt, da die aerodynamischen Kräfte keine nennenswerte Rolle spielen und generell ist die Bodenresonanz ein Problem der schwenkweichen Rotoren. Bei schwenksteifen Rotoren mit einer Schwenkeigenfrequenz von $v_\zeta > 1$ tritt sie nicht auf.

Die Bodenresonanz ist meist eine explosive Instabilität und sie wird in jedem Falle zur Zerstörung des Hubschraubers führen. Daher ist eine der Hauptüberlegungen bei der Rotor- und Fahrwerksauslegung, dieses Phänomen zu vermeiden, da der wesentliche Anteil der Rumpfeigenfrequenzen und der Rumpfdämpfung vom Fahrwerk herrührt. Je nach Bodenbeschaffenheit kann aber auch der Boden selbst die effektive Federwirkung und damit Eigenfrequenz der Rumpfzelle beeinflussen: ein vom Regen aufgeweichter Boden ist nachgiebiger als Beton und auch ein Schiffssdeck, das in der Regel aus Metallplatten besteht, wirkt wie eine effektive Feder unter dem Hubschrauberfahrwerk.

Die Auswahl der Drehfrequenz (aber auch die strukturelle Auslegung der Rotorblätter hinsichtlich ihrer Eigenfrequenzen) erfolgt im Hinblick auf Vermeidung von Resonanzen bei oder nahe bei der Nenndrehzahl und der Einbau eines Schwenkdämpfers ist außerordentlich hilfreich, um die Bodenresonanz zu vermeiden. Daher haben auch die meisten der fliegenden Hubschrauber mechanische Dämpfer im Bereich des Schwenkgelenkes. Wenn diese Art der Instabilität im Fluge auftritt, nennt man sie Luftresonanz (engl. air resonance, siehe Abschn. 7.5) und diese tritt häufiger bei gelenklosen Rotoren mit relativ weichem Blatthals in Schwenkrichtung auf, also mit Schwenkeigenfrequenzen, die unter 1/rev liegen.

In der Bodenresonanz koppeln die translatorischen Rumpffreiheitsgrade mit den Schwenkfreiheitsgraden, also spielen die beteiligten Rumpfmassen in Längs- und Querrichtung eine Rolle, die ungefähr gleiche Größenordnung haben. Bei der Luftresonanz

koppeln die rotatorischen Freiheitsgrade des Rumpfes mit den Schwenkfrequenzgraden, daher spielen hier die Rumpfträgheitsmomente um die Roll- und Nickachse eine Rolle und diese sind in der Regel sehr verschieden voneinander. Als Faustregel kann man das Nickträgheitsmoment etwa dreimal größer als das Rollträgheitsmoment annehmen, was in der großen Länge des Hubschrauberrumpfes relativ zu seiner Breite und seiner Höhe seine Begründung findet.

7.2 Die Schwenkbewegung im nicht drehenden System

Die der Bodenresonanz zugrunde liegenden Bewegungsgleichungen des Rumpfes und der Rotorblätter kann man entweder im drehenden Rotorsystem (dies erfordert die Transformation der Rumpfbewegung ins drehende System) oder im nicht drehenden Rumpfsystem (dies erfordert die Transformation der Rotorblattbewegung ins Rumpfsystem) aufstellen. Um die Schwenkbewegung in das nicht drehende System zu transformieren, bedient man sich der Fourier Koordinaten Transformation (FCT), siehe Abschn. 3.2. Diese bildet die Blattbewegung vom drehenden System auf das nicht drehende System ab und stellt eine lineare Relation der N Freiheitsgrade des einen Systems auf ebenso viele N Freiheitsgrade des anderen Systems dar. Es sei $\zeta^{(m)}$ die Schwenkbewegung des m -ten Blattes im drehenden System und ζ_0 , ζ_{nC} , ζ_{nS} , $\zeta_{N/2}$ die entsprechenden Bewegungen im nicht drehenden System. Bei einem N -blättrigen Rotor ist die Schwenkbewegung im drehenden System durch

$$\zeta^{(m)} = \zeta_0 + \sum_n (\zeta_{nC} \cos n\psi_m + \zeta_{nS} \sin n\psi_m) + \zeta_{N/2}(-1)^m \quad m = 1, \dots, N \quad (7.1)$$

gegeben, wobei die Summe von der Blattzahl abhängt und der letzte Term nur bei geraden Blattzahlen N auftritt:

$$N \text{ ungerade: } \sum_n = \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} \quad N \text{ gerade: } \sum_n = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} \quad (7.2)$$

Der Azimut des m -ten Blattes ist $\psi_m = \psi + (m-1)\Delta\psi$ mit dem Abstand $\Delta\psi = 2\pi/N$ zwischen den Blättern und dem Referenzazimut $\psi = \Omega t$. Die Bewegungen im nicht drehenden System lauten dann mit Hilfe der FCT

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \zeta^{(m)} & \text{und} & \zeta_{N/2} &= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \zeta^{(m)} (-1)^m \\ \zeta_{nC} &= \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \zeta^{(m)} \cos n\psi_m & \text{und} & \zeta_{nS} &= \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \zeta^{(m)} \sin n\psi_m \end{aligned} \quad (7.3)$$

Diese Bewegungen werden zunächst erörtert. Bei einem vierblättrigen Rotor mit starren, gelenkig gelagerten Blättern gibt es vier Freiheitsgrade im drehenden System, einen für jedes Blatt. Somit gibt es auch vier Freiheitsgrade im nicht drehenden System, nämlich ζ_0 ,

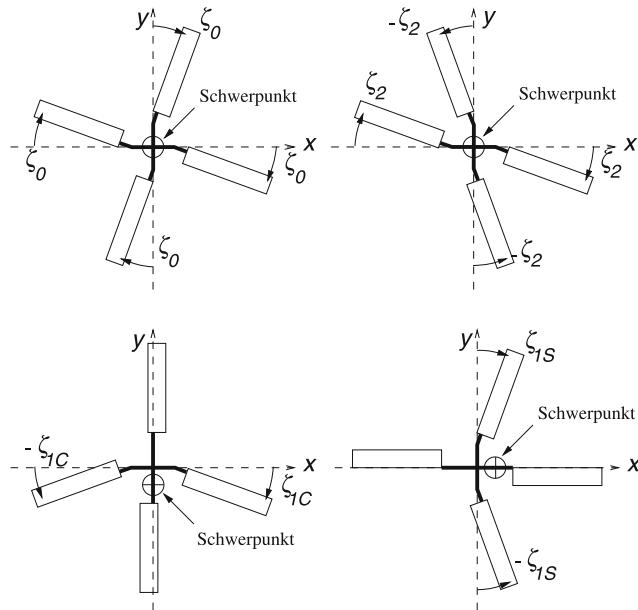


Abb. 7.3 Bewegungsformen der Schwenkbewegung im nicht drehenden System

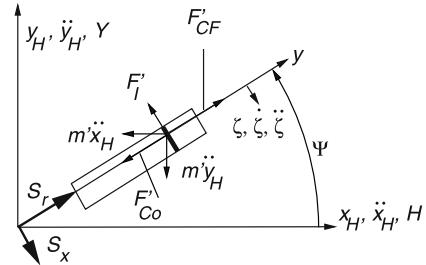
ξ_{1C} , ξ_{1S} , ξ_2 , ξ_0 ist die kollektive Bewegung aller Blätter gleichzeitig und als Folge bleibt der Gesamtschwerpunkt des Rotors im Rotorzentrum auf der Drehachse, siehe Abb. 7.3. ξ_{1C} führt dagegen zu einer Querverschiebung des Schwerpunktes in negative y -Richtung bei positivem Schwenkwinkel. Dasselbe gilt für ξ_{1S} , nur wandert der Schwerpunkt hier in positive x -Richtung. Bei der Form ξ_2 dagegen bewegen sich je zwei Blätter aufeinander zu und der Schwerpunkt bleibt in der Mitte; da die Blätter sich wie eine Schere bewegen, nennt man dies auch die Scherenform (engl. scissors mode).

Die transformierte Schwenkbewegungsgleichung im nicht drehenden System kann nun mit der Bewegungsgleichung des Rotorkopfes gekoppelt werden. Die ungekoppelte Schwenkbewegungsgleichung im drehenden System lautet mit einem Dämpfungsterm $*d_\zeta = d_\zeta / (I_\zeta \Omega)$, der strukturellen und/oder mechanischen Ursprungs ist, gemäß Kap. 4:

$$I_\zeta \left(\ddot{\zeta}^{**} + v_\zeta^2 \zeta + d_\zeta^* \dot{\zeta} \right) = \gamma \bar{M}_\zeta I_b \approx 0 \quad (7.4)$$

Die rechte Seite stellt das generalisierte aerodynamische Moment dar und dieses kann auch pauschal durch eine kleine Änderung des Dämpfungsterms in d_ζ^* berücksichtigt oder sogar vernachlässigt werden, da die Luftkräfte in der Schwenkbewegung klein sind. Den mechanischen Schwenkdämpfer – sofern vorhanden – darf man natürlich nicht weglassen. Darauf wendet man am besten die FCT an (siehe Abschn. 3.2), um die Differentialgleichung im nicht drehenden System zu erhalten. Als Beispiel sei hier ein vierblättriger Rotor

Abb. 7.4 Massenkräfte der Rotorkopfbewegung in der Schwenkbewegung



gewählt. Man erhält dann unter Verwendung der Abkürzung

$$\overset{*}{v}_{\zeta}^2 = v_{\zeta}^2 - 1 \quad (7.5)$$

folgende vier Gleichungen (vergleiche mit Gl. 3.11)

$$\begin{aligned} I_{\zeta} \left(\overset{**}{\zeta}_0 + v_{\zeta}^2 \zeta_0 + \overset{*}{d}_{\zeta} \overset{*}{\zeta}_0 \right) &= 0 \\ I_{\zeta} \left(\overset{**}{\zeta}_2 + v_{\zeta}^2 \zeta_2 + \overset{*}{d}_{\zeta} \overset{*}{\zeta}_2 \right) &= 0 \\ I_{\zeta} \left[\overset{**}{\zeta}_{1C} + 2 \overset{*}{\zeta}_{1S} + \overset{*}{v}_{\zeta}^2 \zeta_{1C} + \overset{*}{d}_{\zeta} \left(\overset{*}{\zeta}_{1C} + \zeta_{1S} \right) \right] &= 0 \\ I_{\zeta} \left[\overset{**}{\zeta}_{1S} - 2 \overset{*}{\zeta}_{1C} + \overset{*}{v}_{\zeta}^2 \zeta_{1S} + \overset{*}{d}_{\zeta} \left(\overset{*}{\zeta}_{1S} - \zeta_{1C} \right) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (7.6)$$

Die letzten beiden Gleichungen sind die Längs- und Querbewegungsgleichungen des Rotors; sie enthalten nur die Massen-, Feder- und Dämpfungsterme der Rotorblätter. Wenn nun eine Rotorkopfbewegung mit den Freiheitsgraden seitlicher Verschiebung x_H und y_H zugelassen wird, dann kommen weitere Glieder aufgrund der Beschleunigungen \ddot{x}_H und \ddot{y}_H in die Blattbewegungsgleichungen hinein. Abb. 7.4 dient als Hilfe für die Ermittlung der Massenkräfte durch die Rotorkopfbewegung. Im drehenden System lautet dann die Differentialgleichung der Schwenkbewegung (S_{ζ} wird in Kürze definiert):

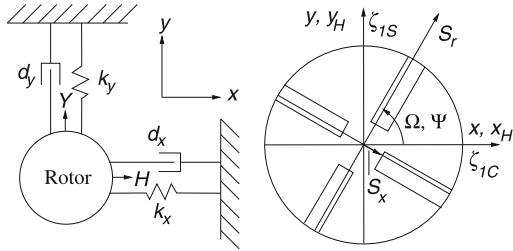
$$I_{\zeta} \left(\overset{**}{\zeta} + v_{\zeta}^2 \zeta + \overset{*}{d}_{\zeta} \overset{*}{\zeta} \right) + S_{\zeta} \left(\overset{**}{x}_H \sin \psi - \overset{**}{y}_H \cos \psi \right) = \gamma \overline{M}_{\zeta} I_b \approx 0 \quad (7.7)$$

Sie beinhaltet nun periodische Koeffizienten ($S_{\zeta} \sin \psi, S_{\zeta} \cos \psi$) und ist daher schwierig zu lösen.

7.3 Die Bodenresonanzgleichungen

Es wurde bereits gezeigt, dass die kollektive und die gegengleiche Bewegungsform (ζ_0, ζ_2) keine Schwerpunktverschiebung mit sich bringen. Daher sind auch nur die zyklischen Bewegungsformen wichtig, da sie eine Längs- und Querverschiebung des Rotschwer-

Abb. 7.5 Modellierung der Bodenresonanz



punktes erzeugen. Diese beiden Bewegungen können mit den Rotorkopfbewegungen in der Drehebene koppeln und daher ist ein Vierfreiheitsgradmodell, welches die beiden Schwenkbewegungen und die beiden Rotorkopfbewegungen erfasst, ausreichend für die Bodenresonanzanalyse, siehe Abb. 7.5.

Der Einfachheit halber werden die Bewegungsgleichungen im nicht drehenden System aufgestellt. Wenn man die aerodynamischen Kräfte wegen geringen Einflusses weglässt, so lauten die Bewegungsgleichungen der Rotorblätter im nicht drehenden System

$$\begin{aligned} I_\zeta \left[\ddot{\xi}_{1C} + 2\dot{\xi}_{1S} + v_\zeta^2 \xi_{1C} + d_\zeta \left(\dot{\xi}_{1C} + \dot{\xi}_{1S} \right) \right] - S_\zeta \ddot{y}_H &= 0 \\ I_\zeta \left[\ddot{\xi}_{1S} - 2\dot{\xi}_{1C} + v_\zeta^2 \xi_{1S} + d_\zeta \left(\dot{\xi}_{1S} - \dot{\xi}_{1C} \right) \right] + S_\zeta \ddot{x}_H &= 0 \end{aligned} \quad (7.8)$$

Diese Gleichungen beinhalten nur konstante Koeffizienten, sind also mit Standardverfahren lösbar. Der Dämpfungskoeffizient d_ζ^* repräsentiert die Dämpfungsanteile aus Luftkräften, struktureller Dämpfung und vor allem den mechanischen Dämpfern. Natürlich ist in der Realität die Dämpfung meist eine sehr nichtlineare Größe, aber hier wird sie als ein äquivalentes lineares System aufgefasst. Diesen Koeffizienten kann man z. B. ermitteln, indem man die Dissipationsenergie eines Bewegungszyklusses berechnet. Die Massenmomente sind das Trägheitsmoment I_ζ und das statische Moment S_ζ , die sich für kleine Gelenksabstände aus

$$\begin{aligned} I_\zeta &= \int_{y_\zeta}^R m'(y - y_\zeta)^2 dy \approx \int_0^R m' y^2 dy \\ S_\zeta &= \int_{y_\zeta}^R m'(y - y_\zeta) dy \approx \int_0^R m' y dy \\ M_b &= \int_{y_\zeta}^R m' dy \approx \int_0^R m' dy \end{aligned} \quad (7.9)$$

ergeben; M_b ist dann die Blattmasse. Mit der Annahme effektiver Massen für die Hubschrauberzellenbewegung in Längs- und Querrichtung, M_x und M_y , erregen die Kräfte

des Rotors dieses Feder-Masse-System und die Bewegungsgleichungen der Rotorkopfbewegung sind

$$\begin{aligned} M_x \ddot{x}_H + d_x \dot{x}_H + k_x x_H &= H \\ M_y \ddot{y}_H + d_y \dot{y}_H + k_y y_H &= Y \end{aligned} \quad (7.10)$$

d_x und d_y stellen dabei die Dämpfungskoeffizienten der Hubschrauberzelle dar und diese sind im Wesentlichen vom Landegestell bestimmt; ebenso die Federkonstanten k_x und k_y . Mit Hilfe von Abb. 7.4 kann man die Rotorkomponenten der Längs- und Querkraft H und Y berechnen:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{m=1}^N (S_x \sin \psi_m + S_r \cos \psi_m) \\ Y &= \sum_{m=1}^N (-S_x \cos \psi_m + S_r \sin \psi_m) \end{aligned} \quad (7.11)$$

Die Komponenten im drehenden System sind dabei die in radialer Richtung wirkende Blattanschlusskraft S_r , in welche neben der Zentrifugalkraft auch die Corioliskraft aus einer Schwenkbewegung $F'_{Co} = 2m'y\Omega\dot{\xi}$ eingeht (im Term $-2S_\xi\Omega\dot{\xi}$), und die Querkraft am Blattanschluss S_x , in welche sowohl die Blattmassenträgheit $F'_I = m'y\ddot{\zeta}$ als auch eine Komponente der Zentrifugalkraft, $F'_{CF}\zeta = m'y\Omega^2\zeta$, eingehen (in $-S_\xi\ddot{\xi} + S_\xi\Omega^2\zeta$).

$$\begin{aligned} S_r &= -2\Omega\dot{\xi} \int_{y_\xi}^R m'y \, dy - (\ddot{x}_H \cos \psi + \ddot{y}_H \sin \psi) \int_{y_\xi}^R m' \, dy \\ &= -2S_\xi\Omega\dot{\xi} - M_b(\ddot{x}_H \cos \psi + \ddot{y}_H \sin \psi) \\ S_x &= -\ddot{\xi} \int_{y_\xi}^R m'y \, dy + \Omega^2\zeta \int_{y_\xi}^R m'y \, dy - (\ddot{x}_H \sin \psi - \ddot{y}_H \cos \psi) \int_{y_\xi}^R m' \, dy \\ &= -S_\xi\ddot{\xi} + S_\xi\Omega^2\zeta - M_b(\ddot{x}_H \sin \psi - \ddot{y}_H \cos \psi) \end{aligned} \quad (7.12)$$

Der stationäre Anteil der Fliehkraft spielt keine Rolle, da dieser für alle Blätter gleich groß ist und sich bei der Summe der Kräfte aller Blätter im Rotorzentrum gegenseitig tilgt. Setzt man diese Ausdrücke in diejenigen für die Längs- und Querkraft ein, so folgen

$$\begin{aligned} H &= \sum_{m=1}^N \sin \psi_m \left[-S_\xi \ddot{\zeta}^{(m)} + S_\xi \Omega^2 \zeta^{(m)} - M_b(\ddot{x}_H \sin \psi_m - \ddot{y}_H \cos \psi_m) \right] \\ &\quad + \sum_{m=1}^N \cos \psi_m \left[-2S_\xi \Omega \dot{\zeta}^{(m)} - M_b(\ddot{x}_H \cos \psi_m + \ddot{y}_H \sin \psi_m) \right] \\ &= -S_\xi \frac{N}{2} (\ddot{\zeta}_{1S} - 2\Omega \dot{\zeta}_{1C} - \Omega^2 \zeta_{1S}) + S_\xi \Omega^2 \frac{N}{2} \zeta_{1S} - M_b \frac{N}{2} \ddot{x}_H \\ &\quad - 2S_\xi \frac{N}{2} (\Omega \dot{\zeta}_{1C} + \Omega^2 \zeta_{1S}) - M_b \frac{N}{2} \ddot{x}_H \\ &= -\frac{N}{2} S_\xi \ddot{\zeta}_{1S} - NM_b \ddot{x}_H \end{aligned} \quad (7.13)$$

und

$$\begin{aligned}
 Y &= \sum_{m=1}^N -\cos \psi_m \left[-S_\zeta \ddot{\xi}^{(m)} + S_\zeta \Omega^2 \zeta^{(m)} - M_b (\ddot{x}_H \sin \psi_m - \ddot{y}_H \cos \psi_m) \right] \\
 &\quad + \sum_{m=1}^N \sin \psi_m \left[-2S_\zeta \Omega \dot{\zeta}^{(m)} - M_b (\ddot{x}_H \cos \psi_m + \ddot{y}_H \sin \psi_m) \right] \\
 &= S_\zeta \frac{N}{2} (\ddot{\xi}_{1C} + 2\Omega \dot{\xi}_{1S} - \Omega^2 \zeta_{1C}) - S_\zeta \Omega^2 \frac{N}{2} \zeta_{1C} - M_b \frac{N}{2} \ddot{y}_H \\
 &\quad - 2S_\zeta \frac{N}{2} (\Omega \dot{\zeta}_{1S} - \Omega^2 \zeta_{1C}) - M_b \frac{N}{2} \ddot{y}_H \\
 &= \frac{N}{2} S_\zeta \ddot{\xi}_{1C} - NM_b \ddot{y}_H
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

Diese Rotorkomponenten werden in die Bewegungsgleichung des Hubschraubers Gl. 7.10 eingesetzt und man erhält

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_H (M_x + NM_b) + d_x \dot{x}_H + k_x x_H + \frac{N}{2} S_\zeta \ddot{\xi}_{1S} &= 0 \\
 \ddot{y}_H (M_y + NM_b) + d_y \dot{y}_H + k_y y_H - \frac{N}{2} S_\zeta \ddot{\xi}_{1C} &= 0
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

Wenn man sich die Koppelterme und die Dämpfung wegdenkt, so kann man die dimensionslosen Eigenfrequenzen des ungekoppelten, ungedämpften Hubschraubersystems folgendermaßen definieren

$$\begin{aligned}
 v_x^2 &= \left(\frac{\omega_x}{\Omega} \right)^2 = \frac{k_x}{(M_x + NM_b)\Omega^2} \\
 v_y^2 &= \left(\frac{\omega_y}{\Omega} \right)^2 = \frac{k_y}{(M_y + NM_b)\Omega^2}
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

Analog sind die dimensionslosen Koordinaten und Dämpfungskoeffizienten wie folgt gegeben

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{x_H}{R} & \overset{*}{x} &= \frac{\dot{x}_H}{\Omega R} & \overset{**}{x} &= \frac{\ddot{x}_H}{\Omega^2 R} & \overset{*}{d}_x &= \frac{d_x}{\Omega(M_x + NM_b)} \\
 y &= \frac{y_H}{R} & \overset{*}{y} &= \frac{\dot{y}_H}{\Omega R} & \overset{**}{y} &= \frac{\ddot{y}_H}{\Omega^2 R} & \overset{*}{d}_y &= \frac{d_y}{\Omega(M_y + NM_b)}
 \end{aligned} \tag{7.17}$$

Außerdem kann man nachfolgende Koppelterme und Massenkoeffizienten definieren, worin NM_b die Gesamtmasse des drehenden Rotors darstellt. Da für kleine Gelenksabstände $I_\zeta \approx I_b = m' R^3 / 3 = M_b R^2 / 3$ ist, folgt

$$\begin{aligned}
 \overset{*}{S}_\zeta &= \frac{RS_\zeta}{I_\zeta} & \overset{*}{S}_x &= \frac{\overset{*}{S}_\zeta}{2\overset{*}{M}_x} & \overset{*}{S}_y &= \frac{\overset{*}{S}_\zeta}{2\overset{*}{M}_y} \\
 \overset{*}{M}_x &= \frac{R^2(M_x + NM_b)}{NI_\zeta} & \overset{*}{M}_y &= \frac{R^2(M_y + NM_b)}{NI_\zeta}
 \end{aligned} \tag{7.18}$$

Dann kann man die Bewegungsgleichungen dimensionslos machen und in Matrixform schreiben, um die Koppelterme leichter zu identifizieren. Dazu werden die Bewegungsgleichungen der Rotorblätter durch I_ζ und die des Rotorkopfes durch $\Omega^2 R(M_x + NM_b)$ bzw. $\Omega^2 R(M_y + NM_b)$ dividiert. Es folgt:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -S_\zeta^* \\ 0 & 1 & S_\zeta^* & 0 \\ 0 & S_x^* & 1 & 0 \\ -S_y^* & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_{1C}^{**} \\ \zeta_{1S}^{**} \\ x^{**} \\ y^{**} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_\zeta^* & 2 & 0 & 0 \\ -2 & d_\zeta^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_x^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_y^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_{1C}^* \\ \zeta_{1S}^* \\ x^* \\ y^* \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} v_\zeta^{*2} & d_\zeta^* & 0 & 0 \\ -d_\zeta^* & v_\zeta^{*2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_{1C} \\ \zeta_{1S} \\ x \\ y \end{bmatrix} = 0 \quad (7.19) \end{aligned}$$

Hieraus ist klar zu erkennen, dass eine Kopplung zwischen den Rotor- und den Rumpffreiheitsgraden ausschließlich in der Massenmatrix und damit in den Trägheitskräften vorkommt, was recht interessant ist, da die bisher betrachteten dynamischen Probleme in der Regel durch Dämpfung und Federterme miteinander verbunden waren, was eine Folge der Luftkräfte war. Hier spielen diese eine untergeordnete Rolle und es liegt nur eine Kopplung durch Beschleunigungsterme vor. Um ein Gefühl für die darin vorkommenden dimensionslosen Größen zu bekommen, kann man eine gleichförmige Massenverteilung der Rotorblätter annehmen. Dann folgt

$$S_\zeta^* = \frac{RS_\zeta}{I_\zeta} \approx \frac{RS_\zeta}{I_b} = \frac{3}{2} \quad (7.20)$$

da $I_b = m'R^3/3$ und $S_\zeta = m'R^2/2$ ist. Die Massenkoeffizienten sind wegen $I_\zeta \approx I_b$

$$\begin{aligned} M_x^* &\approx \frac{R^2(M_x + NM_b)}{NI_b} = 3 \left(\frac{M_x}{NM_b} + 1 \right) \\ M_y^* &\approx \frac{R^2(M_y + NM_b)}{NI_b} = 3 \left(\frac{M_y}{NM_b} + 1 \right) \quad (7.21) \end{aligned}$$

worin NM_b die Gesamtmasse des drehenden Rotors darstellt. Unter der Annahme gleichförmiger Massenverteilung der Blätter folgt als Näherung

$$\begin{aligned} S_x^* &= \frac{S_\zeta^*}{2M_x^*} \approx \frac{NM_b}{4(M_x + NM_b)} = 0,25 \frac{\text{Rotormasse}}{\text{Gesamtmasse in } x} \\ S_y^* &= \frac{S_\zeta^*}{2M_y^*} \approx \frac{NM_b}{4(M_y + NM_b)} = 0,25 \frac{\text{Rotormasse}}{\text{Gesamtmasse in } y} \quad (7.22) \end{aligned}$$

Man hat nun also vier gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die wie andere Systeme zuvor behandelt werden können.

7.3.1 Eigenwerte im drehenden und im nicht drehenden System

Die Analyse der Eigenwerte des Systems Gl. 7.19 geschieht mit Hilfe der Bestimmung der Nullstellen der Stabilitätsdeterminante. Diese erhält man mit der Annahme harmonischer Schwingungen für alle Freiheitsgrade, also $\{\zeta, x, y\}(\psi) = \{\zeta, x, y\}_0 e^{s\psi}$ zu

$$\begin{vmatrix} s^2 + \overset{*}{d}_{\zeta}s + \overset{*}{v}_{\zeta}^2 & 2s + \overset{*}{d}_{\zeta} & 0 & -\overset{*}{S}_{\zeta}s^2 \\ -2s - \overset{*}{d}_{\zeta} & s^2 + \overset{*}{d}_{\zeta}s + \overset{*}{v}_{\zeta}^2 & \overset{*}{S}_{\zeta}s^2 & 0 \\ 0 & \overset{*}{S}_x s^2 & s^2 + \overset{*}{d}_x s + \overset{*}{v}_x^2 & 0 \\ -\overset{*}{S}_y s^2 & 0 & 0 & s^2 + \overset{*}{d}_y s + \overset{*}{v}_y^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.23)$$

Daraus folgt eine charakteristische Gleichung achten Grades und man erhält somit auch acht Eigenwerte; in der Regel vier konjugiert komplexe Paare. Eine Divergenz, also das statische Auskippen, ist hier rein physikalisch nicht möglich, denn die Bodenresonanz ist ein dynamisches Problem, bei dem eine der Schwingungsformen instabil wird, also die Dämpfung in dieser Form verschwindet oder ihr Vorzeichen umkehrt und die Bewegung angefacht wird. Dennoch soll das Divergenzproblem untersucht werden. Eine verschwindende Frequenz bedeutet mathematisch $s = 0$ und führt damit auf die Erfüllung der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \overset{*}{v}_{\zeta}^2 & \overset{*}{d}_{\zeta} & 0 & 0 \\ -\overset{*}{d}_{\zeta} & \overset{*}{v}_{\zeta}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overset{*}{v}_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overset{*}{v}_y^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\overset{*}{v}_{\zeta}^4 + \overset{*}{d}_{\zeta}^2 \right] \overset{*}{v}_x^2 \overset{*}{v}_y^2 > 0 \quad (7.24)$$

was, wie man sofort sieht, aufgrund der geraden Exponenten auch immer gegeben ist.

Nun wird die dynamische Stabilität untersucht. Betrachtet man zunächst das entkoppelte System, also mit $\overset{*}{S}_{\zeta} = 0$ (was praktisch jedoch unmöglich ist), dann ist die Schwenkgleichung gedämpft und der Eigenwert im drehenden System ist (siehe Gl. 7.4)

$$s^2 + \overset{*}{d}_{\zeta}s + \overset{*}{v}_{\zeta}^2 = 0 \quad \rightarrow \quad s_R = -\frac{\overset{*}{d}_{\zeta}}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{\overset{*}{d}_{\zeta}}{2}\right)^2 - \overset{*}{v}_{\zeta}^2} = -\frac{\overset{*}{d}_{\zeta}}{2} \pm i \sqrt{\overset{*}{v}_{\zeta}^2 - \left(\frac{\overset{*}{d}_{\zeta}}{2}\right)^2} \quad (7.25)$$

Der Realteil repräsentiert die Dämpfung beziehungsweise die Abklingkonstante und der Imaginärteil die dimensionslose Frequenz der gedämpften Schwingung. Nach Transfor-

mation in das nicht drehende System erhält man

$$s = s_R \pm i \quad (7.26)$$

Dieser Eigenwert besteht aus zwei Schwingungsformen.

- a) Die hochfrequente Schwingungsform $s = s_R + i$

mit der Frequenz $\nu = \Im(s_R) + 1$ in n/rev , die folglich immer größer als die Drehfrequenz ($= 1/\text{rev}$) ist und eine progressive in Drehrichtung umlaufende Bewegungsform des Rotorschwerpunktes darstellt. Zum Vergleich mit Abschn. 3.3.3: die Eigenform höherer Frequenz wies im nicht drehenden System eine Schaukelbewegung der Blattspitzenebene im Drehsinn des Rotors auf. In der Schwenkbewegung verbleibt die Blattspitzenebene konstant, aber der Schwerpunkt läuft in Drehrichtung um.

- b) Die niederfrequente Schwingungsform $s = s_R - i$

mit der Frequenz $\nu = \Im(s_R) - 1$. Bei schwenksteifen Rotoren, wo die Eigenfrequenz im drehenden System größer als $1/\text{rev}$ ist, erhält man eine regressive, gegen die Drehrichtung mit langsamer Frequenz umlaufende Bewegungsform des Rotorschwerpunktes. Bei schwenkweichen Rotoren jedoch, wo die Eigenfrequenz im drehenden System kleiner als $1/\text{rev}$ ist, erhält man eine progressive Form mit der Frequenz $\nu = 1 - \Im(s_R)$, was typisch für einen gelenkig gelagerten Rotor ist. Vergleich mit Abschn. 3.3.4: je nach Art (progressiv oder regressiv) schaukelt die Blattspitzenebene im oder gegen den Drehsinn des Rotors. In der Schwenkbewegung verbleibt die Blattspitzenebene konstant, aber der Schwerpunkt läuft in oder gegen die Drehrichtung um.

Die ungekoppelten Eigenwerte des Hubschrauberrumpfes in x - und y -Richtung liefern zwei konjugiert komplexe Paare im nicht drehenden System.

$$\begin{aligned} s^2 + \overset{*}{d}_x s + v_x^2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{\overset{*}{d}_x}{2} \pm i \sqrt{v_x^2 - \left(\frac{\overset{*}{d}_x}{2}\right)^2} \\ s^2 + \overset{*}{d}_y s + v_y^2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{\overset{*}{d}_y}{2} \pm i \sqrt{v_y^2 - \left(\frac{\overset{*}{d}_y}{2}\right)^2} \end{aligned} \quad (7.27)$$

Insgesamt hat man vier konjugierte Paare von Eigenwerten und wenn man die Realteile betrachtet, so sieht man, dass alle Rotor- und Rumpfbewegungen für sich selbst genommen gedämpft und damit stabil sind. Die Dämpfung kommt dabei im Wesentlichen aus dem Fahrwerk. Weil sowohl die Schwenkbewegung im drehenden System als auch die Rumpfbewegung im nicht drehenden System jede für sich gedämpft sind, ist die Bodenresonanz also eine Instabilität, die aufgrund der Kopplung der Massenträgheiten in $\overset{*}{S}_\zeta$ entsteht.

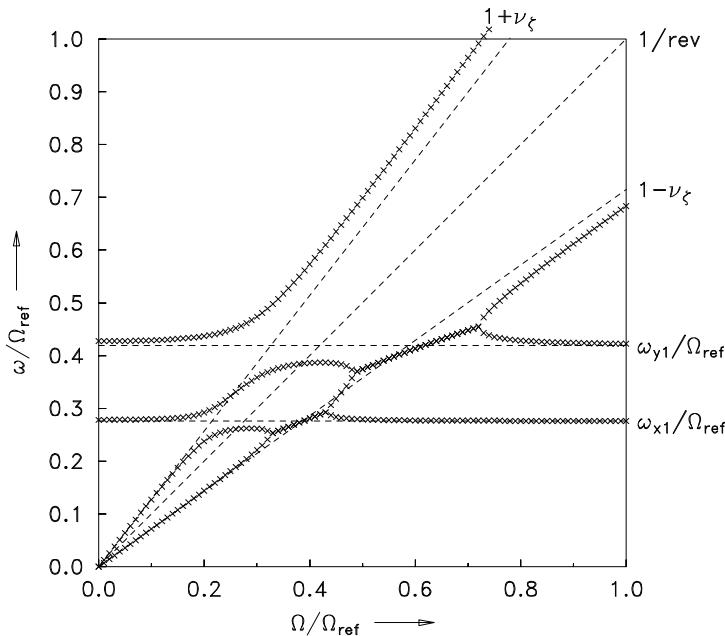


Abb. 7.6 Coleman-Diagramm zur Bodenresonanz, schwenkweicher Rotor

Bei einer Konfiguration ohne jegliche Dämpfung und ohne jegliche Kopplung gibt es vier Eigenwerte mit vier Frequenzen: die hochfrequente Schwingungsform aus der Schwenkbewegung $\nu = \nu_\xi + 1$, die niederfrequente Schwingung aus der Schwenkbewegung $\nu = \nu_\xi - 1$, die Frequenz der Längsschwingung des Rumpfes $\nu = \nu_x$ und die Frequenz der Querschwingung des Rumpfes $\nu = \nu_y$. Mit Einschluss der Koppelterme verbinden sich diese verschiedenen Schwingungsformen und können in dynamische Instabilität geraten, die generell mit katastrophalen Folgen verbunden ist. In Abb. 7.6 ist das sogenannte Coleman-Diagramm dargestellt, wobei ein gelenkig gelagerter Rotor mit schwenkweicher Lagerung zugrunde gelegt wurde (kleiner Schwenkgelenksabstand). Im Coleman-Diagramm werden die dimensionsbehafteten Frequenzen über der Rotordrehfrequenz aufgetragen, wobei die Frequenzen der verschiedenen Schwingungsformen im nicht drehenden System entweder aus der Eigenwertanalyse oder aus den Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Stabilitätsdeterminante gewonnen werden. In diesem Fall wurden folgende Daten verwendet:

$$\begin{aligned}
 & \overset{*}{S}_\xi = 1,5 \quad \overset{*}{d}_\xi = 0 \quad \omega_{\xi 0} = 0 \text{ rad/s} \quad R = 5 \text{ m} \quad \Omega_{\text{ref}} = 44,0 \text{ rad/s} \\
 & \overset{*}{M}_x = 68,175 \quad \overset{*}{d}_x = 0 \quad \omega_x = 12,148 \text{ rad/s} \quad e_\xi = 0,0514 \quad M_b = 25 \text{ kg} \\
 & \overset{*}{M}_y = 29,708 \quad \overset{*}{d}_y = 0 \quad \omega_y = 18,402 \text{ rad/s} \quad \nu_\xi = 0,285
 \end{aligned}$$

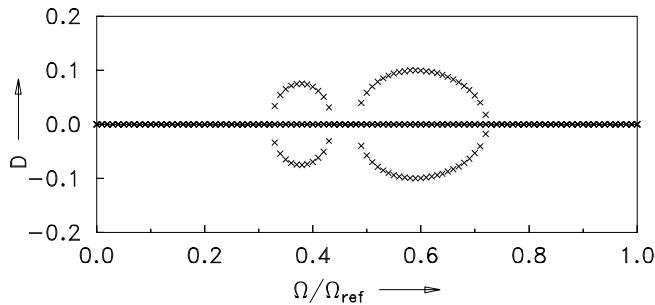


Abb. 7.7 Dämpfung in der Bodenresonanz

Ein Kennzeichen der Instabilität ist die Verbindung zweier Frequenzen zu einer Linie. Es gibt zwei Frequenzbereiche, in denen Instabilität bei diesem Beispiel auftritt: im ersten Bereich $0,32 < \Omega / \Omega_{\text{ref}} < 0,43$ koppelt die Schwenkfrequenz mit der Rumpffrequenz in Längsrichtung und im zweiten Bereich $0,48 < \Omega / \Omega_{\text{ref}} < 0,72$ mit derjenigen in Querrichtung. Diese Instabilitäten kann man durch Anbringung von Dämpfern in der Schwenkbewegung und im Fahrwerk vermeiden oder verkleinern. Bei gelenkigen Rotoren sind dies Schwenkdämpfer im drehenden System. Bei gelenklosen Rotoren kann man eine Schwenkdämpfung nur durch eine negative Schlag-Schwen-Kopplung erreichen. Die strukturelle Dämpfung allein ist in der Regel nicht ausreichend.

Solange das System stabil ist, gibt es vier Eigenwerte. In einer instabilen Konfiguration kommen zwei Frequenzen zusammen und der Realteil dieser Eigenwerte wird positiv. Abb. 7.7 stellt das Dämpfungsverhältnis der Schwingungsform dar, die instabil wird. Dieses Dämpfungsverhältnis ist wie folgt definiert

$$D = -\frac{\Re(s)}{|s|} \quad (7.28)$$

Wie man sieht, gehen die Dämpfungszweige fast senkrecht von der Frequenzachse weg, was bedeutet, dass die Schwingung schon bei der geringsten Frequenzänderung sofort sehr stark angefacht wird, was den explosiven Charakter der Bodenresonanz verdeutlicht. Auch der absolute Wert von etwa 0,1 im Dämpfungsverhältnis zeigt, dass ein erheblicher Betrag an Dämpfung hinzugefügt werden muss, um die Schwingung zu stabilisieren. In diesem Beispiel müssen daher die Bereiche von $0,32 < \Omega / \Omega_{\text{ref}} < 0,43$ und $0,48 < \Omega / \Omega_{\text{ref}} < 0,72$ für den stationären Betrieb vermieden und zur Erreichung der Betriebsdrehzahl schnell durchfahren werden. In Abb. 7.8 ist das Coleman-Diagramm eines schwenksteifen, gelenkig gelagerten Rotors dargestellt (großer Gelenksabstand). Die Ausgangsdaten sind (fehlende Daten sind dieselben wie im vorherigen Beispiel):

$$S_\zeta^* = 3,19 \quad M_x^* = 178,77 \quad M_y^* = 77,902 \quad v_\zeta = 1,3$$

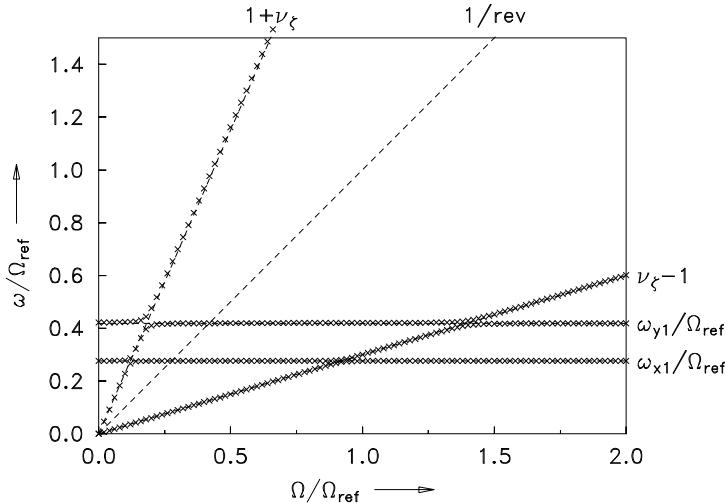


Abb. 7.8 Coleman-Diagramm zur Bodenresonanz, schwenksteifer Rotor

Wie man sieht, gibt es keine Instabilität in diesem Falle, da sich die Frequenzen zwar schneiden, aber nicht zu einer Linie verbinden und daher auch der Dämpfungsparameter überall Null bleibt. Um die Analyse zu vereinfachen, kann man die Dämpfung zu Null setzen, was auf folgende Stabilitätsdeterminante hinausläuft:

$$\begin{vmatrix} s^2 + \nu_{\zeta}^{*2} & 2s & 0 & -S_{\zeta}^{*}s^2 \\ -2s & s^2 + \nu_{\zeta}^{*2} & S_{\zeta}^{*}s^2 & 0 \\ 0 & S_x^{*}s^2 & s^2 + \nu_x^2 & 0 \\ -S_y^{*}s^2 & 0 & 0 & s^2 + \nu_y^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.29)$$

Daraus folgt die charakteristische Gleichung als Polynom achten Grades in s . Die Stabilitätsgrenze ist mit dem Verschwinden des Realteils des Eigenwertes verbunden, so dass man $s = i\nu$ in diese Gleichung einsetzen kann und dann die Nullstellen in Abhängigkeit der Rotordrehfrequenz Ω sucht, was durch numerische Iteration geschieht. Man erhält dann die Grenzlinie zwischen stabilen und instabilen Zuständen.

7.3.2 Das Deutsch-Stabilitätskriterium

Eine Näherungslösung zur Bestimmung der Stabilitätsgrenze der Bodenresonanz gibt es in Form eines einfachen Ausdrucks und diesen kann man verwenden, um die notwendige Dämpfung näherungsweise zu bestimmen. Mit der Annahme

$$\nu \approx \nu_x = 1 - \nu_{\zeta} \quad (7.30)$$

und der Bedingung $\omega_x \neq \omega_y$ folgt als Stabilitätsforderung aus Gl. 7.23

$$\overset{*}{d}_\zeta \overset{*}{d}_x > \frac{1 - \nu_\zeta}{2\nu_\zeta} \nu_x^2 \overset{*}{S}_\zeta \overset{*}{S}_x \quad (7.31)$$

und analog für die Querschwingungsform

$$\nu \approx \nu_y = 1 - \nu_\zeta \quad \Rightarrow \quad \overset{*}{d}_\zeta \overset{*}{d}_y > \frac{1 - \nu_\zeta}{2\nu_\zeta} \nu_y^2 \overset{*}{S}_\zeta \overset{*}{S}_y \quad (7.32)$$

Bei einem schwenksteifen Rotor ($\nu_\zeta > 1$) ist die rechte Seite immer negativ und das System ist immer stabil. Bei einem schwenkweichen Rotor dagegen ($\nu_\zeta < 1$) muss das Produkt von Schwenkdämpfung und Hubschrauberrumpfdämpfung größer sein als die rechte Seite. Daher muss man einen größeren Betrag an Schwenkdämpfung installieren, wenn

1. die Schwenkeigenfrequenz klein ist (typisch für gelenkig gelagerte Rotoren),
2. die Rumpfzelle mit Landegestell sehr steif ist (ω_x, ω_y groß),
3. die Rotormasse im Verhältnis zur Rumpfmasse sehr groß ist, also die Kopplungsfaktoren groß sind. Als Näherung kann man annehmen:

$$\overset{*}{S}_\zeta \overset{*}{S}_x \approx \overset{*}{S}_\zeta \overset{*}{S}_y \approx \frac{3}{8} \frac{\text{Rotormasse}}{\text{Gesamtmasse}}$$

4. auf federnden Untergründen gelandet werden soll (wie zum Beispiel Schiffsrümpfen),
5. die Rotoren gelenklos sind, da dann die Schwenkdämpfung gering und damit auch das Produkt $\overset{*}{d}_\zeta \overset{*}{d}_x$ klein ist,
6. ein isotroper Zustand für den Rumpf vorliegt, wo die Eigenfrequenzen in Längs- und Querrichtung gleich groß sind ($\omega_x = \omega_y$). Dann muss man folgende Bedingung erfüllen:

$$\overset{*}{d}_\zeta \overset{*}{d}_x > \frac{1 - \nu_\zeta}{\nu_\zeta} \nu_x^2 \overset{*}{S}_\zeta \overset{*}{S}_x \quad (7.33)$$

Daraus ist im Vergleich zu Gl. 7.31 ersichtlich, dass man den doppelten Betrag an Dämpfung braucht, als wenn die Rumpffrequenzen unterschiedlich sind. Der Grund liegt darin, dass die Rumpffrequenzen dann stärker mit der niederfrequenten Rotschwenkfrequenz koppeln und die Wirbelbewegung des Rotorkopfes mehr unterstützen.

Beispiel

Bei einem Hubschrauber wurde ein Schwingungstest unternommen und die Eigenfrequenzen des Hubschraubers mit Landegestell wurden mit $f_x = 1,2 \text{ Hz}$ und $f_y = 1,8 \text{ Hz}$ gemessen; die Dämpfungsverhältnisse wurden mit je $c_x = c_y = 2\%$ der kritischen Dämpfung ermittelt. Der Rotor hatte $N = 4$ Blätter mit gleichförmiger

Massenverteilung, die gelenkig gelagert waren ($\omega_{\zeta 0} = 0 \text{ rad/s}$) und einen Schlaggelenksabstand von $e_\beta = 0,06$ aufwiesen. Außerdem machte der Rotor etwa 10 % der Gesamtmasse aus. Man untersuche den Hubschrauber auf die Möglichkeit der Bodenresonanz, wenn die Nenndrehzahl 360 RPM beträgt. Dazu stelle man die Stabilitätsdeterminante auf. Schwenkdämpfer waren nicht installiert worden. Folgende Werte sind gegeben:

$$\begin{aligned}\Omega &= 37,7 \text{ rad/s} & v_x &= 0,2/\text{rev} & v_y &= 0,3/\text{rev} & d_x^* &= 2c_x v_x = 0,008 \\ v_\zeta^2 &= 0,09 & v_\zeta &= 0,3 & S_\zeta^* &= 1,5 & I_\zeta^* &= 1 \\ d_\zeta &= 0,0 & S_\zeta &= M_b \frac{R}{2} & I_b &= M_b \frac{R^2}{3} & d_y^* &= 2c_y v_y = 0,012 \\ M_x^* &= M_y^* = R^2 \frac{M_x + NM_b}{NI_b} & = R^2 \frac{M_x + NM_b}{NM_b \frac{R^2}{3}} & = 30 & \rightarrow & S_x^* = S_y^* &= 0,025\end{aligned}$$

Es folgt die Stabilitätsdeterminante zu

$$\begin{vmatrix} s^2 - 0,91 & 2s & 0 & -1,5s^2 \\ -2s & s^2 - 0,91 & 1,5s^2 & 0 \\ 0 & 0,025s^2 & s^2 + 0,008s + 0,04 & 0 \\ -0,025s^2 & 0 & 0 & s^2 + 0,012s + 0,09 \end{vmatrix} = 0$$

Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung werden dann zeigen, ob das System stabil ist oder nicht.

7.4 Bodenresonanz des zweiblättrigen Rotors

Da beim zweiblättrigen Rotor einige Besonderheiten vorhanden sind, wird das Bodenresonanzproblem für diesen Rotortyp getrennt behandelt. Wie üblich, werden identische Blätter angenommen und jedes Blatt hat den Freiheitsgrad der Schwenkbewegung des starren Blattes um ein Schwenkgelenk ($\zeta^{(m)}$ mit $m = 1, 2$) für die zwei Blätter im drehenden System. Im nicht drehenden System gibt es dann die kollektive Schwenkform und die Differentialform:

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= \frac{1}{2} (\zeta^{(1)} + \zeta^{(2)}) \\ \zeta_1 &= \frac{1}{2} (\zeta^{(2)} - \zeta^{(1)})\end{aligned}\tag{7.34}$$

Daraus folgt umgekehrt, um die Schwenkbewegung im drehenden System zu erhalten:

$$\begin{aligned}\zeta^{(1)} &= \zeta_0 - \zeta_1 \\ \zeta^{(2)} &= \zeta_0 + \zeta_1\end{aligned}\tag{7.35}$$

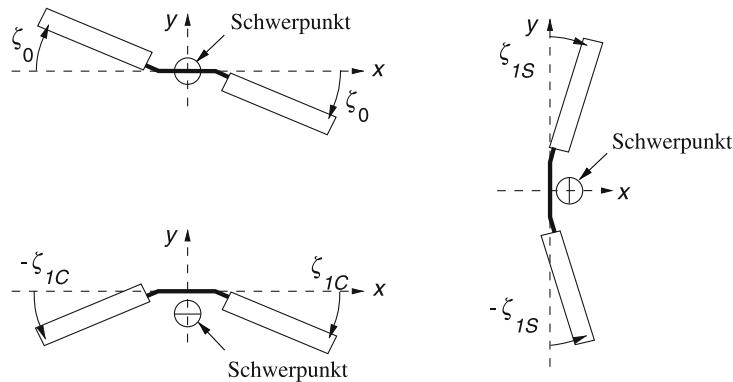


Abb. 7.9 Schwerpunktbewegung beim zweiblättrigen Rotor mit Schwenkbewegung

Der Einfluss dieser Bewegungsformen auf den Rotorschwerpunkt ist in der kollektiven Form (ζ_0) wie beim vielblättrigen Rotor: der Schwerpunkt bleibt in der Mitte (siehe Abb. 7.9). Die Differentialform (ζ_1) aber führt auf eine Verschiebung des Schwerpunktes. Man nehme eine generelle Schwenkbewegung der Blätter im drehenden System der Form

$$\begin{aligned}\zeta^{(1)} &= \zeta_0 - \zeta_{1C} \cos \psi - \zeta_{1S} \sin \psi \\ \zeta^{(2)} &= \zeta_0 + \zeta_{1C} \cos \psi + \zeta_{1S} \sin \psi\end{aligned}\quad (7.36)$$

an. Das Blatt 2 befindet sich gegenüber von Blatt 1, also ist seine Bewegung um 180° phasenverschoben, was durch die negativen Vorzeichen repräsentiert wird. Dies führt im nicht drehenden System auf die Differentialform

$$\dot{\zeta}_1 = \zeta_{1C} \cos \psi + \zeta_{1S} \sin \psi \quad (7.37)$$

Nun gibt es zwei Möglichkeiten. Der reine Cosinus-Anteil führt zu einer Schwerpunktverschiebung in negative y_H -Richtung, während der reine Sinus-Anteil zu einer Verschiebung in positive x_H -Richtung führt. Hier ist also die differentielle Bewegungsform verantwortlich für Bodenresonanzeffekte, denn die zyklische Schwenkbewegung wird mit den Rumpfeigenfrequenzen koppeln. Ausgehend von der Schwenkbewegungsgleichung im drehenden System

$$\begin{aligned}\ddot{\zeta}^{(1)} + d_\zeta \dot{\zeta}^{(1)} + v_\zeta^2 \zeta^{(1)} &= 0 \\ \ddot{\zeta}^{(2)} + d_\zeta \dot{\zeta}^{(2)} + v_\zeta^2 \zeta^{(2)} &= 0\end{aligned}\quad (7.38)$$

folgt nach Transformation in das nicht drehende System mittels FCT

$$\begin{aligned}\ddot{\zeta}_0 + d_\zeta \dot{\zeta}_0 + v_\zeta^2 \zeta_0 &= 0 \\ \ddot{\zeta}_1 + d_\zeta \dot{\zeta}_1 + v_\zeta^2 \zeta_1 &= 0\end{aligned}\quad (7.39)$$

Man beachte, dass bei Mehrblattrotoren nicht auf eine spezielle Bewegungsform geachtet wurde, sondern nur darauf, dass sich alle Blätter gleichartig bewegen. Unter Einschluss der Rotorkopfbewegung in der Schwenkebene x_H, y_H , siehe Abb. 7.4, folgen weitere Terme aus den Rotorkopfbeschleunigungen und man erhält die Schwenkbewegungsgleichungen im drehenden System zu

$$\begin{aligned} I_\zeta \left(\zeta^{**(2)} + d_\zeta^* \zeta^{*(2)} + v_\zeta^2 \zeta^{(2)} \right) + S_\zeta \left(\ddot{x}_H \sin \psi - \ddot{y}_H \cos \psi \right) &= 0 \\ I_\zeta \left(\zeta^{**(1)} + d_\zeta^* \zeta^{*(1)} + v_\zeta^2 \zeta^{(1)} \right) - S_\zeta \left(\ddot{x}_H \sin \psi - \ddot{y}_H \cos \psi \right) &= 0 \end{aligned} \quad (7.40)$$

Diese werden wieder mit der FCT in das nicht drehende System transformiert und ergeben

$$\begin{aligned} \zeta_0^{**} + d_\zeta^* \zeta_0^* + v_\zeta^2 \zeta_0 &= 0 \\ I_\zeta \left(\zeta_1^{**} + d_\zeta^* \zeta_1^* + v_\zeta^2 \zeta_1 \right) + S_\zeta \left(\ddot{x}_H \sin \psi - \ddot{y}_H \cos \psi \right) &= 0 \end{aligned} \quad (7.41)$$

Wie man sieht, ist die erste Gleichung unberührt von der Rotorkopfbewegung und spielt keine Rolle, aber die zweite Gleichung ist von Wichtigkeit, denn die Rotorkopfbewegung beeinflusst den differentiellen Mode ζ_1 . Auch hier kann man den Hubschrauberrumpf durch effektive Federn, Massen und Dämpfer modellieren und die Rotorkopfbewegung lautet dann wie gehabt:

$$\begin{aligned} M_x \ddot{x}_H + k_x x_H + d_x \dot{x}_H &= H \\ M_y \ddot{y}_H + k_y y_H + d_y \dot{y}_H &= Y \end{aligned} \quad (7.42)$$

Aus den Blattscherkräften folgen die Rotorkomponenten H und Y , wobei die stationären Anteile der Zentrifugalkraft sich im Rotorkopf gegenseitig kompensieren und nur Corioliskräfte übrig bleiben. Mit

$$\sum_{m=1}^2 \zeta^{**(m)} \sin \psi_m = \zeta^{**(2)} \sin \psi - \zeta^{**(1)} \sin \psi = 2 \zeta_1^{**} \sin \psi \quad (7.43)$$

folgen die Rotorkräfte im nicht drehenden System zu

$$\begin{aligned} S_r^{(m)} &= -2S_\zeta \Omega \dot{\zeta}^{(m)} - M_b (\ddot{x}_H \cos \psi + \ddot{y}_H \sin \psi) \\ S_x^{(m)} &= S_\zeta (\Omega^2 \zeta^{(m)} - \ddot{\zeta}^{(m)}) - M_b (\ddot{x}_H \sin \psi - \ddot{y}_H \cos \psi) \\ H &= \sum_{m=1}^2 (S_x^{(m)} \sin \psi_m + S_r^{(m)} \cos \psi_m) \\ &= -2M_b \ddot{x}_H + 2S_\zeta \left[(\Omega^2 \zeta_1 - \ddot{\zeta}_1) \sin \psi - 2\Omega \dot{\zeta}_1 \cos \psi \right] \\ Y &= \sum_{m=1}^2 (-S_x^{(m)} \cos \psi_m + S_r^{(m)} \sin \psi_m) \\ &= -2M_b \ddot{y}_H + 2S_\zeta \left[(\ddot{\zeta}_1 - \Omega^2 \zeta_1) \cos \psi - 2\Omega \dot{\zeta}_1 \sin \psi \right] \end{aligned} \quad (7.44)$$

Die nun erhaltenen drei Gleichungen kann man wieder in Matrixform schreiben, um die Koppelterme besser zu identifizieren. Außerdem wird alles wieder dimensionslos gemacht und es folgt

$$\begin{bmatrix} 1 & \overset{*}{S}_\zeta \sin \psi & -\overset{*}{S}_\zeta \cos \psi \\ \overset{*}{2S}_x \sin \psi & 1 & 0 \\ -\overset{*}{2S}_y \cos \psi & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{**}{\zeta}_1 \\ \overset{**}{x} \\ \overset{**}{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overset{*}{d}_\zeta & 0 & 0 \\ \overset{*}{4S}_x \cos \psi & \overset{*}{d}_x & 0 \\ \overset{*}{4S}_y \sin \psi & 0 & \overset{*}{d}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{*}{\zeta}_1 \\ \overset{*}{x} \\ \overset{*}{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_\zeta^2 & 0 & 0 \\ -\overset{*}{2S}_x \sin \psi & v_x^2 & 0 \\ \overset{*}{2S}_y \cos \psi & 0 & v_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{*}{\zeta}_1 \\ \overset{*}{x} \\ \overset{*}{y} \end{bmatrix} = 0 \quad (7.45)$$

Dies sind drei gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die mit den besprochenen Verfahren über die Stabilitätsdeterminante oder mit Hilfe der Eigenwertanalyse gelöst werden können. Beachtenswert ist hier, dass die Koppelterme in allen Matrizen, also der Massen-, Dämpfer- und Federmatrix auftreten und nicht nur auf die Massenmatrix beschränkt sind wie im Falle von mehrblättrigen Rotoren. Erschwerend kommt hinzu, dass es sich beim zweiblättrigen Rotor um ein System mit periodischen Koeffizienten handelt, was seine Ursache in der inertialen Asymmetrie hat, die bei Blattzahlen von $N \geq 3$ nicht mehr auftritt. Die Lösung kann mittels der Floquet-Theorie gewonnen werden, was hier aber nicht weiter verfolgt wird.

Die meisten Zweiblattrotoren sind mit einem zentralen Schlaggelenk (engl. teetering rotor) ausgeführt und haben eine starre Verbindung ohne Schwenkgelenk, sind also relativ steif in Schwenkrichtung mit einer relativ großen Schwenkeigenfrequenz und daher ist Bodenresonanz bei ihnen relativ selten. Dasselbe gilt für Einblattrotoren, die auf der dem Blatt gegenüber liegenden Seite ein Gegengewicht aufweisen. Auch diese Rotoren sind üblicherweise mit einem zentralen Schlaggelenk versehen, jedoch ist diese Bauweise sehr selten.

7.5 Die Luftresonanz

Die Luftresonanz ist wie die Bodenresonanz eine Instabilität, die durch Kopplung der niederfrequenten Schwenkbewegung und der Hubschrauberrumpfbewegung im Flug entsteht, also ohne Bodenkontakt. Daher spielen auch nicht die translatorischen Freiheitsgrade des Rumpfes, sondern vorwiegend die rotatorischen eine Rolle. Da diese Roll- und Nickbeschleunigungen anregende Trägheitskräfte in der Schlagbewegung bewirken, sind hier zusätzlich noch die Schlagbewegung und die aerodynamischen Kräfte derselben beteiligt.

Diese Instabilität tritt in erster Linie bei schwenkweichen, gelenklosen und lagerlosen Rotoren auf, aber nur selten bei gelenkig gelagerten Rotoren. Für die hier aufgezeigte Analyse werden die Rotorblätter als starr aufgefasst und haben die Freiheitsgrade Schlagen und Schwenken um die entsprechenden Gelenke, welche der Einfachheit halber als sehr nah am Rotorkopf befindlich angenommen werden. Der Hubschrauberrumpf wird als starr angesehen und hat die Freiheitsgrade des Nickens und Rollens um seinen Schwerpunkt. Die translatorischen Rumpffreiheitsgrade sind hier nicht enthalten, da sie die Luftresonanz nur wenig beeinflussen.

7.5.1 Die Schlag-, Schwenk- und Rumpfnickbewegung im Vakuum

Der Rumpf kann zunächst nur die Nickbewegung um die Querachse (α_y) ausführen. Die linearisierten Blattbewegungsgleichungen unter Einschluss der Rumpfbeschleunigungs- und Coriolisterme lauten im drehenden System ohne Luftkräfte

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} - 2\beta_0 \dot{\xi} + v_\beta^2 \beta - \ddot{\alpha}_y \cos \psi + 2\dot{\alpha}_y \sin \psi &= 0 \\ \ddot{\xi} + 2\beta_0 \left(\dot{\beta} + \dot{\alpha}_y \cos \psi \right) + d_\xi \dot{\xi} + v_\xi^2 \xi + \dot{S}_\xi \bar{h} \ddot{\alpha}_y \sin \psi &= 0 \end{aligned} \quad (7.46)$$

Darin ist $\bar{h} = z_{cg}/R$ der vertikale Abstand vom Rotor zum Schwerpunkt des Hubschraubers. Mittels FCT erhält man im nicht drehenden System

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_{1C} + 2\dot{\beta}_{1S} - \beta_{1C} - 2\beta_0 \left(\dot{\xi}_{1C} + \xi_{1S} \right) + v_\beta^2 \beta_{1C} - \ddot{\alpha}_y &= 0 \\ \ddot{\beta}_{1S} - 2\dot{\beta}_{1C} - \beta_{1S} - 2\beta_0 \left(\dot{\xi}_{1S} - \xi_{1C} \right) + v_\beta^2 \beta_{1S} + 2\dot{\alpha}_y &= 0 \\ \ddot{\xi}_{1C} + 2\dot{\xi}_{1S} - \xi_{1C} + 2\beta_0 \left(\dot{\beta}_{1C} + \beta_{1S} + \dot{\alpha}_y \right) + d_\xi \left(\dot{\xi}_{1C} + \xi_{1S} \right) + v_\xi^2 \xi_{1C} &= 0 \\ \ddot{\xi}_{1S} - 2\dot{\xi}_{1C} - \xi_{1S} + 2\beta_0 \left(\dot{\beta}_{1S} - \beta_{1C} \right) + d_\xi \left(\dot{\xi}_{1S} - \xi_{1C} \right) + v_\xi^2 \xi_{1S} + \dot{S}_\xi \bar{h} \ddot{\alpha}_y &= 0 \end{aligned} \quad (7.47)$$

Die Rumpfnickbewegung wird durch folgende Gleichung beschrieben

$$I_y \ddot{\alpha}_y + d_y \dot{\alpha}_y + k_y \alpha_y = M_y + z_{cg} H \quad (7.48)$$

Darin ist I_y das Nickmassenträgheitsmoment des Rumpfes ohne Rotor und d_y , k_y sind die Dämpfungs- und Federterme aus aerodynamischen Kräften, die hier zunächst noch Null sind. Ferner ist M_y das vom Rotor übertragene Nickmoment und H die bereits be-

handelte Horizontalkraft des Rotors in x_H -Richtung. Das Rotornickmoment folgt aus dem Schlagmoment M_β der Rotorblätter zu

$$M_y = - \sum_{m=1}^N M_\beta \cos \psi_m \quad (7.49)$$

mit dem Schlagmoment (nur Massenkräfte)

$$\begin{aligned} M_\beta &= - \int_0^R m' y^2 (\ddot{\beta} - \ddot{\alpha}_y \cos \psi_m - 2\beta_0 \Omega \dot{\zeta} + 2\Omega \dot{\alpha}_y \sin \psi_m + \Omega^2 \beta) dy \\ &= -I_b \Omega^2 \left(\overset{**}{\beta} - \overset{**}{\alpha}_y \cos \psi_m - 2\beta_0 \overset{*}{\zeta} + 2\overset{*}{\alpha}_y \sin \psi_m + \beta \right) \end{aligned} \quad (7.50)$$

Die radiale Scherkraft an der Blattwurzel ist (nur Massenkräfte)

$$S_r = -2\Omega \overset{*}{\zeta} \int_0^R m' y dy - z_{cg} \ddot{\alpha}_y \cos \psi_m \int_0^R m' dy = -2S_\zeta \Omega \overset{*}{\zeta} - z_{cg} M_b \ddot{\alpha}_y \cos \psi_m \quad (7.51)$$

Weiter ist die Querkraft an der Blattwurzel (ebenfalls nur Massenkräfte)

$$S_x = -(\ddot{\zeta} - \Omega^2 \zeta) \int_0^R m' y dy - z_{cg} \ddot{\alpha}_y \sin \psi_m \int_0^R m' dy = -(\ddot{\zeta} - \Omega^2 \zeta) S_\zeta - z_{cg} M_b \ddot{\alpha}_y \sin \psi_m \quad (7.52)$$

Beide Kräfte sind im drehenden System und müssen mit der FCT in das nicht drehende System transformiert werden.

$$\begin{aligned} H &= \sum_{m=1}^N (S_r^{(m)} \cos \psi_m + S_x^{(m)} \sin \psi_m) = -z_{cg} NM_b \ddot{\alpha}_y - S_\zeta \frac{N}{2} \Omega^2 \overset{**}{\zeta}_{1S} \\ M_y &= I_b \Omega^2 \sum_{m=1}^N \left(\overset{**}{\beta}^{(m)} - \overset{**}{\alpha}_y \cos \psi_m - 2\beta_0 \overset{*}{\zeta}^{(m)} + 2\overset{*}{\alpha}_y \sin \psi_m + \beta^{(m)} \right) \cos \psi_m + z_{cg} H \\ &= I_b \Omega^2 \frac{N}{2} \left[\overset{**}{\beta}_{1C} + 2\overset{*}{\beta}_{1S} - \overset{**}{\alpha}_y - 2\beta_0 \left(\overset{*}{\zeta}_{1C} + \overset{*}{\zeta}_{1S} \right) \right] \end{aligned} \quad (7.53)$$

Als Vereinfachung kann man den Feder- und Dämpfungsterm der Rumpfbewegung weglassen und man erhält dann für die Rumpfbewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} \overset{**}{\alpha}_y \left(I_y + \frac{N}{2} I_b + N z_{cg}^2 M_b \right) + z_{cg} S_\zeta \frac{N}{2} \overset{**}{\zeta}_{1S} \\ - I_b \frac{N}{2} \left[\overset{**}{\beta}_{1C} + 2\overset{*}{\beta}_{1S} - 2\beta_0 \left(\overset{*}{\zeta}_{1C} + \overset{*}{\zeta}_{1S} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.54)$$

Mit den Abkürzungen

$$\overset{*}{I}_y = \frac{I_y + \frac{N}{2} I_b + N z_{cg}^2 M_b}{I_b \frac{N}{2}} \quad \text{und} \quad \overset{*}{S}_\zeta = \frac{R S_\zeta}{I_b} \quad (7.55)$$

wird die Rumpfgleichung zu

$$\overset{*}{I}_y \overset{**}{\alpha}_y - \overset{**}{\beta}_{1C} - 2\overset{*}{\beta}_{1S} + 2\beta_0 \left(\overset{*}{\zeta}_{1C} + \overset{**}{\zeta}_{1S} \right) + \bar{h} \overset{*}{S}_\zeta \overset{**}{\zeta}_{1S} = 0 \quad (7.56)$$

In Matrixform kann man die erhaltenen Gleichungen zusammenfassen, um die Analyse auszuführen und die Kopplungen besser zu erkennen. Die gekoppelten Rotor-Rumpf-Gleichungen sind dann mit $\overset{*2}{v_\beta} = v_\beta^2 - 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{h} \overset{*}{S}_\zeta \\ -1 & 0 & 0 & \bar{h} \overset{*}{S}_\zeta & \overset{*}{I}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{**}{\beta}_{1C} \\ \overset{**}{\beta}_{1S} \\ \overset{**}{\zeta}_{1C} \\ \overset{**}{\zeta}_{1S} \\ \overset{*}{\alpha}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2\beta_0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2\beta_0 & 2 \\ 2\beta_0 & 0 & d_\zeta & 2 & 2\beta_0 \\ 0 & 2\beta_0 & -2 & d_\zeta & 0 \\ 0 & -2 & 2\beta_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{*}{\beta}_{1C} \\ \overset{*}{\beta}_{1S} \\ \overset{*}{\zeta}_{1C} \\ \overset{*}{\zeta}_{1S} \\ \overset{*}{\alpha}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overset{*2}{v_\beta} & 0 & 0 & -2\beta_0 & 0 \\ 0 & \overset{*2}{v_\beta} & 2\beta_0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta_0 & \overset{*2}{v_\zeta} & \overset{*}{d}_\zeta & 0 \\ -2\beta_0 & 0 & -\overset{*}{d}_\zeta & \overset{*2}{v_\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{*}{\beta}_{1C} \\ \overset{*}{\beta}_{1S} \\ \overset{*}{\zeta}_{1C} \\ \overset{*}{\zeta}_{1S} \\ \overset{*}{\alpha}_y \end{bmatrix} = 0 \quad (7.57)$$

Soweit sind noch keine aerodynamischen Kräfte mit eingeschlossen. Das System der Differentialgleichungen hat wie bei der Bodenresonanz der Mehrblattrotoren konstante Koeffizienten. Die Kopplung zwischen Rotor- und Rumpffreiheitsgraden findet man jedoch in allen Matrizen und die Größe der Koppelterme der Massenmatrix hängt stark vom Abstand des Rotorkopfes vom Rumpfschwerpunkt ab.

7.5.2 Die Schlag-, Schwenk-, Rumpfnick- und Rumpfrollbewegung mit Luftkräften

Die Gleichung der Luftresonanz wird mit Hinzunahme der Rollbewegung des Rumpfes noch umfangreicher, da ein weiterer Freiheitsgrad hinzukommt. In Matrixform lautet dann

unter Berücksichtigung auch der aerodynamischen Anteile des Rotors (lineare stationäre Aerodynamik) das komplette Gleichungssystem wie in Gl. 7.58 angegeben. Die aerodynamischen generalisierten Kräfte und Momente können in eine Dämpfungs- und eine Federmatrix aufgespalten werden, was sich wie in Gl. 7.59 darstellt. Die Luftresonanzgleichungen haben konstante Koeffizienten und werden daher als ein Eigenwertproblem behandelt, genau wie die Bodenresonanz, mit der sie ja auch sehr verwandt ist. Als Literaturbeispiel sei auf Ormiston verwiesen [6]. Im Vorwärtsflug kommen dann jedoch periodische Terme durch die Luftkräfte hinzu, was das Lösen des Gleichungssystems und die Stabilitätsanalyse erheblich erschwert.

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \bar{h}S_\zeta^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bar{h}S_\zeta^* \\ 0 & -1 & \bar{h}S_\zeta^* & 0 & I_x & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \bar{h}S_\zeta^* & 0 & I_y \end{array} \right] \begin{bmatrix} \beta_{1C}^{**} \\ \beta_{1S}^{**} \\ \zeta_{1C}^{**} \\ \zeta_{1S}^{**} \\ \alpha_x^{**} \\ \alpha_y^{**} \end{bmatrix} \\
 + & \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 2 & -2\beta_0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2\beta_0 & 0 & 2 \\ 2\beta_0 & 0 & d_\zeta^* & 2 & 0 & 2\beta_0 \\ 0 & 2\beta_0 & -2 & d_\zeta^* & -2\beta_0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2\beta_0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2\beta_0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \beta_{1C}^* \\ \beta_{1S}^* \\ \zeta_{1C}^* \\ \zeta_{1S}^* \\ \alpha_x^* \\ \alpha_y^* \end{bmatrix} \\
 + & \left[\begin{array}{cccccc} v_\beta^{*2} & 0 & 0 & -2\beta_0 & 0 & 0 \\ 0 & v_\beta^{*2} & 2\beta_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta_0 & v_\zeta^{*2} & d_\zeta^* & 0 & 0 \\ -2\beta_0 & 0 & -d_\zeta^* & v_\zeta^{*2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta_0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \beta_{1C} \\ \beta_{1S} \\ \zeta_{1C} \\ \zeta_{1S} \\ \alpha_x \\ \alpha_y \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} \bar{M}_{\beta_{1C}} \\ \bar{M}_{\beta_{1S}} \\ \bar{M}_{\zeta_{1C}} \\ \bar{M}_{\zeta_{1S}} \\ \bar{c}_{Mx} \\ \bar{c}_{My} \end{bmatrix} \quad (7.58)
 \end{aligned}$$

Die Verwendung stationärer Aerodynamik für die Luftkräfte ist gerechtfertigt, da die Frequenz der Luftresonanz bei 1/rev oder darunter liegt. Da dieses Phänomen während des Fluges auftritt, ist die Rotordrehfrequenz jedoch immer 1/rev, während die Bodenreso-

nanz in einem Drehzahlbereich auftritt, der normalerweise kleiner als 1/rev ist.

$$\begin{aligned}
 & \gamma \begin{bmatrix} \bar{M}_{\beta_{1C}} \\ \bar{M}_{\beta_{1S}} \\ \bar{M}_{\xi_{1C}} \\ \bar{M}_{\xi_{1S}} \\ \bar{c}_{Mx} \\ \bar{c}_{My} \end{bmatrix} = \frac{\gamma}{8} \begin{bmatrix} k_{p\beta} & & & & 1 \\ -1 & k_{p\beta} & & & \\ 4\lambda k_{p\beta}/3 & & 8\lambda/3 - \Theta & & \\ \Theta - 8\lambda/3 & & & 4\lambda k_{p\beta}/3 & \\ \bar{h}(\lambda k_{p\beta} + 4\beta/3) - 1 & (1 - 4\beta\bar{h}/3)k_{p\beta} - 4\bar{h}(\Theta/3 - \lambda) & & & \\ 4\bar{h}(\Theta/3 - \lambda) - (1 - 4\beta\bar{h}/3)k_{p\beta} & \bar{h}(\lambda k_{p\beta} + 4\beta/3) - 1 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1C} \\ \beta_{1S} \end{bmatrix} \\
 & + \frac{\gamma}{8} \begin{bmatrix} k_{p\xi} & & & & 2\Theta - 4\lambda/3 \\ 4\lambda/3 - 2\Theta & k_{p\xi} & & & \\ 4\lambda k_{p\xi}/3 & & 2C_d/C_{l\alpha} & & \\ -2C_d/C_{l\alpha} & & & 4\lambda k_{p\xi}/3 & \\ 4\lambda/3 - 2\Theta + 2\bar{h}\beta(8\Theta/3 - 2\lambda) + 2\lambda\bar{h}k_{p\xi} & k_{p\xi}(1 - 4\beta\bar{h}/3) + 8\bar{h}C_d/(3C_{l\alpha}) & & & \\ -k_{p\xi}(1 - 4\beta\bar{h}/3) - 8\bar{h}C_d/(3C_{l\alpha}) & 4\lambda/3 - 2\Theta + 2\bar{h}\beta(8\Theta/3 - 2\lambda) + 2\lambda\bar{h}k_{p\xi} & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{1C} \\ \xi_{1S} \end{bmatrix} \\
 & + \frac{\gamma}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\Theta - 4\lambda/3 & 0 \\ 0 & -\Theta - 4\lambda/3 \\ 4\bar{h}(\lambda - \Theta/3) & 1 - 4\bar{h}\beta_0/3 \\ 4\bar{h}\beta_0/3 - 1 & 4\bar{h}(\lambda - \Theta/3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ \beta_{1C} \\ * \\ \beta_{1S} \end{bmatrix} \\
 & + \frac{\gamma}{8} \begin{bmatrix} 2\Theta - 4\lambda/3 & 0 & & \\ 0 & 2\Theta - 4\lambda/3 & & \\ 2C_d/C_{l\alpha} & 0 & & \\ 0 & 2C_d/C_{l\alpha} & & \\ 8\bar{h}C_d/(3C_{l\alpha}) & 2\Theta - 4\lambda/3 - 2\bar{h}\beta(4\Theta/3 - \lambda) & & \\ 2\bar{h}\beta(4\Theta/3 - \lambda) - 2\Theta + 4\lambda/3 & 8\bar{h}C_d/(3C_{l\alpha}) & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ \xi_{1C} \\ * \\ \xi_{1S} \end{bmatrix} \\
 & + \frac{\gamma}{8} \begin{bmatrix} 2\bar{h}(4\Theta/3 - \lambda) & -1 \\ 1 & 2\bar{h}(4\Theta/3 - \lambda) \\ 8\bar{h}C_d/(3C_{l\alpha}) & \Theta \\ -\Theta & 8\bar{h}C_d/(3C_{l\alpha}) \\ 1 - 4\bar{h}\beta/3 + 4\bar{h}^2C_d/C_{l\alpha} & 2\bar{h}(4\Theta/3 - \lambda) - 4\bar{h}^2\beta(\Theta - \lambda) \\ 4\bar{h}^2\beta(\Theta - \lambda) - 2\bar{h}(4\Theta/3 - \lambda) & 1 - 4\bar{h}\beta/3 + 4\bar{h}^2C_d/C_{l\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ \alpha_x \\ * \\ \alpha_y \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{7.59}$$

7.6 Schlussfolgerungen

- Die Bodenresonanz ist eine selbsterregte mechanische Instabilität, bei der die Schwenkbewegung der Rotorblätter mit den Eigenfrequenzen des Hubschraubers in Längs und/oder Querrichtung koppelt. Insbesondere voll gelenkige Rotoren mit niedriger Schwenkeigenfrequenz sind davon betroffen. Das Phänomen tritt nur auf, solange der Hubschrauber auf dem Boden steht und es ist gefürchtet, da es ab einer kritischen Drehzahl sehr plötzlich und äußerst vehement auftritt. In der Regel endet diese Instabilität mit vollständiger Zerstörung des Hubschraubers.
- Die wichtigste Maßnahme zur Vermeidung ist die Einhaltung vorgeschriebener Betriebsdrehzahlen sowie ausreichende Dämpfung in der Schwenkbewegung und im Landewerk des Hubschraubers.
- Die Bodenresonanz von Hubschraubern mit 3 oder mehr Rotorblättern hat konstante Koeffizienten in der Massen-, Dämpfungs- und Federmatrix. Die Kopplung zwischen den Rotor- und den Rumpffreiheitsgraden findet in der Massenmatrix statt.
- Beim Zweiblattrotor weisen die Bodenresonanzgleichungen periodische Koeffizienten in sämtlichen Matrizen auf und die Kopplung zwischen den Rotor- und Rumpffreiheitsgraden findet auch in jeder der Matrizen statt. Damit ist die Stabilitätsanalyse wesentlich schwieriger als bei Mehrblatttoren. Da bei Zweiblatttoren in der Regel die Blätter starr miteinander verbunden sind, ist deren Schwenkeigenfrequenz relativ hoch und Bodenresonanz tritt nur selten auf.
- Die Luftresonanz tritt nur im Flug auf. Hierbei koppeln sowohl die Schwenk- wie auch die Schlagbewegung des Rotors mit den Eigenfrequenzen des Hubschraubers in der Roll- und/oder Nickbewegung. Da nun auch die Schlagbewegung beteiligt ist, spielen auch aerodynamische Kräfte eine wichtige Rolle. Im Schwebeflug erhält man wie bei der Bodenresonanz konstante Koeffizienten in den Systemmatrizen, im Vorwärtsflug bringen jedoch die Luftkräfte periodische Anteile mit hinein. Die Kopplung zwischen Rotor- und Rumpffreiheitsgraden erfolgt in allen Matrizen. Auch die Luftresonanz kann man mit ausreichender Schwenkdämpfung stabilisieren.

7.7 Übungsaufgabe

Leiten sie die Bodenresonanzgleichungen für ein Dreifreiheitsgradsystem her, das die zyklischen Schwenkwinkel ξ_{1S} , ξ_{1C} und die Rollbewegung des Hubschraubers α_x beinhaltet.

Literatur

1. R.P. Coleman, *Theory of Self-Excited Mechanical Oscillations of Hinged Rotor Blades*, NACA ARR 3G29, 1943
2. R.P. Coleman, A.M. Feingold, *Theory of Self-Excited Mechanical Oscillations of Helicopter Rotors with Hinged Blades*, NACA Report 1351, 1958
3. H. Focke, *Fortschritte des Hubschraubers*, Schriften der deutschen Akademie der Luftfahrtforschung, Heft 1070/43 g, 1943
4. R.H. Prewitt, R.A. Wagner, *Frequency and Vibration Problems of Rotors*, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 7, No. 10, pp. 444–450, 1940
5. K. Hohenemser, *Zur Dynamik von umlaufenden, gelenkig an die Nabe angeschlossenen und in der Umlaufebene schwingenden Stäben*, Ingenieur Archiv, Bd. 14, Nr. 2, S. 38–45, 1943
6. R.A. Ormiston, *Rotor-Fuselage Dynamics of Helicopter Air and Ground Resonance*, Journal of the AHS, Vol. 36, No. 2, pp. 3–20, 1991



Mechanismen zur Vibrations- und Lärmreduzierung

8

8.1 Einleitung

Die Vibrationen eines Hubschraubers sind nur eines von vielen Problemen. Ursachen des relativ hohen Vibrationsniveaus sind

- unsymmetrische Strömungszustände im Vorwärtsflug
- Einfluss des Rumpfes auf die Durchströmung des Rotors
- atmosphärische Turbulenz, die zumeist im niedrigen Frequenzbereich stattfindet
- Blatt-Wirbel-Interaktionen und Nähe des Rotornachlaufes im Transitionsbereich sowie im Manöverflug, die sehr große höherharmonische Blattlasten verursachen können
- Strömungsablösungen am rücklaufenden Blatt, die sehr hohe Lastspitzen im aerodynamischen Moment mit sich bringen und die Torsionsbewegung anregen
- große Machzahlen am vorlaufenden Blatt mit dem damit verbundenen Widerstandsanstieg als auch der Neutralpunktverschiebung, die ein starkes Nickmoment erzeugt
- aeroelastische Instabilitäten aufgrund von Schlag-Schwenkkopplungen
- niedrige aerodynamische Dämpfung in der Schwenkbewegung
- nicht identische Rotorblätter, die in Vibrationen mit 1/rev münden. Dies ist ein Spurlauf- und Unwuchtpproblem
- dynamisch unterschiedliche Rotorblätter mit voneinander abweichenden Eigenfrequenzen der höheren Eigenformen
- Antriebs- und Getriebeschwingungen
- Heckrotorvibrationen

Die Vibrationen beeinflussen nicht nur den Reisekomfort, sondern auch die Lebenszeit der Bauteile im Hinblick auf Ermüdung. Da die Hauptursache von Vibrationen im Hauptrotor zu suchen ist, wird hier nur dieser untersucht werden. Generell werden hier Vibrationen als Schwingungen im nicht drehenden System verstanden. Das Vibrationsniveau ist im

Schwebeflug am geringsten und nimmt mit wachsender Fluggeschwindigkeit zu. Oft trifft man aber auch sehr große Vibrationen im Transitionszustand an, so dass es zwei wichtige Zustände gibt, bei denen Vibrationen kritische Werte annehmen können: den Langsamflug und den Schnellflug. Schwebeflug und Reiseflug sind in der Regel vibrationsarm.

Im Niedergeschwindigkeitsbereich ($\mu \approx 0,1$) befinden sich die Blattspitzenwirbel in der Nähe der Rotorebene und verursachen starke Blatt-Wirbel-Interaktionen, was in erheblichen höherharmonischen Blattlasten seinen Ausdruck findet. Mit zunehmender Geschwindigkeit neigt sich die Rotorebene mehr nach vorne, so dass sich die Wirbel schneller von der Rotorebene entfernen und die gegenseitige Beeinflussung von Wirbeln und Rotorblättern abnimmt. Mit weiterer Geschwindigkeitszunahme wachsen die Vibrationen wieder an, da am vorlaufenden Blatt die transsonischen Effekte stärker werden und am rücklaufenden Blatt lokale Strömungsablösungen aufgrund großer Anstellwinkel stattfinden.

Hohe Vibrationen resultieren auch im Sinkflug bei kleiner Vorwärtsgeschwindigkeit, wenn man sich der Grenze zum Wirbelringstadium nähert oder diese überschreitet. Da dann das Wirbelsystem instabil wird und sich zu einem Ringwirbel um die Rotorebene formiert, entstehen große dynamische Luftlasten, die nicht ganzzahlige Vielfache der Rottordrehfrequenz sind und daher zu hohen Belastungen des Rotors und der Zelle führen.

Außerdem treten im Manöverflug bei hohen Lastvielfachen ($n_z > 2$) große dynamische Kräfte am Rotorblatt auf, die wie im schnellen Horizontalflug von Stößen am vorlaufenden Blatt, im Wesentlichen jedoch von Strömungsablösung am rücklaufenden Blatt resultieren.

Wenn die Blätter etwas unterschiedlich gebaut sind, so wird dies durch große 1/rev Komponenten am Rotorkopf im nicht drehenden System bemerkbar. Dies ist auch einer der Hauptgründe, warum die Hubschrauberindustrie große Anstrengungen unternimmt, identische Blätter zu bauen. Die verbleibenden Unterschiede werden durch den Blattspurlauf und Massenausgleich kompensiert, wobei kleine Unterschiede im Massenträgheitsmoment durch das Anbringen geringer Zusatzmassen an der Blattspitze oder in speziellen Trimmkammern im Blatt korrigiert werden. Aerodynamische Unterschiede werden durch Trimmklappen (engl. trim tabs) und Veränderung der Steuerstangenlängen ausgeglichen.

Den Hubschrauber kann man sich als ein System von Massen, Federn und Dämpfern vorstellen, die untereinander verbunden sind und von außen durch die Luftkräfte zu Schwingungen angeregt werden. Da es viele Eigenfrequenzen gibt, wird das Antwortproblem sehr komplex sein. Unter der Annahme identischer Blätter in struktureller und aerodynamischer Hinsicht ist die Vibrationsberechnung im nicht drehenden System stark vereinfacht, denn die nahezu periodischen Blattlasten im drehenden System werden bei einer dominanten Frequenz von pN/rev mit $p = 1, 2, 3, \dots$, also ganzzahligen Vielfachen der Blattzahl N , ins nicht drehende System übertragen. In der Regel ist $p = 1$ die dominante Vibrationsfrequenz im nicht drehenden System (also im Fall eines vierblättrigen Rotors die $4/\text{rev}$). Manchmal sind auch die entstehenden $2N/\text{rev}$ und $3N/\text{rev}$ -Komponenten wichtig und somit fungiert der Rotor generell als ein rigoroses Frequenzfilter und die meisten Frequenzen des drehenden Systems tilgen sich gegenseitig am Rotorkopf.

Die pN/rev -Vertikalkraft (F_z) und das pN/rev -Drehmoment (M_z) im nicht drehenden System (p ganzzahlig) werden durch die vertikalen Scherkräfte bzw. die Schwenkmomente im drehenden System bei derselben Frequenz pN/rev verursacht. Der Grund liegt in der Symmetrie der Erregerkräfte und darin, dass bei dieser Frequenz keine Frequenzänderung bei der Transformation vom drehenden ins nicht drehende System erfolgt. Dagegen werden die pN/rev -Seitenkräfte sowie das Roll- und Nickmoment im nicht drehenden System von der Schwenkquerkraft und den Schlagmomenten bei zwei Frequenzen im drehenden System verursacht: $(pN - 1)/\text{rev}$ und $(pN + 1)/\text{rev}$. Diese Tatsache macht die Vibrationsreduzierung erheblich einfacher, da von dem ganzen Spektrum der an den Blättern wirkenden Kräfte nur bestimmte Frequenzen beeinflusst zu werden brauchen.

8.2 Periodische Blattkräfte und ihre Auswirkungen im nicht drehenden System

Im Vorwärtsflug ist das Rotorblatt periodischen aerodynamischen Lasten ausgesetzt und erzeugt an seiner Blattwurzel daher periodische Kräfte und Momente, die viele Frequenzen n/rev , $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ beinhalten. Als Beispiel soll ein gelenkig gelagertes Rotorblatt dienen, dessen Strömungsverhältnisse in Abb. 5.19 dargestellt wurden. Der Auftrieb an einer Stelle y ist

$$L' = \frac{\rho}{2} V^2 c C_{l\alpha} \alpha_a \quad (8.1)$$

und die Geschwindigkeitskomponenten sind

$$\begin{aligned} V_T &= \Omega y + V_\infty \cos \alpha \sin \psi = \Omega R(r + \mu \sin \psi) \\ V_P &= v_i(r, \psi) - V_\infty \sin \alpha + y \dot{\beta}(\psi) = \Omega R \left(\lambda_i + \mu_z + r \beta^* \right) \end{aligned} \quad (8.2)$$

Im Vorwärtsflug ist V_T periodisch (0/rev aus der Rotation und 1/rev aus der Fluggeschwindigkeit). Für aerodynamische Kräfte und Momente ist jedoch der Staudruck wichtig, also V_T^2 , der dann die Frequenzen 0, 1 und 2/rev beinhaltet. Der induzierte Durchflussgrad λ_i ist generell eine voll besetzte Fourierreihe (aufgrund der Blattspitzenwirbel und deren hochfrequentem induzierten Geschwindigkeitsfeld bis ca. 180/rev). Auch der Schlagwinkel hat harmonische Anteile in mehreren Frequenzen, wobei diese meist nur bis ca. 10/rev nennenswerte Amplituden aufweisen. Als generelle Blattantwort auf solche periodische Erregung kann man eine Fourierreihe annehmen:

$$\beta = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_{nC} \cos n\psi + \beta_{nS} \sin n\psi) \quad (8.3)$$

Auch die Steuerung besteht aus statischen und dynamischen Anteilen

$$\Theta_{\text{con}} = \Theta_0 + \Theta_{1C} \cos \psi + \Theta_{1S} \sin \psi \quad (8.4)$$

und wird überlagert von der elastischen Torsion des Blattes (die ein Frequenzspektrum ähnlich der Schlagbewegung aufweist), so dass der effektive Steuerwinkel aus beiden besteht

$$\Theta = \Theta_{\text{con}}(\psi) + \vartheta(\psi) \quad (8.5)$$

worin die Torsion, vereinfacht als Starrblatttorsion mit weicher Einspannung an der Wurzel und damit ohne radiale Abhängigkeit, ebenfalls wie folgt dargestellt werden kann:

$$\vartheta(\psi) = \vartheta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\vartheta_{nC} \cos n\psi + \vartheta_{nS} \sin n\psi) \quad (8.6)$$

Mit der Annahme $V \approx V_T$ und der Näherung für kleine Anstellwinkel folgt $\alpha_a \approx \Theta - V_P / V_T$ und somit

$$\begin{aligned} L' &\approx \frac{\rho}{2} c C_{l\alpha} (V_T^2 \Theta - V_P V_T) \\ &= \frac{\rho}{2} c C_{l\alpha} (\Omega R)^2 \left[(r + \mu \sin \psi)^2 \left(\Theta_0 + \Theta_{1C} \cos \psi + \Theta_{1S} \sin \psi + \vartheta_0 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{n=1}^{\infty} [\vartheta_{nC} \cos n\psi + \vartheta_{nS} \sin n\psi] \right) \right. \\ &\quad \left. - (r + \mu \sin \psi) \left(r \sum_{n=1}^{\infty} n [\beta_{nS} \cos n\psi - \beta_{nC} \sin n\psi] + \lambda_i(r, \psi) + \mu_z \right) \right] \\ &= L'(r, \sin n\psi, \cos n\psi) \quad n = 1, 2, \dots, \infty \end{aligned} \quad (8.7)$$

Somit ist die lokale Auftriebskraft eine Funktion des Radius und ganzzahliger Vielfacher der Rotordrehfrequenz. In analoger Weise kann man dies ebenfalls für alle anderen aerodynamischen Kräfte nachweisen. Dabei ist typischerweise die Amplitude der höher-harmonischen Anteile ($n > 4$) zunehmend kleiner und wird daher bei der Berechnung der Vibrationsen meistens nicht mehr berücksichtigt, was aber von der Blattzahl derart abhängt, dass die Terme bis $\max(4, N)$ Anwendung finden müssen, um Vibrationsen bei N/rev berechnen zu können. Aus diesem kleinen Beispiel kann man aber ersehen, dass die Anregungskraft aus beliebig vielen Harmonischen zusammengesetzt ist.

Die Rotorkopflasten erhält man nun aus der Summation aller Blattlasten aller Blätter. Bei einem Rotor mit identischen Blättern und perfektem Spurlauf tilgen sich sehr viele Harmonische und nur die Blattzahlharmonischen (Frequenzen pN/rev mit $p = 1, 2, 3, \dots$ und N als Blattzahl) werden auf die Hubschrauberzelle übertragen.

Um Vibrationsen zu reduzieren, gibt es zwei Prinzipien:

1. In der Konstruktionsphase mittels des Entwurfs:

Hierbei muss man die strukturellen und aerodynamischen Eigenschaften so auswählen, dass die Vibrationsen minimiert werden. Dies wird mit Hilfe eines Optimierungsalgorithmen bewerkstelligt, der auf den Erstentwurf angewendet wird. Die Hauptparameter des Entwurfs wie Flächenbelastung T/A , Blattspitzengeschwindigkeit ΩR , Flächen-

dichte σ und Blatttiefe c sind dabei vorgegeben, da sie aus Leistungsoptimierungen resultieren. Für die Optimierung der Vibrationen kann man jedoch die Parameter Verwindung Θ_{tw} , Blattspitzenform, Profile, elastische Eigenschaften EI und GJ , Massenverteilung m' , Lage der elastischen und der Massenachse und Koppelterme wie $k_{p\beta}$ ansehen. Auch hier ist der wichtigste Aspekt, Resonanzen der verschiedenen Eigenformen mit den erregenden Frequenzen bei n/rev zu vermeiden. Durch Anwendung der Faserverbundbauweise und der heutigen Strukturoptimierungsverfahren für Rumpf und Rotor kann man die Vibrationen allein durch einen guten Entwurf bereits erheblich reduzieren.

2. Nach der Konstruktionsphase mit Hilfe von Vibrationsunterdrückungssystemen:

Viele solcher Systeme wurden in der Vergangenheit entwickelt. Generell kann man sie in zwei Gruppen unterteilen: die passiven und die aktiven Systeme. Bei passiven Systemen wird die Vibrationsquelle entweder vom Rest isoliert oder der Vibrationspegel wird durch sogenannte Absorber vermindert. Bei aktiven Systemen wird die Vibrationsquelle selbst angegangen und weitgehend unterdrückt.

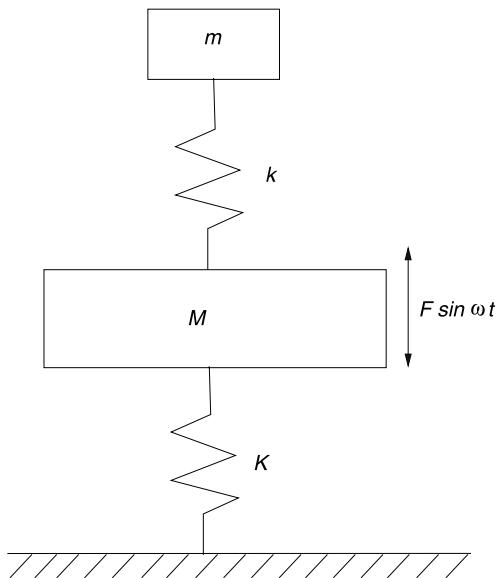
8.3 Vibrationsisolationssysteme

Vibrationsisolierer werden manchmal eingesetzt, um die Vibrationen im Hubschrauber zu unterdrücken. Dazu werden isolierende Materialien wie Gummi, Kork oder auch Metallfedern zwischen das vibrierende System und die Umgebung geschaltet. Alle diese Systeme repräsentieren ein Feder-Dämpfer-System und können manchmal sehr effektiv die maximalen dynamischen Lasten im nicht drehenden System reduzieren. Daher ist es nicht ungewöhnlich, den Rotor selbst mit einer weichen Lagerung im Hubschrauber zu versehen. Allerdings muss man dabei sehr aufpassen, da man damit leicht in Bodenresonanzprobleme geraten kann, was besonders für konventionelle, gelenkig gelagerte Rotoren zutrifft.

8.4 Vibrationsabsorber

Oft werden dynamische Absorber verwendet, um die Vibrationen im Hubschrauber zu unterdrücken. Ein solcher Absorber ist generell ein Einmassenschwinger, der mit einer abgestimmten Feder am vibrierenden Teil befestigt wird, so dass nun ein Zweimassensystem mit zwei Freiheitsgraden entsteht, siehe Abb. 8.1. Wenn das Basissystem die Masse M besitzt und mit einer Feder K an der Umgebung befestigt ist, so hat es die Eigenfrequenz $\omega = \sqrt{K/M}$. Im schwingenden Zustand, insbesondere in der Nähe der Resonanz, werden sehr große dynamische Lasten auf die Umgebung übertragen. Durch eine geschickte Auswahl der Masse m und deren Feder k kann man bei der Betriebsfrequenz theoretisch die Auslenkung der Masse M zu Null bekommen und es schwingt dann nur noch m . Es ist aber unmittelbar einsichtig, dass dies nur bei einer einzigen Auslegungsfrequenz funktioniert.

Abb. 8.1 Prinzip des Vibrationsabsorbers



Manchmal wird auch noch ein Dämpfer zwischengeschaltet. Im Falle eines Hubschraubers kann so ein Absorber an den Lagern der Rotorwelle angebracht und auf eine bestimmte Frequenz, zum Beispiel N/rev , abgestimmt werden. Wenn die Auslegung stimmt, wird im Betrieb die Masse m eine dynamische Kraft ausüben, die genau so groß wie die Erregerkraft ist (aber in Gegenphase schwingt) und damit die dynamischen Rotorlasten in einer Richtung tilgen. Am Besten ist es, so wenig wie möglich Zusatzmassen einzubauen, da damit Nutzlast verloren geht. So hat z. B. Sikorsky gelegentlich die sowieso notwendigen Batterien als Absorbermassen verwendet und Bell das Noda-Matic-System entwickelt, welches das Getriebe als Schwinger verwendet.

Ein anderes Beispiel sind Pendelabsorber. Diese stellen einfache Doppelpendel dar, die am Blatthals angebracht werden. Sie bestehen aus kleinen Metallkugeln an einem

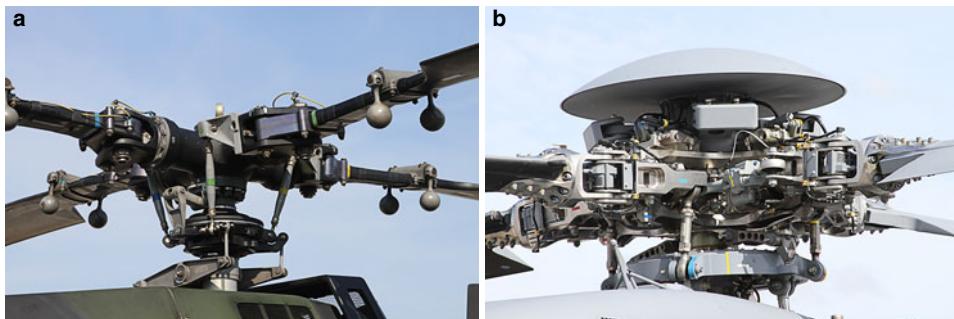


Abb. 8.2 Pendelabsorber am Hauptrotor. **a** BK117, **b** UH-60. © Burkhard Domke

Schwingerarm, die auf eine bestimmte Frequenz abgestimmt sind. Solche Pendel sind von Sikorsky erfolgreich getestet worden, wobei sie auf zwei Frequenzen abgestimmt wurden, nämlich die 3/rev und 5/rev-Komponente der Schlagbiegung im drehenden System. Auch bei der Bo105 und der BK117 von MBB (heute ECD) finden diese Absorber Anwendung, siehe Abb. 8.2.

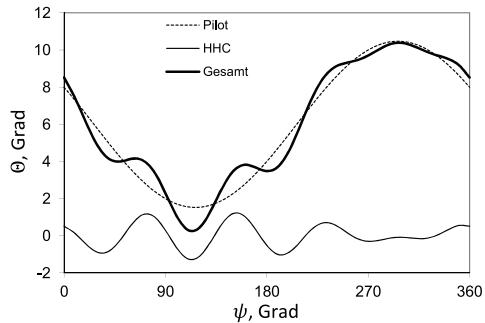
8.5 Aktive Vibrationsunterdrückungssysteme

8.5.1 Definition aktiver Rotorsteuerung

Da in modernen Hubschraubern neben der Pilotenaktivität noch einige zusätzliche elektronische Funktionalitäten wie Autopilot (AFCS, engl. automatic flight control system), künstliche Stabilisierung (SAS, engl. stability augmentation system) etc. installiert sind, die aktiv in die Steuerkette eingreifen, ist eine Definition der aktiven Rotorsteuerung notwendig. In dem hier gebrauchten Sinne umfasst eine aktive Rotorsteuerung all diejenigen Steuereingaben, die nicht der Flugsteuerung und Stabilisierung selbst dienen. Die Flugsteuerung ist dadurch charakterisiert, dass der Steuerwinkel an der Blattwurzel einmal pro Umlauf variiert (1/rev), wobei Amplitude und Phase durchaus dynamischen Variationen unterliegen, die von dem Piloten oder den elektronischen Systemen stammen. Diese Änderungen sind jedoch im Sinne einer Rotordrehung als langsam zu bezeichnen.

Eine aktive Rotorsteuerung kann darin bestehen, dass der Blatteinstellwinkel, der Verwindungswinkel oder eine Nasen- bzw. Hinterkantenklappe mehrfach pro Umdrehung periodisch variiert wird. Daher werden diese Steuerformen auch höherharmonische Steuerung (HHC, engl. higher harmonic control), individuelle Blattsteuerung (IBC, engl. individual blade control), aktive Verwindung oder lokale Blattsteuerung (LBC, engl. local blade control) genannt. Dieses Steuersignal überlagert sich dem für die Flugsteuerung notwendigen Steuerwinkel. Als Beispiel ist in Abb. 8.3 der Unterschied dargestellt. Aktiv werden diese Systeme genannt, da sie die Vibrationsquelle selbst angehen und die Erzeugung der instationären aerodynamischen Lasten beeinflussen. Dazu werden die Rotorblätter mit einem Spektrum von höherharmonischen Steuerwinkeln (HHC) beaufschlagt, was in neuen instationären aerodynamischen Kräften resultiert, welche die anderen Kräfte tilgen sollen. Im Prinzip werden so die höherfrequenten Lasten reduziert und gleichzeitig die Leistung des Rotors nicht beeinträchtigt. Es wurden viele Varianten untersucht und bei verschiedenen Rotorkonfigurationen erprobt. Dabei hat sich als verbreitete Maßnahme zunächst die Steuerung der Blattwurzel herausgestellt (seit ca. 1960). Bereits in den 50er Jahren wurden erste Untersuchungen zur höherharmonischen Rotorsteuerung angestellt, die sowohl die Vibrations als auch die Rotorleistung zum Gegenstand hatten (Stewart 1952 [1]; Payne 1958, [2]). Später wurde sowohl die Klappensteuerung analysiert als auch die aktive Verwindung (McCloud 1975, [3]).

Abb. 8.3 Steuerwinkel zur Flugsteuerung und bei aktiver Rotorsteuerung. Pilot (zzgl. AFCS, SAS): 0–1/rev; aktive Steuerung (HHC, IBC, LBC): 0–9/rev



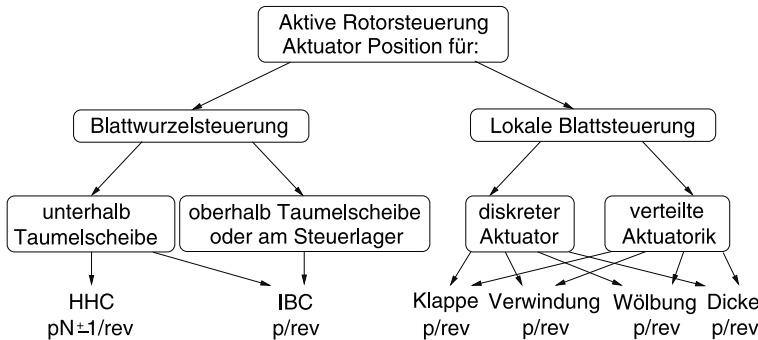
8.5.2 Elemente und Klassifizierung aktiver Steuerung

Die grundlegenden Elemente eines solchen Systems sind: Beschleunigungssensoren oder Dehnungsmessstreifen, die den dynamischen Zustand des Hubschrauberrumpfes messen, ein Aktuatorium an der Taumelscheibe, das die höherharmonischen Steuerwinkel generiert, ein Bordrechner, der Amplituden und Phasen berechnet und die Aktuatoren steuert und ein Datenübertragungssystem. Zusätzlich zur Vibrationsunterdrückung kann man dieses System auch zur Verminderung der Blattbeanspruchung verwenden, zur Beeinflussung des Strömungsabisses am rücklaufenden Blatt und zur Verminderung der akustischen Emission, zur Böenlastabminderung und zur gezielten Dämpfung von Rotorinstabilitäten.

Bis heute sind verschiedene Ansätze von aktiven Steuerungen entwickelt worden, die sich in zwei Hauptgruppen einteilen lassen. Die ersten Entwicklungen zielten darauf ab, die Primärsteuerung zu nutzen, sei es von unter- oder oberhalb der Taumelscheibe (HHC, IBC). Dabei wird der Blattsteuerwinkel direkt modifiziert. Moderne Aktuatorik macht die zweite Hauptgruppe möglich, bei der Aktuatoren direkt in das Blatt eingebaut werden und nur Teile des Rotorblattes bewegen, bzw. zusätzliche Momente und/oder Kräfte einbringen (LBC). Damit lassen sich Klappen (Flaps) steuern oder direkt die Verwindung (Twist) der Blätter variieren; aber auch die Wölbung (Camber) oder Dicke (Thickness) sind Ziel aktiver Blattsteuerung. Eine Übersicht der Konzepte ist in Abb. 8.4 gegeben.

8.5.3 Ausgeführte Beispiele

Versuche wurden sowohl mit Modellrotoren als auch mit Hubschraubern durchgeführt. Hughes Helicopters hatten erfolgreich ein HHC-System auf einer OH-6 implementiert und die Brauchbarkeit und Funktionsfähigkeit im Flugtest 1982 demonstriert [5]. Dabei wurden nur 4/rev Schwingungen der Taumelscheibe im Kollektiv und den zyklischen Winkeln eingebracht, so dass im drehenden System das Rotorblatt mit 3/rev, 4/rev und 5/rev angesteuert wird. Dies geschah mit hydraulischen Aktuatoren, die im nicht drehenden System unter der Taumelscheibe angebracht waren.

**Abb. 8.4** Klassifikation aktiver Rotorsteuerungskonzepte

Weitere Flugversuche wurden 1986 mit einer S-76 [6] und der SA 349 [7] durchgeführt. Im Prinzip dasselbe System wurde vom DLR im Windkanal an einem gelenklosen Modellrotor der Bo105 von MBB seit 1984 bis 2001 in zahlreichen Messkampagnen erprobt und eine Vibrationsminderung um bis zu 90 % als auch eine Lärmreduzierung um bis zu 6dB gemessen (Kube 1992, [8]; Yu 2002 [9]). Parallel dazu entwickelte MBB ein IBC System mit Aktuatoren im drehenden System und erprobte dies zunächst im NASA Ames Full-Scale Windkanal an einem Bo105 Hauptrotor (Richter 1993, [10]) und ab 1994 bis 2005 im Flugversuch. Auch Sikorsky arbeitet mit dem IBC Prinzip auf einem UH-60 Rotor im Full-Scale Windkanal der NASA (Norman 2002 [11] und 2008 [12]). ZF (Zahnradfabrik Friedrichshafen) Luftfahrttechnik entwickelte und lieferte dabei nicht nur die IBC-Aktuatoren sowohl für ECD als auch für Sikorsky, sondern führte auch eigene Tests auf einer CH-53 der Bundeswehr durch (Arnold 2004 [13]).

Klappenrotoren sind von Boeing bisher nur im Rotorprüfstand auf einem MD900 Explorer 5-Blatt Rotor erprobt worden (Straub 2004 [14]), jedoch brachte ECD seinen Klappenrotor zuerst in den Flugversuch (Roth 2006 [15]). Boeing hat in 2008 Tests im Full-Scale Windkanal der NASA erfolgreich durchgeführt [16] und anschließende Flugversuche angekündigt. Eine aktuelle Übersicht über HHC, IBC und LBC Versuche ist in [17] und [18] zu finden.

Generell wird das Hubschraubermodell im Frequenzbereich durch eine Übertragungsfunktion dargestellt, die eine Eingangsfunktion mit einer Ausgangsfunktion verbindet. Diese Betrachtungsweise öffnet den Weg für die Anwendung der Regelungstheorie und es wurden verschiedene Konzepte ausprobiert, um HHC zu implementieren. Eine Übersicht wurde von Chopra und McCloud 1983 gegeben [19]. Einige Beispiele zur HHC sind im Folgenden dargestellt.

Hubschrauber sind von Natur aus mit einem hohen Vibrationsniveau versehen, da die aerodynamische Umgebung in der Rotorebene hochgradig instationär ist. Stoßeffekte, Strömungsablösung, periodische Anstellwinkeländerungen, Blatt-Wirbel Interaktionen und Rumpfbeeinflussung der Strömung stellen die Quellen dar. Im Schwebeflug sind die

Strömungsverhältnisse relativ sauber und der Wirbelnachlauf entfernt sich schnell vom Rotor. Daher ist dieser Zustand vibrationsarm. Während der Transition ($0,05 < \mu < 0,2$) spielt die Interaktion von Wirbelsystem mit den Rotorblättern eine dominante Rolle und erzeugt große Vibrationen. Im Reiseflug um $\mu \approx 0,25$ sind die Vibrationen relativ gering, steigen aber ab $\mu > 0,3$ wieder an, da dann Stoßeffekte und Strömungsablösungen als auch ein zunehmender Einfluss der Rumpfumströmung für zunehmende dynamische Anregung der Blattschwingungen sorgen.

Vibrationsunterdrückungssysteme gliedern sich in

- Passive Systeme.

Diese können bis zu etwa 70 % der Vibrationen unterdrücken. Sie sind auf eine bestimmte Situation abgestimmt. Außerdem haben sie aufgrund ihrer Masse eine Reduktion der Nutzmasse zur Folge. Sie sind einfach und preiswert, können aber nicht an unterschiedliche Flugsituationen oder Beladungszustände angepasst werden.

- Aktive Systeme.

Mit diesen Systemen können bis zu 90 % der Vibrationen unterdrückt werden. Sie können außerdem an die momentane Flugsituation angepasst werden und sind damit viel weitergehender einsetzbar als passive Systeme. Ihre Masse ist denen der passiven Systeme vergleichbar, aber ihre Komplexität ist erheblich größer und sie sind dementsprechend teuer.

Ein System zur höherharmonischen Rotorblattsteuerung (HHC)

- dient zur aktiven Vibrationsunterdrückung
- agiert an der Quelle der Vibrationen
- steuert die Rotorblätter mit Vielfachen der Rotordrehzahl an und erzeugt damit dynamische Kräfte und Momente, die den Vibrationen entgegengesetzt sind
- kann auch zur Lärmreduzierung eingesetzt werden.

HHC-Systeme haben die Aktuatoren unterhalb der Taumelscheibe, daher kann nur eine eingeschränkte Auswahl von Frequenzen im drehenden System erzeugt werden, nämlich die Blattzahlharmonische N/rev und deren Nebenfrequenzen, also $N \pm 1/\text{rev}$. Bei Rotor mit bis zu drei Blättern kann man sogar individuelle Blattsteuerung machen, da drei Freiheitsgrade der Aktuatoren den bis zu drei Freiheitsgraden der Blattbewegung gegenüber stehen. Vorteil der HHC-Systeme ist, dass im drehenden System keine Änderungen notwendig sind und weder Energie noch Signale ins drehende System übertragen werden müssen. Allerdings muss bei HHC Systemen die Taumelscheibe mit bewegt werden und die Aktuatoren entsprechend stärker ausgelegt sein.

Eine Weiterentwicklung der HHC-Systeme sind die IBC-Systeme, welche die Aktuatoren im drehenden System aufweisen, also in der Regel die Steuerstangen durch Aktuatoren ersetzen. Die Hubschraubersteuerung bleibt dabei aber bei den Aktuatoren unterhalb der Taumelscheibe. Damit lässt sich jedes Rotorblatt unabhängig voneinander ansteuern

und der Einsatzbereich ist außerdem um die Möglichkeit, während des Fluges den Blattspurlauf einzustellen, erweitert. Im Vergleich zu HHC ist man im Frequenzbereich nicht eingeschränkt. Außerdem kann man die Blätter statisch gegeneinander verstellen und bei genügender Autorität auch auf die Aktuatoren unterhalb der Taumelscheibe verzichten, so dass die IBC Aktuatoren auch die Basissteuerung des Hubschraubers mit übernehmen könnte.

Diese Möglichkeiten sind jedoch bis heute nicht gänzlich erprobt und die IBC Systeme sind ausschließlich als HHC mit erweitertem Frequenzbereich eingesetzt worden. Insbesondere ist die Steuerung mit 2/rev zur Reduktion von Blatt/Wirbel Interaktionslärm (BVI-Lärm, vom engl. blade vortex interaction) ebenfalls als sehr wirksam gefunden worden. Allerdings muss man die Aktuatorenenergie (in der Regel Hydraulik) ins drehende System bringen, was erheblichen Aufwand bedeutet und ebenso erhebliche Kosten verursacht.

Mit HHC und IBC sind auch neuere Ansätze verwandt. Einer davon bringt alle Aktuatorik (sowohl für die Primärsteuerung als auch den IBC-Anteil) direkt an die Blattwurzel und damit wird die Taumelscheibe überflüssig, siehe Abb. 8.18. Allerdings muss die gesamte Energie (hier elektrisch) erzeugt und mit den zugehörigen Steuersignalen in das drehende System übertragen werden.

Ein anderer Ansatz geht den umgekehrten Weg. Hierbei wird volle IBC-Funktionalität auch bei Rotoren mit mehr als drei Blättern mittels bewährter HHC-Technologie erreicht, indem mehrere Taumelscheiben umeinander herum angeordnet und maximal drei Blätter je Taumelscheibe angesteuert werden, siehe Abb. 8.19. Dann sind alle erforderlichen Komponenten im nicht drehenden System und das drehende System bleibt praktisch unverändert.

Aktive Klappen an der Blatthinterkante (engl. active trailing edge flaps) sind eine logische Weiterentwicklung. Diese kleinen, relativ leichten Systeme bieten außerdem erweiterte Möglichkeiten durch lokale Blattsteuerung (LBC). Durch statischen Ausschlag der Klappen lässt sich obendrein die Blattverwindung ändern, was im Schwebeflug von Vorteil ist, da durch große Verwindung mehr Schub bei gleicher Leistung erzeugt werden kann. Auch kann man damit zu jedem Flugzustand die optimale Verwindung einstellen und außerdem Spurlaufunterschiede beseitigen. Ansonsten bieten sie die selben Möglichkeiten wie die IBC-Systeme.

Da aktive Klappen neben einer Auftriebsänderung im Wesentlichen ein aerodynamisches Moment erzeugen, wirken sie indirekt über die Blatttorsion, um den erwünschten Effekt höherharmonischer Auftriebe am Rotorblatt zu erzeugen. Daher sind bei torsionssteifen Blättern relativ große Klappen (bis 25 % der Blatttiefe und 25 % des Radius) notwendig, um überhaupt eine nennenswerte Torsionsreaktion zu erzeugen bzw. direkt in den Auftriebshaushalt eingreifen zu können (DLC-Klappe, vom engl. direct lift control). Bei torsionsweichen Blättern genügen kleine Klappen mit 15 % der Blatttiefe und 10–15 % der Blattlänge (engl. servo flap). Sie wirken primär über das auch bei kleinen Klappentiefen relativ große aerodynamische Moment, welches das Blatt verdrillt. Nachteil ist, dass die im Vergleich zur Blattstruktur relativ schweren Aktuatoren außen am

Rotorblatt liegen und daher den großen Fliehkräften ausgesetzt sind, weshalb die Blätter speziell zur Aufnahme dieser Lasten entworfen werden müssen. Ihre Masse kommt dort jedoch der Rototrägheit zu Gute, was für die Autorotation von Vorteil ist.

Die nächste Entwicklung führt hin zu aktiven Materialien, die verteilt in die Blattstruktur eingebaut werden. Damit lässt sich direkt eine Verwindung der Rotorblätter individuell und im gesamten Frequenzbereich (auch statisch) bewerkstelligen (engl. active twist rotor). Durch eine ebenfalls denkbare variable Krümmung der Profilsehne – was der Wirkung einer Klappe gleichkommt – lässt sich außerdem noch das Stallverhalten des Profils in gewissen Grenzen beeinflussen.

Der Stand der Versuchstechnik ist in folgenden Publikationen nachzulesen. Eine gute Übersicht ist außerdem in [17] und [18] gegeben.

- Windkanalversuche: McCloud (1971, 1978), Sissingh (1975), Shaw (1975, 1980, 1985), Hammond (1978), Lehmann (1984, 1986, 1988), Kube (1990, 1994 = HART I), MBB (1993, 1994), MIT (2000), van der Wall (2001 = HART II), Straub (2008), Sikorsky (2008), Bartels (2015), Küfmann (2016)
- Flugversuche: Bell (1962), McDonnell (1982), Sikorsky (1986), Aérospatiale (1986), MBB (1990), ECD (2005)

8.5.4 Aufbau eines HHC-Systems und sein Leistungsbedarf

In generalisierter Form handelt es sich um ein lineares System, in dem die Störgröße \vec{z} aus einer Störgröße des Basishubschraubers ohne HHC, \vec{z}_0 , und dem Produkt einer System- oder Transfer-Matrix \mathbf{T} mit dem Steuervektor der HHC, $\vec{\Theta}_{\text{HHC}}$, besteht. Es gilt, durch geeignete Wahl des Steuervektors die Störgröße zu eliminieren. Zum Beispiel sind bei einem vierblättrigen Rotor die Sinus- und Cosinus-Anteile der Vibrationslasten zu unterdrücken. Dies sind im drehenden System: 4/rev: vertikale Kräfte und das Antriebsmoment; 3/rev und 5/rev: Querkräfte und Schlagbiegemomente, insgesamt also 10 Größen. Der Steuervektor einer HHC würde die 3, 4 und 5/rev Anteile des Steuerwinkels, jeweils als Sinus- und Cosinus-Anteil, beinhalten, also 6 Steuergrößen.

$$\vec{z} = \vec{z}_0 + \mathbf{T}\vec{\Theta}_{\text{HHC}} \quad (8.8)$$

Die Aktuatoren sind in der Regel hydraulisch betrieben (da die Hydraulik sowieso Bestandteil der Hubschraubersysteme ist). Bei HHC Systemen sind sie oberhalb der Hydraulikzylinder für die Basissteuerung montiert (also drei Aktuatoren); bei IBC-Systemen ersetzen sie die Steuerstangen im drehenden System und es werden so viele Aktuatoren benötigt wie Rotorblätter vorhanden sind. Die Aktuatorleistung hängt von den Kräften und Stellgeschwindigkeiten ab, die sie erzeugen müssen. Da HHC-Systeme die gesamte Tausmscheibe und alle Blätter verstetzen, müssen sie etwas leistungsstärker als IBC-Systeme sein, die jeweils nur die Masse eines Blattes bewegen müssen. Mit noch weniger Energie kommen Klappensysteme aus, da die Klappe sehr klein und leicht ist.

8.6 Hubschrauberstörgrößen

8.6.1 Vibrationen

Die Hauptursache für die Hubschraubervibrationen stellt die Variation der Blattanströmgeschwindigkeit mit der Rotordrehung dar, die zwar hochfrequent, im stationären Flugzustand jedoch periodisch mit dem Umlaufwinkel ist. Gleiches gilt für die an den Rotorblättern angreifenden Luftkräfte, die auf Grund der Blattelastizitäten zu Blattschwingungen, verbunden mit Elastizitäts- und Massenträgheitskräften, führen. Auch die Resultierende dieser Kräfte ist, über eine Umdrehung gesehen, periodisch und daher können alle diese Kräfte als Fourierreihe dargestellt werden, die sich ausschließlich aus sogenannten Rotorharmonischen zusammensetzt (Abb. 8.5).

Die Amplitude der einzelnen Harmonischen ist abhängig von der Lage der Blatteigenfrequenzen und kann bei Resonanznähe beträchtliche Werte annehmen. Bei der Überlagerung der einzelnen Blattkräfte am Rotorkopf tilgen sich die Rotorharmonischen jedoch teilweise gegenseitig. Die resultierenden, am Rotorkopf angreifenden Kräfte aller Blätter im nicht drehenden System bestehen daher nur noch aus sogenannten Blattzahlharmonischen der Frequenz f_n

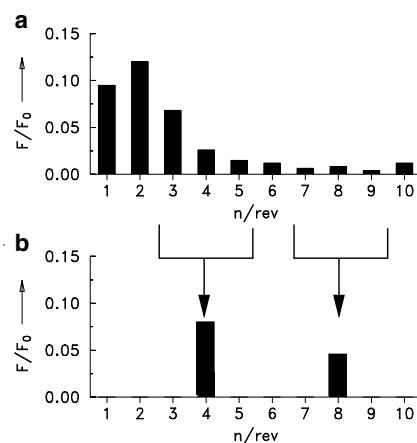
$$f_n = nN\Omega \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

für den Schub T und das Antriebsmoment Q mit N als Blattzahl und Ω als Rotordrehfrequenz. Die nN/rev Vibrations im Roll- und Nickmoment (M_x, M_y), in der Längs- und Querkraft (H, Y) werden von den direkten Nachbarn der Blattzahlharmonischen gebildet.

$$f_n = (nN \pm 1)\Omega \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Die ganzzahlig Vielfachen der Rotordrehfrequenz, $n\Omega$, werden üblicherweise mit n/rev bezeichnet (rev vom engl. revolution). Sie führen zu Kabinenvibrationen, die sich im Ide-

Abb. 8.5 Charakteristika der Hubschraubervibrationen eines vierblättrigen Rotors. **a** normierte Blattkraft, drehendes System, **b** normierte Kraft, nicht drehendes System

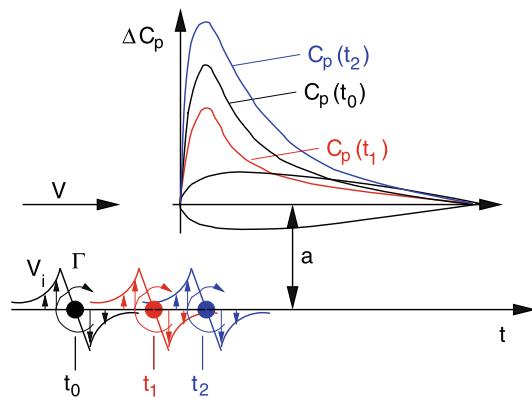


alfall ausschließlich aus Blattzahlharmonischen zusammensetzen. Dieser Zusammenhang ist in Abb. 8.5 exemplarisch für den Fall eines 4-Blatt Rotors dargestellt. Das Bild lässt erkennen, dass die Blattkräfte der Frequenzen 3, 4 und 5/rev ausschließlich Kabinenvibrationen der Frequenz 4/rev hervorrufen. Dabei wirken sich von den Blattkräften der Frequenz 4/rev ausschließlich die senkrecht zur Rotorebene angreifenden Kräfte auf die Kabine aus, wo sie Vibrationen der Frequenz 4/rev in vertikaler Richtung hervorrufen. Von den Blattkräften der Frequenzen 3/rev und 5/rev hingegen werden lediglich die in der Rotorebene angreifenden Kräfte H und Y sowie die Momente M_x und M_y auf die Kabine übertragen, wo sie ebenfalls Vibrationen der Frequenz 4/rev, allerdings in longitudinaler und lateraler Richtung bzw. um deren Achsen, hervorrufen.

Diese Beziehung zwischen Blattkräften und Kabinenvibrationen existiert jedoch nur dann, wenn die Rotorblätter untereinander völlig identisch sind. Da dies in der Realität nicht der Fall ist, enthalten die Kabinenvibrationen in der Regel auch Anteile, die zwischen den Blattzahlharmonischen liegen (im obigen Beispiel also 1, 2, 3/rev sowie 5, 6, 7/rev etc.), deren Amplituden mit den Fertigungsungenauigkeiten der Blätter zunehmen. Im Allgemeinen ist jedoch damit zu rechnen, dass die erste Blattzahlharmonische die größte Amplitude aufweist. Da dieser Spektralanteil darüber hinaus eine Frequenz besitzt, für die Menschen sehr sensibel sind, werden die Hubschraubervibrationen von Besatzung und Passagieren als besonders unangenehm empfunden.

8.6.2 Lärmemissionen

Die Lärmemissionen eines Hubschrauberrotors sind ausschließlich aerodynamischen Ursprungs und resultieren aus verschiedenen flugzustandsabhängigen Effekten. Mit besonders hoher Intensität treten sie auf, wenn der Hauptrotor, wie z. B. im Manöver- und Landeanflug, in seinem eigenen Abwindfeld arbeitet. In einem solchen Fall kommt es zu Interaktionen der Rotorblätter mit den Nachlaufwirbelsystemen der vorlaufenden Blätter, die hochfrequente Änderungen der aerodynamischen Blattkräfte bzw. -drücke zur Folge haben. Betrachtet man beispielsweise ein zweidimensionales Modell eines Wirbels, der ein Blattsegment in geringem Abstand passiert, so stellt der Wirbel mit seinem induzierten Geschwindigkeitsfeld eine Störung der lokalen Geschwindigkeit mit einer Verteilung wie der in Abb. 8.6 gezeigten dar. Je größer die Zirkulation Γ des Wirbels ist, um so größer ist auch der Geschwindigkeitsgradient innerhalb des Wirbelkerns. Das Blattelement besitzt im unbeeinflussten Zustand einen maximalen Unterdruck C_{p0} , wenn sich der Wirbel zum Zeitpunkt $t = t_0$ weit entfernt vom Blatt befindet. Bei $t = t_1$ passiert der erste Teil des Wirbels die Blattnasenkante und reduziert den maximalen Unterdruck impulsartig auf den Wert C_{p1} . Nachdem sich der Wirbel weiter stromabwärts bewegt hat, befindet er sich zum Zeitpunkt $t = t_2$ vollständig unterhalb des Blattelementes und erhöht das Maximum des Unterdrucks auf den Wert C_{p2} . Da das Intervall zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 sehr kurz ist (in der Größenordnung bis zu 1/500 einer Rotordrehung; z. B. 0,25 ms bei

Abb. 8.6 Entstehung des BVI-Lärms

der Bo105), ändert sich der Blattdruck während der Wirbelpassage fast sprungartig, was Lärmemissionen impulsiven Charakters zur Folge hat.

Das in Abb. 8.6 gezeigte Beispiel geht von einem im Uhrzeigersinn rotierenden Wirbel aus und ist typisch für die Blatt-Wirbel Interaktion an der vorlaufenden Seite eines Rotors. Im Schnellflug entsteht oft auch ein Abtrieb an der Blattspitze im Bereich $100^\circ < \psi < 150^\circ$, wo der Wirbel erzeugt wird. Dann dreht der Wirbel anders herum und die Auswirkung auf das Profil ist ebenfalls in umgekehrter zeitlicher Reihenfolge. Als Beispiel einer an der rücklaufenden Seite des Rotors gemessenen direkten Kollision eines Blattspitzenwirbels mit dem Rotorblatt ist in Abb. 8.7 die Druckverteilung an drei aufeinander folgenden Blattpositionen gezeigt. Da der Wirbel hier andersherum dreht als in Abb. 8.6 skizziert, ist die Reihenfolge der Ereignisse ebenfalls umgekehrt. Deutlich sichtbar ist die Druckänderung insbesondere im vorderen Bereich des Profils, wobei die Änderung direkt an der Nasenspitze bei $x/c = 0$ besonders auffällt. Bei Abb. 8.7a befindet sich das Blatt noch weit genug vom Wirbel entfernt, bei Abb. 8.7b ist die Nase im Bereich des maximalen Aufwindes an der einen Seite des Wirbels, bei Abb. 8.7c im Bereich des maximalen Abwindes an der anderen Seite des Wirbels. Zwischen Abb. 8.7b und c liegen

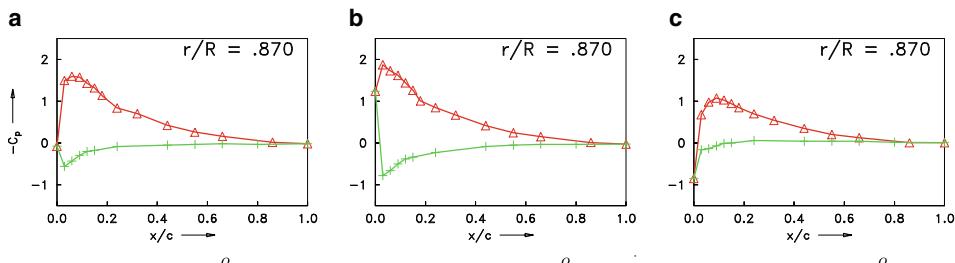


Abb. 8.7 Gemessene Druckverteilung während BVI (Messungen DLR 1992). **a** $\psi = 261^\circ$, **b** $\psi = 283,7^\circ$, **c** $\psi = 289,4^\circ$. Rot: Oberseite; grün: Unterseite

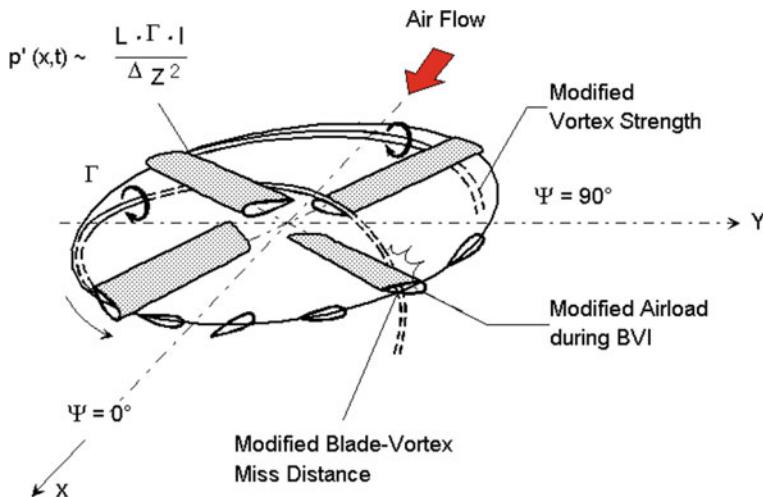


Abb. 8.8 Wirbelentstehung und Blatt/Wirbel-Interaktion

nur $5,7^\circ$ Azimut, das entspricht in diesem Fall (Bo105 Modellrotor) einer Zeitspanne von nur 0,9 ms; bei der Bo105 (Full-Scale) umgerechnet 2,25 ms. Das experimentelle Erfassen dieser Ereignisse stellt also auch hohe Ansprüche an die Messtechnik.

In erster Näherung ist dieser BVI-Lärm direkt proportional zur Wirbelstärke und der radialen Interaktionslänge sowie umgekehrt proportional zum Quadrat des Blatt/Wirbel-Abstandes und erreicht somit sein Maximum, wenn Wirbelsegmente hoher Zirkulation parallele Interaktionen mit den Rotorblättern in geringem Abstand zu diesen ausüben. Diese Interaktionen treten zwischen 45° und 55° bzw. 305° und 315° Rotorazimut auf, während die lärmrelevanten Wirbelsegmente bei ca. 130° bzw. 230° Rotorazimut generiert werden (Abb. 8.8). Weitere Lärmquellen stellen Stoßwellen aufgrund lokaler Überschallgebiete im schnellen Vorwärtsflug, durch Strömungsablösung induzierter breitbandiger Lärm, sowie von der Grenzschichtturbulenz erzeugter ebenfalls breitbandiger Lärm dar. Von Unebenheiten der Hubschrauberzelle stammen ebenfalls Lärmanteile; von der Aerodynamik wenig beeinflusst sind Motor- und Getriebelärm. Als Beispiel für Stoßwellen und Stalleffekte sind in Abb. 8.9a gemessene Druckverteilungen am Bo105 Modellrotor mit Stoß auf Ober- und Unterseite des Profils an der Blattspitze des vorlaufenden Blattes und in Abb. 8.9b am ERATO Modellrotor bei halbem Radius vorhandene Strömungsablösung auf der rücklaufenden Seite gegeben [4].

8.6.3 Rotorinstabilitäten

Die bedeutendste Form der Rotorinstabilitäten ist das Stall-Flattern (reines Torsions- oder Schlag-Torsions-Flattern). Es tritt hauptsächlich in Flugzuständen mit hohen Fortschrittsgraden und großen Schubbelastungen im Manöverflug auf, bei denen wegen der niedrigen

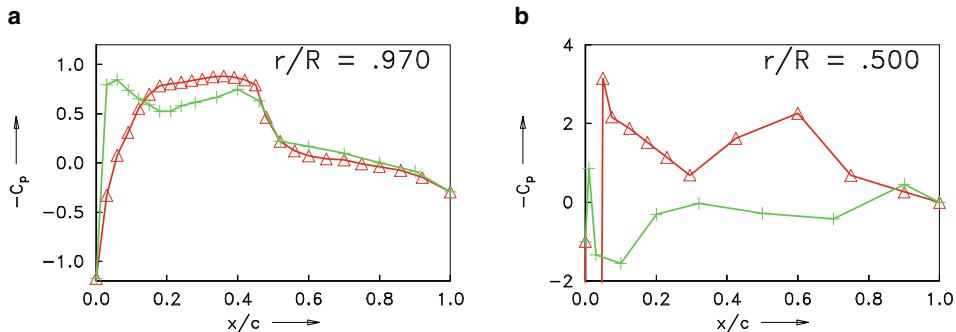


Abb. 8.9 Beispiele von Stößen und Ablösungen bei hoher Fluggeschwindigkeit. **a** $\psi = 90^\circ$, **b** $\psi = 270^\circ$. *Rot:* Oberseite; *grün:* Unterseite (Messungen DLR 1992 und 1998)

Blattanströmgeschwindigkeit auf der rücklaufenden Seite große Blattstellwinkel zum Erzeugen des notwendigen Auftriebs in diesem Teil der Rotorkreisfläche erforderlich werden. Bei großen Blattstellwinkeln bildet sich jedoch oft an der Nasenkante des Blattprofils ein Wirbel aus, der ablöst und nach hinten abschwimmt. Dadurch verschiebt sich die Position des maximalen Unterdrucks in Blatttiefenrichtung vom vorderen in den mittleren Profilbereich (Abb. 8.10), was ein stark nasenlastiges Torsionsmoment um die elastische Achse des Rotorblattes zur Folge hat.

Der zugehörige zeitliche Verlauf des Auftriebs weist zunächst ein Anwachsen über den stationär erreichbaren Wert hinaus auf, danach ein abruptes Zusammenbrechen des Auftriebs, verursacht durch Strömungsablösung. Bei kleineren Anstellwinkeln legt sich die Strömung wieder an das Profil an (Abb. 8.11a). Bei kleinen Anstellwinkeln liegt immer anliegende Strömung vor und die Hystereseschleife ist schmal. Zusätzlich ist der stationäre Verlauf des Auftriebs in Abhängigkeit des Anstellwinkels mit eingetragen (Symbole); außerdem der Einfluss einer Hinterkantenklappe von 15 % Profiltiefe, die stationär um $\pm 3^\circ$ ausgeschlagen ist und aufgrund der dadurch entstehenden Wölbung die Polare entsprechend anhebt oder senkt. Eine aktive, d. h. dynamisch ausgeschlagene Hinterkantenklap-

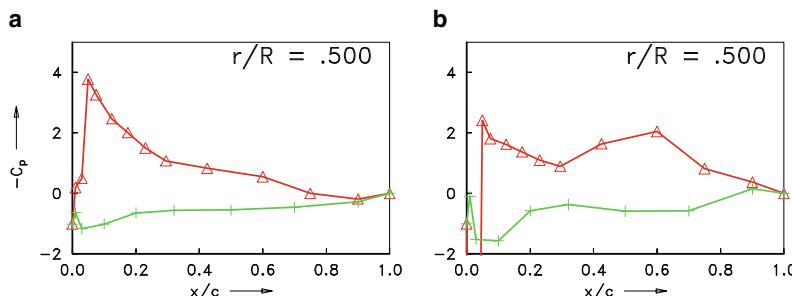


Abb. 8.10 Druckverteilung am Blattprofil bei hohen Anstellwinkeln **a** Anliegende Strömung, $\psi = 200^\circ$, **b** abgelöste Strömung, $\psi = 290^\circ$. *Rot:* Oberseite; *grün:* Unterseite (Messungen DLR 1998)

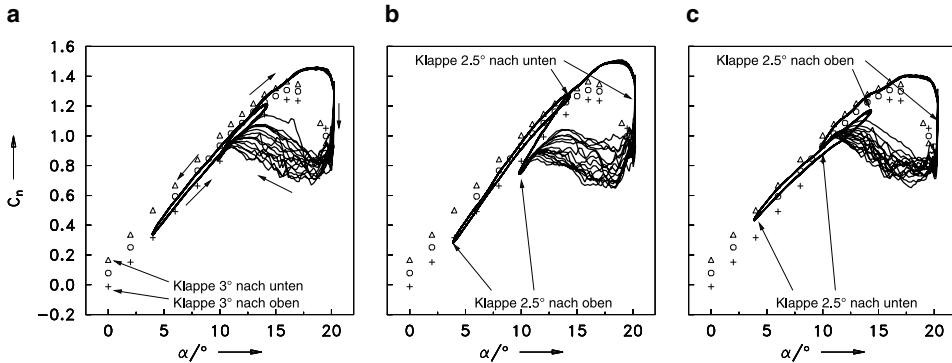


Abb. 8.11 Auftriebshysterese für ein schwingendes Profil mit Hinterkantenklappe. **a** Profil allein, **b** Klappe in Phase, **c** in Gegenphase (Messungen DLR 1998)

pe ermöglicht daher eine Beeinflussung der dynamischen Hystereseffekte in der Form, dass bei anliegender Strömung der Auftriebsanstieg vergrößert oder verkleinert werden kann, aber auch die Effekte beim Ablösen der Strömung modifiziert werden. Dies ist in Abb. 8.11b für den Fall dargestellt, dass die Klappe bei gleicher Frequenz in Phase mit dem Anstellwinkel ausschlägt (also bei kleinstem Anstellwinkel den Auftrieb weiter verringert und bei größtem Anstellwinkel den Auftrieb vergrößert) und in Abb. 8.11c für den gegenphasigen Ausschlag (Effekte umgekehrt). Diese Effekte sind im Bereich anliegender Strömung gut zu erkennen, im Bereich abgelöster Strömung aber offensichtlich von geringerer Bedeutung, da sich die Oberseite der Klappe in abgelöster Strömung befindet. Analog verhält sich das aerodynamische Moment, wobei der abrupte Anstieg des Moments bei der Strömungsablösung eine erhebliche Anregung der elastischen Blatttorsion darstellt. Die Hystereseschleife der Torsion bestimmt dabei das Maß der Dämpfung, die auch negativ, d. h. die Schwingung anfachend, sein kann (Abb. 8.12a). Diese aerodynamische Dämpfung definiert sich als das Flächenintegral innerhalb der Hystereseschleife und das Vorzeichen ist daher vom Umlaufsinn abhängig. Eine Dämpfung liegt immer dann vor, wenn die Hysterese im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird und eine Anfachung findet im Fall eines Umlaufs im Uhrzeigersinn statt. Im Fall dynamischer Strömungsablösung bei großen Anstellwinkeln hat man also immer die Gefahr einer Anregung, was die Torsionsschwingung des Rotorblattes anfacht.

Ein stationärer Klappenausschlag an der Hinterkante erzeugt eine Wölbung des Profils und damit eine Verschiebung der Momentenpolare nach oben bzw. unten, je nach Ausschlagsrichtung. Dynamische Klappenausschläge können daher herangezogen werden, um in den Momentenhaushalt geeignet einzugreifen, so dass die Dämpfung von Torsionsschwingungen erhöht wird. Für dieselben Konfigurationen (wie zuvor beim Auftrieb gezeigt) sind in Abb. 8.12b die phasengleiche und in Abb. 8.12c die gegenphasige Klappenbewegung gegeben. Die mittels Strömungsablösung erzeugten aerodynamischen Momente können eine selbsterregte Torsionsschwingung entstehen lassen (Abb. 8.13). Sie hat

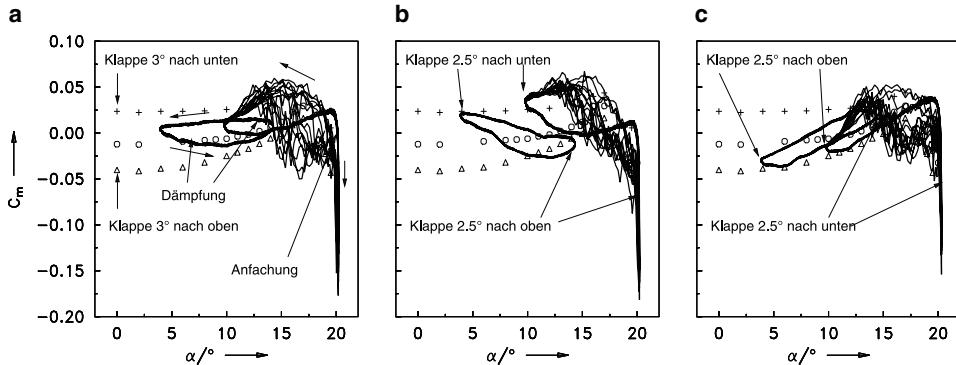
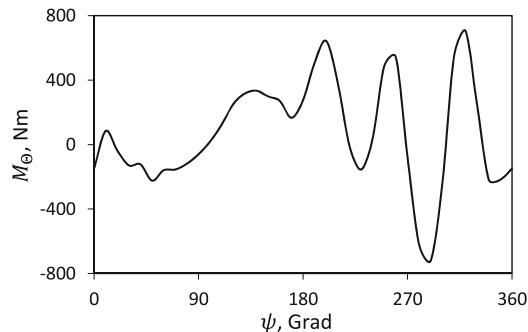


Abb. 8.12 Hysteresis des Momentes für ein schwingendes Profil. **a** Profil allein, **b** Klappe in Phase, **c** in Gegenphase (Messungen DLR 1998)

Abb. 8.13 Variation der Steuerstangenkraft beim Stall-Flattern



nicht nur hohe Lasten für das Steuersystem, sondern darüber hinaus auch einen gesteigerten Rotorleistungsbedarf zur Folge und stellt eines der Haupthindernisse für die Erhöhung der Hubschrauberendgeschwindigkeit dar. Insbesondere ist das Verhältnis der Frequenz der sich am Profil ablösenden Wirbel und der Torsionseigenfrequenz der Rotorblätter von Wichtigkeit. Liegen diese nahe beieinander, kann es zu erheblichen Torsionsamplituden und damit zu Lasten des Steuersystems kommen.

8.6.4 Boden- und Luftresonanz

Boden- und Luftresonanz (siehe Kap. 7) resultieren aus der Schwingungsfähigkeit des Rotorsystems und des Hubschrauberrumpfes inklusive seines Landegestells. Beide Phänomene stellen eine Instabilität der gekoppelten Rotor/Rumpf-Schwingung dar und treten auf, wenn die Rotorblätter eine derartige Schwenkbewegung durchführen, dass ihr gemeinsamer Schwerpunkt nicht mehr mit der Rotorachse zusammenfällt. Die resultierende umlaufende Unwucht generiert dynamische Momente um die Längs- und Querachse des Rumpfes, der dadurch zu Schwingungen angeregt wird. Diese Schwingungen des Hub-

schrauberrumpfes haben ihrerseits eine Rückwirkung auf die Schwenkbewegung der Rotorblätter, so dass eine Kopplung entsteht, welche die Gefahr der Instabilität in sich birgt. Die Bodenresonanz ist eine selbsterregte mechanische Instabilität, bei deren Erzeugung Luftkräfte keine Rolle spielen.

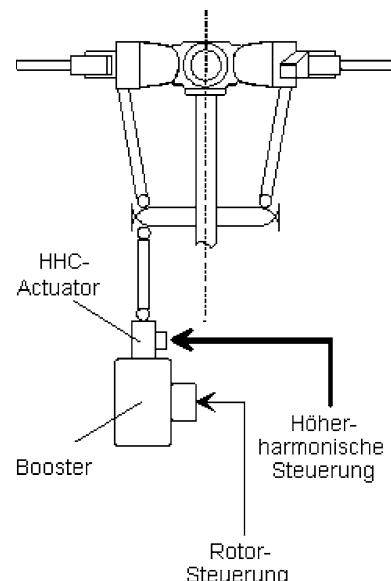
Eine Abhilfe zur Behebung dieser Resonanzprobleme schaffen Schwenkdämpfer am Schwenkgelenk bei gelenkig gelagerten Rotoren. Bei gelenklosen Rotoren mit elastischer Verformung des Blatthalses ist ein größerer Aufwand erforderlich, um mechanische Dämpfer mit ausreichender Wirkung zu implementieren. Da die Schwenkbewegung aerodynamisch fast ungedämpft ist (der Widerstand nur aufgrund einer Schwenkbewegung ist vernachlässigbar klein gegenüber den beteiligten Massenkräften), kann man sich dennoch eine aktive Blattsteuerung zur Dämpfungserhöhung vorstellen, bei der dynamisch der Widerstand erhöht wird, so dass, phasenrichtige Steuerung relativ zur Schwenkbewegung vorausgesetzt, eine effektive Dämpfung der Boden- oder Luftresonanz möglich ist.

8.7 Technik der aktiven Rotorsteuerung

8.7.1 Höherharmonische Steuerung

Um die Hubschrauberstörgrößen effizient reduzieren zu können, ist es erforderlich, am Ort ihrer Entstehung, d. h. dem Angriffspunkt der aerodynamischen Blattkräfte, einzutreten. Dies gelingt mit Hilfe der höherharmonischen Steuerung (HHC), bei welcher der Steuereingabe des Piloten ein höherharmonischer Blatteinstellwinkel überlagert wird. Seine Realisierung erfolgt mittels elektro-hydraulischer Aktuatoren, die, wie in Abb. 8.14 dargestellt, unterhalb der Taumelscheibe montiert werden. Diese HHC-Aktuatoren ermöglichen es, die Taumelscheibenlage im Raum während einer Rotordrehung so zu verändern, dass den Steuereingaben des Piloten im drehenden Rotorsystem die erste Blattzahlharmo-nische N/rev , sowie ihre direkten Nachbarn ($N \pm 1$)/rev überlagert werden. Für den Fall einer 4/rev-Steuerung ist der aus einer solchen Überlagerung resultierende Verlauf des Gesamt-Blatteinstellwinkels in Abb. 8.3 dargestellt. Sein höherharmonischer Anteil setzt sich entsprechend den obigen Ausführungen beispielsweise bei einem 4-Blatt-Rotor aus 3, 4 und 5/rev Blatteinstellwinkeln zusammen, deren Amplituden und Phasenverschie-bungen in weiten Bereichen variiert werden können.

Am Weitesten wurde die Entwicklung eines HHC-Systems von der Firma *Hughes Helicopters* vorangetrieben. Das auf einer OH-6A implementierte System [5] bestand aus Beschleunigungsaufnehmern zum Messen der Vibrationen, elektro-hydraulischen HHC-Aktuatoren, einem flugtauglichen Rechner zur automatischen Ermittlung der optimalen Amplituden und Phasen sowie einem elektronischen Interface zur Aufbereitung der Mess- und Steuersignale. Ähnlich ausgerüstet war die Bo105 S1 von ECD, die bis 2004 mit einem IBC-System ausgerüstet im Einsatz war (Abb. 8.15). Mittels Kufenmikrofonen

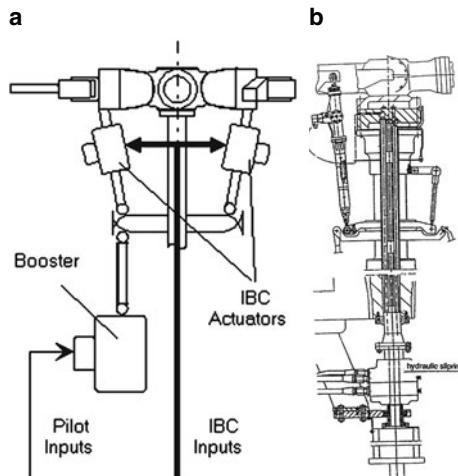
Abb. 8.14 HHC-Aktuatoren

konnte die Lärmemission im Flug gemessen und als Regelgröße zurückgeführt werden. Allerdings ist die Auswertung der Mikrofonsignale zeitaufwändig und die Nutzsignale sind verrauscht, so dass ein darauf basierender Regler relativ langsam ist. Außerdem sind die Mikrofone ortsfest, die Lärmabstrahlrichtung jedoch nicht, so dass das Messsignal gegebenenfalls irreführend sein kann. Das DLR entwickelte einen auf Blattdrucksensoren basierenden Regler, der die Lärmquelle, nämlich die Druckschwankungen an der Nasenkante des Blattes, misst und dem Regler zuführt. Diese Signale sind weniger verrauscht als die Mikrofonsignale und erlauben daher die Auslegung eines schnellen Reglers.

Abb. 8.15 Bo105 S1 von ECD mit IBC Blattwurzelsteuerung und Mikrofonen am Landegestell. © Airbus Helicopters



Abb. 8.16 IBC-Aktuatoren und Hardwarerealisierung.
a Prinzip, b Realisierung



8.7.2 Einzelblattsteuerung

Eine allgemeine Erweiterung der höherharmonischen Steuerung stellt die Einzelblattsteuerung (IBC) dar. Sie ermöglicht eine Verstellung der Rotorblätter unabhängig voneinander und erlaubt somit eine weitgehende Unterdrückung der Hubschrauberstörgrößen. Die Aktuatoren für die Blattverstellung befinden sich bei dieser Technik oberhalb der Taumelscheibe (Abb. 8.16a) und werden über Schleifringe versorgt und angesteuert. Das System der Firma ZF Luftfahrttechnik (ZFL) arbeitet z. B. mit einem hydraulischen Schleifring, der mit einer Steigleitung im Inneren des Rotormastes verbunden ist und die Aktuatorleistung überträgt, Abb. 8.16b. Die Aktuatoren ersetzen die drehenden Steuerstangen und werden über einen elektrischen Schleifring angesteuert. IBC-Versuche sind sowohl an einem Bo105 Hauptrotor im Windkanal der NASA Ames 1993 und 1994 durchgeführt worden (Abb. 8.17a), als auch mit einer Bo105 von ECD seit 1993 im Flugversuch (Abb. 8.15). Von ZFL wurde auch eine CH-53 der Bundeswehr mit IBC ausgerüstet, um deren Vibrationen zu unterdrücken; Flugversuche fanden 2003 statt. Ein neuer Test mit IBC auf einem UH-60 Rotor wurde 2008 im großen Windkanal der NASA Ames sehr erfolgreich durchgeführt, siehe Abb. 8.17b.

8.7.3 Zukünftige Steuerungssysteme

Die bisher ausgeführten HHC und IBC Systeme hatten eine klare Trennung der Funktionalitäten der Basissesteuerung und der aktiven Steuerung. Wurden bei HHC beide Aktuatoren übereinander gestapelt, so waren sie bei IBC räumlich getrennt. Um die Vorteile der IBC-Aktuatoren mit den Notwendigkeiten der Basissesteuerung zu vereinen, wird gegenwärtig daran gearbeitet, beide Komponenten in den Rotorkopf zu verlegen, siehe Abb. 8.18.

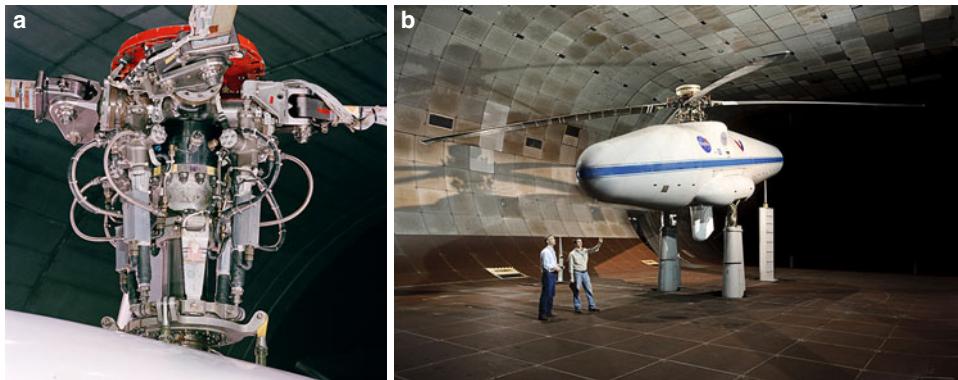


Abb. 8.17 IBC-Windkanaltests bei der NASA Ames. **a** Bo105, 1993/94, **b** UH-60, 2008. © NASA

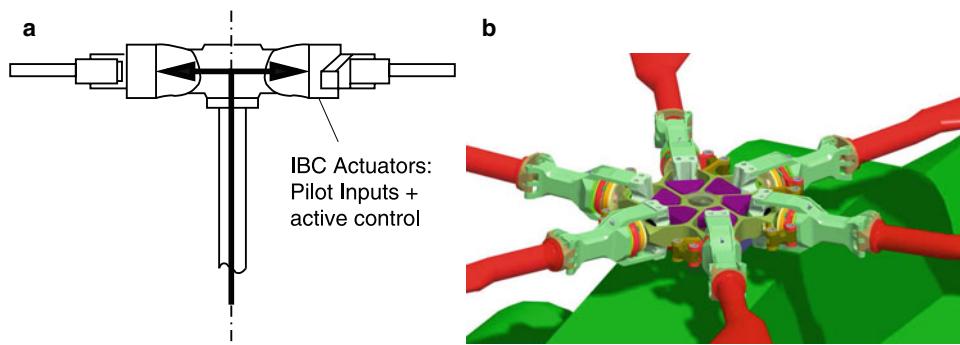


Abb. 8.18 Zukünftige integrierte Blattwurzelsteuerungssysteme. **a** Prinzip, **b** Entwurfsbeispiel (CH-53)

Dabei hat dann jedes Blatt an der Wurzel einen eigenen Aktuator, der sowohl die Basissteuerung als auch die IBC-Anteile übernimmt. Dann entfällt die Taumelscheibe komplett und auch das Mehrgewicht durch Trennung der Aktuatoren, da diese in einem Bauteil integriert sind.

Allerdings bereitet der Nachweis der Ausfallsicherheit dabei erhebliche Probleme, neben technischen Aspekten wie der Auswahl der Aktuatoren, die aufgrund der Anforderungen an Amplitude, Frequenz und Leistung auf hydraulischen, gegebenenfalls auch elektrischen Antrieben basieren werden. Dies bedeutet, dass entweder die Versorgung mit Hydraulik beziehungsweise elektrischer Energie aus dem stehenden System mittels eines entsprechenden Schleifringes erfolgen muss, oder mittels geeigneter Mechanik eine Pumpe bzw. ein Generator im drehenden System für ausreichende Energieversorgung arbeitet. Außerdem müssen die elektrischen Steuersignale an die Aktuatoren ausfallsicher übermittelt werden, entweder über einen Schleifring oder berührungslos. Den umgekehrten Weg, nämlich alle Aktuatorik ins nicht drehende System zu verlegen, war bislang

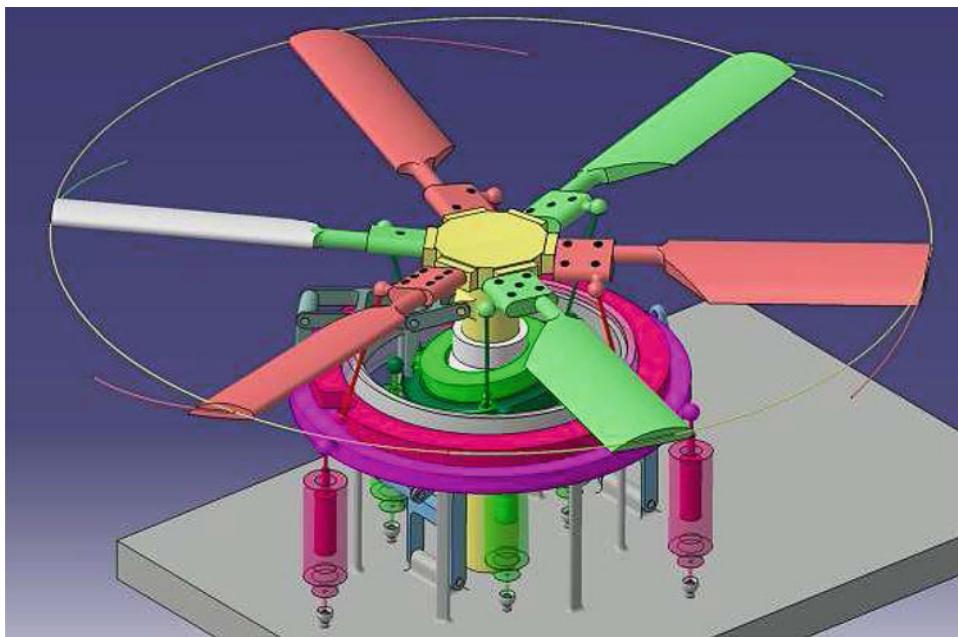


Abb. 8.19 Mehrfach-Taumelscheibe (META) am Beispiel eines Rotors mit sechs Blättern

nur für Rotoren mit bis zu drei Blättern möglich, da die HHC-Systeme dann prinzipiell jedes Blatt völlig individuell ansteuern können. Die Übertragung dieses Konzeptes auf Rotoren mit mehr als drei Blättern wird seit 2008 vom DLR angestrebt, indem mehrere Taumelscheiben umeinander herum angeordnet werden und jede davon maximal drei Rotorblätter bedient, siehe Abb. 8.19. Somit kann ein sechsblättriger Rotor noch von zwei Taumelscheiben versorgt werden und hat dennoch volle IBC-Funktionalität. Der Vorteil liegt darin, dass der Rotor selbst völlig ungeändert bleibt, keine Energie ins drehende System übermittelt zu werden braucht und das System auch als Nachrüstsatz für bestehende Hubschrauber denkbar ist. Dieses System wurde sehr erfolgreich im Windkanal getestet und es konnte demonstriert werden, dass damit sowohl Lärmreduktion im Landeanflug, Vibrationsreduktion im gesamten Einsatzbereich, Leistungsreduktion im Schnellflug, Blattspurlaufeinstellung während des Betriebes, gezielte Trennung der Blattspitzenebenen und weiteres erreicht werden kann. 2015 wurde damit ein Vierblattrotor [20] und 2016 ein Fünfblattrotor [21] im Windkanal betrieben.

8.7.4 Lokale Blattsteuerung

Eine vielversprechende Form der aktiven Rotorsteuerung stellt ein System dar, das eine Beeinflussung der lokalen Aerodynamik am Blattprofil ermöglicht. Als nächstliegendste

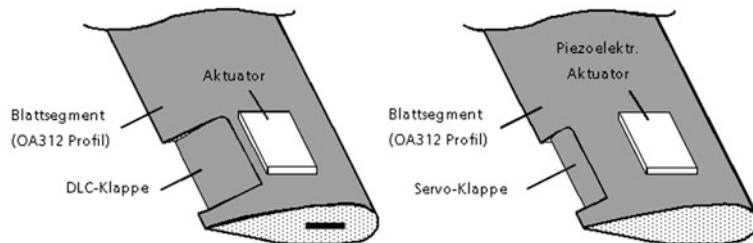


Abb. 8.20 Hinterkanten-Klappenkonzepte. © Airbus Helicopters

Lösungen bieten sich hierfür Vorder- und Hinterkantenklappen an, die über geeignete Aktuatoren im Blatt angesteuert werden und den Auftrieb entweder direkt (DLC) oder aber unter Ausnutzung eines Servoeffekts beeinflussen. Die beiden Klappentypen unterscheiden sich im Wesentlichen durch ihre Abmessungen (Abb. 8.20), wobei die Servoklappe eine geringere Tiefe aufweist und daher weniger Verluste generiert. Sie ist für torsionsweiche Rotoren prädestiniert, da sie das aerodynamische Moment so beeinflusst, dass sich eine elastische Verdrehung des Rotorblattes und damit eine Modifikation des Auftriebs ergibt.

Als Aktuatoren zum Betreiben einer solchen Klappe bieten sich piezokeramische Aktuatoren an, da sie sehr große Kräfte bei ebenfalls großen Frequenzen erreichen können, allerdings sind die erzielbaren Wege relativ gering und müssen durch ein geeignetes Getriebe vergrößert werden, um die erforderlichen Klappenausschläge zu erreichen. Dies geht mit einer dem Übersetzungsverhältnis des Getriebes proportionalen Reduktion der Kraft einher. Dennoch sind Klappensysteme die derzeit einem Einsatz am nächsten kommenden aktiven Steuersysteme und neben Boeing hat ECD ein solches System im Full-scale Maßstab zunächst 1998 beim DNW (im DLR Göttingen) im Windkanal testen lassen (Abb. 8.21). Der Vorteil, keine Hydraulik in das drehende System zu bringen, wird durch die notwendige elektrische Versorgung teilweise wieder aufgehoben. Da aber nicht das gesamte Blatt, sondern nur die Klappe bewegt wird, ist insgesamt erheblich weniger Gesamtenergie notwendig. Flugversuche mit diesem System werden seit 2005 auf einer BK117 als Versuchsträger durchgeführt, siehe Abb. 8.22. Dabei konnten 90 % der Vibratoren mit geeigneten Klappenausschlägen und -frequenzen eliminiert werden. Außerdem konnte der BVI-Lärmpegel reduziert werden; da die Rotorblattauslegung dieses sog. Advanced Technology Rotor (ATR) jedoch bereits lärmarm ist, sind die Einsparungen im Vergleich zu denen eines Rechteckblattes geringer (ca. 2 dB). Für die Flugversuchstests ist insbesondere die erste Torsionseigenfrequenz des Blattes modifiziert worden, um die Wirksamkeit des aerodynamischen Klappennmomentes auf die Gesamtblatttorsion zu erhöhen. Parallel dazu wird von ONERA und DLR ein skalierter Modellrotor mit Hinterkantenklappe gebaut, die ebenfalls von Piezo-Aktuatoren angetrieben wird und der 2005 im Windkanal der ONERA getestet wurde (Abb. 8.23). Dabei stellte sich allerdings heraus, dass die Schwierigkeiten, ein solches Aktuatkonzept im Modellmaßstab zu rea-

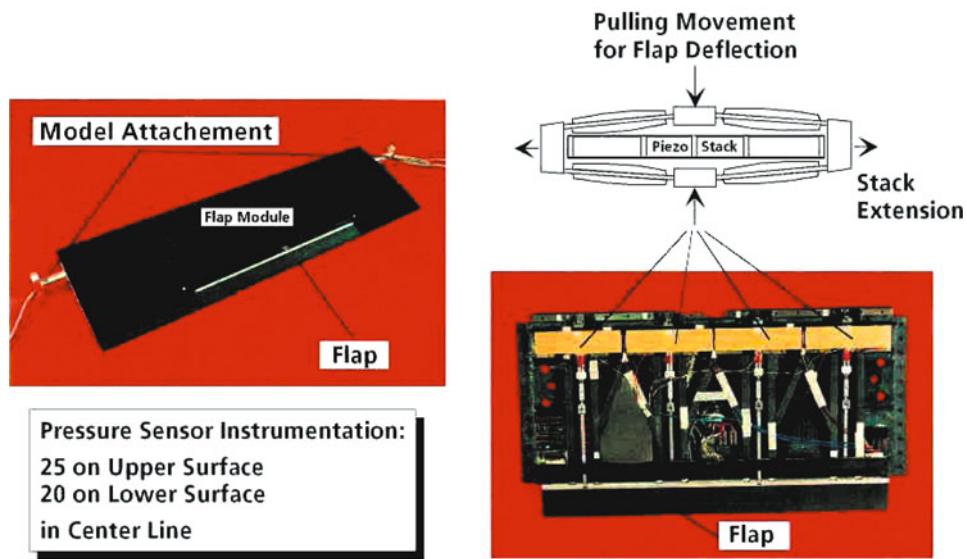


Abb. 8.21 Full-scale Version eines Blattsegments mit Hinterkantenklappe, DLR 1998

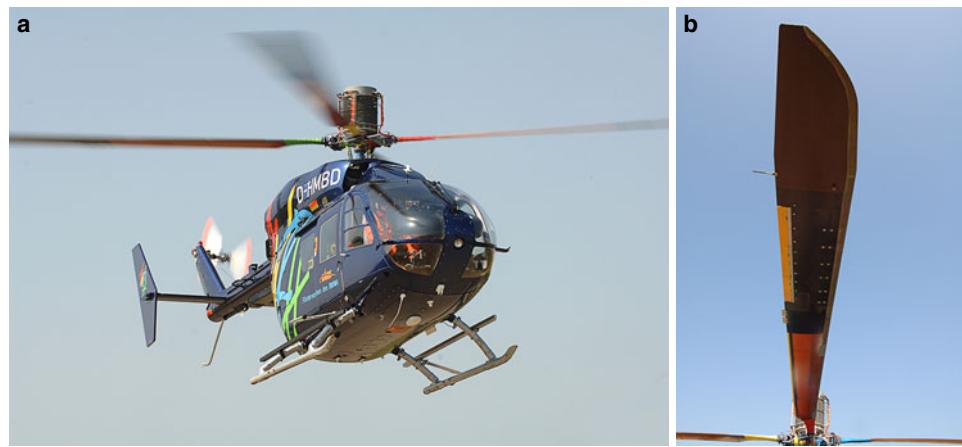


Abb. 8.22 Flugversuchsträger BK117 von ECD mit Klappenrotor. **a** Flugversuchsträger und **b** Klappenintegration im ATR-Blatt. © Airbus Helicopters

lisieren, erheblich sind und die gewünschten Klappenausschläge von 5° Amplitude nicht erreicht werden konnten; vielmehr waren nur bis zu 2° bei obendrein auf 80 % reduzierter Drehzahl möglich, die in Verbindung mit der Torsionseigenfrequenz von mehr als 5/rev nur geringe Auswirkungen auf die Dynamik erlaubten. Hier wurden ca. 5 % Vibrationsminderung erreicht. Dieses System wird daher zunächst für größere Klappenausschläge

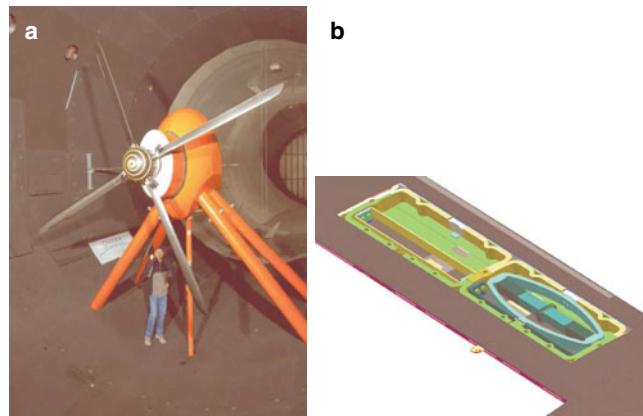
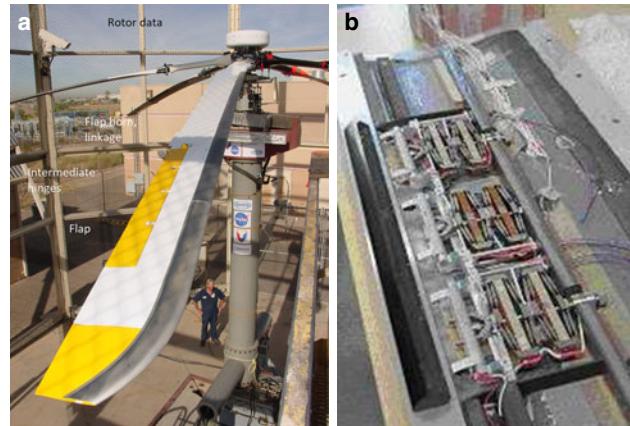


Abb. 8.23 ONERA/DLR Modellrotor mit Hinterkantenklappen. **a** Modell im Windkanal, **b** Aktuatormodul im Blatt

Abb. 8.24 Full-scale Versionen von Klappensystemen.
a Boeing Test am MD900 Rotor 2004, © Boeing, **b** Vorderkantenklappe, DLR



überarbeitet, bevor es im DNW Windkanal hinsichtlich seiner Möglichkeiten, BVI-Lärm zu reduzieren, untersucht werden kann.

Versuche mit Hinterkantenklappe an einem MD900 Explorer 5-Blatt Rotor wurden bei Boeing 2004 erfolgreich im Schwebeflugprüfstand (engl. whirl tower) durchgeführt (Abb. 8.24a). Windkanal- und Flugtests waren geplant, das Projekt ist aber wegen fehlender Finanzierung vorübergehend stillgelegt worden. Beachtenswert ist die Größe der Klappe von ca. 30 % der Profiltiefe, was auf eine primäre Wirkung auf den Auftrieb im Sinne einer direkten Auftriebssteuerung schließen lässt. Im Frühjahr 2008 wurde der Rotor im Full-Scale Windkanal der NASA Ames erfolgreich getestet, Flugversuche sollen folgen. Als Alternative zur Hinterkantenklappe wurde die Vorderkantenklappe untersucht, wobei aber wegen der größeren Luftkräfte (die Druckdifferenz zwischen Ober- und Unterseite ist an der Profilnase erheblich größer als an der Hinterkante) mehr Energie notwendig ist, die Klappe zu bewegen (Abb. 8.24b). Daher sind hierbei je zwei Aktuatoren in Reihe

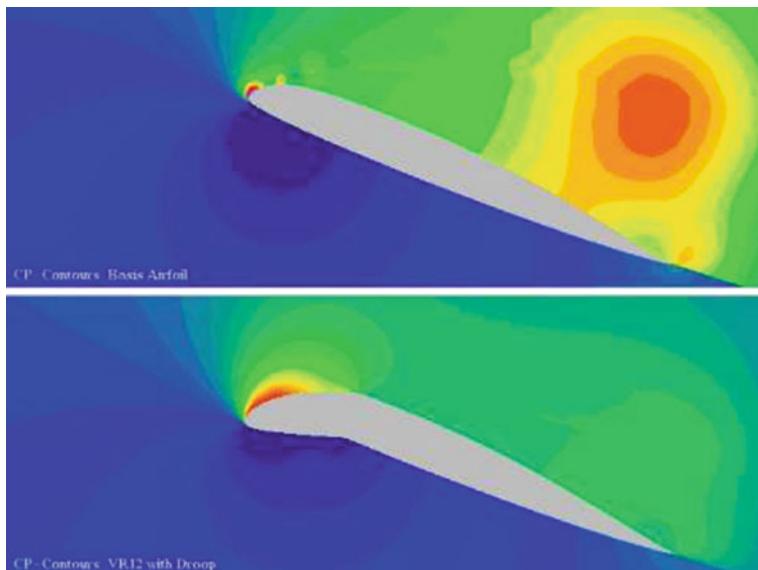


Abb. 8.25 Adaptive Profilgeometrie. Oben: Originalprofil; unten: Nasenkante abgesenkt

geschaltet, um die notwendigen Kräfte zu erreichen. Zu diesem Konzept wurden Full-scale Versuche 2003 beim DNW (im DLR Göttingen) im Windkanal durchgeführt. Diese Technologie sollte primär eingesetzt werden, um die Effekte des dynamic stall auf der rücklaufenden Seite des Rotors zu minimieren.

Mit einer solchen Nasenklappe ist die Anpassung aerodynamisch wichtiger Bereiche wie beispielsweise der Nasenkante an momentane Vorgänge der Strömung, wie z. B. Ab löseerscheinungen, möglich (Abb. 8.25). Allerdings lassen sich diese Phänomene nur um wenige Grad im Anstellwinkel beeinflussen. Sobald dieser in den Bereich des deep stall vordringt, ist eine Nasenklappe wie auch eine Hinterkantenklappe weitestgehend unwirksam.

Eleganter ist es jedoch, das Blatt mit Hilfe aktiver Materialien (z. B. Piezofolienaktuatoren) direkt zu verwinden (Abb. 8.26a). Die aktiven Materialien werden bei dieser Technik unter einem optimierten Einbauwinkel in das Rotorblatt integriert und ermöglichen eine hochfrequente erzwungene Blatttorsion. Vorreiter dieses Ansatzes ist das MIT, das in Zusammenarbeit mit NASA Langley Windkanalversuche erfolgreich absolvierte. Beim DLR wird diese Technologie derzeit auf einen Mach-skalierten Bo105 Modellrotor angewandt, wobei sowohl der Winkel der Fasern der Blathaut als auch derjenige der Aktuatoren optimiert wird, zusammen mit einer an die Blattdynamik angepassten Verteilungsdichte der Aktuatorik. Demonstratorversuche finden seit Ende 2004 im DLR statt. Der gleiche Effekt kann durch Längsdehnung einer auf helikalen Wicklungen basierenden

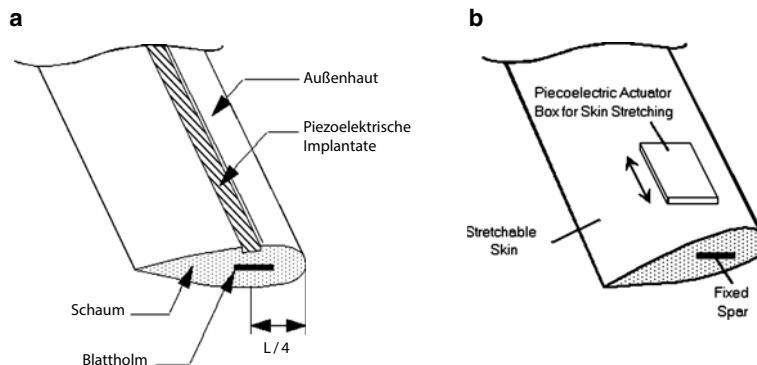


Abb. 8.26 Direkte Verwindungskonzepte durch aktive Implantate. **a** aktive Implantate, **b** Zug/Torsionskopplung

den Blattaußenhaut erzielt werden, Abb. 8.26b. Hierfür ist es erforderlich, den äußerst zugsteifen Blattholm über eine elastische Schicht mit der restlichen Struktur des Profilschnittes zu verbinden und nur die Außenhaut den Erfordernissen entsprechend mit Hilfe einer geeigneten Aktuatorik (hierbei kam ein Piezo-Stapelaktuator zum Einsatz) zu dehnen. Demonstrationsversuche eines nicht rotierenden Modells sind im Windkanal der RWTH Aachen erfolgreich beendet worden, Versuche mit rotierendem Blatt waren weniger erfolgreich, da aufgrund der großen Zentrifugalkräfte die notwendige Verspannung zwischen Aktuator und Blattstruktur kaum aufrecht zu erhalten ist. Wegen der Trennung von Haut und Holm in weiten Bereichen und der Reibung zwischen beiden ist dieser Ansatz außerdem fraglich hinsichtlich einer Realisierung.

Besser ist es, die aktive Struktur direkt flächig verteilt über einen großen Bereich in die Oberfläche zu integrieren. Dies ist möglich mit Hilfe von Piezo-Folienaktuatoren (MFC, vom engl. Macro Fibre Composite), die unter Anlegen einer elektrischen Spannung eine Längenänderung ausführen bzw. Längskräfte in die Struktur einbringen. Bei entsprechender Auslegung der Rotorblatthaut erzeugt dies eine Verwindung über den aktiven Bereich (Abb. 8.27a). Erste Modellversuche mit derart verteilter Aktuatorik, entwickelt vom MIT und der NASA Langley, wurden beim MIT 1998 im Schwebeflugzustand durchgeführt, wobei bei 2 kV Spannung eine Verwindung von 1° an der Blattspitze erreicht wurde. Im Windkanal bei der NASA Langley wurden Versuche 2002 und 2003 durchgeführt Abb. 8.27b. DLR und ONERA arbeiten ebenfalls an diesem Konzept, jedoch mit dem Ziel, die erforderlichen Spannungen auf etwa 400 V zu begrenzen und dennoch eine Blattspitzenverwindung von 2° zu erreichen. Demonstratorversuche finden seit Ende 2004 im DLR statt. Gegenwärtig werden im gesamten interessierenden Frequenzbereich von 0 bis 5/rev Amplituden von 2° oder mehr an der Blattspitze erreicht (Abb. 8.28). Ein Modellrotor wurde bereits 2013 im Schwebeflug getestet [22], jedoch war die Dauerfestigkeit

Abb. 8.27 Verteilte Aktuatorik auf dem Rotorblatt für direkte Verwindung.
a Demonstrator DLR, **b** Windkanaltest, © NASA 2003



der Aktuatoren nicht ausreichend für die in ihnen auftretenden Dehnungen durch die Blattelastizität. Ein Windkanaltest ist im Rahmen eines internationalen Konsortiums in Vorbereitung. Schließlich ist es auch vorstellbar, die Profilgeometrie adaptiv zu gestalten und den jeweiligen Strömungsbedingungen aktiv anzupassen. Durch Implementierung aktiver Materialien oder diskreter Aktuatorik im Blatt kann z. B. die Profildicke über einen Umlauf variiert und damit optimiert werden. Auch eine verteilte, kontinuierliche Wölbung ist denkbar, um gezielt den Momentenhaushalt zu beeinflussen. Diese Ansätze existieren jedoch derzeit nur als Gedankenmodell. Eine Realisierung, auch als Demonstratormodell, ist derzeit noch nicht in Sicht.

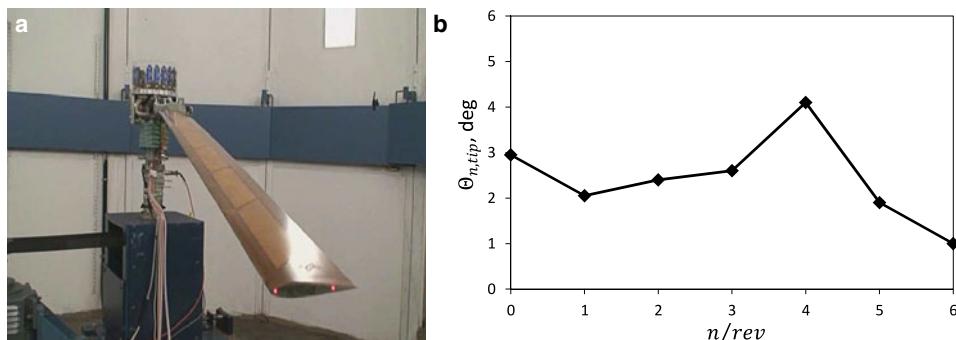


Abb. 8.28 Erreichte Blattspitzentorsion mit aktiver Verwindungssteuerung, DLR. **a** AT2-Rotorblatt, **b** Blattspitzentorsion (AT3)

8.8 Aktive Unterdrückung der Hubschrauberstörgrößen

8.8.1 Aktive Vibrationsminderung

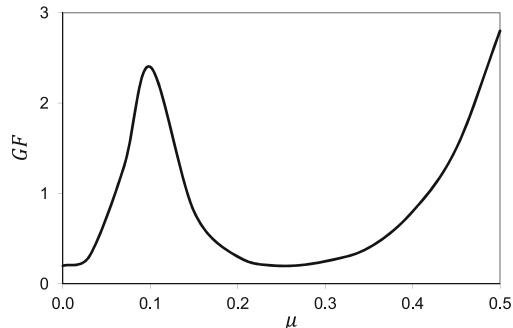
Bei der Minderung der rotorinduzierten Vibrationen im nicht drehenden System sind, entsprechend den Ausführungen von Abschn. 8.6.1, die Kräfte und Momente der ersten Blattzahlharmonischen N/rev von besonderem Interesse, da sie die größte Amplitude aufweisen (Abb. 8.5). Sie werden üblicherweise zu einem Gütekoeffizienten

$$GF_n = \sqrt{W_H H_n^2 + W_Y Y_n^2 + W_T T_n^2 + W_{M_x} M_{xn}^2 + W_{M_y} M_{yn}^2} \quad n = pN, p = 1, 2, 3, \dots \quad (8.9)$$

im nicht drehenden System zusammengefasst, um eine übersichtlichere Darstellung des HHC-Einflusses auf das Vibrationsniveau zu ermöglichen, mit n als den sogenannten Blattzahlharmonischen. Die niedrigste Frequenz ist bei $p = 1$ (also der ersten Blattzahlharmonischen) und für Vibrationen in der Regel am bedeutsamsten. Darin sind H , Y , T und M die Kräfte und Momente der pN -fachen Rotordrehfrequenz im Hubschraubersystem in x -, y - und z -Richtung bzw. um die entsprechenden Achsen und W die entsprechenden Wichtungen, die einzelne Komponenten hervorheben oder unterdrücken können. Die Abhängigkeit dieses Gütekoeffizienten von der Vorwärtsgeschwindigkeit wurde im Rahmen experimenteller Untersuchungen im Deutsch-Niederländischen Windkanal (DNW) mit einem Bo105-Modellrotor, der auf dem DLR-Rotorversuchstand installiert war, ermittelt. Es ergab sich ein Maximum bei ca. 20 m/s (bei $\mu \approx 0,1$, Abb. 8.29), das durch die stark inhomogene Verteilung der induzierten Geschwindigkeiten in diesem Geschwindigkeitsbereich hervorgerufen wird. Mit wachsendem Fortschrittsgrad nehmen die Vibrationen dann bis zu einer Geschwindigkeit von 55 m/s ($\mu \approx 0,25$) stetig ab, um dann, beispielsweise auf Grund der immer ungleichförmigeren Anströmbedingungen, Kompressibilitäts- und Strömungsablöseeffekten, wieder anzusteigen.

Ein weiterer Grund für wachsende Vibrationen sind die im schnellen Vorwärtsflug auftretenden Stoßwellen am vorlaufenden Blatt als auch Strömungsablösungen am rückläu-

Abb. 8.29 Hubschrauber-vibrationen im Vorwärtsflug,
 $C_T = 0,0044$



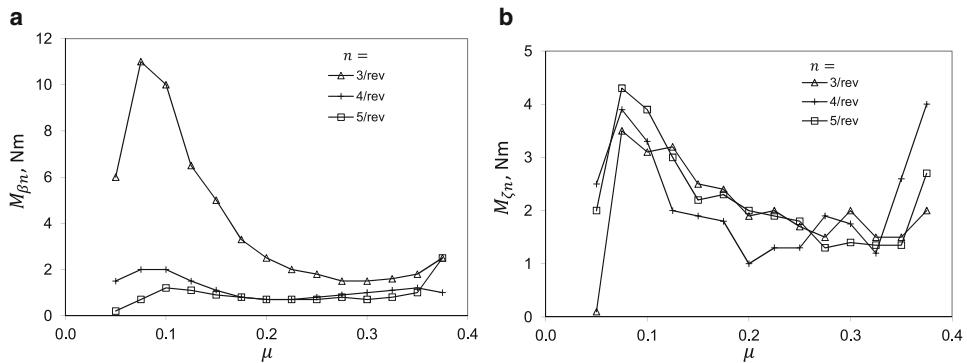


Abb. 8.30 Schlag- und Schwenkbiegemomente im Vorwärtsflug, $C_T = 0,0044$. **a** Schlagbiegemomente, **b** Schwenkbiegemomente

fenden Blatt. Der Anteil der induzierten Geschwindigkeiten als Störgröße verliert dagegen im schnellen Vorwärtsflug an Bedeutung. Damit ist klar, dass die mit wie auch immer gearteten Störgrößen als Verursacher von Vibrationen je nach Fluggeschwindigkeit verschiedenen physikalischen Ursprungs sind und die erforderliche aktive Blattsteuerung diesen verschiedenen Ursachen Rechnung tragen muss.

Die entsprechenden Blattbiegemomente in Schlagrichtung bei einem Radius von $r = 0,15$ sind in Abb. 8.30a dargestellt. Es verdeutlicht nicht nur die Dominanz der 3/rev innerhalb des gesamten Geschwindigkeitsbereiches, sondern auch ihre eindeutige Korrelation mit den Vibrationen im stehenden System. Offensichtlich regen die Luftkräfte im Vorwärtsflug hauptsächlich die zweite Schlagform des BO105-Modellrotors an, die eine Eigenfrequenz von $\nu_{\beta 2} \approx 2,7/\text{rev}$ besitzt und damit in Nähe der dritten Rotorharmonischen (3/rev) liegt. Die 4 und 5/rev Anteile des Schlagbiegemomentes können auf Grund ihrer erheblich geringeren Amplituden im Niedergeschwindigkeitsbereich vernachlässigt werden. Die höherharmonischen Anteile des Schwenkbiegemomentes sind insgesamt geringer, folgen aber dem gleichen Trend (Abb. 8.30b). Auch sie korrelieren sehr gut mit den 4/rev Anteilen der Vibrationen in der Hubschrauberzelle, tragen jedoch auf Grund ihrer vergleichsweise geringen Amplitude von maximal 5 N m wenig zum Vibrationsniveau bei. Der 3/rev Anteil des Schlagbiegemomentes ist daher als eigentliche Ursache für die rotorinduzierten Vibrationen im nicht drehenden System dieses vierblättrigen Rotors anzusehen, die mit Hilfe eines Blatteinstellwinkels der dreifachen Rotordrehfrequenz um mehr als 90 % reduziert werden können (Abb. 8.31a). Eine ähnlich hohe Vibrationsminderung ist auch im Landeanflug möglich, der ebenfalls mit starken Vibrationen verbunden ist und Material wie Besatzung und Passagiere daher besonders belastet. Sowohl für einen 3/rev wie auch für einen 4/rev Blatteinstellwinkel ergibt sich eine gleichzeitige Minimierung aller rotorinduzierten Kräfte und Momente der vierfachen Rotordrehfrequenz in der Hubschrauberzelle, während ein Blatteinstellwinkel der fünf-

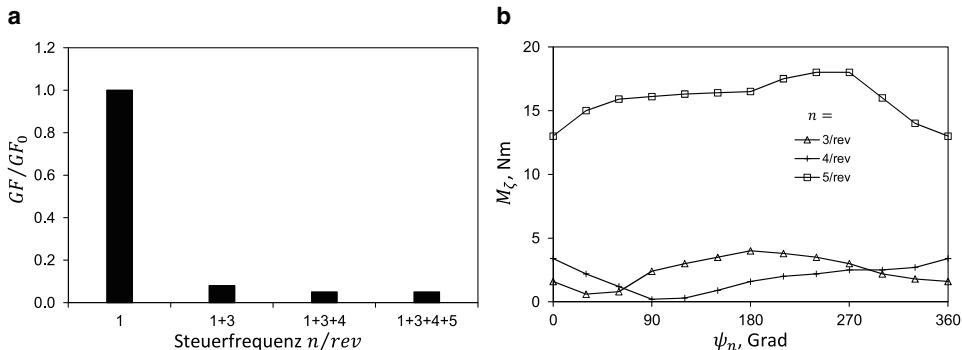


Abb. 8.31 HHC-Einfluss auf Vibrationen und Schwenkbiegemomente. **a** Vibrationsminderung im Horizontalflug, $\mu = 0,1$, **b** Schwenkbiegemomente im Landeanflug, $\mu = 0,157$, 3/rev HHC, $\Theta_3 = 0,8^\circ$, $C_T = 0,0044$

fachen Rotordrehfrequenz den 4/rev Anteil der Kraft in Rumpflängsrichtung erheblich erhöht.

Wie aus der Verstärkung des 5/rev Schwenkbiegemomentes (Abb. 8.31b) abgeleitet werden kann, ist die Ursache hierfür wahrscheinlich eine Anregung der zweiten Schwenkeigenform, die eine Eigenfrequenz in der Nähe von 5/rev besitzt und offensichtlich nur wenig gedämpft ist. Die daraus resultierende Erhöhung der Blattschwingungen mit der fünffachen Rotordrehfrequenz innerhalb der Rotorebene unabhängig von der Phasenlage des 3/rev Blatteinstellwinkels führt zu einer hohen dynamischen Kraft bei 5/rev am Rotorkopf im drehenden System und damit zur festgestellten generellen Erhöhung der 4/rev Kraft in Rumpflängsrichtung des nicht drehenden Systems. Die Kräfte der vierfachen Rotordrehfrequenz in Rumpfquerrichtung Y und Rumpfnormalenrichtung T sowie die 4/rev-Anteile der Momente um die Rumpflängs- und Rumpfquerachse werden zwar teilweise reduziert, die Minima treten jedoch bei unterschiedlichen Phasenlagen des 3/rev Blatteinstellwinkels auf.

Da die Blattbewegung unter anderem ein Maß für die entstehenden Vibrationen, aber auch für die Lärmentstehung bedeutsam ist, kommt der Messung der Blattbewegung eine besondere Bedeutung zu. Dehnungsmessstreifen werden in der Regel im nicht drehenden Rotor kalibriert und weisen trotz Brückenschaltung auch Effekte der Zentrifugalkraft auf, welche die Ergebnisse statisch verfälschen können, die dynamischen Anteile jedoch unbeeinflusst lassen. Moderne Methoden sind davon unabhängig und arbeiten optisch, was den Vorteil hat, dass keine Messtechnik in die Rotorblätter eingebaut werden muss. Als Beispiel sei hier die Stereo Pattern Recognition (SPR) Methode genannt, die mit zwei weit voneinander entfernten Kameras die Rotorebene fotografiert, siehe Abb. 8.32. Dort ist das Bild einer Kamera gezeigt, es sind deutlich die auf den Blättern entlang der Vorder- und Hinterkante angebrachten weißen Markierungen zu erkennen.

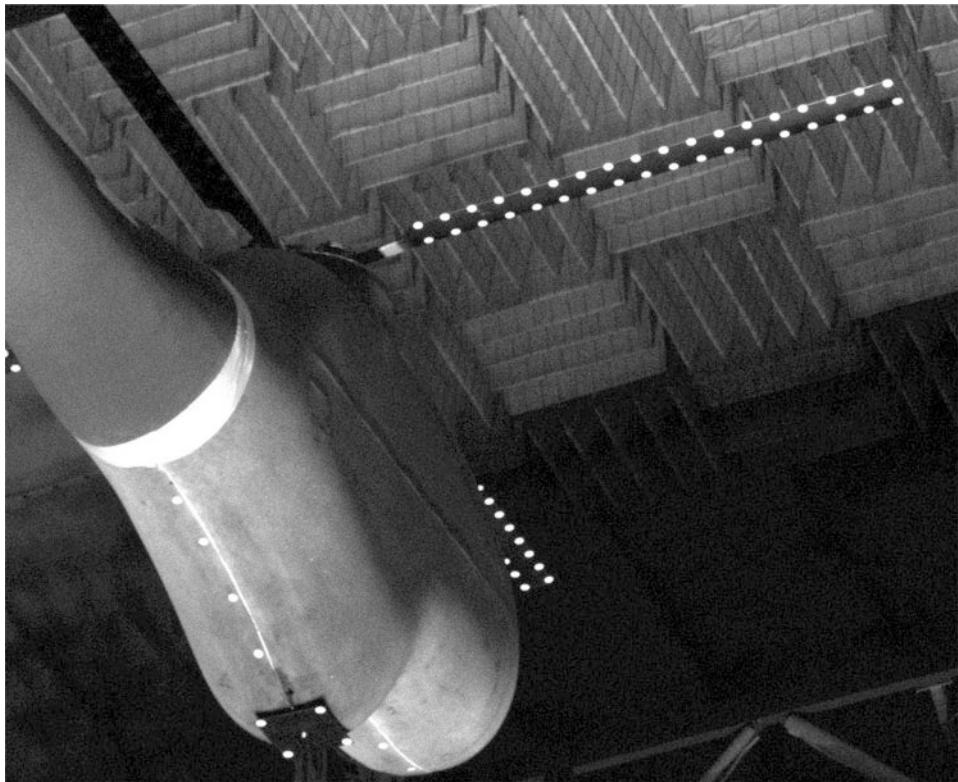


Abb. 8.32 Stereo-optische Messung der Blattposition

Die Auswertung der Kamerabilder liefert die Koordinaten dieser Markierungen im Raum, was mit entsprechenden Auswerteprogrammen (engl. postprocessing) die Lage der elastischen Achse in Schlägen, Schwenken und – nach Differentiation der Vorder- und Hinterkantenmarkierungen – auch die Verteilung der Einstellwinkel (Steuerung + Einbauverwindung + elastische Torsion) liefert. Ein Ergebnis einer Messung der Blattpositionen bei verschiedenen Rotoranstellwinkeln zur Anströmung als auch verschiedenen 3/rev HHC Einstellungen ist in Abb. 8.33 und 8.34 gegeben. Die Variation des Anstellwinkels entspricht dabei einer Flugbahnvariation von 12° Sinken ($\alpha = 11,5^\circ$) bis 6° Steigen ($\alpha = -6,9^\circ$). Die mit BL (engl. baseline) bezeichnete Kurve entspricht dem 6° Landeanflug ($\alpha = 5,3^\circ$) ohne HHC, MN (engl. minimum noise) und MV (engl. minimum vibration) stellen eine 3/rev HHC mit nur 0,8° Amplitude an der Blattwurzel dar, wobei die Phase der HHC-Steuerung im Fall MN bei 300° und im Fall MV bei 180° liegt.

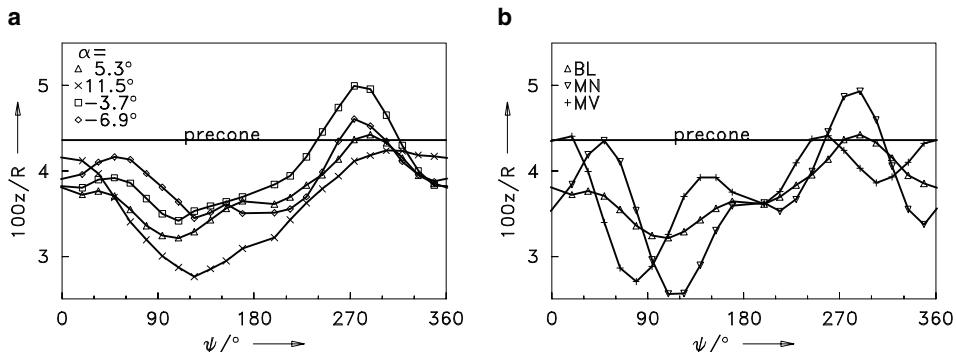


Abb. 8.33 Schlagbewegung der Blattspitze, gemessen mit SPR. **a** Anstellwinkelvariation ohne HHC, **b** 3/rev HHC Variation bei $\alpha = 5,3^\circ$

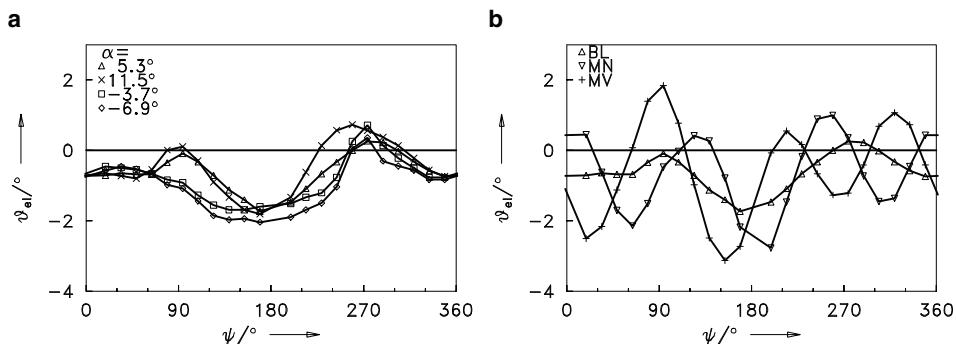


Abb. 8.34 Torsionsbewegung der Blattspitze, gemessen mit SPR. **a** Anstellwinkelvariation ohne HHC, **b** 3/rev HHC Variation bei $\alpha = 5,3^\circ$

8.8.2 Aktive Minderung der Lärmmissionen

Über eine Reduzierung der Vibrationen hinaus eignet sich die aktive Rotorsteuerung auch zur Minderung des Blatt-Wirbel Interaktionslärms (engl. BVI = blade vortex interaction noise). Dies wurde erstmals während der Untersuchungen zur Vibrationsminderung mit dem DLR-Rotorversuchsstand im DNW 1988 festgestellt. Die Messungen erfolgten mit drei Mikrofonen und ergaben eine Minderung des BVI-Lärms um bis zu 6 dB. Auf Grund der begrenzten Anzahl der noch dazu ortsfest installierten Mikrofone konnte jedoch nicht geklärt werden, ob es sich dabei um eine echte Lärmreduktion oder lediglich um eine Änderung der Richtcharakteristik handelte.

Daher erfolgte wenig später eine Windkanalmessung mit einer beweglichen Mikrofontraverse. Die im Rahmen des sogenannten Higher Harmonic Control Aeroacoustic Rotor Tests (HART 1994) eingesetzte Traverse (Abb. 8.35) war mit 11 Mikrofonen bestückt und konnte in einem Bereich von $\pm 2R$ in Anströmrichtung bewegt werden. Dadurch war



Abb. 8.35 DLR Rotorversuchsstand im DNW

es möglich, die Lärmverteilung unterhalb des Rotors flächig zu erfassen und die Lärmreduzierung unter Berücksichtigung der Richtcharakteristik zu ermitteln. Die Messungen erfolgten in der offenen Messstrecke des DNW, die derart mit akustisch dämpfendem Material ausgekleidet war, dass eine Beeinträchtigung der Messergebnisse durch Reflexionen und Hintergrundgeräusche weitestgehend ausgeschlossen werden konnte.

Die resultierenden Ergebnisse zeigten, dass sich die Richtcharakteristik des BVI-Lärms bei Anwendung der höherharmonischen Steuerung in der Tat ändert, die Lärmemissionen jedoch, unabhängig von dieser Änderung, um bis zu 6 dB reduziert werden können (Abb. 8.36). Diese beträchtliche Minderung des BVI-Lärms war sowohl mit einem Blatteinstellwinkel der dreifachen als auch der vierfachen Rotordrehfrequenz möglich (Abb. 8.37), während eine Variation des Blatteinstellwinkels mit der fünffachen Rotor-drehfrequenz lediglich zu einer Lärmreduzierung von 3 dB führte.

Die Identifizierung der an dieser Lärmreduzierung beteiligten physikalischen Effekte erfolgte innerhalb verschiedener Versuchphasen. Die erste dieser Phasen hatte die Ermittlung der Lärmemissionen und Blattdrücke zum Ziel. Hierfür war eines der Rotorblätter mit 124 Drucksensoren bestückt (Abb. 8.38), deren Signalleitungen durch den Rotormast einem mitdrehenden Verstärkersystem (Abb. 8.39) zugeführt wurden, wo eine Anhebung des Signalpegels noch vor der Übertragung zum Datenerfassungssystem erfolgte. Dadurch war es möglich, die Beeinträchtigung der Signale durch elektromagnetische Induktionen zu minimieren und eine Messgenauigkeit zu erzielen, wie sie für die

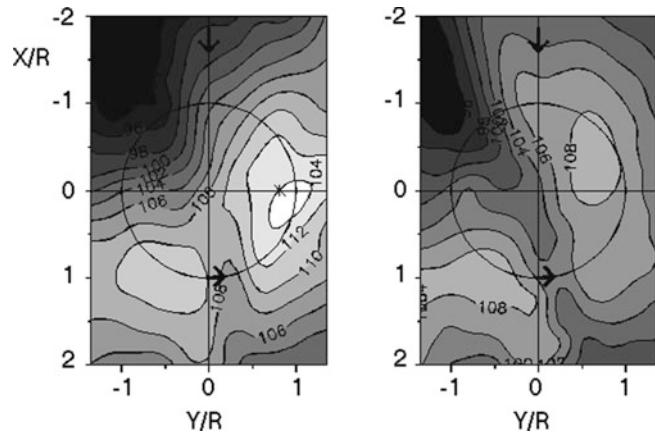


Abb. 8.36 Lärmkonturen ohne und mit aktiver Rotorsteuerung, $\mu = 0,15$. Links: BL ohne HHC; rechts: 3/rev HHC für minimale Läremission

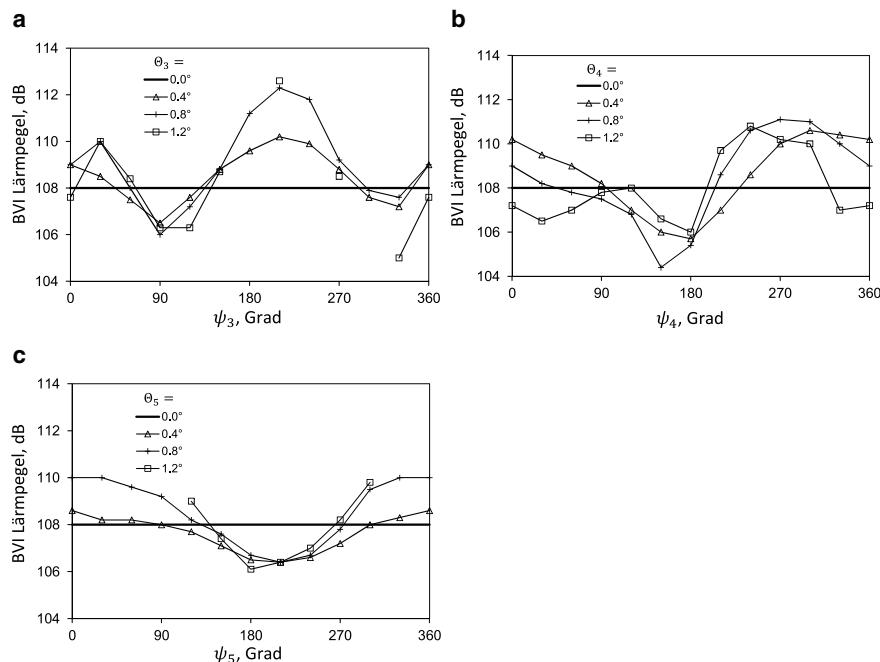


Abb. 8.37 Variation des Lärmpegels mit der HHC-Phase im Landeanflug. **a** 3/rev Steuerung, **b** 4/rev Steuerung, **c** 5/rev Steuerung. $C_T = 0,0044$, $\mu = 0,15$

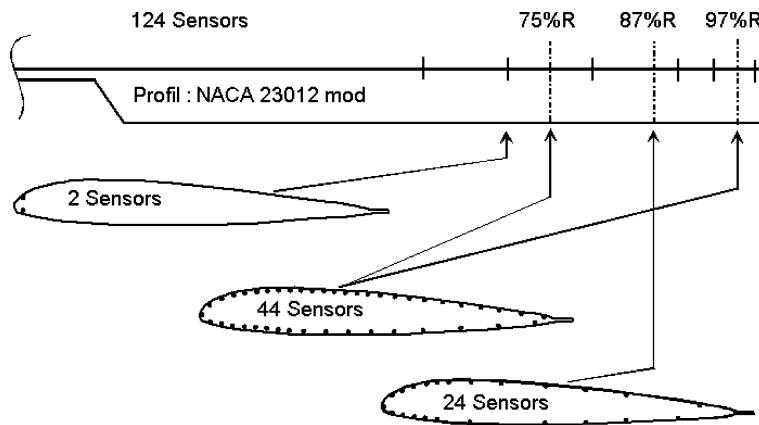


Abb. 8.38 Blattinstrumentierung

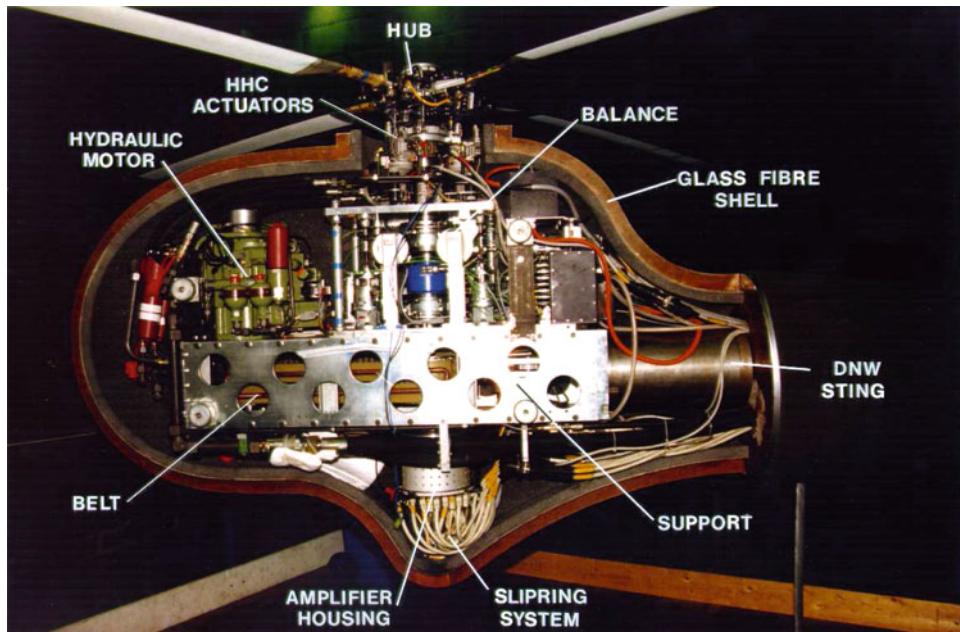


Abb. 8.39 Innenansicht des DLR-Rotorversuchsstandes

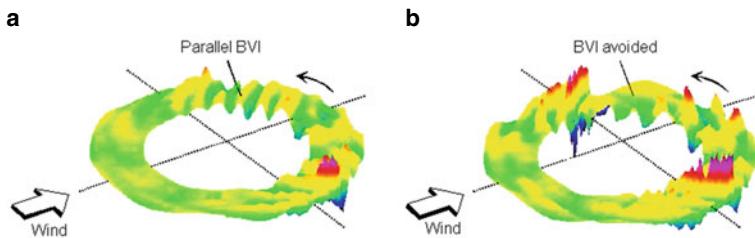


Abb. 8.40 Blattdrücke ohne und mit HHC. **a** Normalfall ohne HHC, **b** 3/rev HHC für min. Lärm

Entwicklung eines physikalischen Verständnisses zum BVI-Lärm erforderlich ist. Eine Hochpassfilterung der resultierenden Daten ergab, dass in Flugzuständen mit starken BVI-Lärmmissionen hochfrequente Druckschwankungen im ersten und vierten Quadranten der Rotorkreisfläche, d. h. bei ca. 60° bzw. 300° Rotorazimut, auftreten (Abb. 8.40a). Die Druckschwankungen, die über große Bereiche der Blattlänge zu verzeichnen und daher sehr lärmintensiv sind, können mit Hilfe der aktiven Rotorsteuerung in diesen Regionen weitestgehend eliminiert werden. Durch diese Elimination entstehen zwar hochfrequente Druckschwankungen bei ca. 90° Rotorazimut, allerdings ist die betroffene Blattlänge in diesem Fall gering, so dass sich die erwartete Lärmminde rung um 6 dB (Abb. 8.36) ergibt. Daraus folgt, dass die Interaktionsgeometrie eine sehr wichtige Rolle spielt. Bei großem Winkel zwischen Blatt- und Wirbelachse kann der Wirbel selbst ruhig sehr stark sein.

Die Ursache für diese Änderung der Blattdrücke bei Anwendung der aktiven Rotorsteuerung konnte im Rahmen der Versuche zur Strömungssichtbarmachung identifiziert werden. In dieser Phase der Windkanalversuche wurde an der Windkanaldüse Rauch in die Strömung eingebracht, während von der Mikrofontraverse aus die Errichtung einer Laser-Lichtschnitt (LLS)-Ebene erfolgte (Abb. 8.41). Beim Durchtritt der Rauchpartikel durch die LLS-Ebene reflektierten sie das hochintensive Laserlicht, das von einer Videokamera auf der Windkanaldüse aufgezeichnet wurde. Bei geeigneter Positionierung der Rauchgeneratoren in der Düse des Windkanals konnten die Nachlaufwirbelsysteme der Rotorblätter sichtbar gemacht und ihre Position im Raum bestimmt werden. Durch ein zusätzliches, mit der Rotordrehung synchronisiertes Stroboskop war es darüber hinaus möglich, die Position der Rotorblätter zu erfassen und mit der Position der Wirbelsegmente in Relation zu setzen. Ein wichtiges Ergebnis dieser Testphase ist in Abb. 8.42 gezeigt, dem entnommen werden kann, dass die Rotorblätter im ersten Quadranten der Rotorkreisfläche direkt mit Wirbelsegmenten zusammentreffen, wobei sich die Interaktion über einen großen Bereich der Blattlänge erstreckt. Diese sogenannte parallele Blatt-Wirbel-Interaktion kann durch Anwendung der höherharmonischen Steuerung weitestgehend vermieden werden. Für die lärmminimale Phase eines Blatteinstellwinkels der dreifachen Rotordrehfrequenz ergibt sich daher ein erhöhter Blatt-Wirbel-Abstand, durch den die hochfrequenten Druckschwankungen vermieden werden (Abb. 8.40a) und, daraus resultierend, die Lärmmissionen reduziert werden können (Abb. 8.36b). Inwieweit eine veränderte

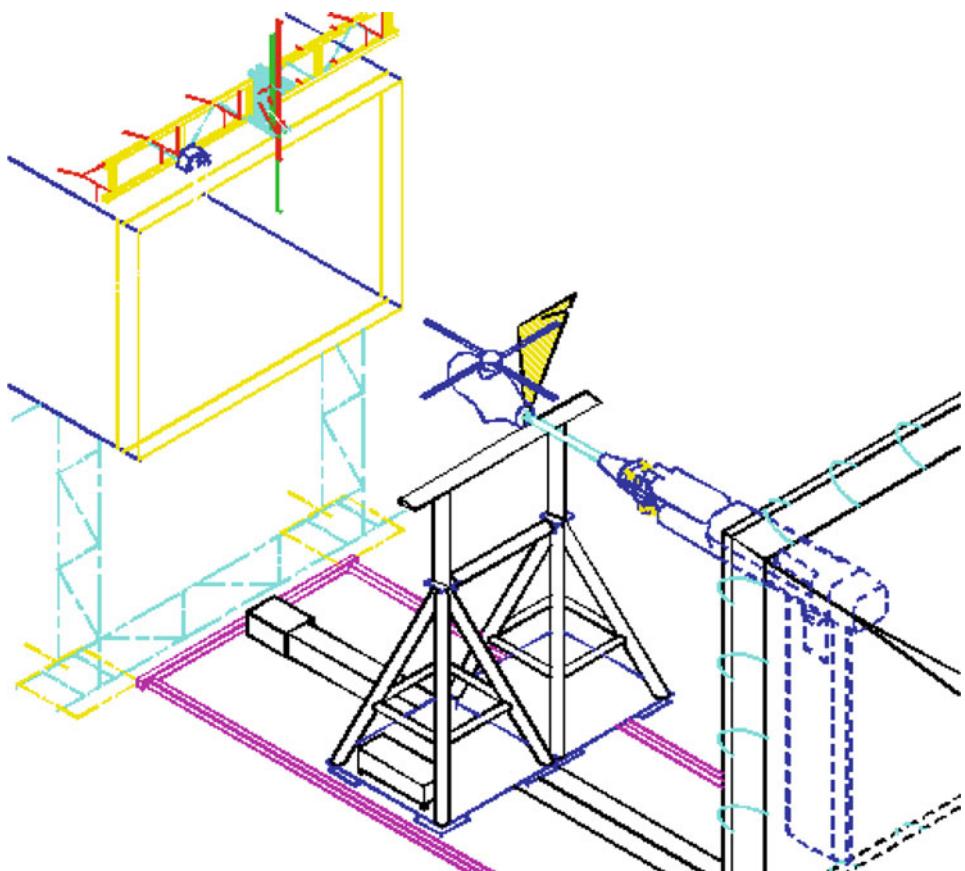


Abb. 8.41 Versuchsaufbau zur Strömungssichtbarmachung

Blattposition zu dieser Erhöhung des Blatt-Wirbel-Abstands beiträgt, konnte aus den Signalen der ebenfalls im Blatt implementierten Dehnungsmessstreifen abgeleitet werden. Obwohl diese Sensoren prinzipiell Dehnungen messen, wurden sie so kalibriert, dass ihre Ausgangssignale ein direktes Maß für die lokalen Blattbiegemomente darstellen. Unter Berücksichtigung der lokalen Biegesteifigkeiten war es daher möglich, die lokalen Auslenkungen zu ermitteln und diese zur Gesamtauslenkung aufzuintegrieren. Dabei zeigte sich, dass die Blattauslenkung, wie sie sich bei höherharmonischer Steuerung einstellt, nur 10 % des vergrößerten Blatt-Wirbel-Abstands ausmacht (Abb. 8.42b) und gegenüber der veränderten Wirbelposition Abb. 8.42a daher fast vernachlässigbar ist.

Die Ursache für die veränderte Wirbelposition konnte aus den tiefpassgefilterten Blattrücken ermittelt werden. Sie ergaben eine Erhöhung des lokalen Auftriebs bei lärmminimaler Phase des Blatteinstellwinkels speziell im zweiten Quadranten der Rotorkreisfläche (Abb. 8.43). An dieser Stelle werden die Wirbelsegmente emittiert, die später im ersten Quadranten auf die Rotorblätter treffen und dort lärmintensive Druckschwankungen ver-

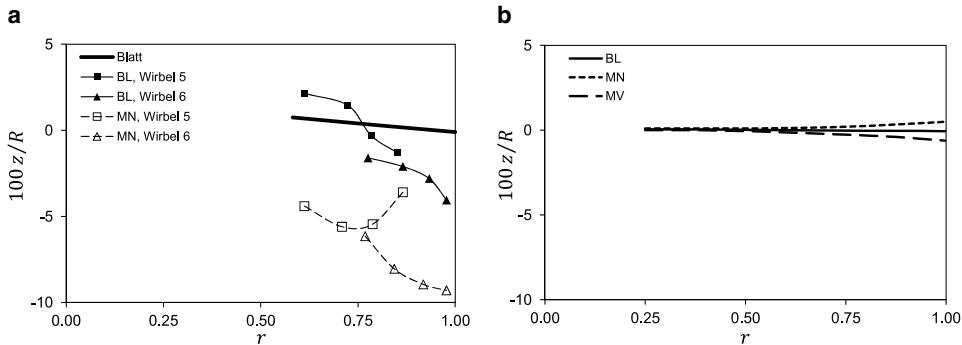


Abb. 8.42 Wirbel- und Blattpositionen ohne und mit HHC bei $\psi = 60^\circ$. **a** Wirbelposition, **b** Blattposition

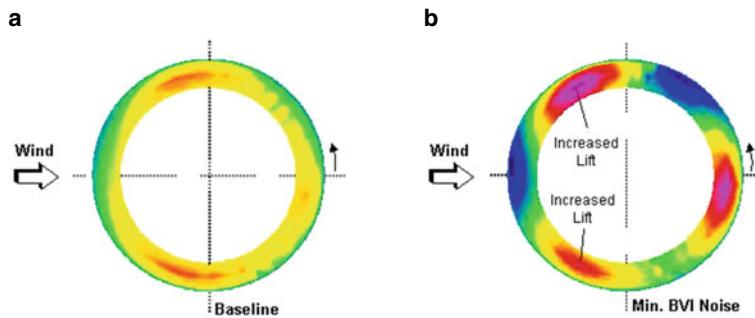


Abb. 8.43 Tiefpassgefilterte Blattdrücke ohne und mit HHC. **a** Normalfall ohne HHC, **b** 3/rev HHC für min. Lärm

ursachen. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Erhöhung des lokalen Auftriebs in diesem Teil der Rotorkreisfläche einen stärkeren lokalen Abwind zur Folge hat, so dass die Wirbelsegmente weiter nach unten platziert werden und sich der Blatt-Wirbel Abstand vergrößert. Schließlich war es möglich, mit Hilfe der sogenannten Laser Doppler Velocimetry (LDV) den Einfluss der höherharmonischen Steuerung auf die Wirbelstärke zu ermitteln. Es wurden zwei LDV-Systeme der ONERA und des DLR auf der rück- bzw. vorlaufenden Seite eingesetzt (Abb. 8.44) und die Strömungsvektoren punktweise im Bereich der lärmrelevanten Wirbelsegmente erfasst. Die Auswertung der Messwerte ergab eine Erhöhung der Wirbelstärke bei lärmminimaler Phase des Blatteinstellwinkels, die jedoch durch die Vergrößerung des Blatt-Wirbel Abstands eine Überkompensation erfährt und sich daher eine Minderung des BVI-Lärms ergibt. Nachteilig wirkt sich aus, dass LDV eine sehr zeitintensive Messtechnik darstellt. Weiterhin besteht jeder Messpunkt aus einer statistischen Mittelung. Da die Wirbelsysteme eines Rotors jedoch nicht perfekt periodisch sind, sondern um einen Mittelwert herum stochastischen Änderungen hinsichtlich der Position als auch der Stärke der Wirbel unterliegen, führt dies zu irreführenden

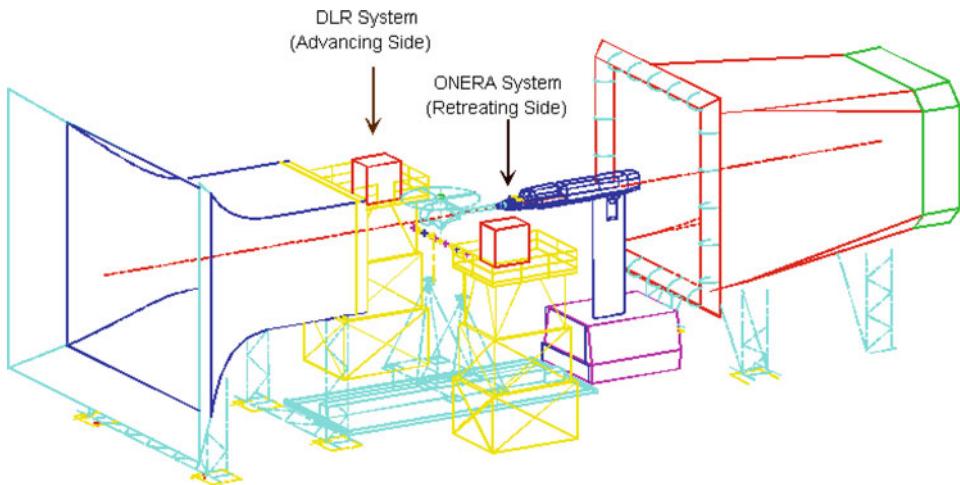


Abb. 8.44 LDV-Messanordnung des DLR 1994



Abb. 8.45 LDV-Messungen an vor- und rücklaufender Seite

Ergebnissen. Dadurch wird sowohl die Wirbelstärke (= Zirkulation) wie auch die maximale Geschwindigkeit am Wirbelkernradius kleiner und der Wirbeldurchmesser größer gemessen als dies in der Realität vorhanden ist. Einen Eindruck von den LDV-Messungen vermittelt Abb. 8.45, wo von beiden Seiten des Rotors simultan an verschiedenen Stellen

gemessen wurde. Für diese Messungen werden drei Laserstrahlen im Messpunkt fokussiert und die Dopplereffekte, die von den vorbei fliegenden Partikeln ausgelöst werden, messtechnisch erfasst. Da LDV eine statistische Methode ist, wurden hier Zeitfenster verwendet, welche auf den Blattdrehwinkel getriggert waren. Nach 100–200 Messungen erhält man dann eine Zeitmittelwertkurve, welche die drei Geschwindigkeitskomponenten der vorbei fliegenden Partikel wiederspiegeln soll. Dies ist korrekt für sich nahezu perfekt periodisch wiederholende Vorgänge, allerdings hat man im Rotorbereich auch nicht periodische Vorgänge durch niederfrequente Modellbewegungen im Raum und durch natürliche Instabilitäten im gesamten Nachlaufsystem, die diese Messmethode fragwürdig erscheinen lassen.

Eine erhebliche Verbesserung der Strömungsfeldmesstechnik ist zwischenzeitlich durch die Particle Image Velocimetry (PIV) erreicht worden. Hierbei werden in sehr kurzen Zeitabstand ($1\text{--}20\ \mu\text{s}$) die in der Strömung befindlichen Partikel fotografisch mit CCD-Kameras erfasst und anschließend eine Korrelation der Partikel zwischen beiden Bildern durchgeführt, welche die lokalen Strömungsvektoren in der gesamten Messebene liefert. Der Vorteil ist, dass es sich hierbei um eine Momentaufnahme der Strömung handelt, und sich mittels mehrerer Aufnahmen von gleicher Blattstellung die Dynamik des Wirbelsystems identifizieren lässt. Außerdem ist die Messzeit außerordentlich kurz, was die Kosten der Messung erheblich reduziert, bzw. bei gleicher Messzeit die Datenrate entsprechend erhöht. Als Beispiel sei die Messanordnung mit dem Laser-Lichtschnitt sowie ein von den Kameras aufgenommenes momentanes Strömungsbild in Abb. 8.46 gezeigt.

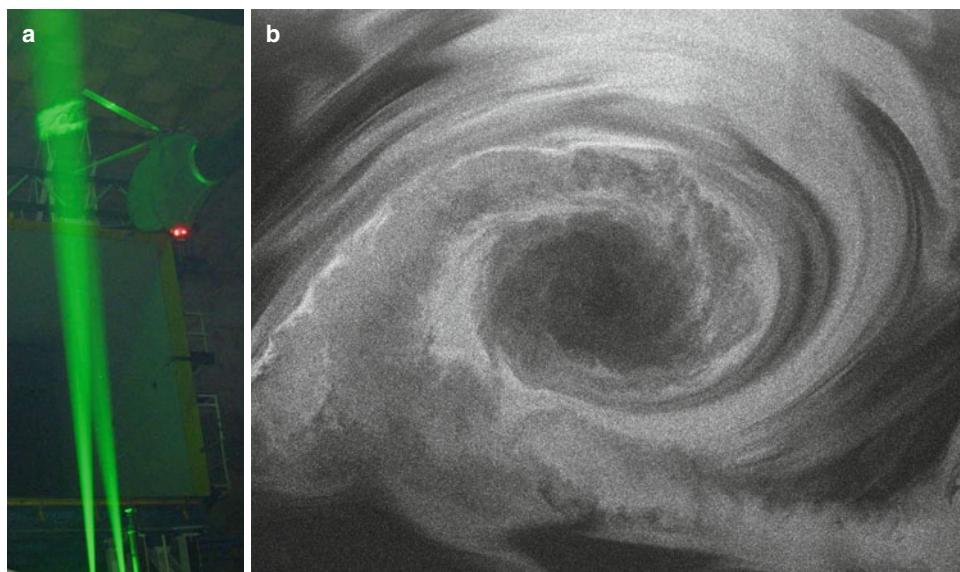


Abb. 8.46 PIV-Messung am Rotor im DNW, 2001. **a** Visualisierung, **b** Strömungsfeldmessung im Wirbelkern

Das Ergebnis einer solchen Messung sind Geschwindigkeitsfelder wie in Abb. 8.47, wobei die tatsächliche Vektordichte wesentlich größer als im Bild dargestellt ist, so dass die Wirbelparameter wie Kernradius, Geschwindigkeitsprofil und Zirkulation analysierbar sind. Auch die Wirbelflugbahn durch die Rotorebene lässt sich so ermitteln, wenn man die Koordinaten der Wirbelzentren über die Flugrichtung darstellt. In Abb. 8.48 ist dies für einen Fall ohne HHC sowie für zwei 3/rev HHC-Einstellungen mit minimalem Lärm und minimalen Vibratoren geschehen.

Deutlich ist zu erkennen, dass die HHC Änderungen der Wirbelflugbahn von $100 \text{ mm} = 0,05R$ verursachen kann, während die dazugehörigen Blattbewegungen nur $10 \text{ mm} = 0,005R$ ausmachten. Der wesentliche Parameter zur Vergrößerung des Blatt-Wirbelabstandes mittels aktiver Rotorsteuerung ist also die Ablenkung der Wirbelflugbahn, nicht die geänderte Blattbewegung. Außerdem ist deutlich zu erkennen, dass bei minimalen Vibratoren hier zwei Wirbel entstehen. Der obere davon hat wegen Abtriebs an der erzeugenden Blattspitze einen umgekehrten Drehsinn, während der untere von beiden so wie die Wirbel der anderen Fälle dreht.

8.8.3 Korrelation des Lärm- und Vibrationspegels

Die Korrelation zwischen Lärm- und Vibrationspegel bei Anwendung des besonders steuerwirksamen 4/rev Blatteinstellwinkels im Landeanflug ist in Abb. 8.49 dargestellt. Dies

Abb. 8.47 Geschwindigkeitsvektorfeld und Rotation der Strömung (farbig)

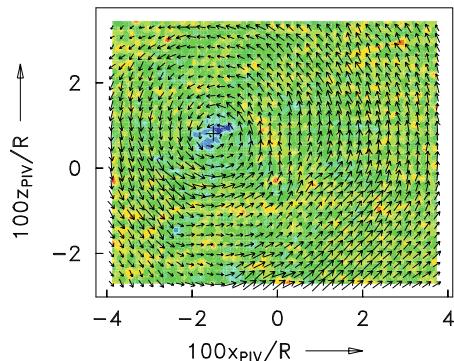
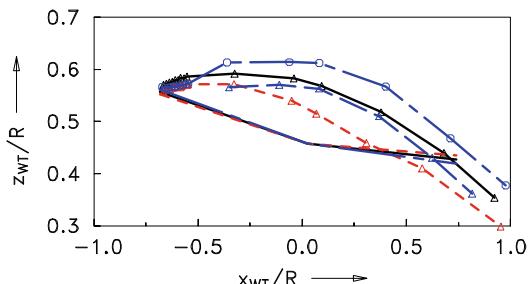


Abb. 8.48 Wirbelflugbahn durch die Rotorebene ohne und mit HHC. Schwarz: ohne HHC; Rot: mit 3/rev HHC für minimalen Lärm; Blau: mit 3/rev HHC für minimale Vibratoren



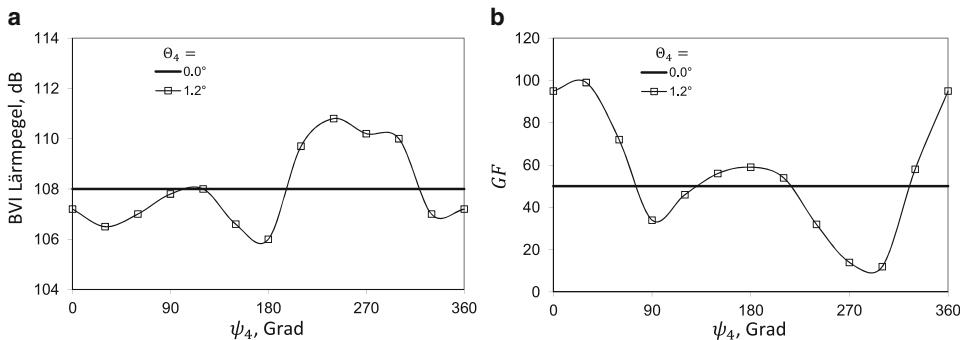


Abb. 8.49 Lärm-Vibrations-Korrelation bei 4/rev HHC im Landeanflug. **a** Lärmpegel, **b** Vibrationsniveau. $C_T = 0,0044$, $\mu = 0,15$, $\Theta_4 = 1,2^\circ$

lässt erkennen, dass eine Minderung des BVI-Lärms mit einem Blatteinstellwinkel der vierfachen Rotordrehfrequenz eine beträchtliche Erhöhung der Vibrationen in der Hubschrauberzelle zur Folge hat. So ergeben sich bei der lärmminimalen Phasenlage des 4/rev Blatteinstellwinkels von $\psi_4 = 0^\circ$ um 100 % stärkere Vibrationen als im Fall ohne höherharmonische Steuerung. Umgekehrt stellt sich bei vibrationsminimaler Phase von $\psi_4 = 270^\circ$ ein um 3 dB höherer Lärmpegel ein. Die gleiche ungünstige Korrelation ergibt sich auch bei einem Blatteinstellwinkel der dreifachen Rotordrehfrequenz. Dies ist jedoch kein allgemein gültiges Ergebnis, sondern stark vom Betriebszustand abhängig.

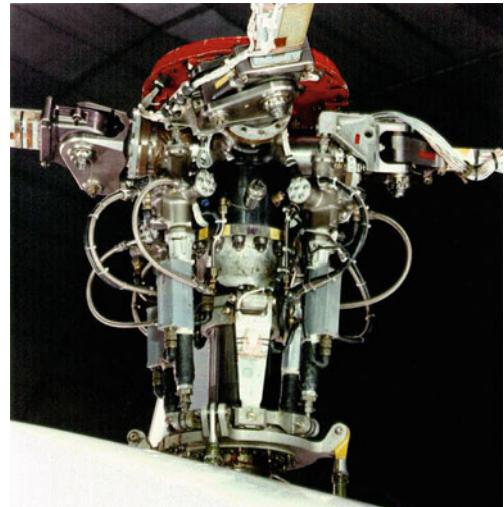
Ein günstigeres Ergebnis kann mit einem Blatteinstellwinkel erzielt werden, der sich aus einem 3 und einem 5/rev bzw. einem 3 und einem 4/rev Anteil zusammensetzt. Zwar ist auch in diesem Fall das absolute Lärmminimum mit dem absoluten Vibrationsmaximum verbunden, es entstehen jedoch Lärmnebenminima, die eindeutig mit den absoluten Vibrationsminima korrelieren. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, dass die Pegel der Vibrationsminima denen im Fall ohne aktive Rotorsteuerung entsprechen, so dass mit Hilfe der höherharmonischen Steuerung lediglich eine Minderung der Lärmemissionen ohne Erhöhung der Vibrationen möglich ist.

Eine gleichzeitige Lärm- und Vibrationsminderung kann mit Hilfe der Einzelblattsteuerung erzielt werden. Diese Form der aktiven Rotorsteuerung wurde 1993/94 im 40 ft \times 80 ft (= 12 m \times 24 m) Windkanal der NASA Ames experimentellen Untersuchungen unterzogen. Die gemeinsam von NASA, U.S. Army, ZFL, ECD und DLR durchgeföhrten Tests erfolgten mit einem Bo105-Originalrotor, der auf dem Rotor Test Apparatus (RTA) installiert war (Abb. 8.50). Mit Hilfe von Hydraulikaktuatoren, welche die drehenden Steuerstangen ersetzten (Abb. 8.51) und deren Versorgung daher über einen hydraulischen Schleifring erfolgte, konnte der Blatteinstellwinkel an der Blattwurzel hochfrequent variiert werden. Dabei bestand keine Einschränkung durch die Kinematik der Taumelscheibe, so dass es möglich war, auch einen Blatteinstellwinkel der zweifachen Rotordrehfrequenz zu generieren. Die Instrumentierung der Blätter umfasste Dehnungsmessstreifen, Beschleunigungssensoren und Druckaufnehmer. Auf Grund der konsequenten Tiefpass-



Abb. 8.50 RTA im 40 ft × 80 ft Windkanal der NASA Ames. © NASA

Abb. 8.51 IBC-Aktuatoren am RTA. © NASA



filterung der gesamten Blattsensorik war es nicht möglich, die Drucksensoren zur Identifizierung von Blatt-Wirbel Interaktionen zu nutzen.

Die entsprechenden Lärmemissionen konnten jedoch mit Hilfe von Mikrofonen unterhalb des Rotors gemessen werden. Während sich auf der rücklaufenden Seite ortsfeste Mikrofone befanden, war auf der vorlaufenden Seite eine bewegliche Mikrofontraverse installiert (Abb. 8.52). Die resultierenden Lärmpegel korrelierten qualitativ sehr gut mit denen aus dem HART-Programm, obwohl die akustische Qualität des 40 ft × 80 ft Windka-

nals mit der des DNW nicht zu vergleichen war. Seit einem Umbau 2006 ist die Situation nun aber wesentlich besser. Relative Messungen im Vergleich zum Fall ohne aktive Rotorsteuerung können jedoch als genau genug angesehen werden, um den Einfluss eines höherharmonischen Blatteinstellwinkels beispielsweise der dreifachen Rotordrehfrequenz auf den BVI-Lärm (Abb. 8.53) verlässlich zu ermitteln. Auch die Ergebnisse für einen Blatteinstellwinkel der zweifachen Rotordrehfrequenz können daher als vertrauenswürdig angesehen werden. Sie ergaben eine simultane Minderung der Lärmemissionen und der Vibrationen in der Hubschrauberzelle (Abb. 8.54).

Ein ähnlich günstiges Ergebnis ergab sich auch bei IBC-Flugversuchen mit einem Hubschrauber vom Typ Bo105, siehe Abb. 8.15. Die Versuche wurden von ECD, Daimler-

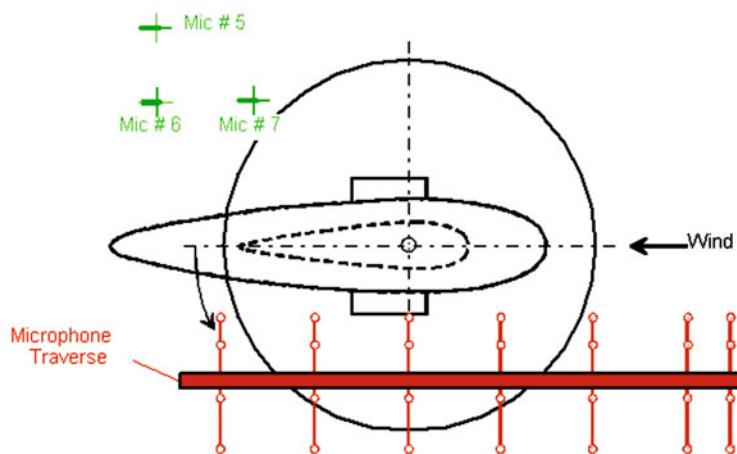


Abb. 8.52 Mikrofonanordnung im 40 ft \times 80 ft Windkanal der NASA Ames. © NASA

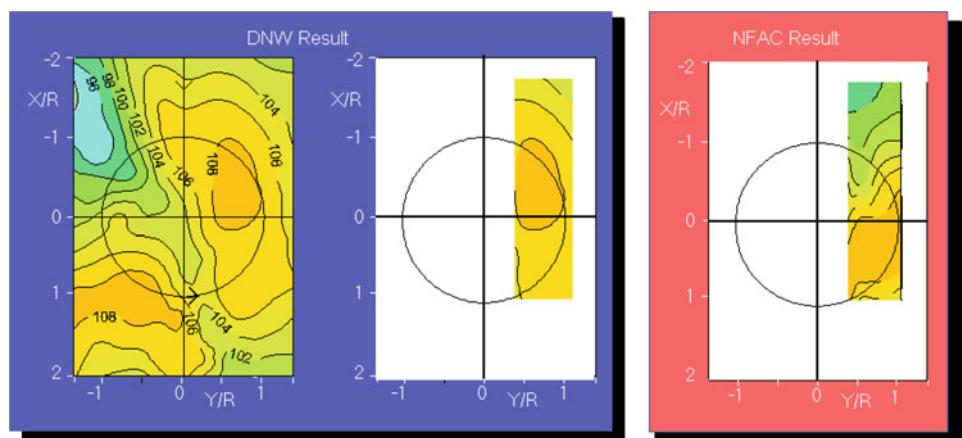


Abb. 8.53 Lärmessungen im DNW und 40 ft \times 80 ft Windkanal der NASA Ames

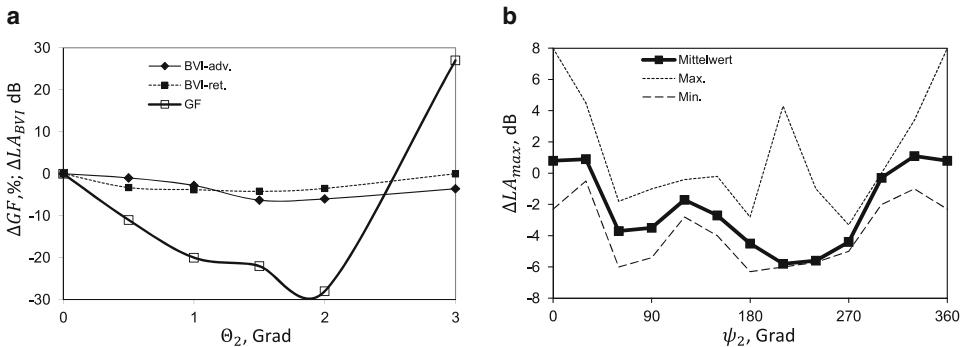


Abb. 8.54 Lärm- und Vibrationskorrelation bei 2/rev IBC im Landeanflug. **a** Korrelation Lärm + Vibrationen, $\psi_2 = 60^\circ$, **b** BVI-Lärm am Boden, $\Theta_2 = 3^\circ$. $C_T/\sigma = 0,075$, $\mu = 0,1$

Chrysler, ZFL und dem DLR durchgeführt und hatten den Nachweis der Vibrations- und Lärmreduzierung durch IBC im Freiflug zum Ziel. Wie bereits im NASA Ames Windkanal waren die drehenden Steuerstangen durch Hydraulikaktuatoren ersetzt, die über einen hydraulischen Schleifring versorgt wurden. Die Rotorblätter besaßen eine Sensorinstrumentierung, die eine Ermittlung der Blattdrücke und der resultierenden Blattbiege- und Blatttorsionsmomente ohne und mit aktiver Rotorsteuerung erlaubte. Die Erfassung der Vibrationen erfolgte mit Hilfe von Beschleunigungsaufnehmern am Getriebekörper und am Pilotensitz, während für die Messung der Rotorlärmemissionen Mikrofone am Landegestell vorgesehen waren. Zusätzlich zu diesen Aufnehmern standen 11 Mikrofone am Boden zur Verfügung. Während der Versuche wurden für jede Form der Blatteinstellwinkelvariation mehrere Anflüge durchgeführt und die Daten statistisch ausgewertet. Dadurch war es möglich, die atmosphärischen Einflüsse auf die Messergebnisse zu minimieren. Für einen Blatteinstellwinkel der zweifachen Rotordrehfrequenz ergab sich die in Abb. 8.54a dargestellte Minderung des BVI-Lärms und der Vibrationen in der Hubschrauberzelle. Das Bild lässt erkennen, dass sich für eine Phasenlage des 2/rev Blatteinstellwinkels von $\psi_2 = 210^\circ$ das absolute Lärmminimum einstellt, welches jedoch nicht nur mit erhöhten Vibrationen verbunden ist, sondern noch dazu sehr stark mit der Nicklage des Hubschraubers variiert. So ist es möglich, bei ausgetrimmtem 6° -Sinkflug eine Lärmreduzierung von 6 dB zu erzielen, während bei leicht verändertem Flugzustand eine Erhöhung der Lärmemissionen um 4,5 dB entsteht. Bei einer Phasenlage von $\psi_2 = 60^\circ$ hingegen werden beide Störgrößen gleichzeitig reduziert, wobei die Lärmreduzierung in diesem Fall nur 4 dB beträgt und damit geringer ausfällt. Die Variation des Lärmpegels mit dem Flugzustand ist bei einer Phasenlage des 2/rev Blatteinstellwinkels von 60° jedoch wesentlich geringer als bei einer Phasenlage von 210° . Die Schwankungsbandbreite der Messungen ist in Abb. 8.54b gegeben.

8.9 Simulation von aktiver Rotorsteuerung

Um das Potential einer aktiven Rotorsteuerung numerisch zu evaluieren, müssen die eingesetzten Simulationsprogramme die zu behandelnden Phänomene genau genug beschreiben können. Dies erfordert zum Teil einen Detaillierungsgrad sowohl in der Zeit (Rotatorazimut ψ) als auch räumlich (in radialer Richtung, r), der über die mathematische Formulierung der flugmechanischen Programme weit hinausgeht.

8.9.1 Anforderungen an die strukturdynamische Modellierung

Für Vibrationen sind Frequenzen bis etwa 10/rev von Interesse, je nach Blattzahl und Lage der Eigenfrequenzen. Dies bedeutet, dass alle in diesem Frequenzbereich liegenden Modalformen berücksichtigt werden müssen. Gleichzeitig muss die Abtastfrequenz mindestens das Sechsfache der höchsten zu berechnenden Schwingungsfrequenz sein, um diese korrekt zu identifizieren und numerischen Problemen vorzubeugen. Nimmt man die höchste zu berechnende strukturdynamische Schwingungsfrequenz bei 12/rev an, so darf die Abtastfrequenz also höchstens bei $\Delta\psi = 360^\circ/(12 \cdot 6) = 5^\circ$ liegen.

Außerdem ist die radiale Diskretisierung des Rotorblattes in Blattelemente in Verbindung mit der Anzahl von Knoten und Bäuchen der höchsten Modalform in Schlagrichtung anzupassen. Legt man die fünfte Schlageigenform zugrunde, so weist sie fünf Knoten und viereinhalb Bäuche auf. Auch hier gilt das Abtasttheorem, dass je Schwingung (bestehend aus zwei Bäuchen und zwei Knoten) mindestens sechs Abtastpunkte vorhanden sein müssen. Hier benötigt man also mindestens $4,5 \cdot 6/2 = 14$ Blattelemente. Bei nichtlinearen radialen Verteilungen, die an der Blattspitze feiner diskretisiert sind, um sich den dort lokal ändernden Luflasten besser anzupassen, müssen entsprechend mehr Elemente verwendet werden, um die inneren Schwingungsbäuche der Modalformen ausreichend abzudecken.

8.9.2 Anforderungen an die aerodynamische Modellierung

Die aerodynamische Modellierung muss bei aktiver Rotorsteuerung nicht nur die statio-nären, sondern auch die instationären aerodynamischen Effekte berücksichtigen, da die auftretenden reduzierten Frequenzen die Annahme quasistationärer Strömung nicht mehr erlauben. Allgemein wird eine reduzierte Frequenz von $k = \omega c/(2V) = n\Omega c/(2\Omega y) = (n/r)c/(2R) < 0,05$ als quasistationär betrachtet. Die Grundharmonischen bis $n = 2/\text{rev}$ erfüllen zwar in weiten Bereichen der Rotorebene diese Annahme, Blattschwingungen bis $n = 10/\text{rev}$ und aktive Steuerungsbewegungen im gleichen Frequenzbereich jedoch nicht.

Bei Klappensteuerung, Wölbung oder Dickenänderung verändert sich die Polare des zugrunde liegenden Profils, weil mit diesen Formänderungen im Prinzip ein neues Profil entsteht. Bei Klappen ist dies weniger problematisch, da die Auswirkung von Klappen auf die Profilbeiwerte seit Beginn der analytischen Aerodynamik untersucht wurde. Dynamische Formänderungen sind da schon komplizierter zu handhaben.

Unabhängig davon muss im Höchstlauftriebsbereich und im schnellen Vorwärtsflug mit Strömungsablösung (engl. dynamic stall) gerechnet werden, die auch ohne hochfrequente Blattbewegung auftritt und erhebliche Anforderungen an die Berechnung der aerodynamischen Beiwerte stellt, da dies zu hochfrequenten Wirbelablösungsscheinungen an den Rotorblättern führt und diese wiederum mit Torsionsschwingungen darauf reagieren. Die Berechnung des dynamic stall erfordert in der Regel eine Abtastrate von höchstens $\Delta\psi = 2^\circ$.

Sind akustische Untersuchungen gefordert, muss die Interaktion von Rotorblättern mit Blattspitzenwirbeln berechnet werden. Da diese lediglich einen Wirbelkerndurchmesser von etwa $0,2c$ haben, also eine Wellenlänge (entspricht der Schwingungslänge) von $0,4c$ aufweisen, erfordert dies nach dem Abtasttheorem eine Auflösung von $0,4c/6$. Damit folgt $\Delta\psi = 360^\circ \cdot (0,4c/6) / (2\pi y) = 3,8^\circ \cdot c/y = 3,8^\circ \cdot (c/R)/r$, also ist die erforderliche azimutale Diskretisierung vom betrachteten Radius abhängig, was auch unmittelbar aus den reduzierten Frequenzen ersichtlich ist. Für ein typisches Rotorblatt kann $c/R = 1/15$ angesetzt werden, was zu $\Delta\psi = 0,25^\circ/r$ führt, an der Blattspitze also $0,25^\circ$. Dies ist eine außerordentlich hohe Anforderung, die zu sehr großen Rechenzeiten führt und bereits sehr nah an den zeitlichen Diskretisierungen von Euler-CFD Verfahren liegt. Navier-Stokes-Verfahren werden jedoch zeitlich noch feiner aufgelöst.

Generell variiert der Auftrieb und das aerodynamische Moment im Bereich der Blattspitze sehr stark und daher wird die radiale Diskretisierung dort eine höhere Auflösung erfordern als im Blattinnenbereich. Üblicherweise sind 20 Blattelemente ausreichend, aber oft werden auch sehr viel mehr verwendet. Für flugmechanische Untersuchungen jedoch, wo nur die 1/rev-Komponenten noch eine Rolle spielen, reichen $\Delta\psi = 15^\circ$ als azimutale Diskretisierung und 10 Blattelemente in radialer Richtung.

Bei Blattpositionen um 0° und 180° Azimut ist die Interaktion der Blattspitzenwirbel mit den Blättern orthogonal, d. h. Blatt- und Wirbelachse stehen etwa 90° aufeinander. Um dann die radiale Änderung der aerodynamischen Lasten aufgrund von BVI hier korrekt zu erfassen, muss man dieselbe hochauflösende Diskretisierung erreichen, also $0,4c/6$. Bei einer profilierten Blattlänge von $0,8R$ folgen also $(0,8R)/(0,4c/6) = 180$ Blattelemente! Üblich sind jedoch in flugmechanischen Programmen 10 oder sogar noch weniger und in Rotorrechenprogrammen zwischen 10 und 40 Blattelementen. Hier spielt eine Rolle, dass diese Art der Interaktion im Wesentlichen als stationär angesehen werden kann, da sie sich über einen längeren Azimutbereich erstreckt und radial nur langsam bewegt. Dann findet am Blatt in radialer Richtung ein Druckausgleich statt, der die Druck spitzen und damit aerodynamischen Lastspitzen erheblich reduziert und in radialer Richtung das Ereignis „verschmiert“. Daher reichen für diese Art der Interaktion auch weniger Blattelemente aus, denn die effektive Wellenlänge ist größer als die des isoliert betrachteten Wirbels.

Bei blattparallelem BVI kann ein solcher Druckausgleich jedoch nicht stattfinden, da die Blattelemente beiderseits der betrachteten Stelle ja gleichzeitig mit der Druckänderung beaufschlagt werden.

8.9.3 Anforderungen an die Modellierung des Rotornachlaufes

Für akustische Berechnungen kommt der Berechnung des Nachlaufes größte Bedeutung zu, da dieser die Quelle der hochfrequenten instationären Blattdrücke darstellt. Die radia- len Gradienten der Auftriebsverteilung stellen die Wirbelstärke dar, die in den Nachlauf als sogenannte Längswirbel (engl. trailed vorticity) eingehen. Die azimutale Variation der Auftriebsverteilung während eines Umlaufs geht demzufolge als Querwirbel (engl. shed vorticity) in den Nachlauf ein. Dort, wo große Wirbelstärken nah beieinander liegen, kommt es durch einen Aufrollvorgang des Nachlaufes zu Blattspitzenwirbeln, die für viele Rotordrehungen erhalten bleiben. Mit diesen Blattspitzenwirbeln treten die Rotorblätter in Interaktion, nachdem sie etwa eine Umdrehung alt geworden sind.

Daher ist sowohl der Aufrollvorgang als auch der Alterungsprozess der Wirbel zu modellieren, um verlässliche Lärmvorhersagen machen zu können. Leider ist die Datenbasis, um verlässliche Modelle erstellen zu können, erst kürzlich entstanden, so dass auf absehbare Zeit nur empirische Modellierungen in Ansatz gebracht werden können.

Neben den Wirbeleigenschaften ist aber auch die Geometrie des Wirbelsystems von entscheidender Bedeutung, da sie den Abstand von Rotorblättern und Wirbeln bestimmt. Die einfachen und schnellen sog. *prescribed wake* Modelle verwenden lediglich die statio- nären Betriebsbedingungen (Schub, Fluggeschwindigkeit, Neigung der Rotorebene, Radius und Rotordrehfrequenz), um die Geometrie der Blattspitzenwirbel im Raum vorab zu bestimmen. Sie reagieren nicht auf aktive Rotorsteuerung und die damit verbundenen Änderungen in der Lastverteilung der Rotorebene. Lediglich beim DLR ist ein Zusatzmodul entwickelt worden, um diese dynamischen Änderungen näherungsweise zu berücksichtigen. Im Wesentlichen werden daher die *free-wake* Modelle eingesetzt, die zu jedem Zeitschritt die Nachlaufgeometrie neu berechnen, indem die Bewegungsgleichungen aller Wirbelsegmente des gesamten Nachlaufes durch numerische Integration gelöst werden, was jedoch ein sehr aufwändiger Prozess ist und eine sehr hoch auflösende Abtastrate erfordert.

CFD Programme waren lange Zeit nur theoretisch in der Lage, die Wirbel über einen längeren Zeitraum zu konservieren, denn dazu ist eine außerordentlich feine Diskretisie- rung im Raum, also fern der Blattoberflächen, vonnöten. Außerdem erfordert dies Inter- polationsverfahren höherer Ordnung, die allerdings oft mit Instabilitäten der Strömungs- lösung einhergehen. Dies ist umso schwieriger, als die Wirbel sich durch den Raum bewegen, daher steigt die erforderliche Zellenzahl um das 10–100fache der für die reine Blattaerodynamik erforderlichen Zellenzahl an. Die Rechenzeiten steigen damit in nicht akzeptable Größenordnungen. Kürzlich sind aber wesentliche Fortschritte auf diesem Ge- biet gemacht worden. So sind Berechnungen des Wirbelsystems eines isolierten Rotors

mit 115 Millionen Zellen (strukturierte Netze) 2008 bei der US Army gemacht worden, welche den Messungen schon recht nahe kommen [23]. In Korea wurde mit unstrukturierter adaptiven Netzen eine ähnliche Güte mit nur 20 Millionen Zellen erreicht. Dennoch ist man von einer routinemäßigen Anwendung von CFD für akustische Problemstellungen noch weit entfernt.

8.9.4 Typische Modellierungen bei aktiver Steuerung

Aus den genannten Gründen hat sich folgende Vorgehensweise als erfolgreich herausgestellt. Für die strukturelle Modellierung verwendet man eine Modalsynthese, d. h. die Modalformen und Eigenfrequenzen werden vorab mit Hilfe eines Finite-Element Programms ohne Luftkräfte ermittelt und damit nur das dynamische Antwortproblem numerisch berechnet.

Die Aerodynamik erfordert Instationarität hinsichtlich hochfrequenter Blattbewegung als auch des Böenproblems, das bei Blatt-Wirbel Interferenz vorliegt. Außerdem müssen die Effekte der Strömungsablösung und entsprechende Hysterese berechnet werden können. Hier haben sich semi-empirische Modellierungen hervorgetan, welche die stationären Profilbewerte durch einen Formelansatz analytisch beschreiben und instationär modifiziert werden können. Darin wird das Böenproblem von der Profilbewegung getrennt behandelt.

Der Rotornachlauf ist für Untersuchungen zur Leistung oder Vibratoren mit einem *prescribed wake* Verfahren ausreichend modelliert, für akustische Berechnungen sind jedoch entweder Zusatzmodelle notwendig, die der geänderten Wirbelgeometrie bei aktiver Steuerung ausreichend Rechnung tragen, oder die aufwändigeren *free-wake* Modelle.

Diese Art der Modellierung findet sich in modernen Rotorsimulationsprogrammen wieder, die im englischen Sprachraum als „comprehensive code“ bezeichnet werden und auch für Routineanwendungen zur Verfügung stehen.

Gegenwärtig wird intensiv daran gearbeitet, Finite-Element-Verfahren direkt mit den CFD-Verfahren zu koppeln. Dies funktioniert gegenwärtig aber nur sehr eingeschränkt für Flugfälle mit BVI-Lärm, da die Konservierung der Wirbelstrukturen in den CFD-codes durch einerseits zu grobe Gitter und andererseits durch Verfahren niedrigerer Ordnung nur über geringe Abstände von den Rotorblättern erfolgen kann. Für Lärmvorhersagen muss der Wirbel jedoch über ein Alter von ca. zwei Rotordrehungen ausreichend genau aufgelöst und nicht dissipiert sein, was zur Zeit noch nicht möglich bzw. nur mit unvertragbar hohem Aufwand an CPU-Zeit und Speicherbedarf wegen der im gesamten Raum notwendigen feinen Diskretisierung verbunden ist. Der Rechenzeitfaktor zwischen den sog. „comprehensive code“ und CFD-CSD Verfahren beträgt ca. 10^5 – 10^7 !

Ein Beispiel, wo sowohl für die Blattbewegung als auch für die vermuteten Wirbelpositionen im Nachlauf sog. Chimera-Netze verwendet werden, die dem Hintergrundnetz überlagert werden und die feine Auflösung lokaler Strömungsstrukturen in einem ansonsten groben Rechengitter erlauben, ist in Abb. 8.55 gezeigt [24]. Obwohl sie eine

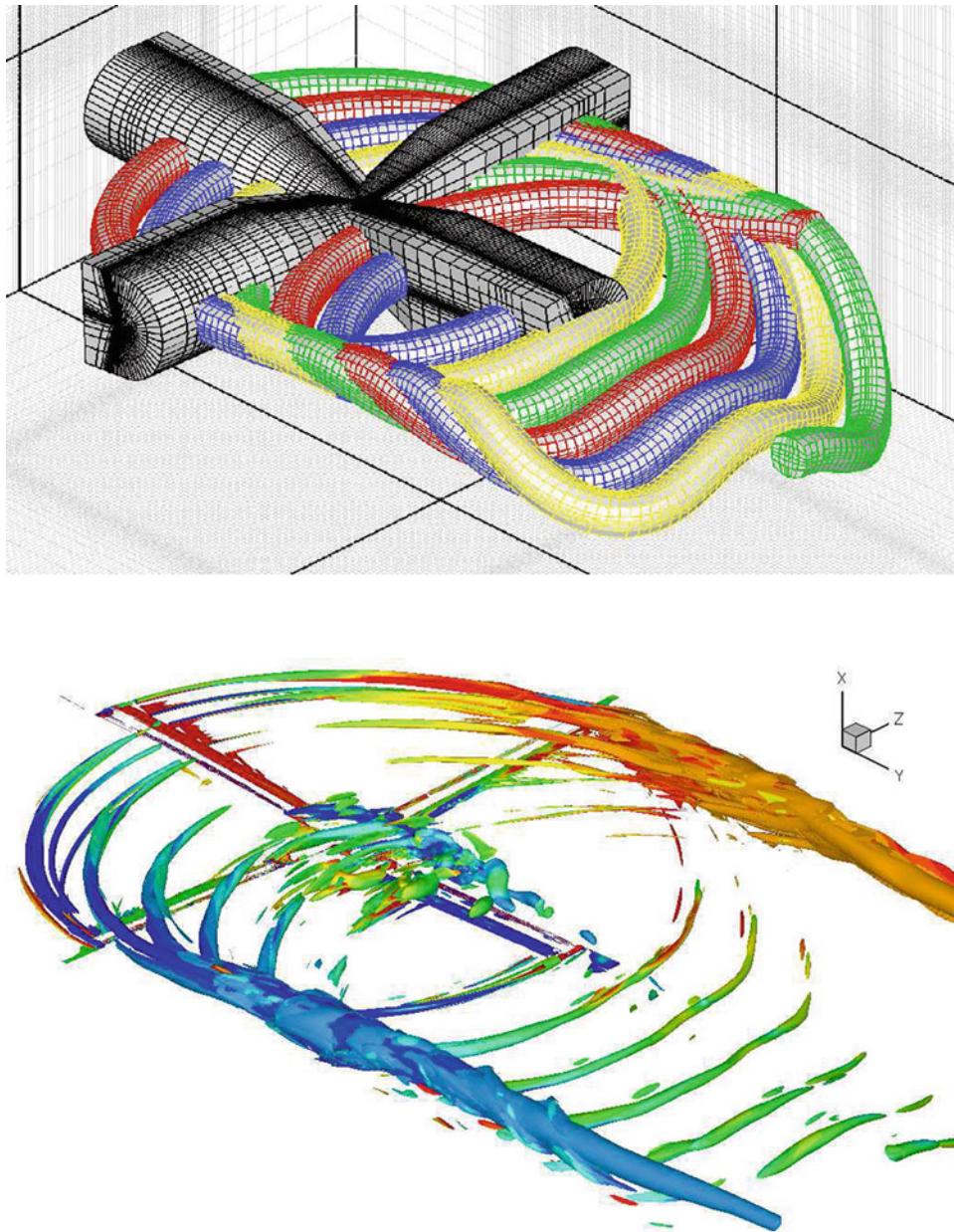


Abb. 8.55 Beispiel einer Hybridmodellierung. *Oben:* Chimera-Netze für die Rotorblätter und die vermuteten Blattspitzenwirbel. *Unten:* Isolinien eines Strömungsfeldoperators, eingefärbt mit Wirbeldichte, zeigen den Ort von Blattspitzenwirbeln an. © Markus Dietz, IAG, Uni Stuttgart

vielversprechende Alternative zu konventionellen Netzgenerierungen darstellen, sind dies dennoch nur Hybridmodelle. Die Zukunft ist hier wahrscheinlich den unstrukturierten Netzen vorbehalten, die sich adaptiv den Strömungslösungen anpassen, indem sie lokal – wo nötig – verfeinern und dort – wo möglich – auch selbstständig wieder vergrößern, so dass die Anzahl der Zellen und damit die Rechenzeit auf das minimal erforderliche Maß beschränkt bleibt. Ein weiterer Ansatz besteht in der Annahme von im Wesentlichen reibungsfreier Strömung außerhalb des unmittelbaren Blattbereiches. Dann wird in den Blattnetzen mit Navier-Stokes gerechnet, außerhalb mit den Euler-Gleichungen. Diese lassen sich derart umformulieren, dass die Gleichungen auf einer Konservierung der Wirbeldichtebasis aufgestellt sind. Damit geht keine Wirbeldichte mehr durch numerische Dissipation verloren, auch wenn die Netze relativ grob sind. Diese Methode wird als Vorticity Transport Method (VTM) bezeichnet.

8.10 Schlussfolgerungen

- Aktive Rotorsteuerung gliedert sich generell in zwei Konzepte: globale Blattsteuerung mittels höherharmonischer (HHC, unterhalb der Taumelscheibe) oder individueller Blattsteuerung (IBC, oberhalb derselben) und in lokale Blattsteuerung (LBC) mittels Klappen an der Blathinter- oder Vorderkante, oder aktiver Verwindung.
- HHC und IBC erzeugen Drehschwingungen an der Blattwurzel mit ganzzahligen Vielfachen der Rotordrehzahl. Das Rotorblatt antwortet je nach konstruktiver Auslegung mit elastischer Torsion, die, abhängig von der Lage der Torsionseigenfrequenz, in Amplitude und Phase sich der eingebrachten Schwingung überlagert. Als Konsequenz wird zusätzlicher periodischer Auf- und Abtrieb am gesamten Blatt erzeugt, der sich zu der von der Hubschraubersteuerung erzeugten Auftriebsverteilung addiert. Dem Impulssatz folgend wird daher auch der induzierte Durchfluss eine zusätzliche, über die Rotorebene periodische Verteilung erhalten.
- Jedes Blatt erzeugt einen oder mehrere Blattspitzenwirbel, die mit der Fluggeschwindigkeit durch die Rotorebene fliegen und damit auch durch das induzierte Durchflussfeld, das die Flugbahn der Wirbel nach oben oder unten ablenkt. Mit HHC/IBC Steuerung ist es daher möglich, den Blatt-Wirbelabstand dort zu erhöhen, wo die Wirbelachse parallel zur Blattachse ist. Die Druckänderung am Rotorblatt bei Passage des Wirbels wird dann geringer ausfallen und der zugehörige Lärm im Fernfeld gesenkt. Die Phasenlage der HHC/IBC zur Lärmreduzierung hängt bei gegebener Fluggeschwindigkeit sehr vom Bahnneigungswinkel ab und es gibt einen Bahnwinkel, bei dem die Phase zur optimalen Lärmreduzierung um 180° gedreht werden muss, was für die Reglerauslegung eine besondere Schwierigkeit darstellt. Der physikalische Grund dafür ist, dass die optimale Position der Blattspitzenwirbel einmal ober- und einmal unterhalb der Rotorebene ist, was gegensinnige HHC/IBC-Phase erfordert.
- Für die Vibrationsreduzierung greift ein anderer Mechanismus. Die durch HHC/IBC erzeugten zusätzlichen Luftkräfte addieren sich auf die periodischen Kräfte am Rotor-

kopf und können sie bei geeigneter Kombination von Frequenz, Amplitude und Phase auch vollständig tilgen. Bei konstanter Fluggeschwindigkeit ist die Phasenlage für optimale Vibrationsreduzierung weitgehend unabhängig vom Bahnneigungswinkel, die Amplitude muss allerdings angepasst werden. Daher ist in einigen Flugzuständen eine simultane Reduktion von Lärm und Vibrationen möglich, in anderen nicht.

- Da HHC und IBC große Massen (Taumelscheibe, Steuerstangen, Blattanschluss, Blattwurzel) bewegen müssen, wird von den Aktuatoren relativ große Energie benötigt, d. h. die Aktuatoren sind selbst schwer und groß und benötigen aufgrund der großen Wege und Frequenzen in der Regel Hydraulik als Antriebsenergie. Lokale Blattsteuerung, wie z. B. die aktive Steuerung einer Klappe an der Blatthinterkante, bewegt nur etwa 1/100 dieser Massen und die Aktuatoren fallen daher wesentlich kleiner und leichter aus und lassen sich im Blatt vor der Klappe unterbringen. Wegen der kleinen Wege können piezoelektrische Antriebe gewählt werden, die lediglich Strom als Energiequelle brauchen. Allerdings stellen die Aktuatoren eine Punktmasse für das Rotorblatt dar und damit erzeugen eine erhöhte lokale Belastung.
- Die mechanische Funktionsweise von Klappensteuerungen ist unterschiedlich im Vergleich zu HHC/IBC. Die Klappe erzeugt im Wesentlichen ein aerodynamisches Moment, das bei periodischen Bewegungen der Klappe auch periodisch das gesamte Rotorblatt zu Torsionsschwingungen anregt, als ob diese von einer HHC/IBC herrühren würden. Die restliche Wirkungsweise zur Lärm- oder Vibrationsminderung ist identisch zu der oben beschriebenen.
- Zukünftige Konzepte beinhalten eine verteilte Aktuatorik, d. h. auch deren Massen verteilen sich homogen über das Rotorblatt; sie können als eine Art „künstlicher Muskel“ angesehen werden. Die direkte Verwindung mittels aktiver Fasern in der Blatthaut stellt ein solches Konzept dar. Diese werden elektrisch zu periodischen Dehnungen und Stauchungen angeregt und erzeugen ein über die Spannweite verteiltes mechanisches Moment, auf das das Rotorblatt mit Torsion reagiert. Die restliche Wirkungsweise zur Lärm- oder Vibrationsminderung ist identisch zu der oben beschriebenen.
- Die Anforderungen an die Simulation gehen weit über die der flugmechanischen Simulation hinaus. Alle beteiligten Disziplinen – Elastomechanik, Aerodynamik, Nachlauf – müssen dynamisch sowohl zeitlich als auch räumlich hochauflösend mit einem zueinander passenden Detaillierungsgrad simuliert werden.

Literatur

1. W. Stewart, *Second Harmonic Control on the Helicopter Rotor*, ARC Reports and Memoranda 2997, 1952
2. P.R. Payne, *Higher Harmonic Rotor Control*, Aircraft Engineering, Vol. 30, No. 345, pp. 222–226, 1958
3. J.L. McCloud, III, *An Analytical Study of a Multicyclic Controllable Twist Rotor*, 31st Annual Forum of the AHS, Washington, D.C., USA, 1975

4. W.R. Splettstößer, B.G. van der Wall, B. Junker, K.-J. Schultz, P. Beaumier, Y. Delrieux, P. Leconte, P. Crozier, *The ERATO Programme: Wind Tunnel Results and Proof of Design for an Aeroacoustically Optimized Rotor*, 25th European Rotorcraft Forum, Rome, Italy, 1999
5. F.K. Straub, J.E.V. Byrns, *Application of Higher Harmonic Blade Feathering on the OH-6A Helicopter for Vibration Reduction*, NASA CR 4031, 1986
6. W. Miao, S. Kottapalli, M. Frye, *Flight Demonstration of Higher Harmonic Control (HHC) on S-76*, 42nd Annual Forum of the AHS, Washington, DC, USA, 1986
7. M. Polychroniadis, M. Achache, *Higher Harmonic Control: Flight Tests of an Experimental System on SA 349 Research Gazelle*, 42nd Annual Forum of the AHS, Washington, DC, USA, 1986
8. R. Kube, M. Achache, G. Niesl, W.R. Splettstößer, *A Closed Loop Controller for BVI Impulsive Noise Reduction by Higher Harmonic Control*, 48th Annual Forum of the AHS, Washington, D.C., USA, 1992
9. Y. Yu, *The HART II Test – Rotor Wakes and Aeroacoustics with Higher-Harmonic Pitch Control (HHC) Inputs – The Joint German/French/Dutch/US Project* -, 58th Annual Forum of the AHS, Montreal, Canada, 2002
10. P. Richter, A. Blaas, *Full Scale Wind Tunnel Investigation of an Individual Blade Control (IBC) System for the Bo105 Hingeless Rotor*, 19th European Rotorcraft Forum, Cernobbio, Italy, 1993
11. T.R. Norman, P.M. Shinoda, C. Kitaplioglu, S.A. Jacklin, A. Sheikman, *Low-Speed Wind Tunnel Investigation of a Full-Scale UH-60 Rotor System*, 58th Annual Forum of the AHS, Montreal, Canada, 2002
12. T.R. Norman, C. Theodore, P.M. Shinoda, D. Fürst, U.T.P. Arnold, S. Makinen, P. Lorber, J. O'Neill, *Full-Scale Wind Tunnel Test of a UH-60 Individual Blade Control System for Performance Improvement and Vibration, Loads, and Noise Control*, 65th Annual Forum of the AHS, Grapevine, TX, USA, 2009
13. U. Arnold, D. Fürst, C. Kessler, *Closed Loop IBC Results from Recent CH-53G Flight Tests*, 30th European Rotorcraft Forum, Marseille, France, 2004
14. F.K. Straub, D.K. Kennedy, A.M.D. Stemple, V. Anand, T.S. Birchette, *Development and Whirl-Tower Test of the Smart Material Actuated Rotator Technology (SMART) Active Flap Rotor*, Smart Structures and Materials Conference, San Diego, California, USA, 2004
15. D. Roth, B. Enenkl, O. Dieterich *Active Rotor Control by Flaps for Vibration Reduction – Full scale demonstrator and first flight test results* -, 32nd European Rotorcraft Forum, Maastricht, Netherlands, 2006
16. F.K. Straub, V.R. Anand, T.S. Birchette, B.H. Lau, *Wind Tunnel Test of the SMART Active Flap Rotor*, 65th Annual Forum of the AHS, Grapevine, TX, USA, 2009
17. C. Keßler, *Active Rotor Control for Helicopters: Motivation and Survey on Higher Harmonic Control*, 36th European Rotorcraft Forum, Paris, France, 2010
18. C. Keßler, *Active Rotor Control for Helicopters: Individual Blade Control and Swashplateless Rotor Designs*, 36th European Rotorcraft Forum, Paris, France, 2010
19. I. Chopra, J.L. McCloud, *A Numerical Simulation of Open-Loop, Closed Loop and Adaptive Multicyclic Control Systems*, Journal of the AHS, Vol. 28, No. 1, pp. 63–77, 1983
20. P. Küfmann, R. Bartels, B.G. van der Wall, O. Schneider, H. Holthusen, J. Gomes, *The First Wind Tunnel Test of the Multiple Swashplate System: Test Procedure and Principal Results*, Journal of the AHS, Vol. 62, No. 4, pp. 1–13, 2017
21. P. Küfmann, R. Bartels, B.G. van der Wall, O. Schneider, H. Holthusen, *Individual Blade Control of a 5-bladed Rotor Using the Multiple Swashplate System*, 43rd European Rotorcraft Forum, Milano, Italy, 2017

22. F. Hoffmann, O. Schneider, B.G. van der Wall, R. Keimer, S. Kalow, A. Bauknecht, B. Ewers, K. Pengel, G. Feenstra, *STAR Hovering Test – Proof of Functionality and Representative Results*, 40th European Rotorcraft Forum, Southampton, United Kingdom, 2014
23. J.W. Lim, R.C. Strawn, *Prediction of HART II Rotor BVI Loading and Wake System Using CF-D/CSD Loose Coupling*, 45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, USA, 2007
24. M. Dietz, E. Krämer, S. Wagner, *Tip Vortex Conservation on a Main Rotor in Slow Descent Flight Using Vortex-Adapted Chimera Grids*, 24th AIAA Applied Aerodynamics Conference, San Francisco, CA, USA, 2006



Weitere Themenbereiche der Rotordynamik

9

9.1 Einleitung

Die Entwicklung von Drehflügelflugzeugen ist ein außerordentlich komplexes Gebiet und aufgrund der Vielzahl von vor allem dynamischen Problemen und Wechselwirkungen numerisch nicht in allen Details simulierbar. Daher zeigt oft erst die Flugerprobung mit Prototypen die noch vorhandenen Probleme auf; dann allerdings sind Änderungen am Design sehr zeitaufwändig und kostspielig. Daher kommt hier der Modellversuchstechnik eine besondere Rolle zu, welche die Statik, die Dynamik und die Aerodynamik des Originals richtig abbildet, womit viele der Probleme bereits im Entwurfsstadium zu erkennen und zu beheben sind. Allerdings erfordert dies die Konstruktion von sinnvoll skalierten Modellen. Die Möglichkeiten der Skalierung werden im nachfolgenden Abschnitt dargelegt.

Heutige Rotoren – und in zunehmendem Maße auch die Rümpfe – werden aus Faser-Verbund-Werkstoffen (FVW) hergestellt, welche verschiedene Materialien miteinander verbinden. Dies eröffnet aufgrund der damit ermöglichten Inhomogenitäten der Materialeigenschaften neue Wege, gezielt die elastomechanischen Verhaltensweisen der Bauteile zu beeinflussen. Damit entworfene neue Rotorblattgeometrien können wiederum gefahrlos als skaliertes Modell im Windkanal erprobt werden. Ein kurzer Abriss dieser Thematik, sowie eine Betrachtung der Besonderheiten von zirkulationsgesteuerten Rotoren, bildet den Abschluss dieses Kapitels.

9.2 Tests mit dynamisch skalierten Rotormodellen

Um die Dynamik, Leistung und Stabilität von Hubschraubern zu analysieren, werden neben dem Flugversuch mit dem Gerät in Originalgröße (engl. full scale) auch verschiedenartig skalierte Modelle gebaut und im Windkanal getestet. Diese Modelle simulieren die grundlegenden Eigenschaften des Originals in Abhängigkeit des Phänomens, das untersucht werden soll. Generell kann man drei Kategorien von Modellen unterscheiden: starre, Froude-skalierte und Mach-skalierte Modelle. Starre Modelle simulieren nur das aerodynamische Profil bzw. die Form des zu untersuchenden Körpers (z. B. den Rumpf) und werden verwendet, um die grundlegenden aerodynamischen Eigenschaften unter idealen (labormäßigen) Bedingungen zu studieren. Sie sind nützlich, um mathematische Modelle zu validieren und Datenbanken anzulegen. So werden beidseitig eingespannte, unverwundene und nicht rotierende Rotorblattmodelle verwendet, um die stationären zweidimensionalen Profilbeiwerte zu ermitteln. Im Mittelschnitt werden im Allgemeinen rein zweidimensionale Strömungsverhältnisse angenommen und daher findet man dort meist die Instrumentierung mit Drucksensoren. In Wandnähe (selbst bei anliegender Strömung) und generell bei Strömungsablösung bildet sich jedoch immer eine dreidimensionale Strömung aus. Die instationären Beiwerte erhält man mit Modellen, die man mit gesteuerten Frequenzen und Amplituden in der Regel um die $c/4$ -Achse schwingen lässt.

Einseitig eingespannte Flügelmodelle werden verwendet, um auch die dreidimensionale Umströmung der Blattspitze zu untersuchen; an Rumpfmodellen interessiert oft die Strömung hinter dem Heck hinsichtlich der Ablösegebiete als auch der Widerstandsbeiwert des Rumpfes selbst. Auch die Auswirkungen des Nachlaufs hinter dem Rotormast und -kopf auf das Leitwerk finden Anwendung, um z. B. geeignete Verkleidungen zu finden, die das Problem der mit tail shake umschriebenen Schüttelerscheinungen im schnellen Vorwärtsflug zu beheben. Ferner werden bei Rotortests starre Blätter mit Gelenken an der Wurzel verwendet, um die aeroelastische Stabilität als auch die Flugstabilität und die Leistungsfähigkeit zu untersuchen. Für Leistungsmessungen werden die Modellrotoren wie die Originalrotoren gebaut und in relativ großen Windkanälen betrieben. Starre Modelle sind relativ preiswert, beinhalten aber oft sehr umfangreiche und teure Sensorik.

Für Zwecke der Rotordynamik werden oft Froude-skalierte Modelle verwendet. Sie sind schwieriger als starre Modelle herzustellen und daher relativ teuer. Grundsätzlich simulieren diese Modelle die statischen elastischen Eigenschaften (z. B. die Durchbiegung aufgrund der Gravitation), wozu detaillierte Steifigkeits-, Massen- und Profilverteilungen nachgebildet werden müssen. Bei diesen Modellen werden jedoch die Kompressibilitätseffekte vernachlässigt.

Die Mach-skalierten Modelle werden verwendet, um die Leistungen und aerodynamischen Eigenschaften als auch die Lärmemissionen des Rotors zu studieren. Auch diese Modelle sind schwierig herzustellen und daher sehr teuer. Hier wird auf die gleichen Machzahlen wie beim Original geachtet, so dass die Kompressibilitätseffekte richtig repräsentiert sind. Jedoch sind dann die statischen Auslenkungen nicht skaliert. Im Folgenden werden die Indizes m und f (engl. model scale, full scale) verwendet.

9.2.1 Starre Modelle

Primäres Ziel von starren Modellen ist, die stationären und instationären aerodynamischen Eigenschaften – also die Auftriebs-, Widerstands- und Momentenbeiwerte – zu ermitteln. Dies erfolgt meist in relativ kleinen Windkanälen im Unter- und ggf. Überschallbereich (dieser wird für die Rotoraerodynamik nicht benötigt, da die maximale Machzahl von ca. $M = 0,93$ nicht überschritten wird). Da die Modelle in der Regel keine elastischen Eigenarten nachbilden müssen, sind sie sehr steif gebaut und daher einfach und preiswert herzustellen. Die primären Ähnlichkeitsparameter sind hier die Machzahl und die Reynoldszahl, siehe Tab. 9.1. Sobald das Modell kleiner als das Original ist, also ein Skalierungsfaktor $c_m/c_f < 1$ existiert, ist bei gleicher Geschwindigkeit (und damit gleicher Machzahl) die Reynoldszahl des Modells kleiner als beim Original, weshalb oft entweder mit Änderung des Kanaldrucks, der Kanaltemperatur (Kryokanal) oder mit einem anderen Gas als Luft gearbeitet wird, um über die Beeinflussung der Zähigkeit ν beide Kenngrößen zu erfüllen.

Als Beispiel sei der Transsonische Windkanal Göttingen (TWG) des DNW genannt (Messstreckenquerschnitt: $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$, $0,3 \leq M \leq 2,2$), dessen statischer Druck in gewissen Grenzen beeinflusst werden kann, als auch der Europäische Transsonische Windkanal (ETW, $2 \text{ m} \times 2,4 \text{ m}$, $0,15 \leq M \leq 1,35$) und der Kryokanal Köln des DNW ($2,4 \text{ m} \times 2,4 \text{ m}$, $0 \leq M \leq 0,38$), die beide mit Tieftemperatur arbeiten. Nachteil ist, dass auch die Modelle und die Messtechnik für diese Temperaturen geeignet sein muss. NASA Langley betreibt einen Windkanal mit Schwergas, um über die anderen Gaseigenschaften die Reynoldszahlähnlichkeit zu erreichen.

Die Modellgröße richtet sich nach den Abmessungen des gewählten Windkanals, um Interferenzen aufgrund der Nähe der Kanalwände zum Modell möglichst klein zu halten. So ist bei reinen Profilmessungen ein Verhältnis von Profiltiefe zu Kanalhöhe und -breite von ca. $1 : 3$ eine Minimalforderung; dem Problem der Interferenz wird bei stationären Messungen entweder durch geschlitzte Kanalwände begegnet oder durch adaptive Wandverformung, die sich der Umströmung des Modells anpasst (z. B. im TWG). Auch die Streckung des Modells (Spannweite/Profiltiefe) sollte Werte von 3 nicht unterschreiten, um die Seitenwandeinflüsse auf die Umströmung in der Flügelmitte gering zu halten. In transsonischer Strömung bilden sich außerdem Stoßwellen aus, die an den Kanalwänden reflektiert werden und zurück auf das Modell wirken, so dass im schallnahen Bereich Messungen kaum möglich sind, außer bei sehr großen Wandabständen $h \gg c$ oder entsprechend perforierter Kanalwand. Erst bei Überschallgeschwindigkeit treffen die Stoßwellen hinter dem Profil aufeinander und haben keine Rückwirkung mehr nach vorne.

Tab. 9.1 Ähnlichkeitsparameter von starren Modellen

Machzahl	$M = V_\infty/a$
Reynoldszahl	$Re = V_\infty c / \nu$
Aerodynamische Profilierung	

9.2.2 Froude-skalierte Modelle

Hier wird in erster Linie die statische Biegelinie unter dem eigenen Gewicht beibehalten. Da die Blattdynamik ein nichtlineares Problem ist, ist es wichtig, dass die statischen Auslenkungen richtig simuliert werden. Diese Modelle sind vor allem für die Untersuchung des aeroelastischen Verhaltens von Bedeutung. Wenn man die aeroelastischen Stabilitätsgleichungen betrachtet, so wird man die in Tab. 9.2 angegebenen dimensionslosen Parameter für Rotoren darin finden.

Da das Modell im Windkanal getestet wird, ist es in seinen Abmessungen so zu dimensionieren, dass der Einfluss des Messstreckenquerschnittes auf die Umströmung des Modells gering ist. So sollten die Flügelspannweite von Flugzeugmodellen bzw. der Rotor durchmesser von Hubschraubermodellen die halbe Kanalbreite nicht überschreiten. Der Skalierungsparameter s ist das Verhältnis vom Radius des Modells zu dem des Originals (beim Flächenflugzeug ist dessen Spannweitenverhältnis zu nehmen) und entsprechend werden alle geometrischen Größen, also auch die Profiltiefe, skaliert.

$$\frac{R_m}{R_f} = \frac{c_m}{c_f} = s \quad (9.1)$$

Ferner ist die Luftdichte im Windkanal – abgesehen von atmosphärischen Änderungen – konstant (außer im Druckkanal, wo auch die Flughöhe simuliert werden kann), so dass die Flughöhe mit der geographischen Lage des Windkanals festgelegt ist.

$$\frac{\rho_m}{\rho_f} = \frac{\text{Windkanalhöhe}}{\text{Flughöhe}} = \frac{g_m}{g_f} = \frac{a_m}{a_f} = \frac{v_m}{v_f} \quad (9.2)$$

Dieses Verhältnis ist 1, wenn man den zu untersuchenden Flugfall in derselben Höhe annimmt. Ferner ist die gleiche Schwerkraft bei Modell und Original anzusetzen. Damit

Tab. 9.2 Ähnlichkeitsparameter von Froude-skalierten Modellen

Lockzahl	$\gamma = \frac{\rho C_{l\alpha} c R^4}{I_b}$
Massenverteilung	$\frac{m'}{m'_0}$
Steifigkeitsverhältnis	$\frac{EI}{m'\Omega^2 R^4}$ oder $\frac{GJ}{m'\Omega^2 R^4}$
Froude-Zahl	$Fr = \frac{m'gR^3}{EI} = \bar{g}\frac{m'\Omega^2 R^4}{EI}$
Fortschrittsgrad	$\mu = \frac{V_\infty \cos \alpha}{\Omega R}$
Strukturelle Dämpfung	
Aerodynamische Profilierung	

folgt aus der Forderung nach gleicher Lockzahl (mit $I_b = m' R^3 / 3$) sowie der Annahme, dass der Auftriebsgradient im Modell und Original identisch ist (was aufgrund anderer Mach- und Reynoldszahlen jedoch oft nicht zutrifft):

$$\frac{\rho_m c_m R_m}{m'_m} = \frac{\rho_f c_f R_f}{m'_f} \quad (9.3)$$

und daraus mit $c = (c/R)R$ das Massenverteilungsverhältnis, wobei das Verhältnis c/R bei Modell und Original aufgrund der Skalierung gleich ist

$$\frac{m'_m}{m'_f} = \left(\frac{R_m}{R_f} \right)^2 = s^2 \quad (9.4)$$

und die relative Massenverteilung in radialer Richtung m'/m'_0 muss bei Modell und Original ebenfalls gleich sein. Aus der Froude-Zahl folgt

$$\frac{EI_m}{EI_f} = \frac{GJ_m}{GJ_f} = \frac{m'_m}{m'_f} \left(\frac{R_m}{R_f} \right)^3 = s^5 \quad (9.5)$$

Es ist unmöglich, die strukturelle Dämpfung zu skalieren, aber man kann versuchen, diese so niedrig wie möglich zu machen. Aus dem Steifigkeitsverhältnis folgt für das Verhältnis der Drehzahlen und der Schwingungsfrequenzen

$$\frac{\Omega_m}{\Omega_f} = \sqrt{\frac{m'_f}{m'_m} \left(\frac{R_f}{R_m} \right)^4 \frac{EI_m}{EI_f}} = \frac{\omega_m}{\omega_f} = \frac{1}{\sqrt{s}} \quad (9.6)$$

Vom Fortschrittsgrad erhält man das Geschwindigkeits- und damit auch das Machzahlverhältnis, wenn die Schallgeschwindigkeit $a_m = a_f$ ist.

$$\frac{V_m}{V_f} = \frac{\Omega_m}{\Omega_f} \frac{R_m}{R_f} = \frac{M_m}{M_f} = \sqrt{s} \quad (9.7)$$

Da die Reynoldszahl aus dem Produkt von Geschwindigkeit und Profiltiefe gebildet wird, ist ihr Skalierungsfaktor

$$\frac{Re_m}{Re_f} = \frac{V_m c_m}{V_f c_f} = \sqrt{s^3} \quad (9.8)$$

Bei einem Skalierungsfaktor von z. B. $s = 1 : 4 = 0,25$, folgt, dass die Blattspitzenmachzahl des Froude-skalierten Modells nur halb so groß ist wie beim Original. Demzufolge werden Froude-skalierte Modelle bei kleineren Machzahlen, also in der Regel inkompresibel und bei kleineren Reynoldszahlen betrieben, was wiederum Auswirkungen auf die

aerodynamischen Kennwerten wie $C_{l\alpha}$ und C_{d0} etc. hat. Damit folgt

Auslenkung	$\frac{w_m}{w_f} = s$
Geschwindigkeiten	$\frac{\dot{w}_m}{\dot{w}_f} = \sqrt{s}$
Beschleunigungen	$\frac{\ddot{w}_m}{\ddot{w}_f} = 1$
Massenträgheiten	$\frac{I_{bm}}{I_{bf}} = \frac{m'_m}{m'_f} \left(\frac{R_m}{R_f} \right)^3 = s^5$
Steuerstangensteifigkeit	$\frac{k_m}{k_f} = \frac{(m' \Omega^2 R)_m}{(m' \Omega^2 R)_f} = s^2$
Schlagbiegefedersteifigkeit	$\frac{k_{\beta m}}{k_{\beta f}} = \frac{(m' \Omega^2 R^2)_m}{(m' \Omega^2 R^2)_f} = s^3$

(9.9)

9.2.3 Mach-skalierte Modelle

Hier wird die Machzahl der Anströmung an den Rotorblättern richtig simuliert. Bei Leistungs-, Vibrations- und Akustikuntersuchungen sind die Kompressibilitätseinflüsse wichtig und daher braucht man Mach-skalierte Modelle. Bei normalen Windkanälen kann man nicht gleichzeitig sowohl die Froude- als auch die Machzahl in das Verhältnis 1 : 1 bringen. Die simulierten Parameter sind in Tab. 9.3 angegeben.

Auch hier ist die Modellgröße von den Dimensionen des Windkanals begrenzt. Es gibt hier folgende Relationen für den Radius bzw. die Profiltiefe

$$\frac{R_m}{R_f} = \frac{c_m}{c_f} = s \quad (9.10)$$

Tab. 9.3 Ähnlichkeitsparameter von Mach-skalierten Modellen

Lockzahl	$\gamma = \frac{\rho C_{l\alpha} c R^4}{I_b}$
Machzahl	$M_{tip} = \frac{\Omega R}{a}$
Fortschrittsgrad	$\mu = \frac{V_\infty \cos \alpha}{\Omega R}$
Steifigkeitsverhältnis	$\frac{EI}{m' \Omega^2 R^4}$ oder $\frac{GJ}{m' \Omega^2 R^4}$
Massenverteilung	$\frac{m'}{m'_0}$
Strukturelle Dämpfung	
Profilierung	

sowie für die Luftdichte und die Schallgeschwindigkeit

$$\frac{\rho_m}{\rho_f} = \frac{\text{Windkanalhöhe}}{\text{Flughöhe}} = \frac{a_m}{a_f} = 1 \quad (9.11)$$

Aus der Machzahl folgt das Drehzahlverhältnis sowie das der Eigenfrequenzen zu

$$\frac{\Omega_m}{\Omega_f} = \frac{R_f}{R_m} \frac{a_m}{a_f} = \frac{\omega_m}{\omega_f} = \frac{1}{s} \quad (9.12)$$

Aus dem Fortschrittsgrad folgt für die Geschwindigkeiten

$$\frac{V_m}{V_f} = \frac{M_m}{M_f} = 1 \quad (9.13)$$

und daher für die Reynoldszahlen

$$\frac{Re_m}{Re_f} = \frac{V_m c_m}{V_f c_f} = s \quad (9.14)$$

Die Reynoldszahl ist also wesentlich näher am Original als bei Froude-skalierten Modellen ($s^{3/2}$). Dennoch muss man bei kleinen Mach-skalierten Modellen aufpassen, dass man in der Reynoldszahl nicht zu gering wird, denn diese hat Auswirkungen auf charakteristische Profileigenschaften wie $C_{l\alpha}$, C_{d0} , $C_{l\max}$ sowie das Stallverhalten, da durch die Skalierung ein beim Original in turbulenter Grenzschicht befindliches Profil beim Modell aufgrund der kleineren Reynoldszahl eine laminare Grenzschicht aufweisen kann. Aus der Lockzahl folgt das Massenverteilungsverhältnis

$$\frac{m'_m}{m'_f} = \left(\frac{R_m}{R_f} \right)^2 = s^2 \quad (9.15)$$

und aus der Steifigkeitsverteilung erhält man

$$\frac{EI_m}{EI_f} = \frac{GJ_m}{GJ_f} = \frac{m'_m}{m'_f} \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_f} \right)^2 \left(\frac{R_m}{R_f} \right)^4 = s^4 \quad (9.16)$$

Da hier die aerodynamische Profilierung außerordentlich wichtig ist, muss auf genaueste Einhaltung der Profilkordinaten größter Wert gelegt werden, d. h. die Toleranzen sind beim Modell um den Skalierungsfaktor kleiner als beim Original. Die statischen Auslenkungen unter dem Eigengewicht haben folgende Skalierung

$$\frac{w_m/R_m}{w_f/R_f} = \frac{\left(\frac{m'gR^3}{EI} \right)_m}{\left(\frac{m'gR^3}{EI} \right)_f} = s \quad (9.17)$$

und daraus ergibt sich für die Auslenkungen

$$\frac{w_m}{w_f} = s^2 \quad (9.18)$$

Wenn also das Modell im Maßstab 1 : 8 (also $s = 0,125$) gebaut ist, so werden die statischen Auslenkungen nur 1/64 des Originals sein. Also sind Mach-skalierte Modelle sehr viel steifer als Froude-skalierte. Es folgen das Geschwindigkeitsverhältnis und das der Beschleunigungen zu

Geschwindigkeiten	$\frac{\dot{w}_m}{\dot{w}_f} = 1$
Beschleunigungen	$\frac{\ddot{w}_m}{\ddot{w}_f} = \frac{1}{s}$
Massenträgheiten	$\frac{I_{bm}}{I_{bf}} = \frac{m'_m}{m'_f} \left(\frac{R_m}{R_f} \right)^3 = s^5$
Steuerstangensteifigkeit	$\frac{k_m}{k_f} = \frac{(m' \Omega^2 R)_m}{(m' \Omega^2 R)_f} = s$
Schlagbiegefedersteifigkeit	$\frac{k_{\beta m}}{k_{\beta f}} = \frac{(m' \Omega^2 R^2)_m}{(m' \Omega^2 R^2)_f} = s^2$

(9.19)

9.2.4 Herstellung der Modelle

Idealerweise muss man ein Replikat des Originals bauen, also alle Details skalieren. In der Praxis ist das aber meist nicht machbar und daher werden die Modelle so gebaut, dass sie wenigstens die grundlegenden Eigenschaften des Originals richtig wiedergeben. Die Herstellung der Modelle ist eine Kunst für sich und erfordert viel Geduld und Erfahrung. Es gibt keine festen Regeln für die Auswahl der Materialien sowie den Aufbau der Modelle; vielmehr wird ein einfacher Entwurf mit adäquater Modellierung der wichtigen Details vorgenommen. Rotorblätter werden typischerweise mit einem einzigen Holm aus Aluminium, Kevlar-, Glas- oder Kohlefasern hergestellt; die Rippen – sofern vorhanden – aus Balsaholz geschnitten, die Haut aus Glas- oder Kohlefasern gefertigt und die Hohlräume mit Schaumkernen gefüllt.

9.2.5 Instrumentierung und Messtechnik

Die Instrumentierung von reinen Profilmodellen beinhaltet in der Regel viele Drucksensoren im Mittelschnitt, um den Auftrieb und das aerodynamische Moment zu erfassen. Bei stationären Messungen reichen preiswerte Druckröhren, die der Reihe nach gemessen werden, aus; bei instationären Druckverteilungen (wie sie auch bei stationärem Profil bei

Strömungsablösung auftreten, sonst bei instationären Messungen) müssen Miniatur-Absolutdrucksensoren verwendet werden, die einen hohen Frequenzbereich abdecken müssen und daher sehr teuer sind. Ein Druckrechen im Nachlauf unmittelbar hinter dem Profil misst den Impulsverlust der Strömung und damit den Widerstand des Profils. Weiter gibt es druckempfindliche Anstriche, die sich verfärben und damit flächendeckend die Druckverteilung liefern, sie erfordern eine optische Messung und Bildverarbeitung in der Auswertung. Heißfilmsensoren werden auf die Oberfläche geklebt, um den Umschlag laminar-turbulent in der Grenzschichtströmung zu lokalisieren. Auch Thermografie kommt hierfür zum Einsatz, da die höhere Reibung in turbulenten Grenzschicht eine Temperaturerhöhung an der Modelloberfläche erzeugt.

Als Strömungsfeldmesstechnik kamen früher Laser Doppler Velocimetry (LDV, Punkt-messung), heute eher die Particle Image Velocimetry (PIV) zum Einsatz, die das komplette Strömungsfeld in einer Ebene misst. PIV ist ein optisches Verfahren, das auf Bildverarbeitung aufbaut. Die Strömungssichtbarmachung kann mit Hilfe eines Laser Lichtschnitt-verfahrens (LLS) erfolgen. Für alle diese Strömungsmess- oder Visualisierungsverfahren wird die Strömung mit Rauch, verdampftem Öl oder Wasserdampf vernebelt, dessen Partikel das Laserlicht reflektieren und entweder der Dopplereffekt (LDV) oder die Verschiebung der Partikel in einem sehr kurzen Zeitabstand (PIV) gemessen wird. Mit beiden Verfahren lassen sich die Geschwindigkeiten der Partikel in Betrag und Richtung bestimmen, wobei die heute üblichen Stereomessverfahren alle drei Komponenten des Geschwindigkeitsvektors bzw. -feldes liefern.

Die Dichte im Strömungsfeld kann mit Hilfe der Background Oriented Schlieren (BOS) Methode optisch gemessen werden. Dazu wird im Ruhezustand eine Aufnahme des Bildhintergrundes gemacht und mit dem Bild während des Strömungszustandes verglichen. Überall dort, wo eine Dichteänderung erfolgt ist, wird die optische Linie abgelenkt und das Hintergrundmuster erscheint dort leicht verschoben. Eine Korrelation beider Bilder ergibt über die Größe der Verschiebung ein Maß für die Dichteänderung.

Trotz der Annahme starrer Modelle muss die Modellverformung bzw. -bewegung am Ort der Druckmessung ebenfalls gemessen werden, um elastische Modellbewegungen, die aufgrund der großen statischen und dynamischen Kräfte und Momente entstehen, in der Auswertung zu berücksichtigen.

Die Rotor- und Gesamthubschraubermodelle werden oft mit vielen Sensoren bestückt. Typischerweise werden Dehnmessstreifen (DMS, engl. strain gauge) am Blattahls angebracht, um die Schlag-, Schwenk- und Torsionsmomente zu messen. Die Kalibration dieser findet meist im nicht drehenden System statt und die Zentrifugalkraft erzeugt oft, trotz Vollbrückenschaltung, einen statischen Offset, der die Auswertung der Messungen erschwert. Die dynamischen Messungen sind jedoch unbeeinflusst. Auch die Biegelinie des Rotorblattes kann man mit DMS ermitteln, wenn man die gemessenen Biegemomentverteilungen durch die Steifigkeitsverteilungen dividiert und von der Blattwurzel beginnend zweimal in radialer Richtung numerisch integriert. Mit DMS lassen sich auch die Steuerstangenkräfte als auch die Kräfte der eingebauten Waagenelemente messen.

Statische und dynamische Drucksensoren werden verwendet, um die lokalen Druckverteilungen zu ermitteln. Beschleunigungsmesser (engl. accelerometer) werden typischerweise an der Blattspitze, am Rotorkopf und am Modellhalter angebracht, um die Vibrationspegel zu beobachten. Sie haben allerdings den Nachteil eines hohen Rauschniveaus und die interessierenden Frequenzen müssen herausgefiltert werden. Potentiometer können bei gelenkig gelagerten Rotoren die Schlag- und Schwenkwinkel messen. Sie werden auch zur Erfassung der Blattsteuerwinkel am Steuerlager eingesetzt und an den Aktuatoren angebrachte lineare Potentiometer messen die Taumelscheibenauslenkung. Auch berührungslose induktive Sensoren sind in Gebrauch, deren Kalibration ist aber sehr empfindlich gegen Abstandsänderungen, wie sie oft von Zentrifugalkräften erzeugt werden.

Mit lichtempfindlichen Widerständen und einer Zahnradanordnung kann man die Drehzahl ermitteln und ein Synchronisationssignal von 1/rev erzeugen. Heute kommen sehr hoch auflösende Drehwinkelencoder (engl. angle encoder) zum Einsatz. Die Daten der vielen Sensoren im drehenden System werden mit Hilfe eines Schleifringsystems oder einer Telemetrie anlage ins nicht drehende System übertragen und die Rotorkopflasten werden von einer Sechskomponentenwaage gemessen. Diese Waage wird vom Antriebsmotor und Getriebe mittels einer elastischen Kupplung getrennt, in die eine Drehmomentenmesswelle (engl. torque meter) eingebaut ist. Alle Signale werden verstärkt und gefiltert, dann digitalisiert und per Computer aufgezeichnet und analysiert.

9.2.6 Test des Modells

Es werden drei Testarten durchgeführt. Diese sind der statische Test, der Schwingungstest und der eigentliche Windkanaltest. Die statischen Tests werden am Modell oder den Komponenten durchgeführt, um die strukturellen Eigenschaften zu überprüfen. Der Schwingungstest ist notwendig, um die dynamischen Eigenschaften wie Eigenfrequenz und strukturelle Dämpfung zu ermitteln. Danach werden die Modelle im Windkanal getestet. Zunächst sind das Schwingungstests am nicht drehenden Rotor, um die Eigenfrequenzen von Halterung, Waage und Rotor zu bestimmen. Damit kann man nachprüfen, ob die Gefahr der Bodenresonanz im Bereich der Nenndrehzahl vorliegt bzw. welche Drehzahlbereiche im Betrieb zu vermeiden sind.

In Folge dessen wird der Spurlauf eingestellt, indem systematisch die Steuerstangen verlängert oder verkürzt werden. Dies wird bei verschiedenen Kollektivwinkeln gemacht. Wenn dies abgeschlossen ist, wird ein Massenausgleich am Blatthals vorgenommen, um Unwuchten auszugleichen. Danach wird der Spurlauf bei verschiedenen Schüben im Schwebeflug und auch im Vorwärtsflug überprüft. Full scale Rotoren haben oft noch kleine Bleche, sog. Trimm-Tabs, an der Blatthinterkante, die leicht verbogen werden können, um die Feineinstellung des Spurlaufs vorzunehmen.

Bei Tests im Vorwärtsflug wird der Rotor erst ohne Wind auf Betriebsdrehzahl gebracht, dann bei kleinem Kollektiv die Windgeschwindigkeit auf den geforderten Wert gebracht, wobei dauernd zyklisch nachgesteuert werden muss, wobei in der Regel das Roll- und das Nickmoment zu Null getrimmt wird. Bei erreichter Geschwindigkeit wird

dann der geforderte Schub und die gewünschten Momente eingestellt. An jedem Testpunkt muss der Rotor für den jeweiligen Betriebszustand mit Mastneigungswinkel und Kollektiv eingetrimmt werden, wobei Längs- und Quersteuer meist so eingestellt werden, dass entweder die Schlagbewegung minimal wird (mittels des Schlagwinkelsensors) oder die Rotorkopfmomente (mittels der Waage). Dies stellt sicher, dass die Blattspitzenebene senkrecht zur Rotormastachse steht.

Bei Simulation von Flugmessungen im Windkanal werden die Rotorkopfmomente jedoch meist von Null verschieden sein. Ein Vollmodell mit Rumpf und Heckrotor erfordert eine weitere Waage, um die Gesamtkräfte und -momente im virtuellen Schwerpunkt zu bestimmen und um diesen herum die Trimmung zu bewerkstelligen. Weitere Freiheitsgrade sind dann das Heckrotorkollektiv und die Roll- und Gierwinkel des Modells.

Bei Stabilitätsuntersuchungen wird die Taumelscheibe mit der Frequenz der regressiven Schwenkfrequenz angeregt. Nachdem der Rotor einen stationären eingeschwungenen Zustand erreicht hat, wird die Anregung weggelassen und das Ausschwingverhalten aufgezeichnet. Daraus kann man dann die Frequenz und Dämpfung in diesem Zustand ermitteln.

9.2.7 Schlussfolgerungen

- Der Test von Windkanalmodellen ermöglicht, neue Technologien unter realistischen Bedingungen gefahrlos zu erproben. Die Modelle müssen jedoch für die zu untersuchenden Effekte gezielt entworfen und konstruiert werden, da nicht alle dimensionslosen Kenngrößen (Reynolds-, Mach-, Froudezahl etc.) gleichzeitig erfüllt werden können.
- Machzahl-skalierte Rotormodelle eignen sich für Leistungs-, Dynamik-, Akustikuntersuchungen und für die Erprobung aktiver Steuerungskonzepte zur Beeinflussung dieser Größen. Dabei müssen die Rotorblätter auch die dynamischen Eigenschaften des Originalrotors repräsentieren (das heißt, sie müssen gleiche, auf die Rotordrehzahl bezogene, Eigenfrequenzen haben).
- Versuche mit Rotoren im Windkanal dienen sowohl zur experimentellen Bestätigung der zuvor gerechneten Eigenschaften neuer Entwürfe oder Steuerungskonzepte, aber auch zur Analyse von bisher unbekannten Phänomenen, um die Physik dahinter zu verstehen und aus den Messdaten mathematische Modelle für die Simulation zu erstellen.

9.3 Aeroelastische Optimierung eines Rotors

9.3.1 Einleitung

Hubschrauber sind immer durch starke Vibrationen beansprucht, die vorwiegend von den Rotorblättern verursacht werden. Ein direkter Ansatz die Vibrationen zu reduzieren ist, bereits im Entwurf den Rotor so auszulegen, dass er wenig Vibrationen erzeugt. Dazu

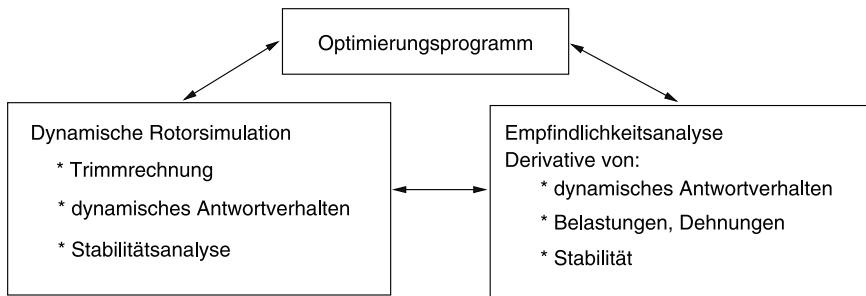


Abb. 9.1 Aeroelastische Optimierung – Blockschaltbild

muss man ein Optimum der strukturellen Eigenschaften wie Steifigkeiten, Massenverteilung und Profilierung finden, mit dem es möglich ist, die Vibrationsursache zu umgehen und aeroelastische Instabilitäten auszuschließen. Wenn dieses Ziel systematisch angegangen wird, so nennt man dies aeroelastische Optimierung (engl. aero-elastic tailoring).

Das Prinzip ist in Abb. 9.1 dargestellt. Man braucht ein Simulationsprogramm, mit dem der Trimmzustand (des gesamten Hubschraubers oder auch nur des Rotors) und die Rotordynamik berechnet werden. Das übergeordnete Optimierungsprogramm variiert dann systematisch verschiedene Parameter, um die Empfindlichkeit der Lösung hinsichtlich z. B. Vibrationen, Lärm oder Leistung oder auch eine Kombination von allen zu ermitteln. Dann kann es mit einem Gradientenverfahren das Optimum der zu varierenden Parameter suchen, um eine wie auch immer definierte Gütfunktion zu optimieren.

9.3.2 Optimierungsmethode

Das Ziel ist, die Struktur eines z. B. gelenklosen Rotorblattes so zu optimieren, dass die Vibrationen minimiert und gleichzeitig die aeroelastische Stabilität beibehalten oder sogar verbessert wird. Als variable Größen kommen in Frage:

- Die nicht strukturellen Massen (z. B. Trimmgewichte)
- Die davon beeinflusste lokale Lage des Blattschwerpunktes x_I
- Die Steifigkeitsverteilungen in Schlägen, Schwenken und Torsion ($E I_x, E I_z, GJ$)

Der heutige Stand der Technik der aeroelastischen Rotoroptimierung wird in folgenden Veröffentlichungen dargestellt: Taylor (1982) [1], Friedmann und Shanthakumaran (1984) [2], Peters et. al. (1986) [3], Davis und Weller (1986) [4], Yen (1985) [5]. Generell wird ein Finite-Differenzen-Verfahren angewendet, um die Empfindlichkeit des Systems auf bestimmte Parameter zu erhalten. Dies ist oft mit Begrenzungen in der Anzahl der freien Parameter, dynamischer Randbedingungen und der Art der Gütfunktion verbunden. Als Beispiele solcher Untersuchungen seien genannt:

- Celi und Friedmann (1988) [6]. Hier wurden die 4/rev-Vertikalkräfte am Rotorkopf minimiert.
- Adelman und Haftka (1986) [7]. Sie geben eine generelle Übersicht über die Empfindlichkeitsanalyse.
- Lim und Chopra (1987, 1988) [8, 9]. Hier wird ein direkter analytischer Ansatz gemacht. 1987 konnten die Empfindlichkeitsderivativa der Blattantwort und der Rotorkopflasten berechnet werden; die Berechnung der Empfindlichkeitsderivativa der Stabilitätsparameter folgte 1988. Es handelt sich um ein recheneffizientes Verfahren, das die dynamische Systemantwort sowie die Stabilitätsanalyse vereint.

Die Berechnung der Empfindlichkeitsderivativa kann auf zwei Wegen erfolgen: dem direkten analytischen Weg und dem Finite-Differenzen-Verfahren. Das erste verwendet die Kettenregel-Differentiation. Es gibt eine Funktion $F = F(D_j, Y(D_j))$, worin D_j die freien Parameter des Entwurfs sind und Y die stationäre Systemantwort darstellt. Die Empfindlichkeitsderivativa sind dann wie folgt definiert:

$$\frac{dF}{dD_j} = \frac{\partial F}{\partial D_j} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial D_j} \quad (9.20)$$

Das Verfahren resultiert in einer substantiellen Reduktion der Rechenzeit. Die zweite Möglichkeit ist leichter zu implementieren, aber die Wahl einer ausreichenden Schrittweite ist ein Problem und die Rechenzeiten sind sehr lang. Dabei wird die stationäre Systemantwort (= Trimmrechnung) mit dem FEM in Zeit-Verfahren ermittelt.

$$\int_{\psi_I}^{\psi_F} \delta Y^T Q d\psi \quad \text{worin} \quad Q = \begin{Bmatrix} F - C\dot{q} - Kq \\ M\ddot{q} \end{Bmatrix} \quad (9.21)$$

Dann werden die Empfindlichkeitsderivativa der stationären Blattantwort berechnet.

$$\int_{\psi_I}^{\psi_F} \delta Y^T \left\{ \frac{\partial Q}{\partial D_j} + \frac{\partial Q}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial D_j} \right\} d\psi = 0 \quad (9.22)$$

Anschließend muss man die Empfindlichkeitsderivativa der Rotorkopflasten finden, wobei die Methode der Summierung der Kräfte angewendet wird. Nun ist die Analyse der Empfindlichkeit der Stabilität notwendig. Man geht von den Störgrößengleichungen aus, die in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung gebracht werden.

$$\frac{d}{d\psi} \begin{Bmatrix} p \\ \dot{p} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ k/m & -c/m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ \dot{p} \end{Bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \dot{x} = Ax \quad (9.23)$$

Danach wird die Floquet-Theorie angewendet; man muss also eine Transitionsmatrix berechnen.

$$\dot{\Phi}(\psi, \psi_0) = A(\psi)\Phi(\psi, \psi_0) \quad \text{mit} \quad \Phi(\psi_0, \psi_0) = 1 \quad (9.24)$$

Ferner werden die Derivative der Transitionsmatrix benötigt.

$$\frac{d\dot{\Phi}}{dD_j} = A \frac{d\Phi}{dD_j} + \frac{dA}{dD_j} \Phi \quad (9.25)$$

Dies sieht in Matrixschreibweise wie folgt aus

$$\frac{d}{d\psi} \begin{Bmatrix} \Phi \\ \frac{d\Phi}{dD_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{d\Phi}{dD_n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & & & 0 & \Phi \\ \frac{dA}{dD_1} & A & & & \frac{d\Phi}{dD_1} \\ \cdot & & A & & \cdot \\ \cdot & & & \ddots & \cdot \\ \cdot & 0 & & & \cdot \\ \frac{d\Phi}{dD_n} & & & & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d\Phi}{dD_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{d\Phi}{dD_n} \end{Bmatrix} \quad (9.26)$$

Die Anfangsbedingung ist z. B.

$$\begin{Bmatrix} \Phi \\ \frac{d\Phi}{dD_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{d\Phi}{dD_n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9.27)$$

Die aeroelastische Optimierung beinhaltet die Vibrationsreduzierung. Es muss eine Gütekoeffizienten minimiert werden, die alle sechs Rotorkomponenten (oder nur eine Untermenge davon) beinhaltet. Dabei gibt es zu beachtende Randbedingungen, die ebenso wie die aeroelastische Stabilität im Vorwärtsflug einfließen. Außerdem muss man weitere Randbedingungen beachten; so kann der Blattschwerpunkt zum Beispiel nur in engen Grenzen variiert werden. Die aeroelastische Optimierung soll an einem Beispiel näher erläutert werden. Es wurden folgende Randbedingungen für die in Frage kommenden Auslegungsvariablen festgelegt:

Nicht strukturelle Masse	$0,0 \leq \frac{m'_{ns}}{m'_0} \leq 0,25$
Lage der nicht strukturellen Masse	$-0,2 \leq \frac{x_{ns}}{c} \leq 0,2$
lokale Schwerpunktlage	$-0,1 \leq \frac{x_I}{c} \leq 0,1$
Schlagsteifigkeitsverteilung	$0,5 \leq \frac{EI_x}{EI_{x0}} \leq 1,5$
Schwenksteifigkeitsverteilung	$0,5 \leq \frac{EI_z}{EI_{z0}} \leq 1,5$
Torsionssteifigkeitsverteilung	$0,5 \leq \frac{GJ}{GJ_0} \leq 1,5$

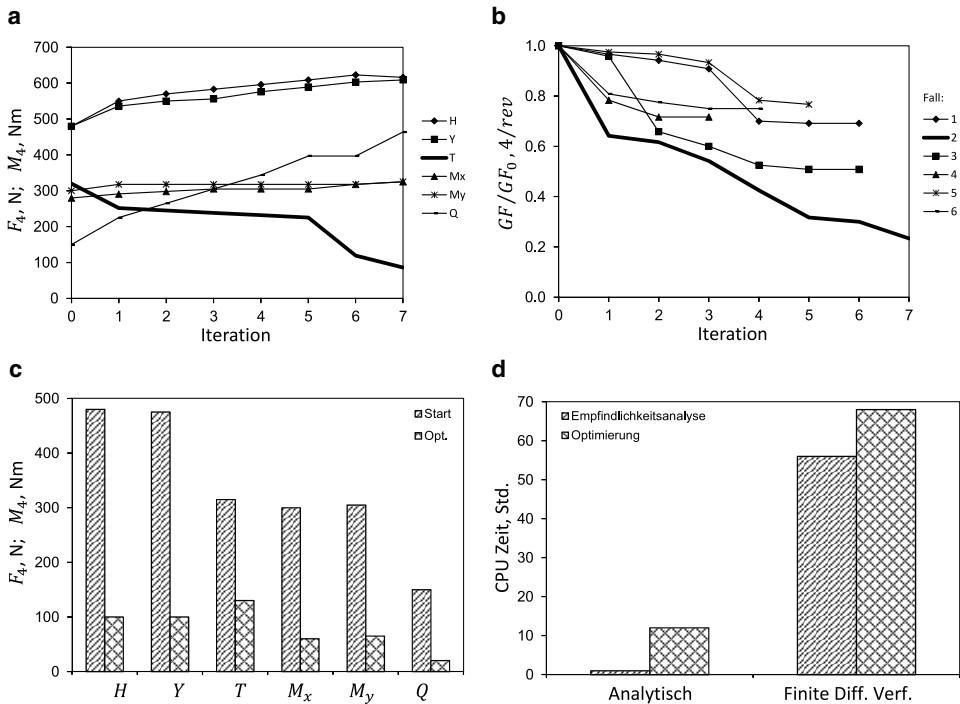
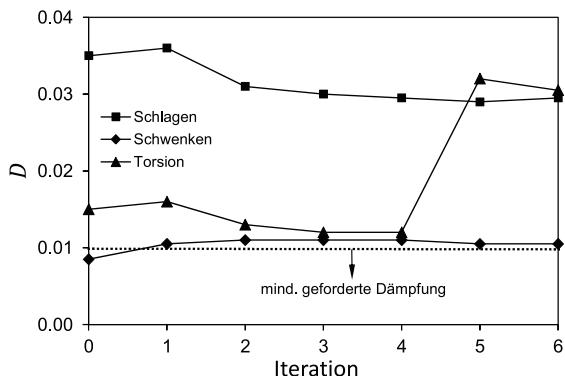


Abb. 9.2 Vibrationsoptimierung: Rotorlasten, Gütefunktionswert und CPU-Bedarf. **a** Rotorlasten, nur T optimiert, **b** Gütefunktionswert, alle Lasten optimiert, **c** Rotorlasten, alle Lasten optimiert, Fall 2, **d** CPU Bedarf

Als Rotor wurde ein relativ schwenkweicher gelenkloser Rotor (Bo105) gewählt. Er hat vier Blätter und die Optimierung erfolgt bei einem Fortschrittsgrad von $\mu = 0,3$ und einem spezifischen Rotorbelastungsgrad von $C_T/\sigma = 0,07$. Basisdaten sind die Eigenfrequenzen in Schlägen, Schwenken und Torsion: $\omega_{1F} = 1,13/\text{rev}$, $\omega_{1L} = 0,7/\text{rev}$ und $\omega_{1T} = 4,47/\text{rev}$. Das Rotorblatt wurde in fünf Segmente konstanter Eigenschaften aufgeteilt, woraus 30 Variable resultieren. Die Ergebnisse sind in Abb. 9.2 und 9.3 dargestellt. Dabei sind verschiedene Kombinationen der zu optimierenden Variablen gerechnet worden:

Fall	Variablen
1	$m'_{ns}, x_{ns}, x_I, EI_x, EI_z, GJ$
2	$m'_{ns}, x_{ns}, EI_x, EI_z, GJ$
3	x_I, EI_x, EI_z, GJ
4	EI_x, EI_z, GJ
5	m'_{ns}, x_{ns}, x_I
6	m'_{ns}, x_{ns}

Abb. 9.3 Dämpfung der Eigenformen



9.3.3 Schlussfolgerungen

- Der direkte analytische Ansatz zeigt erhebliche Rechenzeitverkürzungen von bis zu 80 % im Vergleich mit dem Finite-Differenzen-Verfahren, siehe Abb. 9.2d.
- Die Reduzierung der 4/rev Vertikalkraft am Rotorkopf allein ist nicht ausreichend, um das Gesamt vibrationsniveau zu senken, siehe Abb. 9.2a.
- Die beste Lösung kann gefunden werden, wenn man die nicht strukturelle Masse und die Blattsteifigkeiten geschickt verteilt. Allein daraus konnten zwischen 60 % und 90 % Reduktion der dynamischen Rotorlasten erzielt werden.
- Die optimale Struktur wies nicht strukturelle Massen hinter der elastischen Achse im Bereich der Blattspitze auf; während der Rest dieselben vor der elastischen Achse hat. Die Schwenksteifigkeit wurde kaum verändert, die Schlagsteifigkeit wurde im Bereich der Blattmitte verstärkt und die Torsionssteifigkeit wurde im Blatthalsbereich verringert.

Insgesamt kann gesagt werden, dass es sich um eine robuste und effiziente Methode handelt, die viele Parameter gleichzeitig optimieren kann.

9.4 Dynamik von Rotoren in Faserverbundbauweise

9.4.1 Einleitung

Dünnwandige Faserverbundbalken mit geschlossenen (D-Holm) oder offenen Querschnitten (C-Holm) werden bei der Konstruktion von Rotorblättern oft verwendet. Somit kann man die Orientierung der Fasern bewusst nutzen, um strukturelle Kopplungen wie Biegeverwindung oder Dehnungsverwindung zu erzielen. Diese Kopplungen werden traditionell mechanisch bewerkstelligt (δ_3 und δ_4 -Effekt), aber neuere Studien [10–12] haben gezeigt, dass die elastischen Kopplungen großen Einfluss auf die Blattdynamik und das

aeroelastische Verhalten haben. Gegenwärtig werden die Faserverbundblätter noch symmetrisch gebaut und damit werden die Möglichkeiten gezielter struktureller Kopplungen noch ausgeschaltet. Mit dem Vorhandensein einer strukturellen Analyse, welche die Kopplungen durch bestimmte Faserorientierungen genau vorhersagen kann, steht jedoch die Tür für eine solche Anwendung offen.

Das Ziel dieses Kapitels ist, die statischen Eigenschaften dünnwandiger Balken experimentell zu ermitteln und die Ergebnisse mit Rechnungen zu vergleichen. Dazu wurden einfache einzellige Balken aus Kohlefaser verstärktem Kunststoff (KFK) hergestellt, die einen geschlossenen Querschnitt haben und unter Biegung, Torsion und Dehnung belastet werden.

Es werden zwei Kategorien dieser Balken untersucht und als symmetrische und unsymmetrische Konfiguration bezeichnet. Bei der symmetrischen Konfiguration sind die Faserlagen symmetrisch im Hinblick auf die Mittelachse und in der unsymmetrischen Konfiguration wurden die Faserrichtungen umgekehrt. Wie in [10] dargestellt wurde, resultieren die symmetrischen Konfigurationen in eine Biege-Torsionskopplung und die unsymmetrischen in eine Dehnungs-Torsionskopplung. Erstere Form ist analog zu der Schlag-Torsions- und der Schwenk-Torsionskopplung zu sehen, und die Dehnungs-Torsion ist eine neue Form der Kopplung. Wenn nun die Lagen der Fasern besonders orientiert sind, kann man geforderte Kopplungen strukturell erzeugen.

Bei der Analyse von dünnwandigen Balken aus Faser-Verbund-Werkstoff (FVW) werden spezielle Effekte wie Beulen und Scherverformungen wichtig. Es wurden viele Verfahren entwickelt um dies zu berechnen, wobei die unterschiedlichsten Annahmen und Vereinfachungen gemacht wurden. In [10, 11] wurde eine nichtlineare Analyse entwickelt, die dünnwandige FVW-Balken unter Schlag- und Schwenkbiegung, Torsion und axialer Dehnung berechnet. Es wurden wichtige Koppelerme der Faserorientierung identifiziert und deren Einfluss auf die Blattstabilität untersucht. Durch günstige Kopplungen dieser Art kann man die Blattlasten und Vibrationen reduzieren sowie die aeroelastische Stabilität optimieren, was in [13] dargestellt ist. Eine verbesserte FEM-Analyse wurde dann in [14] aufgestellt, worin die Beulung aufgrund Torsion und Biegung enthalten ist. Andere Veröffentlichungen [15–17] handeln ebenfalls von der Modellierung der Rotorblätter; eine generelle Diskussion der verschiedenen Ansätze ist in [18] erschienen.

Es gibt einzelne Versuche, die experimentellen Daten dünner Hohlbalken unter statischer Beanspruchung zu gewinnen. In der University of Maryland wurden diese Balken in der Autoklaventechnik hergestellt [19]. Dabei werden die KFK-Lagen um einen Aluminiumkern gewickelt und mit einem Vakumschlauch ummantelt. Nach Autoklavenhärtung wurde der Kern entfernt. Die Exemplare waren zwar von mäßiger Qualität, aber die strukturellen Kopplungen konnten dennoch gewonnen werden. Später wurden die Balken mit Hilfe eines Wärmedehnungs-Verfahrens gebaut [20]. Dabei wurden KFK-Prepregs um einen Elastomerkern gewickelt, der einen großen Wärmedehnungskoeffizienten aufwies. Dieses System wurde in eine Aluminiumform gebracht und der Elastomerkern hat den Anpressdruck im Autoklaven erzeugt. Dieses Verfahren resultierte in Balken sehr guter Qualität, aber die strukturellen Eigenschaften stimmten weniger mit den Rechnungen

überein. Der Grund konnte in einem großen Anteil überschüssigen Harzes in den Balken gefunden werden. In der gegenwärtigen Forschung wurden die beiden Probleme gelöst und nunmehr Balken hoher Qualität mit dem ersten Verfahren hergestellt.

Bei der NASA Langley wurden runde Balken mit dünnen Wänden hergestellt [21]. Diese wiesen antisymmetrische Lagen KFK auf und Tests mit Torsions- und axialer Belastung wurden durchgeführt. Die gemessenen Daten korrelieren relativ gut mit Rechnungen (Abweichungen von 11%) der FVW-Balken-Analyse. Der Vergleich mit FEM-Methoden, welche die Schalentheorie als Basis haben, war ebenfalls akzeptabel. In der gegenwärtigen Studie werden statische Eigenschaften experimentell für symmetrische und unsymmetrische Balken ermittelt, die unter Biege-, Torsions- und axialer Last stehen.

9.4.2 Vereinfachte FVW-Balken-Analyse

Nach [10], wo eine gekoppelte nichtlineare Analyse des FVW-Balkens unter Schlag-, Schwenkbiegung, Torsion und axialer Dehnung dargestellt wurde, wird hier eine vereinfachte lineare Analyse abgeleitet, die Biegung und Torsion beinhaltet.

$$\begin{Bmatrix} M \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EI & K_{Ps} \\ K_{Ps} & GJ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w'' \\ \Theta' \end{Bmatrix} \quad (9.28)$$

Darin sei M das Biegemoment und T das Torsionsmoment an einer gegebenen Stelle. EI ist die effektive Schlagbiegesteifigkeit und GJ die entsprechende Torsionssteifigkeit. K_{Ps} stellt die strukturelle Biege-Torsionskopplung dar und w'' die zweite radiale Ableitung der Biegelinie; entsprechend ist Θ' der radiale Torsionsgradient. Auf dieselbe Weise wie in [10] wird die vereinfachte Analyse für die Dehnung und Torsion aufgestellt

$$\begin{Bmatrix} T \\ F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} GJ & K_{Pa} \\ K_{Pa} & EA \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta' \\ u' \end{Bmatrix} \quad (9.29)$$

worin F die axiale Kraft, EA die effektive Dehnungssteifigkeit, K_{Pa} die strukturelle Dehnungs-Torsionskopplung und u' den radialen Dehnungsgradienten darstellen. Die strukturellen Konstanten EI , GJ , EA , K_{Ps} , K_{Pa} sind in [20] definiert und K_{Pa} wird bei einer unsymmetrischen, K_{Ps} bei einer symmetrischen Faserorientierung Null. Die Effekte einer Querschnittswölbung aufgrund Torsion sind in einem Näherungsansatz enthalten, siehe [10]. Die Biegelinie und die biegeinduzierte Verwindung in einem einseitig eingespannten Balken mit einer Last P an der Spitze sind dann

$$\begin{aligned} w &= \frac{P}{2(EI - K_{Ps}^2/GJ)}(2ly - y^2) \\ \Theta &= -\frac{K_{Ps}/GJ}{2(EI - K_{Ps}^2/GJ)}P(2ly - y^2) \end{aligned} \quad (9.30)$$

Ebenso folgen Verwindung und verwindungsinduzierte Biegung aufgrund eines Torsionsmomentes zu

$$\begin{aligned}\Theta &= \frac{T}{(GJ - K_{Pa}^2/EI)} y \\ w &= \frac{K_{Pa}/EI}{2(GJ - K_{Pa}^2/EI)} Ty\end{aligned}\quad (9.31)$$

Die Verwindung in einer unsymmetrischen Konfiguration aufgrund Torsionsmoment und Dehnungslast kann man wie folgt erhalten

$$\begin{aligned}\Theta &= \frac{T}{(GJ - K_{Pa}^2/EA)} y \\ \Theta &= \frac{K_{Pa}/GJ}{(GJ - K_{Pa}^2/EA)} Fy\end{aligned}\quad (9.32)$$

y ist dabei die Längenkoordinate von der Einspannung und l die Balkenlänge.

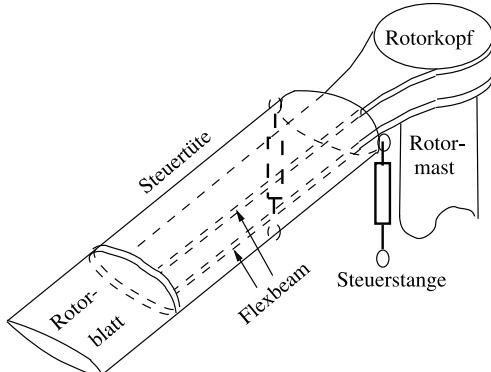
9.4.3 Balken-Analyse mit Hilfe der FEM

An der University of Maryland wurde ein verfeinertes FEM-Verfahren entwickelt, um dünnwandige FVW-Balken mit komplizierten Querschnittsformen berechnen zu können. Dies schließt Geometrieänderungen, Verwindung und beliebige Geometrien ein. Dieses Verfahren verwendet Balkenelemente, die scherelastisch sind und Beulverformungen parallel zur deformierten Balkenachse beinhalten, was die simultane Berechnung der Deformationen unter Biege-, Torsions- und Dehnungsbeanspruchung ermöglicht. Die Elemente haben zwei Arten von Knoten; die eine beinhaltet Translation und Rotation und die andere Beulung. Die ersten haben je drei translatorische und rotatorische Freiheitsgrade und jeder Beulknoten hat nur einen Freiheitsgrad der Translation parallel zur deformierten Balkenachse. Dadurch wird das Beulverhalten aufgrund Biegung oder Torsion in einer einheitlichen und konsistenten Art beschrieben. Bei dünnwandigen Balken kann man die Dehnung als linear durch die Wanddicke betrachten und die hier entwickelte Formulierung hat die gleiche Genauigkeit wie viel aufwändiger Schalen- und Starrelement-Verfahren. Es ist sehr effizient, da nur relativ wenig Freiheitsgrade notwendig sind.

9.4.4 Dynamik lagerloser Rotoren

Ein lagerloser Rotor ist ein Spezialfall eines gelenklosen Rotors, bei dem auch das Steuerlager durch einen torsionsflexiblen Blatthals ersetzt wurde. Dieser elastische Blatthals (engl. flexbeam) ist das Hauptmerkmal zur Unterscheidung. Die Steuerwinkel werden dann mittels einer torsionssteifen Steuertüte (engl. torque tube) auf das Rotorblatt übertragen, so dass der Blatthals sich verwindet. Die Analyse eines lagerlosen Rotors ist noch

Abb. 9.4 Konfiguration eines lagerlosen Rotors

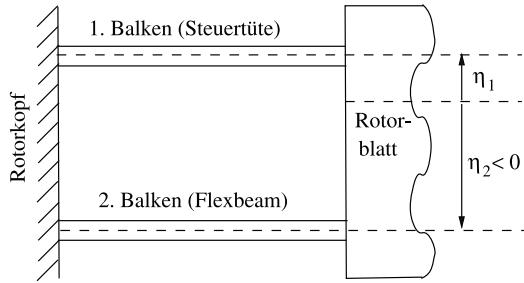


komplizierter als die eines gelenklosen Rotors, da das Rotorblatt mehrfache Abstützungen zum Rotorkopf hin hat und damit redundante Lastwege. Außerdem kommen nichtlineare Biege-Torsionskopplungen zum Tragen. Ein typisches Beispiel für einen lagerlosen Rotor stellt die EC135 dar. Deren Steuertüte ist am Rotorkopf kardanisch gelagert, um den Schlag- und den Schwenkfähigkeitsgrad zu ermöglichen; außerdem ist in diese Lagerung noch ein Elastomer-Schwenkdämpfer integriert. Sivaneri und Chopra (1984) [22] haben eine FEM-Analyse entwickelt, um die aeroelastische Stabilität zu berechnen. Jeder der flexiblen Blatthalsholme und auch die Steuertüte werden dabei als einzelne elastische Balken modelliert und die Kompatibilitätsbedingungen an der Anschlussstelle erfüllt. Die Ergebnisse haben gezeigt, dass das häufig angewandte Verfahren einer Einbalkenrepräsentation zu irreführenden Resultaten führen kann. Daher ist es grundlegend wichtig, die vielen Holme an der Blattwurzel auch separat zu modellieren. Abb. 9.4 zeigt eine typische Konfiguration eines lagerlosen Rotors mit einem biege- und torsionsweichen Blatthals, der bis etwa 20 % des Radius reicht. Dort wird er mit der starren Steuertüte verbunden und der profilierte Bereich des Blattes beginnt. Das andere Ende der Steuertüte ist mit der Steuerstange verbunden, um die Steuerwinkelvorgabe der Taumelscheibe zu übertragen.

Die FEM-Methode bringt die notwendige Modellierungsfähigkeit für eine solche Konfiguration mit sich, indem die Randbedingungen entsprechend eingebaut werden. Das Rotorblatt wird in eine Anzahl von Elementen diskretisiert, die man in mehrere Gruppen einordnen kann: Blatt, Blatthals, Steuertüte. Ein hier verwendetes Element, entwickelt von Sivaneri und Chopra, beinhaltet 15 Freiheitsgrade [22]. Zwischen den Elementen wird die Kontinuität der Auslenkungen und Gradienten in Schlägen und Schwenken sowie die der Torsions- und Dehnungsauslenkungen erfüllt. Besondere Kompatibilitätsbedingungen, die auf der physikalischen Struktur basieren, werden beim Zusammenstellen der Elementgleichungen eingebracht.

Abb. 9.5 zeigt das analytische Modell für den Blatthals und die Steuertüte eines solchen Rotors. Die Einspannbedingung am Rotorkopf ist starr, so dass die Freiheitsgrade u, v, w, v', w', Θ alle Null sind. Das Steuertütenende jedoch erfordert eine spezielle Betrachtung, da es die besondere Konfiguration der Steuerstangen sowie anderer Hilfsan-

Abb. 9.5 FEM-Modellierung des Blatthalses



schlüsse mit beinhaltet. So ist zunächst eine zwangsgegebene Steuerwinkeländerung als Einspannbedingung für Θ zu nennen. Die Trimmrechnung erfordert ja einen Einstellwinkel bei 3/4 des Radius zu

$$\Theta_{0,75} = \Theta_0 + \Theta_{1C} \cos \psi + \Theta_{1S} \sin \psi - \Theta_p \quad (9.33)$$

Die ersten drei Steuerwinkel auf der rechten Seite sind die berechneten Steuerwinkel und Θ_p ist die Vorverwindung bei 0,75 Radius. Der Balken 1 in Abb. 9.5 repräsentiert dabei die Steuertüte und der Balken 2 den Flexbeam. Am Zusammenschluss von den Balken zum Rotorblatt gelten folgende Zusammenhänge (Index b = Blatt):

$$\begin{aligned} u_b &= u_1 + \eta_1 v'_1 = u_2 + \eta_2 v'_2 \\ v'_b &= v'_1 = v'_2 \\ v_b &= v_1 = v_2 \\ w_b &= w_1 - \eta_1 \Theta_1 = w_2 - \eta_2 \Theta_2 \\ w'_b &= w'_1 = w'_2 \\ \Theta_b &= \Theta_1 = \Theta_2 \end{aligned} \quad (9.34)$$

Die äquivalenten Massen und Steifigkeiten der Komponenten berechnen sich zu

$$\begin{aligned} EA_e &= EA_1 + EA_2 \\ EI_{xe} &= EI_{x1} + EI_{x2} \\ GJ_e &= GJ_1 + GJ_2 + \eta_1^2 EA_1 + \eta_2^2 EA_2 \\ m'k_m^2|_e &= m'k_m^2|_1 + m'k_m^2|_2 + m'_1\eta_1^2 + m'_2\eta_2^2 \\ m'_e &= m'_1 + m'_2 \end{aligned} \quad (9.35)$$

Abb. 9.4 zeigt das Modell eines Anschlusses mit zwei Steuerstangen, was die Schlagauslenkung durch die Steifigkeiten der Steuerstangen behindert. Für die periodische Lösung im Vorwärtsflug werden die Steuerstangen als starr angenommen und die dann bekannten Verschiebungen als Randbedingungen eingebracht. In der globalen FEM-Analyse bringen

die Steifigkeiten der Steuerstangen eine zusätzliche Dehnungsenergie (potentielle Energie) mit sich, die mit der Vertikalauslenkung w verbunden ist. Bei der Stabilitätslösung im Vorwärtsflug wird die Störgrößengleichung mit einer festen Einspannung am Tau-melscheibenende der Steuerstangen modelliert. Genau so wird auch eine Konfiguration mit nur einer Steuerstange gehandhabt. Für mehr Details sehe man bei Dull und Chopra (1987) nach [23].

Generell kann gesagt werden, dass das Konzept eines lagerlosen Rotors praktisch durchführbar ist, was sowohl Windkanaltests als auch Flugtests demonstriert haben. Als Vorteile kann man nennen:

- Einfacherer Aufbau als alle herkömmlichen Systeme, da keine bewegten Teile mehr vorhanden sind wie Gelenke, Lager o. ä.
- Leichtere und preiswertere Wartung

Als Nachteile sind zu beachten:

- Schwierigkeiten mit der aeroelastischen Stabilität, insbesondere beim Schlag-Schwenk-Torsionsflattern sowie der Boden- und Luftresonanz
- Die Modellierung gestaltet sich schwierig, da es redundante Lastwege gibt

In der Zukunft ist die Optimierung noch anzustreben. Folgende Liste gibt einen Überblick über den Stand der Technik lagerloser Rotoren um 1990.

- Ormiston (1983) [24] gibt einen Rückblick auf die Arbeiten bis dahin
- Sivanerii und Chopra (1984) [22] zeigen den Weg der FEM-Modellierung der redundanten Lastwege auf
- Hodges stellt FLAIR (1979) [25] und GRASP (1986) [26] zur Berechnung der Luft- und Bodenresonanz mit Hilfe der FEM vor
- Hooper (1986) [27] macht eine Parameterstudie mit FLAIR im Schwebeflug
- Chopra (1985) [28] gibt einen Beitrag zur aeroelastischen Stabilität im Schwebeflug mit Korrelationen und Aerodynamik des zirkulationsgesteuerten Rotors
- Jang und Chopra (1987) [29] geben Rechnungen zur Boden- und Luftresonanz im Schwebeflug mit einer Parameterstudie
- Dull und Chopra (1987) [23] präsentieren die aeroelastische Stabilität im Vorwärtsflug
- Jang und Chopra (1988) [30] bearbeiten die Luftresonanz im Vorwärtsflug

Schlussfolgerungen:

- Die Modellierung der redundanten Lastwege ist fundamental wichtig
- Lagerlose Rotoren sind besonders empfindlich im Hinblick auf ihr aeroelastisches Verhalten, insbesondere bei der Boden- und Luftresonanz
- Das dynamische Verhalten ist sehr von der jeweiligen Konfiguration abhängig
- Es ist notwendig, Kopplungen (insbesondere Schwenk-Torsionskopplung) einzuführen, um den Rotor zu stabilisieren.

9.4.5 Dynamik zirkulationsgesteuerter Rotoren

Ein zirkulationsgesteuerter Rotor (engl. circulation controlled rotor, CCR) verwendet die aerodynamischen Charakteristika eines Profils mit etwa elliptischem Querschnitt und einem dünnen Schlitz auf der Oberseite, aus dem Luft herausgepresst wird, siehe Abb. 9.6. Aufgrund des Coanda Effektes bleibt der Luftstrahl an dem Profil und beeinflusst die Umströmung erheblich. Bei einem CCR kann man hohen Schub auch bei kleinen Blattspitzengeschwindigkeiten erreichen und der Rotorkopfentwurf kann vereinfacht werden, da keine zyklischen Steuerwinkel mehr notwendig sind. Diese Technologie wurde in den 1980ern untersucht und sowohl ein Modell im Windkanal getestet als auch ein Originalrotor gebaut, aber das Projekt wurde vor dem Erstflug gestoppt. Generell ist die Auswirkung der Ausblasung auf die Rotordynamik zu bedenken. Die Windkanaltests haben folgende Resultate erbracht:

Vorteile:

- Verringerte mechanische Komplexität durch Verwendung einer pneumatischen Taumelscheibe
- Höherharmonische und individuelle Rotorblattsteuerung ist leicht zu realisieren
- Eine große Schuberzeugung ist möglich
- Möglichkeit eines niedrigeren Rotorgewichtes.

Nachteile:

- Die analytischen Hilfsmittel sind nicht ausreichend, was die Aerodynamik anbelangt
- Große dynamische Probleme (Schlag-Schwenkflattern, Stallflattern) und große dynamische Beanspruchung
- Neue Technologien sind notwendig, insbesondere für die pneumatische Taumelscheibe
- Kompressoren müssen verwendet und geregelt werden
- Die Spanne für weitere Verbesserungen ist klein.

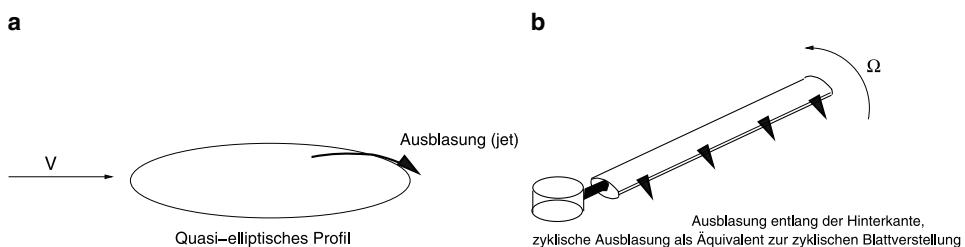


Abb. 9.6 Prinzip des Rotors mit Zirkulationssteuerung. **a** Prinzip der Ausblasung, **b** Prinzip des CCR

In der Zukunft werden die analytischen Hilfsmittel entwickelt werden und der Rotorentwurf muss überarbeitet werden. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick auf die Arbeiten am CCR-Konzept:

- Chopra und Johnson (1979) [30]: Schlag-Schwenk-Torsion mit 3 Freiheitsgraden eines starren Blattes im Schwebeflug
- Chopra (1984) [31]: FEM-Modell eines gelenklosen Rotors im Schwebeflug
- Chopra (1985) [28]: FEM-Modell eines lagerlosen Rotors im Schwebeflug mit redundanten Lastwegen
- Hong und Chopra (1986) [31]: Schlag-Schwenk-Torsionsstabilität eines starren Blattes im Vorwärtsflug
- Chopra (1986) [32]: FEM-Modell eines lagerlosen Rotors im Vorwärtsflug
- Haas und Chopra (1987) [33]: Torsionsdivergenz und Flattern von CCR-Blättern
- Raghavan, Pai und Chopra (1987) [34]: Modellierung der instationären Aerodynamik von CCR.

Schlussfolgerungen:

- Das Ausblasen an der Profilhinterkante hat einen großen Einfluss auf die Dynamik des Rotors und muss in die aerodynamische Modellierung einfließen
- Profildaten aus Tabellen, CFD-Rechnungen oder aus Windkanalversuchen sind notwendig
- Es gibt starke Instabilitäten, wenn der Rotor schwenkweich ist und große Ausblasung vorliegt
- Negativer Kollektivwinkel destabilisiert im langsamen Vorwärtsflug
- Es gibt große dynamische Lasten im schnellen Vorwärtsflug, da die Blätter sehr steif sind
- Es gibt die Möglichkeit des Einfreiheitsgradflatterns aufgrund Auftriebsstall
- Um die dynamische Stabilität und das Antwortverhalten richtig zu berechnen, muss man die instationäre Aerodynamik modellieren.

Zukünftige Aktivitäten werden die instationäre Aerodynamik betreffen, so dass sowohl die mathematischen Modelle verbessert als auch Windkanaltests durchgeführt werden. Den Auftriebsstall muss man besser verstehen, um dann Korrelationen zwischen Rechnung und Windkanaltests durchführen zu können. Generell muss man höherharmonische Ausblasung anwenden, um die Vibrationen im Rahmen zu halten.

Man kann aber auch daran denken, das Prinzip der Ausblasung bei konventionellen Rotoren anzuwenden, um Vibrationen zu reduzieren. Die Auftriebsberechnung basiert auf dem Ausblasekoeffizienten C_μ , wobei $\dot{m}V_J$ den Ausblaseimpuls pro Zeiteinheit (Index J

vom engl. jet) bedeutet

$$\begin{aligned}
 L' &= \frac{\rho}{2} V^2 c C_l(\alpha, C_\mu) \\
 C_\mu &= \frac{\dot{m} V_J}{\frac{\rho}{2} V^2 c} \\
 C_l &= 0,3 + 6,7\alpha + 16,1C_\mu^{0,68} \\
 C_d &= 0,026 - 0,3C_\mu^{0,67} \\
 C_{m,0,5c} &= 0,06 + 1,34\alpha - 0,644C_\mu^{0,68}
 \end{aligned} \tag{9.36}$$

Der Störgrößenansatz für den Auftrieb und Ausblasekoeffizienten liefert

$$\begin{aligned}
 \delta L' &= \frac{\rho}{2} c \left(C_l 2V \delta V + V^2 C_{l\alpha} \delta \alpha + V^2 \frac{\partial C_l}{\partial C_\mu} \delta C_\mu \right) \\
 \delta C_\mu &= \frac{\dot{m} V_J}{\frac{\rho}{2} V^3} (-2\delta V) = -2C_\mu \frac{\delta V}{V} \\
 \Rightarrow \delta L' &= \frac{\rho}{2} V^2 c \left[C_{l\alpha} \delta \alpha + 2(C_l - C_\mu C_{l\mu}) \frac{\delta V}{V} \right]
 \end{aligned} \tag{9.37}$$

In gleicher Weise wird für den Widerstand und das aerodynamische Moment vorgegangen. Durch die langen Leitungen im Rotorblatt gibt es aufgrund von Reibungsverlusten Phasenverschiebungen von ca. 25° an der Blattspitze, die von Bedeutung sind. Der Druck an den Ausblaseschlitzen P_d (Index d vom engl. duct) hängt daher vom Radius ab.

$$\begin{aligned}
 P_d &= (P_{dr} - P_\infty)[1 - \eta_d(r - r_{root})] + \frac{P_d}{P_\infty} \frac{\rho}{2} (r V_{tip})^2 \eta_{pump} \\
 P_d &= P_0 + P_{1C} \cos(\psi - \psi_1) + P_{1S} \sin(\psi - \psi_1) \\
 P_{root} &= P_0 + P_{1C} \cos \psi + P_{1S} \sin \psi
 \end{aligned} \tag{9.38}$$

Die Trimmlösung enthält also zusätzlich zu den sonstigen Größen noch die an der Blattwurzel einzuleitenden statischen und dynamischen Drücke P_0 , P_{1C} und P_{1S} als Ersatz für die bei konventionellen Rotoren vorhandenen Steuerwinkel Θ_0 , Θ_{1S} und Θ_{1C} .

Literatur

1. R.B. Taylor, *Helicopter Vibration Reduction by Rotor Blade Modal Shaping*, 38th Annual Forum of the AHS, USA, 1982
2. P.P. Friedmann, P. Shantakumaran, *Optimum Design of Rotor Blades for Vibration Reduction in Forward Flight*, Journal of the AHS, Vol. 29, No. 4, pp. 70–80, 1984

3. D.A. Peters, M.P. Rossow, T. Korn, *Design of Helicopter Rotor Blades for Optimum Dynamic Characteristics*, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 12, No. 1, pp. 85–109, 1986
4. M.W. Davis, W.H. Weller, *Application of Design Optimization Techniques To Rotor Dynamics Problems*, 42nd Annual Forum of the AHS, Washington, DC, USA, 1986
5. J.G. Yen, *Coupled Aeroelastic Hub Loads Reduction*, AHS/NAI International Seminar, Nanjing, China, 1986
6. R. Celi, P.P. Friedmann, *Structural Optimization with Aeroelastic Constraints of Rotor Blades with Straight and Swept Tips*, AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Williamsburg, Virginia, USA, 1988
7. H.M. Adelman, R.T. Haftka, *Sensitivity Analysis of Discrete Structural Systems*, AIAA Journal, Vol. 24, No. 4, pp. 823–832, 1986
8. J.W. Lim, I. Chopra, *Aeroelastic Optimization of a Helicopter Blade in Forward Flight*, AIAA Dynamics Specialists Meeting, Monterey, CA, USA, 1987
9. J.W. Lim, I. Chopra, *Stability Sensitivity Analysis for Aeroelastic Optimization of a Helicopter Rotor*, 29th AIAA Structural Dynamics and Materials Conference, Williamsburg, VA, USA, 1988
10. C.H. Hong, I. Chopra, *Aeroelastic Stability of a Composite Blade*, Journal of the AHS, Vol. 30, No. 2, pp. 57–67, 1985
11. C.H. Hong, I. Chopra, *Aeroelastic Stability Analysis of a Composite Blade*, Journal of the AHS, Vol. 30, No. 2, pp. 57–67, 1985
12. B. Panda, I. Chopra, *Dynamic Stability of Hingeless and Bearingless Rotors in Forward Flight*, Int. Conference on Rotorcraft Basic Research, Research Triangle Park, NC, 1985
13. B. Panda, I. Chopra, *Dynamics of Composite Rotor Blades in Forward Flight*, Vertica, Vol. 11, No. 1/2, pp. 187–209, 1987
14. A.D. Stemple, S.W. Lee, *A Finite Element Model for Composite Beams with Arbitrary Cross-Section Warping*, AIAA Journal, Vol. 26, No. 12, pp. 1512–1520, 1988
15. L.W. Rehfield, *Design Analysis Methodology for Composite Rotor Blades*, AFWAL-TR-85-3094, 7th DoD/NASA Conference on Fibrous composites in Structural desing, Denver, USA, 1985
16. O. A. Bauchau, C.H. Hong, *Large Displacement Analysis of naturally Curved and Twisted Composite Beams*, AIAA Journal, Vol. 25, No. 11, pp. 1469–1475, 1987
17. J.B. Kosmatka, P.P. Friedmann, *Structural Dynamic Modeling of Advanced Composite Propellers by the Finite Element Method*, 28th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Monterey, USA, 1987
18. D.H. Hodges, *A Review of Composite Rotor Blade Modeling*, 29th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, USA, 1988
19. B.R. Schwiesow, *Experimental Identification of Stiffness Coupling Terms in a Composite Beam*, M.S. Thesis, Department of Aerospace Engineering, University of Maryland, 1985
20. A. Salzberg, *Experimental Identification of Stiffness Coupling Terms in Composite Box Beams Manufactured by Thermal Expansion*, M.S. Thesis, Department of Aerospace Engineering, University of Maryland, 1986
21. M.W. Nixon, *Extension-Twist Coupling of Composite Circular Tubes with Application to Tilt Rotor Blade Design*, 28th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Monterey, USA, 1987
22. N.T. Sivaneri, I. Chopra, *Finite Element Analysis for Bearingless Rotor Blade Aeroelasticity*, Journal of the AHS, Vol. 29, No. 2, pp. 716–723, 1984
23. A.L. Dull, I. Chopra, *Aeroelastic Stability of Bearingless Rotors in Forward Flight*, 43rd Annual Forum of the AHS, St. Louis, Missouri, USA, 1987

24. R.A. Ormiston, *Investigation of Hingeless Rotor Stability*, Vertica, Vol. 7, No. 2, pp. 143–181, 1983
25. D.H. Hodges, *An Aeromechanical Stability Analysis for Bearingless Rotor Helicopters*, Journal of the AHS, Vol. 24, No. 1, pp. 2–9, 1979
26. H.D. Hodges, A.S. Hopkins, D.L. Kunz, H.E. Hinnant, *Introduction to GRASP – General Rotorcraft Aeromechanical Stability Program – A Modern Approach to Rotorcraft Modeling*, 42nd Annual Forum of the AHS, Washington, DC, USA, 1986
27. N.E. Hooper, *Parametric Study of the Aeroelastic Stability of a Bearingless Rotor*, Journal of the AHS, Vol. 31, No. 1, pp. 52–64, 1986
28. I. Chopra, *Dynamic Stability of a Bearingless Circulation Control Rotor Blade in Hover*, Journal of the AHS, Vol. 30, No. 4, pp. 40–47, 1985
29. J. Jang, I. Chopra, *Air and Ground Resonance of an Advances Bearingless Rotor*, AIAA Dynamics Specialists Meeting, Monterey, CA, USA, 1987
30. J. Jang, I. Chopra, *Air Resonance of Bearingless Rotors in Forward Flight*, 2nd International Conference on Rotorcraft Basic Research, College Park, Maryland, USA, 1988
31. C.H. Hong, I. Chopra, *Flap-Lag-Torsion Stability of a Circulation Control Rotor Blade in Forward Flight*, Circulation and Control Workshop, NASA CP-2432, NASA Ames Research Center, CA, USA, 1986
32. I. Chopra, *Aeroelastic Stability of a Bearingless Circulation Control Rotor in Forward Flight*, 12th European Rotorcraft Forum, Garmisch-Partenkirchen, Germany, 1986
33. D. Haas, I. Chopra, *Aeroelastic Stability of a Bearingless Circulation Control Rotor in Forward Flight*, AIAA Dynamics Specialists' Meeting, Monterey, CA, USA, 1987
34. V. Raghavan, S.I. Pai, I. Chopra, *Circulation Control Airfoils in Unsteady Flow*, 43rd Annual Forum of the AHS, St. Louis, Missouri, USA, 1987

A Tabellen der Blattanschlusskräfte

Tab. A.1 Vertikale Blattkraft → vertikale Rotorkopfkraft, Rotor mit 2–4 Blättern

Blattkraft	Rotorkomponente: Schub T		
Vertikal	2-Blatt-Rotor	3-Blatt-Rotor	4-Blatt-Rotor
S_{z_0}	$2S_{z_0}$	$3S_{z_0}$	$4S_{z_0}$
$S_{z_{1C}} \cos \psi_m$	0	0	0
$S_{z_{1S}} \sin \psi_m$	0	0	0
$S_{z_{2C}} \cos 2\psi_m$	$2S_{z_{2C}} \cos 2\psi$	0	0
$S_{z_{2S}} \sin 2\psi_m$	$2S_{z_{2S}} \sin 2\psi$	0	0
$S_{z_{3C}} \cos 3\psi_m$	0	$3S_{z_{3C}} \cos 3\psi$	0
$S_{z_{3S}} \sin 3\psi_m$	0	$3S_{z_{3S}} \sin 3\psi$	0
$S_{z_{4C}} \cos 4\psi_m$	$2S_{z_{4C}} \cos 4\psi$	0	$4S_{z_{4C}} \cos 4\psi$
$S_{z_{4S}} \sin 4\psi_m$	$2S_{z_{4S}} \sin 4\psi$	0	$4S_{z_{4S}} \sin 4\psi$
$S_{z_{5C}} \cos 5\psi_m$	0	0	0
$S_{z_{5S}} \sin 5\psi_m$	0	0	0
$S_{z_{6C}} \cos 6\psi_m$	$2S_{z_{6C}} \cos 6\psi$	$3S_{z_{6C}} \cos 6\psi$	0
$S_{z_{6S}} \sin 6\psi_m$	$2S_{z_{6S}} \sin 6\psi$	$3S_{z_{6S}} \sin 6\psi$	0
$S_{z_{7C}} \cos 7\psi_m$	0	0	0
$S_{z_{7S}} \sin 7\psi_m$	0	0	0
$S_{z_{8C}} \cos 8\psi_m$	$2S_{z_{8C}} \cos 8\psi$	0	$4S_{z_{8C}} \cos 8\psi$
$S_{z_{8S}} \sin 8\psi_m$	$2S_{z_{8S}} \sin 8\psi$	0	$4S_{z_{8S}} \sin 8\psi$

Gilt identisch auch für das Schwenkmoment → Rotormastmoment um die Antriebsachse

Tab. A.2 Vertikale Blattkraft → vertikale Rotorkopfkraft, Rotor mit 5–7 Blättern

Blattkraft	Rotorkomponente: Schub T		
Vertikal	5-Blatt-Rotor	6-Blatt-Rotor	7-Blatt-Rotor
S_{z_0}	$5S_{z_0}$	$6S_{z_0}$	$7S_{z_0}$
$S_{z_{5C}} \cos 5\psi_m$	$5S_{z_{5C}} \cos 5\psi$	0	0
$S_{z_{5S}} \sin 5\psi_m$	$5S_{z_{5S}} \sin 5\psi$	0	0
$S_{z_{6C}} \cos 6\psi_m$	0	$6S_{z_{6C}} \cos 6\psi$	0
$S_{z_{6S}} \sin 6\psi_m$	0	$6S_{z_{6S}} \sin 6\psi$	0
$S_{z_{7C}} \cos 7\psi_m$	0	0	$7S_{z_{7C}} \cos 7\psi$
$S_{z_{7S}} \sin 7\psi_m$	0	0	$7S_{z_{7S}} \sin 7\psi$

Tab. A.3 Horizontale Blattkräfte → Rotorwiderstand, Rotor mit 2–4 Blättern

Blattkraft	Rotorkomponente: Widerstand H		
Widerstand	Radial	2-Blatt-Rotor	3-Blatt-Rotor
S_{x_0}	S_{y_0}	0	0
$S_{x_{1C}} \cos \psi_m$	$S_{y_{1C}} \cos \psi_m$	$S_{y_{1C}} (1 + \cos 2\psi) + S_{x_{1C}} \sin 2\psi$	$1,5S_{y_{1C}}$
$S_{x_{1S}} \sin \psi_m$	$S_{y_{1S}} \sin \psi_m$	$S_{x_{1S}} (1 - \cos 2\psi) + S_{y_{1S}} \sin 2\psi$	$1,5S_{x_{1S}}$
$S_{x_{2C}} \cos 2\psi_m$	$S_{y_{2C}} \cos 2\psi_m$	0	$1,5S_{x_{2C}} \sin 3\psi + 1,5S_{y_{2C}} \cos 3\psi$
$S_{x_{2S}} \sin 2\psi_m$	$S_{y_{2S}} \sin 2\psi_m$	0	$-1,5S_{x_{2S}} \cos 3\psi + 1,5S_{y_{2S}} \sin 3\psi$
$S_{x_{3C}} \cos 3\psi_m$	$S_{y_{3C}} \cos 3\psi_m$	$S_{x_{3C}} (\sin 4\psi - \sin 2\psi) + S_{y_{3C}} (\cos 4\psi + \cos 2\psi)$	0
$S_{x_{3S}} \sin 3\psi_m$	$S_{y_{3S}} \sin 3\psi_m$	$S_{x_{3S}} (\sin 2\psi - \sin 4\psi) + S_{y_{3S}} (\cos 4\psi + \cos 2\psi)$	0
$S_{x_{4C}} \cos 4\psi_m$	$S_{y_{4C}} \cos 4\psi_m$	0	$1,5S_{y_{4C}} \cos 3\psi - 1,5S_{x_{4C}} \sin 3\psi$
$S_{x_{4S}} \sin 4\psi_m$	$S_{y_{4S}} \sin 4\psi_m$	0	$1,5S_{x_{4S}} \cos 3\psi + 1,5S_{y_{4S}} \sin 3\psi$
$S_{x_{5C}} \cos 5\psi_m$	$S_{y_{5C}} \cos 5\psi_m$	$S_{x_{5C}} (\sin 6\psi - \sin 4\psi) + S_{y_{5C}} (\cos 6\psi + \cos 4\psi)$	$1,5S_{x_{5C}} \sin 6\psi + 1,5S_{y_{5C}} \cos 6\psi$
$S_{x_{5S}} \sin 5\psi_m$	$S_{y_{5S}} \sin 5\psi_m$	$S_{x_{5S}} (\sin 4\psi - \sin 6\psi) + S_{y_{5S}} (\cos 6\psi + \cos 4\psi)$	$-1,5S_{x_{5S}} \cos 6\psi + 1,5S_{y_{5S}} \sin 6\psi$
$S_{x_{6C}} \cos 6\psi_m$	$S_{y_{6C}} \cos 6\psi_m$	0	0
$S_{x_{6S}} \sin 6\psi_m$	$S_{y_{6S}} \sin 6\psi_m$	0	0
$S_{x_{7C}} \cos 7\psi_m$	$S_{y_{7C}} \cos 7\psi_m$	$S_{x_{7C}} (\sin 8\psi - \sin 6\psi) + S_{y_{7C}} (\cos 8\psi + \cos 6\psi)$	$1,5S_{y_{7C}} \cos 6\psi - 1,5S_{x_{7C}} \sin 6\psi$
$S_{x_{7S}} \sin 7\psi_m$	$S_{y_{7S}} \sin 7\psi_m$	$S_{x_{7S}} (\sin 6\psi - \sin 8\psi) + S_{y_{7S}} (\cos 8\psi + \cos 6\psi)$	$1,5S_{x_{7S}} \cos 6\psi + 1,5S_{y_{7S}} \sin 6\psi$
$S_{x_{8C}} \cos 8\psi_m$	$S_{y_{8C}} \cos 8\psi_m$	0	$1,5S_{x_{8C}} \sin 9\psi + 1,5S_{y_{8C}} \cos 9\psi$
$S_{x_{8S}} \sin 8\psi_m$	$S_{y_{8S}} \sin 8\psi_m$	0	$-1,5S_{x_{8S}} \cos 9\psi + 1,5S_{y_{8S}} \sin 9\psi$

Tab. A.4 Horizontale Blattkräfte → Rotorwiderstand, Rotor mit 5–7 Blättern

Blattkraft		Rotorkomponente: Widerstand H		
Widerstand	Radial	5-Blatt-Rotor	6-Blatt-Rotor	7-Blatt-Rotor
S_{x_0}	S_{y_0}	0	0	0
$S_{x_{1C}} \cos \psi_m$	$S_{y_{1C}} \cos \psi_m$	$2,5S_{y_{1C}}$	$3S_{y_{1C}}$	$3,5S_{y_{1C}}$
$S_{x_{1S}} \sin \psi_m$	$S_{y_{1S}} \sin \psi_m$	$2,5S_{x_{1S}}$	$3S_{x_{1S}}$	$3,5S_{x_{1S}}$
$S_{x_{2C}} \cos 2\psi_m$	$S_{y_{2C}} \cos 2\psi_m$	0	0	0
$S_{x_{2S}} \sin 2\psi_m$	$S_{y_{2S}} \sin 2\psi_m$	0	0	0
$S_{x_{3C}} \cos 3\psi_m$	$S_{y_{3C}} \cos 3\psi_m$	0	0	0
$S_{x_{3S}} \sin 3\psi_m$	$S_{y_{3S}} \sin 3\psi_m$	0	0	0
$S_{x_{4C}} \cos 4\psi_m$	$S_{y_{4C}} \cos 4\psi_m$	$2,5S_{x_{4C}} \sin 5\psi$ $+2,5S_{y_{4C}} \cos 5\psi$	0	0
$S_{x_{4S}} \sin 4\psi_m$	$S_{y_{4S}} \sin 4\psi_m$	$2,5S_{y_{4S}} \sin 5\psi$ $-2,5S_{x_{4S}} \cos 5\psi$	0	0
$S_{x_{5C}} \cos 5\psi_m$	$S_{y_{5C}} \cos 5\psi_m$	0	$3S_{x_{5C}} \sin 6\psi$ $+3S_{y_{5C}} \cos 6\psi$	0
$S_{x_{5S}} \sin 5\psi_m$	$S_{y_{5S}} \sin 5\psi_m$	0	$3S_{y_{5S}} \sin 6\psi$ $-3S_{x_{5S}} \cos 6\psi$	0
$S_{x_{6C}} \cos 6\psi_m$	$S_{y_{6C}} \cos 6\psi_m$	$2,5S_{y_{6C}} \cos 5\psi$ $-2,5S_{x_{6C}} \sin 5\psi$	0	$3,5S_{x_{6C}} \sin 7\psi$ $+3,5S_{y_{6C}} \cos 7\psi$
$S_{x_{6S}} \sin 6\psi_m$	$S_{y_{6S}} \sin 6\psi_m$	$2,5S_{y_{6S}} \sin 5\psi$ $+2,5S_{x_{6S}} \cos 5\psi$	0	$3,5S_{y_{6S}} \sin 7\psi$ $-3,5S_{x_{6S}} \cos 7\psi$
$S_{x_{7C}} \cos 7\psi_m$	$S_{y_{7C}} \cos 7\psi_m$	0	$3S_{y_{7C}} \cos 6\psi$ $-3S_{x_{7C}} \sin 6\psi$	0
$S_{x_{7S}} \sin 7\psi_m$	$S_{y_{7S}} \sin 7\psi_m$	0	$3S_{y_{7S}} \sin 6\psi$ $+3S_{x_{7S}} \cos 6\psi$	0
$S_{x_{8C}} \cos 8\psi_m$	$S_{y_{8C}} \cos 8\psi_m$	0	0	$3,5S_{y_{8C}} \cos 7\psi$ $-3,5S_{x_{8C}} \sin 7\psi$
$S_{x_{8S}} \sin 8\psi_m$	$S_{y_{8S}} \sin 8\psi_m$	0	0	$3,5S_{y_{8S}} \sin 7\psi$ $+3,5S_{x_{8S}} \cos 7\psi$

Tab. A.5 Horizontale Blattkräfte → Rotorseitenkraft, Rotor mit 2–4 Blättern

Blattkraft		Rotorkomponente: Seitenkraft Y		
Widerstand	Radial	2-Blatt-Rotor	3-Blatt-Rotor	4-Blatt-Rotor
S_{x_0}	S_{y_0}	0	0	0
$S_{x_{1C}} \cos \psi_m$	$S_{y_{1C}} \cos \psi_m$	$-S_{x_{1C}} (1 + \cos 2\psi) + S_{y_{1C}} \sin 2\psi$	$-1,5S_{x_{1C}}$	$-2S_{x_{1C}}$
$S_{x_{1S}} \sin \psi_m$	$S_{y_{1S}} \sin \psi_m$	$S_{y_{1S}} (1 - \cos 2\psi) - S_{x_{1S}} \sin 2\psi$	$1,5S_{y_{1S}}$	$2S_{y_{1S}}$
$S_{x_{2C}} \cos 2\psi_m$	$S_{y_{2C}} \cos 2\psi_m$	0	$1,5S_{y_{2C}} \sin 3\psi - 1,5S_{x_{2C}} \cos 3\psi$	0
$S_{x_{2S}} \sin 2\psi_m$	$S_{y_{2S}} \sin 2\psi_m$	0	$-1,5S_{x_{2S}} \cos 3\psi - 1,5S_{y_{2S}} \sin 3\psi$	0
$S_{x_{3C}} \cos 3\psi_m$	$S_{y_{3C}} \cos 3\psi_m$	$S_{y_{3C}} (\sin 4\psi - \sin 2\psi) - S_{x_{3C}} (\cos 4\psi + \cos 2\psi)$	0	$2S_{y_{3C}} \sin 4\psi - 2S_{x_{3C}} \cos 4\psi$
$S_{x_{3S}} \sin 3\psi_m$	$S_{y_{3S}} \sin 3\psi_m$	$S_{y_{3S}} (\sin 2\psi - \sin 4\psi) - S_{x_{3S}} (\cos 4\psi + \cos 2\psi)$	0	$-2S_{x_{3S}} \sin 4\psi - 2S_{y_{3S}} \cos 4\psi$
$S_{x_{4C}} \cos 4\psi_m$	$S_{y_{4C}} \cos 4\psi_m$	0	$-1,5S_{x_{4C}} \cos 3\psi - 1,5S_{y_{4C}} \sin 3\psi$	0
$S_{x_{4S}} \sin 4\psi_m$	$S_{y_{4S}} \sin 4\psi_m$	0	$1,5S_{y_{4S}} \cos 3\psi - 1,5S_{x_{4S}} \sin 3\psi$	0
$S_{x_{5C}} \cos 5\psi_m$	$S_{y_{5C}} \cos 5\psi_m$	$S_{y_{5C}} (\sin 6\psi - \sin 4\psi) - S_{x_{5C}} (\cos 6\psi + \cos 4\psi)$	$1,5S_{y_{5C}} \sin 6\psi - 1,5S_{x_{5C}} \cos 6\psi$	$-2S_{x_{5C}} \cos 4\psi - 2S_{y_{5C}} \sin 4\psi$
$S_{x_{5S}} \sin 5\psi_m$	$S_{y_{5S}} \sin 5\psi_m$	$S_{y_{5S}} (\sin 4\psi - \sin 6\psi) - S_{x_{5S}} (\cos 6\psi + \cos 4\psi)$	$-1,5S_{y_{5S}} \cos 6\psi - 1,5S_{x_{5S}} \sin 6\psi$	$2S_{y_{5S}} \cos 4\psi - 2S_{x_{5S}} \sin 4\psi$
$S_{x_{6C}} \cos 6\psi_m$	$S_{y_{6C}} \cos 6\psi_m$	0	0	0
$S_{x_{6S}} \sin 6\psi_m$	$S_{y_{6S}} \sin 6\psi_m$	0	0	0
$S_{x_{7C}} \cos 7\psi_m$	$S_{y_{7C}} \cos 7\psi_m$	$S_{y_{7C}} (\sin 8\psi - \sin 6\psi) - S_{x_{7C}} (\cos 8\psi + \cos 6\psi)$	$-1,5S_{x_{7C}} \cos 6\psi - 1,5S_{y_{7C}} \sin 6\psi$	$2S_{y_{7C}} \sin 8\psi - 2S_{x_{7C}} \cos 8\psi$
$S_{x_{7S}} \sin 7\psi_m$	$S_{y_{7S}} \sin 7\psi_m$	$S_{y_{7S}} (\sin 6\psi - \sin 8\psi) - S_{x_{7S}} (\cos 8\psi + \cos 6\psi)$	$1,5S_{y_{7S}} \cos 6\psi - 1,5S_{x_{7S}} \sin 6\psi$	$-2S_{x_{7S}} \sin 8\psi - 2S_{y_{7S}} \cos 8\psi$
$S_{x_{8C}} \cos 8\psi_m$	$S_{y_{8C}} \cos 8\psi_m$	0	$1,5S_{y_{8C}} \sin 9\psi - 1,5S_{x_{8C}} \cos 9\psi$	0
$S_{x_{8S}} \sin 8\psi_m$	$S_{y_{8S}} \sin 8\psi_m$	0	$-1,5S_{x_{8S}} \cos 9\psi - 1,5S_{y_{8S}} \sin 9\psi$	0

Tab. A.6 Horizontale Blattkräfte → Rotorseitenkraft, Rotor mit 5–7 Blättern

Blattkraft		Rotorkomponente: Seitenkraft Y		
Widerstand	Radial	5-Blatt-Rotor	6-Blatt-Rotor	7-Blatt-Rotor
S_{x_0}	S_{y_0}	0	0	0
$S_{x_{1C}} \cos \psi_m$	$S_{y_{1C}} \cos \psi_m$	$-2,5S_{x_{1C}}$	$-3S_{x_{1C}}$	$-3,5S_{x_{1C}}$
$S_{x_{1S}} \sin \psi_m$	$S_{y_{1S}} \sin \psi_m$	$2,5S_{y_{1S}}$	$3S_{y_{1S}}$	$3,5S_{y_{1S}}$
$S_{x_{2C}} \cos 2\psi_m$	$S_{y_{2C}} \cos 2\psi_m$	0	0	0
$S_{x_{2S}} \sin 2\psi_m$	$S_{y_{2S}} \sin 2\psi_m$	0	0	0
$S_{x_{3C}} \cos 3\psi_m$	$S_{y_{3C}} \cos 3\psi_m$	0	0	0
$S_{x_{3S}} \sin 3\psi_m$	$S_{y_{3S}} \sin 3\psi_m$	0	0	0
$S_{x_{4C}} \cos 4\psi_m$	$S_{y_{4C}} \cos 4\psi_m$	$2,5S_{y_{4C}} \sin 5\psi$ $-2,5S_{x_{4C}} \cos 5\psi$	0	0
$S_{x_{4S}} \sin 4\psi_m$	$S_{y_{4S}} \sin 4\psi_m$	$-2,5S_{x_{4S}} \sin 5\psi$ $-2,5S_{y_{4S}} \cos 5\psi$	0	0
$S_{x_{5C}} \cos 5\psi_m$	$S_{y_{5C}} \cos 5\psi_m$	0	$3S_{y_{5C}} \sin 6\psi$ $-3S_{x_{5C}} \cos 6\psi$	0
$S_{x_{5S}} \sin 5\psi_m$	$S_{y_{5S}} \sin 5\psi_m$	0	$-3S_{x_{5S}} \sin 6\psi$ $-3S_{y_{5S}} \cos 6\psi$	0
$S_{x_{6C}} \cos 6\psi_m$	$S_{y_{6C}} \cos 6\psi_m$	$-2,5S_{x_{6C}} \cos 5\psi$ $-2,5S_{y_{6C}} \sin 5\psi$	0	$3,5S_{y_{6C}} \sin 7\psi$ $-3,5S_{x_{6C}} \cos 7\psi$
$S_{x_{6S}} \sin 6\psi_m$	$S_{y_{6S}} \sin 6\psi_m$	$2,5S_{y_{6S}} \cos 5\psi$ $-2,5S_{x_{6S}} \sin 5\psi$	0	$-3,5S_{x_{6S}} \sin 7\psi$ $-3,5S_{y_{6S}} \cos 7\psi$
$S_{x_{7C}} \cos 7\psi_m$	$S_{y_{7C}} \cos 7\psi_m$	0	$-3S_{x_{7C}} \cos 6\psi$ $-3S_{y_{7C}} \sin 6\psi$	0
$S_{x_{7S}} \sin 7\psi_m$	$S_{y_{7S}} \sin 7\psi_m$	0	$3S_{y_{7S}} \cos 6\psi$ $-3S_{x_{7S}} \sin 6\psi$	0
$S_{x_{8C}} \cos 8\psi_m$	$S_{y_{8C}} \cos 8\psi_m$	0	0	$-3,5S_{x_{8C}} \cos 7\psi$ $-3,5S_{y_{8C}} \sin 7\psi$
$S_{x_{8S}} \sin 8\psi_m$	$S_{y_{8S}} \sin 8\psi_m$	0	0	$3,5S_{y_{8S}} \cos 7\psi$ $-3,5S_{x_{8S}} \sin 7\psi$

Tab. A.7 Blattschlagmoment → Rotorrollmoment, Rotor mit 2–4 Blättern

Blattmoment	Rotorkomponente: Rollmoment M_x		
Schlagen	2-Blatt-Rotor	3-Blatt-Rotor	4-Blatt-Rotor
N_{F_0}	0	0	0
$N_{F_{1C}} \cos \psi_m$	$N_{F_{1C}} \sin 2\psi$	0	0
$N_{F_{1S}} \sin \psi_m$	$N_{F_{1S}} (1 - \cos 2\psi)$	$1,5N_{F_{1S}}$	$2N_{F_{1S}}$
$N_{F_{2C}} \cos 2\psi_m$	0	$1,5N_{F_{2C}} \sin 3\psi$	0
$N_{F_{2S}} \sin 2\psi_m$	0	$-1,5N_{F_{2S}} \cos 3\psi$	0
$N_{F_{3C}} \cos 3\psi_m$	$N_{F_{3C}} (\sin 4\psi - \sin 2\psi)$	0	$2N_{F_{3C}} \sin 4\psi$
$N_{F_{3S}} \sin 3\psi_m$	$N_{F_{3S}} (\cos 2\psi - \cos 4\psi)$	0	$-2N_{F_{3S}} \cos 4\psi$
$N_{F_{4C}} \cos 4\psi_m$	0	$-1,5N_{F_{4C}} \sin 3\psi$	0
$N_{F_{4S}} \sin 4\psi_m$	0	$1,5N_{F_{4S}} \cos 3\psi$	0
$N_{F_{5C}} \cos 5\psi_m$	$N_{F_{5C}} (\cos 6\psi - \cos 4\psi)$	$1,5N_{F_{5C}} \sin 6\psi$	$-2N_{F_{5C}} \sin 4\psi$
$N_{F_{5S}} \sin 5\psi_m$	$N_{F_{5S}} (\sin 4\psi - \sin 6\psi)$	$-1,5N_{F_{5S}} \cos 6\psi$	$2N_{F_{5S}} \cos 4\psi$
$N_{F_{6C}} \cos 6\psi_m$	0	0	0
$N_{F_{6S}} \sin 6\psi_m$	0	0	0
$N_{F_{7C}} \cos 7\psi_m$	$N_{F_{7C}} (\sin 8\psi - \sin 6\psi)$	$-1,5N_{F_{7C}} \sin 6\psi$	$2N_{F_{7C}} \sin 8\psi$
$N_{F_{7S}} \sin 7\psi_m$	$N_{F_{7S}} (\cos 6\psi - \cos 8\psi)$	$1,5N_{F_{7S}} \cos 6\psi$	$-2N_{F_{7S}} \cos 8\psi$
$N_{F_{8C}} \cos 8\psi_m$	0	$1,5N_{F_{8C}} \sin 9\psi$	0
$N_{F_{8S}} \sin 8\psi_m$	0	$-1,5N_{F_{8S}} \cos 9\psi$	0

Tab. A.8 Blattschlagmoment → Rotorrollmoment, Rotor mit 5–7 Blättern

Blattmoment	Rotorkomponente: Rollmoment M_x		
Schlagen	5-Blatt-Rotor	6-Blatt-Rotor	7-Blatt-Rotor
N_{F_0}	0	0	0
$N_{F_{1C}} \cos \psi_m$	0	0	0
$N_{F_{1S}} \sin \psi_m$	$2,5N_{F_{1S}}$	$3N_{F_{1S}}$	$3,5N_{F_{1S}}$
$N_{F_{2C}} \cos 2\psi_m$	0	0	0
$N_{F_{2S}} \sin 2\psi_m$	0	0	0
$N_{F_{3C}} \cos 3\psi_m$	0	0	0
$N_{F_{3S}} \sin 3\psi_m$	0	0	0
$N_{F_{4C}} \cos 4\psi_m$	$2,5N_{F_{4C}} \sin 5\psi$	0	0
$N_{F_{4S}} \sin 4\psi_m$	$-2,5N_{F_{4S}} \cos 5\psi$	0	0
$N_{F_{5C}} \cos 5\psi_m$	0	$3N_{F_{5C}} \sin 6\psi$	0
$N_{F_{5S}} \sin 5\psi_m$	0	$-3N_{F_{5S}} \cos 6\psi$	0
$N_{F_{6C}} \cos 6\psi_m$	$-2,5N_{F_{6C}} \sin 5\psi$	0	$3,5N_{F_{6C}} \sin 7\psi$
$N_{F_{6S}} \sin 6\psi_m$	$2,5N_{F_{6S}} \cos 5\psi$	0	$-3,5N_{F_{6S}} \cos 7\psi$
$N_{F_{7C}} \cos 7\psi_m$	0	$-3N_{F_{7C}} \sin 6\psi$	0
$N_{F_{7S}} \sin 7\psi_m$	0	$3N_{F_{7S}} \cos 6\psi$	0
$N_{F_{8C}} \cos 8\psi_m$	0	0	$-3,5N_{F_{8C}} \sin 7\psi$
$N_{F_{8S}} \sin 8\psi_m$	0	0	$3,5N_{F_{8S}} \cos 7\psi$

Tab. A.9 Blattschlagmoment → Rotornickmoment, Rotor mit 2–4 Blättern

Blattmoment	Rotorkomponente: Nickmoment M_y		
Schlagen	2-Blatt-Rotor	3-Blatt-Rotor	4-Blatt-Rotor
N_{F_0}	0	0	0
$N_{F_{1C}} \cos \psi_m$	$-N_{F_{1C}} (1 + \cos 2\psi)$	$-1,5N_{F_{1C}}$	$-2N_{F_{1C}}$
$N_{F_{1S}} \sin \psi_m$	$-N_{F_{1S}} \sin 2\psi$	0	0
$N_{F_{2C}} \cos 2\psi_m$	0	$-1,5N_{F_{2C}} \cos 3\psi$	0
$N_{F_{2S}} \sin 2\psi_m$	0	$-1,5N_{F_{2S}} \sin 3\psi$	0
$N_{F_{3C}} \cos 3\psi_m$	$-N_{F_{3C}} (\cos 4\psi + \cos 2\psi)$	0	$-2N_{F_{3C}} \cos 4\psi$
$N_{F_{3S}} \sin 3\psi_m$	$-N_{F_{3S}} (\sin 2\psi + \sin 4\psi)$	0	$-2N_{F_{3S}} \sin 4\psi$
$N_{F_{4C}} \cos 4\psi_m$	0	$-1,5N_{F_{4C}} \cos 3\psi$	0
$N_{F_{4S}} \sin 4\psi_m$	0	$-1,5N_{F_{4S}} \sin 3\psi$	0
$N_{F_{5C}} \cos 5\psi_m$	$-N_{F_{5C}} (\cos 6\psi + \cos 4\psi)$	$-1,5N_{F_{5C}} \cos 6\psi$	$-2N_{F_{5C}} \cos 4\psi$
$N_{F_{5S}} \sin 5\psi_m$	$-N_{F_{5S}} (\sin 4\psi + \sin 6\psi)$	$-1,5N_{F_{5S}} \sin 6\psi$	$-2N_{F_{5S}} \sin 4\psi$
$N_{F_{6C}} \cos 6\psi_m$	0	0	0
$N_{F_{6S}} \sin 6\psi_m$	0	0	0
$N_{F_{7C}} \cos 7\psi_m$	$-N_{F_{7C}} (\cos 8\psi + \cos 6\psi)$	$-1,5N_{F_{7C}} \cos 6\psi$	$-2N_{F_{7C}} \cos 8\psi$
$N_{F_{7S}} \sin 7\psi_m$	$-N_{F_{7S}} (\sin 6\psi + \sin 8\psi)$	$-1,5N_{F_{7S}} \sin 6\psi$	$-2N_{F_{7S}} \sin 8\psi$
$N_{F_{8C}} \cos 8\psi_m$	0	$-1,5N_{F_{8C}} \cos 9\psi$	0
$N_{F_{8S}} \sin 8\psi_m$	0	$-1,5N_{F_{8S}} \sin 9\psi$	0

Tab. A.10 Blattschlagmoment → Rotornickmoment, Rotor mit 5–7 Blättern

Blattmoment	Rotorkomponente: Nickmoment M_y		
Schlagen	5-Blatt-Rotor	6-Blatt-Rotor	7-Blatt-Rotor
N_{F_0}	0	0	0
$N_{F_{1C}} \cos \psi_m$	$-2,5N_{F_{1C}}$	$-3N_{F_{1C}}$	$-3,5N_{F_{1C}}$
$N_{F_{1S}} \sin \psi_m$	0	0	0
$N_{F_{2C}} \cos 2\psi_m$	0	0	0
$N_{F_{2S}} \sin 2\psi_m$	0	0	0
$N_{F_{3C}} \cos 3\psi_m$	0	0	0
$N_{F_{3S}} \sin 3\psi_m$	0	0	0
$N_{F_{4C}} \cos 4\psi_m$	$-2,5N_{F_{4C}} \cos 5\psi$	0	0
$N_{F_{4S}} \sin 4\psi_m$	$-2,5N_{F_{4S}} \sin 5\psi$	0	0
$N_{F_{5C}} \cos 5\psi_m$	0	$-3N_{F_{5C}} \cos 6\psi$	0
$N_{F_{5S}} \sin 5\psi_m$	0	$-3N_{F_{5S}} \sin 6\psi$	0
$N_{F_{6C}} \cos 6\psi_m$	$-2,5N_{F_{6C}} \cos 5\psi$	0	$-3,5N_{F_{6C}} \cos 7\psi$
$N_{F_{6S}} \sin 6\psi_m$	$-2,5N_{F_{6S}} \sin 5\psi$	0	$-3,5N_{F_{6S}} \sin 7\psi$
$N_{F_{7C}} \cos 7\psi_m$	0	$-3N_{F_{7C}} \cos 6\psi$	0
$N_{F_{7S}} \sin 7\psi_m$	0	$-3N_{F_{7S}} \sin 6\psi$	0
$N_{F_{8C}} \cos 8\psi_m$	0	0	$-3,5N_{F_{8C}} \cos 7\psi$
$N_{F_{8S}} \sin 8\psi_m$	0	0	$-3,5N_{F_{8S}} \sin 7\psi$

B Lösungen zu den Übungsaufgaben

B.1 Lösungen der Übungsaufgaben zu Kap. 2

1. Die Zentrifugalkräfte erzeugen ein Moment, welches das Blatt zurück in die unausgelebte Lage zu drehen versucht, das sog. Propellermoment. Dies ist ein wichtiger Teil der Torsionsdifferentialgleichung. Mit der Ableitung nach der radialen Koordinate $' = d/dy = d/(R dr)$ lautet diese (ohne Luftkräfte) mit ϑ als der Torsionsauslenkung und GJ als der Torsionssteifigkeit:

$$I'_\Theta(\ddot{\vartheta} + \Omega^2\vartheta) - (GJ\vartheta')' = 0$$

Der erste Term repräsentiert den Massenträgheitsterm, der zweite das Propellermoment, welches als Feder wirkt, der dritte den Steifigkeitsterm, der ebenfalls ein Federterm ist. Die Torsion in Raum und Zeit ist $\vartheta(r, t) = \gamma_1(r)q_1(t)$, worin $\gamma_1(r) = r$ die gegebene lineare Ansatzfunktion und $r = y/R$ die dimensionslose radiale Koordinate ist. Die Ansatzfunktion muss beim Raleigh-Ritz-Verfahren nur die geometrischen Randbedingungen erfüllen, also $\gamma_1(0) = 0$, was erfüllt ist und daher die Funktion prinzipiell verwendbar ist. Es folgt für das Rayleigh-Ritz Verfahren die kinetische Energie E_{kin}

$$\vartheta(r, t) = \gamma_1(r)q_1(t) = r q_1$$

$$\dot{\vartheta}(r, t) = \gamma_1(r)\dot{q}_1(t) = r \dot{q}_1$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \int_0^R I'_\Theta \dot{\vartheta}^2 dy = \frac{1}{2} m_{11} \dot{q}_1^2$$

$$m_{11} = I'_\Theta R \int_0^1 r^2 dr = \frac{I'_\Theta R}{3}$$

und die potentielle Energie E_{pot} (hier muss in die Teilbereiche aufgespalten werden, da die Steifigkeit nur abschnittsweise konstant ist), wobei $\gamma'_1(r) = 1$ ist.

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \int_0^R GJ(\vartheta')^2 dy + \frac{1}{2} \int_0^R I'_{\Theta} \Omega^2 \vartheta^2 dy = \frac{1}{2} k_{11} q_1^2$$

$$k_{11} = \frac{GJ_0}{R} \left(0,9 \int_0^{0,5} dr + 0,7 \int_{0,5}^1 dr \right) + \frac{I'_{\Theta} R}{3} \Omega^2 = 0,8 \frac{GJ_0}{R} + \frac{I'_{\Theta} R}{3} \Omega^2$$

Die Anwendung des Formalismus nach Lagrange

$$d/dt(\partial E_{\text{kin}}/\partial \dot{q}) - \partial E_{\text{kin}}/\partial q + \partial E_{\text{pot}}/\partial q = 0$$

liefert dann die Differentialgleichung

$$m_{11} \ddot{q}_1 + k_{11} q_1 = 0$$

Für harmonische Schwingungen wird der Ansatz $q_1 = q_{10} e^{i\omega t}$ eingesetzt. Dies liefert

$$0 = (k_{11} - \omega^2 m_{11}) q_{10} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{k_{11}}{m_{11}} = \Omega^2 + 2,4 \frac{GJ_0}{I'_{\Theta} R^2}$$

Anmerkung: verwendet man die nachfolgend im Galerkin-Verfahren verwendete Ansatzfunktion, so erhält man

$$m_{11} = \frac{2}{15} I'_{\Theta} R; \quad k_{11} = m_{11} \Omega^2 + \frac{7GJ_0}{24R} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \Omega^2 + 2,18 \frac{GJ_0}{I'_{\Theta} R^2}$$

Die dem richtigen Ergebnis nähere Ansatzfunktion hat also eine kleinere Eigenfrequenz.

2. Für das Galerkin-Verfahren soll der quadratische (bessere) Ansatz

$$\vartheta(r, t) = \left(r - \frac{r^2}{2} \right) q_1 = \gamma_1(r) q_1(t)$$

verwendet werden. Hier müssen die geometrischen Randbedingungen und die Kräfte erfüllt werden. Es ist leicht zu verifizieren, dass $\gamma_1(0) = 0$ und $\gamma'_1(1) = 0$ sind und die Funktion daher prinzipiell verwendbar ist. Nach Einsetzen in die Differentialgleichung folgt

$$I'_{\Theta} (\gamma_1 \ddot{q}_1 + \Omega^2 \gamma_1 q_1) - (GJ \gamma'_1)' q_1 = 0$$

Diese Gleichung wird insgesamt mit γ_1 multipliziert und über den Radius integriert.

$$0 = \int_0^R I'_\Theta \gamma_1^2 dy \ddot{q}_1 + \int_0^R I'_\Theta \Omega^2 \gamma_1^2 dy q_1 - \int_0^R (GJ \gamma_1')' \gamma_1 dy q_1 = m_{11} \ddot{q}_1 + k_{11} q_1$$

$$m_{11} = I'_\Theta R \int_0^1 \left(r^2 - r^3 + \frac{r^4}{4} \right) dr = \frac{2}{15} I'_\Theta R$$

$$k_{11} = \Omega^2 m_{11} + \frac{GJ_0}{R} \left[0,9 \int_0^{0,5} \left(r - \frac{r^2}{2} \right) dr + 0,7 \int_{0,5}^1 \left(r - \frac{r^2}{2} \right) dr \right]$$

$$= \Omega^2 m_{11} + 0,2542 \frac{GJ_0}{R}$$

Für harmonische Schwingungen wird der Ansatz $q_1 = q_{10} e^{i\omega t}$ eingesetzt. Dies liefert

$$\omega^2 = \frac{k_{11}}{m_{11}} = \Omega^2 + 1,906 \frac{GJ_0}{I'_\Theta R^2}$$

Es ist davon auszugehen, das das Ergebnis genauer als im vorigen Abschnitt ist, da die Ansatzfunktion eine bessere Näherung an die zu erwartende tatsächliche Verteilung der Torsion darstellt.

3. Das Finite Elemente Verfahren wird mit zwei Elementen aufgebaut; jedes davon hat in sich eine lineare Verwindungsverteilung. Im Gegensatz zu den bisherigen Verfahren, wo sich die Ansatzfunktion über den gesamten Balken erstreckt, beschreiben bei der FEM die Ansatzfunktionen nur den Verlauf innerhalb eines Elements. Je mehr Elemente man nimmt, um so genauer kann man damit den tatsächlichen Verlauf abbilden. Innerhalb eines Elementes sind die Materialeigenschaften immer konstant. Für ein Element der Länge l gilt die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \int_0^l I'_\Theta \dot{\vartheta}^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$m_{ij} = I'_\Theta \int_0^l N_i N_j dx \quad i, j = 1, 2$$

Die potentielle Energie lautet

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \int_0^l GJ(\vartheta')^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l I'_\Theta \Omega^2 \vartheta^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 k_{ij} q_i q_j$$

$$k_{ij} = GJ \int_0^l N'_i N'_j dx + I'_\Theta \Omega^2 \int_0^l N_i N_j dx \quad i, j = 1, 2$$

Die in den Energieausdrücken verwendeten Funktionen N_i , $i = 1, 2$ sind Formfunktionen und drücken aus, dass die Verformung innerhalb eines Elementes linear verläuft. Hier sind dies $N_1 = 1 - x/l$ und $N_2 = x/l$ mit x als der Elementkoordinate, die am Anfang eines Elementes $x = 0$ und an dessen Ende $x = l$ ist. Innerhalb eines Elementes sind die Materialeigenschaften GJ und I'_Θ konstant. Es folgt die Elementmassenmatrix \mathbf{m} zu

$$\begin{aligned} m_{11} &= I'_\Theta l \int_0^1 (1-s)^2 ds = \frac{I'_\Theta l}{3} = m_{22} \\ m_{12} &= I'_\Theta l \int_0^1 (s-s^2) ds = \frac{I'_\Theta l}{6} = m_{21} \\ \Rightarrow \mathbf{m} &= \frac{I'_\Theta l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

In analoger Weise wird die Steifigkeitsmatrix \mathbf{k} aufgebaut.

$$\begin{aligned} k_{11} &= \Omega^2 m_{11} + \frac{GJ}{l} \int_0^1 (-1)^2 ds = \Omega^2 m_{11} + \frac{GJ}{l} = k_{22} \\ k_{12} &= \Omega^2 m_{12} + \frac{GJ}{l} \int_0^1 (-1)1 ds = \Omega^2 m_{12} - \frac{GJ}{l} = k_{21} \\ \Rightarrow \mathbf{k} &= \Omega^2 \mathbf{m} + \frac{GJ}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nun ist für beide Elemente $I'_\Theta = \text{const}$ und $l = R/2$; allerdings haben beide unterschiedliche Werte für GJ : im ersten Element $0,9GJ_0$ und im zweiten $0,7GJ_0$. Nach Anwendung des Lagrange'schen Formalismus lauten die zusammengestellten Differentialgleichungen der beiden Elemente

$$\mathbf{m}\ddot{\vec{q}} + \mathbf{k}\vec{q} = \vec{0}$$

Für harmonische Schwingungen wird der Ansatz $q_1 = q_{10}e^{i\omega t}$ eingesetzt. Dies liefert

$$(\mathbf{k} - \mathbf{m}\omega^2)\vec{q}_0 = \vec{0}$$

Dies ist ein Eigenwertproblem, das nach Einführung einer Randbedingung an der Blatteinspannung, wo die Auslenkung Null sein muss, vereinfacht werden kann. Als Folge dieser Randbedingung kann die erste Spalte und Zeile der Matrixgleichung

gestrichen werden. Ausgehend von dem gesamten Gleichungssystem mit den Freiheitsgraden q_1 an der Einspannung, q_2 in der Balkenmitte und q_3 am freien Ende

$$\mathbf{k} - \mathbf{m}\omega^2 = (\Omega^2 - \omega^2) \frac{I'_\Theta R}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{2GJ_0}{R} \begin{bmatrix} 0,9 & -0,9 & 0 \\ -0,9 & 1,6 & -0,7 \\ 0 & -0,7 & 0,7 \end{bmatrix}$$

folgt nach Einarbeitung der Randbedingungen ($q_1 = 0$, also 1. Zeile und Spalte streichen)

$$\mathbf{k} - \mathbf{m}\omega^2 = (\Omega^2 - \omega^2) \frac{I'_\Theta R}{12} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{GJ_0}{R} \begin{bmatrix} 1,6 & -0,7 \\ -0,7 & 0,7 \end{bmatrix}$$

Die Lösung des Eigenwertproblems erfordert, dass die Determinante verschwindet, also $\det|\mathbf{k} - \mathbf{m}\omega^2| = 0$. Mit dem Parameter $\lambda^2 = \Omega^2 - \omega^2$ und $a = GJ_0/(I'_\Theta R^2)$ erhält man daraus die Gleichung vierter Ordnung

$$\lambda^4 + 25,371a\lambda^2 + 51,84a^2 = 0$$

mit der Lösung

$$\omega_1^2 = \Omega^2 + 2,24 \frac{GJ_0}{I'_\Theta R^2} \quad \text{und} \quad \omega_2^2 = \Omega^2 + 23,13 \frac{GJ_0}{I'_\Theta R^2}$$

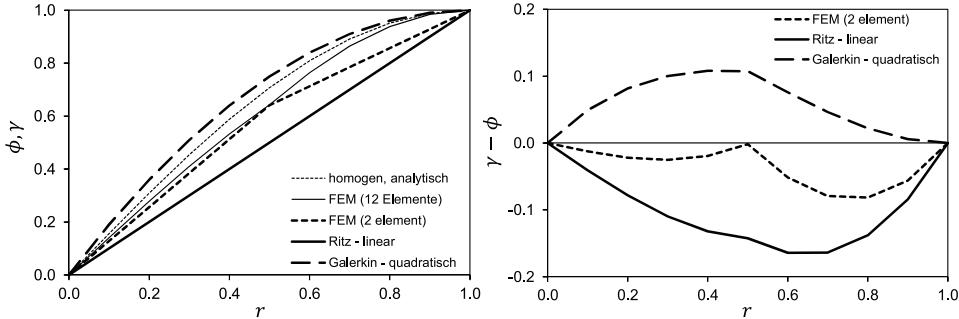
Die Anzahl der Elemente bei der FEM oder die Anzahl der Ansatzfunktionen bei dem Raleigh-Ritz- oder Galerkin-Verfahren bestimmen die Anzahl der Eigenfrequenzen. Da hier 2 Elemente verwendet wurden, erhält man auch 2 Eigenfrequenzen, deren kleinere mit den Ergebnissen der beiden anderen Verfahren verglichen werden kann. Zum Vergleich die Ergebnisse der beiden anderen Methoden:

$$\begin{aligned} \text{Rayleigh-Ritz} \quad \omega_1^2 &= \Omega^2 + 2,4 \frac{GJ_0}{I'_\Theta R^2} \\ \text{Galerkin} \quad \omega_1^2 &= \Omega^2 + 1,91 \frac{GJ_0}{I'_\Theta R^2} \end{aligned}$$

Die verschiedenen Ergebnisse werden nun anhand der Ansatzfunktionen γ bzw. der Eigenformen Φ gegenübergestellt. Der Ansatz nach Ritz ist mit einer Funktion ersten Grades linear, der nach Galerkin war quadratisch und der FEM-Ansatz beinhaltete zwei Elemente mit in sich jeweils linearen Verformungen. Diese Formfunktionen sind einander gegenüber gestellt und außerdem die analytische Lösung des homogenen Balkens mit eingetragen $\Phi(r) = \sin(r\pi/2)$. Zusätzlich ist eine FEM-Lösung mit 10 Elementen, also wesentlich feiner diskretisiert, mit eingetragen.

Wie man sieht, ist die Auslenkungsverteilung bis zum halben Radius für das hier dargestellte Problem geringer als beim homogenen Balken, da bis dorthin größere Steifigkeiten als im äußeren Bereich vorhanden sind. Außen sind dann entsprechend größere Auslenkungen. Der lineare Ansatz hat daher die größten Fehler, geringere hat

der quadratische Ansatz für das Galerkin-Verfahren und die geringsten Fehler hat die FEM mit zwei Elementen, da sie sich dem tatsächlichen Verlauf (FEM mit 12 Elementen) am besten annähern kann. Die Fehler an der Blattspitze wirken sich allerdings am stärksten aus, da dort die Auslenkungen am größten sind. Daher wird das Galerkin-Verfahren den dem tatsächlichen Ergebnis am nächsten kommenden Wert für die Eigenfrequenz liefern.



4. Die Blattreaktion $\beta = \beta_{4C} \cos 4\psi + \beta_{4S} \sin 4\psi$ auf einen Steuerwinkel von $\Theta = \Theta_{4S} \sin 4\psi$ ist gesucht. Mit den dimensionslosen Geschwindigkeitskomponenten am Blattelement

$$\bar{V}_T = r + \mu \sin \psi \quad \bar{V}_P = \lambda + r \beta + \mu \beta \cos \psi$$

sowie den Abkürzungen $S_n = \sin n\psi$ und $C_n = \cos n\psi$ folgt

$$\begin{aligned} \beta^{**} + v_\beta^2 \beta &= \gamma \bar{M}_\beta \quad \Rightarrow \quad (v_\beta^2 - 16)(\beta_{4C} C_4 + \beta_{4S} S_4) = \gamma \bar{M}_\beta \\ \bar{M}_\beta &= \frac{1}{2} \int_0^1 r (\bar{V}_T^2 \Theta - \bar{V}_P \bar{V}_T) dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (r^3 + 2\mu r^2 S_1 + r\mu^2 S_1^2) \Theta_{4S} S_4 - (r^2 + r\mu S_1) \\ &\quad \cdot (\lambda + 4r\beta_{4S} C_4 - 4r\beta_{4C} S_4 + \mu C_1 \beta_{4C} C_4 + \mu C_1 \beta_{4S} S_4) dr \\ \Rightarrow \bar{M}_\beta &= \left(\frac{1}{8} + \frac{\mu}{3} S_1 + \frac{\mu^2}{4} S_1^2 \right) \Theta_{4S} S_4 \\ &\quad - \left\{ \frac{\lambda}{6} + \frac{\mu\lambda}{4} S_1 + \frac{\beta_{4S} C_4 + \beta_{4C} S_4}{2} + \frac{\mu^2}{4} (\beta_{4C} S_1 C_1 C_4 + \beta_{4S} S_1 C_1 S_4) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu}{6} [\beta_{4C} C_1 C_4 + \beta_{4S} C_1 S_4 + 4(\beta_{4S} S_1 S_4 - \beta_{4C} S_1 S_4)] \right\} \end{aligned}$$

Nun werden die trigonometrischen Umformungen auf die Produkte der verschiedenen Terme $S_i C_j$ angewandt und es kommt heraus, dass nur der Term $S_1^2 S_4$ eine Kompo-

nente in S_4 behält, alle anderen tragen nichts zu der 4/rev Reaktion des Blattes bei, sondern finden bei anderen Vielfachen der Drehfrequenz statt. Es wird dann sortiert nach gleichen Termen, d. h. Faktoren mit C_4 und S_4 .

$$\begin{aligned} C_4 : \left(v_\beta^2 - 16\right) \beta_{4C} &= -\frac{\gamma}{2} \beta_{4S} \Rightarrow \beta_{4C} = -\frac{\gamma}{2(v_\beta^2 - 16)} \beta_{4S} \\ S_4 : \left(v_\beta^2 - 16\right) \beta_{4S} &= \frac{\gamma}{2} \left[\frac{\Theta_{4S}}{4} (1 + \mu^2) + \beta_{4C} \right] \Rightarrow \beta_{4S} = \frac{\gamma (v_\beta^2 - 16) (1 + \mu^2)}{8 (v_\beta^2 - 16)^2 + 2\gamma^2} \Theta_{4S} \\ &\Rightarrow \beta_{4C} = -\frac{\gamma^2 (1 + \mu^2)}{16 (v_\beta^2 - 16)^2 + 4\gamma^2} \Theta_{4S} \end{aligned}$$

B.2 Lösungen der Übungsaufgaben zu Kap. 3

B.2.1 Fourier Koordinaten Transformation (FCT, Mehrblattkoordinaten)

- Die Bewegungsgleichung eines Rotorblattes lautet mit $S_i = \sin i\psi$, $i = 1, 2$

$$\beta^{**} + \frac{\gamma}{8} \beta^* + \left[v_\beta^2 - \frac{\gamma}{8} (K_1 S_1 + K_2 S_2) \right] \beta = 0$$

Weiterhin werden für das m -te Blatt die Abkürzungen $S_{im} = \sin(im\Delta\psi)$ und $C_{im} = \cos(im\Delta\psi)$ mit $m = 1, 2, 3$ und $\Delta\psi = 2\pi/3$ für einen 3-Blatt Rotor eingeführt. Mit dem Ansatz

$$\beta^{(m)} = \beta_0 + \beta_{1C} C_{1m} + \beta_{1S} S_{1m}$$

erhält man mit Hilfe der FCT:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 (\text{Dgl}) &= 0 \\ &= \beta_0^{**} + \frac{\gamma}{8} \beta_0^* + v_\beta^2 \beta_0 \\ &\quad - \frac{\gamma}{8} \frac{K_1}{3} \sum_{m=1}^3 \left\{ \beta_0 (S_1 C_{1m} + C_1 S_{1m}) \right. \\ &\quad \left. + \beta_{1C} [S_1 C_1 (C_{1m}^2 - S_{1m}^2) + S_{1m} C_{1m} (C_1^2 - S_1^2)] \right. \\ &\quad \left. + \beta_{1S} (S_1^2 C_{1m}^2 + C_1^2 S_{1m}^2 + 2 S_1 C_1 S_{1m} C_{1m}) \right\} \\ &\quad - \frac{\gamma}{8} \frac{K_2}{3} \sum_{m=1}^3 \left\{ \beta_0 (S_2 C_{2m} + C_2 S_{2m}) \right. \\ &\quad \left. + \beta_{1C} [C_1 C_{1m} (S_2 C_{2m} - C_2 S_{2m}) - S_1 S_{1m} (S_2 C_{2m} + C_2 S_{2m})] \right. \\ &\quad \left. + \beta_{1S} [S_1 C_{1m} (S_2 C_{2m} + C_2 S_{2m}) + C_1 S_{1m} (S_2 C_{2m} + S_2 C_{2m}) \right. \\ &\quad \left. + C_1 C_2 S_{1m} S_{2m}] \right\} \end{aligned}$$

Nun macht man sich einige Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen zu Nutze

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 S_{1m} &= \frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 C_{1m} = \frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 S_{1m} C_{1m} = \frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 S_{2m} = \frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 C_{2m} = 0 \\ \frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 C_{1m}^2 &= \frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 S_{1m}^2 = \frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 C_{2m}^2 = \frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 S_{2m}^2 = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 C_{1m} C_{2m} &= -\frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 S_{1m} S_{2m} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 C_{1m} S_{2m} &= \frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 S_{1m} C_{2m} = 0 \end{aligned}$$

und erhält

$$0 = \overset{**}{\beta}_0 + \frac{\gamma}{8} \overset{*}{\beta}_0 + v_\beta^2 \beta_0 - \frac{\gamma}{8} \frac{K_1}{2} \beta_{1S} - \frac{\gamma}{8} K_2 \beta_{1C} S_3 - \frac{\gamma}{8} K_2 \beta_{1S} C_1$$

In analoger Weise erfolgen die weiteren Operationen. Aus

$$\frac{2}{3} \sum_{m=1}^3 (\text{Dgl}) C_{1m} = 0$$

folgt nach einiger Rechnung

$$\begin{aligned} 0 = \overset{**}{\beta}_{1C} + 2 \overset{*}{\beta}_{1S} - \beta_{1C} + \frac{\gamma}{8} \left(\overset{*}{\beta}_{1C} + \beta_{1S} \right) + v_\beta^2 \beta_{1C} - \frac{\gamma}{8} \frac{K_1}{2} \beta_{1C} C_3 \\ + \frac{\gamma}{8} \frac{K_1}{2} \beta_{1S} S_3 - \frac{\gamma}{8} K_2 \beta_0 S_3 \end{aligned}$$

und aus

$$\frac{2}{3} \sum_{m=1}^3 (\text{Dgl}) S_{1m} = 0$$

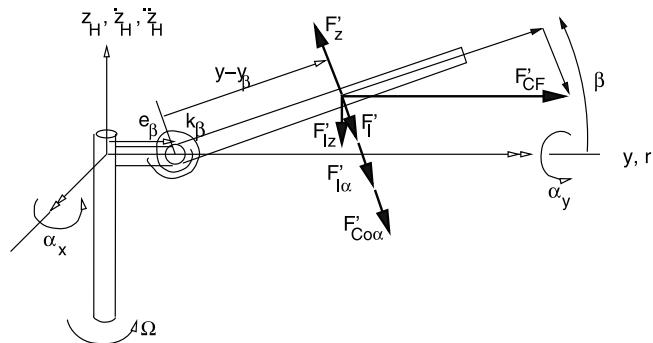
folgt nach einiger Rechnung

$$\begin{aligned} 0 = \overset{**}{\beta}_{1S} - 2 \overset{*}{\beta}_{1C} - \beta_{1S} + \frac{\gamma}{8} \left(\overset{*}{\beta}_{1S} - \beta_{1C} \right) + v_\beta^2 \beta_{1S} - \frac{\gamma}{8} K_1 \beta_0 + \frac{\gamma}{8} \frac{K_1}{2} \beta_{1C} C_3 \\ + \frac{\gamma}{8} \frac{K_1}{2} \beta_{1S} S_3 - \frac{\gamma}{8} K_2 \beta_0 C_3 \end{aligned}$$

Zusammengefasst in Matrixschreibweise:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0^{**} \\ \beta_{1C}^{**} \\ \beta_{1S}^{**} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{8} & 2 \\ 0 & -2 & \frac{\gamma}{8} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0^* \\ \beta_{1C}^* \\ \beta_{1S}^* \end{pmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \nu_\beta^2 & -\frac{\gamma}{8} \frac{K_2}{2} S_3 & -\frac{\gamma}{8} \frac{K_1}{2} - \frac{\gamma}{8} \frac{K_2}{2} C_3 \\ -\frac{\gamma}{8} K_2 S_3 & \nu_\beta^2 - 1 - \frac{\gamma}{8} \frac{K_1}{2} S_3 & \frac{\gamma}{8} + \frac{\gamma}{8} \frac{K_1}{2} C_3 - \frac{\gamma}{8} \frac{K_2}{2} \\ -\frac{\gamma}{8} (K_2 S_3 + K_1) & -\frac{\gamma}{8} + \frac{\gamma}{8} \frac{K_1}{2} C_3 - \frac{\gamma}{8} \frac{K_2}{2} & \nu_\beta^2 - 1 + \frac{\gamma}{8} \frac{K_1}{2} S_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_{1C} \\ \beta_{1S} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Am Blattelement greifen folgende Kräfte an:



Die Differentialgleichung der Schlagbewegung bildet sich aus der Bedingung, dass die Summe der Momente um das Schlaggelenk Null sein muss. Mit $C_1 = \cos \psi$ und $S_1 = \sin \psi$ sowie folgenden Kräften, die alle mit dem Hebelarm ($y - y_\beta$) zum Schlaggelenk wirken,

$F'_I = m'(y - y_\beta)\ddot{\beta}$	Trägheit in der Schlagbewegung
$F'_{CF}\beta = m'y\Omega^2\beta$	Anteil der Zentrifugalkraft
$F'_{Iz} = m'\ddot{z}_H$	Trägheit in der Vertikalbewegung
$F'_{I\alpha} = m'y(\ddot{\alpha}_x S_1 - \ddot{\alpha}_y C_1)$	Trägheit in der Nickbewegung
$F'_{Co\alpha} = 2m'y(\dot{\alpha}_x C_1 + \dot{\alpha}_y S_1)$	Corioliskraft aus der Nickbewegung

erhält man

$$\begin{aligned}
 0 = k_\beta \beta - \int_{y_\beta}^R F'_z(y - y_\beta) dy + \ddot{\beta} \int_{y_\beta}^R m'(y - y_\beta)^2 dy \\
 + (\ddot{\alpha}_x S_1 - \ddot{\alpha}_y C_1) \int_{y_\beta}^R m' y (y - y_\beta) dy + 2\Omega(\dot{\alpha}_x C_1 + \dot{\alpha}_y S_1) \int_{y_\beta}^R m' y (y - y_\beta) dy \\
 + \Omega^2 \beta \int_{y_\beta}^R m' y (y - y_\beta) dy + \ddot{z}_H \int_{y_\beta}^R m' (y - y_\beta) dy
 \end{aligned}$$

Die Integrale erzeugen die Massenträgheitsmomente.

$$\begin{aligned}
 I_\beta &= \int_{y_\beta}^R m'(y - y_\beta)^2 dy && \text{Trägheitsmoment aufgrund } \ddot{\beta} \\
 I_{\beta\alpha} &= \int_{y_\beta}^R m' y (y - y_\beta) dy && \text{Trägheitsmoment aufgrund } \ddot{\alpha}_x, \ddot{\alpha}_y \\
 S_{z_H} &= R \int_{y_\beta}^R m' (y - y_\beta) dy && \text{Trägheitsmoment aufgrund } \ddot{z}_H
 \end{aligned}$$

Nun wird alles durch Division mit $I_\beta \Omega^2$ dimensionslos gemacht. Außerdem ist die Eigenfrequenz des nicht rotierenden Blattes durch $\omega_{\beta 0}^2 = k_\beta / I_\beta$ und die dimensionslose Eigenfrequenz im drehenden System durch $\nu_\beta^2 = (\omega_{\beta 0} / \Omega)^2 + I_{\beta\alpha} / I_\beta$ gegeben.

$$\ddot{\beta} + \nu_\beta^2 \beta + \frac{I_{\beta\alpha}}{I_\beta} \left(\ddot{\alpha}_x S_1 - \ddot{\alpha}_y C_1 + 2\dot{\alpha}_x C_1 + 2\dot{\alpha}_y S_1 \right) + \frac{S_{z_H}}{I_\beta} \frac{\ddot{z}_H}{R} = \gamma \overline{M}_\beta$$

mit

$$\gamma \overline{M}_\beta = \frac{1}{I_\beta \Omega^2} \int_{y_\beta}^R F'_z(y - y_\beta) dy$$

Die Rotorkopfdrehungen werden nur in der vertikalen Geschwindigkeitskomponente berücksichtigt, da ihre Auswirkungen auf die horizontale Komponente als klein betrachtet werden. Die horizontale Böe wird analog dazu nur in der horizontalen Geschwindigkeitskomponente berücksichtigt. Der lokale Auftrieb im Schwebeflug wird

dann mit $z_H = z_H/R$

$$\begin{aligned} F'_z &= \frac{\rho}{2} c (\Omega R)^2 C_{l\alpha} \left(\Theta \bar{V}_T^2 - \bar{V}_P \bar{V}_T \right) \\ \bar{V}_T &= r + \bar{V}_G S_1 \\ \bar{V}_P &= \lambda + (r - e_\beta) \overset{*}{\beta} + \overset{*}{z}_H + r \left(\overset{*}{\alpha}_x S_1 - \overset{*}{\alpha}_y C_1 \right) + \bar{V}_G \beta C_1 \\ &\approx \lambda + r \overset{*}{\beta} + \overset{*}{z}_H + r \left(\overset{*}{\alpha}_x S_1 - \overset{*}{\alpha}_y C_1 \right) + \bar{V}_G \beta C_1 \\ \Theta &= \Theta_0 + \Theta_{1C} C_1 + \Theta_{1S} S_1 \end{aligned}$$

und es folgt das generalisierte aerodynamische Schlagmoment zu

$$\begin{aligned} \bar{M}_\beta &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\Theta \bar{V}_T^2 - \bar{V}_P \bar{V}_T \right) r \, dr \\ &= \frac{1}{8} \left(\Theta - \overset{*}{\beta} - \overset{*}{\alpha}_x S_1 + \overset{*}{\alpha}_y C_1 \right) + \frac{\Theta}{3} \bar{V}_G S_1 \\ &\quad + \frac{\Theta}{4} \bar{V}_G^2 S_1^2 - \frac{\bar{V}_G}{4} S_1 \left(\lambda + \overset{*}{z}_H + \bar{V}_G \beta C_1 \right) \\ &\quad - \frac{1}{6} \left[\bar{V}_G S_1 \left(\overset{*}{\beta} + \overset{*}{\alpha}_x S_1 - \overset{*}{\alpha}_y C_1 \right) + \lambda + \overset{*}{z}_H + \bar{V}_G \beta C_1 \right] \end{aligned}$$

und damit die vollständige Differentialgleichung ($\hat{S}_{z_H} = S_{z_H}/I_\beta$ und $\hat{I}_{\beta\alpha} = I_{\beta\alpha}/I_\beta$) für jedes der $m = 1, 2, 3, 4$ Blätter

$$\begin{aligned} \overset{**}{\beta} + v_\beta^2 \beta + \hat{I}_{\beta\alpha} \left[S_1 \left(\overset{**}{\alpha}_x + 2\overset{*}{\alpha}_y \right) + c_1 \left(2\overset{*}{\alpha}_x - \overset{**}{\alpha}_y \right) \right] + \hat{S}_{z_H} \overset{**}{z}_H \\ = \gamma \left\{ \frac{\Theta - \overset{*}{\beta}}{8} - \frac{\lambda + \overset{*}{z}_H}{6} + C_1 \left(\frac{\overset{*}{\alpha}_y}{8} - \frac{\bar{V}_G}{4} \beta \right) \right. \\ \left. + S_1 \left[\bar{V}_G \left(\frac{\Theta}{3} - \frac{\lambda + \overset{*}{z}_H}{4} - \frac{\overset{*}{\beta}}{6} \right) - \frac{\overset{*}{\alpha}_x}{8} \right] \right. \\ \left. + S_1^2 \left(\frac{\bar{V}_G^2}{4} \Theta - \frac{\bar{V}_G}{6} \overset{*}{\alpha}_x \right) + S_1 C_1 \left(\frac{\bar{V}_G}{6} \overset{*}{\alpha}_y - \frac{\bar{V}_G^2}{4} \beta \right) \right\} \end{aligned}$$

Nun werden die Regeln der Fourier Koordinaten Transformation angewendet, um die Bewegungsgleichungen im nicht drehenden System zu erhalten. Es sind vier Blätter

vorhanden.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} \sum_{m=1}^4 (\text{Dgl}) = 0 \\
 & \Rightarrow \overset{**}{\beta}_0 + v_\beta^2 \beta_0 + \hat{S}_{z_H} \overset{**}{z}_H \\
 & = \gamma \left[\frac{\Theta - \overset{*}{\beta}_0}{8} - \frac{\lambda + \overset{*}{z}_H}{6} + \frac{\overline{V}_G}{6} \left(\Theta_{1S} - \frac{\overset{*}{\beta}_{1S}}{2} \right) + \frac{\overline{V}_G^2}{8} \Theta_0 - \frac{\overline{V}_G \overset{*}{\alpha}_x}{12} \right] \\
 & \frac{1}{2} \sum_{m=1}^4 (\text{Dgl}) C_1 = 0 \\
 & \Rightarrow \overset{**}{\beta}_{1C} + 2\overset{*}{\beta}_{1S} + (v_\beta^2 - 1)\beta_{1C} + \hat{I}_{\beta\alpha} \left(2\overset{*}{\alpha}_x - \overset{**}{\alpha}_y \right) \\
 & = \gamma \left[\frac{\Theta_{1C} - \overset{*}{\beta}_{1C} - \beta_{1S} + \overset{*}{\alpha}_y}{8} - \frac{\overline{V}_G}{6} \beta_0 \right] \\
 & \frac{1}{2} \sum_{m=1}^4 (\text{Dgl}) S_1 = 0 \\
 & \Rightarrow \overset{**}{\beta}_{1S} - 2\overset{*}{\beta}_{1C} + (v_\beta^2 - 1)\beta_{1S} + \hat{I}_{\beta\alpha} \left(2\overset{*}{\alpha}_y + \overset{**}{\alpha}_x \right) \\
 & = \gamma \left[\frac{\Theta_{1S} - \overset{*}{\beta}_{1S} + \beta_{1C} - \overset{*}{\alpha}_x}{8} + \overline{V}_G \left(\frac{\Theta_0}{3} - \frac{\lambda + \overset{*}{z}_H}{4} - \frac{\overset{*}{\beta}_0}{6} \right) + \overline{V}_G^2 \frac{\Theta_{1S}}{4} \right] \\
 & \frac{1}{4} \sum_{m=1}^4 (\text{Dgl})(-1)^m = 0 \Rightarrow \overset{**}{\beta}_2 + v_\beta^2 \beta_2 = \gamma \left[-\frac{\overset{*}{\beta}_2}{8} \right]
 \end{aligned}$$

B.2.2 Eigenwerte im drehenden und im nicht drehenden System

1. Kurzfragen:

- Eine Fourierreihe repräsentiert eine Untermenge von Harmonischen einer Zeitreihe $y(t)$, stellt also effektiv ein Filter dar. Daher ist die Umkehrung nicht identisch mit der Zeitreihe, sondern nur eine Untermenge, also ist die Fourierreihe nicht generell reversibel, sondern nur in Sonderfällen, in denen die Zeitreihe durch eine Fourierreihe exakt repräsentiert wird. Die Koeffizienten sind nicht zeitabhängig. Die FCT überträgt eine Bewegung in einem drehenden System in ein nicht drehendes System oder umgekehrt und ist daher umkehrbar. Sie stellt eine lineare Beziehung zwischen N Freiheitsgraden im drehenden zu ebenso vielen Freiheitsgraden im nicht drehenden System her. Ihre Koeffizienten können eine Zeitabhängigkeit haben.

- b) Da die Schlagbewegung durch aerodynamische Kräfte sehr gut gedämpft ist, kann die Schlagbewegung in der Regel nicht instabil werden.
- c) Mit wachsender Höhe nimmt die Luftdichte ab und damit auch die Lockzahl. Die aerodynamische Dämpfung ist generell proportional zur Lockzahl, also wird auch die Dämpfung erheblich reduziert und die Einschwingvorgänge dauern länger.
2. Das Differentialgleichungssystem lautet

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 \ddot{q}_1 + a_2 \ddot{q}_2 + a_3 \dot{q}_1 + a_4 q_2 + a_5 \\ 0 &= b_1 \ddot{q}_1 + b_2 \ddot{q}_2 + b_3 \dot{q}_1 + b_4 \end{aligned}$$

Da die zweite Gleichung keine Variable ohne Ableitung enthält, ist die stationäre Lösung $0 = b_4$, also entfällt dieser Koeffizient. Es werden nun folgende Zustandsgrößen definiert:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 \dot{x}_1 + a_2 \dot{x}_3 + a_3 x_2 + a_4 x_4 + a_5 \\ 0 &= \dot{x}_2 - x_1 \\ 0 &= b_1 \dot{x}_2 + b_2 \dot{x}_4 + b_3 x_2 \\ 0 &= \dot{x}_4 - x_3 \end{aligned}$$

Als Hilfsgleichungen dienen die Identitäten in Zeile 2 und 4. Stellt man damit das Differentialgleichungssystem in Matrixschreibweise auf, so stellt man fest, dass die Hauptdiagonale der Matrix vor dem \vec{x} -Term eine Null enthält, also singulär ist. Da die zweite Gleichung nur Ableitungen enthält, kann man sie ohne Verlust an Information noch einmal ableiten und erhält für diese

$$\begin{aligned} 0 &= b_1 \ddot{x}_2 + b_2 \ddot{x}_4 + b_3 \dot{x}_2 \\ &= b_1 \dot{x}_1 + b_2 \dot{x}_3 + b_3 \dot{x}_2 \end{aligned}$$

Damit folgt in Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{a_2}{a_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{b_1}{b_2} & \frac{b_3}{b_2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_3}{a_1} & 0 & \frac{a_4}{a_1} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{a_5}{a_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{A}\vec{x} + \vec{B}\vec{x} = \vec{u}$$

Die Hauptdiagonale der Matrix \mathbf{A} ist nun voll besetzt und regulär, lässt sich also invertieren, um das System zu lösen.

3. a) Im Vakuum: die Eigenfrequenz der Schlagbewegung im drehenden System ($I_\beta \ddot{\beta} + \omega_\beta^2 \beta = 0$) lautet dimensionslos $\overset{**}{\beta} + v_\beta^2 \beta = 0$ und mit dem Ansatz für harmonische Schwingungen $\beta = \bar{\beta} e^{s_R \psi}$ erhält man die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= s_R^2 + v_\beta^2 \\ \Rightarrow s_R &= \pm i v_\beta \\ \left(\frac{\omega_d}{\Omega}\right)_R &= v_\beta = \sqrt{1 + \frac{3e_\beta}{2(1-e_\beta)}} = 1,03 \end{aligned}$$

Es folgt die hochfrequente Eigenfrequenz im nicht drehenden System zu

$$\begin{aligned} s &= s_R + i n \\ \Rightarrow \omega_d / \Omega &= v_\beta + 1 = 2,03 \end{aligned}$$

und β_{1C} eilt β_{1S} um 90° voraus, während die niederfrequente Eigenfrequenz bei $\omega_d / \Omega = v_\beta - 1 = 0,03$ liegt und β_{1C} folgt β_{1S} um 90° nach.

- b) Mit Luft: nun beinhaltet die Lösung aerodynamische Dämpfung und es gibt eine Frequenzverschiebung. Die Eigenwerte im drehenden System lauten dann mit $\gamma = 8$

$$s_R = -\frac{\gamma}{16} \pm i \sqrt{v_\beta^2 - \left(\frac{\gamma}{16}\right)^2} = -0,5 \pm i 0,9$$

Das Dämpfungsverhältnis ist durch $-Re(s_R)/v_\beta = 0,485$ gegeben und hier liegt folglich eine große Dämpfung vor. Die Frequenz im drehenden System ist dann $(\omega_d / \Omega)_R = Im(s_R) = 0,9$ und damit kleiner als 1/rev. Die zugrunde liegende Differentialgleichung

$$\overset{**}{\beta} + \frac{\gamma}{8} \overset{*}{\beta} + v_\beta^2 \beta = 0$$

wird mit Hilfe der Fourier Koordinaten Transformation ins nicht drehende System übertragen, wobei ein 4-Blatt Rotor zugrunde gelegt wird.

$$\begin{aligned} \overset{**}{\beta}_0 + \frac{\gamma}{8} \overset{*}{\beta}_0 + v_\beta^2 \beta_0 &= 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overset{**}{\beta}_{1C} \\ \overset{**}{\beta}_{1S} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{8} & 2 \\ -2 & \frac{\gamma}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overset{*}{\beta}_{1C} \\ \overset{*}{\beta}_{1S} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} v_\beta^2 - 1 & \frac{\gamma}{8} \\ -\frac{\gamma}{8} & v_\beta^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{1C} \\ \beta_{1S} \end{Bmatrix} &= \vec{0} \\ \overset{**}{\beta}_2 + \frac{\gamma}{8} \overset{*}{\beta}_2 + v_\beta^2 \beta_2 &= 0 \end{aligned}$$

In der ersten und vierten Gleichung sind die Eigenwerte identisch mit denen des drehenden Systems, also $s = s_R$. In der zweiten und dritten Gleichung erhält man jedoch $s = s_R \pm i$.

Der hochfrequente Mode $s = s_R + i$: Er hat die gleiche Dämpfung wie der Mode im drehenden System, aber die Frequenz ist größer, also $\omega_d/\Omega = (\omega_d/\Omega)_R + 1 = 1,9$ und β_{1C} eilt β_{1S} um 90° voraus.

Der niederfrequente Mode $s = s_R - i$: Hier ist der Imaginärteil $Im(s_R) = 0,9 < 1$ und somit: β_{1C} eilt β_{1S} um 90° voraus (progressiver Mode). Die Frequenz ist $\omega_d/\Omega = 1 - Im(s_R) = 0,1$ und die Blattspitzenebene eiert in Drehrichtung des Rotors.

B.2.3 Methoden der Analyse: Floquet-Theorie, FEM in Zeit

1. Kurzfragen:

- Große Vibrationen im nicht drehenden System können von kleiner Blattzahl oder auch von ungewichteten Blättern bzw. schlechtem Spurlauf stammen. Letzteres stellt im drehenden System für das Blatt nur eine statische Belastung dar. Umgekehrt: im drehenden System liegen an der Blatteinspannung Kräfte mit allen n/rev Frequenzen vor, im nicht drehenden System jedoch nur die Blattzahlharmonischen $N_b n/\text{rev}$. Der Rotorkopf wirkt als Frequenzfilter für die Nebenharmonischen.
 - Die Finite Element Methode in Zeit ist gut für die Berechnung der stationären periodischen Systemantwort geeignet, da diese direkt ohne Konvergenzprobleme – wie sie bei numerischer Integration möglich sind – gewonnen wird. Für transiente Übergangsprozesse jedoch muss die Zeitintegrationsmethode gewählt werden.
 - Eine größere Steifigkeit behindert die Verformung und wird daher mit größeren Biegemomenten einhergehen. Diese führen zu größeren lokalen Spannungen und können die Lebensdauer verkürzen.
2. In Matrixform lautet das Gleichungssystem mit $S_n = \sin n\psi$, $n = 1, 2$

$$\begin{Bmatrix} x^* \\ y^* \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4S_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} \quad \text{entspricht} \quad \vec{\dot{y}} - A\vec{y} = \vec{G}$$

Für Stabilitätsuntersuchungen wird die rechte Seite \vec{G} zu Null gesetzt und man erhält unmittelbar

$$\begin{Bmatrix} x^* \\ y^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4xS_1 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{y} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{konst}_1 \\ -4xC_1 + \text{konst}_2 \end{Bmatrix}$$

Nun wird die Theorie der Transitionsmatrizen nach Floquet angewendet. Zunächst wird das erste Element von \vec{y} zum Zeitpunkt $\psi = 0$ zu Eins gesetzt, alle anderen Null; hier also

$$\vec{y}_1(0) = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \text{konst}_1 \\ \text{konst}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 4C_1 \end{Bmatrix}$$

Da es sich um ein periodisches System handelt, gilt $\vec{y}(\psi = 0) = \vec{y}(\psi = T = 2\pi)$, d. h. die Auslenkung am Ende der Periode ist identisch mit derjenigen am Anfang.

$$\vec{y}_1(2\pi) = \vec{y}_1(0) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

Im nächsten Schritt wird das zweite Element von \vec{y} zum Zeitpunkt $\psi = 0$ zu Eins gesetzt und alle anderen Null; nun also

$$\vec{y}_2(0) = \begin{cases} x \\ y \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{konst}_1 \\ \text{konst}_2 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Da es sich um ein periodisches System handelt, gilt $\vec{y}(\psi = 0) = \vec{y}(\psi = T = 2\pi)$, d. h. die Auslenkung am Ende der Periode ist identisch mit derjenigen am Anfang.

$$\vec{y}_2(2\pi) = \vec{y}_2(0) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Das Ergebnis der beiden Operationen, d. h. die beiden Vektoren $\vec{y}(2\pi)$, werden zu einer Transitionsmatrix \mathbf{Q} zusammengefasst

$$\mathbf{Q} = [\vec{y}_1(2\pi) \quad \vec{y}_2(2\pi)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Stabilität wird anhand der Eigenwerte von \mathbf{Q} untersucht, also

$$\begin{aligned} 0 &= \det |\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{I}| = \det \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \\ \lambda_{1,2} &= 1 \pm i0 = e^{P_k T} \quad k = 1, 2 \\ \Rightarrow P_k &= \frac{\ln(\lambda_k)}{T} = \alpha_k + i\omega_k = \frac{1}{T} \ln(1) + i \frac{1}{T} \arctan\left(\frac{0}{1}\right) \\ &= 0 + i \frac{k}{T} \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

mit $T = 2\pi$ als Periode der Schwingung. Da die zugrunde liegende Gleichung periodisch in $S_1 = \sin 1\psi$ ist, ist $k = 1$ zu nehmen und es folgt

$$P_k = P_1 = 0 \pm i \frac{1}{2\pi}$$

Das System ist ungedämpft (Realteil = Null) und hat daher eine neutrale Stabilität.

3. Die Differentialgleichung der Schlagbewegung lautet nach Einarbeiten des Steuerwinkels

$$\overset{**}{\beta} + \frac{\gamma}{8} \overset{*}{\beta} + v_\beta^2 \beta - \frac{\gamma}{8} \Theta_{nC} \cos n\psi - \frac{\gamma}{8} \Theta_{nS} \sin n\psi + \frac{\gamma}{6} \lambda = 0$$

Die Anwendung der Variationsrechnung in genereller Form (A = Intervallanfang, E = Intervallende) führt durch partielle Integration zu

$$\int_{\psi_A}^{\psi_E} \overset{**}{\beta} \delta \beta \, d\psi = \overset{*}{\beta} \delta \beta \Big|_{\psi_A}^{\psi_E} - \int_{\psi_A}^{\psi_E} \overset{*}{\beta} \delta \overset{*}{\beta} \, d\psi$$

Der erste Term auf der rechten Seite entfällt, da es sich um eine stationäre periodische Systemantwort handelt und es folgt

$$\int_{\psi_A}^{\psi_E} (-\overset{*}{\beta} \delta \overset{*}{\beta} + c \overset{*}{\beta} \delta \overset{*}{\beta} + k \overset{*}{\beta} \delta \overset{*}{\beta} - F \delta \overset{*}{\beta}) \, d\psi = 0$$

mit

$$c = \frac{\gamma}{8} \quad k = v_\beta^2 \quad F = \frac{\gamma}{8} (\Theta_{nC} \cos n\psi + \Theta_{nS} \sin n\psi) - \frac{\gamma}{6} \lambda$$

Die Zeitachse soll in $N = 4$ gleich breite Elemente zerlegt werden, also ist jedes Element $\Delta\psi = 2\pi/N = \pi/2$ breit. Dann sind der Anfangs- und Endazimut des i -ten Elementes mit $\psi_{A,i} = (i-1)\Delta\psi$ und $\psi_{E,i} = i\Delta\psi$ für $i = 1, 2, \dots, N$ gegeben. Außerdem sind

$$\psi_{E,i} - \psi_{A,i} = \Delta\psi \quad \psi_{E,i}^2 - \psi_{A,i}^2 = (2i-1)\Delta\psi^2 \quad \psi_{E,i}^3 - \psi_{A,i}^3 = (3i^2 - 3i + 1)\Delta\psi^3$$

Nun wird für die Schlagbewegung innerhalb eines Zeitelementes eine lineare Bewegung angesetzt

$$\beta(t) = \left(1 - \frac{\psi - \psi_{A,i}}{\Delta\psi}\right) \beta_{A,i} + \frac{\psi - \psi_{A,i}}{\Delta\psi} \beta_{E,i} \quad \overset{*}{\beta}(t) = \frac{\beta_{E,i} - \beta_{A,i}}{\Delta\psi}$$

worin am Anfang des i -ten Zeitelementes die Auslenkung $\beta(\psi_{A,i}) = \beta_{A,i}$ und am Ende des i -ten Zeitelementes die Auslenkung $\beta(\psi_{E,i}) = \beta_{E,i}$ vorliegt. Dann erhält man die Matrixgleichung für ein Zeitelement i

$$\begin{bmatrix} A_{11,i} & A_{12,i} \\ A_{21,i} & A_{22,i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{A,i} \\ \beta_{E,i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{A,i} \\ Q_{E,i} \end{Bmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A}_i \vec{\beta}_i = \vec{Q}_i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

worin die einzelnen Elemente folgendermaßen definiert sind:

$$\begin{aligned}
 A_{11,i} &= -\frac{1}{\Delta\psi} - \frac{c}{\Delta\psi} \int_{\psi_{A,i}}^{\psi_{E,i}} \left(1 - \frac{\psi - \psi_{A,i}}{\Delta\psi} \right) d\psi \\
 &\quad + \frac{k}{\Delta\psi} \int_{\psi_{A,i}}^{\psi_{E,i}} \left[\Delta\psi - 2\psi + 2\psi_{A,i} + \frac{1}{\Delta\psi}(\psi^2 - 2\psi\psi_{A,i} + \psi_{A,i}^2) \right] d\psi \\
 &= -\frac{1}{\Delta\psi} - \frac{c}{2} + \frac{k}{3}\Delta\psi \\
 A_{12,i} &= \frac{1}{\Delta\psi} + \frac{c}{\Delta\psi} \int_{\psi_{A,i}}^{\psi_{E,i}} \left(1 - \frac{\psi - \psi_{A,i}}{\Delta\psi} \right) d\psi \\
 &\quad + \frac{k}{\Delta\psi} \int_{\psi_{A,i}}^{\psi_{E,i}} \left[\psi - \psi_{A,i} - \frac{1}{\Delta\psi}(\psi^2 - 2\psi_{A,i}\psi + \psi_{A,i}^2) \right] d\psi \\
 &= \frac{1}{\Delta\psi} + \frac{c}{2} + \frac{k}{6}\Delta\psi \\
 A_{21,i} &= \frac{1}{\Delta\psi} - \frac{c}{\Delta\psi^2} \int_{\psi_{A,i}}^{\psi_{E,i}} (\psi - \psi_{A,i}) d\psi \\
 &\quad + \frac{k}{\Delta\psi} \int_{\psi_{A,i}}^{\psi_{E,i}} \left[\psi - \psi_{A,i} - \frac{1}{\Delta\psi}(\psi^2 - 2\psi_{A,i}\psi + \psi_{A,i}^2) \right] d\psi \\
 &= \frac{1}{\Delta\psi} - \frac{c}{2} + \frac{k}{6}\Delta\psi \\
 A_{22,i} &= -\frac{1}{\Delta\psi} + \frac{c}{\Delta\psi^2} \int_{\psi_{A,i}}^{\psi_{E,i}} (\psi - \psi_{A,i}) d\psi \\
 &\quad + \frac{k}{\Delta\psi^2} \int_{\psi_{A,i}}^{\psi_{E,i}} (\psi^2 - 2\psi\psi_{A,i} + \psi_{A,i}^2) d\psi \\
 &= -\frac{1}{\Delta\psi} - \frac{c}{2} + \frac{k}{3}\Delta\psi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{1,i} &= \frac{\gamma}{8} \int_{\psi_{A,i}}^{\psi_{E,i}} \left(\Theta_{nC} \cos n\psi + \Theta_{nS} \sin n\psi - \frac{4\lambda}{3} \right) \left(1 + \frac{\psi_{A,i}}{\Delta\psi} - \frac{\psi}{\Delta\psi} \right) d\psi \\
&= \frac{\gamma}{8n} \left[\Theta_{nC} \left(-\sin n\psi_{A,i} - \frac{\cos n\psi_{E,i} - \cos n\psi_{A,i}}{n\Delta\psi} \right) \right. \\
&\quad \left. + \Theta_{nS} \left(\cos n\psi_{A,i} - \frac{\sin n\psi_{E,i} - \sin n\psi_{A,i}}{n\Delta\psi} \right) \right] + \frac{\gamma}{12} \Delta\psi\lambda \\
Q_{2,i} &= \frac{\gamma}{8} \int_{\psi_{A,i}}^{\psi_{E,i}} \left(\Theta_{nC} \cos n\psi + \Theta_{nS} \sin n\psi - \frac{4\lambda}{3} \right) \frac{\psi - \psi_{A,i}}{\Delta\psi} d\psi \\
&= \frac{\gamma}{8n} \left[\Theta_{nC} \left(\sin n\psi_{E,i} + \frac{\cos n\psi_{E,i} - \cos n\psi_{A,i}}{n\Delta\psi} \right) \right. \\
&\quad \left. + \Theta_{nS} \left(-\cos n\psi_{E,i} + \frac{\sin n\psi_{E,i} - \sin n\psi_{A,i}}{n\Delta\psi} \right) \right] - \frac{\gamma}{12} \Delta\psi\lambda
\end{aligned}$$

Da die induzierte Geschwindigkeit als konstant angenommen wurde, spielt sie in der dynamischen Antwort keine Rolle und kann im Folgenden weggelassen werden. Dies ist natürlich nicht der Fall, wenn eine 1/rev Variation wie z. B. im Vorwärtsflug angenommen würde. Dann werden die vier Zeitelemente in ein Gesamtsystem integriert

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} A_{11,1} + A_{22,4} & A_{12,1} & 0 & A_{21,4} \\ A_{21,1} & A_{11,2} + A_{22,1} & A_{12,2} & 0 \\ 0 & A_{21,2} & A_{11,3} + A_{22,2} & A_{12,3} \\ A_{12,4} & 0 & A_{21,3} & A_{11,4} + A_{22,3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{Bmatrix} \\
&= \begin{Bmatrix} Q_{A,1} + Q_{E,4} \\ Q_{A,2} + Q_{E,1} \\ Q_{A,3} + Q_{E,2} \\ Q_{A,4} + Q_{E,3} \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

und der Zeitverlauf des Schlagwinkels lässt sich durch Inversion sofort berechnen

$$\vec{\beta} = \mathbf{A}^{-1} \vec{Q}$$

Das Ergebnis kann bei einfachen Fällen mit der exakten Lösung, die mit Hilfe der Harmonic Balance Methode gewonnen wird, verglichen werden. Mit $a = (\nu_\beta^2 - n^2)\gamma/8$ erhält man

$$\begin{aligned}
\beta_{nC} &= \frac{1}{a^2 + n^2} (a\Theta_{nC} - n\Theta_{nS}) \\
\beta_{nS} &= \frac{1}{a^2 + n^2} (n\Theta_{nC} + a\Theta_{nS})
\end{aligned}$$

B.3 Lösungen der Übungsaufgaben zu Kap. 4

B.3.1 Schwenkbewegung

1. Kurzfragen:

- Der Bereich einer Schwenkeigenfrequenz von $0,8 < \nu_\zeta < 1,4/\text{rev}$ wird in der Regel vermieden, da die Schwenkbewegung nur schwach gedämpft ist und daher eine Frequenznähe zur Rotordrehfrequenz bei $1/\text{rev}$ zu großen Amplituden führen kann.
- Ein sehr schwenksteifer Rotor hat eine Schwenkeigenfrequenz bei $\nu_\zeta > 1/\text{rev}$ und diese ist, wie jede Schwenkbewegung, relativ schwach gedämpft. Mit zunehmendem Steuerwinkel erhält man über die Blattwurzelsteifigkeit eine Kopplung aus der Schlagbewegung, die eine Komponente in der Drehebene hat und daher die Schwenkbewegung zunehmend beeinflusst: sie wird schwenkweicher und damit kommt die Schwenkeigenfrequenz näher an $1/\text{rev}$, während gleichzeitig die Schlagbewegung steifer wird. Schwenksteife Rotoren sind jedoch meist frei von Bodenresonanzproblemen.
- Ein $1/\text{rev}$ Signal kann von einem schlechten Spurlauf oder auch von ungewohnten Blättern herrühren. Daher muss zunächst der Spurlauf, danach die Unwucht beseitigt werden.
- Bei einem vierblättrigen gelenklosen oder mit Gelenksabstand gelenkig gelagerten Rotor erhält man im nicht drehenden System auch nur $4/\text{rev}$ Kräfte und Momente:

Nicht drehendes System	Drehendes System
$4/\text{rev}$ Vertikalkräfte	$4/\text{rev}$ Vertikalkräfte
$4/\text{rev}$ Nick- und Rollmoment	3 und $5/\text{rev}$ Vertikalkräfte*Gelenksabstand

Da die erzeugenden Kräfte aus den 3 , 4 und $5/\text{rev}$ Anteilen im drehenden System bestehen, kann man auch mit Steuerung in diesen Frequenzen die Vibrationen im nicht drehenden System reduzieren.

- Wenn alle Blätter gleich sind und der Spurlauf perfekt ist, können nur ganzzahlige Vielfache der Blattzahlharmonischen im nicht drehenden System beobachtet werden, alle anderen Anteile tilgen sich im Rotorkopf. Daher agiert der Rotor als Frequenzfilter für umso mehr Frequenzen, je mehr Rotorblätter beteiligt sind.
- Da die Steifigkeitsunterschiede sehr groß sein sollen, kann man das Zentrum der biegeweichen Stelle als effektives Schwenkgelenk auffassen, das eine radiale Position von $y_\zeta = l + l_1/2$ bzw. in dimensionsloser Form $e_\zeta = y_\zeta/R$ annimmt. Die Federsteifigkeit bestimmt sich aus der weichen Länge und der Biegesteifigkeit des Balkens zu $k_\zeta = EI_z/l_1$. Mit der Annahme konstanter Massenverteilung erhält man für ein gelenkig gelagertes Rotorblatt

$$\nu_\zeta^2 = \frac{k_\zeta}{I_\zeta \Omega^2} + e_\zeta \frac{RS_\zeta}{I_\zeta} = \left(\frac{\omega_{\zeta 0}}{\Omega} \right)^2 + \frac{3}{2} \frac{e_\zeta}{1 - e_\zeta} \quad \omega_{\zeta 0} = \frac{3EI_z}{l_1 R^3 m' (1 - e_\zeta)^3}$$

Darin sind die Steifigkeit und radiale Position wie oben genannt einzusetzen.

B.3.2 Blattanschluss am Rotorkopf, Torsion

1. Kurzfragen:

- Der Tennisschläger muss drehfrei gehalten werden, dann wird er seinen Neigungswinkel zu einer vom Spieler ausgeführten Drehbewegung aufgrund der Propellermomente verkleinern. Diese Rotation überträgt sich auf den Ball.
 - In der Hoffnung, dass die aerodynamischen Momente kleiner als das Propellermoment sind, ist als erstes der Wind abzuschalten. Gleichzeitig ist das Kollektiv aller anderen Blätter gegen Null zu reduzieren, damit ein Momentengleichgewicht erreicht wird. Nachdem der Wind weitgehend bei Null angekommen ist, kann die Drehzahl auf Null reduziert werden.
 - Eine Kopplung zwischen Schlägen und Torsion existiert immer über aerodynamische Kräfte.
 - Das Trägheitsmoment in der Torsionsbewegung ist sehr klein und in etwa so groß wie das aus einer geringen Ablage der Massenachse von der elastischen Achse resultierende Trägheitsmoment. Umgekehrt ist das Trägheitsmoment in der Schlagbewegung mehrere Größenordnungen größer als das aus einer Torsions-Schlagkopplung (ca. 10^3 mehr).
2. a) Rotorkopf flexibel und Blatt starr. Hier sind die Blattfedern $k_{\beta B}$, $k_{\zeta B}$ und der Blatteinstellwinkel Θ_0 ohne Bedeutung. Die Voreinstellung der Rotorkopffedern mit Θ_1 erzeugen bereits eine Kopplung zwischen Schlägen und Schwenken.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ \zeta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2\beta \\ 2\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ \zeta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ \zeta \end{Bmatrix} = \gamma \begin{Bmatrix} \bar{M}_\beta \\ \bar{M}_\zeta \end{Bmatrix}$$

Darin ist die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_I folgendermaßen gegeben:

$$\mathbf{K}_I = \begin{bmatrix} k_{\beta H} \cos^2 \Theta_1 + k_{\zeta H} \sin^2 \Theta_1 & (k_{\zeta H} - k_{\beta H}) \frac{\sin 2\Theta_1}{2} \\ (k_{\zeta H} - k_{\beta H}) \frac{\sin 2\Theta_1}{2} & k_{\zeta H} \cos^2 \Theta_1 + k_{\beta H} \sin^2 \Theta_1 \end{bmatrix}$$

- b) Rotorkopf starr, Blatt flexibel. Hier sind die Rotorkopffedern $k_{\beta H}$, $k_{\zeta H}$ und deren Einstellwinkel Θ_1 ohne Bedeutung. Es gilt die gleiche Differentialgleichung, jedoch mit einer anderen Steifigkeitsmatrix. Diese lautet nun

$$\mathbf{K}_{II} = \begin{bmatrix} k_{\beta B} \cos^2 \Theta_0 + k_{\zeta B} \sin^2 \Theta_0 & (k_{\zeta B} - k_{\beta B}) \frac{\sin 2\Theta_0}{2} \\ (k_{\zeta B} - k_{\beta B}) \frac{\sin 2\Theta_0}{2} & k_{\zeta B} \cos^2 \Theta_0 + k_{\beta B} \sin^2 \Theta_0 \end{bmatrix}$$

- c) Sowohl Rotorkopf als auch Blatt flexibel. Die Federn sind nun in Reihe geschaltet und es gilt für die effektive Federsteifigkeit:

$$\mathbf{K}_{\text{eff}} = [\mathbf{K}_I^{-1} + \mathbf{K}_{II}^{-1}]^{-1}$$

3. Es werden die Schlag- und Schwenkmomente bezüglich einer radialen Stelle y aufgestellt, die von einer weiter außen liegenden radialen Stelle ρ mit den dort vorherrschenden Kräften erzeugt werden. Zu den folgenden vier Gleichungen siehe Skript, Abschn. 4.6.2, Abb. 4.13, Gln. 4.67, 4.70, 4.72 und 4.73.

$$\begin{aligned} M_x(y) &= \int_y^R \left\{ [F'_z - m' \ddot{w}(\rho)] (\rho - y) - [m' \Omega^2 \rho - 2m' \Omega \dot{v}(\rho)] [w(\rho) - w(y)] \right\} d\rho \\ M_z(y) &= \int_y^R \left\{ [F'_x - m' \ddot{v}(\rho)] (\rho - y) - m' \Omega^2 \rho \left[v(\rho) \frac{y}{\rho} - v(y) \right] \right. \\ &\quad \left. + 2m' \Omega \dot{v}(\rho) [v(\rho) - v(y)] \right. \\ &\quad \left. - 2m' \Omega \left[\int_0^\rho [v'(\rho) \dot{v}'(\rho) + w'(\rho) \dot{w}'(\rho)] d\rho \right] (\rho - y) \right\} d\rho \end{aligned}$$

Darin sind Luftkräfte F'_z , Trägheitskräfte $m' \ddot{w}$, Zentrifugalkräfte $m' \Omega^2$ und Corioliskräfte $2m' \Omega \dot{v}$ enthalten. Gemäß Balkenbiegetheorie ist die zweite Ableitung der Momente die Lastverteilung, also $M''_x = (EI_x w'')''$ und $M''_z = (EI_z v'')''$.

$$\begin{aligned} F'_z &= (EI_x w'')'' + m' \ddot{w} + 2\Omega \left(w' \int_y^R m' \dot{v} d\rho \right)' - \Omega^2 \left(w' \int_y^R m' \rho d\rho \right)' \\ F'_x &= (EI_z v'')'' + m' \ddot{v} + 2\Omega \left(v' \int_y^R m' \dot{v} d\rho \right)' - \Omega^2 \left(v' \int_y^R m' \rho d\rho \right)' - \Omega^2 m' v \\ &\quad + 2\Omega m' \int_0^y (v' \ddot{v}' + w' \ddot{w}') d\rho \end{aligned}$$

Für einen starren Rotor mit Gelenken in beiden Achsen folgt für die vertikale Auslenkung und die in der Drehebene

$$\begin{aligned} w &= (y - y_\beta) \beta \quad \Rightarrow w' = \beta, \quad w'' = w''' = w'''' = 0 \\ \dot{w} &= \dot{\beta}, \quad \ddot{w} = (y - y_\beta) \ddot{\beta} \\ v &= (y - y_\xi) \xi \quad \Rightarrow v' = \xi, \quad v'' = v''' = v'''' = 0 \\ \left(v' \int_y^R \dot{v} d\rho \right)' &= \left\{ \xi \left[\frac{R^2 - y^2}{2} - y_\xi (R - y) \right] \dot{\xi} \right\}' = -(y - y_\xi) \xi \dot{\xi} \end{aligned}$$

Nimmt man weiter konstante Massenverteilung m' an, so folgt

$$F'_z = m'(y - y_\beta)\ddot{\beta} - 2\Omega\beta\dot{\zeta}m'(y - y_\zeta) + \Omega^2\beta m'y$$

wobei die einzelnen Terme dem 2., 3. und 4. Term der entsprechenden obigen Gleichung entstammen. Das Moment um das Schlaggelenk $\int_{y_\beta}^R (Dgl)(y - y_\beta) dy$ liefert letztlich

$$\overset{**}{\beta} + v_\beta^2\beta - 2\beta\overset{*}{\zeta} = \gamma \overline{M}_\beta$$

mit den dimensionslosen Größen

$$v_\beta^2 = \frac{y_\beta \int_{y_\beta}^R m'(y - y_\beta) dy}{I_\beta} + 1 \quad \gamma = \frac{\rho C_{l\alpha} c R^4}{I_\beta} \quad \overline{M}_\beta = \frac{\int_{y_\beta}^R F'_z(y - y_\beta) dy}{\rho C_{l\alpha} c R^4 \Omega^2}$$

Aus der Gleichung für die Schwenkverformung erhält man

$$F'_x = m'(y - y_\zeta)\ddot{\zeta} + \Omega^2\zeta m'y_\zeta + 2\Omega m'y\beta\dot{\beta}$$

wobei die einzelnen Terme dem 2., (4. + 5.) und 6. Term der entsprechenden obigen Gleichung entstammen, denn aus obiger Gleichung resultieren:

- 3. Term: $-2\Omega\zeta\dot{\zeta}m'(y - y_\zeta)$
- 4. Term: $+\Omega^2\zeta m'y$
- 5. Term: $-\Omega^2m'(y - y_\zeta)\zeta$
- 6. Term: $+2m'\Omega y(\zeta\dot{\zeta} + \beta\dot{\beta})$

Der erste Teil dieses letzten Terms wird oft vernachlässigt, da die Schwenkbewegung kleiner als die Schlagbewegung ausfällt. Das Moment um das Schwenkgelenk liefert

$$\overset{**}{\zeta} + v_\zeta^2\zeta + 2\beta\dot{\beta} = \gamma \overline{M}_\zeta$$

mit

$$v_\zeta^2 = \frac{y_\zeta \int_{y_\zeta}^R m'(y - y_\zeta) dy}{I_\beta} \quad \overline{M}_\zeta = \frac{\int_{y_\zeta}^R F'_x(y - y_\zeta) dy}{\rho C_{l\alpha} c R^4 \Omega^2}$$

Da die elastischen Blätter eine Steifigkeit mit sich bringen und daher bei stehendem Rotor bereits eine Schlag- und Schwenkeigenfrequenz größer als Null aufweisen, müssen auch entsprechende Federn an den Gelenken angebracht werden.

$$k_\beta(\beta - \beta_p) \quad k_\zeta\zeta \quad \Rightarrow \quad \omega_{\beta 0}^2 = \frac{k_\beta}{I_\beta} \quad \omega_{\zeta 0}^2 = \frac{k_\zeta}{I_\zeta}$$

Die Gelenksabstände und Federn müssen so abgestimmt werden, dass sowohl die Eigenfrequenz bei stehendem Rotor als auch bei Nenndrehzahl denen des elastischen Blattes entsprechen.

B.3.3 Schlag-Schwenk-Torsionsbewegung und Kopplungen

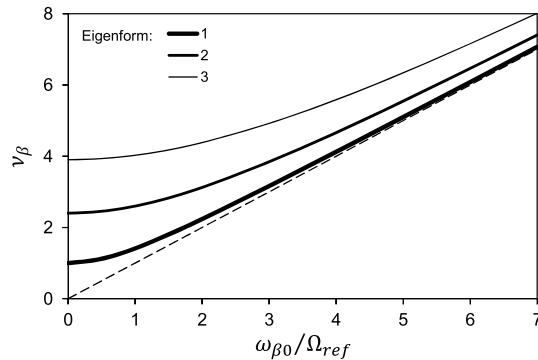
1. Kurzfragen:

- a) Propeller sind im Vergleich zu Hubschrauberrotoren sehr steif und werden in axialer Anströmung betrieben. Daher weisen Sie keine oder eine sehr geringe Schlagbewegung auf, also entstehen keine oder nur äußerst geringe Corioliskräfte.
- b) Wenn die Steuerstange von der Taumelscheibe nicht senkrecht, sondern schräg nach außen oder innen steht, erzeugt eine Schwenkbewegung einen Steuerwinkel.
- c) Trägheitskräfte der Schwenkbewegung erzeugen eine Kopplung zwischen der Schwenk- und Torsionsbewegung, wenn die Schwerpunktsachse eine Ablage von der elastischen Achse aufweist. Außerdem bewirken Corioliskräfte ein Kopplung, wenn zusätzlich der Schlagwinkel ungleich Null ist.
- d) Das Fandiagramm veranschaulicht die Änderung der Eigenfrequenzen aller Eigenformen mit der Rotordrehfrequenz. Bei Betriebsdrehfrequenz sollte in den unteren Eigenfrequenzen keine unmittelbare Nähe zu ganzzahligen Vielfachen der Rotor-drehfrequenz existieren.
- e) Eine positive Schlag-Torsionskopplung reduziert den Steuerwinkel beim Hoch-schlagen, daher ist solch eine Kopplung gleichzeitig eine Art Böenabminderungs-system. Außerdem verändert sie die Schlageigenfrequenz zu höheren Werten, da sie effektiv nur eine Versteifung der Schlagbewegung darstellt.

$$\nu_{\beta e}^2 = 1 + \frac{3}{2} e_\beta + \frac{\gamma}{8} k_{p\beta}$$

- f) Da die Steifigkeit in der Schlagrichtung generell nicht groß ist, um große Biegemome-nente zu vermeiden, können bei schwenkweichen Rotoren gleiche Steifigkeiten in Schlägen wie Schwenken vorkommen.
 - g) Die Corioliskräfte sind proportional zu $\beta \dot{\beta}$. Da β und damit auch $\dot{\beta}$ im Wesentlichen Anteile in 1/rev haben, entstehen durch dieses Produkt Terme wie $\sin^2 \psi$, $\cos^2 \psi$ und $\sin \psi \cos \psi$ und diese liefern $\sin 2\psi$, $\cos 2\psi$ als Ergebnis, mit einer Amplitude von $\beta_0 \beta_1$.
 - h) Da die radiale Steifigkeit der Rotorblätter um ein Vielfaches höher ist als die in Schlägen, Schwenken oder Torsion, kann sie für die grundlegende Betrachtung der Rotordynamik außer Acht gelassen werden.
 - i) Das Integral aller Torsionsmomente von Blattspitze bis zur Steuerstange stützt sich über die Steuerstange ab. Dies kann auch Kräfte aus der Schlag- und Schwenkbewegung beinhalten, wenn die Massenachse nicht auf der elastischen Achse liegt. Große Momente werden auch im transsonischen Bereich durch die Neutralpunkt-wanderung und im Bereich abgelöster Strömung erzeugt.
2. Mit den gegebenen Daten folgt die dimensionslose radiale Lage der Steuerstange (engl. pitch link) zu $e_{pl} = y_{pl}/R = 0,1$. Außerdem ist $f_{\beta 0} = 1 \text{ Hz} \Rightarrow \omega_{\beta 0} = 2\pi \text{ rad/s}$. Die Rotordrehfrequenz ist $\Omega = 2\pi \text{ RPM}/60 = 10\pi \text{ rad/s}$. Folglich $\omega_{\beta 0}/\Omega = 0,2$. Aus dem Graphen des Skriptes, der die Abhängigkeit der Schlageigenfrequenz im dre-

henden System von der des stehenden Blattes darstellt, folgt für diese nicht drehende Eigenfrequenz folgendes Verhältnis: $v_\beta = \omega_\beta / \Omega = 1,063$.



Damit kann man den effektiven Schlaggelenksabstand ermitteln:

$$v_\beta^2 = 1 + \frac{3e_\beta}{2(1-e_\beta)} + \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega}\right)^2 \Rightarrow e_\beta = \frac{2}{3} \left[v_\beta^2 - 1 - \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega}\right)^2 \right] = 0,06$$

und final erhält man den Schlag- Torsionskoppelfaktor zu

$$\delta_3 = \arctan \frac{e_{pl} - e_\beta}{e_{pl}} = 21,8^\circ$$

3. Gegebene Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} - 2\beta_0 \dot{\zeta} + v_\beta^2 \beta &= 0 \\ \ddot{\zeta} + 2\beta_0 \dot{\beta} + 2D_\zeta \frac{\omega_{\zeta 0}}{\Omega} \dot{\zeta} + v_\zeta^2 \zeta &= 0 \end{aligned}$$

- a) Im Vakuum entfallen die aerodynamischen Kräfte und es verbleiben die reinen Massenkräfte. An der Blattwurzel erhält man

$$\begin{aligned} S_z &= -m' R^2 \Omega^2 \int_0^1 r \ddot{\beta} dr = -\frac{I_b \Omega^2}{R} \frac{3}{2} \ddot{\beta} \\ S_x &= -m' R^2 \Omega^2 \int_0^1 \left(r \ddot{\zeta} - r \dot{\beta} \right) dr = \frac{I_b \Omega^2}{R} \frac{3}{2} \left(\zeta - \dot{\beta} \right) \\ S_r &= m' R^2 \Omega^2 \int_0^1 \left(r - 2r \dot{\zeta} \right) dr = \frac{I_b \Omega^2}{R} \frac{3}{2} \left(1 - 2 \dot{\zeta} \right) \end{aligned}$$

$$N_F = k_\beta \beta = I_b \Omega^2 \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} \right)^2 \beta$$

$$N_L = k_\zeta \zeta + D_\zeta \dot{\zeta}^* = I_b \Omega^2 \left[\left(\frac{\omega_{\zeta 0}}{\Omega} \right)^2 \zeta + D_\zeta \dot{\zeta}^* \right]$$

Alle diese Kräfte und Momente sind diejenigen eines Blattes im drehenden System und greifen an der Blattwurzel im Rotorkopfzentrum an.

- b) Im nicht drehenden System addieren sich die Kräfte und Momente der N beteiligten Blätter.

$$T = \sum_{m=1}^N S_z = -N \frac{I_b \Omega^2}{R} \frac{3}{2} \beta_0^{**}$$

$$H = \sum_{m=1}^N (S_r \cos \psi_m + S_x \sin \psi_m) = -N \frac{I_b \Omega^2}{R} \frac{3}{4} \zeta_{1S}^{**}$$

$$Y = \sum_{m=1}^N (S_r \sin \psi_m - S_x \cos \psi_m) = N \frac{I_b \Omega^2}{R} \frac{3}{4} \zeta_{1C}^{**}$$

$$M_x = \sum_{m=1}^N N_F \sin \psi_m = \frac{N}{2} I_b \Omega^2 \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} \right)^2 \beta_{1S}$$

$$M_y = \sum_{m=1}^N N_F \cos \psi_m = -\frac{N}{2} I_b \Omega^2 \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} \right)^2 \beta_{1C}$$

$$Q = \sum_{m=1}^N N_L = N I_b \Omega^2 \left(\frac{\omega_{\beta 0}}{\Omega} \right)^2 \zeta_0$$

B.4 Lösungen der Übungsaufgaben zu Kap. 5

B.4.1 Instationäre Aerodynamik

1. Kurzfragen:

- a) Vergleich der Grundgleichungen:

Strömungsmechanik		Strukturmechanik	
Euler/Navier-Stokes	\leftarrow	Impulserhaltungssatz	\rightarrow Newton's Gesetz
Bernoulli's Gleichung	\leftarrow	Energieerhaltungssatz	\rightarrow Hamilton's Prinzip
Ideales Gas	\leftarrow	Zustandsgleichungen	\rightarrow Kompatibilitätsbedingungen
Kontinuitätsgleichung	\leftarrow	Massenerhaltungssatz	\rightarrow Generell erfüllt

- b) Das Strömungsfeld eines Drehflüglers ist aufgrund des wiederkehrenden Nachlaufes hochgradig instationär und ungleichförmig. Außerdem ist für das Blatt die

ankommende Strömung mit einer periodisch sich ändernden Komponente versehen und die Blattbewegung als auch die Steuerung ist periodisch. Die Nachlauflächen sind Spiralfächen im Raum, die obendrein noch einem Aufrollvorgang unterliegen. Damit sind die Nachlaufintegrale analytisch nicht mehr lösbar.

- c) Da in quasi-stationärer Betrachtung die nicht zirkulatorischen Terme entfallen, fehlt ein wichtiger Teil der Torsionsdämpfung, da dieser Term proportional zu $\dot{\alpha}$ ist.
- d) Eine Schlagschwingung erzeugt ein über die Profiltiefe konstantes Geschwindigkeitsfeld. Eine Drehbewegung erzeugt jedoch eine von der Drehachse aus linear zunehmende Geschwindigkeitsverteilung. Folglich ist die Umströmung verschieden, auch wenn Frequenz und Amplitude der effektiven Anstellwinkel gleich sind.

$$\frac{L'}{\frac{\rho}{2} V^2 c} = \begin{cases} C_{l\alpha} \frac{\dot{h}}{V} C(k) + \frac{\pi}{2} \frac{\ddot{h}c}{V^2} & \text{Schlagbewegung} \\ C_{l\alpha} \left[\alpha + \frac{c\dot{\alpha}}{2V} (0,5 - a) \right] C(k) + \frac{\pi}{2} \left[\frac{c\ddot{\alpha}}{2V} - a \left(\frac{c}{2V} \right)^2 \ddot{\alpha} \right] & \text{Anstellwinkelbew.} \end{cases}$$

- e) $C(k)$ repräsentiert den Einfluss der in den Nachlauf gehenden Wirbeldichte einer harmonischen Bewegung des Profils auf den Auftrieb desselben. Da die Wirbeldichte vom zeitlichen Gradienten der Profilzirkulation gebildet wird, wirkt diese Abminderungsfunktion auf den zirkulatorischen Anteil des Auftriebes und Moments.
- f) Die Theorie dünner Profile wurde für kleine Störungen bei überall anliegender Strömung entwickelt. Strömungsablösungen sind jedoch große Störungen mit starker Turbulenz.
- g) Auf der rücklaufenden Seite erfährt das Blatt Gebiete mit rückwärtiger Anströmung, so dass die Luftkräfte nicht bei $c/4$, sondern bei $3c/4$ angreifen und somit einen Hebelarm von $c/2$ zur Blattachse aufweisen. Bei abgelöster Strömung greift die Luftkraft in der Profilmitte an und hat dann immer noch einen Hebelarm von $c/4$. Daher treten hier große Momente auf. Der Übergang von normalen Strömungsbedingungen zu rückwärtiger Anströmung ist in der Regel mit dynamischem Strömungsbereich verbunden, der auch große Kräfte und Momente erzeugt.
- h) Im Schwebeflug verbleibt der Nachlauf unter dem Rotor und bei geringem Schub ist der Einfluss der Nachlaufsichten von mehreren Umdrehungen noch von Bedeutung. Erst bei großen Schub wird der Nachlauf schnell weggeblasen, wie auch im Vorwärtsflug durch die Fluggeschwindigkeit.
- i) Es gibt keinen prinzipiellen Unterschied in den Berechnungen der induzierten Geschwindigkeiten, da sowohl die Strahltheorie als auch die Traglinientheorie auf denselben Prinzipien beruhen. In der Anwendung sind jedoch unterschiedliche DetAILIERungsgrade vorhanden.
- j) Im Schwebeflug sind die Nachlauflächen der vorangehenden Blätter nah unter den folgenden Blättern, daher haben sie einen wichtigen Einfluss bei ganzzahligen Vielfachen der Rotordrehfrequenz. Bei nicht ganzzahligen Vielfachen tilgen sich viele Anteile des Nachlaufes und der Einfluss ist geringer.

- k) Im Vorwärtsflug ist die Anströmgeschwindigkeit $V_T = f(r, \psi)$. Außerdem ist die reduzierte Frequenz ebenfalls $k = f(r, \psi)$. Daher ist es schwierig, die instationäre Aerodynamik einzuarbeiten.
- l) Miller's Annahme ist, dass der entferntere Teil des Nachlaufes vernachlässigbar ist. Der Nahbereich des Nachlaufes erzeugt im Wesentlichen eine Amplitudenabminderung der Luftkräfte, wobei die Phasenverschiebung ebenfalls vernachlässigt wird. Daher ist die Millersche Näherung zur Theodorsenfunktion eine stationäre Näherung.
- m) Das dynamische Durchflussmodell koppelt bei niedrigen Frequenzen den induzierten Durchfluss an den Schub und an die Rotormomente, so dass die vertikale Komponente der Anströmgeschwindigkeit V_P eine zusätzliche Dynamik erhält. Bei niedrigen Frequenzen ist das Aktuatorscheibenprinzip für den Rotor insgesamt näherungsweise ansetzbar. Die Rotorkräfte basieren auch auf empirischen Näherungen für die instationären Luftkräfte für kleine Frequenzen.
- n) Während der Transitionsphase $\mu \approx 0,1$ ist der Rotornachlauf in der Nähe oder in der Rotorebene selbst und hat daher einen wichtigen Einfluss auf die Luftkräfte. Dies führt zu großen Vibrationen, die gerne vermieden werden.
2. Berechnung des linearisierten Momentes eines Ausblaseprofils

$$\begin{aligned}
 M'_{a_{0,5}} &= \frac{\rho}{2} V^2 c^2 C_{m_{0,5}}(\alpha, C_\mu, M) \\
 C_\mu &= \frac{\dot{m}_j V_j}{\frac{\rho}{2} V^2 c} \Rightarrow \delta C_\mu = \frac{\partial C_\mu}{\partial V} \delta V = -2 \frac{C_\mu}{V} \delta V \\
 \alpha &= \Theta - \frac{V_P}{V_T} \Rightarrow \delta \alpha = \delta \Theta - \frac{\delta V_P}{V_T} + \frac{V_P}{V_T^2} \delta V_T \\
 V &= \sqrt{V_P^2 + V_T^2} \Rightarrow \delta V = \frac{V_P}{V} \delta V_P + \frac{V_T}{V} \delta V_T \\
 M &= M_{\text{tip}} \frac{V}{\Omega R} \Rightarrow \delta M = M_{\text{tip}} \frac{\delta V}{\Omega R} \\
 \Rightarrow \quad \delta C_{m_{0,5}} &= C_{m\alpha} \delta \alpha + C_{m\mu} \delta C_\mu + C_{mM} \delta M
 \end{aligned}$$

Das aerodynamische Moment besteht aus einem zirkulatorischen Anteil

$$\begin{aligned}
 \delta M'_{a_{0,5}}^c &= \rho V c^2 C_{m_{0,5}} \delta V + \frac{\rho}{2} V^2 c^2 \delta C_{m_{0,5}} \\
 \frac{\delta M'_{a_{0,5}}^c}{\frac{\rho}{2} c^2} &= C_{m_{0,5}} 2(V_P \delta V_P + V_T \delta V_T) + C_{m\alpha} (V_P^2 + V_T^2) \left(\delta \Theta - \frac{\delta V_P}{V_T} + \frac{V_P}{V_T^2} \delta V_T \right) \\
 &\quad + C_{m\mu} (-2C_\mu)(V_P \delta V_P + V_T \delta V_T) \\
 &\quad + C_{mM} \frac{M_{\text{tip}}}{\Omega R} \sqrt{V_P^2 + V_T^2} (V_P \delta V_P + V_T \delta V_T)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta V_T \left\{ 2V_T C_{m_{0,5}} + V_P \left[1 + \left(\frac{V_P}{V_T} \right)^2 \right] C_{m\alpha} - 2V_T C_\mu C_{m\mu} \right. \\
&\quad \left. + \frac{V_T}{\Omega R} M_{\text{tip}} \sqrt{V_P^2 + V_T^2} C_{mM} \right\} \\
&+ \delta V_P \left\{ 2V_P C_{m_{0,5}} - V_T \left[1 + \left(\frac{V_P}{V_T} \right)^2 \right] C_{m\alpha} - 2V_P C_\mu C_{m\mu} \right. \\
&\quad \left. + \frac{V_P}{\Omega R} M_{\text{tip}} \sqrt{V_P^2 + V_T^2} C_{mM} \right\} \\
&+ \delta \Theta (V_P^2 + V_T^2) C_{m\alpha}
\end{aligned}$$

und einem nicht zirkulatorischen Anteil. Hier wird $x_a = 0$ der Einfachheit halber für die Lage der Drehachse gesetzt.

$$\begin{aligned}
M_{a_{0,5}}'^{nc} &= \pi \rho \left(\frac{c}{2} \right)^2 \left(-V \frac{c}{4} \dot{\alpha} - \frac{c^2}{32} \ddot{\alpha} \right) = -\frac{\pi \rho c^3}{16} \left(V \dot{\alpha} + \frac{c}{8} \ddot{\alpha} \right) \\
\dot{\alpha} &= \dot{\Theta} - \frac{\dot{V}_P}{V_T} + \frac{V_P}{V_T^2} \dot{V}_T \\
\ddot{\alpha} &= \ddot{\Theta} - \frac{\ddot{V}_P}{V_T} - \frac{\dot{V}_P \dot{V}_T}{V_T^2} + \frac{V_P}{V_T^2} \ddot{V}_T + \dot{V}_T \left(\frac{\dot{V}_P}{V_T^2} - 2 \frac{V_P}{V_T^3} \dot{V}_T \right) \\
\frac{M_{a_{0,5}}'^{nc}}{\frac{\rho}{2} c^2} &= -\frac{\pi c}{8} \left[V \left(\dot{\Theta} - \frac{\dot{V}_P}{V_T} + \frac{V_P}{V_T^2} \dot{V}_T \right) + \frac{c}{8} \left(\ddot{\Theta} - \frac{\ddot{V}_P}{V_T} + \frac{V_P}{V_T^2} \ddot{V}_T - 2 \frac{V_P}{V_T^3} \dot{V}_T^2 \right) \right]
\end{aligned}$$

B.4.2 Bewegungsgleichungen mit instationärer Aerodynamik

1. Grundgleichung der Schlagbewegung:

$$\beta^{**} + v_\beta^2 \beta - \frac{3}{2} \frac{x_I}{R} \left(\Theta^{**} + \Theta \right) = \gamma \left(\bar{M}_\beta^c + \bar{M}_\beta^{nc} \right)$$

Mit den gegebenen Daten und $\Theta = \Theta_4 \cos(4\psi - \psi_4)$ folgt

$$\begin{aligned}
v_\beta^2 &= 1 + \frac{3e_\beta}{2(1-e_\beta)} = 1,0957 \\
\Theta &= \frac{\pi}{180} \cos 4\psi \\
\dot{\Theta} &= -4 \frac{\pi}{180} \sin 4\psi \\
\Theta^{**} &= -16 \frac{\pi}{180} \cos 4\psi = -16\Theta
\end{aligned}$$

Die linearisierten Gleichungen erhält man mit dem Ansatz für die Störgrößen, welche die dynamischen Änderungen um einen Trimmzustand herum beinhalten (die 4/rev Steuerung und die zugehörige Schlagbewegung gehören nicht zum Trimm, sind also Störgrößen, während der induzierte Durchfluss global als konstant angenommen wird und die Störgrößen sind in der instationären Aerodynamik über die Theodorsen-Funktion berücksichtigt):

$$\begin{aligned} V_T &= r \quad \delta V_T = 0 \quad V_P = \lambda \quad \delta V_P = r \overset{*}{\beta} - \frac{c}{R} \left(\frac{1}{4} - \frac{x_a}{c} \right) \overset{*}{\Theta} = r \overset{*}{\beta} - \frac{1}{4} \frac{c}{R} \overset{*}{\Theta} \\ \delta \overset{*}{V}_P &= r \overset{**}{\beta} - \frac{1}{4} \frac{c}{R} \overset{**}{\Theta} \quad \delta \overset{*}{\Theta} = \overset{*}{\Theta} \end{aligned}$$

Damit folgt für das Luftkraftmoment aus zirkulatorischen Kräften

$$\begin{aligned} \overline{M}_\beta^c &= \frac{C(k)}{2} \int_0^1 r [\delta V_T (2V_T \overset{*}{\Theta} - V_P) + \delta V_P (-V_T) + \delta \overset{*}{\Theta} V_T^2] dr \\ &= \frac{C(k)}{2} \int_0^1 \left[-r^3 \overset{*}{\beta} + \frac{r^2}{4} \frac{c}{R} \overset{*}{\Theta} + r^3 \overset{*}{\Theta} \right] dr \\ &= \frac{C(k)}{8} \left(\overset{*}{\Theta} - \overset{*}{\beta} + \frac{\overset{*}{\Theta}}{60} \right) \end{aligned}$$

und für das aus nicht zirkulatorischen Anteilen:

$$\begin{aligned} \overline{M}_\beta^{nc} &= \frac{1}{8} \frac{c}{R} \int_0^1 r (V_T \overset{*}{\Theta} - V_P)^* dr \\ &= \frac{1}{8} \frac{c}{R} \int_0^1 \left(r^2 \overset{*}{\Theta} - r^2 \overset{**}{\beta} + \frac{r}{4} \frac{c}{R} \overset{**}{\Theta} \right) dr \\ &= \frac{\overset{*}{\Theta} - \overset{**}{\beta}}{480} + \frac{\overset{**}{\Theta}}{25.600} = \frac{\overset{*}{\Theta} - \overset{**}{\beta}}{480} - \frac{\overset{*}{\Theta}}{1600} \end{aligned}$$

Man beachte, dass hierin wie zuvor aufgeführt $\overset{**}{\Theta} = -16\overset{*}{\Theta}$ die Nickbeschleunigung darstellt. Die reduzierte Frequenz an der repräsentativen Stelle $r = 0,75$ und der daraus zu bestimmende Wert der Theodorsenfunktion folgen mit der Näherung nach Miller zu

$$k_{0,75} = \frac{\omega c}{2V_{0,75}} = \frac{8c}{3R} = 0,1333 \quad \Rightarrow \quad C(k_{0,75}) \approx \frac{1}{1 + k\pi/2} = 0,827$$

Nun werden alle Ergebnisse in die Differentialgleichung eingesetzt und man erhält mit der Massenachse bei $x_I/c = 1/4 \rightarrow x_I/R = 1/80$:

$$\begin{aligned} \overset{**}{\beta} \left(1 + \frac{1}{96} \right) + \frac{5}{8} C(k) \overset{*}{\beta} + v_\beta^2 \beta &= \frac{\overset{*}{\Theta}}{96} (C(k) + 1) + \theta \left[\frac{5}{8} C(k) - \frac{1}{320} + \frac{3}{2} \frac{x_I}{R} (-15) \right] \\ \overset{**}{\beta} + \frac{60}{97} C(k) \overset{*}{\beta} + \frac{96}{97} v_\beta^2 \beta &= \overset{*}{\Theta} \frac{1 + C(k)}{97} + \Theta \left(\frac{60}{97} C(k) - \frac{3}{970} - \frac{2160}{97} \frac{x_I}{R} \right) \\ \overset{**}{\beta} + 0,512 \overset{*}{\beta} + 1,0844 \beta &= -0,001315 \sin 4\psi + 0,004016 \cos 4\psi \end{aligned}$$

Nun kann der Ansatz gemacht werden, dass die Schlagbewegung ebenfalls mit 4/rev auf den Steuereingang reagieren wird, also

$$\beta = \beta_{4C} \cos 4\psi + \beta_{4S} \sin 4\psi$$

Die erste und zweite Ableitung nach der Zeit sind trivial zu berechnen, einzusetzen und man erhält zwei Bestimmungsgleichungen für die Schlagkoeffizienten

$$\begin{aligned} \cos 4\psi: \quad -14,9156 \beta_{4C} + 2,048 \beta_{4S} &= 0,004016 \\ \sin 4\psi: \quad -14,9156 \beta_{4S} - 2,048 \beta_{4C} &= -0,001315 \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$\beta_{4C} = 0,0002897 \text{ rad} = 0,0166^\circ \quad \beta_{4S} = 0,0000484 \text{ rad} = 0,0028^\circ$$

Da die Erregerfrequenz weit oberhalb der Schlageigenfrequenz liegt, ist die resultierende Schlagamplitude auf 1° Steuerwinkel bei 4/rev hier sehr klein, was auch z. T. durch die geringere aerodynamische Wirksamkeit bei dieser hohen reduzierten Frequenz begründet ist ($C(k) = 0,827$). Allerdings dürften bei dieser Frequenz die 2. und 3. Schlageigenform mit größeren Amplituden reagieren, da deren Eigenfrequenzen (ca. 2,7/rev für die 2. Form und ca. 5/rev für die 3. Form) viel näher an der Steuerfrequenz von 4/rev liegen als die der 1. Eigenform, die hier die Starrblattbewegung darstellt, deren Eigenfrequenz mit knapp 1,1/rev berechnet wurde. Außerdem ist zu erwarten, dass nicht weit von dieser Steuerfrequenz entfernt die Eigenfrequenz der 1. Torsion liegen wird (Bsp. Bo105: ca. 3,6/rev) und daher in die Rechnung mit einfließen sollte, was die Lösung natürlich etwas verkomplizieren wird.

2. Im Schwebeflug ist der Fortschrittsgrad $\mu = 0$ und ein zentrales Schlaggelenk bedeutet $e_\beta = 0$, folglich $v_\beta^2 = 1$. Weiter wird angenommen, dass die elastische Achse, die aerodynamische Achse und die Massenachse alle bei $c/4$ liegen. Folglich ist $x_I/c = 0$ und die Ablage der Drehachse von der Profilmitte $a = -0,5$. Die Vertikalböe wird dimensionslos mit $\lambda_g = V_g/(\Omega R)$ bezeichnet. Die linearisierte Bewegungsgleichung

für die Schlagbewegung und die Differentialgleichung für den dynamischen induzierten Durchfluss lauten:

$$\begin{aligned} \overset{**}{\beta} + \beta &= \gamma \Delta \overline{M}_\beta \\ \tau \overset{*}{\Delta \lambda} + \Delta \lambda &= \kappa^2 \frac{\Delta C_T}{4\lambda_0} \Rightarrow \overset{*}{\Delta \lambda} + \frac{1}{\tau} \Delta \lambda = \kappa^2 \frac{\Delta C_T}{4\tau \lambda_0} \end{aligned}$$

Darin sind der mittlere induzierte Durchfluss mit $\lambda_0 = \kappa \sqrt{C_T/2}$, die dimensionslose Zeitkonstante $\tau = T_\lambda \Omega \approx 0,85/(4\lambda_0)$ und T_λ [s] die dimensionsbehaftete Zeitkonstante des dynamische induzierten Durchflussmodells. Das generalisierte Luftkraftmoment lautet

$$\Delta \overline{M}_\beta = \frac{1}{2} \int_0^1 r \left[\delta \overline{V}_T (2\overline{V}_T \Theta - \overline{V}_P) + \delta \overline{V}_P (-\overline{V}_T) + \delta \Theta \overline{V}_T^2 \right] dr$$

Die Störgrößen darin sind

$$\overline{V}_T = r \quad \overline{V}_P = \lambda \quad \delta \overline{V}_T = 0 \quad \delta \overline{V}_P = r \overset{*}{\beta} + \frac{r}{\overline{z}_H} + \Delta \lambda - \lambda_g \quad \delta \Theta = -k_{p\beta} \beta$$

Der Term $\overset{*}{\overline{z}_H} = \dot{z}_H/(\Omega R)$ stammt von einer vertikalen Hubschrauberbewegung, $\Delta \lambda$ von Änderungen des Schubbeiwertes und λ_g von der Vertikalböe. Eingesetzt in das aerodynamische Moment folgt

$$\begin{aligned} \Delta \overline{M}_\beta &= \frac{1}{2} \int_0^1 r \left[-r^2 \overset{*}{\beta} - r \left(\overset{*}{\overline{z}_H} + \Delta \lambda - \lambda_g \right) - r^2 k_{p\beta} \beta \right] dr \\ &= -\frac{1}{8} \left(\overset{*}{\beta} + k_{p\beta} \beta \right) - \frac{1}{6} \left(\overset{*}{\overline{z}_H} + \Delta \lambda - \lambda_g \right) \\ \frac{\gamma}{6} \lambda_g &= \overset{**}{\beta} + \frac{\gamma}{8} \overset{*}{\beta} + \left(1 + \frac{\gamma}{8} k_{p\beta} \right) \beta + \frac{\gamma}{6} \overset{*}{\overline{z}_H} + \frac{\gamma}{6} \Delta \lambda \end{aligned}$$

Nun wird die Änderung des Schubbeiwertes bestimmt:

$$\begin{aligned} \Delta C_T &= \frac{\Delta T}{\rho A (\Omega R)^2} \\ &= \frac{N_b \frac{\rho}{2} (\Omega R)^2 c R C_{l\alpha}}{\rho A (\Omega R)^2} \int_0^1 \left[\delta \overline{V}_T (2\overline{V}_T \Theta - \overline{V}_P) + \delta \overline{V}_P (-\overline{V}_T) + \delta \Theta \overline{V}_T^2 \right] dr \\ &= \frac{\sigma C_{l\alpha}}{2} \int_0^1 \left[-r^2 \overset{*}{\beta} - r \left(\overset{*}{\overline{z}_H} + \Delta \lambda - \lambda_g \right) - r^2 k_{p\beta} \beta \right] dr \\ &= -\sigma C_{l\alpha} \left[\frac{1}{6} \left(\overset{*}{\beta} + k_{p\beta} \beta \right) + \frac{1}{4} \left(\overset{*}{\overline{z}_H} + \Delta \lambda - \lambda_g \right) \right] \end{aligned}$$

Schließlich erhält man für die Differentialgleichung des induzierten Durchflusses:

$$\Delta \dot{\lambda} + \left(\frac{1}{\tau} + a_1 \right) \Delta \lambda + \frac{2}{3} a_1 \dot{\beta} + k_{p\beta} \frac{2}{3} a_1 \beta + a_1 \ddot{z}_H = a_1 \lambda_g \quad \text{mit } a_1 = \kappa^2 \frac{\sigma C_{l\alpha}}{16\tau \lambda_0}$$

Für den gesamten Hubschrauber der Masse m gilt Newton's Gesetz.

$$\begin{aligned} \Delta F_z &= m \Delta \ddot{z}_H = \rho A (\Omega R)^2 \Delta C_T \\ \Rightarrow \Delta \ddot{z}_H &= \frac{\Delta F_z}{m R \Omega^2} = -\frac{\rho \pi R^3}{m} \sigma C_{l\alpha} \left[\frac{1}{6} \left(\dot{\beta} + k_{p\beta} \beta \right) + \frac{1}{4} \left(\ddot{z}_H + \Delta \lambda - \lambda_g \right) \right] \end{aligned}$$

Damit folgt die dritte Differentialgleichung für die Hubschrauberbewegung:

$$\Delta \ddot{z}_H + a_2 \ddot{z}_H + \frac{2}{3} a_2 \dot{\beta} + k_{p\beta} \frac{2}{3} a_2 \beta + a_2 \Delta \lambda = a_2 \lambda_g \quad \text{mit } a_2 = \frac{\rho \pi R^3}{4m} \sigma C_{l\alpha}$$

Man hat insgesamt vier Zustandsgrößen: $\dot{\beta}$, β , $\Delta \lambda$, \ddot{z}_H , jedoch nur drei Differentialgleichungen. Um ein System von vier Gleichungen – also quadratische Matrizen – zu erhalten, führt man die Äquivalenz $\dot{\beta} = \ddot{\beta}$ ein. In Matrixschreibweise erhält man dann

$$\begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ \ddot{\beta} \\ \Delta \lambda \\ \ddot{z}_H \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{8} & -(1 + \frac{\gamma}{8} k_{p\beta}) & -\frac{\gamma}{6} & -\frac{\gamma}{6} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} a_1 & -\frac{2}{3} a_1 k_{p\beta} & -\left(\frac{1}{\tau} + a_1\right) & -a_1 \\ -\frac{2}{3} a_2 & -\frac{2}{3} a_2 k_{p\beta} & -a_2 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ \beta \\ \Delta \lambda \\ \ddot{z}_H \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\gamma}{6} \\ 0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

B.5 Lösungen der Übungsaufgaben zu Kap. 6

B.5.1 Schlag-Schwenk-Flattern

1. Kurzfragen:

- Flattern ist eine selbsterregte Instabilität nach einer kleinen Anfangsstörung. Die Resonanz ist ein dynamisches Antwortproblem auf eine periodische Anregung.
- Die Ursache von Schlag-Schwenk-Flattern sind aerodynamische Kräfte und Corioliskräfte, die eine Kopplung in der Dämpfungsmaatrix erzeugen. Da beide Kräfte von Natur her nichtlinear sind, ist auch das Schlag-Schwenk-Flattern ein nichtlineares Phänomen. Ohne Corioliskräfte gibt es kein solches Flattern.
- Die Koppelerme der Dämpfungsmaatrix beinhalten den Einstellwinkel über Ausdrücke wie $\gamma\Theta/4$ und $\gamma\Theta/8$. Bei zentralem Schlaggelenk und ohne weitere Kopplungen ist $\beta_0 \approx \gamma(\Theta/8 - \lambda/6)$. Damit folgen die Koppelerme der Dämpfungsmaatrix zu $c_{12} = \gamma\lambda/6$ und $c_{21} = \gamma\Theta/8$. Mit wachsendem Schub werden beide Terme größer und damit auch die Kopplung der Schlag- und Schwenkbewegung.
- Eine Δ_3 -Kopplung drückt sich durch $k_{p\beta}$ aus und eine Δ_4 -Kopplung durch $k_{p\xi}$. Beide Terme beeinflussen die Steifigkeitsmaatrix und damit die Eigenfrequenzen. $k_{p\beta}$ verändert hauptsächlich die Schlageigenfrequenz des rotierenden Blattes und

der Einfluss auf das Schlag-Schwenk-Flattern ist gering, da der Koppelterm $k_{21} = \gamma\lambda k_{p\beta}/6$ lautet. Umgekehrt hat der Δ_4 -Effekt einen wesentlich stärkeren Einfluss, da er in dem Steifigkeitsterm $k_{12} = \gamma k_{p\zeta}/8$ auftaucht, also ohne λ als Multiplikator, welches ja wesentlich kleiner als 1 ist.

- e) Gelenklose Rotoren haben meist keine Schwenkdämpfer und daher ist die Systemdämpfung kleiner als bei gelenkigen Rotoren. Gleichzeitig sind die Eigenfrequenzen der Schlag- und Schwenkbewegung größer als bei gelenkig gelagerten Rotoren, so dass gelenklose Rotoren anfälliger für Schlag-Schwenk-Flattern sind.
 - f)
 - i. gelenkiger Rotor: ein sehr kleiner Gelenksabstand entkoppelt die Schlag- und Schwenkbewegung nahezu. Ein idealer Vorkonus reduziert die Kopplung ebenfalls, allerdings hat diese eine destabilisierende Wirkung bei Schüben, die von diesem Konus abweichen.
 - ii. gelenklose Rotoren: bei gleicher Wurzelsteifigkeit in Schlagen und Schwenken erhält man gleiche Eigenfrequenzen bei stehendem Rotor, was eine entkoppelnde Wirkung in den Differentialgleichungen hat. Wenn ein Schwenkdämpfer installiert werden kann, ist dies immer von Vorteil. Eine Schwenk-Torsionskopplung ist ebenfalls von Vorteil zur Stabilisierung der Flattergleichungen
2. Die Eigenfrequenzen des nicht rotierenden Rotorblattes sind

$$\omega_{\beta 0} = 2\pi f_{\beta 0} = 5\pi \text{ rad/s} \quad \omega_{\zeta 0} = 2\pi f_{\zeta 0} = 10\pi \text{ rad/s}$$

Die Drehfrequenz des Rotors ist

$$\Omega = 2\pi \text{ RPM}/60 = 10\pi \text{ rad/s}$$

Der Wert von $C_T/\sigma = 0,25$ ist extrem hoch, bei 0,12 fängt in der Regel Strömungsablösung an. Da keine anderen Werte gegeben sind, sind die Koppelterme Null: $k_{p\beta} = k_{p\zeta} = 0$. Weiter werden $D_\zeta = \beta_P = 0$ gesetzt und $C_{l\alpha} = 6$, $\kappa = 1,15$ und $C_{d0} = 0,01$ angenommen. Aus dem Diagramm der Abhängigkeit der Eigenfrequenz im drehenden System von der des nicht drehenden Blattes folgen

$$v_\beta(\omega_{\beta 0}/\Omega) = 1,19 \Rightarrow v_\beta^2 = 1,416 \quad \text{und} \quad v_\zeta(\omega_{\zeta 0}/\Omega) = 1,09 \Rightarrow v_\zeta^2 = 1,188$$

Der Graph der Stabilitätsgrenzen aus Abb. 6.3 hat für diese Kombination eine Grenze von $C_T/\sigma \approx 0,13$. Daher wird der Rotor bei dem gegebenen Wert von $C_T/\sigma = 0,25$ instabil sein. Die Berechnung der Stabilität erfolgt anhand der Nullstellen des Polynoms der charakteristischen Gleichung. Dazu müssen zunächst der induzierte Durchfluss und der Steuerwinkel bekannt sein. Aus beiden folgt der Schlagkonuswinkel.

$$\begin{aligned} \lambda &= \kappa \sqrt{\frac{C_T}{2}} = \kappa \sqrt{\frac{C_T \sigma}{\sigma 2}} = 0,091 \\ \Theta &= \frac{6C_T}{\sigma C_{l\alpha}} + \frac{3}{2}\lambda = 0,386 \text{ rad} \approx 22^\circ \\ \beta_0 &= \frac{\gamma}{v_\beta^2} \left(\frac{\Theta}{8} - \frac{\lambda}{6} \right) = 0,187 \text{ rad} \approx 11^\circ \end{aligned}$$

Damit folgen die Koeffizienten des Polynoms zu

$$A = 1$$

$$B = \frac{\gamma}{8} \left(1 + \frac{2C_{d0}}{C_{l\alpha}} + \frac{4}{3}\lambda\Theta \right) = 1,05$$

$$C = \left(\frac{\gamma}{8} \right)^2 \left(\frac{2C_{d0}}{C_{l\alpha}} + \frac{4}{3}\lambda\Theta \right) + v_\beta^2 + v_\zeta^2$$

$$+ \left[2\beta_0 - \frac{\gamma}{4}(\Theta - 2\lambda) \right] \left[2\beta_0 - \frac{\gamma}{8} \left(\theta + \frac{8}{3}\lambda \right) \right] = 2,663$$

$$D = \frac{\gamma}{8} \left[v_\zeta^2 + v_\beta^2 \left(\frac{2C_{d0}}{C_{l\alpha}} + \frac{4}{3}\lambda\Theta \right) \right] = 1,259$$

$$E = v_\beta^2 v_\zeta^2 = 1,682$$

und es folgt das Stabilitätskriterium zu

$$R = AD^2 - CDB + EB^2 = -0,081$$

welches negativ ist und damit Instabilität anzeigt. Die numerische Berechnung bei Variation des spezifischen Schubbeiwertes wird die Stabilitätsgrenze bei $C_T/\sigma = 0,13$ ermitteln.

3. Aus der Berechnung der lokalen Kräfte

$$F'_z = \frac{\rho}{2}c(C_l V_T V - C_d V_P V)$$

$$F'_x = \frac{\rho}{2}c(C_l V_P V + C_d V_T V)$$

a) folgen die linearisierten Kräfte zu

$$\frac{\delta F'_z}{\frac{\rho}{2}c} = \delta C_l V_T V + C_l \delta V_T V + C_l V_T \delta V - \delta C_d V_P V - C_d \delta V_P V - C_d V_P \delta V$$

$$\frac{\delta F'_x}{\frac{\rho}{2}c} = \delta C_l V_P V + C_l \delta V_P V + C_l V_P \delta V + \delta C_d V_T V + C_d \delta V_T V + C_d V_T \delta V$$

$$\delta C_l = C_{l\alpha} \delta \alpha = C_{l\alpha} \left(\delta \Theta - \frac{1}{V_T} \delta V_P + \frac{V_P}{V_T^2} \delta V_T \right)$$

$$\delta C_d = 2C_{d\alpha} \alpha \delta \alpha = 2C_{d\alpha} \left(\theta - \frac{V_P}{V_T} \right) \left(\delta \Theta - \frac{1}{V_T} \delta V_P + \frac{V_P}{V_T^2} \delta V_T \right)$$

$$\delta V = \frac{V_T}{V} \delta V_T + \frac{V_P}{V} \delta V_P$$

$$\frac{\delta F'_z}{\frac{\rho}{2}c} = \delta V_T \left[C_l V + C_{l\alpha} \frac{V_P V}{V_T} + C_l \frac{V_T^2}{V} - 2C_{d\alpha} \left(\Theta - \frac{V_P}{V_T} \right) \frac{V_P^2 V}{V_T^2} - C_d \frac{V_P V_T}{V} \right]$$

$$+ \delta V_P \left[-C_d V - C_{l\alpha} V + C_l \frac{V_T V_P}{V} + 2C_{d\alpha} \left(\Theta - \frac{V_P}{V_T} \right) \frac{V_P V}{V_T} - C_d \frac{V_P^2}{V} \right]$$

$$+ \delta \Theta \left[C_{l\alpha} V_T V - 2C_{d\alpha} \left(\Theta - \frac{V_P}{V_T} \right) V_P V \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta F'_x}{\frac{\rho}{2}c} &= \delta V_T \left[C_d V + C_{l\alpha} \frac{V_P^2 V}{V_T^2} + C_l \frac{V_T V_P}{V} + 2C_{d\alpha} \left(\Theta - \frac{V_P}{V_T} \right) \frac{V_P V}{V_T} + C_d \frac{V_T^2}{V} \right] \\ &\quad + \delta V_P \left[C_l V - C_{l\alpha} \frac{V_P V}{V_T} + C_l \frac{V_P^2}{V} - 2C_{d\alpha} \left(\Theta - \frac{V_P}{V_T} \right) V + C_d \frac{V_P V_T}{V} \right] \\ &\quad + \delta \Theta \left[C_{l\alpha} V_P V + 2C_{d\alpha} \left(\Theta - \frac{V_P}{V_T} \right) V_T V \right] \end{aligned}$$

Mit der Näherung $V \approx V_T$ erfolgt eine weitere Vereinfachung.

- b) Nun werden im Schwebeflug folgende Werte eingesetzt

$$\bar{V}_T = r \quad \bar{V}_P = \lambda \quad \delta \bar{V}_T = -r \overset{*}{\zeta} \quad \delta \bar{V}_P = r \overset{*}{\beta} \quad \delta \Theta = -k_{p\beta} \beta - k_{p\zeta} \zeta$$

und alle Terme höherer Ordnung wie V_P^n für $n \geq 2$ weggelassen. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\delta F'_z}{\frac{\rho}{2}c(\Omega R)^2} &= -r \overset{*}{\zeta} [2r(C_{l0} + C_{l\alpha}\Theta) - \lambda(C_{l\alpha} + C_{d0} + C_{d\alpha}\Theta^2)] \\ &\quad - (k_{p\beta}\beta + k_{p\zeta}\zeta)(C_{l\alpha}r^2 - 2rC_{d\alpha}\Theta\lambda) \\ &\quad + r \overset{*}{\beta} [-r(C_{l\alpha} + C_{d0} + C_{d\alpha}\Theta^2) + \lambda(C_{l0} + C_{l\alpha}\Theta + 4C_{d\alpha}\Theta)] \\ \frac{\delta F'_x}{\frac{\rho}{2}c(\Omega R)^2} &= -r \overset{*}{\zeta} [2r(C_{d0} + C_{d\alpha}\Theta) + \lambda(C_{l0} + C_{d0} + C_{d\alpha}\Theta - 2C_{d\alpha}\Theta)] \\ &\quad - (k_{p\beta}\beta + k_{p\zeta}\zeta)[r\lambda(C_{l\alpha} - 2C_{d\alpha}) + 2r^2C_{d\alpha}\Theta] \\ &\quad + r \overset{*}{\beta} [r(C_{l0} + C_{l\alpha}\Theta - 2C_{d\alpha}\Theta) - \lambda(2C_{l\alpha} - C_{d0} - 2C_{d\alpha} - C_{d\alpha}\Theta^2)] \\ \delta \bar{M}_\beta &= \frac{1}{2} \int_0^1 r \frac{\delta F'_z}{\frac{\rho}{2}c(\Omega R)^2} dr \\ &= -\frac{\overset{*}{\zeta}}{C_{l\alpha}} \left[\frac{1}{4}(C_{l0} + C_{l\alpha}\Theta) - \frac{\lambda}{6}(C_{l\alpha} + C_{d0} + C_{d\alpha}\Theta^2) \right] \\ &\quad - \frac{1}{C_{l\alpha}} (k_{p\beta}\beta + k_{p\zeta}\zeta) \left(\frac{C_{l\alpha}}{8} - \frac{\lambda}{3}C_{d\alpha}\Theta \right) \\ &\quad + \frac{\overset{*}{\beta}}{C_{l\alpha}} \left[-\frac{1}{8}(C_{l\alpha} + C_{d0} + C_{d\alpha}\Theta^2) + \frac{\lambda}{6}(C_{l0} + C_{l\alpha}\Theta + 4C_{d\alpha}\Theta^2) \right] \\ \delta \bar{M}_\zeta &= \frac{1}{2} \int_0^1 r \frac{\delta F'_x}{\frac{\rho}{2}c(\Omega R)^2} dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\zeta^*}{C_{l\alpha}} \left[\frac{1}{4}(C_{d0} + C_{d\alpha}\Theta) + \frac{\lambda}{6}(C_{l0} + C_{l\alpha}\Theta - 2C_{d\alpha}\Theta) \right] \\
&\quad - \frac{1}{C_{l\alpha}}(k_{p\beta}\beta + k_{p\xi}\xi) \left[\frac{\lambda}{6}(C_{l\alpha} - 2C_{d\alpha}) + \frac{C_{d\alpha}}{4}\Theta \right] \\
&\quad + \frac{\beta^*}{C_{l\alpha}} \left[\frac{1}{8}(C_{l0} + C_{l\alpha}\Theta - 2C_{d\alpha}\Theta) - \frac{\lambda}{6}(2C_{l\alpha} - C_{d0} - 2C_{d\alpha} - C_{d\alpha}\Theta^2) \right]
\end{aligned}$$

Nun wird noch die Annahme eingearbeitet, dass $C_{d\alpha} \ll C_{l\alpha}$ sein soll und es folgen die generalisierten Momente zu

$$\begin{aligned}
\delta \overline{M}_\beta &= -\zeta^* \left[\frac{C_{l0}}{4C_{l\alpha}} + \frac{\Theta}{4} - \frac{\lambda}{6} \left(1 + \frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} \right) \right] - (k_{p\beta}\beta + k_{p\xi}\xi) \frac{1}{8} \\
&\quad + \beta^* \left[\frac{\lambda}{6} \left(\theta + \frac{C_{l0}}{C_{l\alpha}} \right) - \frac{1}{8} - \frac{C_{d0}}{8C_{l\alpha}} \right] \\
\delta \overline{M}_\xi &= -\zeta^* \left[\frac{C_{d0}}{4C_{l\alpha}} + \frac{\lambda}{6} \left(\Theta + \frac{C_{l0}}{C_{l\alpha}} \right) \right] - (k_{p\beta}\beta + k_{p\xi}\xi) \frac{\lambda}{6} \\
&\quad + \beta^* \left[\frac{1}{8} \left(\theta + \frac{C_{l0}}{C_{l\alpha}} \right) - \frac{\lambda}{6} \left(2 - \frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} \right) \right]
\end{aligned}$$

Damit folgen die Bewegungsgleichungen zu

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta^{**} \\ \xi^{**} \end{Bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{8} + \frac{\gamma C_{d0}}{8C_{l\alpha}} - \frac{\gamma\lambda}{6} \left(\theta + \frac{C_{l0}}{C_{l\alpha}} \right) & -2\beta_0 + \frac{\gamma C_{l0}}{4C_{l\alpha}} + \frac{\gamma\Theta}{4} - \frac{\gamma\lambda}{6} \left(1 + \frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} \right) \\ 2\beta_0 + \frac{\gamma\lambda}{6} \left(2 - \frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} \right) - \frac{\gamma}{8} \left(\theta + \frac{C_{l0}}{C_{l\alpha}} \right) & 2\frac{\omega_{\xi 0}}{\Omega} D_\xi + \frac{\gamma C_{d0}}{4C_{l\alpha}} + \frac{\gamma\lambda}{6} \left(\Theta + \frac{C_{l0}}{C_{l\alpha}} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta^* \\ \xi^* \end{Bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} v_\beta^2 + \frac{\gamma}{8} k_{p\beta} & \frac{\gamma}{8} k_{p\xi} \\ \gamma \frac{\lambda}{6} & v_\xi^2 + \gamma \frac{\lambda}{6} k_{p\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ \xi \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

- c) Ideal verwundener Rotor: $\Theta(r) = \Theta_{\text{tip}}/r$. Die linearisierten Bewegungsgleichungen lauten für Schlägen und Schwenken

$$\begin{aligned}
\beta^{**} + v_\beta^2 \beta - 2\beta_0 \xi^* &= \gamma \Delta \overline{M}_\beta \\
\xi^{**} + v_\xi^2 \xi + 2\beta_0 \beta^* + 2\frac{\omega_{\xi 0}}{\Omega} D_\xi \xi^* &= \gamma \Delta \overline{M}_\xi
\end{aligned}$$

Mit den Störgrößen

$$\begin{aligned}\bar{V}_T &= r \quad \bar{V}_P = \lambda \quad \Theta = \frac{\Theta_{\text{tip}}}{r} \quad \delta \bar{V}_T = -r \dot{\zeta}^* \\ \delta \bar{V}_P &= r \dot{\beta}^* \quad \delta \Theta = -k_{p\beta} \beta - k_{p\zeta} \zeta + k_{p\zeta}^* \dot{\zeta}^*\end{aligned}$$

folgen die generalisierten Luftkräfte zu

$$\begin{aligned}\Delta \bar{M}_\beta &= \frac{1}{2} \int_0^1 r \left[\delta \bar{V}_T (2 \bar{V}_T \Theta - \bar{V}_P) + \delta \bar{V}_P \bar{V}_T + \delta \Theta \bar{V}_T^2 \right] dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-r^2 \dot{\zeta}^* (2 \Theta_{\text{tip}} - \lambda) - r^3 \dot{\beta}^* + r^3 \left(-k_{p\beta} \beta - k_{p\zeta} \zeta + k_{p\zeta}^* \dot{\zeta}^* \right) \right] dr \\ &= -\frac{\dot{\zeta}^*}{6} (2 \Theta_{\text{tip}} - \lambda) + \frac{1}{8} \left(-\dot{\beta}^* - k_{p\beta} \beta - k_{p\zeta} \zeta + k_{p\zeta}^* \dot{\zeta}^* \right) \\ \Delta \bar{M}_\zeta &= \frac{1}{2} \int_0^1 r \left[\delta \bar{V}_T \left(2 \frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} \bar{V}_T + \bar{V}_P \Theta \right) + \delta \bar{V}_P (\bar{V}_T \Theta - 2 \bar{V}_P) + \delta \Theta \bar{V}_P \bar{V}_T \right] dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-r^2 \dot{\zeta}^* \left(2 \frac{C_{d0}}{C_{l\alpha}} r + \frac{\lambda \Theta_{\text{tip}}}{r} \right) + r^2 \dot{\beta}^* (\Theta_{\text{tip}} - 2 \lambda) \right. \\ &\quad \left. + r^2 \lambda (-k_{p\beta} \beta - k_{p\zeta} \zeta + k_{p\zeta}^* \dot{\zeta}^*) \right] dr \\ &= -\dot{\zeta}^* \left(\frac{C_{d0}}{4 C_{l\alpha}} + \frac{\lambda \Theta_{\text{tip}}}{4} - \frac{\lambda k_{p\zeta}^*}{6} \right) - \dot{\beta}^* \left(\frac{\lambda}{3} - \frac{\Theta_{\text{tip}}}{6} \right) - \zeta \lambda \frac{k_{p\zeta}}{6} - \beta \lambda \frac{k_{p\beta}}{6}\end{aligned}$$

Setzt man diese generalisierten Luftkräfte in die Differentialgleichungen ein, so erhält man in Matrixform:

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta^* \\ \zeta^* \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{8} & -2\beta_0 + \gamma \left(\frac{\Theta_{\text{tip}}}{3} - \frac{\lambda}{6} - \frac{\lambda k_{p\zeta}^*}{8} \right) \\ 2\beta_0 + \gamma \left(\frac{\lambda}{3} - \frac{\Theta_{\text{tip}}}{6} \right) & 2 \frac{\omega_{\zeta 0}}{\Omega} D_\zeta + \gamma \left[\frac{C_{d0}}{4 C_{l\alpha}} + \frac{\lambda \Theta_{\text{tip}}}{4} - \frac{\lambda k_{p\zeta}^*}{6} \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta^* \\ \zeta^* \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} v_\beta^2 + \frac{\gamma}{8} k_{p\beta} & \frac{\gamma}{8} k_{p\zeta} \\ \frac{\gamma}{6} \lambda k_{p\beta} & v_\zeta^2 + \frac{\gamma}{6} \lambda k_{p\zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ \zeta \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

B.5.2 Torsionsdivergenz, Schlag-Torsions-Flattern

1. Kurzfragen:

- a) Beim Starrflügler wird gefordert, dass die elastische Achse vor der aerodynamischen Achse liegt, um frei von Torsionsdivergenz zu sein. Bei Drehflüglern kommt zusätzlich das Torsionsmoment aus Fliehkräften hinzu. Dann muss die Massenachse vor der aerodynamischen Achse liegen, um die Torsionsdivergenz zu vermeiden und die Lage der elastischen Achse ist unbedeutend.
 - b) Der Auftrieb greift näherungsweise an der $c/4$ -Linie an, jedoch etwas dahinter bei transsonischer Strömung und auch nach Strömungsabriss. Da sowohl die Torsionsdivergenz als auch das Schlag-Torsions-Flattern im Wesentlichen von der Lage der Massenachse relativ zur aerodynamischen Achse beeinflusst werden, versucht man, beide identisch zu machen. Auch die elastische Achse sollte bei $c/4$ liegen, um die Torsionsmomente an der Blattwurzel zu reduzieren, die sich sonst als Steuerstangenkräfte absetzen. Eine Ablage der elastischen Achse von der Massenachse erzeugt außerdem große Kopplungen aufgrund der Fliehkräfte und der Rückwirkung von Trägheitskräften der Schlagbewegung in die Torsionsbewegung.
 - c) Schlag-Torsions-Flattern hängt vom Abstand der Massenachse von der aerodynamischen Achse und von der Torsionssteifigkeit und -dämpfung ab. Das Schubniveau ist unwichtig und diese Form des Flatterns kann bei jedem Schub auftreten.
 - d) $300 \text{ RPM} = 5 \text{ Hz}$, also ist die Flatterfrequenz bei $3/\text{rev}$. Beim Schlag-Torsions-Flattern spielen die aerodynamischen Kräfte eine große Rolle, die besonders im Schwebeflug vom wiederkehrenden Nachlauf der Wirbeldichteflächen hinter den Rotorblättern beeinflusst werden. Diese können schon bei geringen Änderungen der Rotordrehzahl die aerodynamische Dämpfung erheblich reduzieren. Zum Beispiel eine Reduktion der Drehzahl verringert den Schub und damit λ_i , so dass die Nachlaufflächen näher beieinander liegen.
 - e) Eine FFT des Messsignals liefert eine Aussage über den möglichen Flattertyp. Wenn die Schwingungsfrequenz bei der Schwenkeigenfrequenz liegt ($\omega/\Omega = \nu_\zeta$), dann wird es sich um Schlag-Schwenk-Flattern handeln. Wenn sie bei der Torsionsfrequenz liegt (in der Regel wesentlich höher als die Schwenkeigenfrequenz), dann wird es eher Schlag-Torsions-Flattern sein. Außerdem liefert die Waage im nicht drehenden System Hinweise. Beim Schlag-Schwenk-Flattern ist die dort sichtbare Frequenz $\omega/\Omega = 1 - \nu_\zeta$. Bei der Bodenresonanz findet man in den Rotorwaagensignalen die Eigenfrequenz des Versuchsstandes. Wenn $\omega = \Omega$, dann ist es wohl eher ein Unwucht- und/oder Spurlaufproblem. Ist die Frequenz der Waagensignale aber eine Blattzahlharmonische $\omega = N_b \Omega$, dann ist es lediglich ein dynamisches Antwortproblem.
2. Mit den gegebenen Daten folgt zunächst die Torsionseigenfrequenz des nicht rotierenden Blattes und die Drehfrequenz des Rotors zu

$$\omega_{\Theta 0} = 2\pi f_\Theta = 28\pi \text{ rad/s} \quad \Omega = 2\pi \text{ RPM}/60 = 14\pi \text{ rad/s}$$

- a) Das vereinfachte Kriterium für die Stabilität hinsichtlich der Torsionsdivergenz lautet

$$x_I - x_a = (x_{cg} - x_{ea}) - (x_a - x_{ea}) = (0) - (0,25 - 0,35)c = 0,1c$$

$$\nu_\beta^2 = 1 + \frac{3e_\beta}{2(1-e_\beta)} = 1,096 \quad \nu_\Theta^2 = 1 + \left(\frac{\omega_{\Theta 0}}{\Omega}\right)^2 = 5$$

$$\frac{x_I - x_a}{R} < \frac{16}{3\gamma} \nu_\beta^2 I_f \nu_\Theta^2 \quad \Rightarrow \quad 0,005 < 0,00365$$

Die Stabilitätsbedingung ist also nicht erfüllt und das Rotorblatt ist bei dieser Betriebsbedingung hinsichtlich der Torsionsdivergenz instabil.

- b) Das vereinfachte Kriterium für Stabilität des Schlag-Torsions-Flatterns lautet

$$\frac{x_I - x_a}{R} < \left(\frac{c}{R}\right)^2 \left(\frac{1}{3\sqrt{2} + \frac{\gamma}{48}}\right)$$

$$\Rightarrow 0,005 < 0,001$$

Diese Bedingung ist nicht erfüllt, also ist das Blatt auch hinsichtlich dieses Phänomens instabil.

B.6 Lösungen der Übungsaufgaben zu Kap. 7

Eine Rollbewegung um den Schwerpunkt des Hubschraubers erzeugt eine Querbewegung am Rotorkopf

$$\bar{y}_H = -\alpha_x \bar{z}_{cg} \quad \overset{*}{\bar{y}}_H = -\overset{*}{\alpha}_x \bar{z}_{cg} \quad \overset{**}{\bar{y}}_H = -\overset{**}{\alpha}_x \bar{z}_{cg}$$

Aufgrund dieser Bewegung erfährt das Rotorblatt eine Beschleunigung in Umlaufrichtung a_x und in radialer Richtung a_r :

$$a_x = R\Omega^2 \left(r \overset{**}{\zeta} - \overset{**}{\bar{y}}_H \cos \psi \right)$$

$$a_r = R\Omega^2 \left(r + 2 \overset{*}{\zeta} r + \overset{**}{\bar{y}}_H \sin \psi \right)$$

Die Differentialgleichung der Schwenkbewegung im drehenden System lautet

$$I_\zeta \left(\overset{**}{\zeta} + \nu_\zeta^2 \overset{**}{\zeta} + d_\zeta \overset{*}{\zeta} \right) - S_\zeta R \overset{**}{\bar{y}}_H \cos \psi = 0$$

In dem Dämpfungskoeffizienten d_ζ sind strukturelle und aerodynamische Dämpfungsanteile zusammengefasst. Mit der Fourier Koordinaten Transformation erhält man im nicht

drehenden System bei Berücksichtigung nur der zyklischen Anteile der Schwenkbewegung

$$\begin{aligned} I_\zeta \left[\zeta_{1C}^{**} + 2\zeta_{1S}^* - \zeta_{1C} + v_\zeta^2 \zeta_{1C} + d_\zeta \left(\zeta_{1C}^* + \zeta_{1S} \right) \right] - S_\zeta R \bar{y}_H^{**} &= 0 \\ I_\zeta \left[\zeta_{1S}^{**} - 2\zeta_{1C}^* - \zeta_{1S} + v_\zeta^2 \zeta_{1S} + d_\zeta \left(\zeta_{1S}^* - \zeta_{1C} \right) \right] &= 0 \end{aligned}$$

Außerdem gibt es noch die Differentialgleichung der Hubschrauberbewegung:

$$I_x \ddot{\alpha}_x + k_x \alpha_x + c_x \dot{\alpha}_x = M_x - z_{cg} Y$$

Die Rotorkräfte und -momente, die hier benötigt werden, lauten

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_{m=1}^N N_F \sin \psi_m = 0 \quad (\text{keine Schlagbewegung berücksichtigt}) \\ Y &= \sum_{m=1}^N (S_r \sin \psi_m - S_x \cos \psi_m) \\ S_r &= -2S_\zeta \Omega^2 \zeta^* - M_b R \Omega^2 \bar{y}_H^{**} \sin \psi \\ S_x &= -S_\zeta \Omega^2 \zeta^{**} + M_b R \Omega^2 \bar{y}_H^{**} \cos \psi + S_\zeta \Omega^2 \zeta \end{aligned}$$

Damit erhält man die rechte Seite der Differentialgleichung der Hubschrauberbewegung zu

$$\begin{aligned} z_{cg} Y &= R \Omega^2 \bar{z}_{cg} \sum_{m=1}^N \left(S_\zeta \zeta^{**} \cos \psi_m - S_\zeta 2 \zeta^* \sin \psi_m - S_\zeta \zeta - M_b R \bar{y}_H^{**} \right) \\ &= R \Omega^2 \bar{z}_{cg} N \left(\frac{S_\zeta}{2} \zeta_{1C}^{**} - M_b R \bar{y}_H^{**} \right) \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichung des Hubschraubers wird damit

$$I_x \ddot{\alpha}_x + \frac{c_x}{\Omega} \alpha_x^* + z_{cg} N \left(\frac{S_\zeta}{2} \zeta_{1C}^{**} - M R \bar{y}_H^{**} \right) = 0$$

Nun werden die Gleichungen der Schwenkbewegung durch I_ζ geteilt und die der Hubschrauberbewegung durch $(I_x + NM_b z_{cg}^2)$. Dann stellt man alle drei Gleichungen zusammen in Matrixschreibweise

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \bar{z}_{cg} S_\zeta^* \\ 0 & 1 & 0 \\ \bar{z}_{cg} \frac{S_\zeta}{I_x} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_{1C}^{**} \\ \zeta_{1S}^{**} \\ \alpha_x^{**} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d_\zeta^* & 2 & 0 \\ -2 & d_\zeta^* & 0 \\ 0 & 0 & d_x^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_{1C}^* \\ \zeta_{1S}^* \\ \alpha_x^* \end{Bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} v_\zeta^2 - 1 & d_\zeta^* & 0 \\ -d_\zeta^* & v_\zeta^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & v_x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_{1C} \\ \zeta_{1S} \\ \alpha_x \end{Bmatrix} = \vec{0} \end{aligned}$$

Wenn der Hubschrauberschwerpunkt im Rotorzentrum liegen würde, wäre $\bar{z}_{cg} = z_{cg}/R = 0$ und die Gleichungen entkoppelt. Die verwendeten Abkürzungen sind

$$\begin{aligned}\overset{*}{S}_\zeta &= \frac{RS_\zeta}{I_\zeta} & \overset{*}{I}_x &= 2 \frac{I_x + NM_b z_{cg}^2}{NI_\zeta} \\ \overset{*}{d}_x &= \frac{c_x}{\Omega(I_x + NM_b z_{cg}^2)} & v_x^2 &= \frac{k_x}{\Omega^2(I_x + NM_b z_{cg}^2)}\end{aligned}$$

Sachverzeichnis

A

Aerodynamik

- dynamischer Durchflussgrad, 185
 - Schwebeflug, 186
 - Vorwärtsflug, 186
- Grundgleichungen, 154
- instationär, 153
- Profiltheorie
 - Böenproblem, 172
 - instationär, 160, 163
 - Küssnerfunktion, 173
 - Loewy-Funktion, 179
 - Millers Näherung, 176
 - quasistationär, 162, 179
 - Searsfunktion, 173
 - stationär, 156, 160
 - Theodorsenfunktion, 165
 - veränderliche Geschwindigkeit, 177
 - wiederkehrender Nachlauf, 178
- Tragflächentheorie, 159
- Traglinientheorie, 158

Aeroelastische Optimierung, 343

Aeroelastische Stabilität, 193

Aktive Rotorsteuerung

- aktive Verwindung, 281, 286
- Definition, 281
- höherharmonische Steuerung (HHC), 281, 284, 294
 - individuelle Steuerung (IBC), 281, 296
- Klassifikation, 282
- lokale Steuerung (LBC), 281, 285, 298
- Mehrfachtaumscheibe, 285, 296
- Simulation, 323
 - Aerodynamik, 323
 - Nachlauf, 325
 - Strukturdynamik, 323

Ansatzfunktion, 35, 39, 45

B

Balkenfunktionen

- Schlagbewegung, 32
- Schwenkbewegung, 104
- Torsion, 112
- Biegespannung, 60
 - Kraftsummenmethode, 61
 - Modale Biegemomentmethode, 61
 - Modalmethode, 60
- Blatt-Wirbel-Interaktionslärm, 288
 - aktive Unterdrückung, 309
- Blattzahlharmonische, 145
- Bodenresonanz, 247
 - Coleman-Diagramm, 259
 - Deutsch-Stabilitätskriterium, 261
 - Eigenwerte, 257
 - gekoppelte Differentialgleichungen, 252, 256
 - Rotorkopfbewegung, 254
 - Schwenkbewegung, Mehrblattrotor, 250
 - Zweiblattrotor, 263
 - gekoppelte Differentialgleichungen, 266

C

Corioliskraft, 114

D

- Differentialgleichung, Lösungsmethoden, 67
- dynamische Antwort, 53

E

- Eigenformen, 51
- Eigenformgleichungen, 53
- Eigenfrequenzen, 51
- Eigenwert

- drehendes System, 75
 hohe Frequenz, 77
 nicht drehendes System, 76
 niedrige Frequenz, 78
 progressive Form, 77, 78
 regressive Form, 79
e
 elastischer Balken, 25
 Biegesteifigkeit, 27
 Differentialgleichung, 27
 Flächenträgheitsmoment, 27
 nicht rotierend, 29
 Eigenformen, 31, 32
 Eigenwerte, 30
 Orthogonalität, 32
 Randbedingungen, 28
 rotierend, 33
- F**
 Fandiagramm (Southwell-Diagramm), 137
 Finite Element Methode, 44
 Flattern, 193
 Fourier Koordinaten Transformation
 (Mehrblattkoordinaten), 68
 Fourierreihe, 55
- G**
 Galerkin-Verfahren, 35
 gekoppelte Bewegung
 Schlag-Schwenkbewegung, 113
 Differentialgleichungen, 116, 121
 Schlag-Schwenk-Torsionsbewegung, 130
 Differentialgleichungen, 134, 135
 Eigenformen, 139
 Eigenfrequenzen, 137
 Schlag-Torsionsbewegung, 122
 Differentialgleichungen, 124
 generalisierte Erregerkraft, 8, 36, 40, 47, 50
 generalisierte Koordinate, 8, 35, 39, 50
- H**
 harmonic balance Methode, 56
 Hermite'sche Polynome, 46
- K**
 kinetische Energie, 39, 46, 105
- L**
 Lagrange-Gleichung, 40, 49
 Linearisierung, 10
 Luftresonanz, 266
- gekoppelte Differentialgleichungen, 267
N
 numerische Integration, 60
- P**
 potentielle Energie, 39, 46
 Propellermoment, 106
- R**
 Randbedingungen, 35, 39, 45, 50, 122
 Rayleigh-Ritz-Verfahren, 39
 reduzierte Frequenz, 165
 Blatt-Wirbel-Interaktion, 174
 Schwebeflug, 168
 Vorwärtsflug, 170
 Rotordynamik
 Faserverbundbauweise, 348
 lagerlose Rotoren, 351
 zirkulationsgesteuerter Rotor, 355
 Rotorkopf
 Frequenzfilter, 145
 Reaktionskräfte, 142
 Rotormodelle, 334
 Froude-skaliert, 336
 geometrisch skaliert (starr), 335
 Herstellung, 340
 Instrumentierung, 340
 Mach-skaliert, 338
 Messtechnik, 340
 Windkanaltest, 342
- S**
 Schlagbewegung, 15
 aerodynamisches Moment, 19
 Differentialgleichung, 18, 21
 effektiver Gelenksabstand, 24
 Eigenfrequenz, 15, 21
 elastisches Rotorblatt, 25
 Gewichtsmoment, 19
 Lockzahl, 19
 Massenträgheitsmoment, 18
 Massenverteilung, 17
 Schlaggelenk, 15
 Schlaggelenksabstand, 20
 Schlagwinkel, 17
 Schwebeflug
 Eigenwerte, 230
 statisches Massenmoment, 18
 Vorkonuswinkel, 22

- Vorwärtsflug, 228
Eigenwerte, 231
Eigenwerte, nicht drehendes System, 233
zentrales Schlaggelenk, 17
- Schlag-Schwenk-Flattern
Einflussparameter, 204
gekoppelte Differentialgleichungen, 197, 200
Schwebeflug, 197
Stabilitätskriterium, 201
Vorwärtsflug, 235
Stabilität, 237
- Schlag-Schwenk-Torsions-Flattern
gekoppelte Differentialgleichungen, 221
Schwebeflug, 221
- Schlag-Torsions-Flattern
gekoppelte Differentialgleichungen, 212
Schwebeflug, 209, 214
Stabilitätskriterium, 215
Zweiblattrotor, 217
gekoppelte Differentialgleichungen, 218
- Schlag-Torsionskopplung δ_3 , 126
- Schwenkbewegung, 97
aerodynamische Dämpfung, 100
Dämpfer, 100
Eigenform, 105
Eigenfrequenz, 100, 105
Eigenschwingungsverhalten, 103
elastisches Rotorblatt, 101
Flächenträgheitsmoment, 103
Gelenksabstand, 100
Schwenkdämpfer, 99
- Schwenk-Torsionskopplung δ_4 , 129
- Schwingung
Dämpfungsmaß, 8
Differentialgleichung, 8
- Eigenfrequenz, 8
Grundlagen, 7
Nacheilwinkel, 8, 9
Schwinger zweiter Ordnung, 7
Vergrößerungsfunktion, 8, 9
- Stall-Flattern, 219
- Systemanalyse
Finite-Element-Methode in Zeit, 89
Floquet-Verfahren, 83
konstante Koeffizienten, 81
periodische Koeffizienten, 82
- T**
- Torsion, 106
aerodynamisches Moment, 108
Differentialgleichung, 107
Eigenfrequenz, 108
elastisches Rotorblatt, 110
Massenträgheitsmoment, 107
Steifigkeit, 106, 111
- Torsionsdivergenz, 193, 212
gekoppelte Gleichungen, 212
Stabilitätskriterium, 213
- U**
- Unfälle
Bodenresonanz, 247
frühe Drehflügler, 3–7
- V**
- Vibrationen
Absorber, 279
aktive Unterdrückung, 281, 305
im Rumpf, 287
Korrelation mit Lärm, 318
periodische Blattkräfte, 277
Reduktion, 278
virtuelle Arbeit, 40, 47