განსაზღვრება 1. 1. f ფუნქციის დარბუს ზედა და ქვედა ჯამები P დანაწილების მიმართ აღინიშნება, შესაბამისად, $U(f,P)$ და $L(f,P)$-თი და განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$U(f,P)=f(l_1)\Delta x_1+f(l_2)\Delta x_2+\cdots+f(l_n)\Delta x_n,$$

და

$$L(f,P)=f(u_1)\Delta x_1+f(u_2)\Delta x_2+\cdots+f(u_n)\Delta x_n.$$

განსაზღვრება 1. 2. ვთქვათ P' და P'' $[a,b]$ სეგმენტის ორი დანაწილებაა. ვიტყვით, რომ P' დანაწილება წარმოადგენს P'' დანაწილების გაგრძელებას, თუ $P'\supset P''$.

ინტეგრალის განსაზღვრება.

ვთქვათ f $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციაა და არსებობს ერთადერთი რიცხვი I ისეთი, რომ ნებისმიერი P დანაწილებისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$L(f,P)\le I\le U(f,P).$$

მაშინ ჩვენ ვიტყვით, რომ f $[a,b]$ სეგმენტზე ინტეგრებადი ფუნქციაა. I რიცხვს უწოდებენ f ფუნქციის განსაზღვრულ ინტეგრალს $[a,b]$ სეგმენტზე და აღნიშნავენ სიმბოლოთი

$$I=\int_a^b f(x)\,dx.$$

მათემატიკურ ანალიზში ერთ-ერთ ფუნდამენტურ თეორემას წარმოადგენს დებულება სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციის ინტეგრებადობის შესახებ.

რიმანის ჯამები. ვთქვათ f $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციაა. განვიხილოთ $[a,b]$ სეგმენტის P დანაწილება, ე. ი.

$$P=\{x_0, x_1, \dots, x_n\},$$

სადაც

$$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b.$$

ვთქვათ c_i წერტილები ნებისმიერად არის აღებული $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1,2,\dots,n$, სეგმენტებიდან. შემოვიღოთ აღნიშვნა $c=(c_1,\dots,c_n)$. მაშინ ჯამს

$$R(f,P,c)=f(c_1)\Delta x_1+f(c_2)\Delta x_2+\dots+f(c_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

უწოდებენ f ფუნქციის რიმანის ჯამს c_i $(i=1,2,\dots,n)$ შერჩეული წერტილებით (**რიმანის ჯამების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია** (იხ. ნახ. 1.13 და 1.14).

თეორემა 1. 2. **(საშუალო მნიშვნელობის თეორემა)** თუ f ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ არსებობს $c\in[a,b]$ ისეთი, რომ

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a).$$

შენიშვნა 1. 1. სიდიდეს $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ უწოდებენ f ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობას $[a,b]$ სეგმენტზე.

განსაზღვრება 1. 3. ვთქვათ $c_0<c_1<c_2<\dots<c_n$ არის წერტილების სასრული რაოდენობა და f ფუნქცია განსაზღვრულია $[c_0,c_n]$ სეგმენტზე. f-ს ვუწოდებთ უბან-უბან უწყვეტს, თუ ყოველ $[c_{i-1},c_i]$ $(i=1,2,\dots,n)$ სეგმენტზე არსებობს უწყვეტი F_i ფუნქცია, ისეთი რომ

$$f(x)=F_i(x),\quad c_{i-1}<x<c_i.$$

განსაზღვრება 1. 4. ვთქვათ, f უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციაა $[c_0,c_n]$ სეგმენტზე. მაშინ f ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი $[c_0,c_n]$ სეგმენტზე განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\int_{c_0}^{c_n} f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{c_{i-1}}^{c_i} F_i(x)\,dx.$$

თეორემა 1.3 (ძირითადი თეორემა I). **ვთქვათ f ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და $a \le x \le b$. განვიხილოთ ფუნქცია:**

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

ამ პირობებში F წარმოებადია $[a,b]$ სეგმენტზე და ადგილი აქვს ტოლობას

$$F'(x)=f(x).$$

განსაზღვრება 1. 5. F ფუნქციას ეწოდება f ფუნქციის პირველადი რაიმე შუალედზე, თუ ამ შუალედზე F ფუნქცია წარმოებადია და ადგილი აქვს ტოლობას $F'(x)=f(x)$. უკანასკნელი ტოლფასია თანაფარდობის

$$dF(x)=F'(x)\,dx=f(x)\,dx.$$

თეორემა 1.4. თუ F_1 და F_2 ფუნქცია f ფუნქციის პირველადი ფუნქციებია რაიმე ერთი და იგივე შუალედზე, მაშინ მათი სხვაობა იქნება მუდმივი ამ შუალედზე, ანუ $F_1(x)-F_2(x)=c$ ყოველი x-ისთვის ამ შუალედიდან.

მართლაც, ვინაიდან $F_1'(x)=f(x)$ და $F_2'(x)=f(x)$, ამიტომ $(F_1(x)-F_2(x))'=0$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $F_1(x)-F_2(x)$ სხვაობა მუდმივია.

თეორემა 1.5 (ძირითადი თეორემა II, ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა). **ვთქვათ f ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და F წარმოადგენს f ფუნქციის პირველადს, მაშინ**

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

დამტკიცება. რადგანაც F ფუნქცია არის f ფუნქციის პირველადი, ამიტომ ფუნქციაც იქნება f ფუნქციის პირველადი და, მაშასადამე, თეორემებიდან 1.3 და 1.4 გვექნება:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c.$$

ვთქვათ $x = a$. მაშინ

$$0 = \int_a^a f(t)\,dt = F(a) + c,$$

$$c = -F(a).$$

მაშასადამე,

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

1.9 პირველადი ფუნქციის ცნება. განუსაზღვრელი ინტეგრალის ცნება

განსაზღვრება 1.6. განუსაზღვრელი ინტეგრალი f ფუნქციიდან აღინიშნება

$$\int f(x)\,dx$$

სიმბოლოთი და ეწოდება f ფუნქციის ყველა პირველადთა სიმრავლეს მოცემულ შუალედზე. ამ განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ F ფუნქცია f ფუნქციის რაიმე პირველადია მოცემულ შუალედზე, მაშინ ამ შუალედზე

$$\int f(x)\,dx = \{F(x)+c\}, \qquad (1.\ 2)$$

სადაც c ნებისმიერი მუდმივია. ხშირად, სიმარტივისათვის (1. 2) ტოლობას ასეც წერენ:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c\ .$$

1.12 ცვლადის გარდაქმნა განუსაზღვრელი ინტეგრალისათვის

$f(\varphi(x))\varphi'(x)$ სახის ფუნქციიდან პირველადის მოძებნისას ვიყენებთ $\varphi(x)=t$ სახის ცვლადის გარდაქმნას ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ და პირველადი ფუნქციის პოვნის შემდეგ ვუბრუნდებით საწყის x ცვლადს:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = \int f(t)dt = F(t)+c = F(\varphi(x))+c\,.$$