* обавезна питања *

(1.) Граничне вредности низа

\- Нека је (X, d) метрички простор. За низ $\{a_n\} \subset X$ кажемо да има граничну вредност $a \in X$ и пишемо да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, ако:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in N)(\forall n \in N)(n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in L(a, \varepsilon))$$

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in N)(\forall n \in N)(n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon)$$

\- Ако низ $\{a_n\}$ има граничну вредност a тада кажемо да низ конвергира или тежи ка a, односно да је низ $\{a_n\}$ конвергентан. За низ који није конвергентан кажемо да дивергира, односно да је дивергентан.

* Почев од n_0 сви чланови низа се налазе у отвореној лопти $L(a, \varepsilon)$, док се ван ње налази највише $n_0 - 1$ (коначно много) чланова низа.

\- Ако низ $\{a_n\}$ конвергира у метричком простору (X, d), тада је гранична вредност једнозначно одређена.

\- Конвергентан низ у метричком простору је ограничен. (обрнуто не мора да важи)

(2.) Граничне вредности функције

\- Дати су метрички простори (X, d_X) и (Y, d_Y). Нека је $a \in X$ тачка нагомилавања за област дефинисаности $D \subset X$ функције $f : D \to Y$. За $A \in Y$ кажемо да је гранична вредност функције f у тачки a ако:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) f(L(a, \delta) \cap (D \setminus \{a\})) \subset L(A, \varepsilon)$$

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in D\setminus\{a\})(d_X(a,x)<\delta \Rightarrow d_Y(A,f(x))<\varepsilon)$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

- За сваку ε-околину тачке A постоји δ-околина тачке a која се сва, изузев тачке a пресликава у ε-околину тачке A.
- У тачки a функција не мора да буде дефинисана, а ако је и дефинисана, A не мора да буде $f(a)$ јер је у дефиницији искључена тачка a из околине $L(a,\delta)$.

3.) Непрекидност функције

- Нека су дати метрички простори (X, d_X), (Y, d_Y) и функција $f: D \to Y$, $D \subset X$. За функцију f кажемо да је непрекидна у тачки $a\in D$ ако:

$$(\forall \varepsilon\in\mathbb{R}^+)(\exists \delta\in\mathbb{R}^+)(\forall x\in D)(x\in L(a,\delta) \Rightarrow f(x)\in L(f(a),\varepsilon))$$
$$(\forall \varepsilon\in\mathbb{R}^+)(\exists \delta\in\mathbb{R}^+)(\forall x\in D)(d_X(a,x)<\delta \Rightarrow d_Y(f(a),f(x))<\varepsilon)$$

- Да би функција била непрекидна у тачки a треба да важи:
  1) $a\in D$, тј. функција f је дефинисана у тачки a
  2) ако је a тачка нагомилавања за D, тада постоји $\lim_{x\to a} f(x)$ и важи једнакост $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
  3) ако је $a\in D$ изолована тачка, тада је f непрекидна у a

4.) Први извод

- Дата је реална функција $y=f(x)$, $f: D\to\mathbb{R}$, $D\subseteq\mathbb{R}$ и $x\in D^0$
  * $\Delta x \neq 0$ - прираштај аргумента функције $f(x)$ у тачки $x\in D^0$
  * ако $x+\Delta x \in D^0$ тада је $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ прираштај функције $f(x)$ у тачки $x\in D^0$ који одговара прираштају аргумента Δx

- Ако постоји гранична вредност:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

онда се та гранична вредност зове извод функције $f(x)$ у тачки x.

5. Одређен интеграл

- Број I је лимес интегралних сума $I(f, P, \xi)$ функције $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ за $\lambda(P) \to 0$, пишемо $\lim_{\lambda(P) \to 0} I(f, P, \xi) = I$ ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$, такво да за сваку поделу P и сваку изабрану тачку $\xi \in \xi(P)$ када је $\lambda(P) < \delta$ важи неједнакост $|I(f, P, \xi) - I| < \varepsilon$

- Ако постоји $\boxed{\lim_{\lambda(P) \to 0} I(f, P, \xi) = I \quad \text{тада:}}$

* $f(x)$ је интеграбилна у Римановом смислу над $[a, b]$
* I се назива Риманов или одређен интеграл функције $f(x)$ над $[a, b]$ $\Rightarrow I = \int_a^b f(x)\,dx$
* a је доња граница интеграла, а b је горња
* $f(x)$ је подинтегрална функција
* $f(x)\,dx$ је подинтегрални израз
* x је интеграциона променљива
* $R[a, b]$ скуп свих интеграбилних функција над $[a, b]$

6. Њутн-Лајбницова теорема

- Ако је функција интеграбилна над затвореним интервалом $[a, b]$ и ако функција $f(x)$ има примитивну функцију $F(x)$ над интервалом $[a, b]$, тада је:

primitivnu

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

7. Хомогена линеарна диференцијална једначина вишег реда

- Принцип суперпозиције:
- Ако су $y_i(x)$, $i=1,2,\dots,m$ решења хомогене линеарне диференцијалне једначине тада је решење и

$$y(x)=\sum_{i=1}^{m} c_i y_i(x)\,,\quad c_i - \text{произвољне константе}$$

- Сваки скуп од n $(n\in\mathbb{N}\setminus\{1\})$ линеарно независних решења једначине $L_n[y]=0$ је фундаментални скуп решења једначине $L_n[y]=0$
- Постоји фундаментални скуп решења једначине $L_n[y]=0$ над интервалом I.
- Ако је $\{y_1(x), y_2(x),\dots y_n(x)\}$ фундаментални скуп решења хомогене линеарне једначине $L_n[y]=0$ над интервалом I, тада је опште решење те једначине над I дато са:

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\dots+c_ny_n(x)\,,\quad c_1,c_2,\dots,c_n\in\mathbb{R}$$

* Оператор $L_n[\,]$ је линеаран, тј. важи:

$$L_n[y_1+y_2]=L_n[y_1]+L_n[y_2]\,,\quad L_n[cy]=cL_n[y]$$

- Ф-је $f_i(x)$; $i=1,2,\dots,n$ $(n\in\mathbb{N}\setminus\{1\})$ су линеарно зависне над I ако постоје бројеви c_i који нису сви $=0$, да је:

$$c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\dots+c_nf_n(x)=0\,,\quad \forall x\in I$$

– Питања –

* 1. Метрички простор. Околина тачке

– Метрика (растојање) на непразном скупу X је свако пресликавање $d: X^2 \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ за које важи:

1) $d(x,y) \geq 0$
2) $d(x,y) = 0 \iff x = y$
3) $d(x,y) = d(y,x)$
4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

* Метрички простор је уређен пар (X,d) скупа X и метрике d на X.

– Реалан број $d(x,y)$ је растојање елемената $x,y \in X$

* Нека је (X,d) метрички простор, $a \in X$ и $r \in \mathbb{R}^+$. За скуп

$$L(a,r) = \{x \in X : d(a,x) < r\}$$

кажемо да је отворена лопта у метричком простору (X,d) са центром у тачки a полупречника r. Отворену лопту $L(a,\varepsilon)$ зовемо ε-околина тачке a.

2. Класификација тачака и скупова у метричком простору

(X,d) – метрички простор, $A \subseteq X$

1) $a \in X$ је унутрашња тачка за скуп A ако постоји $L(a,r)$ која је цела садржана у скупу A
2) $a \in X$ је спољашња тачка за скуп A ако постоји $L(a,r)$ која је цела садржана у $X \setminus A$
3) $a \in X$ је рубна тачка за скуп A ако свака $L(a,r)$ има непразан пресек и са A и са $X \setminus A$

4) $a \in X$ је адхерентна тачка за скуп A ако свака $L(a,r)$ има непразан пресек са скупом A

5) $a \in X$ је тачка нагомилавања скупа A ако свака $L(a,r)$ има непразан пресек са $A \setminus \{a\}$

6) $a \in A$ је изолована тачка ако постоји $L(a,r)$ у којој нема других тачака из скупа A осим тачке a

3. Низ у метричком простору. Гранична вредност низа. Особине

– Пресликавање $a: \mathbb{N} \to X$ зовемо низом у X. Низ краће обележавамо са $\{a_n\}$ где је a_n општи члан низа. Ако је $X = \mathbb{R}$ онда кажемо да је $\{a_n\}$ реалан низ. v---recimo da pise =<

– Ако постоји $M \in X$, тако да је $a_n \leq M$ $(\forall n)$, онда кажемо да је низ $\{a_n\}$ ограничен са горње стране. M је горња граница низа. Најмања горња граница низа зове се супремум низа ($\sup a_n$). Слично се дефинишу доње ограничење и инфимум. Ако је низ ограничен и са доње и са горње стране, кажемо да је ограничен.

4. Тачка нагомилавања низа. Особине

– За тачку $a \in X$ кажемо да је тачка нагомилавања низа $\{a_n\}$ у метричком простору (X,d) ако:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(n \geq m \land a_n \in L(a,\varepsilon))$$

– Ако је a тачка нагомилавања низа $\{a_n\}$, тада свака ε-околина тачке a садржи бар један члан датог низа. Обрнуто није тачно. Код тачке нагомилавања у било којој околини и ван ње може бити бесконачно много чланова низа. Ако низ конвергира ка a, онда је a једина тачка нагомилавања низа. Ако је a тачка нагомилавања низа онда постоји подниз низа $\{a_n\}$ који конвергира ка a.

5. Особине конвергентних низова

1) Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, тада је a једина т.н. низа $\{a_n\}$

2) Конвергентан низ $\{a_n\}$ има јединствену граничну вредност

3) Конвергентан низ је ограничен

4) Ако је реалан низ $\{a_n\}$ ограничен и има једну тачку нагомилавања, тада је он конвергентан и његова гранична вредност је тачка нагомилавања

5) Ако низ $\{a_n\}$ конвергира ка броју a, тада је и низ $\{|a_n|\}$ конвергентан и конвергира ка броју $|a|$. Обрнуто не важи.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$$

6) Ако низ $\{|a_n|\}$ конвергира ка 0, тада и низ a_n конвергира ка 0. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

7) Ако су низови $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ такви да је $a_n \leq b_n$ за $n \geq k$ и ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, тада је $a \leq b$

8) Ако су низови $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ такви да је $a_n \leq c_n \leq b_n$ за $n \geq k$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, онда је и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$

9) Нека је $\{b_n\}$ низ природних бројева за који важи да је $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, тада је $\lim\limits_{n\to\infty} a_{b_n} = a$

10) Ако низ $\{a_n\}$ конвергира ка a, тада и сваки подниз $\{a_{n_k}\}$ низа $\{a_n\}$ конвергира ка a

⑥ Рачунске операције са граничним вредностима

а) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$

1) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b$

2) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$

3) $\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$

4) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$, $b_n \neq 0$, $b \neq 0$

5) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$, $b_n \neq 0$, $b \neq 0$

б) $a_n \to \infty$, $b_n \to b$

1) $(a_n + b_n) \to \infty$

2) $(a_n \cdot b_n) \to \infty$ за $b>0$, $(a_n \cdot b_n) \to -\infty$ за $b<0$

в) $\{a_n\}$ низ за који је $a_n \neq 0$, тада је:

$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

* ⑦ Принцип монотоније

– Сваки монотоно неопадајући (растући) низ који је ограничен са горње стране конвергира ка свом супремуму, а сваки монотоно нерастући (опадајући) низ ограничен са доње стране конвергира ка свом инфимуму.

* ⑧ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$, $a>0$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

* ⑨ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

* ⑩ Низ уметнутих интервала

– Под низом уметнутих интервала подразумева се низ затворених интервала $\{[a_n, b_n]\}$ за који важи:

1) $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n]$ (сваки следећи налази се у претходном интервалу)

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ (дужина интервала тежи нули)

Ако је $[a_n, b_n]$ низ уметнутих интервала онда све тачке $a \leq x \leq b$ леже у сваком од интервала $[a_n, b_n]$, где је a супремум низа $\{a_n\}$, а b је инфимум низа $\{b_n\}$. Ако растојање између a_n и b_n тежи нули онда постоји тачно једна тачка која лежи у свим интервалима, а то је $a=b$

* (11.) Болцано-Вајерштрасова теорема

- Сваки ограничен низ има бар једну тачку нагомилавања.

* (12.) Последице Болцано-Вајерштрасове теореме

1) из сваког ограниченог низа може се издвојити конвергентан подниз

2) сваки ограничен низ који има једну тачку нагомилавања је конвергентан

* (13.) Кошијев низ

- За низ $\{a_n\} \subset X$ кажемо да је Кошијев низ у метричком простору (X, d) ако:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \land m \geq n_0 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon)$$

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow d(a_{n+p}, a_n) < \varepsilon)$$

- Ако је низ конвергентан у метричком простору (X, d), тада је он Кошијев у (X, d). Обрнуто не мора да важи

- Сваки Кошијев низ у метричком простору (X, d) је ограничен у датом простору.

- Ако подниз Кошијевог низа конвергира ка a, онда и цео низ конвергира ка a.

* (14.) Комплетни метрички простори

- Метрички простор (X, d) је комплетан ако у њему сваки Кошијев низ конвергира. Метрички простор $\mathbb{R}$ је комплетан. За свако $m \in \mathbb{N}$ метрички простор $\mathbb{R}^m$ је комплетан. Метрички простор $\mathbb{C}$ је комплетан

- Затворен потпростор комплетног метричког простора је комплетан.

*(15.) Гранична вредност функције (коначна и бесконачна). Гранична вредност над скупом. Понашање функције кад $x \to \infty$.

- Гранична вредност над скупом: нека су (X, d_X) и (Y, d_Y) метрички простори и нека је E непразан подскуп области дефинисаности D функције $f: D \to Y$. Ако рестрикција f_E функције f има граничну вредност $A \in Y$ у тачки $a \in X$, онда кажемо да функција f има граничну вредност A у тачки нагомилавања a скупа E док $x \in E$ и пишемо:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad x \in E$$

- Нека је (X, d) метрички простор и нека је $a \in D$ тачка нагомилавања за $D \subset X$, реалне функције $f: D \to \mathbb{R}$, тада:

1) функција $f(x)$ тежи ка ∞ $(\lim_{x \to a} f(x) = \infty)$ акко:

$$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \setminus \{a\})(x \in L(a, \delta) \Rightarrow f(x) > K)$$

2) функција $f(x)$ тежи ка $-\infty$ $(\lim_{x \to a} f(x) = -\infty)$ акко:

$$(\forall K \in \mathbb{R}^-)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D \setminus \{a\})(x \in L(a, \delta) \Rightarrow f(x) < K)$$

- Понашање функције кад $x \to \infty$

- Нека је (Y, d) метрички простор и нека је $D \subset \mathbb{R}$ дефинициони скуп функције $f: D \to Y$, за који важи $(\forall a \in \mathbb{R})(a, \infty) \cap D \neq \emptyset$, тада кажемо да функција $f(x)$ има граничну вредност $A \in Y$ када $x \to \infty$ $(\lim_{x \to \infty} f(x) = A)$

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \Delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D)(x > \Delta \Rightarrow f(x) \in L(A, \varepsilon))$$

- Ако је $Y=\mathbb{R}$, кажемо да $f(x)\to\infty$, када $x\to\infty$ ако:

$$(\forall K\in\mathbb{R}^+)(\exists\Delta\in\mathbb{R}^+)(\forall x\in D)(x>\Delta\Rightarrow f(x)>K)$$

- Ако је $Y=\mathbb{R}$, кажемо да $f(x)\to-\infty$, када $x\to\infty$ ако:

$$(\forall K\in\mathbb{R}^-)(\exists\Delta\in\mathbb{R}^+)(\forall x\in D)(x>\Delta\Rightarrow f(x)<K)$$

*16. Хајнеова теорема. Операције са граничним вредностима

- Нека су (X,d_X) и (Y,d_Y) метрички простори и нека је дата функција $f: D\to Y$, $D\subset X$, тада важи:

1) ако је $Y=\mathbb{R}$, тада $f(x)\to\pm\infty$, $x\to a$, акко за сваки низ $\{x_n\}\subset D\setminus\{a\}$, који конвертира ка a, следи да низ $\{f(x_n)\}$ тежи $\pm\infty$, $n\to\infty$

2) Ако је $X=\mathbb{R}$, тада $f(x)\to A\in Y$, $x\to\pm\infty$, акко за сваки низ $\{x_n\}\subset D$, који тежи ка $\pm\infty$, следи да низ $\{f(x_n)\}$ конвертира ка A

3) Ако је $X=Y=\mathbb{R}$, тада $f(x)\to\pm\infty$, $x\to\pm\infty$, акко за сваки низ $\{x_n\}\subset D$ који тежи $\pm\infty$, следи да низ $\{f(x_n)\}$ тежи $\pm\infty$, $n\to\infty$

- Рачунске операције:
  - исто као код низова

*17. Бесконачно мале и велике величине. Упоређивање

- Нека је (X,d) метрички простор и функција $f: D\to\mathbb{R}$, $\emptyset\neq D\subset X$

- За функцију $f(x)$ кажемо да је бесконачно мала величина када $x\to a$ ако је $\lim_{x\to a} f(x)=0$.

- За функцију $f(x)$ кажемо да је бесконачно велика величина када $x\to a$ ако $|f(x)|\to\infty$, када $x\to a$

- Посматрајмо две бесконачно мале величине $f(x)$ и $g(x)$ када $x\to a$, где је $g(x)\neq 0$ у некој околини тачке $x=a$

1) ако је $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ $\left(\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|\to\infty\right)$ онда кажемо да је $f(x)$ бесконачно мала величина вишег реда од $g(x)$ када $x\to a$ (брже тежи нули)

2) ако је $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=c\neq 0$ онда кажемо да су $f(x)$ и $g(x)$ бесконачно мале величине истог реда када $x\to a$

3) ако не постоји $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, ни $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}$ тада се $f(x)$ и $g(x)$ не могу поредити када $x\to a$

18. Непрекидност функције једне променљиве. Врсте тачака прекида

$$(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+)(\exists\delta\in\mathbb{R}^+)(\forall x=a+\Delta x\in D)(|\Delta x|<\delta\Rightarrow|\Delta y|<\varepsilon)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

1) функција f једне променљиве је непрекидна у тачки a акко је непрекидна у тачки a и са леве и са десне стране

2) функција једне променљиве је непрекидна над затвореним интервалом $[a,b]$ акко је
- непрекидна у свакој тачки (a,b)
- непрекидна са десне стране у тачки a
- непрекидна са леве стране у тачки b

- Врсте прекида:
- Претпоставимо да у тачки a функција има прекид

1) ако постоји $\lim\limits_{x\to a}f(x)$, онда $f(x)$ у тачки a има привидан или отклоњив прекид

2) ако постоји $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=f(a^-)$ и $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a^+)$ при чему

је $f(a^-) = f(a^+)$ онда кажемо да функција у тачки a има скок

- Ако је тачка a прекид функције који није прве врсте, онда кажемо да у тачки a функција има прекид друге врсте

19. Непрекидност и гранична вредност сложене функције

- Нека су дати метрички простори (X, d_X), (Y, d_Y) и (Z, d_Z) као и функције $g: D \to X$ и $f: Y \to Z$

Ако је g непрекидна функција у тачки a, f непрекидна функција у тачки $g(a)$ тада је сложена функција $h = f \circ g$ непрекидна у тачки a.

- Нека $g: D \to \mathbb{R}$ и $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Претпоставимо да:

1) $g(x) \to \alpha \in \mathbb{R}$, када $x \to a$

2) $f(u) \to \beta$, када $u \to \alpha$

3) постоји околина тачке a таква да се ниједна тачка из те околине не пресликава функцијом g у α

Тада $f(g(x)) \to \beta$, када $x \to a$

20.* Особине непрекидних функција

- Нека су (X, d_X) и (Y, d_Y) метрички простори и нека је дата функција $f: X \to Y$. Тада су следећа тврђења еквивалентна:

1) функција f је непрекидна

2) инверзна слика сваког отвореног (затвореног) скупа $U \subset Y$ је отворен (затворен) скуп

- Нека је (X, d) метрички простор и $f: D \to \mathbb{R}$ функција која је непрекидна у тачки $a \in D$.

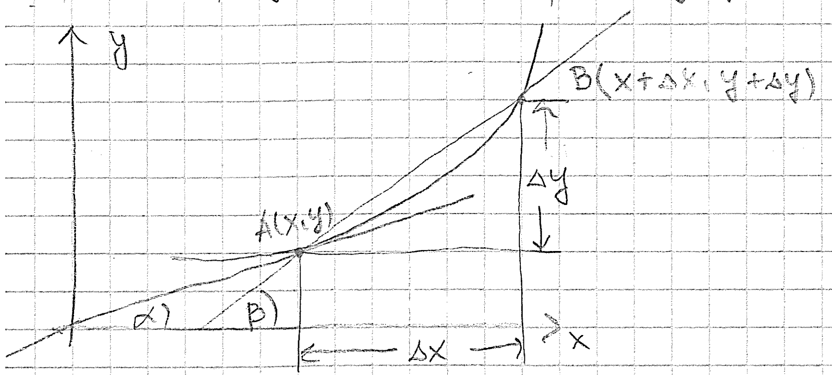
Ако је $f(a) > c$ $(f(a) < c)$, тада постоји $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, тако да за све $x \in L(a, \varepsilon) \cap D$ важи $f(x) > c$ $(f(x) < c)$

- Ако је функција $f: [a, b] \to Y$ непрекидна над затвореним

интервалом $[a,b]$, онда је над тим интервалом и ограничена
- Ако је функција непрекидна над $[a,b]$, тада она има максимум и минимум над $[a,b]$
- Ако је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна над $[a,b]$ и $f(a)\cdot f(b)<0$, тада у (a,b) постоји бар једна нула функције.
- Ако је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна над $[a,b]$ и ако је $f(a)\neq f(b)$, она у том интервалу узима све вредности између $f(a)$ и $f(b)$.
- Ако је $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ непрекидна строго монотона функција над (a,b), тада је $f((a,b))$ отворен интервал.

(21.) Извод. Геометријска интерпретација. Особине

- Геометријска интерпретација



- права AB је сечица криве, $tg\,\beta=\frac{\Delta x}{\Delta y}$
- ако $B\to A$ права AB постаје тангента криве у тачки A
- ако је $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ угао који тангента заклапа са позитивним делом x-осе тада је $tg\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$
- ако $f'(a)\neq0$ једначина тангенте у тачки $A(a,f(a))$ је

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

- једначина нормале у тачки $A(a,f(a))$

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

- ако је $f'(a)=0$, тангента: $y=f(a)$, нормала: $x=a$
- Особине:

1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$

2) $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

3) $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

4) $[c \cdot u(x)]' = c \cdot u'(x)$, $c = const.$

22. Извод и непрекидност. Једнострани изводи

- Ако функција има извод у некој тачки x, она је у тој тачки непрекидна. Обрнуто не мора да важи.
- Једнострани изводи:

1) десни извод $f(x)$ над $[x, x+\delta)$, $\delta > 0$ је:

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad x + \Delta x \in [x, x+\delta)$$

2) леви извод $f(x)$ над $(x-\delta, x]$, $\delta > 0$

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad x + \Delta x \in (x-\delta, x]$$

- $f(x)$ има извод у x акко постоје једнострани изводи и важи

$$f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x)$$

23. Извод сложене функције

- Нека је дата сложена функција $y = f(u)$, $u = g(x)$. Ако $g(x)$ има извод у тачки x и $f(u)$ има извод у тачки u, тада је:

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(u) \cdot g'(x)$$

24. Извод инверзне функције

- Нека је $f(x)$ непрекидна строго монотона функција дефинисана на интервалу (a, b) и $f^{-1}(x)$ њена инверзна функција. Ако функција $f(x)$ има извод $f'(x)$ у тачки $x \in (a, b)$ и $f'(x) \neq 0$, тада функција $f^{-1}(x)$ има извод у тачки $y = f(x)$ и важи:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

25. Извод параметарски дате функције

- Нека је дата функција $y = f(x)$ у параметарском облику $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in I$. Ако непрекидне функције $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имају изводе у тачки $t \in (a, b)$ и уколико $\varphi'(t) \neq 0$, тада ф-ја $y = f(x)$ има извод у тачки t и важи:

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

26. Логаритамски извод

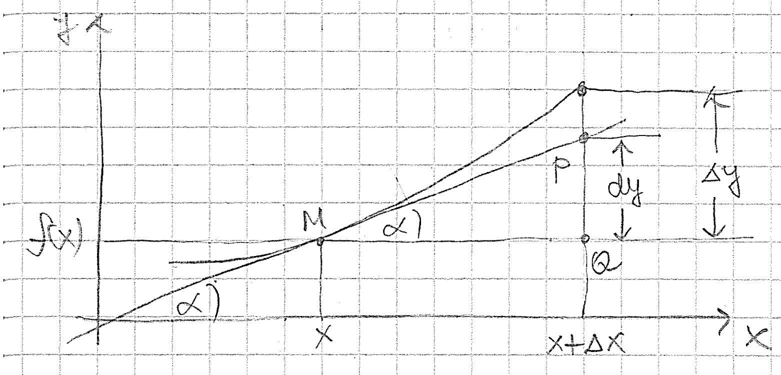
- Нека је $y = f(x)^{g(x)}$, $f(x) > 0$. Тада је $\ln y = g(x) \ln f(x)$, па је

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}, \text{ одакле је } y' = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right)$$

27. Диференцијабилност. Диференцијал. Диференцијабилност и непрекидност.

- Нека је функција $f(x)$ дефинисана на скупу D и нека $x \in D^{\circ}$.
Прираштај функције: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, $x + \Delta x \in D^{\circ}$
- За функцију $f(x)$ се каже да је диференцијабилна у тачки x ако се Δy може написати у облику $\Delta y = D \Delta x + \alpha \Delta x$ при чему $\alpha \to 0$ када $\Delta x \to 0$, док D не зависи од Δx
- Линеарни део прираштаја функције, $D \Delta x$, назива се диференцијал функције $f(x)$ и обележава се са dy или $df(x)$
- Потребан и довољан услов да ф-ја буде диференцијабилна у тачки x је да има извод у тој тачки
- Диференцијал је дат обрасцем $dy = f'(x) \Delta x$
- За функцију $y = x$ је $dy = dx$ па је: $dy = f'(x)\, dx \Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}$ – Лајбницова ознака за извод

(28.)* Геометријска интерпретација диференцијала. Особине. Примена



- Нека у произвољној тачки $M(x, f(x))$ крива $y=f(x)$ има тангенту. Тада је:

$$dy = f'(x)\Delta x = tg\alpha\,\Delta x = \frac{\overline{PQ}}{\overline{MQ}}\overline{MQ} = \overline{PQ}$$

тј. диференцијал dy је прираштај ординате тангенте у тачки $M(x, f(x))$ који одговара прираштају аргумента Δx.

- Особине: исто као код извода
- Примена:
- Како је $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$ при чему $\alpha \to 0$ када $\Delta x \to 0$ у одређеном смислу прираштај $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ можемо апроксимирати диференцијалом $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$ када $\Delta x \to 0$ тј.

$\Delta y \approx f'(x)\Delta x \quad (\Delta x \to 0)$. На основу тога следи да је:

$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \quad (\Delta x \to 0)$

(29.) Ролова и Лагранжова теорема

* Ролова теорема:

- Ако је функција $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидна над $[a, b]$, има извод над (a, b) и ако је $f(a) = f(b)$, тада постоји бар једна тачка $\xi \in (a, b)$ таква да је $f'(\xi) = 0$ <---- "ksi"

- Геометријски: постоји бар једна тачка $\xi \in (a, b)$ таква да је тангента криве $y = f(x)$ у тачки $A(\xi, f(\xi))$ паралелна са x-осом

* Лагранжова теорема

- Ако је функција $f:[a,b]$ непрекидна над $[a,b]$, има извод над (a,b), тада постоји бар једна тачка $\xi \in (a,b)$ таква да је:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

- Геометријски: постоји тачка $\xi \in (a,b)$ таква да је тангента у $C(\xi, f(\xi))$ паралелна правој кроз $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$

30. *Последице Ролове и Лагранжове теореме

1) Ако за ф-ју $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ важи:

а) $f(x)$ је непрекидна над $[a,b]$

б) $f(x)$ има извод над (a,b) и при томе је $f'(x)\neq 0$ за $x\in(a,b)$

в) $f(a)\cdot f(b) < 0$

тада постоји само једна нула ф-је над (a,b).

2) Ако ф-ја $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ има извод над (a,b) и ако су $c_1, c_2 \in (a,b)$, $c_1 < c_2$ две узастопне нуле првог извода, тада над интервалом (c_1, c_2) функција $f(x)$ има највише једну нулу.

3) Ако за ф-ју $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ важи:

а) $f(x)$ је непрекидна над $[a,b]$

б) $f(x)$ има извод над (a,b) и $f'(x) = 0$ за свако $x\in(a,b)$

тада је $f(x)$ константна ф-ја над $[a,b]$.

4) Ако ф-је $f(x)$ и $g(x)$ имају једнаке изводе: $f'(x) = g'(x)$, $x\in I$, тада се оне разликују за константу над интервалом I $(f(x) = g(x) + C$

5) Нека је ф-ја $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна над $[a,b]$ и има извод над (a,b). Ако постоји $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ тада постоји и $f'_+(a)$ и важи:

$$\lim_{x\to a^+} f'(x) = f'_+(a)$$

6) Ако функција $f: I\to\mathbb{R}$ има извод над интервалом I, тада извод $f'(x)$ не може имати прекиде прве врсте над тим интервалом.

31. Кошијева и Лагранжова теорема

- Ако су функције $f(x)$, $g(x)$ непрекидне над $[a,b]$, имају изводе над (a,b) и за свако $x\in(a,b)$ је $g'(x)\neq 0$, тада постоји бар једна тачка $\xi\in(a,b)$, таква да је:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

- Лагранжова теорема је специјалан случај Кошијеве ($g(x)=x$)

32. Лопиталова правила

- $\frac{f(x)}{g(x)}$ има неодређени облик „$\frac{0}{0}$" када $x\to a$ ако важи:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$$

- $\frac{f(x)}{g(x)}$ има неодређен облик „$\frac{\infty}{\infty}$" када $x\to a$ ако важи:

$$f(x)\to\pm\infty,\quad g(x)\to\pm\infty,\quad x\to a$$

- Нека су функције $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ диференцијабилне над (a,b), $g'(x)\neq 0$, $x\in(a,b)$ и нека је $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+} g(x)=0$. Тада:

1) ако постоји $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$, тада постоји $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ и важи:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

2) ако $\frac{f'(x)}{g'(x)}\to\pm\infty$, $x\to a^+$, тада и $\frac{f(x)}{g(x)}\to\pm\infty$, $x\to a^+$

- Аналогно тврђење важи када $f(x), g(x)\to\pm\infty$, као и кад $x\to\pm\infty$

33. Тејлорова теорема

- Нека су функција $f(x)$ и сви њени изводи до $(n-1)$ реда непрекидни над $[A,B]$ и нека $f(x)$ има n-ти извод над (A,B). Нека је $a\in[A,B]$ произвољна тачка. Тада за свако $b\in[A,B]$, $b\neq a$ постоји бар једна тачка $\xi\in(a,b)$, $b>a$ таква да је:

$$f(b)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i+R_n \qquad R_n=\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi)$$

* Тејлоров полином:

$$T_{n-1}(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta(x-a))$$ – грешка или остатак

34. Екстремне вредности функције једне променљиве

- Ако је реална функција $f(x)$ дефинисана у некој околини тачке $a\in\mathbb{R}$, тада кажемо да $f(x)$ у тачки a има локални минимум ако постоји $\delta>0$ такво да:

$$x\in(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)\Rightarrow f(x)>f(a)$$

а локални максимум ако постоји $\delta>0$ такво да:

$$x\in(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)\Rightarrow f(x)<f(a)$$

Тада је тачка a локална екстремна вредност и то је најмања или највећа вредност функције у некој околини тачке a.

35. Тангента и нормала криве

- Ако функција $f(x)$ има извод у тачки a, једначина тангенте у тачки $A(a,f(a))$ је: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$, а једначина нормале у тачки $A(a,f(a))$ је: $y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$, ако $f'(a)\neq 0$, односно нормала је $x=a$ ако је $f'(a)=0$

36. Конвексност и конкавност

- Функција $f(x)$ дефинисана над I је конвексна над I ако за произвољне две тачке $x_1,x_2\in I$, $x_1\neq x_2$ за свако x, $x_1<x<x_2$ важи:

$$f(x)<f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

Ако је:

$$f(x) > f(x_1) \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

функција је конкавна.

- Ако поставимо сечицу кроз тачке $A(x_1, f(x_1))$ и $B(x_2, f(x_2))$ график функције је испод сечице над (x_1, x_2) у случају конвексне, а изнад сечице над (x_1, x_2) у случају конкавне функције.

37. Асимптоте

- Нека је $f(x)$ дефинисана над интервалом (a, ∞), $a \in \mathbb{R}$. Функција $\phi(x)$ је асимптота функције $f(x)$ када $x \to \infty$ ако је:

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - \phi(x)] = 0$$

- Ако је асимптота права $\phi(x) = mx + n$, тада $f(x)$:

1) за $m \neq 0$ има косу асимптоту $\phi(x) = mx + n$
2) за $m = 0$ има хоризонталну асимптоту $\phi(x) = n$

- Функција $f(x)$ има вертикалну асимптоту у тачки нагомилавања $x = a$ дефиниционог скупа, ако ф-ја бар са једне стране тачке a тежи $\pm\infty$

38. Парцијални изводи функције више променљивих. Геометријска интерпретација парцијалних извода. Диференцијабилност. Извод сложене функције

- Нека је $f_i : D_i \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots n$ рестрикција функције f над скупом $D_i \subseteq D$. Ако функција f_i има извод у тачки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D^0$ онда тај извод зовемо парцијални извод функције $f(x_1, \ldots, x_n)$ у тачки M по променљивој x_i. Означавамо га са $\frac{\partial z}{\partial x}(M)$ и важи $\frac{\partial z}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta x_i z}{\Delta x_i}$

- Геометријска интерпретација:
- Једначина $z = f(x, y)$ дефинише површ S у простору
- $M_0(x_0, y_0)$ одговара тачки $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
- $z = f(x, y_0) = f_1(x)$ - дефинисана је крива L добијена пресеком површи S и равни $y = y_0$ (извод $\frac{\partial z}{\partial x}$)

- $f_1'(x) = tg\alpha = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)$ - коефицијент правца тангенте у тачки N_0 криве L

- Функција $f(x_1, \dots, x_n)$ је диференцијабилна ако се њен тотални прираштај $\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1, \dots x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n)$ може написати у облику $\Delta z = D_1 \Delta x_1 + \dots + D_n \Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_n \Delta x_n$

- Ако је ф-ја $z = f(u_1, \dots, u_n)$ диференцијабилна у тачки $N(\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m))$ тада сложена функција $z = f(u_1, \dots, u_n)$ има све парцијалне изводе по променљивама x_i у тачки M при чему важе једнакости:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial z}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial z}{\partial u_n} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial x_1}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_m} = \frac{\partial z}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_m} + \dots + \frac{\partial z}{\partial u_n} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial x_m}$$

39. Потребни и довољни услови за диференцијабилност ф-је више променљивих

- Ако функција $z = f(x_1, \dots, x_n)$ има парцијалне изводе у некој околини тачке M и ако су ти изводи непрекидни у самој тачки M, тада је функција диференцијабилна у M. Непрекидност парцијалних извода није потребан услов.

(40.) Тангентна раван и нормала површи. Геометријска интерпретација тоталног диференцијала првог реда. Примена. Парцијални изводи и диференцијали вишег реда

- Тангентна раван површи S у тачки P је раван формирана од свих тангенти површи S кроз дату регуларну тачку $P \in S$.
- Нормала површи у тачки P_0 је права која пролази кроз тачку $P_0(x_0, y_0, z_0)$ површи $F(x, y, z) = 0$ и која је нормална на тангентну раван
- Парцијални извод реда m ф-је $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ у тачки $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по променљивама $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \dots x_{i_m}$ означава се са:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}}(M)$$

- Ако ф-ја $z = f(x_1, \dots, x_n) \in C^m(D, \mathbb{R})$, D је отворена област, тада постоји тотални диференцијал $d^m z$ који је m-тог реда, дат обрасцем: $d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^m z$

* (41.) Екстремне вредности функције више променљивих

- Нека је $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ дефинисана на некој околини $L(A, \varepsilon)$ тачке $A \in D$. Ако је за сваку тачку $X \in L(A, \varepsilon) \setminus \{A\}$ испуњено:

1) $f(X) < f(A)$ тада функција у тачки A има локални максимум једнак $f(A)$

2) $f(X) > f(A)$ тада функција у тачки A има локални минимум једнак $f(A)$

42. Условни екстреми. Лагранжов метод

- Функција $z = f(x,y)$ у тачки нагомилавања $A(x,y) \in B$ скупа B има условни локални максимум (минимум) при услову $\varphi(x,y)=0$, ако:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall X \in B \cap (L(A,\varepsilon) \setminus \{A\})) \quad f(X) < f(A) \quad (f(X) > f(A))$$

- Лагранжов метод:
- Условни екстрем функције $f(x,y)$, ако је $\varphi(x,y)=0$, је обавезно стационарна тачка Лагранжове функције:

$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda \varphi(x,y)$$

па се тачке које могу бити условни екстреми добијају:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f_x(x,y) + \lambda \varphi_x(x,y) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = f_y(x,y) + \lambda \varphi_y(x,y) = 0$$
$$\varphi(x,y) = 0$$

Постојање и природу условних екстрема одређујемо помоћу знака другог тоталног диференцијала Лагранжове ф-је:

$$d^2 F(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2$$

за скуп вредности x_0, y_0, λ под условом $\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$

1) $d^2F(x_0,y_0) < 0$ у тачки (x_0,y_0) функција $f(x,y)$ има условни максимум

2) $d^2F(x_0,y_0) > 0$ у тачки (x_0,y_0) функција $f(x,y)$ има условни минимум

3) $d^2F(x_0,y_0)$ у тачки (x_0,y_0) мења знак, функција $f(x,y)$ нема условни екстрем

* 43. Примитивна функција и неодређен интеграл. Особине

- Нека је функција $f: I \to \mathbb{R}$. Ако за функцију $f(x)$ постоји функција $F: I \to \mathbb{R}$, која има извод $F'(x)$ над интервалом I таква да је:

$F'(x) = f(x) \quad , x \in I$

тада је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$ над I

– Скуп свих примитивних ф-ја функције $f(x)$ над неким интервалом I назива се неодређени интеграл функције $f(x)$ над I и означава се са: $\int f(x)dx$

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

– Функција $f(x)$ не мора да буде непрекидна да би за њу постојао неодређен интеграл.

– Особине:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

2) $d\int f(x)dx = f(x)dx$

3) $\int dF(x) = F(x) + C$

4) $\int a f(x)dx = a\int f(x)dx$

5) $\int (f_1(x) + \ldots + f_n(x))dx = \int f_1(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx$

6) ако је $\int f(x)dx = F(x) + C$, тада је $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

44. Парцијална интеграција и смена променљиве у неодређеном интегралу

– Парцијална интеграција:

– Нека су $u(x)$ и $v(x)$ диференцијабилне и нека постоји примитивна функција функције $u'(x)v(x)$. Тада постоји примитивна функција функције $u(x)v'(x)$ и важи:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

– Смена променљиве

– Нека функција $\varphi: I_1 \to I \subset \mathbb{R}$ има непрекидан извод $\neq 0$ над I_1 и нека за ф-ју $f: I \to \mathbb{R}$ постоји неодређени интеграл над I.

Тада важи: $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

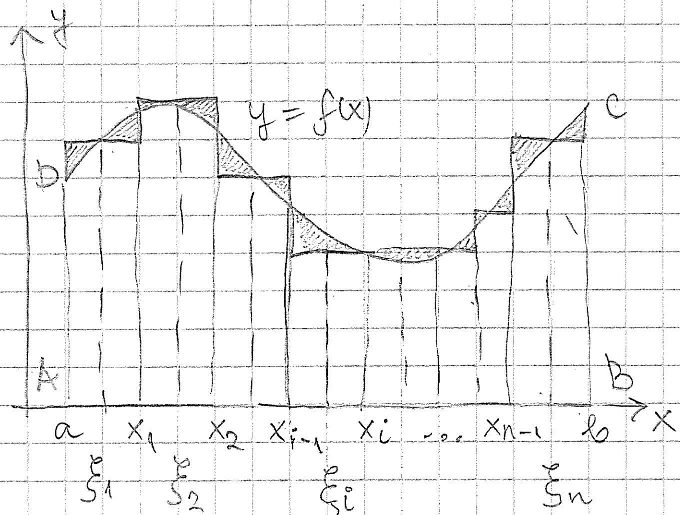
45. Појам одређеног интеграла. Интегралне суме. Геометријска интерпретација

- Нека је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ и нека је (P,ξ) подела са изабраном тачком интервала $[a,b]$. Збир:

$$I(f,P,\xi)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

се назива интегрална (Риманова) сума функције $f(x)$ за дату поделу (P,ξ).

- Геометријска интерпретација



- $f(\xi_i)\Delta x_i$ је површина i-тог правоугаоника. Осенчени делови представљају разлику између интегралне суме и тражене површине.
- Потребан услов да функција буде интеграбилна над $[a,b]$ је да буде ограничена над $[a,b]$.

46. Дарбуове суме. Веза између Дарбуове и интегралне суме. Особине Дарбуових сума

- Нека је функција $f(x)$ дефинисана и ограничена над $[a,b]$ и $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ њена подела.

$$m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\ ,\qquad M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

1) доња Дарбуова сума: $s = s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$

2) горња Дарбуова сума: $S = S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$

– За интегралну и Дарбуове суме ограничене функције $f(x)$ над $[a, b]$ важи:

1) $m(b-a) \leq s(f, P) \leq I(f, P, \xi) \leq S(f, P) \leq M(b-a)$

2) $\inf\limits_{\xi \in \xi(P)} I(f, P, \xi) = s(f, P)$; $\sup\limits_{\xi \in \xi(P)} I(f, P, \xi) = S(f, P)$

– Особине

1) $P \subset P' \Rightarrow s(f, P) \leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P)$

2) $s(f, P) \leq S(f, P')$ за произвољне поделе P и P'

3) постоје $\sup\limits_{P \in P^*} s(f, P) = I_*$ – доњи Дарбуов интеграл и $\inf\limits_{P \in P^*} S(f, P) = I^*$ – горњи Дарбуов интеграл

(47.) Интеграбилност, ограниченост, монотоност, непрекидност

– Ако је ф-ја $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидна над $[a, b]$, она је над тим интервалом интеграбилна.

– Ако је ф-ја $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ ограничена над $[a, b]$ и над $[a, b]$ има коначан број прекида она је над $[a, b]$ интеграбилна.

– Ако је ф-ја $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ монотона над интервалом $[a, b]$ она је над $[a, b]$ интеграбилна.

(48.) Веза између одређеног и неодређеног интеграла

– Њутн-Лајбницова теорема

(49.) Неке особине одређеног интеграла. Теорема о средњој вр.

1) ако је ф-ја $f(x)$ интеграбилна над $[a, b]$ тада је она интеграбилна и над сваким подинтервалом $[c, d]$ интервала $[a, b]$

2) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$

3) ако је $f \in R[a,b]$ и ако се ф-ја $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ разликује у коначном броју тачака од ф-је $f(x)$, тада је и $g \in R[a,b]$ и важи: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$

4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

5) ако је $f \in R[a,b]$, $a<b$ и $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$ тада је и $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

6) ако је $f(x) \leq g(x)$, $x \in [a,b]$, $a<b$, $f, g \in R[a,b]$ онда је $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

- Теорема о средњој вредности
- $f, g \in R[a,b]$, $a<b$ $\quad m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ и $g(x) \geq 0$ за $x \in [a,b]$

Тада постоји $m \leq \eta \leq M$ такво да је $\int_a^b f(x)g(x)dx = \eta \int_a^b g(x)dx$

- Ако је још и $f \in C^0[a,b]$ онда постоји $c \in [a,b]$ такво да $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$

(50) Одређен интеграл као функција границе

- $f(x)$ је интеграбилна над $[A,B]$, $a \in [A,B]$ произвољна тачка. За $x \in [A,B]$

1) $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ - интеграл са променљивом горњом границом

2) $I_1(x) = \int_x^a f(t)dt$ - интеграл са променљивом доњом границом

- $f \in R[A,B]$, $I(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [A,B]$, $a \in [A,B]$

1) $I(x)$ је непрекидна ф-ја над $[A,B]$

2) ~~тако~~ ако је $f(x)$ непрекидна у тачки $x \in (A,B]$ ($x \in [A,B)$) са леве (~~десно~~) стране, тада ф-ја $I(x)$ има леви (десни) извод у тачки x. При томе важи: $I_-'(x)=f(x)$ ($I_+'(x)=f(x)$)

(51.) Парцијална интеграција и смена променљиве код одређеног интеграла

- Парцијална интеграција:

- Нека ф-је $u(x), v(x)$ имају непрекидне изводе над $[a,b]$. Тада важи:

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x)$$

- Смена променљиве:

- Нека је $f:[A,B]\to\mathbb{R}$ непрекидна, а ф-ја $\varphi:[\alpha_0,\beta_0]\to[A,B]$ има непрекидан извод. Ако је $\alpha\in[\alpha_0,\beta_0]$, $\beta\in[\alpha_0,\beta_0]$, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, онда важи:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

(52.) Несвојствени интеграл прве врсте. $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$. Главна вредност интеграла $\int_{(-\infty,\infty)} f(x)\,dx$

- Нека је $f(x)$ дефинисана на $[a,\infty)$ и интеграбилна над сваким затвореним интервалом $[a,T]\subset[a,\infty)$. Несвојствени интеграл функције $f(x)$ над интервалом $[a,\infty)$, у ознаци $\int_{[a,\infty)} f(x)\,dx$ је функција $F(T)$ дефинисана са: $F(T)=\int_a^T f(x)\,dx$

- Ако постоји $A=\lim_{T\to\infty} F(T)$ несвојствени интеграл $\int_{[a,\infty)} f(x)\,dx$ конвергира ка A.

- Несвојствени интеграли прве врсте: $\int_{(-\infty,\infty)} f(x)dx$, $\int_{[a,\infty)} f(x)dx$ и $\int_{(-\infty,a]} f(x)dx$

- $I_\alpha = \int_{[1,\infty)} \frac{dx}{x^\alpha}$ $\begin{cases} \alpha > 1, \text{ конвергира} \\ \alpha \leq 1, \text{ дивергира} \end{cases}$

- Ако постоји, гранична вредност $\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} f(x)dx = V.P. \int_{(-\infty,\infty)} f(x)dx$ назива се главна вредност интеграла

(53.) Несвојствени интеграл друге врсте. $\int_{(0,1]} \frac{1}{x^\beta} dx$. Главна вредност интеграла $\int_{(a,b)} f(x)dx$

- Нека је $f(x)$ дефинисана над $[a,b)$ и интеграбилна над сваким затвореним интервалом $[a, b-\varepsilon] \subset [a,b)$, $\varepsilon > 0$. Несвојствени интеграл друге врсте функције $f(x)$ над $[a,b)$ у ознаци $\int_{[a,b)} f(x)dx$ је функција $F(\varepsilon)$ дефинисана са:

$$F(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \quad , \ a < b-\varepsilon < b$$

- Ако постоји $\lim_{\varepsilon\to 0^+} F(\varepsilon) = A$, тада несвојствени интеграл $\int_{[a,b)} f(x)dx$ конвергира ка A.

- $\int_{(0,1]} \frac{dx}{x^\beta}$ $\begin{cases} \beta < 1, \text{ конвергира} \\ \beta \geq 1, \text{ дивергира} \end{cases}$

- Ако постоји, гранична вредност $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx = V.P. \int_{(a,b)} f(x)dx$ назива се главна вредност интеграла

(54.) Особине несвојственог интеграла. Упоредни критеријум конвергенције

- Особине

1) Ако $\int_{[a,\infty)} f(x)dx$ и $\int_{[a,\infty)} g(x)dx$ конвергирају тада за свако $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ важи:

$$\int_a^{\infty}(\alpha f(x) \pm \beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^{\infty} f(x)\,dx \pm \beta\int_a^{\infty} g(x)\,dx$$

2) Претпоставимо да $\int_{[a,\infty)} u(x)v'(x)\,dx$ и $\int_{[a,\infty)} v'(x)u'(x)\,dx$ конвергирају
Тада важи:

$$\int_a^{\infty} u(x)v'(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} u(T)v(T) - u(a)v(a) - \int_a^{\infty} v(x)u'(x)\,dx$$

3) Нека функција $t=\varphi(x)$ има непрекидан извод $\neq 0$ над $[a,\infty)$ и нека несвојствени интеграл $\int_{[a,\infty)} f(x)\,dx$ конвергира.
Тада важи:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_A^{B} f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt \quad , A=\varphi(a),\ B=\lim_{x\to\infty}\varphi(x),\ \phi(t)=\varphi^{-1}(x)$$

- Упоредни критеријум конвергенције
1) Нека је $0 \leq f(x) \leq Mg(x)$ за $x \geq a$, $M>0$
- Ако $\int_{[a,\infty)} g(x)\,dx$ конвергира, онда конвергира и интеграл $\int_{[a,\infty)} f(x)\,dx$ и важи да је: $\int_a^{\infty} f(x)\,dx \leq M\int_a^{\infty} g(x)\,dx$

2) Нека је $0 \leq mg(x) \leq f(x)$, за $x \geq a$, $m>0$
- Ако $\int_{[a,\infty)} g(x)\,dx$ дивергира, онда дивергира и $\int_{[a,\infty)} f(x)\,dx$

3) $f(x)>0$, $g(x)>0$, $f(x)\approx g(x)$ кад $x\to\infty$ тј. $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$
Несвојствени интеграли $\int_{[a,\infty)} f(x)\,dx$ и $\int_{[a,\infty)} g(x)\,dx$ истовремено конвергирају или дивергирају.

55. Диференцијална једначина која раздваја променљиве
- Нормални облик: $y'=f(x)g(y)$
- Ако је $f(x)$ непрекидна над (a,b), а $g(y)$ непрекидна и $\neq 0$ над (α,β) тада постоји јединствено решење једначине $y'=f(x)g(y)$ које задовољава почетни услов $y(x_0)=y_0$
$x_0\in(a,b)$, $y_0\in(\alpha,\beta)$ и дефинисано је на некој околини x_0.

- Опште решење под условом $g(y) \neq 0$ је дато обрасцем:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C$$

56. Хомогена диференцијална једначина. Једначине које се своде на хомогену.

- Нормални облик: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, $f(t)$ непрекидна над (a, b)
- Сменом: $\frac{y}{x} = u$, $y' = u + xu'$ своди се на једначину која раздваја променљиве

- Једначина $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$, $f(t)$ непрекидна над (a, b) своди се на једначину која раздваја променљиве или на хомогену.

1) ако је $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

- смена: $a_1x + b_1y + c_1 = t$ или $a_2x + b_2y + c_2 = t$
- своди се на једначину која раздваја променљиве

2) ако је $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

- смена: $x = X + \alpha$, $y = Y + \beta$ где су α и β јединствена решења система:

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0$$
$$a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0$$

- своди се на хомогену једначину

57. Линеарна и Бернулијева диференцијална једначина

- Линеарна једначина:
- Нормални облик: $y' + f(x)y = g(x)$
- Ако су ф-је $f(x)$ и $g(x)$ непрекидне над (a, b) тада постоји јединствено решење једначине које задовољава почетни услов $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$ и дефинисано је над (a, b). Решење се налази сменом $y(x) = u(x) \cdot v(x)$

- Бернулијева једначина:
- Нормалан облик: $y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- Смена: $z(x) = (y(x))^{-\alpha+1}$, $z'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}(x)\, y'(x)$
- Ако су $f(x)$ и $g(x)$ непрекидне над (a,b) тада кроз сваку тачку (x_0, z_0), $x_0 \in (a,b)$, $z_0 \in \mathbb{R}$, пролази јединствено решење једначине дефинисано над (a,b)

(58.) Диференцијална једначина тоталног диференцијала. Интеграциони множитељ

- Тотални диференцијал
- Нормални облик: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$
- Нека су $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ непрекидне на отвореној једноструко повезаној области G. Да би једначина $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ била једначина тоталног диференцијала потребно је и довољно да буде за свако $(x,y) \in G$:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

- Интеграциони множитељ
- Ако је $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ и постоји функција $h(x,y) \neq 0$ таква да је диференцијална једначина $h(x,y)P(x,y)dx + h(x,y)Q(x,y)dy = 0$ једначина тоталног диференцијала, тј:

$$\frac{\partial (hP)}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial (hQ)}{\partial x}(x,y)$$

онда је $h(x,y)$ интеграциони множитељ <-- mnozitelj

(59.) Клеро-ова диференцијална једначина

- Нормални облик: $y = xy' + f(y')$
- Нека функција $f(t)$ има над (a,b) непрекидан други извод који је различит од нуле и нека је $\varphi(t)$ инверзна функција

од $-f'(t)$. Тада су решења једначине функције:

1) $y = xc + f(c)$, $c \in (a, b)$ - ова фамилија правих је опште решење

2) $y = x\varphi(x) + f(\varphi(x))$ - сингуларно решење

3) свака крива састављена од произвољног лука AB криве и на њу настављених тангенти у тачкама A и B.

(60.) Лагранжова диференцијална једначина. Увођење параметра $p = y'$

- Нормалан облик: $y = xf(y') + g(y')$

- Узмимо $p = y'$ тј. $dy = p\,dx$, добијамо $y = xf(p) + g(x)$, а одавде диференцирањем $(f(p) - p)dx + (xf'(p) + g'(p))dp = 0$

1) $f(p) - p \neq 0 \Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p)-p}x + \frac{g'(p)}{f(p)-p}$, што је линеарна једначина, из које добијамо $x = x(p)$, што са $y(p) = x(p)f(p) + g(p)$ представља решење у параметарском облику

2) ако једначина $f(p) - p = 0$ има решења и ако је једно решење $p = c$, тада је решење једначине $y = cx + g(c)$

3) ако је $f(p) - p = 0$ за свако p, Лагранжова једначина постаје $y = xy' + g(y')$

(61.) Снижавање реда диференцијалне једначине

1) $y^{(n)}(x) = f(x)$

$y^{(n-1)}(x) = \int f(x)dx = f_1(x) + c_1$

$\vdots$

$y(x) = f_n(x) + \frac{c_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{c_{n-1}x}{1!} + c_n$

2) $F(x, y^{(k)}, y^{(k-1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad 1 \le k \le n$

- смена: $y^{(k)}(x) = z(x)$

$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$

3) $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \quad n \geq 2$

- смена: $y' = z(y)$

$$H(y, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0$$

4) $y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = f(x)$

$$y = y_1 \cdot z \Rightarrow y' = y_1' z + y_1 z' \Rightarrow y'' = y_1'' z + y_1' z' + y_1 z''$$

62. Линеарна диференцијална једначина n-тог реда $L_n[y] = f(x)$,

- Општи облик: $g_0(x) y^{(n)} + g_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + g_n(x) y = h(x)$
- Уз ознаку $L_n[y] = y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y$ дата диференцијална једначина је $L_n[y] = f(x)$ где је:

$$a_i(x) = \frac{g_i(x)}{g_0(x)}, \; i = 1, 2, \ldots, n \qquad f(x) = \frac{h(x)}{g_0(x)}$$

- Ако су $a_i(x)$ и $f(x)$ непрекидне над I, $x_0 \in I$ произвољна тачка, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ произвољни бројеви, тада постоји јединствено решење $y(x)$ диференцијалне једначине $L_n[y] = f(x)$ које задовољава почетни услов: $y(x_0) = \alpha_0$, $y'(x_0) = \alpha_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}$ и дефинисано је над датим интервалом I.

63. Хомогена линеарна диференцијална једначина n-тог реда $L_n[y] = 0$. Принцип суперпозиције. Фундаментални скуп решења

- Основно питање

64. Хомогена једначина са константним коефицијентима. Карактеристични полином. Опште решење

- Општи облик: $L_n[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_0 y = 0$
- $y = e^{kx} \Rightarrow L_n[e^{kx}] = 0 \Leftrightarrow k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0$
- $P_n(k)$ - карактеристичан полином
- $k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0$ - карактеристична једначина
- Решења за свако $x \in \mathbb{R}$ су функције: $y_i = e^{k_i x}, \; i = 1, 2, \ldots, n$

65. Нехомогена једначина n-тог реда са константним коефицијентима

- Нека је $y_p(x)$ неко (партикуларно) решење једначине $L_n[y]=f(x)$ и $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\dots+c_ny_n(x)$ опште решење одговарајуће хомогене једначине $L_n[y]=0$. Тада је $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$ опште решење једначине $L_n[y]=f(x)$.

66. Метод једнаких коефицијената

- Ако је једначина линеарна са константним коефицијентима облика: $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots a_ny=f(x)$ где је ф-ја $f(x)$ специјалног облика: $f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x)$, партикуларно решење тражимо у облику: $y_p(x)=x^r e^{\alpha x}(T_k(x)\cos\beta x+R_k(x)\sin\beta x)$ при чему је:
- $k=\max\{n,m\}$
- r - вишеструкост $\alpha+i\beta$ као корена карактеристичне једначине одговарајуће хомогене једначине

67.* Метод варијације константи

- Нека је $y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x)$ фундаменталан скуп једначине $L_n[y]=0$ над I. Тада се партикуларно решење $y_p(x)$ нехомогене једначине $L_n[y]=f(x)$ које задовољава почетни услов $y_p^{(i)}(x_0)=y_0^{(i)}=0$, $i=0,1,\dots,n-1$ тражи у облику:

$$y_p(x)=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)+\dots+c_n(x)y_n(x)$$

$$c_i(x)=\int_{x_0}^{x}c_i'(s)ds, \quad i=1,2,\dots,n$$

68. Ојлерова диференцијална једначина

- Општи облик:

$$(ax+b)^n y^{(n)}+a_1(ax+b)^{(n-1)}y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}(ax+b)^1y'+a_ny=f(x)$$

где су a_i, $i=1,2,\dots,n$ константе, и сменом:

$ax+b=e^t$, $ax+b>0$ $(ax+b=-e^t$, $ax+b<0)$ своди се на једначину са константним коефицијентима