Numeros de Fibonacci

- Teorema de Zeckendorf: Cada entero positivo puede ser escrito de forma unica como la suma de uno o mas numeros de Fibonnacci tal que la suma no incluya ningun par de numeros de Fibonacci consecutivos.
- Periodo de Pisano: la(s) ultima(s) una/dos/tres/cuatro cifra(s) de un numero de Fibonacci se repiten con un periodo de 60/300/1500/15000, respectivamente.
- Formula de Binet: $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$
- $\sum_{i=1}^{n} F_i=F_{n+2}-1$
- $F_{n+m}=F_{m+1}F_n+F_m F_{n-1}$
- $F_n^2-F_{n+r}F_{n-r}=(-1)^{n-r}F_r^2$
- $F_n^2-F_{n+1}F_{n-1}=(-1)^{n-1}$
- $F_m F_{n+1}-F_{m+1}F_n=(-1)^n F_{m-n}$
- $F_{2n}=F_n^2+2F_n F_{n-1}$
- $F_{2n}=F_{n+1}F_n+F_n F_{n-1}$
- $F_{2n}=F_{n+1}F_n+F_n F_{n-1}$
- $F_{3n}=2F_n^3+3F_n F_{n+1}F_{n-1}$
- $F_{3n}=5F_n^3+3(-1)^n F_n$
- $F_{3n+1}=F_{n+1}^3+3F_{n+1}F_n^2-F_n^3$
- $F_{3n+2}=F_{n+1}^3+3F_{n+1}^2 F_n-F_n^3$
- $F_{4n}=4F_n F_{n+1}\left(F_{n+1}^2+2F_n^2\right)-3F_n^2\left(F_n^2+2F_{n+1}^2\right)$
- $gcd(F_m,F_n)=F_{gcd(m,n)}$
- $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix}$

Trabajo con Bits

- Usa la siguiente formula para apagar el 1-bit mas a la derecha, produciendo 0 si no hay (ej. 01011000 se convierte en 01010000):

  $x\wedge(x-1)$
- Usa la siguiente formula para dejar encendido solo el 0-bit mas a la derecha, produciendo 0 si no hay (ej. 10100111 se convierte en 00001000):

  $\neg x\wedge(x+1)$
- Usa la siguiente formula para propagar hacia la derecha el 1-bit mas a la derecha, produciendo todos 1's si no hay (ej., 01011000 se convierte en 01011111):

  $x\vee(x-1)$
- Usa la siguiente formula para apagar la cadena mas a la derecha de 1-bits (ej. 01011000 se convierte en 01000000):

  $((x\vee(x-1))+1)\wedge x$

Si se agrega `ll` al final se puede usar con `unsigned long long`

- `__builtin_clz(unsigned int x)`: Retorna la cantidad de leading zeros.
- `__builtin_ctz(unsigned int x)`: Retorna la cantidad de trailing ceros.
- `__builtin_popcount(unsigned int x)`: Retorna la cantidad de 1-bits.
- `__builtin_parity(unsigned int x)`: Retorna la cantidad de 1-bits modulo 2.
- `__builtin_ffs(int x)`: Retorna 1 + el 1-bit menos significativo de x. Si x == 0, retorna 0.

Formulas de Sumatorias:

- $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{i=1}^{n} i^3=\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- $\sum_{i=1}^{n} i^4=\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$
- $\sum_{i=1}^{n} i^5=\frac{2n^6+6n^5+5n^4-n^2}{12}$
- $\sum_{i=1}^{n} i_{par}=n(n+1)$
- $\sum_{i=1}^{n} i_{impar}=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$
- $\sum_{i=1}^{n} r^i=\frac{r^{n+1}-1}{r-1}$
- $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$ donde H_n es el n-esimo numero armonico
- $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^k}=H_n^k$ donde H_n^k es el numero armonico generalizado
- $\sum_{i=0}^{n} i^p=\frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}+\sum_{k=1}^{p}\frac{B_k}{p-k+1}\binom{p}{k}(n+1)^{p-k+1}$

  donde B_k es un numero de Bernoulli y $B_k=-\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}\frac{B_i}{k+1-i}$ y $B_0=1$

- $\sum_{i=0}^{n-1} i\,a^i = \frac{a - n a^n + (n-1) a^{n+1}}{(1-a)^2}$
- $\sum_{i=0}^{n-1} i\,2^i = 2 + (n-2)\,2^n$ caso especial para $a=2$
- $\sum_{i=0}^{n-1} i\,2^i = 2 + (n-2)\,2^n$ caso especial para $a=\frac{1}{2}$
- $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{k} = \binom{n}{k+1}$
- $\sum_{n=s}^{t} \ln f(n) = \ln \prod_{n=s}^{t} f(n)$
- $c^{\left[\sum_{n=s}^{t} f(n)\right]} = \prod_{n=s}^{t} c^{f(n)}$
- $\sum_{r=1}^{m} S(m,r)\, r! \binom{n+1}{r+1}$ donde $S(m,r)$ es un numero de Stirling

Numeros Primos:

- *Teorema de los Numeros Primos:* el numero de numeros primos menores o iguales a M (denotado como $\pi(M)$)esta acotado por $O\left(\frac{M}{\ln(M)-1}\right)$
- *Conjetura de Goldbach (actualizada por Leonhard Euler):* Todo numero par $n \geq 4$ puede ser expresado como la suma de dos numeros primos.
- *Teorema de Fermat sobre la representacion como suma de cuadrados:* Un numero primo p se puede expresar de la forma $p = a^2 + b^2$ ssi se puede espresar de la forma $p = 4c + 1$.

Funcion Phi y Teorema de Euler:

- La funcion $\phi(n)$ de Euler es igual a la cantidad de numeros naturales menores o iguales a n que son coprimos con el.
- Por definicion $\phi(1) = 1$ y $\phi(p)_{p\ primo} = p - 1$
- Otras propiedades son

$\phi(n \cdot m)_{mcd(n,m)=1} = \phi(n) \cdot \phi(m)$ y $\phi(p^k)_{p\ primo} = (p-1)\, p^{k-1}$

- *Producto de Euler:* Si $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ entonces $\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$
- $\sum_{d/n} \phi(d) = n$
- Teorema de Euler: Dados $a, n \in \mathbb{N}$ tales que $(a,n) = 1$, se tiene que: $a^{\phi(n)} \equiv 1 \,(mod\, n)$

Formulas y Teoremas Raramente Usados

- *Teorema de Erdos Gallai:* Una secuencia de enteros no negativos $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ puede ser un secuencia de grados de un grafo simple de n vertices ssi $\sum_{i=1}^{n} d_i$ es par y se cumple $\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} min(d_i, k)$ para todo $k \in [1, n]$
- *Formula de Euler para Grafos Planares:* $V - E + F = 2$, donde F es el numero de caras (Cuando un grafo planar es dibujado sin ningun cruce, cualquier ciclo que rodea una region sin ninguna arista desde la region hasta la region forma una cara).
- *Circulo de Moser:* Determinar el numero de partes en las que se divide un circulo si n puntos en su circunferenciason unidos por cuerdas sin ningun trio internamente concurrente. $g(n) = C_4^n + C_2^n + 1$
- *Teorema de Pick:* Sea i el numero de puntos enteros dentro de los bordes de un poligono, A el area de este y b el numero de puntos enteros en el borde del poligono, se cumple que: $A = i + \frac{b}{2} - 1$.

Area de un Poligono dados sus puntos

- $A = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & y_{n-1} \end{bmatrix}$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (x_0 y_1 + x_1 y_2 + \ldots + x_{n-1} y_0 - x_1 y_0 - x_2 y_1 - \ldots - x_0 y_{n-1})$$

Los Numeros de Catalan

- $Cat(n) = \frac{C_n^{2n}}{n+1}$
- $Cat(n+1) = \frac{4n+2}{n+2} Cat(n), Cat(0) = 1$
- $Cat(n)$ Cuenta el numero de expresiones que contienen n pares de parentesis que estan correctamente ordenados.
- $Cat(n)$ Cuenta el numero de formas en las que $n+1$ factores pueden ser parentizados.
- $Cat(n)$ Cuenta el numero de formas en las que un poligono de $n+2$ lados puede ser triangulado
- $Cat(n)$ cuenta el numero de caminos monotonicos a traves de los bordes de una matriz de nxn y que no atraviezan su diagonal.
- $Cat(n)$ Cuenta el numero de formas de unir $2n$ puntos sobre una circunferencia a la misma distancia, de

forma que las cuerdas no se intersecten.

- Supongase que se tira una moneda $2n$ veces y que el resultado es head exactamente n veces y tail exactamente n veces. El numero de secuencias de lances en los que el numero acumulado de heads es siempre al menos tan grande como el numero acumulado de tails es $Cat(n)$. Por ejemplo para $n=3$ tenemos HTHTHT, HTHHTT, HHTTHT, HHTHTT, HHHTTT.
- En el ejemplo anterior, la cantidad de secuencias de lances en las que el numero acumulado de heads siempre excede el numero acumulado de tails (until the very last toss) es $Cat(n-1)$ .Para $n=3$ tenemos HHTHTT, HHHTTT.
- El numero de formas de colocar los numeros $1,2,\ldots,2n$ en una matriz monotona de $2\times n$ es $Cat(n)$ Una matriz es monotona si los valores crecen dentro de cada columna y dentro de cada fila.

Solucion de Ecuaciones Recursivas

Recurrencia Lineal Homogenia:

- La forma general es $a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = 0$
- Su ecuacion caracteristica es $a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k = 0$
- Suponiendo que $r_{1,} r_{2,} r_{3,} \ldots, r_k$ son **k** raices distintas de la ecuacion caracteristica la solucion sera $t_n = \sum_{i=1}^{k} c_i r_i^n$ donde las k constantes $c_{1,} c_{2,} c_{3,} \ldots, c_k$ se pueden hallar sustituyendo t_n por los casos base y hallando las soluciones del sistema resultante.
- Cuando las raices no son todas diferentes, si m_i es la multiplicidad de la raiz r_i , entonces la solucion tiene la foma $t_n = ¿$ donde todas las c' son potencialmente diferentes, y pueden ser indexadas como $c_{1,} c_{2,} \ldots, c_k$

Recurrencia Lineal No Homogenia y Miembro Derecho de la Forma $b^n P(n)$:

- La forma general es: $a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = b^n P(n)$ donde **b** es una constante y P(**n**) es un polinomio de grado **d**.
- La ecuacion caracteristica es :

$$a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k = 0$$

Recurrencia Lineal No Homogenia y Miembro Derecho de la Forma $b_1^n P_1(n) + b_2^n P_2(n) + \ldots + b_q^n P_q(n)$:

- La forma general es:

$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = b_1^n P_1(n) + \ldots + b_q^n P_q(n)$ donde las **b** son constantes y $P_i(n)$ es un polinomio de grado d_i .

- La ecuacion caracteristica es :

$$\left(a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k\right)\left(x - b_1\right)^{d_1+1} \ldots \left(x - b_q\right)^{d_q+1} = 0$$