Variaciones sin Repeticion

Se dan **n** objetos. Se forman todas las distribuciones ordenadas de los **k** objetos. El numero de distribuciones es $V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$

Variaciones con Repeticion:

Se dan objetos que pertenecen a **n** formas distintas. Se forman todas las distribuciones ordenadas de **k** objetos en las cuales pueden figurar objetos repetidos. Dos distribuciones se consideran iguales si en cada posicion tienen objetos iguales respectivamente. El numero de estas distribuciones es $\bar{V}_k^n = n^k$

Permutaciones sin Repeticion

Se dan **n** objetos. Se forman todas las distribuciones ordenadas de los **n** objetos. El numero de distribuciones es $P_n = n!$

Permutaciones con Repeticion

Se dan **n** objetos que pertenecen a k clases. Se forman todas las distribuciones ordenadas de los **n** objetos. Los objetos de una misma clase son iguales y su cantidad es **n_1, n_2, ..., n_k** respectivamente (**$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$**). El numero de distribuciones es

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

Combinaciones sin Repeticion

Se dan **n** objetos y se quieren separar en dos grupos, uno de **k** objetos y el otro de **n-k**. Esto se puede hacer de $C_k^n = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Combinaciones con Repeticion

Se tienen objetos de **n** tipos diferentes. De cuantas formas podemos tomar **k** objetos sin importar que tomemos objetos de un mismo tipo.

$$\bar{C}_k^n = C_k^{n+k-1}$$

Propiedades de los Coeficientes Binomiales

- $C_k^n = C_{n-k}^n$
- $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \ldots + C_n^n = 2^n$
- $C_0^n - C_1^n + C_2^n - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$
- $C_n^n + C_n^{n+1} + C_n^{n+2} + \ldots + C_n^{n+m-1} = C_{n+1}^{n+m}$

Propiedades de los Factoriales y las Permutaciones

- $n! = (n-1)\left[(n-1)! + (n-2)!\right]$
- $\sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = k^n$

Subfactoriales

La cantidad de formas en las que se pueden ordenar n objetos de tal forma que ningun objeto quede en su posicion original es:

- $D_n = P_n - C_1^n P_{n-1} + C_2^n P_{n-2} - \ldots + (-1)^n C_n^n$
- $D_n = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$
- $D_n = (n-1)\left[D_{n-1} + D_{n-2}\right]$ con **$D_0 = 1$** y **$D_1 = 0$**
- $D_n = n D_{n-1} + (-1)^n$

Distribucion en Cajones de Objetos Diferentes

Se dan **n** objetos diferentes y **k** cajones. Hay que colocar **n_1** objetos en el primer cajon, **n_2** en el segundo, ... , **n_k** en el k-esimo, siendo **$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$**.

Esto se puede hacer de $P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$

La equivalencia entre los dos problemas se demuestra si a cada objeto le hacemos corresponder el numero del cajon donde va a estar. En la permutacion formada habran n_1 numeros 1, n_2 numeros 2, n_k numeros k. Ahora el problema se reduce a encontrar la cantidad de permutaciones.

Distribucion en Cajones de Objetos Iguales

- **n** objetos iguales se distribuyen entre **k** cajones de C_{k-1}^{n+k-1} maneras. Para deducir la formula se usan **k-1** objetos iguales para separar los **n** objetos.
- Supongamos que en cada cajon debe haber por lo menos r objetos. Entonces los colocamos de antemano en cada cajon y quedan $n - rk$ objetos combinables. Hay $C_{k-1}^{n-k(r-1)-1}$ formas.
- En particular, si en un cajon puede haber no menos de un objeto, el numero de maneras es C_{k-1}^{n-1} .

Distribucion de Tipos de Objetos en Cajones

- Si se reparten objetos de diferentes tipos, hay que hallar el numero de formas de reparto para cada tipo y, en virtud del principio de multiplicacion, multiplicamos los resultados parciales. Si hay **n_1** objetos del tipo **1**, **n_2** del tipo **2**, ... **n_m** del **m**-esimo tipo, entonces el numero total de distribuciones en **k** cajones es $C_{k-1}^{n_1+k-1} C_{k-1}^{n_2+k-1} \ldots C_{k-1}^{n_m+k-1}$
- En particular, si **$n_1 = n_2 = \ldots = n_m = 1$**, el numero de formas es k^m .

Distribucion de Objetos Diferentes en Cajones no Vacios

- Se distribuyen **n** objetos distintos en **k** cajones de tal forma que en cada uno haya al menos un objeto. Esto se puede hacer de $k^n - C_1^k (k-1)^n + C_2^k (k-2)^n - \ldots + (-1)^{k-1} C_{k-1}^k 1^n$ maneras.

Distribucion de Tipos de Objetos en Cajones no Vacios

Se dan **n_1** objetos del primer tipo, **n_2** del segundo, ... **n_m** del m-esimo tipo. Estos se pueden distribuir entre **k** cajones de

$$C_{k-1}^{n_1+k-1} C_{k-1}^{n_2+k-1} \ldots C_{k-1}^{n_m+k-1} -$$
$$- \; C_1^k C_{k-2}^{n_1+k-2} C_{k-2}^{n_2+k-2} \ldots C_{k-2}^{n_m+k-2} \; +$$
$$+ \; C_2^k C_{k-3}^{n_1+k-3} C_{k-3}^{n_2+k-3} \ldots C_{k-3}^{n_m+k-3} - \ldots + (-1)^{k-1} C_{k-1}^k$$

Distribucion de Objetos Diferentes en Cajones Diferentes

- Si se tienen **n** objetos distintos, el numero de formas de distribuirlos en **k** cajones distintos, teniendo en cuenta el orden de los objetos dentro de los cajones, es V_n^{n+k-1} .
- En efecto, agreguemos a los **n** objetos distribuidos **k-1** esferas iguales y consideremos todas las permutaciones posibles de los **n+k-1** objetos.

El segundo miembro de la expresion se justifica tomando primero todas las posibles permutaciones de los **n** objetos, luego los distribuimos como si fueran iguales en los **k** cajones.

- Si ningun cajon puede estar vacio, entonces el numero de formas es $n!\, C_{k-1}^{n-1}$
- El numero total de maneras de distribuir **n** objetos distintos en **k** cajones distintos, pudiendo dejar de usar algunos objetos, es

$$C_0^n V_0^{k-1} + C_1^n V_1^k + C_2^{k+1} + \ldots + C_n^n V_k^{n+k-1}$$

- Si en este caso tampoco ningun cajon puede quedar vacioentonces el numero de formas es $C_k^n C_{k-1}^{k-1} k! + C_{k+1}^n C_{k-1}^k (k+1)!$ + $C_{k+2}^n C_{k-1}^{k+1} (k+2)! + \ldots + C_n^n C_{k-1}^{n-1} n!$

Combinaciones con Pares Prohibidos

- El numero de sucesiones de **n** ceros y **k** unos, donde no puede haber ningun par de unidades juntas es C_k^{n+1} , siempre que $k \le n+1$. Esta formula se deduce observando que entre los **n** ceros hay **n+1** intervalos (contando los de los extremos), y en cada intervalo puede haber solamente un **1**. Hay C_k^{n+1} formas de lograr esto.
- Si a la mesa redonda estan sentados n caballeros y hay que escoger k de ellos de modo que entre ellos no haya ningun par de vecinos, esto se puede efectuar de $C_{k-1}^{n-k-1} + C_k^{n-k}$ maneras.
- El numero de permutaciones de **n** objetos **1, 2, ..., n** donde no figuran los pares **(1,2)** , **(2, 3), ..., (n-1, n)** como numeros consecutivos dentro de la permutacion, se expresa mediante la formula:
$$E_n = P_n - C_1^{n-1} P_{n-1} + C_2^{n-1} P_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} P_1$$
- La cantidad de permutaciones de **n** elementos en las que no figuran $r \le n-1$ pares prefijados es igual a
$$P_n - C_1^r P_{n-1} + C_2^r P_{n-2} - \ldots + (-1)^r C_r^r P_{n-r}$$
- Si $r > n-1$ se obtiene otro resultado:
$$E_n = P_n - C_1^n P_n - 1 + C_2^n P_{n-2} -$$
$$\ldots + (-1)^k C_k^n P_{n-k} + \ldots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^n P_1$$
$$E_n = n D_{n-1}$$

Enumerando Grafos

Grafos:

- El numeros de grafos simples etiquetados con n vertices y m aristas es $C_m^{C_2^n}$.
- For $m > C_2^n / 2$, el numero de grafos simples etiquetados con n vertices y m aristas es el mismo que que numeros de grafos etiquetados con n vertices y of labeled graphs with n vertices y $C_2^n - m$ aristas.
- El numeros total de grafos simples con n vertices es $2^{\binom{n}{2}}$.
- El numero G_n de grafos simples conectados con n vertices puede ser determinados por la siguiente recursion: $G_1 = 1,$
$$G_n = 2^{\binom{n}{2}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} i C_i^n 2^{\binom{n-i}{2}} G_i$$

Digrafos

- El numero de digrafos etiquetados sin ciclos que tienen n nodos y m arcos es $\binom{n(n-1)}{m}$
- Para $m > n(n-1)$, el numero de digrafos etiquetados con n vertices y m arcos es el mismo que el de los digrafos con n vertices y $n(n-1) - m$ arcos.
- El numero total de digrafos etiquetados con n vertices es $2^{n(n-1)}$
- El numero de torneos (digrafo tal que para cada par (u, v) de vertices, o hay un arco de u a v o un arco de v a u , pero no ambos.) con n vertices es $2^{\binom{n}{2}}$. El mismo que el numero de grafos con n vertices.

Arboles de Expansion

- *Formula de Cayley:* la cantidad de arboles de expansion es $\tau(K_n) = n^{n-2}$ donde K_n es un grafo completo con n vertices etiquetados.
- El numero de arboles de expansion en un grafo bipartito completo es $\tau(K_{n,m}) = m^{n-1} \cdot n^{m-1}$

Arboles en General

- Hay n^{n-2} arboles etiquetados con n vertices (Formula de Cayley).
- El numero de arboles etiquerados con raiz de n vertices es n^{n-1}

Arboles Binarios, Ordenados y left-right

- $Cat(n)$ cuenta el numero de arboles binarios distintos de **n** vertices.
- El numero de arboles ordenados (los hijos de cada vertice estan ordenados linealmente) con n vertices es $Cat(n-1)$
- El numero de arboles left-right (arbol binario en el cual cada nodo es padre o de cero o de dos hijos) con n vertices interiores y $n+1$ hojas, es $Cat(n)$.