

# Inversion de la transformée de Radon

L. Desbat - Laurent.Desbat@imag.fr

M2P IICAO - UFR IMA

1. Programmez la résolution du problème de tomographie par une méthode de rétroprojection filtrée. Testez cette méthode sur les jeux de données fournies.
2. Calculez et visualisez le module de la transformée de Fourier bi-dimensionnelle des deux jeux de données fournies. Que remarquez vous? En déduire des conditions d'échantillonnage. Plus précisément proposez des matrices  $W$  telle que les translatés  $K + 2^{-t}\mathbb{Z}^2$  du support essentiel  $K$  de la transformée de Fourier des données soient sans recouvrement. Considérez d'abord le cas simple où  $W$  est diagonale, puis le cas général ( $W$  non nécessairement diagonale).
3. Programmez la résolution du problème de tomographie par une méthode de Fourier (transformée de Fourier monodimensionnelle de chaque projection, interpolation d'une grille polaire vers une grille cartésienne, transformée de Fourier inverse 2D). Comparez cette approche avec l'approche précédente.
4. Proposez votre propre environnement de modélisation de la transformée de Radon. Par exemple, calculez les projections de Radon d'indicatrices de disque, (le cas des indicatrices d'ellipse est plus intéressant, mais plus compliqué) et utilisez votre environnement pour tester vos deux programmes de résolution du problème.

## A Tomographie Médicale

La tomographie, du grec *tomos* "coupe", est une technique d'imagerie bien connue dans le monde de la santé. Elle permet de produire la reconstruction d'une coupe du corps humain, et donc de visualiser les organes selon un plan de coupe. Cette reconstruction s'opère à partir de mesures d'atténuation de rayons X qui traversent le patient suivant des droites de ce plan. Mathématiquement, le problème à résoudre est celui de l'identification d'une fonction du

plan (de coupe) connaissant l'intégrale sur les droites du plan (en pratique, on ne connaît qu'un nombre fini de mesures, c'est à dire l'atténuation sur un échantillon des droites du plan). Ce procédé d'imagerie est plus connu sous le nom de scanner médical. Un scanner se présente sous la forme d'un tube ou un anneau dans lequel on positionne le patient : un générateur de rayons-X et une couronne de détecteurs tournent alors autour du patient afin de mesurer l'atténuation des rayons-X suivant de nombreuses droites d'un plan. Ses principaux inventeurs, Cormack et Hounsfield, furent couronnés à la fin des années 70 par le prix Nobel de Médecine. Le principe de fonctionnement d'un scanner est basé sur l'atténuation des rayons X lorsqu'ils traversent de la matière. Soit  $x \in \mathbb{R}^2$  un point du plan, notons  $f$  la fonction qui associe en tout  $x$  le coefficient d'atténuation  $f(x)$  caractéristique de la matière traversée par des rayons X. Nous supposons que le support de cette fonction est borné (c'est le cas de toute section d'un individu!) et contenu dans le disque unité noté  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2, (x_1^2 + x_2^2) < 1\}$ . En pratique on normalise le problème en choisissant comme unité une grandeur légèrement supérieure au demi-diamètre de la section d'un individu. Donc nous ferons l'hypothèse que  $x \notin \Omega \implies f(x) = 0$ . L'axe de rotation du scanner passe par  $O$ , le centre du disque. Deux vecteurs canoniques  $e_1, e_2$  sont choisis pour former un repère unitaire direct  $(O, e_1, e_2)$ , (voir les figures 1, 2 et 3). Supposons qu'un faisceau de rayons X traverse cette matière d'un point  $x_S$ , la source, à un point  $x_D$ , le détecteur,  $x_S$  et  $x_D$  étant sur le cercle unité. Soit  $I_S$  l'intensité du rayonnement émise par la source,  $I_D$  l'intensité mesurée sur le détecteur, en faisant l'hypothèse que le rayonnement est monochromatique<sup>1</sup> et que l'atténuation dans l'air est négligeable, on peut modéliser l'atténuation de l'intensité par la lois de Lambert Beer :

$$I_D = I_S e^{-\int_{x_S}^{x_D} f(x) dx}.$$

Plus précisément (voir la figure 1), notons  $\theta^\perp = (-\sin \phi, \cos \phi)^t$  le vecteur directeur de la droite  $(x_S, x_D)$ ,  $\theta = (\cos \phi, \sin \phi)^t$  et notons  $s$  l'abscisse de  $x_S$  (ou de  $x_D$ ) sur l'axe  $(O, \theta)$ , c'est à dire  $s = x_S \cdot \theta$  où  $y \cdot z = \sum_{j=1}^n y_j z_j$  désigne le produit scalaire Euclidien de deux vecteurs  $y$  et  $z$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  (ici  $n = 2$ ). La droite  $(x_S, x_D)$  est l'ensemble des points  $s\theta + t\theta^\perp$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . En remarquant que  $\forall t \in \mathbb{R}, t \in ]-\infty; -\sqrt{1-s^2}] \cup [\sqrt{1-s^2}; +\infty[ \implies f(s\theta + t\theta^\perp) dt = 0$ , nous

---

1. La fonction  $f$  dépend aussi de la longueur d'onde du rayonnement incident, ce que nous négligeons en faisant cette hypothèse car les sources de rayons-X utilisées en pratique ne sont pas strictement monochromatiques en général. Cette hypothèse est d'autant mieux vérifiée que la largeur de bande des X utilisée est petite.

avons :

$$I_D = I_S e^{-\int_{x_D}^{x_S} f(x) dx} = I_S e^{-\int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} f(s\theta + t\theta^\perp) dt} = I_S e^{-\int_{-\infty}^{+\infty} f(s\theta + t\theta^\perp) dt}.$$

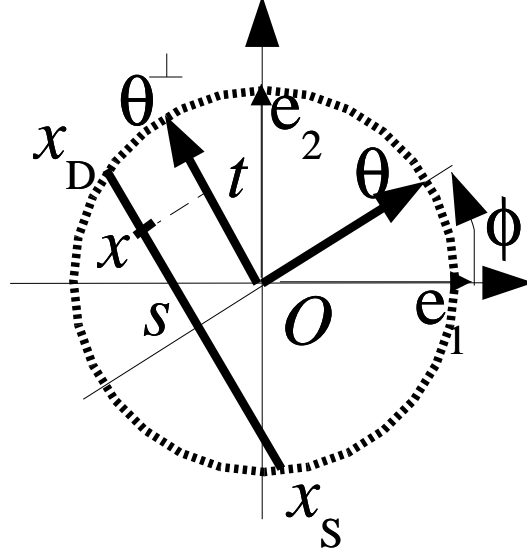


FIG. 1: *transformée de Radon : notations, signification géométrique des variables et paramètres*

Connaissant  $I_S$  et mesurant  $I_D$ , nous pouvons former le rapport  $-\ln\left(\frac{I_D}{I_S}\right)$  qui dépend linéairement de  $f$ . Ainsi, en considérant l'atténuation suivant toutes les droites du plan, c'est à dire suivant tous les ensembles  $L_{\phi,s} = \{x \in \mathbb{R}^2, x \cdot \theta = s\}$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}, \forall \phi \in [0, 2\pi[$ , ( $\theta$  est une fonction de  $\phi$ ), nous pouvons définir la transformée de Radon de  $f$  :

$$\mathcal{R}f(\phi, s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\theta + t\theta^\perp) dt \left[ = -\ln\left(\frac{I_D}{I_S}\right) \right].$$

Comme la fonction  $f$  est nulle en dehors du disque unité  $\Omega$  nous avons

$$\forall s \in [-1; 1], \mathcal{R}f(\phi, s) = \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} f(s\theta + t\theta^\perp) dt \text{ et } \forall s, |s| > 1, \mathcal{R}f(\phi, s) = 0.$$

Dans les scanners médicaux de la première génération, on utilisait un échantillonnage parallèle de l'ensemble des droites du plan (voir la figure 2).

L'échantillonnage parallèle est réalisé par la translation régulière d'un système composé d'une source de rayons X et d'un monodétecteur (échantillonnage en  $s$ ), suivant plusieurs positions angulaires  $\phi$  équiréparties sur  $[0, \pi[$  (échantillonnage en  $\phi$ ). Dans un scanner médical moderne, on utilise un échantillonnage régulier de l'ensemble des droites du plan suivant une géométrie en éventail (voir la figure 3). Pour réaliser cet échantillonnage, on dispose un ensemble de détecteurs suivant l'arc d'un cercle de rayon plus grand que l'unité et face à cet éventail de détecteurs on dispose la source. Puis, on fait tourner cet ensemble autour du patient. Ainsi, on réalise un échantillonnage de l'ensemble des droites du plan d'autant plus riche que le nombre de détecteurs suivant l'arc de cercle et que le nombre de positions angulaires autour du patient sont grands.

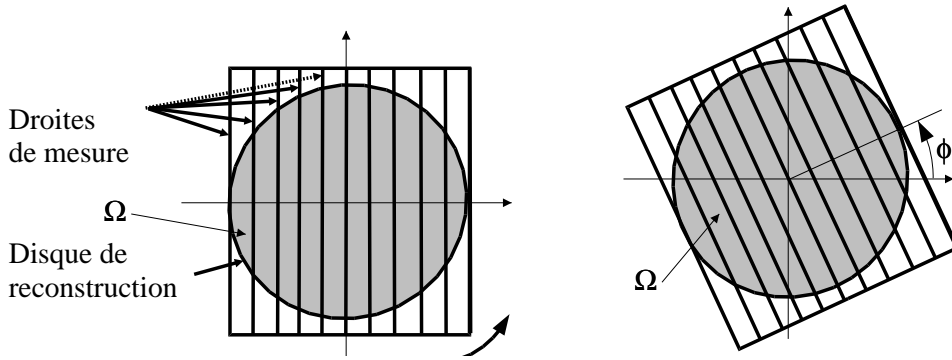


FIG. 2: *Première géométrie d'acquisition parallèle dans un scanner médicale : nous représentons les droites d'intégration pour deux positions angulaires du système de mesure (gauche et droite).*

Le problème mathématique à résoudre est alors celui de l'inversion de  $\mathcal{R}$  : en effet, connaissant  $\mathcal{R}f$ , on souhaite estimer  $f$ . Pour cela nous disposons d'un premier théorème qui établit le lien entre la transformée de Fourier de la transformée de Radon  $\mathcal{R}f$  et la transformée de Fourier de la fonction  $f$  : il s'agit du théorème de "coupe projection". Pour le formuler, nous utilisons la définition suivante de la transformée de Fourier d'une fonction  $h(x)$  intégrable sur  $\mathbb{R}^n$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ),

$$\hat{h}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} h(x) e^{-ix \cdot \xi} dx, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

et la transformée de Fourier inverse (pour  $h$  suffisamment régulière)

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{h}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

où  $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$  désigne l'élément de volume dans  $\mathbb{R}^n$  (idem pour  $d\xi = d\xi_1 \dots d\xi_n$ ). Par ailleurs, la transformée de Fourier de la transformée de Radon est définie par rapport à la variable scalaire (la seconde variable) à  $\phi$  fixé :

$$\widehat{\mathcal{R}f}(\phi, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}f(\phi, s) e^{-is\sigma} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \mathcal{R}f(\phi, s) e^{-is\sigma} ds$$

**Théorème de coupe projection 1** *Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}^2$ ,*

$$\widehat{\mathcal{R}f}(\phi, \sigma) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\sigma\theta)$$

*Preuve :*

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{R}f}(\phi, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \mathcal{R}f(\phi, s) e^{-is\sigma} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} f(s\theta + t\theta^\perp) dt e^{-is\sigma} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} f(s\theta + t\theta^\perp) e^{-i\sigma s} dt ds, \end{aligned}$$

la dernière égalité étant vérifiée dès que  $f$  est une fonction intégrable. En introduisant le changement de variable  $x = s\theta + t\theta^\perp$ , c'est à dire en remplaçant le couple  $(s, t)$  par le couple  $(x_1, x_2)$ , nous obtenons

$$\widehat{\mathcal{R}f}(\phi, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Omega} f(x) e^{-i\sigma\theta \cdot x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{-i\sigma\theta \cdot x} dx \quad (2)$$

En effet, le changement de variable étant une rotation, son Jacobien vaut 1 (valeur absolue du déterminant de matrice Jacobienne) et donc nous avons  $ds dt = dx \stackrel{\text{def}}{=} dx_1 dx_2$ . D'autre part  $x = s\theta + t\theta^\perp \Rightarrow x \cdot \theta = s$ . Nous obtenons le théorème par identification du second membre de (2) avec la définition de la transformée de Fourier (1).  $\square$

Grâce au théorème de coupe projection, nous disposons d'algorithmes qui nous permettent d'inverser la transformée de Radon : pour chaque direction de projection  $\theta$ , c'est à dire pour chaque angle  $\phi$ , nous calculons la transformée de Fourier de  $\mathcal{R}f(\phi, s)$  par rapport à  $s$ . Nous obtenons ainsi

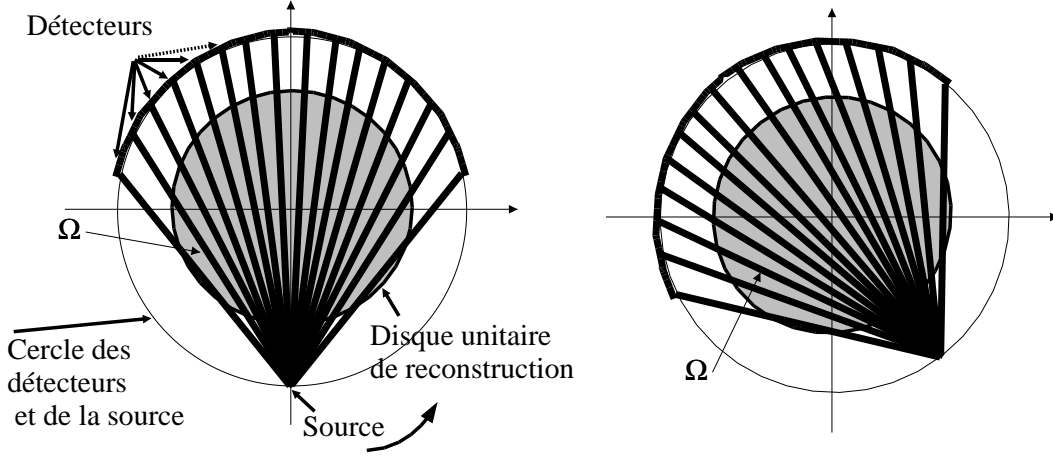


FIG. 3: *Les scanners modernes intègrent une géométrie en éventail.*

la transformée de Fourier de  $f$  suivant un échantillonnage polaire. Une première famille d'algorithmes consiste à interpoler la transformée de Fourier de  $f$  sur une grille cartésienne à partir d'une grille polaire pour le calcul d'une transformée de Fourier discrète inverse rapide. En pratique, cette opération est délicate et coûteuse. Une alternative consiste à inverser la transformée de Fourier de  $f$  selon la démarche suivante :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^2} \int_{\xi \in \mathbb{R}^2} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

On effectue le changement de variable polaire  $\xi = \sigma\theta$  pour obtenir

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\sigma\theta) e^{i\sigma x \cdot \theta} \sigma d\sigma d\phi,$$

soit, en utilisant le théorème de coupe-projection

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \widehat{\mathcal{R}f}(\phi, \sigma) e^{i\sigma x \cdot \theta} \sigma d\sigma d\phi. \quad (3)$$

En remarquant que  $\theta$  est une fonction de  $\phi$  et que  $\theta(\phi + \pi) = -\theta(\phi)$ , le lecteur vérifiera la relation de symétrie de la transformée de Radon  $\mathcal{R}f(\phi + \pi, s) = \mathcal{R}f(\phi, -s)$ . Cette relation entraîne que  $\widehat{\mathcal{R}f}(\phi + \pi, \sigma) = \widehat{\mathcal{R}f}(\phi, -\sigma)$ . Le lecteur pourra alors vérifier sans peine que

$$\int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{+\infty} \widehat{\mathcal{R}f}(\phi, \sigma) e^{i\sigma x \cdot \theta} \sigma d\sigma d\phi = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^0 \widehat{\mathcal{R}f}(\phi, \sigma) e^{i\sigma x \cdot \theta} (-\sigma) d\sigma d\phi.$$

L'équation (3) se transforme donc en

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathcal{R}f}(\phi, \sigma) e^{i\sigma x \cdot \theta} |\sigma| d\sigma d\phi. \quad (4)$$

La discrétisation de cette dernière équation (4) est à la base des méthodes numériques généralement employées dans les scanners médicaux, connues sous le nom de “rétroprojection filtrée”.