# Sur la Transformée de Hilbert

## La distribution $vp(\frac{1}{x})$

$\frac{1}{x}$ n'est pas localement intégrable autour de 0 donc on ne peut pas lui associer "naturellement" une distribution. par contre $\ln(x)' = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^+$ $\ln(-x)' = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^-$ donc $\ln(|x|)' = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\ln(|x|)$ est localement intégrable donc on peut naturellement lui associer la distribution $T_{\ln|x|} : \underset{\in \mathcal{D}(\mathbb{R})}{\varphi} \to \int \ln(|x|)\,\varphi(x)\,dx$

~~On voudrait que $T'_{\ln|x|}$ dérivée au sens des distribution soit la distribution associée à $\frac{1}{x}$ notée $vp(\frac{1}{x})$ valeur principale~~

On a

$$\langle T'_{\ln|x|}, \varphi\rangle = -\langle T_{\ln|x|}, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \ln|x|\,\varphi'(x)\,dx$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln|x|\,\varphi'(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln|x|\,\varphi'(x)\,dx$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln(x)\left(\varphi'(x) - \varphi'(-x)\right)dx$$

intégrons par partie $= -\lim_{\varepsilon\to +\infty}\Big[\ln(x)\left[\varphi(x) - \varphi(-x)\right]\Big]_{\varepsilon}^{+\infty} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x}\left(\varphi(x) - \varphi(-x)\right)dx$

$\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon) = \varphi'(0)2\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ $\quad \lim_{\varepsilon\to 0_+} \ln(\varepsilon)\,\varepsilon\,\varphi''(0) + O(\varepsilon^2) = 0$

$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon\varphi'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2}\varphi''(0) + O(\varepsilon^2)$

$\varphi(-\varepsilon) = \varphi(0) - \varepsilon\varphi'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2}\varphi''(0)$

donc

$$\langle T'_{\ln|x|}, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x}\left(\varphi(x) - \varphi(-x)\right)dx$$

est bien définie pour $\varphi \in \mathcal{D}$

on note

$$\langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x}\left(\varphi(x) - \varphi(-x)\right)dx$$

On a $x\,vp(\frac{1}{x}) = 1$ $\quad \underset{\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})}{\langle x\,vp(\tfrac{1}{x}), \varphi\rangle} = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} x\,\frac{1}{x}\left[\varphi(x) - \varphi(-x)\right]dx$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(x)\,dx + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx$$

$$= \langle 1, \varphi\rangle$$

# Transformée de Fourier de $vp(1/x)$

## Transformée de Fourier de la fonction de Heaviside.

$u' = \delta \Rightarrow 2i\pi\xi\hat{u}(\xi) = 1$
$(\Rightarrow \widehat{u'}(\xi) = \hat{\delta}(\xi))$

Nous avons pour les distributions $xT = 0 \Leftrightarrow T = K\delta \ \forall K \in \mathbb{C}$
$T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

donc comme $\xi\, vp(\frac{1}{\xi}) = 1$ une solution particulière de $(*)$ en $\hat{u}$ est $\hat{u}(\xi) = \frac{1}{2i\pi} vp(\frac{1}{\xi})$

$\xi T = 1$
a pour solution $vp(\frac{1}{\xi}) + K\delta$

~~si $T_1$ tq $\xi T_1 = 1$, $T_2$ tq $\xi T_2 = 1$ } $\xi(T_1 - T_2) = 0$ donc $T_2 = T_1 + K\delta$ avec $K \in \mathbb{C}$~~

donc si $\left.\begin{array}{l} 2i\pi\xi T_1 = 1 \\ 2i\pi\xi T_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \xi(T_2 - T_1) = 0 \Rightarrow T_2 = T_1 + K\delta$

Bref $\hat{u}(\xi) = \frac{1}{2i\pi} vp(1/\xi) + K\delta$ avec $K \in \mathbb{C}$

Comment déterminer $K$ ?

Une astuce $u_\sigma = 1 - u$ d'une part ($\sigma$ "symétrisée")

et $\langle [vp(\frac{1}{\xi})]_\sigma, \varphi \rangle = \langle vp(\frac{1}{\xi}), \varphi_\sigma \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\xi| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(-\xi)}{\xi} d\xi$

$= - \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{|\eta| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(\eta)}{\eta} d\eta = -\langle vp(\frac{1}{\xi}), \varphi \rangle$

donc $vp(\frac{1}{x})$ est impaire $\quad (vp(\frac{1}{\xi}))_\sigma = -vp(\frac{1}{\xi})$

donc $\widehat{u_\sigma} = \widehat{1-u} = \delta - \hat{u}(\xi)$

$\quad\quad \|$

Rq pour les fonction $\hat{\varphi}_\sigma = \widehat{\varphi_\sigma}$ $\quad \hat{u}_\sigma(\xi) = \frac{-1}{2i\pi} vp(1/\xi) + K\delta \quad (\delta_\sigma = \delta)$

donc $\hat{u}(\xi) - \delta = \frac{1}{2i\pi} vp(1/\xi) - K\delta$
et $\hat{u}(\xi) = \frac{1}{2i\pi} vp(1/\xi) + K\delta$

$\Rightarrow 2K\delta = \delta \Rightarrow K = \frac{1}{2}$

donc $\hat{u}(\xi) = \frac{1}{2i\pi} vp(1/\xi) + \frac{1}{2}\delta$

nous pouvons en déduire que

$$u_6 = \hat{\hat{u}} = \frac{1}{2i\pi}\widehat{vp(1/\xi)} + \frac{1}{2}$$

et donc

$$\frac{1}{i\pi}\widehat{vp(1/\xi)} = 2u_6 - 1$$

$$\widehat{vp(1/\xi)} = -i\pi(1-2u_6) = -i\pi\,\mathrm{sign}(.)$$

donc

$$\boxed{\widehat{vp(1/x)}(\xi) = -i\pi\,\mathrm{sign}(\xi)}$$

Comme nous avons

$$\mathcal{F}(T_6) = (\mathcal{F}T)_6 = \overline{\mathcal{F}}T$$

et surtout $\mathcal{F}(\mathcal{F}T) = T_6$

nous avons

$$\widehat{\widehat{vp(1/x)}} = -i\pi\,\widehat{\mathrm{sign}}$$

$$\begin{array}{c} \| \\ (vp(1/x))_6 \end{array}$$

impair

$$+\left(vp(1/x)\right) = +i\pi\,\widehat{\mathrm{sign}}(x)$$

donc $\widehat{\mathrm{sign}(x)}(\xi) = \frac{1}{i\pi}vp(1/\xi)$

## Transformée de Hilbert.

$Hf \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi}vp(\frac{1}{x}) * f$ est définie sur $f \in L^2(\mathbb{R})$

C'est un opérateur linéaire, bijectif et bicontinu de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$. C'est une isométrie et $H^{-1} = -H$

Nous avons

$$\mathcal{F}(Hf) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\pi}vp(\tfrac{1}{x}) * f\right) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\pi}vp(\tfrac{1}{x})\right)\cdot \hat{f}$$

$$= -i\,\mathrm{sign}(\xi)\,\hat{f}(\xi)$$

$$\|\widehat{Hf}\|_2 = \|Hf\|_2 = \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$$ donc $H$ est une isométrie

$$\mathcal{F}(HHf) = -i\,\mathrm{sign}\,\xi\,\mathcal{F}(Hf) = +i^2\hat{f} = -\hat{f}$$

donc $HH = -I$

$$H(-H) = (-H)H = I$$

on remarque $Hf = \overline{\mathcal{F}}(-i\,\mathrm{sign} \cdot \hat{f})$ definit $H$ la transformée de Hilbert sur $L^2(\mathbb{R})$