

# Modélisation Géométrique

## Notions de Géométrie Différentielle

### II

Stefanie Hahmann

Ensimag - Laboratoire LJK - Inria/Imagine

— *version 2014* —

## 1 Surfaces

## 2 Surfaces réglées

## 3 Surfaces développables

## 4 Technique de Modélisation Surfacique (Freeform)

# Sommaire

1 Surfaces

2 Surfaces réglées

3 Surfaces développables

4 Technique de Modélisation Surfacique (Freeform)



## Surface paramétrique

Un morceau de surface paramétrique régulière, dite **surface**, de classe  $C^r$  ( $r > 1$ ) est une application de classe  $C^r$

$$\begin{aligned} \mathbf{X} : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, w) \mapsto \mathbf{X}(u, w) &= \begin{bmatrix} x(u, w) \\ y(u, w) \\ z(u, w) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

qui est de rang 2 dans  $\Omega$ .

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est le domaine de paramètre.

$$\left. \begin{array}{l} u \mapsto \mathbf{X}(u, w), w = \text{const.} \\ w \mapsto \mathbf{X}(u, w), u = \text{const.} \end{array} \right\} \text{lignes de paramètre}$$

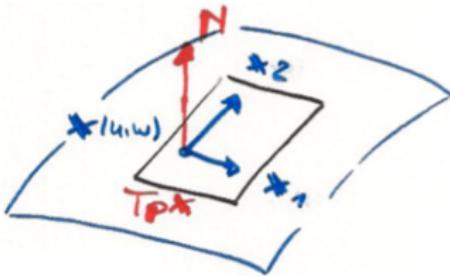
$\mathbf{X}$  de rang 2  $\Rightarrow [\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_w] \neq 0$       ( $\mathbf{X}_u := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u}$ ,  $\mathbf{X}_w := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial w}$  dérivées partielles.)

## Plan tangent en $p = (u, w)$

$$T_p \mathbf{X} = \{\mathbf{X}(u, w) + \lambda \mathbf{X}_u(u, w) + \nu \mathbf{X}_w(u, w) \mid (\lambda, \nu) \in \mathbb{R}^2\}$$

## Normale de la surface

$$\mathbf{N}(u, w) := \frac{\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_w}{\|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_w\|}$$



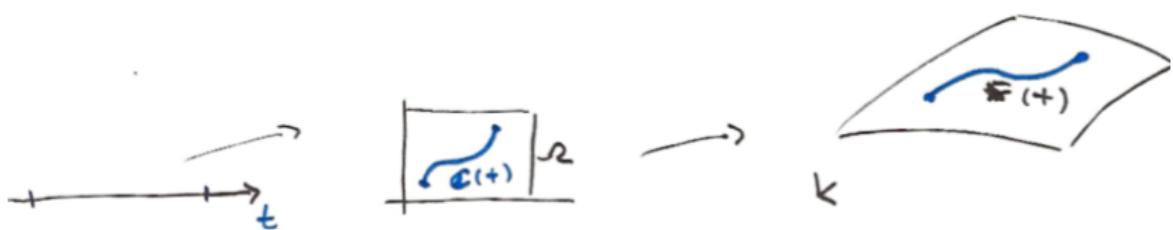
$\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_w, \mathbf{N}\}$  repère orienté positivement  $\Rightarrow$  système de coordonnées local.

- Changement de paramètre  $\Phi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$
- Relation d'équivalence  $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \circ \Phi^{-1}$
- Invariants géométriques: plan tangent, image de  $\mathbf{X}(\Omega)$ , direction de  $\mathbf{N}$ .

## Courbe sur la surface

Soit  $C : I \rightarrow \Omega$ ,  $c(t) \mapsto \begin{bmatrix} u(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$  une courbe paramétrique de classe  $C^1$ :

$$\left( \begin{array}{l} \bar{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \circ C : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto C(t) \mapsto \bar{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{X}(u(t), w(t)) \end{array} \right)$$



## Première forme fondamentale $I_p$

forme matricielle dans la base canonique  $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_w\}$  de  $T_p \mathbf{X}$  en  $p = (u, w)$

$$G = (g_{ij})_{i,j=1,2} = \begin{bmatrix} < \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u > & < \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_w > \\ < \mathbf{X}_w, \mathbf{X}_u > & < \mathbf{X}_w, \mathbf{X}_w > \end{bmatrix}$$

Forme bilinéaire symétrique  $I_p$

$$\left( \begin{array}{l} I_p : T_p \mathbf{X} \times T_p \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) \mapsto < A, B > \end{array} \right)$$

Elle est issue de la restriction du produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^3$  au plan tangent à la surface  $\mathbf{X}(u, w)$ .

La première forme fondamentale  $I_p$  et ainsi  $G$ , est un **invariant géométrique**. Les  $g_{ij}$  ne le sont pas.

Elle est positive définie en tous les points réguliers de la surface.

## Deuxième forme fondamentale $II_p$

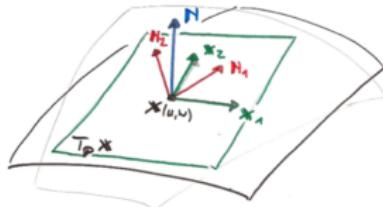
forme matricielle

$$H = (h_{ij})_{i,j=1,2} = \begin{bmatrix} < \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{N} > & < \mathbf{X}_{uw}, \mathbf{N} > \\ < \mathbf{X}_{wu}, \mathbf{N} > & < \mathbf{X}_{ww}, \mathbf{N} > \end{bmatrix}$$

Forme bilinéaire symétrique  $II_p$

$$\left( \begin{array}{l} II_p : T_p \mathbf{X} \times T_p \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) \mapsto < L_p(A), B > \end{array} \right)$$

avec  $L_p(A) = -d\mathbf{N} \circ d\mathbf{X}^{-1}(A)$  l'application de Weingarten ( $T_p \mathbf{X} \rightarrow T_p \mathbf{X}$ ).



$\mathbf{L} = \mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}$  est symétrique et réelle.

Elle admet valeur propres réelles  $\kappa_{min}$  et  $\kappa_{max}$  avec des vecteurs propres orthogonales  $\lambda_{min}$  et  $\lambda_{max}$ .

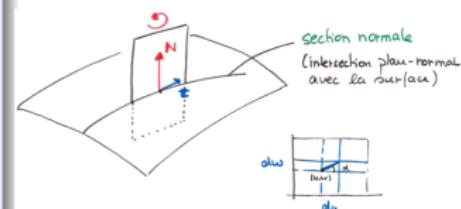
## Courbure normale

La courbure normale de  $\mathbf{X}$  en un point  $(u, w)$

$$\kappa_n(\lambda) = \frac{h_{11} + 2h_{12}\lambda + h_{22}\lambda^2}{g_{11} + 2g_{12}\lambda + g_{22}\lambda^2}, \quad \lambda = dw/du = \tan \alpha$$

est une fonction quadratique rationnelle. Les valeurs extrêmes  $\kappa_{min}$  et  $\kappa_{max}$  correspondent aux racines  $\lambda_1, \lambda_2$  de

$$\det \begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0$$



## Courbures principales

$\kappa_{min}$  et  $\kappa_{max}$  s'appellent les **courbures principales** de  $\mathbf{X}$  en  $(u, w)$ .  
 $\lambda_1 = \lambda_{min}, \lambda_2 = \lambda_{max}$  sont les **directions principales**.

Comme vecteurs propres de l'application de Weingarten  $L$  les directions principales sont orthogonales.

## Lignes de courbures

Réseau de lignes orthogonales dont le tangentes sont égales aux directions principales.

## Courbure de Gauß

$$K = \kappa_{min} \cdot \kappa_{max}$$

$$K = \frac{\det H}{\det G} = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

## Courbure moyenne

$$M = \frac{1}{2}(\kappa_{min} + \kappa_{max})$$

$$M = \frac{h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11}}{2 \det G}$$

Inversement:

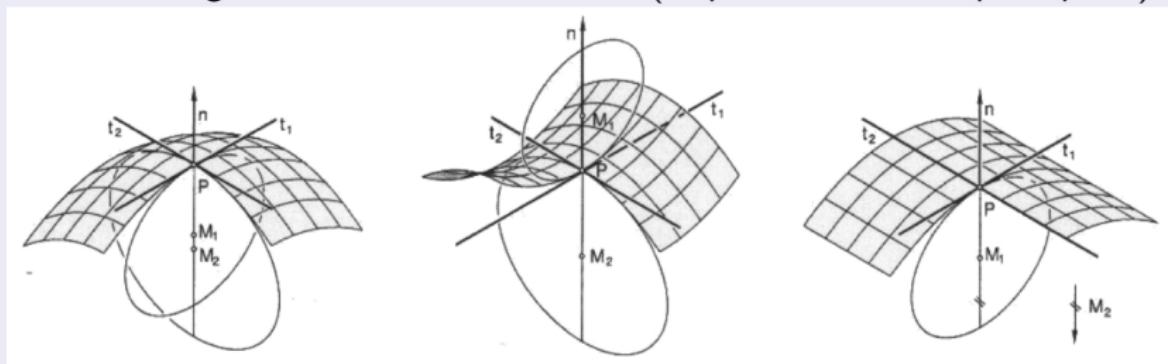
$$\kappa_{min,max} = M \pm \sqrt{M^2 - K}$$

*Remarque:* Les formes fondamentales  $I_p$ ,  $II_p$  et les courbure principales sont des invariants géométriques.

*Remarque:* sur une sphère:  $\kappa_{min} = \kappa_{max} = const$  en tout point.

## Caractérisation des points de la surface

en fonction du signe de la courbure de Gauß (resp. des courbures principales)



$$K > 0$$

point elliptique

$$K < 0$$

point hyperbolique

$$K = 0$$

point parabolique

Représentation locale de la surface

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  surface paramétrique,  $(u_0, v_0) \in \mathcal{S}$   
 $f(u, v)$  distance du point  $\mathbf{x}(u_0 + \eta^1, v_0 + \eta^2)$  au plan tangent au  $\mathbf{x}_0$ .



$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u_0 + \eta^1, v_0 + \eta^2) &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1'(u_0)\eta^1 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_{11}'(u_0)\eta^1\eta^2 + O(\|\eta\|^3) \\ f(u, v) &= \langle \mathbf{x}(u_0 + \eta^1, v_0 + \eta^2) - \mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle \\ &= \frac{1}{2}h_{11}(u_0)\eta^2 + O(\|\eta\|^3) \end{aligned}$$

On définit le paraboloid osculateur

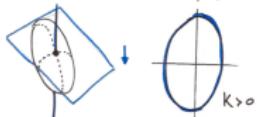
$\mathbf{P}(\eta^1, \eta^2) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1'(u_0)\eta^1 + \frac{1}{2}h_{11}(u_0)\eta^2 \mathbf{N}(u_0)$   
 qui se comporte qualitativement à l'ordre 2  
comme la surface en  $\mathbf{x}_0$

*Signification des deux FF*

On distingue 4 cas pour caractériser  $\mathbf{x}(u_0)$ :

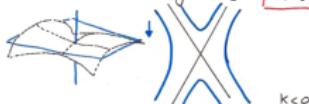
## (1) POINT ELLIPTIQUE

$h_{11}(u_0)\eta^2$  défini positive  $\Leftrightarrow K(u_0) > 0$   
 $P$  est un paraboloid elliptique.



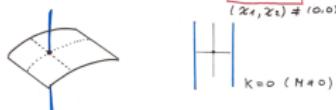
## (2) POINT HYPERBOLIQUE

$h_{11}(u_0)\eta^2$  est défini négative  $\Leftrightarrow K(u_0) < 0$



## (3) POINT PARABOLIQUE

$h_{11}(u_0)\eta^2$  non défini  $\Leftrightarrow K(u_0) = 0$   
 $(x_1, x_2) \neq (0,0)$



## (4) POINT PLANAIRE

$h_{11}(u_0) = 0 \Leftrightarrow D_{11} = D_{22} = 0$  au  $\mathbf{x}_0$

UMBILIC  
 point singulier, pas de directions principales

Caractérisation locale de la surface par la courbure de Gauss  $K$ . »

# Sommaire

1 Surfaces

2 Surfaces réglées

3 Surfaces développables

4 Technique de Modélisation Surfacique (Freeform)

## Surface réglée

$\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  est appellé surface réglée, si il existe une paramétrisation t.q.

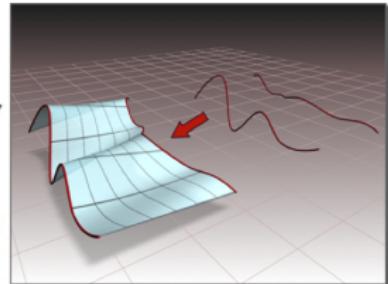
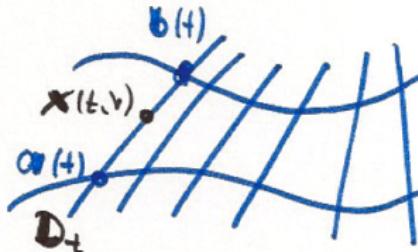
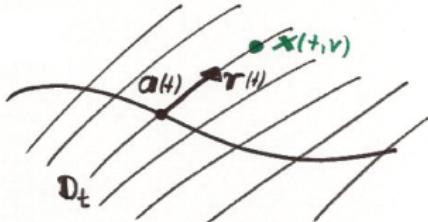
$$\mathbf{X}(t, v) = \mathbf{a}(t) + v \cdot \mathbf{r}(t), \quad t \in I, v \in \mathbb{R}$$

point  $\mathbf{a}(t)$ , vecteur  $\mathbf{r}(t) \neq 0$ ,  $\|\mathbf{r}\| = 1$ .

La droite  $D_t$  engendré par  $\mathbf{r}(t)$  s'appelle génératrice.

La courbe  $\mathbf{a}(t)$  s'appelle directrice.

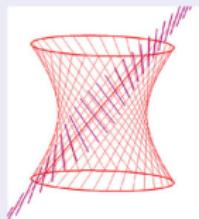
autre définition:  $\mathbf{r}(t) := \mathbf{b}(t) - \mathbf{a}(t)$ , où 2  $\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)$  sont 2 courbes gauches.



## Exemples de surface réglées

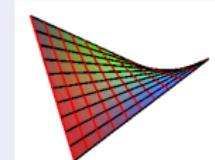
- **hyperboloïde de révolution**  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

$$\mathbf{x}(t, v) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

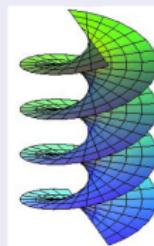


- **paraboloïde hyperbolique**  $z = kxy, k \neq 0$

$$\mathbf{x}(t, v) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -0 \\ 1/k \\ t \end{pmatrix}$$

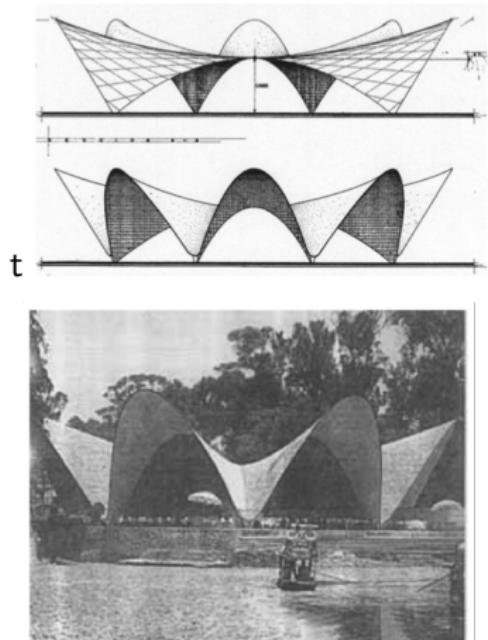


- **hélicoïde réglée**



## Théorème

Pour une surface réglée la courbure de Gauß est  $K \leq 0$  en tout point régulier.



Restaurant Los Manantiales à Mexico



# Sommaire

1 Surfaces

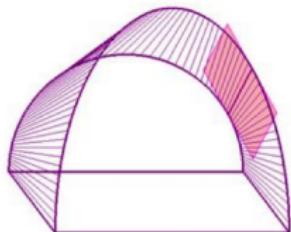
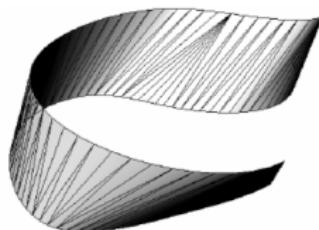
2 Surfaces réglées

**3 Surfaces développables**

4 Technique de Modélisation Surfacique (Freeform)

## Surface développable

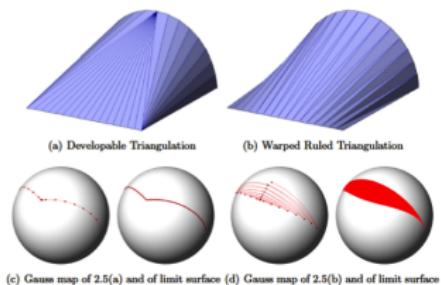
Une surface  $C^1$  est appelée développable si chaque point a un voisinage qui peut être développé de façon isométrique au plan, tel que la longueur d'arc est préservée.



### propriétés

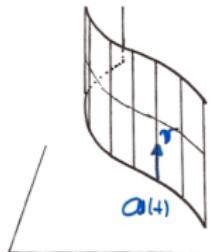
- Une surface développable peut être déroulée (développée) sur un plan sans étirements ni compressions (préservation des longueurs).
- Une surface est développable ssi sa courbure de Gauß  $K = 0$  en tout point régulier.
- Le vecteur normal  $\mathbf{n}$  est constant le long de la génératrice  $D_t$ .

## propriétés (suite)

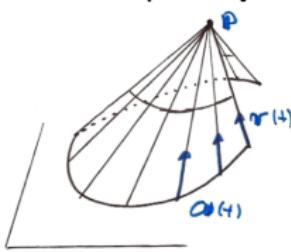


- La Gauß map d'une surface développable est une courbe.
- Les surfaces suivantes sont développables:
  - $\mathbf{X}(t, v) = \mathbf{a}(t) + v \cdot \mathbf{r}$  surface cylindrique,
  - $\mathbf{X}(t, v) = v \cdot \mathbf{r}(t)$  surface conique
  - $\mathbf{X}(u, v) = \mathbf{a}(t) + v \cdot \mathbf{a}'(t)$  développée tangentielle le plan.

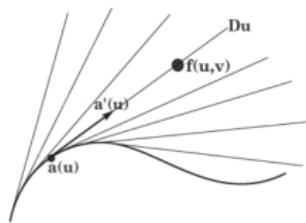
Cylindre généralisée  
 $\mathbf{a}(t) \in$  plan,  
 $\mathbf{r}(t)$  tous parallel



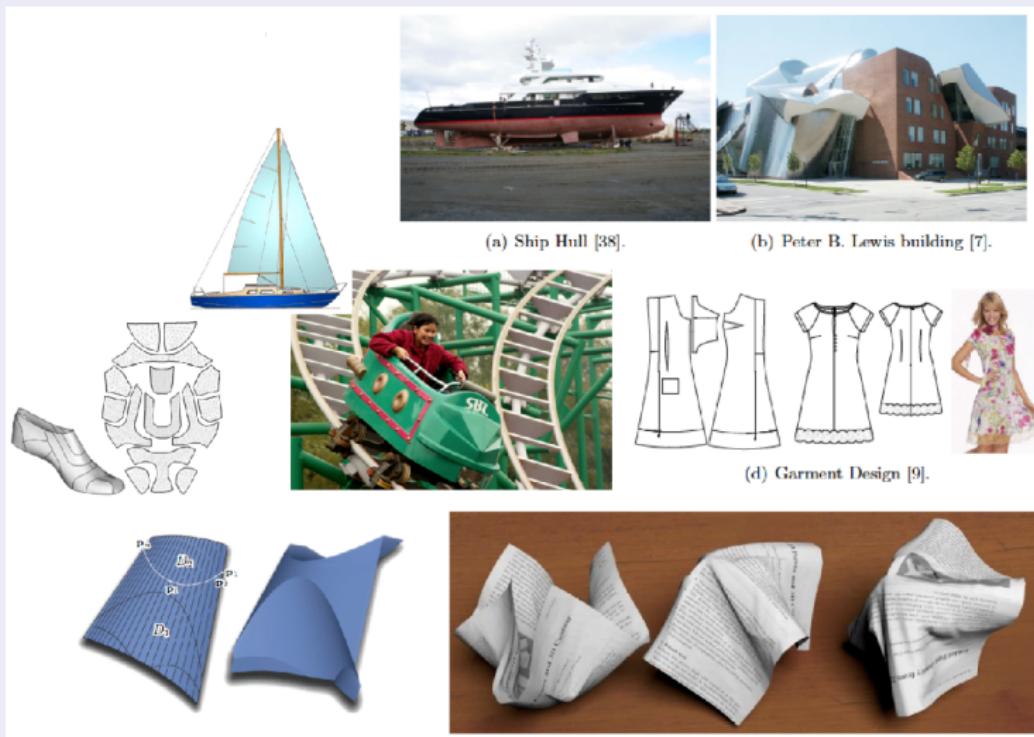
Cône généralisé  
 $D_t$  passent toutes par un même point  $\mathbf{p}$



Développée tangentielle



# Applications



## Applications (Batiments réalisés à partir de surf. dév.)

L'opéra de Ténérife par l'architecte Santiago Calatrava



Le musée Guggenheim de Bilbao par l'architecte Frank Gehry.



## Applications (suite)



Figure 1: *The Morphosense ribbon alone and laying on a physical surface.*

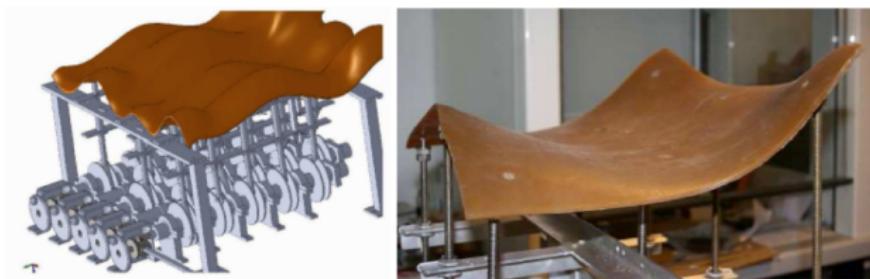


Figure 2: *Plateforme de contrôle*

# Sommaire

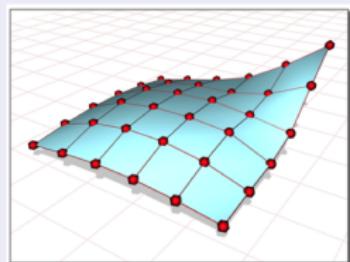
1 Surfaces

2 Surfaces réglées

3 Surfaces développables

4 **Technique de Modélisation Surfacique (Freeform)**

## Surface par interpolation



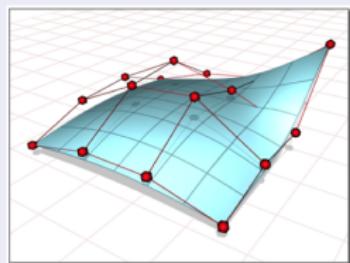
Lagrange interpolation

$$\mathbf{X}(u, w) = \sum \sum \mathbf{P}_{ij} L_i(u) L_j(w)$$

Hermite interpolation

$$\mathbf{X}(u, w) = \sum \mathbf{P}_{ij} H_i H_j + \sum \mathbf{P}'_{ij} \bar{H}_i \bar{H}_j$$

## Surface spline



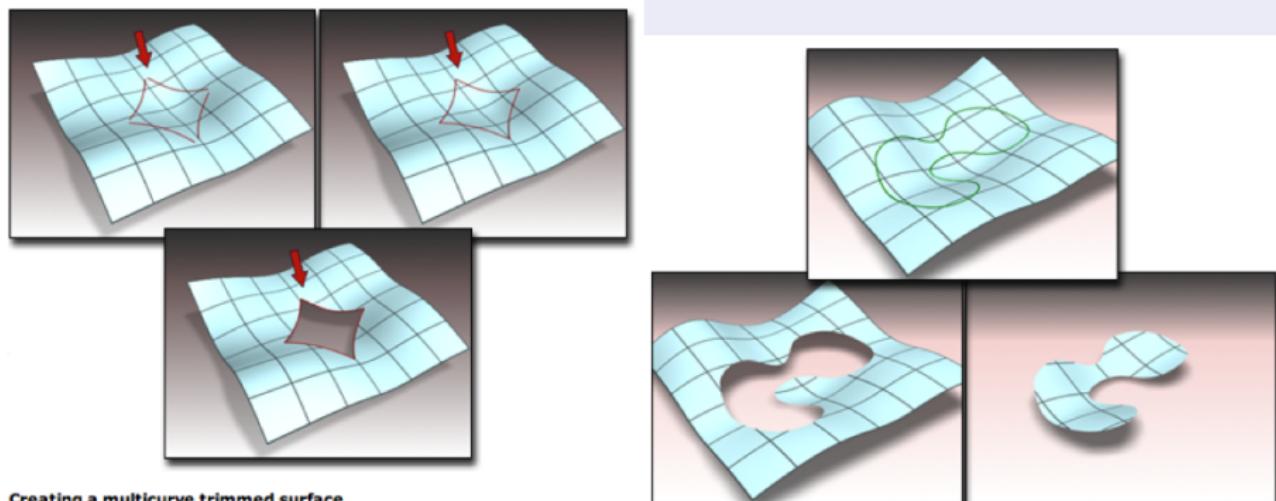
Bézier surface

$$\mathbf{X}(u, w) = \sum \sum \mathbf{b}_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$$

B-spline surface

$$\mathbf{X}(u, w) = \sum \sum \mathbf{d}_{ij} N_{i,n}(u) N_{j,m}(v)$$

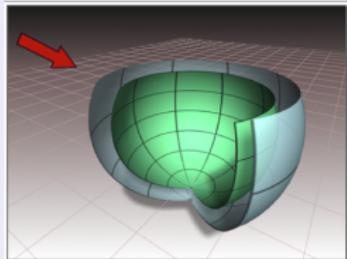
## Surface trimmée



Creating a multicurve trimmed surface

[images 3DSmax]

## Surface offset

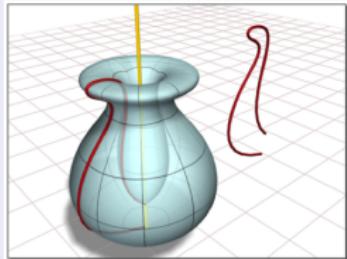


$$\begin{aligned}\mathbf{S}(u, w) = \\ \mathbf{X}(u, w) + k \cdot \mathbf{N}(u, w), \quad k \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Attention aux auto-intersections quand  $k > 1/\kappa_{max}$  (rayon courbure minimal)

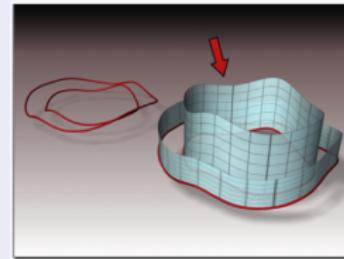
## Surface de révolution

Surface paramétrique de  $\mathbb{R}^3$ , balayée par rotation d'une courbe plane, appelée mérienne.



## Surface d'extrusion

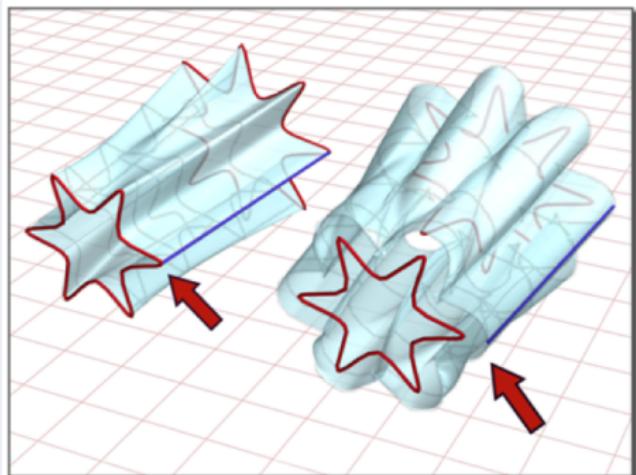
Extrusion d'un profil le long une direction (droite).



[images 3DSmax]

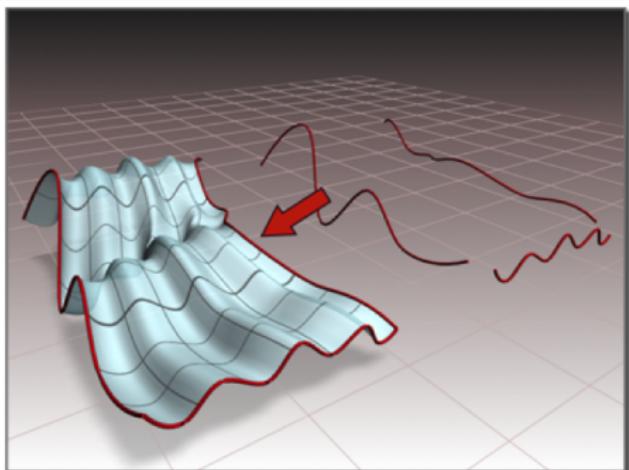
## Surface par balayage (sweep)

Balayage d'un profil le long d'une trajectoire courbe.



1-rail sweep surface

Changing the position of the rail can change the shape of the surface.

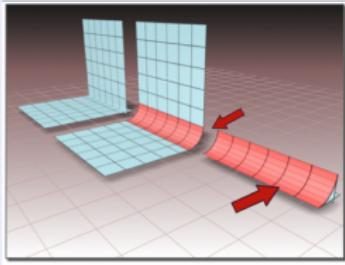


Sweep surface created with two rails

[images 3DSmax]

## Surface fillet / congé

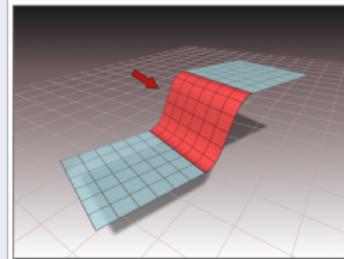
Congé de raccord de continuité  $C^1$  ou  $C^2$  entre 2 surfaces (pas nécessairement planes).



Fillet surface created from two parent surfaces

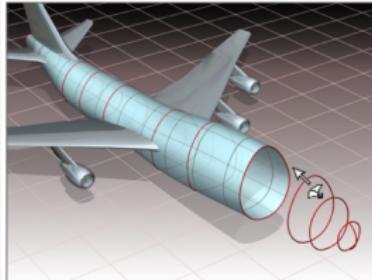
## Surface blending

raccord de continuité  $C^1$  ou  $C^2$



## Surface loft

Interpolation de courbes contour.



## Freeform surface modeling software

CATIA

source: wikipedia

Solidworks

ICEM Surf

ProEngineer ISDX

NX (Unigraphics -> Siemens PLM)

ProEngineer

Autodesk Inventor

Geomagic

Alias StudioTools (Autodesk)

Blender

Rhinoceros 3D

VSR Virtual Shape (Autodesk)

SolidThinking Evolve, Inspire

SpaceClaim Engineer, Cobalt (Ashlar-Vellum), form-Z, PowerSHAPE, GenesisIOP, OmniCAD (Siemens), Thinkdesign, MicroStation (Bentley Systems Inc), Shark FX (Punch!), Moi3D Moment of Inspiration 3D modeling for designers and artists.