# কম্বিনেটরিক্স ও সম্ভাবনা

## লক্ষ্য যখন অলিম্পিয়াড

দিপু সরকার

তাম্রলিপি

কম্বিনোটরিক্স ও সম্ভাবনা লক্ষ্য যখন অলিম্পিয়াড
দিপু সরকার

গ্রন্থস্বত্ব : লেখক

প্রথম প্রকাশ : ফেব্রুয়ারি ২০১৬

তাম্রলিপি : ৩৪৫

পরিচালক
তাসনোভা আদিবা সেঁজুতি

প্রকাশক
এ কে এম তারিকুল ইসলাম রনি
তাম্রলিপি
৩৮/২ক, বাংলাবাজার, ঢাকা-১১০০।

প্রচ্ছদ
দিপু সরকার

কম্পোজ
তাম্রলিপি কম্পিউটার

মুদ্রণ
একুশে প্রিন্টার্স
১৮/২৩ গোপাল সাহা লেন, ঢাকা-১১০০।

মূল্য : ৩০০.০০

---

COMBINOTORIC O SOMVABONA LOKHO JOKON OLYMPID
By : Dipu Sarkar
First Published : Fabruary 2016, by A K M Tariqul Islam Roni
Director : Tasnova Adiba Shanjute, Tamralipi, 38/2ka, Banglabazar, Dhaka-1100.

Price : 300.00

ISBN-984-70096-0345-7

উৎসর্গ

**বাবা মা ও আমার মধুসুদন দাদুকে**

যাদের একান্ত ভালোবাসার কারণে আমি এই বইটা লিখতে পারছি

## লেখকের কথা

এর পূর্বে আমি আর রাফে জায়েদ মিলে "কম্বিনোটরিক্সঃ গণিতের মজার দুনিয়া" বইটা লিখেছিলাম। বইটাতে অনেক বেশি তথ্য অনেক কম স্থানের মধ্যে দিতে হয়েছে বলে প্রাইমারি, জুনিয়রের (কোন কোন ক্ষেত্রে সেকেন্ডারি হায়ার সেকেন্ডারিও) অনেককেই বইটা পড়তে বা নতুন করে সমস্যা সমাধান করতে গিয়ে ব্যর্থ হয়েছেন। তাই প্রথম দিকের আলোচনাকে আরো বিস্তারিত ভাবে করার জন্য এই বইটা লিখলাম। এতে কিভাবে প্রশ্ন পাবার পর ভাবতে হবে, কিভাবে সেটা সমাধান করতে হবে। কখন গুণ করতে হবে কখন যোগ করতে হবে সেট অনেক বেশি উদাহরণ দিয়ে দেখানো হয়েছে। এছাড়াও একটা গুরুত্বপূর্ণ অধ্যায় সম্ভাবনা সেটাও শেষে যোগ করে দেয়া হয়েছে। বর্তমানে মাধ্যমিক ও উচ্চমাধ্যমিকে সম্ভাবনা একটা বড় অংশ নিয়ে আছে, তাই সম্ভাবনা নিয়েও এখানে অনেক আলোচনা করা হয়েছে। এই বইটা মূলত introduction to counting & probability by David Patrick এর রচনা অনুসারে করা। তার এই বইয়ের ভাবানুবাদের সাথে যোগ করা হয়েছে আরো অনেক কিছু টপিক। শেষে সহায়ক সেই সব বইগুলোর তালিকা দিয়ে দেয়া হল। এছাড়া যখন বড়দের জন্য বই লিখতে হয় তখন বইয়ের ভাষা একটু কঠিন হলেও তারা বুঝে ফেলে কিন্তু যখন ছোটদের জন্য বই লিখতে হয় তখন সেটা ছোটদের উপযুক্ত আছে কি না সেটা দেখে নিতে হয়। আমার এই কাজে সহযোগীতা করেছে, বরিশাল জিলা স্কুলের সাদ বিন কুদ্দুছ। ও বইটার পড়ে কোথায় কোথায় আরো বেশি ব্যাখ্যা দরকার সেটা খুঁজে বের করেছে। আর

একজনের কথা না বললেই নয় আমার ছোট ভাই সবুজ সরকার। মোটামুটি ওর কথাতেই এই বইটা লেখা। ওর মতে আগের বইটা তুলনামূলক ভাবে ছোটদের জন্য কঠিন হয়েছে। তোমাদের বিন্যাস, সমাবেশ বা সম্ভাবনার সমস্যা সমাধানের সকল ভীতি দূর হোক।

সবার ফার্স্ট ডেরিভেটিভ শূন্য আর একই সঙ্গে সেকেন্ড ডেরিভেটিভ নেগেটিভ হোক ।

দিপু সরকার

সূচিপত্র

# গণনার শুরু

গণনা শুরুর আগে। প্রথম কথা হল বইটা কিভাবে ব্যবহার করবে। সবচাইতে বড় ব্যাপার বইটার প্রতিটা উদাহরণ ও থিওরি ভালো করে শিখবে একটাও মুখস্থ করবে না। এছাড়াও অনুশীলনীতে দেয়া সমস্যা গুলো সমাধান করার চেষ্টা করবে।

**গণনার মজা**

**প্রশ্ন 1) 1, 2, 3, 4, ... 18, 19, 20 এখানে কতগুলো সংখ্যা আছে ?**

অবশ্যই তোমরা বলে দিতে পারবে এখানে 20টি সংখ্যা আছে। এজন্য তোমাকে কোন হিসেব নিকেশ করতে হবে না।

**প্রশ্ন 2) 7, 8, 9, ... ... 28, 29 এখানে কয়টি সংখ্যা আছে ?** 23

অনেকেই উত্তর দিবে এখানে মোট 29 - 7 = 22টি সংখ্যা আছে। কিন্তু আসো এই প্রশ্নটাকে আমরা আগের প্রশ্নে রূপান্তর করে ফেলি। তাহলে কি সমাধান আসে সেটা দেখলেই বুঝা যাবে।

আমাদের রাশির প্রতিটি পদ থেকে 6 করে বিয়োগ করে ফেলি। তাহলে আমাদের ধারাটি হয় 1, 2, 3, ... ... 22, 23

এখানে কিন্তু আগে যতগুলো পদ আছে এখনও ততগুলো পদই আছে। কেবল তাদের মানের পরিবর্তন হয়েছে। এবার এই প্রশ্নটা কি আমাদের

আগের প্রশ্নের মত হয়ে গেল না। এবার তাহলে আমরা বলতে পারি আমাদের এখানে 23 টি পদ আছে।

| |
|---|
| কেন এমন হয় ? আমরা 7 থেকে 29 গণোনার মধ্যে যদি 7 বিয়োগ করা হয় তাহলে আমরা 7 কেও বাদ দিয়ে ফেলি। কিন্তু 7 তো আমাদের গণনার অংশ। যেমন 1 থেকে 10 গণনার সময় অংশ 1, তাই বিয়োগফলের সাথে 1 যোগ করতে হয়। |

**প্রশ্ন 3) মনে কর কোন একটি ধারার শুরু হল a থেকে এরপর এক এক করে বাড়তে বাড়তে ধারাটা শেষ হল bতে তাহলে এখানে কতটি পদ থাকবে ?**

আমাদের প্রশ্ন অনুসারে, আমাদের ধারটি হয়

$a, a+1, a+2, \dots, b-1, b$

এবার প্রতিটা পদ থেকেই $(a-1)$ বিয়োগ করা হলে ধারাটি হয়

$a-(a-1), a+1-(a-1), a+2-(a-1), \dots \dots \dots \dots$

$b-1-(a-1), b-(a-1)$

সেখান থেকে বলা যায় ধারাটি

$1, 2, 3, \dots b-a, b-a+1$

এবার আমাদের প্রশ্নটা 1ম প্রশ্নের মত হয়। তাহলে আমাদের মোট পদ $b-a+1$

| |
|---|
| তার মানে কোন পদের মান যদি a থেকে এক এক করে বেড়ে b তে আসে তাহলে মোট পদ $\boxed{b-a+1}$ |



**প্রশ্ন 4) 62 থেকে 215 পর্যন্ত কতগুলো পদ আছে যারা 3 এর গুণিতক।**

এই প্রশ্নের উত্তরের জন্য প্রথমেই আমরা 62 এর চাইতে বড় বা সমান প্রথম 3 এর গুণিতক খুঁজে বের করি, সেটি হল 63। আর 215 এর চাইতে ছোট বা সমান 3 এর গুণিতক খুঁজে বের করি। সেটি হল 213

এবার তাহলে আমাদের ধারাটি হয় 63, 66, ... 213

এবার ধারাটিকে সহজ করে ফেলবার জন্য প্রতি পদকে 3 দিয়ে ভাগ করে ফেলি তাহলে, ধারাটি হয় 21, 22, 23, ... 71

এবার আমরা তৃতীয় প্রশ্নে শিখে আসা সূত্রটা ব্যবহার করতে পারি তাহলে আমাদের মোট পদ সংখ্যা 71 - 21 + 1=51

| |
|---|
| **বাজে সমাধান তোমরা হয়তো কেউ কেউ সমাধান হিসেবে বলতে চাইবে $\frac{215-62}{3} = 51$ কিন্তু এভাবে সমাধান করা আসলে ভুল সমাধান। সেটা পরের প্রশ্নে বুঝতে পারবে।** |

**প্রশ্ন 5 - a) 9 থেকে শুরু করে 101 পর্যন্ত কতগুলো সংখ্যা 10 এর গুণিতক**

**b) 11 থেকে শুরু করে 103 পর্যন্ত কতগুলো সংখ্যা আছে যারা 10 এর গুণিতক**

a) 9 থেকে 101 পর্যন্ত 10 এর গুণিতকগুলো হল 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 মোট 10 টা

b) 11 থেকে শুরু করে 103 পর্যন্ত 10 এর গুণিতক 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 মোট 9 টা।

এবার লক্ষ্য করার বিষয় উভয় ক্ষেত্রেই পার্থক্য

101 – 9 = 103 – 11 = 92 কিন্তু 10 এর গুণিতক সংখ্যা কিন্তু ভিন্ন তাই নিজে একটা ভুল শর্টকাট বের না করাই ভালো।

**প্রশ্ন 6 – চার অংকের কতগুলো সংখ্যা পূর্ণঘন।**

চার অংকের সবচাইতে ছোট ঘন সংখ্যা হল 1000 এবার আমরা সবচাইতে বড় সংখ্যাটা খুঁজে বের করব

খেয়াল করে দেখতে পাই $20^3 = 8000$ এবার তাহলে 21 এর ঘন বের করে দেখি $21^3 = 9261$ যেটাও চার অংকের এবার আমরা 22 এর ঘন বের করে দেখি $22^3 = 10648$

তাহলে আমাদের শেষ পদটা হল 9261

আমাদের ধারাটা হবে 1000, ..., 8000, 9261

এবার প্রত্যেক পদকে ঘনমূল করে পাই

10, 11, ... 20, 21

এখানে মোট কতগুলো পদ আছে

12 টা

এই অধ্যায় থেকে আমরা যা শিখলাম

| |
|---|
| 1. প্রত্যেক প্রশ্নের সমাধান না করতে পারলে তাকে সহজ অন্য একটা প্রশ্নে পরিণত করে সমাধান কর। |
| 2. সব ক্ষেত্রে কাজ করে এমন না হলে কোন শর্টকাট ব্যবহার করবে না। |
| 3. কোন পদের মান যদি a থেকে এক এক করে বেড়ে b তে আসে তাহলে মোট পদ b - a + 1 |

অনুশীলনী

1. 36, 37, ..., 92, 93 এখানে মোট কয়টা পদ আছে ?
2. 6, 8, 10, ... 128, 130 এখানে মোট কয়টা পদ আছে ?
3. - 33, - 28, ... 52, 57 এখানে মোট কয়টা পদ আছে ?
4. 147, 144 ... 42, 39 এখানে মোট কতগুলো পদ আছে ?
5. $3\frac{2}{3}, 4\frac{1}{3}, 5, \ldots 26\frac{1}{3}, 27$ এখানে মোট কয়টা পদ আছে ?
6. 150 এর চাইতে ছোট কতগুলো 7 এর গুণিতক আছে ?
7. 50 থেকে 250 এর মধ্যে কতগুলো পূর্ণবর্গ সংখ্যা আছে ?
8. 5 থেকে 211 এর মধ্যে কতগুলো বিজোড় পূর্ণবর্গ আছে ?
9. কতগুলো চারটি ধনাত্মক ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা আছে যাদের গুণফল 100, 000 এর চাইতে কম ?

**প্রশ্ন 1 মনে করা যাক ADO ম্যাথ ক্লাবের সদস্যদের মধ্যে সবাই গণিত বা পদার্থ অলিম্পিয়াডে পুরস্কার পেয়েছে। ক্লাবের সদস্য সংখ্যা 12 জন এর মধ্যে 8 জন গণিত অলিম্পিয়াডে পুরস্কার পেয়েছে আর 5 জন উভয় পুরস্কার পেয়েছে। তাহলে কতজন পদার্থ অলিম্পিয়াডে পুরস্কার পেয়েছে ?**

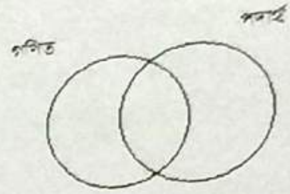
ক্লাবে মোট সদস্য আছে 12 জন। এর মধ্যে 5 জন উভয় বিষয়ে পুরস্কার পেয়েছে। গণিত অলিম্পিয়াডে পুরস্কার পেয়েছে 8 জন, তার মানে কেবল মাত্র গণিত অলিম্পিয়াডে পুরস্কার পেয়েছে 8 - 5 জন (গণিত অলিম্পিয়াড থেকে পাওয়া 8 জন থেকে উভয় বিষয়ে পাওয়া 5 জন বাদ) আবার যেহেতু সবাই পুরস্কার পেয়েছে তাই বাকিরা অবশ্যই পদার্থ অলিম্পিয়াডে পুরস্কার পেয়েছে। তাই পদার্থ অলিম্পিয়াডে পুরস্কার পেয়েছে

12 - 3 = 9 জন

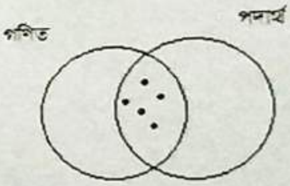
| |
|---|
| না বুঝে যা ইচ্ছা তাই যোগ বিয়োগ করে গণনা করতে যেও না আবার তাহলে অবশ্যই ভুল করে বসবে। |

এই ধরণের যোগ আর বিয়োগ ধরনের সমস্যা সমাধানের জন্য জন ভেন একটা সমাধানের উপায় দিয়েছেন তা হল চিত্র একে। এবার আমরা সেই উপায়টা শিখব

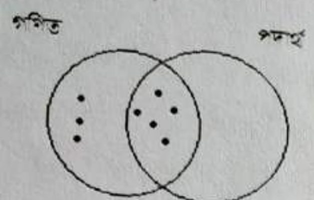





আমরা গণিতে পুরস্কার পাওয়া সবাইকে বাম পাশের বৃত্ত দিয়ে আর পদার্থে পুরস্কার পাওয়া সবাইকে ডানপাশের বৃত্ত দিয়ে প্রকাশ করি। মাঝের যে সাধারণ অংশ সেটা তাহলে উভয় বিষয়ে পুরস্কার পাওয়াদের বুঝাচ্ছে। তাহলে সেখানের পাঁচ জনের জন্য পাঁচটা ডট ব্যবহার করি।

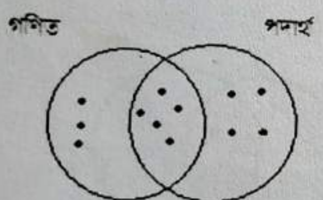



এবার যেহেতু গণিতে 8 জন পুরস্কার পেয়েছে তাই 8 জনের পুরস্কার দেয়ার জন্য আমাদের আরো তিনটা ডট গণিতের ঘরে দিতে হবে তাহলে




যেহেতু কেউ পুরস্কার ছাড়া নেই তাই কোন ফোঁটাই এই বৃত্ত দুইটির বাইরে আসবে না। আমাদের মোট ছিল 12 জন তাই তাই বাকি চারজন পদার্থের ঐ ফাঁকা ঘরে বসবে।

সেক্ষেত্রে,

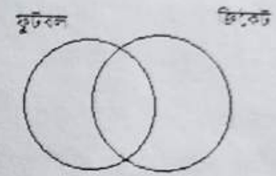



এবার গণনা করে পাই আমাদের পদার্থে পুরস্কার পাওয়া সদস্য সংখ্যা 9 জন।

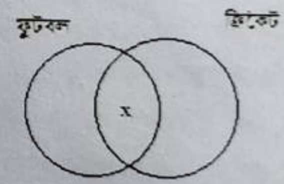


প্রশ্ন 2 আমাদের এলাকায় 27 জন ছেলেমেয়ে আছে যারা নিয়মিত খেলাধুলা করে। যার মধ্যে পাঁচ জন ভালো করে খেলাধুলা করতে জানে না। 14 জন্য ভালো ফুটবল খেলে আর 11 জন ভালো ক্রিকেট খেলে তাহলে কতজন উভয় খেলাই ভালো খেলে ?

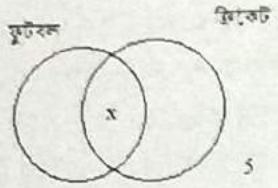
এই প্রশ্নের সমাধানের জন্য আগের মত করেই একটা চিত্র ধরে নেই,



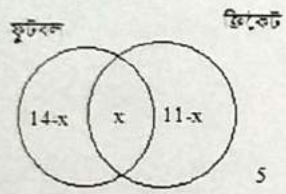

মনে করি এখান থেকে x জন উভয় খেলাই ভালো করে খেলে। তাহলে আমাদের চিত্রটি হবে




এবার যেহেতু 5 জন কোন খেলাই ভালো খেলে না তাই তাদের একদম হিসেব থেকে বাদ দিয়ে বাইরে আঁকি




আবার যেহেতু আমাদের শর্ত অনুসারে 14 জন ফুটবল আর 11 জন ক্রিকেট ভালো খেলে তাই আমাদের চিত্রটি হবে




আমাদের শর্ত অনুসারে,

$14 - x + x + 11 - x + 5 = 27$

বা $-x = -3$

$x = 3$

মানে উভয় ভালো খেলে 3 জন

| |
|---|
| সবচাইতে ভালো উপায় হল কোন একটা প্রশ্ন সমাধানের পর প্রশ্নের ডাটার সাথে মিলিয়ে নেয়া, যে সমাধানটা ঠিক হল কি না ! |



**এই অধ্যায় থেকে যা শিখলাম**

| |
|---|
| না বুঝে যা ইচ্ছা তাই যোগ বিয়োগ করে গণনা করতে যেও না আবার তাহলে অবশ্যই ভুল করে বসবে। |
| প্রশ্ন সমাধানের জন্য চিত্র আঁকলে প্রশ্নটা বুঝা সহজ হয়ে যায়। |
| সবচাইতে ভালো উপায় হল কোন একটা প্রশ্ন সমাধানের পর প্রশ্নের ডাটার সাথে মিলিয়ে নেয়া, যে সমাধানটা ঠিক হল কি না ! |

**অনুশীলনী**

1. একটা পার্কে 20টা গাড়ি আছে, যার সবগুলো হয় লাল বা সাদা। 12টা হল লাল, 15 টি হল চার দরজার গাড়ি। চারটা দুই দরজার এবং সাদা। তাহলে কয়টা গাড়ি আছে চার দরজার ও লাল।

2. আমি একটা ট্রেনিং সেন্টার খুলেছি যেখানে কুকুর গুলোকে ট্রেনিং দেয়া হয়। তিন ধরনের ট্রেনিং এর ব্যবস্থা করা আছে বসা, লাঠি নিয়ে আসা ও গড়াগড়ি খাওয়া। 50 টা কুকুর বসতে পারে, 29টা কুকুর লাঠি নিয়ে আসতে পারে, 34টা কুকুর গড়াগড়ি খেতে পারে, 9 টা কুকুর সব কিছু করতে পারে, 17টা কুকুর বসতে আর লাঠি নিয়ে আসতে পারে, 12টা কুকুর লাঠি নিয়ে আসতে ও গড়াগড়ি খেতে পারে, 18 টা কুকুর বসতে ও গড়াগড়ি খেতে পারে। 9 টা কুকুর কিছু পারে না।

মোট কয়টা কুকুর আছে ? ও কয়টা কুকুর ঠিক দুইটা কাজ পারে ?

3. আমার স্কুলে আমি গণিত বা পদার্থ ক্লাশ নেই। x জনের আমি পদার্থ ক্লাশ নেই, y জনের আমি গণিত ক্লাশ নেই, z হলো যাদের আমি উভয়ের ক্লাশ নেই। এবার x, y, z দিয়ে এমন একটা সম্পর্ক লেখ যাতে তাদের মোট সংখ্যা প্রকাশ পায়।

**প্রশ্ন 1 আমার কাছে চারটা বিভিন্ন রং এর জামা ও তিনটা বিভিন্ন রং এর প্যান্ট আছে আমি কতভাবে স্টাইল করে জামা প্যান্ট পড়তে পারব।**

মনে করি আমার জামা হল a, b, c, d আর প্যান্ট হল 1, 2, 3

তাহলে আমরা a জামার সাথে পড়তে পারব 1, 2, 3 এর যেকোনো প্যান্ট

তাহলে আমার পোশাক হবে a1, a2, a3

অনুরূপ ভাবে b এর জন্য b1, b2, b3

অনুরূপ ভাবে c এর জন্য c1, c2, c3

অনুরূপ ভাবে d এর জন্য d1, d2, d3

এভাবে দেখা যাবে মোট হবে 12 টা উপায়।

আচ্ছা আমরা কি অন্য কোন ভাবে এটা হিসেব করতে পারতাম না, খেয়াল করে দেখি আমাদের প্রতিটা জামার জন্য আমরা তিনটা করে প্যান্টের চয়েস আছে। তাহলে প্রতি একটার জন্য আছে 3 টা এভাবে চারটার জন্য হবে $3\times4=12$ টা।

> কার সাথে কার সম্পর্ক সেটা আগে বের করে নিয়ে তারপর কতভাবে করা যায় সেটা বের করার জন্য গুণ করতে হয়। মোট ঘটনা গণনা করে যোগ না করে গুণ করে একবারে বের করা হয়।



**প্রশ্ন 2 - আমরা একটা মিটিং এর আয়োজন করেছি যেখানে তিনজন এসেছে ঢাকা থেকে, 4 জন বরিশাল থেকে, 5 জন রাজশাহী থেকে আর 2 জন এসেছে খুলনা থেকে। এবার আমরা যে মিটিং করব তাতে প্রতি জেলা থেকে মাত্র একজন করে থাকতে পারবে। তাহলে আমাদের মিটিং টা কতভাবে হতে পারে ?**

প্রথমে খেয়াল করি আমাদের ঢাকার তিনজন থেকে একজনকে নিতে পারি তিন ভাবে। মনে করা যাক ঢাকার তিনজন হল a, b, c তাহলে আমি এখানে যাকে খুশী তাকে নিতে পারি তাই আমার উপায় হল 3 টা।

এবার ঢাকা আর বরিশাল এই দুইজেলা মিলিয়ে দুইজন কতভাবে নেয়া যাবে। দেখা যাচ্ছে প্রতি ব্যক্তির জন্য আমাদের একজনকে নেয়া যায় চার জন। (a এর জন্য বরিশালের চারজনের যে কোন একজন, অনুরূপ b ও c এর জন্যও)। তাহলে আমাদের ঢাকা ও বরিশাল মিলিয়ে নিতে পারব $3\times4=12$ জন।

তাহলে ঢাকা বরিশাল ও রাজশাহী তিন জেলা থেকে একজন করে নেয়া যাবে $3\times4\times5=60$ ভাবে।

আর ঢাকা, বরিশাল, রাজশাহী ও খুলনা মিলিয়ে নেয়া যাবে $3\times4\times5\times2=120$ ভাবে।

> এখানে রাজশাহীর একজনকে নিলে তার সাথে বরিশালের সাথে কারো কোন সম্পর্ক নেই তাদের সাথে এই চয়েস করা স্বাধীন। এই স্বাধীন ক্ষেত্রে আমরা গুণ করতে পারি। তাই একজনের জন্য আমরা চয়েস কত এরপর আমাদের যত জনের জন্য বের করতে হবে সেটা

দিয়ে গুণ করতে হয়, আমরা ঠিক এটাই করেছি ঐকিক নিয়মের সময়।

**প্রশ্ন 3 মনে কর একটা দেশে সকল গাড়ির লাইসেন্স প্লেট সাত ঘরের যার মধ্যে কখনই o বর্ণ থাকবে না। প্রথম ঘরটি অবশ্যই একটা অংক দিয়ে(0 - 9) দিয়ে পূরণ করা, দ্বিতীয় ঘরটি একটি বর্ণ দিয়ে বাকি ঘরগুলো বর্ণও হতে পারে আবার সংখ্যাও হতে পারে। তাহলে ঐ দেশের কতগুলো লাইসেন্স প্লেট হতে পারে?**

প্রথম ঘরের জন্য আমাদের আছে আছে 10 টি অপশন (0 - 9), 2য় ঘরের জন্য আমাদের অপশন হল 25টি (o বাদে বাকি 25টি) তাহলে আমাদের প্রথম দুই ঘর পূরণ করতে পারব $10 \times 25 = 250$ ভাবে। আর এরপর আমাদের প্রত্যেক ঘরের জন্য আমাদের অপশন 35টি করে। তাহলে আমাদের মোট অপশন $10\times 25 \times 35 \times 35 \times 35 \times 35 \times 35$ টি। গুণটা তোমরা নিজেরা করে ফেলো।

** এখানে একটা সংখ্যা একবার ব্যবহারের পর আরেক বার ব্যবহার করা যাবে না তা কিন্তু না।

**প্রশ্ন 4 আমার কাছে চারটা বই আছে। আমি কতভাবে চারটা বই সেলফে রাখতে পারি ?**

প্রথম বইটা আমরা চয়েস করতে পারি চার ভাবে। মনে কর আমার বই চারটা হল a, b, c, d তাহলে প্রথম বইটা আমি a বা b বা c বা d নিতে পারি

এবার প্রথম বই a নিলে আমার বাকি থাকবে তিনটা বই তার জন্য পরের বইটা নিতে পারব তিন ভাবে তাহলে আমাদের প্রথম দুইটা বই



নিতে পারব $4\times 3 = 12$ ভাবে। (যদি a বই প্রথমে নেই তাহলে পরের b,c,d বইয়ের জন্য এই তিনটার যে কোন একটা।) এরপর বাকি থাকবে আর দুইটা বই সেখান থেকে একটা বই নিতে পারব 2 ভাবে শেষে যে একটা বই থাকবে তাকে তো আমাকে নিতেই হবে তাহলে আমাদের উত্তর হবে $1\times 2 \times 3 \times 4 = 24$ ভাবে। তোমাদের বুঝবার সুবিধার জন্য বই a, b, c, d হলে আমরা যতভাবে বই গুলো সাজাতে পারব তার তালিকা দিয়ে দেয়া হল

abcd abdc acbd acdb adbc adcb
bacd badc bcad bcda bdac bdca
cabd cadb cbad cbda cdab cdba
dabc dacb dbac dbca dcab dcba

এক্ষেত্রে প্রথম যে বইটা নিলাম সেটার সাথে পরে কি বই নিব সেটা স্বাধীন তাই আমরা গুণ দিতে পেরেছি। এক্ষেত্রে প্রথম বই নেয়ার পর অন্য কোন বই নিতে পারবনা এমন কোন ঘটনা তৈরি হয় নি। **

**প্রশ্ন 5 Ado ক্লাবে 20 জন ট্রেইনার আছে সেখান থেকে একজন সভাপতি একজন সহ সভাপতি আর একজন প্রচার সম্পাদক করা হবে। কতভাবে এই নির্বাচন করা সম্ভব।**

সভাপতি নির্বাচনের জন্য আমাদের অপশন আছে 20 জন। যখন আমরা একজনকে সভাপতি করে ফেললাম তখন আমাদের জন্য বাকি থাকল 19 জন। এই 19 জন থেকে একজন আমাদের সহ সভাপতি হবে তাহলে একজন সভাপতি আর একজন সহসভাপতি হতে পারবে

20× 19 ভাবে এবার একজন সভাপতি আর একজন সহসভাপতি হবার পর আমাদের বাকি থাকল আর 18 জন। এই 18 জনের একজন হবে আমাদের প্রচার সম্পাদক। তাহলে মোট নির্বাচন সম্ভব

$20\times 19 \times 18 = 6840$

| |
|---|
| শেষ যে দুইটা সমস্যা সমাধান করা হল সেই দুইটা বিন্যাসের সমস্যা। অন্য ভাবে হয়তো বলা যেত কতভাবে 4টা বইকে বিন্যাস করা যায়। বা কতভাবে 20 জন থেকে 3 জনকে বিন্যাস করা যায়। |

খেয়াল করা বিষয়

| |
|---|
| তোমরা হয়তো ভেবে বসতে পারো সমস্যা - > বিন্যাস - > গুণ। এভাবে চিন্তা করতে থাকলে পরের সমস্যাগুলো অবশ্যই ভুল করবে। তুমি আগে সম্পর্ক খুঁজে বের কর এরপর ভাবো কেন গুণ করতে হবে বা কেন এটা বিন্যাসের সমস্যা। |

**প্রশ্ন 6 আমার কাছে n সংখ্যক বই আছে আমি কতভাবে বইগুলোকে সাজাতে পারব**

আমি আমার প্রথম বইটা বাছাই করে নিতে পারব n ভাবে। এরপর আমার বাকি থাকবে n - 1 টি বই তাহলে আমার প্রথম দুইটি বই নিতে পারব n(n - 1) ভাবে

এভাবে চলতে থাকলে আমরা মোট n সংখ্যক বই নিতে পারব

$n\times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$ ভাবে।

| |
|---|
| এই যে 1 থেকে শুরু করে n পর্যন্ত গুণ করা এটা এই গণনায় প্রচুর পরিমাণে ব্যবহার করা হয় বলে একে একটা নতুন চিহ্ন দিয়ে প্রকাশ করা হয়েছে সেই প্রতীকটা হল '!' মানে<br>$n! = n\times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$<br>একে ফ্যাক্টোরিয়াল চিহ্ন বলা হয়। |



| এই অধ্যায় থেকে যা শিখলাম |
|---|
| কার সাথে কার সম্পর্ক সেটা আগে বের করে নিয়ে তারপর কতভাবে করা যায় সেটা বের করার জন্য গুণ করতে হয়। |
| স্বাধীন ক্ষেত্রে আমরা গুণ করে সর্বমোট ফলাফল বের করি। |
| সমস্যা না বুঝে গুণ করে বসলে ভুল হবার সম্ভাবনা বেশি থাকে |
| $n! = n\times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$<br>একে ফ্যাক্টোরিয়াল চিহ্ন বলা হয়। |

**অনুশীলনী**

1. আমার কাছে 6টা শার্ট, 3টা প্যান্ট, 2টা টুপি আর 5টা টাই আছে আমি কতভাবে স্টাইল করতে পারি ?
2. আমার কাছে 8 রং এর শার্ট আর প্যান্ট আছে। আমি যদি কখনই একই কালারের শার্ট প্যান্ট পড়ে কখনও বের না হই তাহলে আমি কতগুলো স্টাইল করতে পারব।
3. কতগুলো পাঁচ ঘরের লাইসেন্স প্লেট হতে পারে যার প্রথম দুই ঘর ইংরেজি বর্ণ আর শেষের তিনটা অংক হয় ?
4. কতগুলো সাত ঘরের লাইসেন্স প্লেট হতে পারে যার প্রথম তিন ঘর ইংরেজি বর্ণ এরপর দুইটা অংক জোড় আর পরের দুইটা বিজোড় হয়?
5. কতভাবে আমার সেলফে আমি পাঁচটা বই রাখতে পারি ?
6. মনে করা যাক আমার কাছে 7টা বই আছে। যার মধ্যে দুইটা গণিত বই, আমি আমার সেলফে বইগুলো এমন ভাবে রাখতে চাই যাতে গণিতের বই দুইটি দুই প্রান্তে থাকে। কত ভাবে বই দুইটা সাজানো যাবে ?

7. একটা দৌড় প্রতিযোগিতায় 8 জন অংশ নেয়। কতভাবে তাদের প্রথম দ্বিতীয় আর তৃতীয় স্থান হতে পারে।

8. ক্যালকুলেটর ছাড়া মান বের কর

a) $\frac{9!}{8!}$

b) $\frac{42!}{40!}$

c) $8! - 7!$

**জন ভেন** ভেন-চিত্রের উদ্ভাবক কেবল ক্যাম্ব্রিজ বিশ্ববিদ্যালয় এর "গনভিলে এন্ড কাইয়াস কলেজ" এর একজন ফেলোই ছিলেন না, তিনি একজন ধর্মযাজকও ছিলেন বটে। তিনি সর্বপ্রথম 1881 সালে তাঁর বিখ্যাত ভেন-চিত্র প্রকাশ করেন। তিনি গণনা এবং এবং সম্ভাবনার পাশাপাশি যুক্তিবিদ্যা এবং দর্শনেও প্রসিদ্ধ ছিলেন এবং এক পর্যায়ে তিনি একজন প্রসিদ্ধ ঐতিহাসিক হিসেবেও নিজেকে প্রতিষ্ঠা করেন। তিনি একজন সফল যন্ত্র নির্মাতাও ছিলেন।তিনি একবার একটি ক্রিকেট বল নিক্ষেপকারী একটি যন্ত্র তৈরী করেছিলেন (যন্ত্রটি এতোটাই অসাধারণ ছিল যে সেটি তৎকালীন অস্ট্রেলিয়ান ক্রিকেট দলের অন্যতম সেরা একজন খেলোয়াড় কে আউট করতে সক্ষম হয়েছিল)। গণিতের প্রতি তাঁর অবদানের স্বীকৃতি হিসেবে ক্যাম্ব্রিজ বিশ্ববিদ্যালয়ে একটি রঙিন কাঁচে একটি ভেন-চিত্র অঙ্কিত রয়েছে।



বিন্যাস

প্রশ্ন 1 একটা অফিসে $n$ জন লোক আছে। সেখান থেকে $r$ জনের জন্য বসার যায়গা করা হয়েছে ($r \leq n$). যদি এক চেয়ারে দুইজন বা তার বেশী বসতে না পারে

a) কতভাবে 1ম সিট পূরণ করা যায়

b) কতভাবে 2য় সিট পূরণ করা যায়

c) কতভাবে 1ম ও 2য় সিট পূরণ করা যায়

d) কতভাবে $r$টি সিট পূরণ করা যায়

a) প্রথম সিটটা পূরণ করা যায় $n$ ভাবে। কারণ অফিসের যে কোন মানুষ সেই সিটটাতে বসতে পারে।

b) যেহেতু 1ম সিটে একজন বসে পড়েছে তাই বাকি থাকল $n - 1$ জন এই $n - 1$ জনের যে কোন একজন 2য় সিটে বসতে পারে।

c) তাহলে যেহেতু 1ম জনের বসার উপর পরে পরের $n - 1$ জনের কে বসবে সেটা নির্ভর করছে না তাই ঘটনাটা স্বাধীন। তাই দুই স্থান পূরণ করা যাবে $n(n - 1)$ ভাবে

d) এভাবে তৃতীয় স্থানে বসতে পারবে $n - 2$ ভাবে তাহলে তিন স্থান পূরণ করা যাবে $n(n - 1)(n - 2)$ ভাবে

এভাবে আগাতে থাকলে $r$ তম স্থান পূরণ করা যাবে $n - (r - 1)$ ভাবে তাহলে মোট $r$ স্থান পূরণ করা যাবে $n(n - 1) \ldots (n - r + 1)$ ভাবে।

| |
|---|
| $n$ সংখ্যক বস্তু হতে $r$ ($r \leq n$) স্থান পূরণ করার যে নিয়ম তাকে $n$ সংখ্যক বস্তু থেকে $r$ সংখ্যক বস্তুর বিন্যাস বলা হয়। একে ${}^{n}p_{r}$ বা $p(n, r)$ এভাবে প্রকাশ করা হয়। |

এবার খেয়াল করি $p(n,r)= n(n-1) \ldots (n-r+1)$

$$p(n,r)=\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)\times(n-r)!}{(n-r)!}$$

$$p(n,r)=\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)\times(n-r)\times(n-r-1)\ldots2\times1}{(n-r)!}$$

$$p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

তাহলে এই পদ্ধতিতে একটু আগে সমাধান করে আসা আমাদের সমস্যাটা যদি 30 জন লোকের জন্য 25 টা চেয়ার রাখা হয় তখন আমাদের সমাধান হবে 30!/5!

**প্রশ্ন 2 আমাদের বরিশাল জিলা স্কুলের পুনর্মিলনীতে একটা অন্যরকম লটারির ব্যবস্থা করা হয়েছে। 1 থেকে 25 নাম্বার দেয়া 25টা বল আছে সেখান থেকে চারটা বল তোলা হয় তাতে যে নাম্বার হয় সেটাই বিজয়ীর নাম্বার**

a) **যদি বল তোলার পর আবার বক্সে ফেলা না হয়**

b) **যদি বল তোলার পর আবার বক্সে ফেলা হয়**

**তাহলে কতগুলো নাম্বার তৈরি সম্ভব**

**a)** প্রথম বলটা তোলার উপায় হল 25টি। যখন আমি একটা বল তুলে ফেললাম তখন আবার বক্সে ফেললাম না। তাহলে আমার জন্য পরের বলের জন্য থাকল 25 টা তাহলে আমি প্রথম দুইটা বল তুলতে পারব $25\times24$ টি

এভাবে চারটা বল তোলার পর আমার উপায় হবে $25\times24\times23\times22$

**b)** যেহেতু প্রথম বলটা তোলার পর আবার বল বাক্সে রেখেছি তাই আমার 2য় বল তোলার উপায় থাকল এখনও 25 টি। আবার



তৃতীয় বল তোলার উপায়ও থাকল 25টি আবার চতুর্থ বল তোলার উপায়ও থাকল 25 টি। তাহলে আমার মোট উপায় হল

$25\times 25 \times 25 \times 25 = 25^4$

2য় ক্ষেত্রে আমরা যে সমাধান করেছি সেটা পুনরাবৃত্তি মূলক পদ্ধতি। এক্ষেত্রে একটা মান বসানোর পর বা তুলে নেবার পর আমাদের জন্য চয়েস কমে না। তাই তারা সবাই পরস্পর গুণ হয়।

এই অধ্যায়ে যা শিখলাম

$n$ সংখ্যক বস্তু হতে $r$ ($r\leq n$) স্থান পূরণ করার যে নিয়ম তাকে $n$ সংখ্যক বস্তু থেকে $r$ সংখ্যক বস্তুর বিন্যাস বলা হয়। একে ${}^np_r$ বা $p(n,r)$ এভাবে প্রকাশ করা হয়।

এবার খেয়াল করি $p(n,r)= n(n-1) \ldots (n-r+1)$

$$p(n,r)=\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)\times(n-r)!}{(n-r)!}$$

$$p(n,r)=\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)\times(n-r)\times(n-r-1)}{(n-r)!}$$

$$p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

পুনরাবৃত্তি মূলক পদ্ধতিতে একটা মান বসানোর পর বা তুলে নেবার পর আমাদের জন্য চয়েস কমে না। তাই তারা সবাই পরস্পর গুণ হয়।

## অনুশীলনী

1. মান বের কর

a) $P(8, 3)$

b) $P(20, 4)$

c) $P(30, 1)$

d) $P(6, 5)$

e) $P(50, 3)$

2. $P(n, n)$ এর মান কত ?

3. একটা বক্সে 12টা বল আছে। যাদের 1 থেকে 12 পর্যন্ত নাম্বার দেয়া আছে। এখান থেকে তিনটা বল নেয়া হল কতভাবে নেয়া যাবে যদি,

a) বল নেয়া হল এরপর সেটাকে আর বাক্সে ফেরত দেয়া হল না

b) বল নেয়া হল আর সেটা আবার বাক্সে ফেরত দেয়া হল

c) প্রথম বলটা নিয়ে আবার বক্সে ফেরত দেয়া হল কিন্তু 2য় বলটা নেবার পর তা আর বক্সে ফেরত দেয়া হল না।

4 সরল কর

$p(n, k) \times p(n - k, j)$



### সম্পূর্ণ অধ্যায়ের সারমর্ম

| |
|---|
| 1, 2, 3 ... 100 এই ধরনের সংখ্যা কতগুলো আছে তা বের করা বেশ সহজ। অনেক প্রশ্ন সহজে সমাধান না করতে পারলে এই ধরনের সিরিজে বানিয়ে ফেলতে হয়। আর শর্টকাট নিয়ম বির করার ব্যাপারে সাবধান। |
| $a, a + 1, a + 2, ..., b - 1, b$ এই ধারায় মোট পদ সংখ্যা $b - a + 1$ |
| যখন একটা অংশকে আর একটা অংশ জুড়ে থাকে তখন এইধরনের সমস্যা সমাধানের জন্য একটা সুন্দর উপায় হল ভেনচিত্র ব্যবহার করা। |
| যদি দুইটা ঘটনা A ও B পরস্পর স্বাধীন হয় তাহলে দুইটা ঘটনা একত্রে ঘটবে = A যতভাবে ঘটতে পারে × B যতভাবে ঘটতে পারে। |
| $n! = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$ একে ফ্যাক্টোরিয়াল চিহ্ন বলা হয়। |
| $p(n, r) = n!/((n - r)!)$ |
| আর অবশ্যই কোন উত্তরই মুখস্থ করবে না, বুঝবে। |

**
১০০%

**অবশ্যই মাথায় রাখবে**

1. যখন একটা প্রশ্ন সমাধান করতে পারছ না তখন প্রশ্নটাকে আরেকটা সহজ প্রশ্নের মত বানিয়ে সমাধান করে ফেলবে।

2. যখন কোথাও x ধরে সমাধান করেছ তখন সমাধান বের করার পর একবার উত্তরের সাথে মিলিয়ে নিলে আর কখনই ভুল হবে না।

3. সমাধান করার সময় অনেক ক্ষেত্রে চিত্র একে নিলে সমাধান সহজ হয়ে যায়।

4. কোন সমাধান বের করার পর সময় থাকলে সেটা প্রশ্নের সাথে মিলিয়ে দেখতে হবে উত্তর আসলেই ঠিক আছে কি না।

**প্রয়োজনীয় তথ্য**

1. মুখস্থ করবে না।

2. না বুঝে ভেনচিত্রের প্রশ্নগুলো আবোল তাবোল ভাবে যোগ বিয়োগ করবে না।

**সাবধান**

1. নিজে নিজে শর্টকাট বের করলে নিশ্চিত হয়ে নেবে সেটা সকল ক্ষেত্রে কাজ করে।



**প্রথম অধ্যায়ের জন্য অনুশীলনী**

1. 2.5, 5.5, ..., 83.5 এখানে কতগুলো সংখ্যা আছে ?

2. 6, 10, 14, ... 82, 86 এখানে কতগুলো সংখ্যা আছে ?

3. তিন অংকের কতগুলো সংখ্যা 7 দিয়ে বিভাজ্য

4. আমার ক্লাবে 20 জন লোক আছে যার 8 জন বাঁহাতি, 15 জন এর মধ্যে নাচানাচি পছন্দ করে, আবার 2 জন ডানহাতি নাচানাচি অপছন্দ করে। কতজন বাঁহাতি নাচানাচি পছন্দ করে ?

5. কোন এক গণিত ক্লাশে 16 জন ছাত্র ছিল, 22 জন ছাত্র - ছাত্রী ক্যালকুলেটর এনেছে, ক্যালকুলেটর আনা 13 জন ছাত্রী হলে কতজন ছাত্র ক্যালকুলেটর আনে নি ?

6. কেল্টুর চারটা প্যান্ট, 3টা টুপি 6টা জামা থাকলে কেল্টু কত ধরনের স্টাইল করতে পারবে?

7. কতগুলো ইংরেজি তিন বর্ণের শব্দ আছে যার মাঝখানে Vowel আর দুই পাশের বর্ণ দুইটা পরস্পর ভিন্ন। (শব্দকে অর্থপূর্ণ হতে হবে না। )

8. একটা লাইনে 6 জন কতভাবে দাঁড়াতে পারে।

9. সাতটা টুপিকে কতভাবে লাইনে সাজিয়ে রাখা যায়।

10.

a) 'M' একে কতভাবে সাজানো যায়

b) 'MO' একে কতভাবে সাজানো যায়

c) 'MOT' একে কতভাবে সাজানো যায়

d) 'MOTHER' একে কতভাবে সাজানো যায়

11. একটা নির্বাচনে দিপু, তমাল ও ইশা সভাপতি পদে, ফয়সাল, রাফে, যুবায়ের সহ - সভাপতি পদে আর সায়ান, সবুজ ও মুনিম কোষাধ্যক্ষ হবার জন্য জন্য নির্বাচনে আসে। কতভাবে দল গঠিত হতে পারে ?

**আরেকটু বেশি মাথা খাটাও**

1. 500 এর নীচে কতগুলো সংখ্যাকে দুইটা ভিন্ন ঘন সংখ্যার যোগফল আকারে প্রকাশ করা যায়।

2. এক সাথে 190 জন লোক আছে যার 110 জন সানগ্লাস পড়ে আছে, 70 জন ঘড়ি পড়ে আছে 95 জন টুপি পড়ে আছে। তাদের প্রত্যেকেই অন্তত একটা না একটা কিছু পড়ে আছে। 30 জন সানগ্লাস ও টুপি উভয় পড়ে আছে, 25 জন ঘড়ি ও টুপি উভয় পড়ে আছে, আর 40 জন সানগ্লাস ও টুপি পড়ে আছে। কতজন তিনটাই পড়ে আছে ?

3. আমার স্কুলে 360 জন আছে যার 15 জন গণিত, পদার্থ আর রসায়ন সবগুলো নিয়েছে। 15 জন কিছুই নেয় নি। 180 জন গণিত নিয়েছে। যতজন পদার্থ নিয়েছে রসায়ন নিয়েছে তার দ্বিগুণ। 75 জন গণিত ও রসায়ন উভয় নিয়েছে। 75 জন জন পদার্থ আর রসায়ন নিয়েছে। মাত্র 30 জন গণিত ও পদার্থ উভয় নিয়েছে। তাহলে কতজন পদার্থ নিয়েছে?

4. 5!, 10! ও 15! এর ল.সা.গু. ও গ.সা.গু. কত ?

5. 1! + 2! + 3! + ... + 1000! এর একক ও দশক স্থানীয় অংক কত?

6. 1! থেকে 100! এর মধ্যে কতগুলো ফ্যাক্টোরিয়াল আছে যারা 9 দিয়ে বিভাজ্য

7. $\frac{1}{2} > \frac{1}{n} > \frac{3}{100}$ n এর কতগুলো মানের জন্য একথা সত্য ?



8. আমাদের ক্লাশ রুমে 11 টা কলাম আছে প্রত্যেক কলামে 11টা চেয়ার আছে। প্রত্যেক চেয়ারকে 1 থেকে 11 পর্যন্ত নাম্বার দেয়া হল। বলতে হবে আমাদের কতগুলো চেয়ারের নাম্বার বিজোড়।

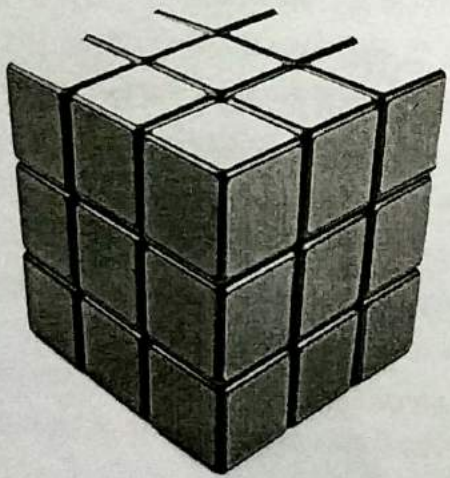
9. 8 নম্বর প্রশ্নে 11 এর স্থলে n হলে একটা সূত্র বানাও।

আর্নো রুবিক একাধারে একজন উদ্ভাবক ও ভাস্কর। হাঙ্গেরীতে বসবাসকারী একজন স্থাপত্যবিদ্যার অধ্যাপক ছিলেন। তিনি ১৯৭৪ সালে চমকপ্রদ এক ত্রিমাত্রিক পাজেল আবিস্কার করেন, আজ অবধী যার কোটি কোটি কপি বিক্রি হয়েছে। মূলত এটির নাম দেয়া হয়েছিল "ম্যাজিক কিউব" যা ১৯৮০ সালে বাজারজাত করা হয় এবং তারপর থেকেই এটি "রুবিক'স কিউব" নামে পরিচিত।

এই পাজেলটি যা কিনা ঘনক আকৃতির, দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতায় প্রায় ২ ইঞ্চি এবং এর প্রতিটি তল ৩ টি সারি ও তিনটি সারি বিশিষ্ট গ্রিডে বিন্যস্ত এবং এ পাজেলটি সর্বমোট ২৭ টি ছোট ছট খন্ডে বিভক্ত। এর ৬ টি তল আছে যেগুলো স্বাধীনভাবে ঘোরানো যায়। এতে করে পাজেলটির প্রতিটি তলের রঙের বিন্যাস পরিবর্তিত হয়। প্রাথমিকভাবে পাজেলটির ৬ টি তল এর প্রত্যেকটি ভিন্ন ভিন্ন রঙ বিশিষ্ট থাকে। কিন্তু যেকোনো একটি তল ঘোরালেই পাজেলটির এই বর্ণবিন্যাস পরিবর্তিত হয়ে যায়। রুবিক'স কিউব এর সর্বমোট ৪৩,২৫২,০০৩,২৭৪,৪৮৯,৮৫৬,০০০ টি ভিন্ন ভিন্ন বিন্যাস রয়েছে! এই সংখ্যাটি কল্পনাতীতভাবে বড়। এই পাজেলটির মূল উদ্দেশ্য হলো

প্রথমে এটিকে অনির্দিষ্ট একটি বিন্যাসে নিয়ে তারপর এটিকে পুনরায় প্রাথমিক অবস্থায় ফিরিয়ে নেয়া। অর্থাৎ প্রতি তলে একই রং হবে এরূপ বিন্যাস অর্জন করা।

তবে মানুষ কেবল এটি সমাধান করেই ক্ষান্ত হয়নি। এটি নিম্নতম সময়ে সমাধানের জন্যেও হয়েছে চেষ্টা। বর্তমানে আমেরিকার লুকাস এটার নামের একটি ছেলে নিম্নতম সময়ে এটি সমাধানের বিশ্ব রেকর্ড এর অধিকারী। অবিশ্বাস্য হলেও পাজেলটি সমাধানে তাঁর মাত্র ৪.৯ সেকেন্ড সময় লেগেছিল!!!এমনকি এই পাজেলটি যা কিনা অধিকাংশের কাছেই অসম্ভব কিছু, চোখ বুজে মেলানো সম্ভব এবং শুধু তাই নয়, এক্ষেত্রে চীনের কাইজুন লিন নামের এক যুবক মাত্র ২১.০৫ সেকেন্ড এ এটি মিলিয়ে চমকে দিয়েছেন বিশ্ব।



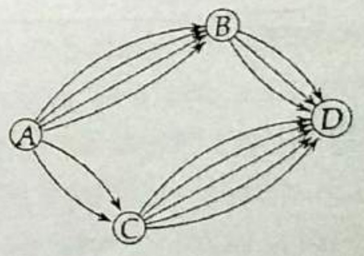


# গণনার বিভিন্ন কৌশল

**গণনার বিভিন্ন উপায়ের শুরু**

আমরা এই অধ্যায়ে বিভিন্ন গণনার কৌশল শিখাবো। এই পদ্ধতির মধ্যে আছে বিভিন্ন ক্ষেত্রে ভাগ করে গণনা, বিপরীত গণনা, ... ...। গণনার বিভিন্ন উপায় শেখা আমাদের প্রশ্ন সমাধান করতে অনেক সুবিধা দেবে।

**বিভিন্ন ক্ষেত্রে ভাগ করে গণনা**




**প্রশ্ন 1- পাশের চিত্রটা খেয়াল কর এখানে A, B, C, D চারটা শহর বুঝাচ্ছে। তুমি A থেকে B শহরে যাবার রাস্তা আছে চারটা তা দেখানো হয়েছে। এবার বলতে হবে তুমি কতভাবে A থেকে D শহরে যেতে পারো। তবে এক্ষেত্রে পিছনের দিকে (যেমন B থেকে A এর দিকে) আসতে পারবে না।**

যেমন তুমি ABD পথে যেতে পার কিন্তু ABACD এভাবে যেতে পারবে না।

এখানে চিত্রটিকে আমরা প্রশ্নটাকে দুইভাবে ভাগ করতে পারি। ক্ষেত্র দুইটি হল A থেকে B তে গিয়ে D তে যাওয়া আর একটা উপায় হল হল A থেকে C তে গিয়ে D তে যাওয়া।

A থেকে B তে গিয়ে D তে যাওয়া -

আমরা A থেকে B তে যেতে পারি চার ভাবে আর B থেকে D তে যেতে পারি তিন ভাবে। যেহেতু এরা স্বাধীন ঘটনা তাই মোট আমরা A থেকে B তে গিয়ে D তে যেতে পারি $3\times4=12$ ভাবে

A থেকে C তে গিয়ে D তে যাওয়া-

আমরা A থেকে C তে যেতে পারি দুইভাবে আর C থেকে D তে যেতে পারি পাঁচ ভাবে। যেহেতু এরা স্বাধীন ঘটনা তাই মোট আমরা A থেকে C তে গিয়ে D তে যেতে পারি $2\times5=10$ ভাবে

তাই মোট যাওয়ার উপায় হল – $12+10=22$ ভাবে

খেয়াল করে দেখো A থেকে B তে যাবো আর এরপর B থেকে D তে যাবো, তাই B থেকে D তে যাবার যতগুলো পথ আছে সবগুলোই A থেকে কিভাবে B তে গেছি তার উপর নির্ভর করছে। মানে মোট পথের হিসেব এভাবে করেছে B থেকে D তে যাবার জন্য 3 টা পথ আর প্রতিবার A থেকে B তে যাবার জন্য এই তিনটা করে পথ পেয়েছি। তাই A থেকে B তে গিয়ে B থেকে D তে যাবার উপায় হল A থেকে B তে যাবার মোট পথ × B থেকে D তে যাবার মোট পথ।



| |
|---|
| A থেকে B তে গিয়ে এর পর B থেকে D তে যাওয়া এই দুইটার উপর কোন নির্ভরশীলতা নাই। তাই এই ক্ষেত্রে গুণ হয়েছে। |
| আবার যখন আমরা A B D পথ নিয়ে নিয়েছি তখন আমরা কখনই C পথটাকে নিতে পারব না। তাই এটা পথ হিসেবে কোনটা নিয়েছি তার উপর নির্ভরশীল হয়ে পরেছে। তাই সেক্ষেত্রে মান বের করার জন্য আমাদের গুণের বদলে যোগ হয়েছে। |
| তাই বলা যায় যদি যখন কতগুলো পথ পরস্পর স্বাধীন হয় তখন গুণ করতে হয়, আর যখন একাধিক ভিন্ন পথ হয় তখন মানগুলো যোগ করতে হয়। |

**প্রশ্ন 2- একটা আজব দ্বীপে গিয়ে পৌঁছলাম যেখানে মাত্র 5 টা বর্ণ আছে। আর সেখানের লোকজন সর্বোচ্চ তিন বর্ণের শব্দ ব্যবহার করে। তাহলে বলতে হবে ঐ দ্বীপে শব্দ কয়টা। একটা শব্দে একাধিক বার একই বর্ণ ব্যবহার হতে পারে**

এখানে শব্দ এক বর্ণের হতে পারে, দুই বর্ণের হতে পারে বা তিন বর্ণের হতে পারে।

এক বর্ণের জন্য – আমাদের একটা বর্ণ নেবার উপায় আছে পাঁচটি তাই আমাদের এক বর্ণের শব্দ হল পাঁচটি।

দুই বর্ণের জন্য – আমাদের প্রথম একটা বর্ণ নেবার উপায় আছে পাঁচটি, 2য় বর্ণ নেবার উপায়ও আমাদের পাঁচটা। তাই আমাদের দুই বর্ণের শব্দ হল $5\times 5= 25$।

তিন বর্ণের জন্য – আমাদের প্রথম একটা বর্ণ নেবার উপায় আছে পাঁচটি, 2য় বর্ণ নেবার উপায়ও আমাদের পাঁচটা, 3য় বর্ণ নেবার উপায়ও আমাদের পাঁচটা। তাই আমাদের দুই তিন বর্ণের শব্দ হল $5\times 5 \times5= 125$।

মোট শব্দ সংখ্যা 125+25+5=155

**প্রশ্ন 3 – কতগুলো জোড়া ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা (m, n) আছে যার জন্য $m^2 + n < 22$**

এই প্রশ্নের জন্য একটা খেয়াল অতি দরকার তা হল

$$0 < m^2 < 22$$

মানে m = 1/2/3/4

এবার m = 1 হলে 0< n < 21 এইরকম n আছে 20 টা।

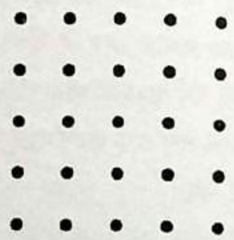
এবার m = 2 হলে 0< n < 18 এইরকম n আছে 17 টা।

এবার m = 3 হলে 0< n < 13 এইরকম n আছে 12 টা।

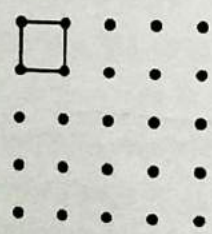
এবার m = 4 হলে 0< n < 6 এইরকম n আছে 5 টা।

তাহলে মোট উপায় 20+17+12+5=54

**প্রশ্ন 4 পাশের চিত্রে বিন্দুগুলো যোগ করে কতগুলো বর্গক্ষেত্র তৈরি করা সম্ভব।**



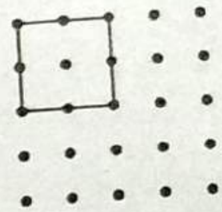
প্রথমে 1× 1 এর জন্য চিন্তা করে দেখি এখানে দেখা যাচ্ছে এই 1× 1 ঘরটা ডানে আর নীচে এক ঘর করে চার ঘর পর্যন্ত সরতে পারে ফলে প্রতিক্ষেত্রেই একটা নতুন





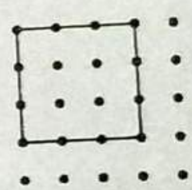
1× 1 বর্গক্ষেত্রের তৈরি হয়। তাহলে মোট 1× 1 ঘর তৈরি হবে 4× 4 = 16 টা।

2× 2 এর জন্য চিন্তা করে দেখি এখানে দেখা যাচ্ছে এই 2× 2 ঘরটা ডানে আর নীচে এক ঘর করে তিন ঘর পর্যন্ত সরতে পারে ফলে প্রতিক্ষেত্রেই একটা নতুন



2× 2 বর্গক্ষেত্রের তৈরি হয়। তাহলে মোট 2× 2 ঘর তৈরি হবে 3× 3 = 9 টা।

3× 3 এর জন্য চিন্তা করে দেখি এখানে দেখা যাচ্ছে এই 3× 3 ঘরটা ডানে আর নীচে এক ঘর করে দুই ঘর পর্যন্ত সরতে পারে ফলে প্রতিক্ষেত্রেই একটা নতুন

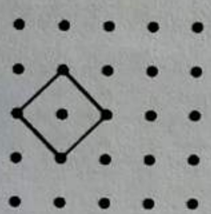


3× 3 বর্গক্ষেত্রের তৈরি হয়। তাহলে মোট 3× 3 ঘর তৈরি হবে 2× 2 = 4 টা।

আর 4× 4 তো কেবল মাত্র একটাই তৈরি করা যাবে

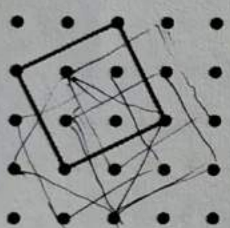
তাহলে মোট হল 16+9+4+1 = 30 টা

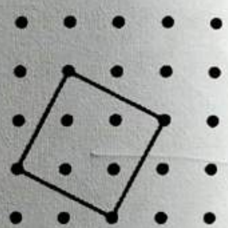
হিসেব কি এখানেই শেষ, না আরও আছে খেয়াল করে দ্যাখো



এই আকারের বর্গও থাকতে পারে যার প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য $\sqrt{2}$। এরকম বর্গ হতে পারে 9টা। পাশে ও নীচে যেতে পারে তিন ঘর করে

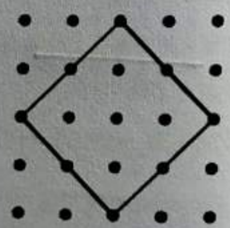
$\sqrt{5}\times\sqrt{5}$ আকারের বর্গক্ষেত্র হতে পারে দুইটা বিন্যাসে নিচের চিত্র দুইটা দেখলেই তা স্পষ্ট হবে





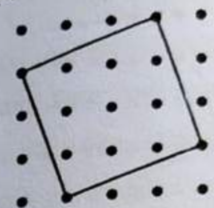
দেখা যাচ্ছে উভয়ক্ষেত্রেই ডানে দুইঘর আর নীচে দুইঘর করে যেতে পারে। মানে প্রতিক্ষেত্রেই $2\times 2$ মানে চারটা করে মোট ৪টা বর্গক্ষেত্র হতে পারে।

$\sqrt{8}\times\sqrt{8}$ আকারের বর্গক্ষেত্র হতে পারে একটা তা পাশের চিত্র দেখলেই তা স্পষ্ট হবে





$\sqrt{10}\times\sqrt{10}$ আকারের বর্গক্ষেত্র হতে পারে দুইটা বিন্যাসে নিচের চিত্র দুইটা দেখলেই তা স্পষ্ট হবে



আর এই ধরনের বিন্যাস কেবল এই দুইভাবেই হতে পারে।

তাহলে মোট হল = 16+9+4+1+9+8+1+2 মোট 50 ভাবে।

এবার অনেকেই চিন্তা করে বসবে আমি যে সলভ করলাম সেটা কি সকল সমাধান দিচ্ছে ? সেটা জানার জন্য আমরা একটা পর্যবেক্ষণ করে আসতে পারি। যদি x অক্ষ বরাবর m ঘর আর y অক্ষ বরাবর n ঘর নেই তাহলেই আমরা বুঝব যে আমাদের বর্গের কর্ণের দৈর্ঘ্য কত হয়েছে। সেটা দেখার জন্য নিচের ছকটা খেয়াল করি। ($\sqrt{m^2+n^2}$ এর জন্য m, n মান 4 এর কম হবে)

| m | n | বাহুর দৈর্ঘ্য |
|---|---|---|
| 1 | 1 | $\sqrt{2}$ |
| 1 | 2 | $\sqrt{5}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | $\sqrt{10}$ |
| 2 | 2 | $\sqrt{8}$ |

যার প্রতিটাই আমরা বিবেচনা করেছি। আবার m=1, n=2 আর m=2 আর n=1 আসলে একই রকম বর্গক্ষেত্র দেখায়। সেই জন্যই আমরা আমাদের চিত্র আঁকায় দুই ধরনের বর্গক্ষেত্র পেয়েছি। একই ঘটনা হল m=1, n=3 ও m=3, n=1 এর জন্যও। তাহলে আমাদের বাদ থাকল m=2, n=3 (অন্যভাবে m=3, n=2) দেখতে পারি সেই ধরনের বর্গ আমাদের এখানে আকা যায় না। একই কথা m=3, n=3 এর জন্য। যার মানে আমরা সব ধরনের বর্গের কথা চিন্তা করেছি। আর আমাদের উত্তর 50 ঠিক আছে।

> তোমরা যখনই বিভিন্ন ক্ষেত্রে ভাগ করে গণনা করবে অবশ্যই খেয়াল করবে যেন কোন ঘটনা বাদ না যায়।

**প্রশ্ন 5 এবার আমি এমন এক আজব দেশে গেলাম যেখানে সবাই 26টা বর্ণই(A-Z) ব্যবহার করে কিন্তু শব্দে বর্ণের সংখ্যা 3 এর বেশী নয়। কিন্তু সকল শব্দে অবশ্যই একবার না একবার A বর্ণ ব্যবহার করে। তাহলে কতগুলো শব্দ সম্ভব**

তাহলে আমাদের এখানের শব্দে একটা A থাকতে পারে 2টা A থাকতে পারে এমনকি তিনটা A ও থাকতে পারে।

একটা A এর জন্য



যদি A সবার প্রথমে থাকে

মনে করি আমাদের শব্দটা A■■ যেখানে ■ ≠ A

তিন শব্দের জন্য আমাদের 2য় বর্ণের জন্য আমাদের আছে 25টা বর্ণ, আবার 3য় বর্ণের জন্য আমাদের আছে 25টা বর্ণ, তাহলে আমাদের এই ধরণের শব্দ হবে 25× 25 =625 টা

যদি A সবার মাঝে থাকে

মনে করি আমাদের শব্দটা ■A■ যেখানে ■ ≠ A

তিন শব্দের জন্য আমাদের 1ম বর্ণের জন্য আমাদের আছে 25টা বর্ণ, আবার 3য় বর্ণের জন্য আমাদের আছে 25টা বর্ণ, তাহলে আমাদের এই ধরণের শব্দ হবে 25× 25 =625 টা

যদি A সবার শেষে থাকে

মনে করি আমাদের শব্দটা ■■A যেখানে ■ ≠ A

তিন শব্দের জন্য আমাদের 1ম বর্ণের জন্য আমাদের আছে 25টা বর্ণ, আবার 2য় বর্ণের জন্য আমাদের আছে 25টা বর্ণ, তাহলে আমাদের এই ধরণের শব্দ হবে 25× 25 =625 টা

তাহলে এই ধরনের শব্দ হবে 3× 625 =1875

দুইটা A এর জন্য

যদি ■ সবার প্রথমে থাকে

মনে করি আমাদের শব্দটা ■AA যেখানে ■ ≠ A

তিন শব্দের জন্য আমাদের 1ম বর্ণের জন্য আমাদের আছে 25টা বর্ণ, আমাদের এই ধরণের শব্দ হবে 25টা

যদি ■ সবার মাঝে থাকে

মনে করি আমাদের শব্দটা A■A যেখানে ■ ≠ A

তিন শব্দের জন্য আমাদের 2য় বর্ণের জন্য আমাদের আছে 25টা বর্ণ, আমাদের এই ধরণের শব্দ হবে 25টা

যদি ■ সবার শেষে থাকে

মনে করি আমাদের শব্দটা AA■ যেখানে ■ ≠ A

তিন শব্দের জন্য আমাদের 2য় বর্ণের জন্য আমাদের আছে 25টা বর্ণ, আমাদের এই ধরণের শব্দ হবে 25টা

তাহলে এই ধরনের শব্দ হবে 3× 25 =75

তিনটা A এর জন্য মাত্র একটাই শব্দ হতে পারে AAA

তাহলে মোট শব্দ 1875+75+1=1951

অধ্যায়ে যা শিখলাম

| |
|---|
| যদি একটা সমস্যাকে কতগুলো খণ্ডে আলাদা আলাদা করে সমস্যাটা সমাধান করা যায় তাহলে তা করে সমাধান করবে। |
| যদি যখন কতগুলো পথ পরস্পর স্বাধীন হয় তখন গুণ করতে হয়, আর যখন একাধিক ভিন্ন পথ হয় তখন মানগুলো যোগ করতে হয়। |
| যখনই বিভিন্ন ক্ষেত্রে ভাগ করে গণনা করবে অবশ্যই খেয়াল করবে যেন কোন ঘটনা বাদ না যায়। |

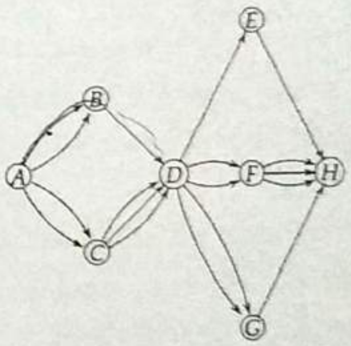


অনুশীলনী

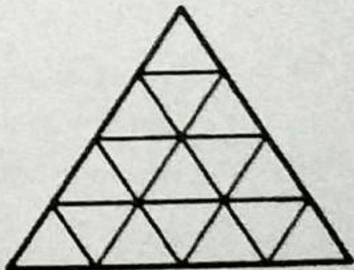
1. 3 বর্ণের কতগুলো শব্দ বানানো সম্ভব যেখানে আমরা কেবল A, B, C ও D যে কোন সংখ্যক বার ব্যবহার করতে পারব আর A বর্ণটা একবার হলেও ব্যবহার করতেই হবে

2. আমার কাছে থাকা দুইটা বাক্সে বল আছে। প্রথম বাক্সে 1-15 নাম্বার দেয়া বল আছে আর 2য় বাক্সে 16 থেকে 25 পর্যন্ত নাম্বার দেয়া আছে। আমি প্রথমে একটা বাক্স নেই এরপর সেখান থেকে তিনটা বল পুনস্থাপন ছাড়া তুলে নেই। তাহলে মোট কতভাবে বল তোলা যেতে পারে ?

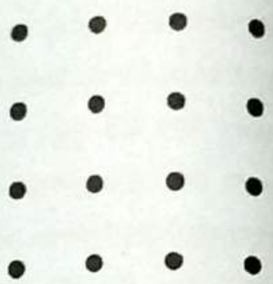
3. কতভাবে একজন মানুষ A থেকে H বিন্দুতে পৌছাতে পারে ?




4. পাশের চিত্রে কতগুলো ত্রিভুজ বিদ্যমান ?



5. পাশের বিন্দুগুলোকে যোগ করে কতগুলো চতুর্ভুজ বানানো যাবে যেখানে তার বিপরীত বাহুগুলো সমান্তরাল।



6. পাশের চিত্রের বিন্দুগুলো যোগ করে কতগুলো সমবাহু ত্রিভুজ বানানো সম্ভব।



বিপরীত গণনা

এই পদ্ধতিতে আমাকে যা গণনা করতে বুলবে সেটা গণনা না করে তার বিপরীতটা গণনা করব, এরপর মোট উপায় থেকে টা বিয়োগ করে ফেলব

**প্রশ্ন 1- আগের অধ্যায়ের 5ম প্রশ্নটা খেয়াল কর এবার আমি এমন এক আজব দেশে গেলাম যেখানে সবাই 26টা বর্ণই(A-Z) ব্যবহার করে কিন্তু শব্দে বর্ণের সংখ্যা 3 এর বেশী নয়। কিন্তু সকল শব্দে অবশ্যই একবার না একবার A বর্ণ ব্যবহার করে। তাহলে কতগুলো শব্দ সম্ভব**

এখানে আমরা আমাদের নতুন নিয়মে সমাধান করব

প্রথমে আমাদের ধরে নেই আমাদের কোন বাধা নেই তাহলে আমরা শব্দ বানাতে পারব $26\times 26 \times 26 = 17576$ কেননা প্রথম বর্ণ যেমন 26 ভাবে নিতে পারি তেমনি 2য় বর্ণ 26ভাবে নিতে পারি আর তৃতীয় বর্ণও 26 ভাবে নিতে পারি।

এবার মনে করি আমাদের হিসেবে কোন A নেই তাহলে আমরা শব্দ বানাতে পারব $25\times 25 \times 25 = 15625$ কেননা প্রথম বর্ণ যেমন 25 ভাবে নিতে পারি তেমনি 2য় বর্ণ 25ভাবে নিতে পারি আর তৃতীয় বর্ণও 25 ভাবে নিতে পারি।

তাহলে অন্তত পক্ষে একটা A ব্যবহার করে শব্দ বানানো যাবে $17576 - 15625 = 1951$ যা আগেই পেয়েছি

| |
|---|
| আগের মান আর এই মান সমান দেখানোর জন্য একটা মজার জিনিষ দেখানো যায় $26^3 = (25+1)^3 = 25^3 + 3\times 25^2 + 3\times 25 + 1$ |

তাহলে $26^3 - 25^3 = 3 \times 25^2 + 3 \times 25 + 1$ যা আগের সমাধানের হিসাব নিকাশ।

**প্রশ্ন 2 কতগুলো তিন অংকের সংখ্যা আছে যা 7 এর গুণিতক না।**

প্রথমে 7 এর গুণিতক সংখ্যা বের করি। তিন অংকের সবচাইতে ছোট 7 এর গুণিতক হল $15 \times 7 = 105$ আর সবচাইতে বড় তিন অংকের 7 এর গুণিতক হল $142 \times 7 = 994$ তার মানে আমাদের প্রথম অধ্যায়ের হিসেব নিকাশ থেকে বলতে পারি মোট সংখ্যা আছে

$142 - 15 + 1 = 128$

তাহলে 7 এর গুণিতক নয় $900 - 128 = 772$

**প্রশ্ন 3 ইমনের চার ছেলে আর 3 মেয়ে। তিনি তাদের একটা 7 সিটের একটা বেঞ্চে বসবে কিন্তু তিনি চান অন্তত তার এক ছেলে আর এক ছেলের পাশে যেন বসে। তিনি কতভাবে বসাতে পারবেন।**

ছেলেদের BBBB আর মেয়েদের GGG দিয়ে প্রকাশ করলাম। এবার দেখা যাচ্ছে একমাত্র একভাবেই সব ছেলেরা আলাদা আলাদা বসে টা হল BGBGBGB

এবার ছেলেদের চার স্থানে চারজনকে বসানো যায় 4! উপায়ে আর মেয়েদের তিনজনকে বসানো যায় 3! ভাবে। তাই এভাবে বসানো যায় $3! \times 4!$ ভাবে। যেহেতু ছেলেদের বসানোর সাথে মেয়েদের বসানো স্বাধীন।



তাহলে অন্তত তার এক ছেলে আর এক ছেলের পাশে যেন বসে এমন বিন্যাস $7! - 3! \times 4! = 5040 - 144 = 4896$

## এই অধ্যায়ে যা শিখলাম

এখানের দেয়া প্রশ্ন থেকে একটা জিনিষ মাথায় রেখো, যদি কখনও বলে কতগুলো হবে না, সে কথা চিন্তা না করে কতগুলো হবে তা চিন্তা কর। অথবা যখন বলবে কতগুলো কমপক্ষে একবার হবে এর চাইতে কতগুলো হবেই না এটা বের করে ফেলো।

## অনুশীলনী

1. A, B, C, D ও E ব্যবহার করে কতগুলো চার বর্ণের শব্দগঠন করা যাবে যেখানে অন্তত একটা স্বরবর্ণ (A, E) থাকবেই।
2. কতগুলো পাঁচ অংকের সংখ্যা আছে যার মধ্যে অন্তত একটা শূন্য।
3. আমার কাছে প্রত্যেক রঙের 6টা করে প্যান্ট, শার্ট আর টুপি আছে। আমি একই রঙের তিনটা পরে বাইরে যেতে চাই না। আমি কতভাবে যেতে পারব।
4. 7 জন মানুষের মধ্যে প্রীতম আর অদিতি 7 চেয়ারে কখনই পাশাপাশি বসতে চায় না। কতভাবে চেয়ারে বসা সম্ভব।

আমরা অনেক সময় কিভাবে সরাসরি গণনা করব সেটা খুঁজে পাই না। কিন্তু কিভাবে গঠন হয়েছে সেটা বুঝতে থাকলে সমাধান করে ফেলতে পারি। কিছু উদাহরণ দেখা যাক

**প্রশ্ন 1 কতগুলো তিন অংকের সংখ্যা আছে যাতে ঠিক একটাই শূন্য আছে।**

আমরা একটা তিন অংকের সংখ্যা গঠন করতে চাই তার জন্য একটা শূন্য মাঝে বা শেষে থাকবেই। তাই যে কোন একটার জন্য চিন্তা করে দেখি, যদি শেষে শূন্য থাকে তাহলে প্রথমে বসানোর জন্য আমাদের অপশন আছে 9 টা আর মাঝে বসানোর জন্য অপশন আছে 9টা তাহলে মোট সংখ্যা $9\times 9=81$ টি

আবার অনুরূপ ভাবে মাঝে শূন্য রেখে সংখ্যা হতে পারে 81 টি মোট তাহলে 162টি

**প্রশ্ন 2 - মনে কর একটা সংখ্যা লেখা হল abcdefg এখানে কোন সংখ্যাই 5 এর চাইতে বড় না আবার 0 এর চাইতে বড়। আবার পাশাপাশি দুইটা সংখ্যা কখনই সমান না। এরকম কতগুলো সংখ্যা হতে পারে ?**

এখানে **বিপরীত গণনা** পদ্ধতি ব্যবহার করে অনেকে সমাধান করতে চাইবে দেখতে পাবে ব্যাপারটা বেশ জটিল হয়ে যায়। তাই এখন খেয়াল কর, a এর জন্য আমরা 1, 2, 3, 4, 5 এর যে কোনটাই বসাতে পারি তাই আমাদের অপশন, কিন্তু b এরজন্য আমরা পাঁচটা অপশন থাকল



না কেননা আমরা a এর জন্য যা বসিয়ে দিয়েছি সেটা b এর জন্য বসাতে পারব না, অনুরূপ c এর জন্য b এর মান বসাতে পারব না। তাহলে এসব ক্ষেত্রে আমাদের অপশন হল 4 টা করে। তাই মোট উপায় $5\times 4^6=20480$

**প্রশ্ন 3- 1, 2, 3, ..., 500 এখান থেকে তিনটা সংখ্যা নেয়া হল যাতে একটি সংখ্যা অপর সংখ্যা দুইটির গড় হয়**

মনে করি আমাদের সংখ্যা তিনটা x, y, z যেখানে $x< y < z$

তাহলে অবশ্যই $\frac{x+z}{2} = y$ সেখান থেকে z=2y-x

আমরা জানি $z\leq 500$

তার মানে $2y-x\leq 500$

$y \leq \frac{x}{2} + 250$

x= 1 হলে $1 < y \leq 250.5$ তার মানে y =2, 3, ... 250

তার মানে আমাদের চয়েস 249

x = 2 হলে $2 < y \leq 251$ তার মানে y =3, 4 ... 251

তার মানে আমাদের চয়েস 249

x= 3 হলে $3 < y \leq 251.5$ তার মানে y =4, 5 ... 251.5

তার মানে আমাদের চয়েস 248

যার মানে আমরা দেখতে পাচ্ছি

| x এর মান | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| y এর জন্য অপশন | 249 | 249 | 248 | 248 | ... |

এর শেষ কোথায়

যদি x= 497 হয় $497 < y \leq 498.5$ তার মানে y এর জন্য আমাদের অপশন একটাই তা হল 498

যদি x= 498 হয় $498 < y \leq 499$ তার মানে y এর জন্য আমাদের অপশন একটাই তা হল 499

তাহলে মোট উপায়

$249+249+248+248+ \ldots +1+1$

$=2(1+2+ \ldots +249)$

$= 62,250$

এই অধ্যায়ে যা শিখলাম

| |
|---|
| আমরা অনেক সময় কিভাবে সরাসরি গণনা করব সেটা খুঁজে পাই না। কিন্তু কিভাবে গঠন হয়েছে সেটা বুঝতে থাকলে সমাধান করে ফেলতে পারি। |



অনুশীলনী

1. কতগুলো তিন অংকের সংখ্যা আছে যার প্রথম অংক 2য় অংকের দ্বিগুণ।

2. কতগুলো চার অংকের সংখ্যা আছে যার শেষ অংক প্রথম দুই অঙ্গের যোগফল

3. মনে কর একটা সংখ্যা লেখা হল abcdef পাশাপাশি দুইটা অংকের একটা জোড় হলে অন্যটা বিজোড়। এরকম কতগুলো সংখ্যা হতে পারে ?

4. 1, 2, 3, ... 100 এখান থেকে তিনটা সংখ্যা নিয়ে একটা গ্রুপ করা হল। এমন করগুলো গ্রুপ করা সম্ভব যাতে সবচাইতে বড় সংখ্যাটি বাকি দুইটা গুণফল অপেক্ষা বড়।

## শর্তের মধ্যে গণনা

আমাদের কোন শর্ত দিয়ে দিলে প্রথমেই সেই শর্ত নিয়ে কাজ করবে এরপর বাকি যা আছে তা নিয়ে কাজ করবে। এতে সমস্যা সমাধান সহজ হয়।

**প্রশ্ন 1. আমার কাছে তিনটা ভিন্ন ভিন্ন গণিত বই আর পাঁচটা ভিন্ন ভিন্ন বিজ্ঞানের বই আছে। আমরা কতভাবে বইগুলো আমাদের সেলফে রাখতে পারি যাতে দুই প্রান্তে গণিত বই থাকে ?**

প্রথম প্রান্তের বই এর জন্য আমরা আমাদের তিনটা গণিত বই থেকে যে কোন একটা রাখতে পারি আর অপর প্রান্তে বাকি দুইটা বই এর যে কোন একতা রাখতে পারি আর মাঝে থাকবে আমাদের বাকি 6টা বই (5টি বিজ্ঞানের আর একটা গণিতের) এদের সাজানো যায় $6!$ ভাবে যেহেতু পুরো ঘটনাই স্বাধীন ঘটনা তাই আমরা বই সাজাতে পারব

$3\times 2\times 6! = 4320$ ভাবে।

**প্রশ্ন 2 ইমনের চার ছেলে আর 3 মেয়ে। তিনি তাদের একটা 7 সিটের একটা বেঞ্চে বসাবে কিন্তু তিনি চান তার সকল মেয়ে একসাথে বসবে। তিনি কতভাবে বসাতে পারবেন।**

প্রথমেই আমরা শর্ত নিয়ে কাজ করব। আগে বসলে ব্যাপারটা কেমন হবে তা দেখা যাক GGGBBBB, BGGGBBB, BBGGGBB, BBBGGGB, BBBBGGG



আমরা তিনজন মেয়েকে একসাথে একজন বলে বিবেচনা করি। এবার এই বালকদের নিজেদের মধ্যে বিন্যাস হবে $4!$ আর বালিকাদের নিজের মধ্যে বিন্যাস হবে $3!$ তাহলে মোট উপায়

$5\times 4!\times 3! = 720$ ভাবে

> এই সমস্যাটাকে আমরা অন্য একটা সহজ ভাবেও করতে পারতাম। তিনজন বালিকাকে একসাথে একজন বালিকা ধরি। তাহলে বিন্যাস টি হয় BBBBG তাদের সাজানো যায় $5!$ ভাবে। আর বালিকাদের নিজেদের মধ্যে সাজানো যায় $3!=6$ ভাবে। তাহলে মোট সাজানো যায় $6\times 5! = 720$ ভাবে।

**প্রশ্ন 3 একটা দেশের সম্মেলনে বাংলাদেশ থেকে 6 জন, ভারত থেকে 5 জন আর শ্রীলংকা থেকে 3 জন আছে। তাদের জন্য থাকা 14 টা পাশাপাশি সিট আছে। এখন একই দেশের লোকেরা সবাই একসাথে বসতে চাইলে মোট কতভাবে বসানো সম্ভব ?**

বাংলাদেশী সবাইকে B, ভারতীয় সবাইকে I আর শ্রীলঙ্কার সবাইকে S দিয়ে প্রকাশ করি। তাহলে এই তিনটা BIS কে সাজানো যায় $3!=6$ ভাবে। আবার বাংলাদেশী 6 জন নিজেদের মাঝে বসতে পারে $6!$ ভাবে ভারতীয় পাঁচজন নিজেদের মাঝে বসতে পারে $5!$ ভাবে আর শ্রীলঙ্কার তিন জন নিজেদের মাঝে বসতে পারে $3!$ ভাবে

মোট বসতে পারে $3!\times 6!\times 5!\times 3! = 3110400$ ভাবে

প্রশ্ন 4 আমাদের ম্যাথ ক্লাবে 20 জন ট্রেইনার আছে। সেখান থেকে আমরা তিনজনকে সভাপতি, সহসভাপতি আর কোষাধ্যক্ষ হবেন। এর মধ্যে তমাল আর দিপুর মাঝে একটু ঝগড়া হয়েছে। তাই একজন এই পদে থাকলে অন্যজন থাকবে না। কতভাবে কমিটি সম্ভব।

যদি কোণ শর্ত না দেয়া থাকত তাহলে কমিটি হত $20\times 19\times 18$ ভাবে। এখন আমরা ভাবি যদি দুইজনই দলে থাকে। দিপু তিনটা পদের যেকোন একটা পদ নিতে পারে 3 ভাবে, তমাল বাকি দুইটা পদ থেকে একটা পদ নিতে পারে 2 ভাবে, আর বাকি স্থান 18 জনের যে কেউ নিতে পারে।

তাহলে মোট উপায় $20\times 19\times 18-3\times 2\times 18=6732$

প্রশ্ন 4 আমাদের ম্যাথ ক্লাবে 20 জন ট্রেইনার আছে। সেখান থেকে আমরা তিনজনকে সভাপতি, সহসভাপতি আর কোষাধ্যক্ষ হবেন। এর মধ্যে অদিতিকে প্রীতম পছন্দ করে। কিন্তু অদিতি এই ব্যাপারে জানে না। এবার যদি অদিতি কমিটিতে থাকে তাহলেই সে কমিটিতে থাকবে আর যদি না থাকে তাহলে সে থাকবে না। কিন্তু অদিতির এই ব্যাপারে কোন মত নাই যদি প্রীতম থাকে তাহলেও থাকবে আর না থাকলেও থাকবে। কতভাবে কমিটি সম্ভব ?

যদি কোণ শর্ত না দেয়া থাকত তাহলে কমিটি হত $20\times 19\times 18$ ভাবে। আমরা এখান থেকে আমরা সেই কেসটা বাদ দেব যেখানে প্রীতম আছে কিন্তু অদিতি নেই।



তাহলে তিনটা পোষ্টের একটা প্রীতম নিতে পারে 3 ভাবে, বাকি স্থান দুইটি অদিতি আর প্রীতম বাদে বাকি 18 জন $18\times 17$ ভাবে গঠন করতে পারে।

তাহলে আমাদের প্রশ্ন অনুসারে কমিটি গঠন হতে পারে

$20\times 19\times 18-3\times 18\times 17=5922$

অধ্যায়ে যা শিখলাম

| |
|---|
| আমাদের কোণ শর্ত দিয়ে দিলে প্রথমেই সেই শর্ত নিয়ে কাজ করবে এরপর বাকি যা আছে তা নিয়ে কাজ করবে। এতে সমস্যা সমাধান সহজ হয়। |

অনুশীলনী

1. একটা টক শো এ সরকারি দলের 5 জন আর বিরোধী দলের চার জন উপস্থিত ছিল। যদি সরকারি দলের লোকেরা একসাথে বসতে চায় তাহলে কতভাবে বসতে পারবে ?

2. সবুজের বাসায় চারটা মুরগী, 2টা কুকুর আর 5টা বিড়াল আছে। সবুজ এর জন্য 11টা পাশাপাশি খাঁচা বানালো। সে তার একই ধরনের প্রাণীগুলোকে একসাথে রাখতে চায় কতভাবে রাখতে পারবে ?

3. অনুপমের পাঁচ ছেলে আর তিন মেয়ে। তিন মেয়ের দুইজন আবার যমজ। যদি যমজ বোনেরা একসাথে বসে তাহলে অন্য বোন পাশে বসতে চায় না। তাহলে কতভাবে তারা পাশাপাশি বসতে পারবে ?

4. আমাদের ক্লাবে 10 জন ছেলে আর 10জন মেয়ে, আমরা কতভাবে একজন সভাপতি আর একজন সহ সভাপতি বানাতে পারি যাতে

a) কোন শর্ত ছাড়া

b) তারা অবশ্যই ভিন্ন লিঙ্গের হবে

c) তারা একই লিঙ্গের হবে

d) উপরের প্রশ্ন দুইটির নিজেদের সাথে সম্পর্ক কি ? কেন

5. আমাদের ক্লাবে 25 জন আছে সেখান থেকে আমরা তিনজনকে সভাপতি, সহসভাপতি আর কোষাধ্যক্ষ বানাবো। কত ভাবে বানাতে পারব যদি

a) একজন একটা পদেই বসতে পারবে

b) একজন একাধিক পদে বসতে পারবে ?

c) একজন সর্বোচ্চ দুইটা পদে থাকতে পারবে ?



পুরো অধ্যায়ে আমরা যা শিখলাম

| |
|---|
| যদি একটা সমস্যাকে কতগুলো খণ্ডে আলাদা আলাদা করে সমস্যাটা সমাধান করা যায় তাহলে তা করে সমাধান করবে। |
| যদি কখনও বলে কতগুলো হবে না, সে কথা চিন্তা না করে কতগুলো হবে তা চিন্তা কর। অথবা যখন বলবে কতগুলো কমপক্ষে একবার হবে এর চাইতে কতগুলো হবেই না এটা বের করে ফেলো। এরপর সর্বমোট থেকে বাদ দেও। |
| আমরা অনেক সময় কিভাবে সরাসরি গণনা করব সেটা খুঁজে পাই না। কিন্তু কিভাবে গঠন হয়েছে সেটা বুঝতে থাকলে সমাধান করে ফেলতে পারি। তাই গঠন মূলক পদ্ধতিতে সমাধান করতে পারি |
| আমাদের কোণ শর্ত দিয়ে দিলে প্রথমেই সেই শর্ত নিয়ে কাজ করবে এরপর বাকি যা আছে তা নিয়ে কাজ করবে। এতে সমস্যা সমাধান সহজ হয়। |

1. যদি যখন কতগুলো পথ পরস্পর স্বাধীন হয় তখন গুণ করতে হয়, আর যখন একাধিক ভিন্ন পথ মানে স্বাধীন না হয় তখন মানগুলো যোগ করতে হয়। *

2. অনেক সময় যেটা করতে বলছে সেটার চাইতে তার বিপরীত-টা বের করা অনেক সহজ হয়। সেটা করে সর্বমোট থেকে বাদ দিলে সমাধান পাওয়া যায়। *

3. যদি কখনও বলে কতগুলো হবে না, সে কথা চিন্তা না করে কতগুলো হবে তা চিন্তা কর। অথবা যখন বলবে কতগুলো কমপক্ষে একবার হবে এর চাইতে কতগুলো হবেই না এটা বের করে ফেলো।

4. অনেক সময় অনেক বড় সমস্যার জন্য সামান্য কিছু ডাটা নিয়ে কাজ করলে সমাধান করা বা সমাধানের পদ্ধতি খুঁজে পাওয়া অনেক সহজ হয়।

**সম্পূর্ণ অধ্যায়ের অনুশীলনী**

1. কতগুলো চার অংকের সংখ্যা আছে যার সবগুলো অংকই বিজোড়

2. কতগুলো ইংরেজি তিন বর্ণের শব্দ গঠন সম্ভব যেখানে প্রথম বর্ণ অবশ্যই স্বরবর্ণ

3. 1-5 ব্যবহার কতগুলো তিন অংকের সংখ্যা গঠন সম্ভব যেখানে প্রথম অংক আর 2য় অংক আলাদা আবার 2য় আর 3য় অংক আলাদা

4. কতগুলো a, b, c আছে যার জন্য $a^2 + b^2 + c^2 \leq 50$

5. 100 আর 200 এর মধ্যে কতগুলো সংখ্যা পূর্ণবর্গ না।

6. কতগুলো তিন অংকের সংখ্যা আছে যার প্রথম অংক তৃতীয় অংকের তিনগুণ

7. 6 জন বালিকা আর 2জন বালককে কতভাবে বসানো যায় যেখানে বালক দুইজন একসাথে বসবে না

8. তিনটা ভিন্ন গণিত আর পাঁচটা ভিন্ন পদার্থ বই কত ভাবে সেলফে রাখা যায় যাতে গণিত বই আর পদার্থ বই সবগুলোই একসাথে থাকে।



**একটু বেশী মাথা খাটাও**

1. 24 থেকে 125 পর্যন্ত কতগুলো সংখ্যা আছে যাদের অংকগুলোর যোগফল 7 দিয়ে বিভাজ্য

2. জামি তার 7 ছেলে মেয়ের জন্য 7টা প্রাণী আনল এর মধ্যে চারটা বিভিন্ন জাতের বেড়াল, দুইটা ভিন্ন জাতের কুকুর আর একটা গোল্ডফিস। সুইটি আর কনা গোল্ডফিস নেবে না, জাহিদ আর আদিতা বিড়াল পুষতে চায়। বাকিরা যা দেবে তাই নিবে। কতভাবে সবার মাঝে প্রাণীগুলো ভাগ করে দেয়া যায়।

3. একটা কমিটিতে সবাইকে 1 থেকে n নাম্বার দেয়া হল। এরমধ্যে একজনকে সেরা বাছাই করা হল। সেরা বাছাই করার ডানে ই তার চাইতে বেশি নাম্বার যুক্ত কেউকে বসতে দেয়া হবে না। যেমন সেরার নাম্বার p হতে পারে $1 \leq p \leq n$ n, p এর জন্য একটা সূত্র বের কর যাতে এই বসার লোক সংখ্যা বের করা যায়।

4. নিচের যে কোণ ঘর থেকে তুমি চাইলে ডানে বামে উপরে বা নীচে পড়তে পারে। তুমি কতভাবে NOON শব্দটা পড়োতে পারবে ? একই letter দুইবার পড়া যাবে না।

| | | | |
|---|---|---|---|
| N | N | N | N |
| N | o | o | N |
| N | o | o | N |
| N | N | N | N |

5. টামটা নাম্বার হল সেই সংখ্যা যা ডান ঠেকে পড়লেও যা বাম থেকে পড়লেও তাই যেমন 12321 তাহলে,

a) কতগুলো চার অংকের টামটা সংখ্যা আছে

b) কতগুলো ৫ অংকের টামটা সংখ্যা আছে

c) কতগুলো ৬ অংকের টামটা সংখ্যা আছে

d) মনে কর 2004 অংকের একটা টামটা সংখ্যায় কেবল 8 আর 9 আছে। কমপক্ষে একবার আছেই। তাহলে সবচাইতে ছোট এই সংখ্যাটা বের কর

6. 1 থেকে 256 পর্যন্ত বাইনারীতে লিখলে কতবার 0 লিখতে হয়।

6. কতগুলো পাঁচ বর্ণের ইংরেজি শব্দ আছে যার কমপক্ষে পাশাপাশি দুইটা বর্ণ একই।

7. একটা ক্লাশে 10 জন ছাত্র আছে। তারা প্রথমে নামের ক্রমিক অনুসারে দাঁড়ায়। এরপর প্রথম জন যেকোন সিটে বসে পড়ে। পরের জন আসে সে যেখানে কেউ বসে আছে ঠিক তার পাশের সিটে (ডানে বা বামে যদি ফাঁকা থাকে) বসে পড়ে। 10টা চেয়ার থাকলে কত ভাবে এই বিন্যাস সম্ভব

8. আমার কাছে একটা ব্যাগে 1-6 নাম্বার দেয়া মার্বেল আছে। আর তমালের কাছে 1-12 নাম্বার দেয়া 12টা মার্বেল আছে। আমি আমার ব্যাগ থেকে দুইটা মার্বেল উঠাই আর তমাল দুইটা মার্বেল উঠায়। কতভাবে মার্বেল টলা সম্ভব যাতে আমার মার্বেল দুইটার যোগফল তমালের মার্বেলের নাম্বারের সমান হয়।



## বেশি গণনা ও তার সংশোধন

কখনও কখনও আমরা গণনা করতে গিয়ে বেশি গুণে ফেলি আবার সেটা সংশোধনের জন্য আবার কিছু বাদ দিয়ে দিতে হয় এখন আমরা সেটাই শিখব।

**একই ধরনের একাধিক বস্তু সম্বলিত বস্তুর বিন্যাস**

**প্রশ্ন 1 –DOG শব্দটিকে কতভাবে সাজানো যায় ?**

আমরা লিস্ট করে দেখতে পারি DOG, DGO, ODG, OGD, GDO, GOD মানে ছয়টা। খেয়াল করে দেখি প্রথম বর্ণটিকে আমরা বাছাই করতে পারি 3 ভাবে এরপর পরের বর্ণটিকে বাছাই করতে পারি 2 ভাবে আর শেষেরটাকে তাহলে বাছাই করা যাবে 1 ভাবে। তাহলে আমাদের মোট উপায় হল $3\times 2 \times 1 = 6$ ভাবে।

**প্রশ্ন 2 – BALL শব্দটাকে কতভাবে সাজানো যায়।**

এটা হুট করে বলে বসো না উত্তর হবে 4! খেয়াল কর যদি আমাদের প্রথম L টাকে $L_1$ এর 2য় L টাকে $L_2$ নাম দেই তাহলে

BALL = BA $L_2$ $L_1$= BA $L_1$ $L_2$ এভাবে যদি একাধিক বর্ণ থাকে তাদের মাত্র একটা বিন্যাস দেখা যায়। যার মানে একই ধরণের বর্ণ নিজেদের যত বিন্যাস হয় তার বদলে মাত্র একটা বিন্যাস হয়।

তাহলে BALL এর L দুইটা নিজেরা 2! উপায়ে বিন্যাস করবে।

তাহলে BALL এর যদি L দুইটা আলাদা না হত তাহলে বিন্যাস হত 4! কিন্তু একই রকম দুইটা L নিজেরা 2 বিন্যাস হতে পারে বলে। আসলে তাই বিন্যাস সংখ্যা হবে 4!/2! =12 ভাবে।

**প্রশ্ন 3 TATTER কে কতভাবে সাজানো যাবে**

এখানে T আছে 3 টা যারা নিজেদের মাঝে 3! ভাবে সাজতে পারে। যদি এই শর্ত না থাকত তাহলে সাজানো যেত 6! ভাবে।

একই রকম 3টা T তাই বিন্যাস সংখ্যা 6!/3!=120

**প্রশ্ন 4 PAPA শব্দটাকে কত ভাবে সাজানো যায়**

এখানে 2টা P যারা 2! ভাবে নিজের মাঝে বিন্যাস হতে পারে আর 2টা A যারা নিজেদের মধ্যে বিন্যাস হতে পারে 2!= 2 ভাবে।

তাহলে মোট বিন্যাস হবে $\frac{4!}{2!2!}$ = 6 ভাবে



**অনুশীলনী**

1. EDGE শব্দটা কতভাবে সাজানো যায় ?
2. BANANA শব্দটা কতভাবে সাজানো যায় ?
3. MISSISSIPPI শব্দটা কতভাবে সাজানো যায় ?
4. আমার কাছে পাঁচটা বই আছে যার মধ্যে দুইটা বই দেখতে পুরোই এক রকম। বইগুলোকে কতভাবে সাজানো যাবে ?
5. একজন ব্যাটসম্যান 10টা চার, 3টা ছক্কা, 2টা তিন, 20টা 2 আর 35টা সিঙ্গেল নিলো আর 25 বল ডট দিল সে কতভাবে রান করতে পারে ?

5!/2!

12

**প্রশ্ন 1- একটা রাউন্ড রবিন খেলায় (যে খেলায় সবাই সবার সাথে 1 বার করে অংশ নেয়) ৪ জন খেলোয়াড় থাকলে মোট কয়টা খেলা হয়?**

> বাজে সমাধান – একজন খেলবে 7টা ম্যাচ তাহলে ৪ জন খেলবে $7 \times 8 = 56$ টা ম্যাচ।

এবার খেয়াল কর তোমার সাথে রাফির খেলা হল তাহলে একই সাথে রাফির খেলাও হয়ে গেলো না !! তার মানে একটা খেলা হওয়া মানে দুই জনের খেলা হওয়া। তাই মোট ম্যাচ হবে আসলে এর অর্ধেক মানে $56/2=28$

> এখানে আরো একটা সমাধান দেয়া হল। প্রথম খেলোয়াড় কয়টা ম্যাচ খেলবে 7 টা। তাহলে প্রথম জনের সকল খেলা শেষ হয়ে গেল। এবার পরেরজন তার সাথে প্রথম জনের ম্যাচ হয়ে গেছে। এবার সে ম্যাচ খেলবে বাকি 6 জনের সাথে মানে 6 টা ম্যাচ। পরের জন 5টা এভাবে চলতে থাকবে। তাহলে এভাবে আগালে মোট ম্যাচ হবে $7+6+5+4+3+2+1 = 28$

**প্রশ্ন 2- n পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যা যোগ করার একটা সূত্র বের কর।**

মনে করি $S = 1 + 2 + \ldots +(n-1) +n$

এবার রাশিটাকে উলটো করে লিখি $S = n + (n-1)+ \ldots +2 +1$

এবার যোগ করে পাই



$$\begin{array}{lcccccccc} S = 1 & + & 2 & + & \ldots + & n-1 & + & n \\ S = n & + & n-1 & + & \ldots + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S = (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

যেহেতু এই ধরনের জোড়া আছে n টি তাই $2S = n(n+1)$

$S = \frac{n(n+1)}{2}$

$1 + 2 + \ldots +(n-1) +n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\boxed{1 + 2 + \ldots +(n-1) +n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

**প্রশ্ন 3 একটা রাউন্ড রবিন খেলায় যদি n জন অংশ নেয় তাহলে মোট কতটা খেলা হয়।**

এখানেও দেখা যায় প্রতি জন খেলে n-1 টি ম্যাচ আর ম্যাচ খেলে n জন। সেক্ষেত্রে মোট ম্যাচ $n(n-1)$ কিন্তু একসাথে 2 জনের ম্যাচ খেলা হয় তাই মোট ম্যাচ $\frac{n(n-1)}{2}$

প্রশ্নটা এভাবেও সলভ করা যায় প্রথম জন বাকি n-1 জনের সাথে খেলবে। তাই 2য় জন প্রথম জনের সাথে খেলেছে তাই সে বাকি n-2 জনের সাথে খেলবে এভাবে চলতে থাকলে যখন মাত্র 2 জন বাকি তখন 2য় জন একজনের সাথে খেলবে আর একজনে সব ম্যাচর হিসেব আগেই করা হয়েছে

মোট ম্যাচ হবে $(n-1) + (n-2) + \ldots +2 +1= \frac{n(n-1)}{2}$

প্রশ্ন 4. একটি উত্তল বহুভুজ হল যার প্রতিটা অন্তঃস্থ কোণ $180^0$ অপেক্ষা কম। তাহলে এই ধরনের n উত্তল বহুভুজের কতগুলো কর্ণ থাকবে তা বের কর।

কোণ একটি n ভুজের এক কোণার সাথে বাকি কোণাগুলো যোগ করলেই একটা কর্ণ পাওয়া যায়, এখন প্রতিটি n বিন্দুর জন্য বাকি n-1টি কোণাই হল যোগ করার জন্য আমাদের উপায় থাকছে। তাই মোট হচ্ছে n(n-1) এখানেও একটি বিন্দু যোগ করার মানে দুইটি বিন্দুকে যোগ করে দেয়া। তাই আমাদের জন্য মোট কর্ণ হল $\frac{n(n-1)}{2}$ এর মধ্যে আবার n সংখ্যক হল বহুভুজের বাহু তাই আমাদের কর্ণের সংখ্যা হল $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$

এই প্রশ্নের সমাধান অন্যভাবেও করা যায় কোণ একটা বিন্দু নেয়া হলে তার দুই পাশের দুইটা বিন্দু নেয়া যাবে না তাহলে সেটা বহুভুজের বাহু হয়ে যাবে। তাহলে প্রতিটা বিন্দুর জন্য অপশন হল n-3 টা। এখন তাহলে n সংখ্যক বিন্দুর জন্য সেটা হচ্ছে n(n-3) এখানেও একটি বিন্দু যোগ করার মানে দুইটি বিন্দুকে যোগ করে দেয়া। তাই আমাদের জন্য মোট কর্ণ হল $\frac{n(n-3)}{2}$



## অনুশীলনী

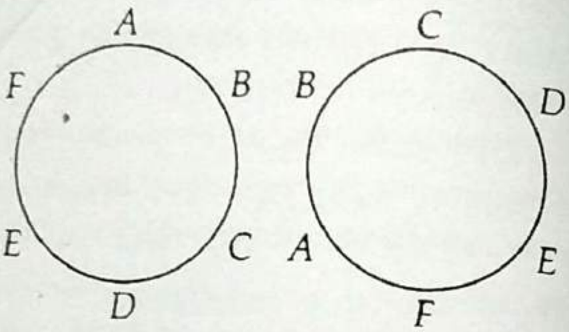
1. একটা ক্লাবের 15 জন সদস্য থেকে দুই জন সহ-সভাপতি বানানো হবে কতভাবে বানানো যাবে ?

2. একটা বাক্সে 20 টা বল নাম্বার দেয়া আছে এখান থেকে 2টা বল নিয়ে মীর্জা খেলতে যাবে। কতভাবে বল নিয়ে খেলতে যেতে পারবে ? (খেয়াল কর কোন বলটা আগে তোলা হয়েছে সেটা কিন্তু এখানে কোন কাজে লাগছে না। )

3. একটা টুর্নামেন্টের 14টা দলকে দুইটা গ্রুপে রাখা হল এক্ষেত্রে নিজ গ্রুপের সবার সাথে সবার 2টা করে ম্যাচ খেলতে হবে আর অন্য গ্রুপের সবার সাথে একটা করে ম্যাচ খেলতে হবে। পুরো টুর্নামেন্ট কত গুলো ম্যাচ হয় ?

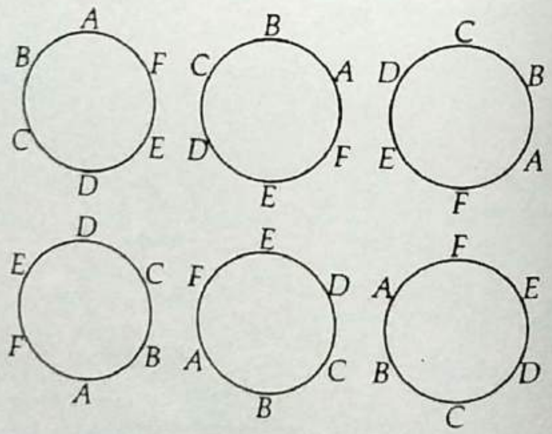
4. একটা সূত্র বের কর যার মাধ্যমে প্রথম n সংখ্যক জোড় ও বিজোড় সংখ্যার যোগফল বের করা যায়

প্রশ্ন 1 কত ভাবে একটা গোল টেবিলে 6 জন বসতে পারে ? (এক্ষেত্রে যদি সবার ডানে যে ছিল তার ডানে সেই থাকে আর বামে যে ছিল সেই থাকে তাহলে ভিন্ন বিন্যাস ধরা হবে না। )



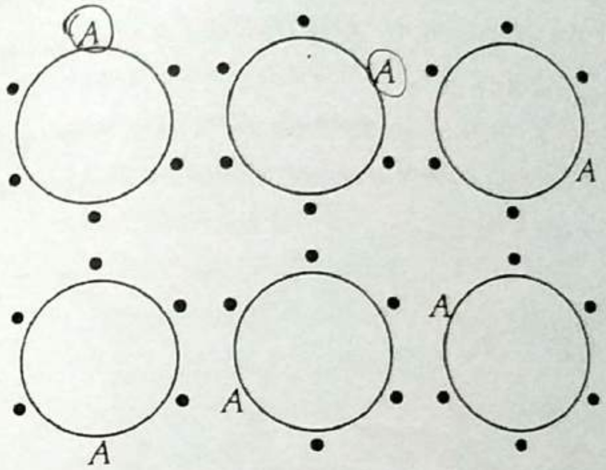

প্রশ্নের কথা অনুসারে উপরের বিন্যাস দুইটি একই বিন্যাস

যদি বৃত্তাকার বিন্যাস না হত তাহলে বলতাম উত্তর হবে 6! কিন্তু বৃত্তাকার বিন্যাসের কারণে নিচের 6টি বিন্যাস আসলে একই।






তাই বলা যায় আমাদের সকল বিন্যাসকেই এভাবে 6টার পরিবর্তে একটা ধরা যায়। তাহলে আমাদের মোট বিন্যাস সংখ্যা 6!/6 =5!= 120




এই প্রশ্নটিকে অন্যভাবে সমাধান করা যায় প্রথমে আমরা A এর জন্য যায়গা নির্ধারণ করে দেখব যেমন নিচের চিত্রে তার মানে আমাদের 6 জনের জন্য বৃত্তাকার বিন্যাস মানে A বাদে বাকি পাঁচ জনের মোট বিন্যাস = 5!

এরপর বাকিদের আমরা যতভাবে বসাতে পারি সেটাই আমাদের সমাধান। যেহেতু একজনকে ঠিক রেখে বাকিদের অবস্থান আমরা বসাতে পারি তাতে ভিন্ন ভিন্ন বিন্যাস আসবে। তাই আমাদের সমাধান হবে 5!

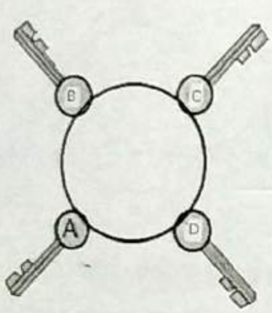
n জন লোকের বৃত্তাকার বিন্যাস (n-1)!

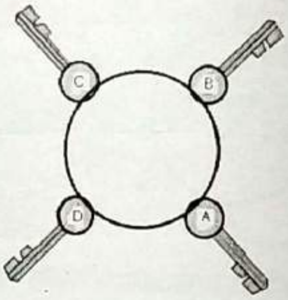
যদি কোন বস্তুকে উলটানো না যায় তাহলে সেই ধরনের n সংখ্যক বৃত্তাকার বস্তুর বিন্যাস (n-1)!

প্রশ্ন 2- চারটা চাবিকে একটা চাবির রিং এ কতভাবে বসানো যাবে ?

মনে করি চাবির গুলো হল A, B, C, D আমাদের আগের প্রশ্নের আলোচনা থেকে অনেকেই বলবে আমাদের প্রশ্নের উত্তর হবে $(4-1)! = 3! = 6$

কিন্তু এখানে আরো অনেক আলোচনার ব্যাপার আছে খেয়াল করে দেখবে নিচের দুইটা বিন্যাস একই খালি চাবি গুলোকে উলটে দেখলেই হয়




কিন্তু আমাদের আগের আলোচনায় দুটো কিন্তু ভিন্ন বিন্যাস হত। তাই আসলে আমরা একটা বিন্যাসের মাধ্যমেই দুইটি বিন্যাস পাচ্ছি। তাই মোট বিন্যাস সংখ্যা বের করার জন্য আমরা এই সংখ্যাটাকে 2 দিয়ে ভাগ দিয়ে দেব।

তার মানে আমাদের বিন্যাস সংখ্যা হবে $3!/2= 3$ ভাবে।

| |
|---|
| যদি কোন বস্তুকে উলটানো যায় তাহলে সেই ধরনের n সংখ্যক বস্তুর বৃত্তাকার বিন্যাস $\frac{(n-1)!}{2}$ |

তার মানে 4টা চাবির ক্ষেত্রে 8টা বিন্যাসের স্থানে একটা বিন্যাস পাওয়া যায়



অনুশীলনী

1. কতভাবে 8 জন একটা গোল টেবিলে বসতে পারে
2. কতভাবে 5 টা চাবি একটা চাবির রিং এ বসানো যায়
3. 5 জন ছাত্র আর 5 জন ছাত্রী কতভাবে একটা বৃত্তাকার চেয়ারে বসতে পারে যেখানে
   a) কোন শর্ত নেই
   b) সব ছাত্ররা একসাথে আর সব ছাত্রীরা একসাথে
   c) সকল ছাত্রই দুইজন ছাত্রীর মাঝে বসবে
4. 6 জনের মধ্যে জয় আর সাদ সবসময় একটা বৃত্তাকার টেবিলে কতভাবে পাশাপাশি বসতে পারে
5. 6 জনের মধ্যে জয় আর সাদ সবসময় একটা বৃত্তাকার টেবিলে কতভাবে পাশাপাশি না থেকে বসতে পারে

## অধ্যায়ে যা শিখলাম

| |
|---|
| $1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$ |
| যদি কোন বস্তুকে উলটানো না যায় তাহলে সেই ধরনের n সংখ্যক বৃত্তাকার বস্তুর বিন্যাস $(n-1)!$ |
| যদি কোন বস্তুকে উলটানো যায় তাহলে সেই ধরনের n সংখ্যক বস্তুর বিন্যাস $\frac{(n-1)!}{2}$ |
| অনেক ঘটনা জোড়ায় জোড়ায় হয়েথাকে মানে একজন বা একটার সাথে ঘটনা হবার সাথে সাথে অন্য আরেকটার সাথে ঘটনা হয়ে থাকে, যেমন হ্যান্ডশেক, ম্যাচখেলা ইত্যাদি তখন আমরা সর্বমোট $\frac{n(n-1)}{2}$ টি জোড়া বানাতে পারি। |
| অনেক সময় অনেক প্রতিসমতা থাকে মানে ভিন্ন ভাবে থাকলেও সেটা আসলে একটাই বিন্যাস। তখন প্রতিসমতা বাদ দেবার জন্য একটার জন্য যতগুলো প্রতিসম হয় সবগুলো দিয়ে ভাগ দেই। |
| যে কোণ সমস্যার ক্ষেত্রে যতরকমের ঘটনা হওয়া সম্ভব তা মাথায় রেখে কাজ করতে হবে। |



## অধ্যায়ের অনুশীলনী

1. কতভাবে বিন্যাস করা যায় a) PARABOLA b) COMBINATION c)BARISAL
2. 5টা একই রকম বাংলা, 3টা একই রকম গণিত বই আর 2 টা একই রকম পদার্থ বই কতভাবে বিন্যাস করা যায়
3. 45,520 এর কতগুলো 5 অংকের বিন্যাস আছে ?
4. গোপাল, তর্স আর সকাল একটা গোলটেবিলে একসাথে বসতে চায় যদি 8 জন লোক থাকে তাহলে কতভাবে একত্রে বসতে পারবে ?
5. একটা পার্টিতে ৬ দম্পতি হ্যান্ডশেক করে। তারা কেউ নিজেদের স্বামী-স্ত্রীদের সাথে হ্যান্ডশেক না করে বাকি সবার সাথে হ্যান্ডশেক করলে মোট কতগুলো হ্যান্ডশেক হয়

### একটু বেশি মাথা খাটাও

1. 7 জন গোল হয়ে একটা বৃত্তাকারে বসবে আর একজন মাঝে গিটার বাজাবে, তারা কতভাবে বসতে পারে। (মাঝের একজন ঠিক রেখে যদি সবার ডানে বামে একই লোক থাকে তাহলে সেটা একটা বিন্যাস)
2. একটা টুর্নামেন্টের 20 তা দলকে 4টা গ্রুপে ভাগ করা হল। প্রত্যেক গ্রুপের নিজেরদের মাঝে তারা 2টা করে ম্যাচ খেলে আর বার বাকিদের সাথে যদি একটা করে ম্যাচ খেলে তাহলে মোট কতগুলো ম্যাচ হয়।
3. একটা সুষম অষ্টাভুজের কতগুলো কর্ণ পরস্পর সমান্তরাল না।
4. একটা সূত্র বের কর, $j+(j+1)+ \ldots +(k-1)+k$
5. আমার কাছে 7টা চাবি আছে যার 2তা আমার বাড়ির, 3টা গাড়ির আর 3টা অফিসের আমি কতভাবে চাবি রাখতে পারি যাতে একই ধরণের চাবি একসাথে থাকে

# কমিটি, দল গঠন আর সমাবেশ

## সূচনা

কতভাবে দল করা যায় এটা গণনার একটা সাধারণ সমস্যা। মনে হতে পারে সমস্যাটা খুব সহজ কিন্তু এটা এত বেশী গুরুত্বপূর্ণ যে এর আলাদা একটা নাম দেয়া হয়েছে সমাবেশ। এই শাখা আমাদের গণিতে অনেক স্থানে দরকার হয় ।

## কমিটি করা

চল আমরা আমরা কয়েকটা সমস্যা সমাধান করে ফেলি

**প্রশ্ন 1- a) কতভাবে 4 জন থেকে 2 জনকে সভাপতি আর সহ সভাপতি করা যায়।**

**b) কতভাবে 4 জন থেকে দুই জনকে নিয়ে কমিটি করা যায় ?**

প্রথম প্রশ্নের উত্তর আমরা সবাই জানি। এটা আগের অধ্যায়গুলোর সমস্যা । আমরা জানি এর উত্তর হবে $4\times 3=12$ ভাবে।

এবার আমরা 2য় সমস্যা নিয়ে ভাবি

এখানেও আমাদের দুইজনকে নিতে হবে কিন্তু কাকে আগে নিয়েছি সেটা কোন ব্যাপার নয়। এখানেও প্রথম জনকে 4 ভাবে আর 2য় জনকে 3



ভাবে নেয়া যায় । কিন্তু এই দুইজনের কাকে আগে নিয়েছি সেটা কোন ব্যাপার না। তাই তাদের মধ্যে যতভাবে বিন্যাস সম্ভব সেগুলোকে একত্রে একটা ধরতে হবে। তাই আমরা মোট মানকে 2 দিয়ে ভাগ করব। যদি ব্যাপারটা না বুঝতে পারো তাহলে নিচের ছকটা খেয়াল করলেই বুঝতে পারবে

| সভাপতি | সহসভাপতি | কমিটি | সভাপতি | সহসভাপতি | কমিটি |
|---|---|---|---|---|---|
| A | B | A,B | B | C | B,C |
| B | A | | C | B | |
| A | C | A,C | B | D | B,D |
| C | A | | D | B | |
| A | D | A,D | C | D | C,D |
| D | A | | D | C | |

তার মানে আমরা বিন্যাস করতে পারি, $(4\times 3) = 12$ ভাবে। কিন্তু আমরা যখন দল বানাবো তখন উপায় হবে $\frac{4\times3}{2} = 6$ ভাবে।

> ব্যাপারটা মুখস্থ না করে বুঝবার চেষ্টা কর যখন কার পর কাকে নিচ্ছ সেটা হিসেবের দরকার হয় সেটা হল বিন্যাস, আর যখন কার পর কাকে নিচ্ছ সেটা হিসেবের দরকার হয় না সেটা সমাবেশ।

**প্রশ্ন 2- 8 জন মানুষের একটা দল থেকে 3 জনকে নিয়ে কতভাবে কমিটি করা যায় ?**

8 জন থেকে 3 জনকে নিতে পারি $8\times 7 \times 6$ ভাবে। আবার এদের যে তিনজনকে নিলাম তারা নিজেরা বিভিন্ন বিন্যাসে থাকতে পারলেও গণনা হবে মাত্র একটাই।

যেমন আবুল (A), বাবুল (B), চাবুল(C) এই তিন জনের মাঝে বিন্যাস সম্ভব $3!=6$ ভাবে । যথা ABC,ACB,BAC,BCA,CAB,CBA কিন্তু এরা আসলে একটাই দল। তাই এমনি ভাবে যত তিন জনের দলই হোক না কেন 6 টা বিন্যাস মিলে একটাই দল গঠন হয় । মানে তারা নিজেরা যতভাবে বিন্যাস হতে পারে। তাই তিনজনের কমিটি সম্ভব $\frac{8\times7\times6}{3!}=56$ ভাবে।

> আমাদের এই সমাবেশ বিষয়টা অনেক কাজে লাগে । তাই আমরা n জন থেকে r জন নিয়ে কতভাবে সমাবেশ বা দল গঠন করা যায় তার জন্য একটা প্রতীক চালু করেছি। তা হল $^nC_r$ বা $\binom{n}{r}$ যাকে আমরা সমাবেশ সংখ্যাও বলতে পারি।
>
> তাই আমাদের প্রথম প্রশ্নের সমাধান বলতে পারি $\binom{4}{2}=6$
>
> 2য় প্রশ্নের সমাধান বলতে পারি $\binom{8}{3}=56$
>
> আমরা পরে $\binom{n}{r}$ বের করার উপায়ও শিখব।



**প্রশ্ন 3 আমার লাইব্রেরিতে 48টা বই আছ যার প্রত্যেকটা বই আলাদা আলাদা। আমি একবার 7 দিনের জন্য ভ্রমণে যাব বলে 6টা বই নিয়ে যাব বলে ঠিক করলাম। কতগুলো এই ধরনের সেট হতে পারে ?**

48টা বই থেকে 6টা বই এর বিন্যাস হল

$48\times 47 \times 46 \times 45 \times 44 \times 43$

কিন্তু এই ভ্রমণে যাবার সময় কোন 6টা বই নিলাম সেটা জানা দরকার কোন বইটা আগে সেলফ থেকে নিয়ে নিলাম, সেটা এখানে কোন ব্যাপার নয়। এখানে এই 6টা বই কতভাবে সাজানো যায় তার সবগুলো থেকে একটা মাত্র বিন্যাস আমাদের রাখব। 6টা বই এর বিন্যাস 6! তাহলে 6টা বই নিয়ে সেট হতে পারে $\frac{48\times47\times46\times45\times44\times43}{6!}$ ভাবে।

এই প্রশ্নটা অন্য ভাবে সমাধান করা যেত, যেহেতু ভ্রমণে যাবার সময় কোণ বইটা আগে নিয়েছি সেটা আমাদের কোন ব্যাপার না তাই এটা আসলে 48টা বই থেকে 6টা বই কতভাবে সমাবেশ করা যায় তার সমান তাই আমাদের উত্তর $\binom{48}{6}$ [যেহেতু কিভাবে এর মান বের করে তা এখনও শিখি নাই তাই আপাতত এটাই আমাদের উত্তর।]

> লক্ষ্য কর যখন কার পর কাকে নিচ্ছ সেটা হিসেবের দরকার হয় সেটা হল বিন্যাস, আর যখন কার পর কাকে নিচ্ছ সেটা হিসেবের দরকার হয় না সেটা সমাবেশ।
>
> n জন থেকে r জন নিয়ে কতভাবে সমাবেশ বা দল গঠন করা যায় তার জন্য প্রতীক $^nC_r$ বা $\binom{n}{r}$

## অনুশীলনী

1. a) 9 জনের সদস্য হতে কতভাবে 4 জনকে আমরা বিভিন্ন পদের জন্য নির্বাচিত করতে পারি।

b) 9 জনের সদস্য হতে কতভাবে 4 জনকে নিয়ে দল গঠন করতে পারি।

2. 25 জন থেকে কতভাবে 4 জনকে নিয়ে কমিটি করা যায়।

3. বাংলাদেশ দলের খেলার জন্য 14 জনের দল ঘোষণা করা হল। এখান থেকে কতভাবে 11 জনের দল বানানো যায়। আর কতভাবে 11 জনের ব্যাটিং অর্ডার সাজানো যায়।

4. একটা অষ্টভুজ থেকে কতভাবে তিনটা শীর্ষবিন্দু নিয়ে ত্রিভুজ বানানো যায়।

5. একটা স্থানে 100 জন লোক আছে যার মধ্যে 55 জন ব্রাজিল সাপোর্ট করে আর 45 জন আর্জেন্টিনা সাপোর্ট করে ? আমরা 5 জনের একটা কমিটি বানাতে চাই যেখানে 3 জন ব্রাজিল সাপোর্টার আর 2 জন আর্জেন্টিনা সাপোর্টার থাকবে কতগুলো কমিটি বানানো সম্ভব ?

6. আমার কাছে 1 থেকে 30 নাম্বার দেয়া 30টা সাদা বল আছে আর 1 থেকে 20 নাম্বার দেয়া 20 টা লাল বল আছে। আমরা 3টা সাদা বল আর 2টা লাল বল নেয়া হল । কতভাবে পাঁচটা বলের সেট বানানো সম্ভব।



## কিভাবে সমাবেশের মান বের করা যায়

**প্রশ্ন: মনে কর আমাদের ক্লাবে n জন লোক আছে সেখান থেকে r জনকে নিয়ে কতভাবে দল গঠন সম্ভব ?**

আমরা আগের অধ্যায়ে শিখে এসেছি কিভাবে n জন থেকে r জনের বিন্যাস করা যায় ।

সেটা ছিল $\mathbf{p(n,r)} = n(n-1) \ldots (n-r+1)$

সেখান থেকে $\mathbf{p(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)!}$

কিন্তু আমারা যে r জনকে নিলাম তার মধ্যে কাকে আগে নিলাম কাকে পরে দিলাম সেটা কোণ ব্যাপার না। তার মানে তাদের নিজেদের মিলে যতগুলো বিন্যাস হয় তার মধ্যে একটাই হিসাব হবে তাহলে r সংখ্যাও বস্তুর মধ্যে বিন্যাস হয় r! ভাবে ।

তাই $\binom{n}{r} = \frac{p(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$$\boxed{\binom{n}{r} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{r!\,(n-r)!}}}$$

**মান বের কর $\binom{11}{4}$**

$$\binom{11}{4} = \frac{11!}{4!\,7!}$$
$$= \frac{11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(4\times3\times2\times1)(7\times6\times5\times4\times3\times2\times1)}$$
$$= \frac{11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(4\times3\times2\times1)(7\times6\times5\times4\times3\times2\times1)}$$
$$= \frac{11\times10\times9\times8}{(4\times3\times2\times1))} = 330$$

**প্রশ্ন রাউন্ড রবিন খেলায় n জন অংশ নিলে কতগুলো খেলা হবে ?**

আগের অধ্যায়গুলোতে এর যে সমাধান দিয়েছিলাম সেটা দেখে আসতে পার। কিন্তু এবার আমরা একটু সহজ ভাবে সমাধান করব। আমরা যদি n জন থেকে দুইজনকে নিয়ে আসি আর তাদের সাথে খেলা যাই তাহলেই কিন্তু একটা খেলা হয়। তার মানে n জন থেকে 2 জনকে যতভাবে কমিটি করা যায় বা দল গঠন করা যায় সেটাই আমাদের সমাধান।

n জন থেকে 2 জনের দল গঠন করা যায় $\binom{n}{2}$ ভাবে আর এটাই আমাদের সমাধান।

> আগে আমরা প্রশ্নের সমাধান করেছিলাম কিভাবে মনে আছে । আমরা করেছিলাম (n-1)+(n-2)+ ... +2+1 এভাবে আমরা আগেও যেসব সমাধান করেছি সবগুলোই সমাবেশের মাধ্যমে সমাধান করা যায়। কিভাবে করা যায় সেটা একটু ভেবে বের করে ফেলো



এই অধ্যায়ে যা শিখলাম

$$\binom{n}{r} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{r!\,(n-r)!}} = \frac{\mathbf{p(n,r)}}{\mathbf{r!}}$$

অনুশীলনী

1. নিচের মান গুলো বের কর

$a)\binom{5}{1}$ $b)\binom{50}{2}$ $c)\binom{11}{9}$ $d)\binom{1000}{998}$ $e)\binom{9}{8}$ $e)\binom{100}{2}$ $f\binom{100}{98}$

2. $\binom{n}{0}$ এর মান কত যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা
3. $\binom{n}{1}$এর মান কত যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা
4. $\binom{n}{n}$ এর মান কত যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা
5. $\binom{5}{7}$ এর মান কি হওয়া সম্ভব ? কে সম্ভব কেন সম্ভব না ।

## সমাবেশের প্রথম অভেদক

**প্রশ্ন 1** মান বের কর

a) $\binom{6}{2}$ ও $\binom{6}{4}$

b) $\binom{8}{3}$ ও $\binom{8}{5}$

a) $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{(2\times1)(4\times3\times2\times1)} = 15$

$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{(4\times3\times2\times1)(2\times1)} = 15$

b) $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(3\times2\times1)(5\times4\times3\times2\times1)} = 56$

$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(5\times4\times3\times2\times1(3\times2\times1))} = 56$

আমরা দেখছি $\binom{6}{2} = \binom{6}{4}$ এবং $\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$ এটা কি কাকতালীয় !!!

**প্রশ্ন 2 প্রথম প্রশ্ন থেকে কি কিছু অনুমান করা যাচ্ছে ? গেলে সেটা কি ? সেটাকে প্রমাণ করে দেখাও।**

**সেটাকে সমাবেশের ভাষায় কিভাবে লেখা যায় ?**

দেখলাম যেহেতু 4+2=6 তাই $\binom{6}{2} = \binom{6}{4}$

আবার 5+3 =8 তাই $\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$

এখান থেকে মনে হচ্ছে a+b = n হলে $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$ অন্য ভাবে r+ (n −r) =n বলে $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \binom{n}{n-r}.$$



সমাবেশের ভাষায় বলা যায়, n সংখ্যক বস্তু থেকে r সংখ্যক বস্তু নেয়া যে কথা তার চাইতে n-r সংখ্যক বস্তু বাদ দেয়া একই কথা। মানে যে n সংখ্যক বস্তু নেব তার তালিকা না করে যাদের বাদ দেব তাদের তালিকা করি ।

$$\boxed{\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}}$$

**প্রশ্ন 3 $\binom{10}{8}$ এর মান কত ?**

$\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{p(10,2)}{2!} = \frac{10\times9}{2!} = 45$

**প্রশ্ন 4 $\binom{9}{0}$ এর মান কত ?**

$\binom{9}{0} = \binom{9}{9} = \frac{p(9,9)}{9!} = \frac{9!}{9!} = 1$

**অধ্যায়ে যা শিখলাম**

$$\boxed{\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}}$$

**অনুশিলনী**

1. মান বের কর

a) $\binom{6}{2}$ ও $\binom{6}{4}$

b) $\binom{6}{2}$ ও $\binom{6}{4}$

c) $\binom{6}{2}$ ও $\binom{6}{4}$

d) $\binom{6}{2}$ ও $\binom{6}{4}$

2. মান বের কর $\binom{11}{9}, \binom{182}{180}, \binom{30}{27}, \binom{505}{505}$

3. $\binom{n}{n-1}$ এর মান কত ?

## অধ্যায়ে যা শিখলাম

| |
|---|
| যখন কার পর কাকে নিচ্ছ সেটা হিসেবের দরকার হয় সেটা হল বিন্যাস, আর যখন কার পর কাকে নিচ্ছ সেটা হিসেবের দরকার হয় না সেটা সমাবেশ। |
| $C(n,r) = {}^{n}C_r = \binom{n}{r}$ |
| $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{p(n,r)}{r!}$ |
| $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ |

## অনুশীলনীর জন্য সমস্যা

1. মান বের কর $\binom{11}{9}, \binom{182}{180}, \binom{30}{27}, \binom{505}{505}$

2. জয়ের বাসায় সেলফে 7টা ভিন্ন ভিন্ন বই আছে সে 3 টা বই নিয়ে স্কুলে যাবে । কতভাবে বই গুলোর সেট হতে পারে ?

3. আমার 8 জন বন্ধুর 3 জনকে নিয়ে আমি ট্যুরে যাব। কতভাবে তিনজনকে নিয়ে ট্যুরে যেতে পারি ।

4. একটা তালায় পাঁচটি বাটন, তালা খোলার উপায় হল প্রথমে যেকোন দুইটা বাটন চাপ দিতে হয় এরপর বাকি বাটন গুলোর একটা টান দিয়ে। কতভাবে তালা খোলা সম্ভব।

5. একটা 12 ভুজের কৌণিক বিন্দু গুলো যোগ করে কতগুলো ত্রিভুজ করা সম্ভব ?



## একটু মাথা খাটাও

1. $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = ?$

2. $\binom{6}{1} + \binom{6}{2}$ এবং $\binom{7}{2}$ কেন এদের মান সমান কেন ভাবো

3. স্কুলের একটা প্রচারণার জন্য 12 জনের একটা দল থেকে সিদ্ধান্ত নেয়া হল কে কে স্কুলের পরিছন্নতার কাজ করবে কে কে বাজার করতে যাবে ? পরিছন্নতার জন্য দরকার 3 জন, বাজারে যাবার জন্য দরকার 4 জন । ছাত্ররা দুটোতেই যেতে রাজি হল। কিন্তু জয় বলল সে সর্বোচ্চ একটা কাজে যাবে, না হয় যাবেই না। কতভাবে দল গঠন সম্ভব ?

4. 64 জেলার প্রতিটা থেকেই 2জন লোক আসল। আমরা তার মধ্যে থেকে 3 জনকে VIP বানাবো । কতভাবে করা সম্ভব যাতে একই জেলা থেকে দুইজন না হয়

5. ডান বাম আলাদা করা যায় এমন 5 জোড়া দস্তানা আছে । এই 10টা থেকে চারটা কতভাবে নেয়া যায় কমপক্ষে একটা সঠিক জোড়া হবে ?

6. 52 খানা তাস থেকে পাঁচটা কার্ড নেয়া হল । কতভাবে থ্রি অফ এ কাইন্ড হওয়া সম্ভব ? (তিনটা কার্ডের মান এক কিন্তু স্যুট আলাদা বাকি দুইটার মান আলাদা)

# সমাবেশ নিয়ে আরো কিছু

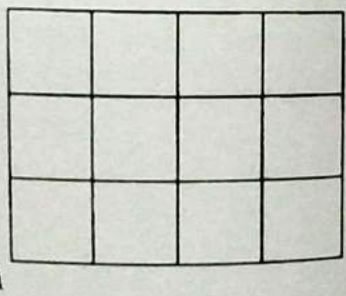
## সূচনা

আগের অধ্যায়ে দল বাছাইয়ে কার পরে কাকে নিতে হবে এই ধরণের কোন সমস্যা দেয়া হয় নাই এখানে আমরা ধীরে ধীরে সেই সমস্যা গুলো নিয়ে দেখব। এখানে আমরা দেখব কিভাবে বিন্যাস আর সমাবেশ উভয় একত্রে দরকার হয়। মানে ধীরে ধীরে আমরা বিন্যাস আর সমাবেশ একত্র করে সমাধান করতে শিখব। এরপরই আসলে কম্বিনোটরিক্স সম্পর্কে তোমার বেশ একটা ভালো জ্ঞান চলে আসবে ।

**ছক কাগজে ঘর**

প্রশ্ন 1- একটা পোকা পাশের A বিন্দুতে আছে এখান থেকে পোকাটি হয় উপরে বা ডানে যেতে পারে কতভাবে পোকাটি B বিন্দুতে যেতে পারে ?

B



A

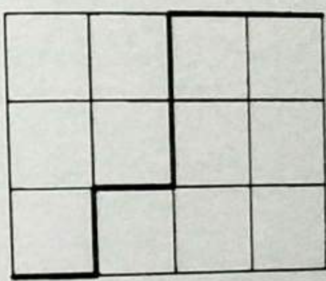


বর্গঘরটি ভালো করে খেয়াল করলে দেখা যায় পোকাটিকে 7টা ঘর যেতে হবে তার মধ্যে তিনটা উপরে আর চারটা ডানে। এখন এই 7 টা মুভের মধ্যে চারটা ডানের মুভ যতভাবে বাছাই করতে পারি সেটাই আমাদের সমাধান । বাকি তিনটা উপরের মুভ। তাহলে আমাদের সমাধান হবে

$\binom{7}{3}=35$ উপায়ে। যদি তুমি ব্যাপারটা বুঝতে না পারো। আমরা ধরে নেই "R" দিয়ে ডানে মুভ আর "U" দিয়ে উপরের মুভ বুঝায়। তাহলে মোট চারটা R আর তিনটা U এর কতগুলো বিন্যাস হয় সেটাই হবে A থেকে B তে যাওয়ার পথ।

এবার খেয়াল করি UUURRRR এর বিন্যাস সংখ্যা কয়টা হয় । আমরা আগেই জেনে এসেছি এর উত্তর $\frac{7!}{3!4!} = \binom{7}{3}=35$ একটা বিন্যাস RURUURR দেখানো হল

B

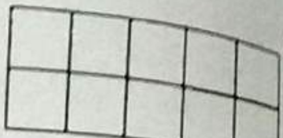


A

অনুশিলনী

1. একটা পোকা পাশের A বিন্দুতে আছে এখান থেকে পোকাটি হয় উপরে বা ডানে যেতে পারে কতভাবে পোকাটি B বিন্দুতে যেতে পারে ?

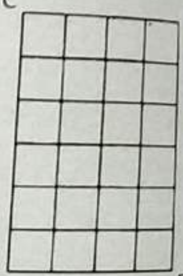
B



A

2. একটা পোকা পাশের c বিন্দুতে আছে এখান থেকে পোকাটি হয় নীচে বা ডানে যেতে পারে কতভাবে পোকাটি D বিন্দুতে যেতে পারে ?

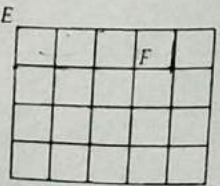
C



D

3. একটা পোকা পাশের E বিন্দুতে আছে এখান থেকে পোকাটি হয় নীচে বা ডানে যেতে পারে কতভাবে পোকাটি G বিন্দুতে যেতে পারে ? এর কতগুলো পথে পোকাটাকে F বিন্দু দিয়ে যেতে হচ্ছে ?

E




G



আরো কিছু সমাবেশ

প্রশ্ন 1 BPL বিদেশী খেলোয়াড় নির্বাচন করা হচ্ছে। 12 জন খেলোয়াড়ের মধ্যে 5 জনকে নিতে হবে। এরমধ্যে ডি ভিলিয়ার্স ও ক্রিস গেইলকে অবশ্যই খেলানো হবে কতভাবে দল বাছানো সম্ভব।

যেহেতু আমরা 2 জনকে সর্বদা নেবই তাদের হিসেবের বাইরে রেখে (যেহেতু তাদের নিয়ে নিয়েছি বাকিদের মধ্যে থেকে আমি যদি নিতে পারি তাহলেই দল গঠন হয়।) বাকি 10 জন থেকে 3 জনকে যতভাবে নেয়া যায় সেটাই আমাদের সমাধান। $\binom{10}{3}$=120

| |
|---|
| n সংখ্যক বস্তু থেকে p সংখ্যক বস্তুকে সর্বদা নিয়ে r জনের দল গঠন করা যায় $\binom{n-p}{r-p}$ ভাবে। |

**প্রশ্ন 2 – একটা ঘরে 30 জন পুরুষ আর 40 জন মহিলা আছে আমরা যদি 7 জনের একটা দল গঠন করা হয় যার মধ্যে 3 জন পুরুষ আর 4 জন মহিলা থাকে তাহলে তাহলে এরকম কতগুলো কমিটি হতে পারে?**

আমরা 30 জন থেকে 3 জন মহিলা নিতে পারি $\binom{30}{3}$=4060 ভাবে

আর আমরা 40 জন থেকে 4 জন পুরুষ নিতে পারি $\binom{40}{4}$=91390 ভাবে।

যেহেতু মহিলাদের আর পুরুষদের নেয়ার মাঝে কোন নির্ভরতা নেই তাই ঘটনা দুইটি স্বাধীন, তাই মোট উপায় এখানে গুণ হবে,

$\binom{30}{3}\binom{40}{4}$=4060× 91390=371043400

**প্রশ্ন 3 BPL বিদেশী খেলোয়াড় নির্বাচন করা হচ্ছে। 12 জন খেলোয়াড়ের মধ্যে 5 জনকে নিতে হবে। এরমধ্যে ডি ভিলিয়ার্স ও ক্রিস গেইল এর সর্বোচ্চ একজনকে খেলাতে হবে। (দুইজন খেললে বিপক্ষদল খেলবে না)। এই শর্ত মেনে কতভাবে দল বাছানো সম্ভব।**

মনে করা যাক আমরা গেইলকে নিলাম তাহলে ডি ভিলিয়ার্সকে নেয়া যাবে না মানে বাকি 10 জন থেকে 4 জনকে নিতে হবে।

এরকম দল সম্ভব $\binom{10}{4}=210$

আমরা ডি ভিলিয়ার্সকে নিলাম তাহলে গেইলকে নেয়া যাবে না মানে বাকি 10 জন থেকে 4 জনকে নিতে হবে।

এরকম দল সম্ভব $\binom{10}{4}=210$

আমরা ডি ভিলিয়ার্সকে বা গেইলকে কাউকে নিলাম না মানে বাকি 10 জন থেকে 5 জনকে নিতে হবে।

এরকম দল সম্ভব $\binom{10}{5}=252$

তাহলে মোট উপায় $\binom{10}{4}+\binom{10}{4}+\binom{10}{5}=252+210+210=672$

এই সমস্যাটা আমরা অন্যভাবে সমাধান করতে পারি

কোন শর্ত না থাকলে আমরা 5 জনকে নিতে পারতাম $\binom{12}{5}$ আর গেইল আর ডিভিলিয়ার্সকে অবশ্যই নিয়ে দল করা যাবে $\binom{10}{3}$ ভাবে।

তাহলে ডি ভিলিয়ার্স ও ক্রিস গেইল এর সর্বোচ্চ একজনকে নিয়ে দল বাছানো সম্ভব $\binom{12}{5}-\binom{10}{3}=792-120=672$ ভাবে



| |
|---|
| n সংখ্যক বস্তু থেকে p সংখ্যক বস্তুকে সর্বদা বাদ দিয়ে r জনের দল গঠন করা যায় $\binom{n-p}{r}$ ভাবে। |
| এখান থেকে বলা যায় $\binom{10}{4}+\binom{10}{4}+\binom{10}{5}=\binom{12}{5}-\binom{10}{3}$ <br> $\binom{12}{5}=\binom{10}{3}+2\binom{10}{4}+\binom{10}{5}$ <br> সেখান থেকে বলা যায় <br> $\binom{n+2}{r+2}=\binom{n}{r}+2\binom{n}{r+1}+\binom{n}{r+2}$ |

**প্রশ্ন 4 - 10 জনের একটা দল থেকে 4 জন ও 6 জনের একটা দল করতে হবে। যেখানে সাকিব আর মাশরাফি দুজন দুই ভিন্ন দলে থাকবে। কতভাবে করা যায় ।**

প্রথমে কোন শর্ত না থাকলে কতভাবে দল বাছাই করা যেত সেটা ভাবি। 10 জন থেকে 4 জনকে যতভাবে দলে নেয়া যায় সেটাই আমাদের সমাধান (কেননা বাকি দলে অবশ্যই 6 জন থাকবে) সেটা করা যায় $\binom{10}{4}$ ভাবে।

এবার মনে করি সাকিব আর মাশরাফি উভয় একই দলে আছে তাহলে সেই দলটাতে সেটা ছোট দলেও হতে পারে আর বড় হলে হতে পারে। যদি উভয়ে ছোট দলে থাকে তাহলে বাকি দুইজন দরকার 8 জন থেকে সেটা সম্ভব $\binom{8}{2}$

যদি উভয়ে বড় দলে থাকে তাহলে বাকি চারজন দরকার 8 জন থেকে

সেটা সম্ভব $\binom{8}{4}$ আমরা যদি মোট থেকে এই দুইটা কেস বাদ দেই তাহলেই এই উত্তর পেয়ে যাব

$$\binom{10}{4} - \binom{8}{2} - \binom{8}{4} = 112$$

আমরা প্রশ্নটা অন্যভাবেও সলভ করতে পারতাম

মনে করি সাকিব ছোট দলে আর মাশরাফি বড় দলে সেটা হলে ছোট দলে 8 জন থেকে তিন জন লাগত সেটা করা যেত $\binom{8}{3}$

মনে করি সাকিব বড় দলে আর মাশরাফি ছোট দলে সেটা হলে ছোট দলে 8 জন থেকে তিন জন লাগত সেটা করা যেত $\binom{8}{3}$ [লক্ষ্য করেছ তো একটা দল করা হলে অন্য দলটা আপনাআপনি হয়ে যায়।]

তাহলে মোট উপায় $\binom{8}{3} + \binom{8}{3} = 112$

আমাদের সমাধান অনুসারে

$$\binom{10}{4} - \binom{8}{2} - \binom{8}{4} = \binom{8}{3} + \binom{8}{3}$$

$$\binom{10}{4} = \binom{8}{2} + 2\binom{8}{3} + \binom{8}{4}$$

তাতে আমাদের আবার সেই সম্পর্ক আসল

$$\binom{n+2}{r+2} = \binom{n}{r} + 2\binom{n}{r+1} + \binom{n}{r+2}$$

**এই অধ্যায়ে যা শিখলাম**

n সংখ্যক বস্তু থেকে p সংখ্যক বস্তুকে সর্বদা নিয়ে r জনের দল গঠন করা যায় $\binom{n-p}{r-p}$ ভাবে।

n সংখ্যক বস্তু থেকে p সংখ্যক বস্তুকে সর্বদা বাদ দিয়ে r জনের দল গঠন করা যায় $\binom{n-p}{r}$ ভাবে।



$$\binom{n+2}{r+2} = \binom{n}{r} + 2\binom{n}{r+1} + \binom{n}{r+2}$$

**অনুশীলনী**

1. একটা মিটিং এ 8 জন বরিশালের আর 6 জন ঢাকার আছে । আমরা একটা নতুন মিটিং করব এদের মধ্যে 3 জন বরিশাল ও 2 জন ঢাকার লোককে নিয়ে। কতভাবে এই মিটিং করা যেতে পারে।

2. আমাদের স্কুলে ছয় জন নিয়ে একটা টিম তৈরি করা হবে। যার জন্য 14 জন দরখাস্ত করল। যার মধ্যে তিন জন হল মীর্জা,রিফাত আর তারেক। কত ভাবে দল করা যায় যদি

a) কোন শর্ত না থাকে

b) এই তিনজনই প্রথম তিন পজিশনে থাকবে

c) ঠিক একজন প্রথম তিন পজিশনে থাকবে

d) সর্বোচ্চ একজন প্রথম তিন পজিশনে থাকবে

3. উদাহরণের 5 নাম্বার প্রশ্নের 10 জন থেকে 3 জন, 5 জন ও 2 জনের তিনটা দল করা হবে। যেখানে সাকিব 3 জনের দলে আর মাশরাফি 5 জনের দলে থাকবে। কতভাবে দল গঠন সম্ভব।

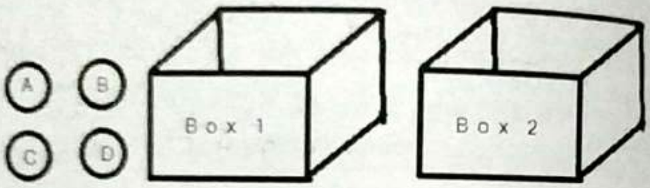
4. একটা বড় থেকে ছোট সংখ্যা বলা হবে যদি সবচাইতে বড় সংখ্যা বামে এরপরে এর ডানের সংখ্যা অবশ্যই ছোট হবে। এভাবে সবচাইতে ছোট সংখ্যা সবার ডানে থাকবে। যেমন 963 এমন একটা সংখ্যা। প্রশ্ন হল এই রকম কতগুলো সংখ্যা আছে ?

5. পর্বত সংখ্যা হল তারা যাদের মাঝের সংখ্যাটা সবচাইতে বড় হয় যেমন 284. বলতে হবে এই ধরণের কতগুলো তিন অংকের সংখ্যা আছে ?

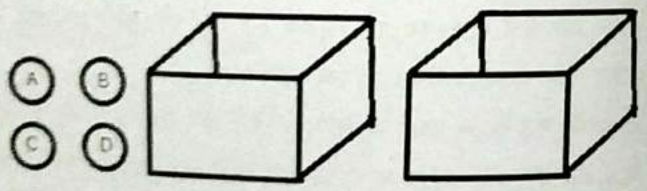
পার্থক্যকরন

**প্রশ্ন 1 যদি চারটা বল ও দুইটা বাক্সই আলাদা করা যায় তাহলে চারটা বলকে কতভাবে দুইটা বক্সে রাখা যাবে।**

আমাদের প্রতিটা বলের জন্য 2টা করে অপশন আছে। যেহেতু আমাদের চারটা বল আছে আর প্রত্যেকটা বলই পরের বলটা রাখার জন্য স্বাধীন তাই পরস্পর গুণ করি। তাই আমাদের মোট উপায় আছে $2^4$




**প্রশ্ন 2 যদি চারটা বল আলাদা করা যায় কিন্তু বাক্স আলাদা করা যায় না তাহলে চারটা বলকে কতভাবে দুইটা বক্সে রাখা যাবে।**




এখানে আমাদের কোন ব্যাপার না যে আমরা কোন বাক্সে রাখব। কেননা প্রথম বাক্সে রাখা আর 2য় বাক্সে রাখা একই কথা। যে হেতু আমাদের মোট উপায় 16 । আর বাক্সগুলোকে দুই ভাবে বিন্যাস করানো



যায়। তাই মোট উপায় হল অর্ধেক। তাহলে মোট উপায় 16/2=8 বাক্সের বিন্যাস বাদ দেবার জন্য।

অন্যভাবে কেস ভাগ করেও আমরা এটা করতে পারি → Next

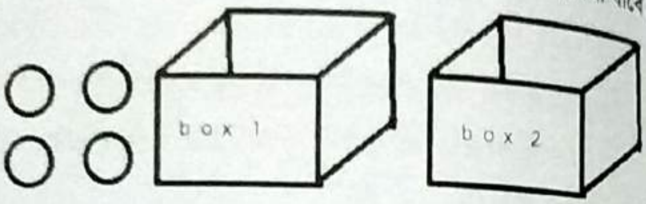
a) একটা বাক্সে 4 তা অন্যটায় 0 টা। এটা অবশ্যই একভাবেই করা যায়।

b) একটা বক্সে 3টা আর অপর বক্সে 1 টা বল তাহলে আমরা একটা বল কোন বক্সে আছে সেটাই নির্ভর করে। তার মানে প্রতিটা বলের জন্য যাকে একটা আলাদা হিসেবে রাখব সেটাই একটা নতুন বিন্যাশ দেবে। যেকোন বলকেই আলাদা করে রাখতে পারি। তাই আমাদের অপশন চারটা।

c) প্রত্যেকটা বাক্সে 2টা বল সেক্ষেত্রে চারটা বলকে দুইটা দলে কত ভাবে ভাগ করা যায় সেটাই আমাদের সমাধান সেক্ষেত্রে উত্তর $\binom{4}{2} = 6$ কিন্তু দলে ভাগ করার পর এখানেও আমাদের উত্তর দ্বিগুণ চলে আসছে। যেমন প্রথম বক্সে যদি A,B আর 2য় বক্সে যদি C,D থাকে তাহলে অবশ্যই আমাদের 6টা একসময় প্রথম বক্সের জন্য C,D আর 2য় বক্সের জন্য A,B কে রাখতে হবে যেটা আসলে একই কথা যেহেতু বাক্স দুইটাকে আলাদা করা যায় না। তাহলে আমাদের উপায় হয় তিনটা

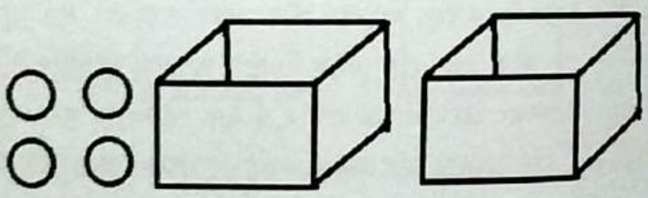
তাহলে আমাদের মোট উপায় 1+4+3=8 ভাবে।

**প্রশ্ন ৩ যদি চারটা বল আলাদা করা যায় না কিন্তু বাক্স আলাদা করা যায় এমন ক্ষেত্রে তাহলে চারটা বলকে কতভাবে দুইটা বক্সে রাখা যাবে।**




যে হেতু বল দুইটাকে আলাদা করা যায় না তার মানে আসলে হচ্ছে বাক্সে আসলে কয়টা বল রাখছি সেটাই ব্যাপার। আমরা প্রথম বক্সে 0,1,2,3,4 এই পাঁচ ভাবে বল রাখতে পারি। তাই এক্ষেত্রে আমাদের অপশন হল পাঁচটি । একটায় বল রাখা মানে স্বাভাবিক ভাবে অন্যটাতে বাকি বলগুলো রাখা।

**প্রশ্ন ৪ যদি চারটা বল আলাদা করা যায় না একই সাথে বাক্স আলাদা করা যায় না তাহলে চারটা বলকে কতভাবে দুইটা বক্সে রাখা যাবে।**



এটা আসলে কতভাবে চারটা বলকে দুইটা গ্রুপে ভাগ করা যায় সেটাই দেখাচ্ছে , আমরা দেখতে পাই সেই উত্তর টা হল [0,4]; [1,3]; [2,2] তার মানে আমাদের মোট উপায় তিনটা।



কাকে পার্থক্যকরণ করা যায় বা যায় না যদি বের করতে পার তাহলে সমস্যা সমাধান অনেক সহজ হয়ে যায়।

অনুশিলনী

1. পাঁচটা বল আর দুইটা বক্স আছে কত ভাবে রাখা যাবে যদি

a) বল ও দুইটা বাক্সই আলাদা করা যায়

b) বল আলাদা করা যায় কিন্তু বাক্স আলাদা করা যায় না

c) বল আলাদা করা যায় না কিন্তু বাক্স আলাদা করা যায়

d) বল আলাদা করা যায় না একই সাথে বাক্স আলাদা করা যায় না

2. পাঁচটা বল আর তিনটা বক্স আছে কত ভাবে রাখা যাবে যদি

a) বল ও বাক্স আলাদা করা যায়

b) বল আলাদা করা যায় কিন্তু বাক্স আলাদা করা যায় না

c) বল আলাদা করা যায় না কিন্তু বাক্স আলাদা করা যায়

d) বল আলাদা করা যায় না একই সাথে বাক্স আলাদা করা যায় না

e) তুমি কি ব্যাখ্যা করতে পার যে a) কে কেন $3!$ দিয়ে ভাগ করার সাথে সাথে মিলে গেল না।

3. পাঁচটা বল আর $n$টা বক্স আছে কত ভাবে রাখা যাবে যদি

a) বল ও বাক্সই আলাদা করা যায়

b) বল আলাদা করা যায় কিন্তু বাক্স আলাদা করা যায় না

c) বল আলাদা করা যায় না কিন্তু বাক্স আলাদা করা যায়

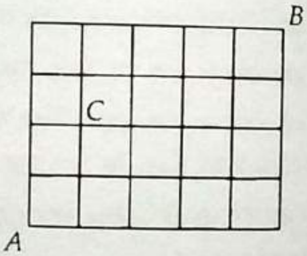
d) বল আলাদা করা যায় না একই সাথে বাক্স আলাদা করা যায় না

### এই অধ্যায়ে যা শিখলাম

| |
|---|
| n সংখ্যক বস্তু থেকে p সংখ্যক বস্তুকে সর্বদা নিয়ে r জনের দল গঠন করা যায় $\binom{n-p}{r-p}$ ভাবে। |
| n সংখ্যক বস্তু থেকে p সংখ্যক বস্তুকে সর্বদা বাদ দিয়ে r জনের দল গঠন করা যায় $\binom{n-p}{r}$ ভাবে। |
| $\binom{n+2}{r+2}=\binom{n}{r}+2\binom{n}{r+1}+\binom{n}{r+2}$ |
| কাকে পার্থক্যকরণ করা যায় বা যায় না আসলে তা অনেক হিসেব নিকেশের আলাদা করে দেয়। |

### অনুশীলনী

1. একটা পোকা পাশের A বিন্দুতে আছে এখান থেকে পোকাটি হয় উপরে বা ডানে যেতে পারে কতভাবে পোকাটি




a) B বিন্দুতে যেতে পারে ?

b) C বিন্দুতে যেতে পারে ?

c) C বিন্দু থেকে B বিন্দুতে যেতে পারে

d) A বিন্দু থেকে C বিন্দু হয়ে B বিন্দুতে যেতে পারে।

2. কতভাবে তিনটা ইংলিশ বর্ণ নেয়া যায় যেখানে একটা স্বরবর্ণ আর 2টা ব্যঞ্জনবর্ণ থাকবে

3. একটা বাক্সে আলাদা করা যায় এমন 4টা সাদা, 4টা নীল ও 2টা কালো বল আছে। কতভাবে 2টা বল নেয়া যায় যেখানে



a) দুইটাই আলাদা রং এর হয়

b) দুইটাই একই রঙের হয়

4. আমাদের স্কুলে 6 জন বালক আর 8 জন বালিকা আছে আমরা 6 জনের টিম বানাবো

a) যদি কোন শর্ত না থাকে

b) সমান সমান বালক বালিকা থাকবে

c) বালিকার সংখ্যা বালকের চাইতে বেশী হবে

5. আমার কাছে 6 জন বালিকা আর 6 জন বালক আসল । আমি তাদের দুইটা দল করতে বললাম। যেখানে প্রতি দলে দুইজন ছেলে আর দুইজন মেয়ে থাকবে কতভাবে দল বানানো সম্ভব।

6. মাঠে 10 জন ক্রিকেট খেলতে আসল যেখানে জিম আর নাহিদও ছিল। তারা সমান দুই ভাগে ভাগ হল কতগুলো দল সম্ভব যদি

a) কোন শর্ত না থাকে

b) জিম আর নাহিদ একই দলে থাকে

c) জিম আর নাহিদ ভিন্ন দলে থাকে

d) উত্তর a,b আর c এর মাঝে সম্পর্ক কি ?

7. চারটা বল আর তিনটা বক্স আছে কত ভাবে রাখা যাবে যদি

a) বল ও বাক্স আলাদা করা যায়

b) বল আলাদা করা যায় কিন্তু বাক্স আলাদা করা যায় না

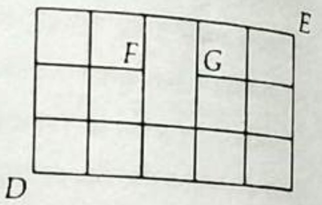
c) বল আলাদা করা যায় না কিন্তু বাক্স আলাদা করা যায়

d) বল আলাদা করা যায় না একই সাথে বাক্স আলাদা করা যায় না

e) যদি দুইটা আলাদা করা না যায় এমন লাল বল আর আলাদা করা যায় না এমন সাদা দুইটা বল আর আলাদা করা যায় এমন বাক্স থাকে

**একটু বেশী মাথা খাটাও**

1. মনে করা যাক পাশের চিত্রে F,G মাঝের দাগটা নাই তাহলে পোকাটা কতভাবে D থেকে E তে যাওয়া যায়। আগের প্রশ্ন গুলোর মতই শর্ত মেনে




2. একটা সমতলে 9টা সরলরেখা আকা হল। সর্বোচ্চ তারা কতগুলো বিন্দুতে ছেদ করতে পারে ?

3. 3জন মহিলা আর 7 জন পুরুষের একটা দল আছে। যাদের 5 জন করে দুইটা দলে নেয়া হল। কতভাবে গ্রুপ করা যায় যাতে অন্তত একজন পুরুষ আর একজন নারী দলে থাকবেই

4. এই প্রশ্নে মানুষ আর টেবিলকে আলাদা করা যায় কিন্তু বইগুলো আলাদা করা যায় না

a) কতভাবে 3জন 5টা টেবিলে বসতে পারে যেখানে প্রতি টেবিলে একজন বসবে (বাকি গুলো ফাঁকা থাকবে)

b) কতভাবে 3টা বই 5টা টেবিলে রাখা যাবে যেখানে প্রতি টেবিলে সর্বোচ্চ একটা বসবে

c) যদি আগের প্রশ্নে একটা বই সর্বোচ্চ থাকবে এই শর্ত তুলে দেয়া হয়



5। 1000 এর ছোট কতগুলো সংখ্যা আছে যাদের মান বাম থেকে ডানে বাড়তে থাকে (যেমন 123 কিন্তু 88 হবে না)

6. একটা সমতলে 5টা বৃত্ত আঁকা হল সর্বোচ্চ কয়টি বিন্দুতে ছেদ করবে?

7. আমার কাছে n জন বন্ধু আছে আমি তাদের 365 দিনের প্রতি দিনই তিনজনকে ডাকি। n এর সর্বনিম্ন মান বের কর যাতে প্রতিদিনই তিনজনের গ্রুপটা আলাদা(একজন একাধিক বার আসতে পারে, 2জন একাধিক বার আসতে পারে কিন্তু 3 জনই না)

8. একটা পোকা (0,0,0) বিন্দুতে আছে পোকাটা x,y,z অক্ষ বরাবর ধনাত্মক দিকে 1 ঘর করে আগায়। পোকাটা 1 মুভের পর (1,0,0) বা (0,1,0) বা (0,0,1) বিন্দুতে থাকতে পারে। তাহলে কতভাবে পোকাটা কতভাবে (3,5,2) বিন্দুতে থাকতে পারে।

# কিছু কঠিন সমস্যা

এই অধ্যায়ে আমরা এতক্ষণ যত সমস্যা সমাধান করলাম তার চাইতে একটু কঠিন সমস্যা নিয়ে আলোচনা করব।

**কিছু কঠিন সমস্যা**

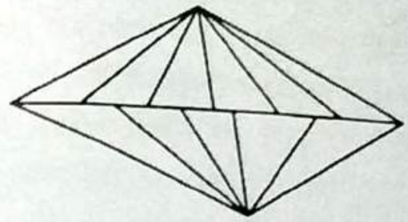
**প্রশ্ন 1 - একটা টুর্নামেন্টে আটজন অংশ নেয়। যার র‍্যাঙ্ক 8 সে 7 নম্বরের সাথে খেলে, এখানের যে বিজয়ী হয় সে 6 নাম্বারের লোকের সাথে খেলে এভাবে চলতে থাকে। এই টুর্নামেন্টে কত ধরনের ফলাফল হতে পারে ?**

উত্তর - 7 আর 8 এর খেলায় 2 জনের যে কেউ জয়ী হতে পারে। তাই এখানে আমাদের ফলাফল আসতে পারে 2 রকমের। এরপর এই খেলায় বিজয়ীর সাথে 6 এর খেলা হয়। এখানেও দুইটা ফলাফল আসতে পারে। যেহেতু প্রথম ম্যাচের ফলাফলের সাথে 2য় ম্যাচের ফলাফলের কোন অধীন ঘটনা না। তাই দুইটা খেলায় ফলাফল আসতে পারে $2 \times 2$ ভাবে । এভাবে 3 ম্যাচের ফলাফল আসতে পারে

$2 \times 2 \times 2$ এভাবে । যেহেতু 7টা ম্যাচ হবে তাই মোট ফলাফল হতে পারে $2^7$ ভাবে।



প্রশ্ন 2 পাশের চিত্রে কতগুলো ত্রিভুজ আছে ?



খেয়াল করি যে ত্রিভুজই বানানো হোক না কেন উপর আর নীচের দুই বিন্দুর একটা অবশ্যই থাকতে হবে। কিন্তু দুইটা একসাথে কখনই নয়।
1ম ক্ষেত্রে যখন উপরের বিন্দুটা থাকে
এবার আমাকে নিচে থাকা মানে আনুভূমিক লাইন থেকে দুইটা বিন্দু নেই । তাহলেই একটা ত্রিভুজ তৈরি হয়। এখানে 7টা বিন্দু আছে এখান থেকে দুইটা বিন্দু নেয়া যায়। $\binom{7}{2} = 21$ তাহলে আমাদের মোট ত্রিভুজ হতে পারে এই উপরের বিন্দু রেখে হতে পারে 21 টা
এবার নিচের বিন্দুটা নিয়ে
এবার আমাকে উপরে থাকা মানে আনুভূমিক লাইন থেকে দুইটা বিন্দু নেই । তাহলেই একটা ত্রিভুজ তৈরি হয়। এখানে 6টা বিন্দু আছে এখান থেকে দুইটা বিন্দু নেয়া যায়। $\binom{6}{2} = 15$ তাহলে আমাদের মোট ত্রিভুজ হতে পারে এই উপরের বিন্দু রেখে হতে পারে 15 টা
তাহলে মোট ত্রিভুজ 36টা।

প্রশ্ন 3 একটা সংখ্যা লেখা হল এভাবে 0.123456789...998999 যেখানে সংখ্যাটা লেখা হয়েছে 1,2,... এভাবে 999 পর্যন্ত লেখা হয়েছে। তাহলে দশমিকের পর 2005 তম অংকটা কি।

আমরা ডান থেকে শুরু করি, 1 থেকে 9 পর্যন্ত 9টা অংক গেল 10 থেকে 99 পর্যন্ত $2\times 90 = 180$ দশমিক ঘর গেল। তাহলে আমদের মোট গেল 189 ঘর

এরপর 100 থেকে 999 পর্যন্ত $3\times 900 = 2700$ ঘর পর্যন্ত লেখা হল। তার মানে আমাদের বেশী হয়ে গেছে। তাই আমরা খণ্ডে খণ্ডে ভাগ করে বের করব

100 থেকে 199 পর্যন্ত $3\times 100 = 300$ অংক

তাহলে মোট হল 189+300=489

200 থেকে 299 পর্যন্ত $3\times 100 = 300$ অংক

তাহলে মোট হল 489+300=789

300 থেকে 399 পর্যন্ত $3\times 100 = 300$ অংক

তাহলে মোট হল 789+300=1089

400 থেকে 499 পর্যন্ত $3\times 100 = 300$ অংক

তাহলে মোট হল 1089+300=1389

500 থেকে 599 পর্যন্ত $3\times 100 = 300$ অংক

তাহলে মোট হল 1389+300=1689

600 থেকে 699 পর্যন্ত $3\times 100 = 300$ অংক

তাহলে মোট হল 1689+300=1989

700 থেকে 799 পর্যন্ত $3\times 100 = 300$ অংক



তাহলে মোট হল 1989+300=2289

আমরা বেশি এসে গেছি

এবার খেয়াল করি 1990 তম অংক 7 (700 এর 7) তাহলে (2005-1989)=16 তম অংক বের করতে হবে।

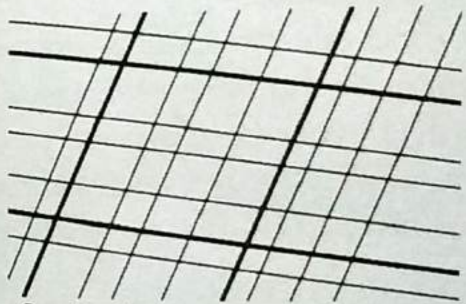
এটা আমরা লিখেই বের করতে পারি

...7007017027037047057067 07... দেখতে পাচ্ছি 16 তম অংক 7

তাই 2005 তম অংক 7

**প্রশ্ন 4 9টা সমান্তরাল সরল রেখা আরো n সংখ্যক সমান্তরাল রেখার সাথে ছেদ করায় 360 টা সামান্তরিক তৈরি হল। n এর মান কত ?**

প্রশ্নটা বুঝবার জন্য প্রথমেই চিত্র আঁকি



দেখতে পাচ্ছি দুই সেট সমান্তরাল সরলরেখার উভয় থেকে যদি এক জোড়া করে সমান্তরাল সরলরেখা নেয়া হয় তাহলেই সামান্তরিক তৈরি হয়। একসেটে 9টা সমান্তরাল রেখা আছে এখান থেকে 2টা সমান্তরাল রেখা নেয়া যায় $\binom{9}{2} = 36$

আর $n$ টা সমান্তরাল রেখা থেকে 2টা রেখা নিতে হবে তা নেয়া যাবে $\binom{n}{2}$

তাহলে মোট সামান্তরিক তৈরি হবে $\binom{9}{2}\binom{n}{2}$ ভাবে

তাহলে $\binom{9}{2}\binom{n}{2} = 360$

$36\binom{n}{2} = 360$

$\binom{n}{2} = 10$

$\frac{n(n-1)}{2}=10$

$n^2$-n-20=0

(n-5)(n+4)=0

তাই n=5 ; যেহেতু $n$ এর মান -4 হতে পারে না

**প্রশ্ন 5 - শান্ত বাড়ি রং করার চুক্তি পেয়েছে। সে একটা রাস্তার কাছে থাকা $n$ টা বাড়ির যে কোন $k$ টা বাড়ী রং করবে। এজন্য তার কাছে $j$ সংখ্যক রং আছে। সে কতভাবে বাড়ি রং করতে পারে।**

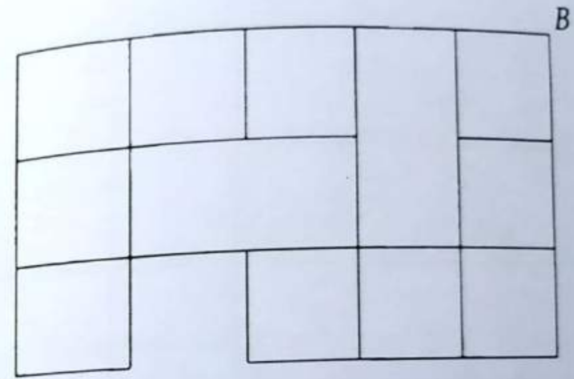
প্রথমেই আমাদের দরকার সে কোন কোন বাড়ি রং করবে সেটা জানা। তাকে প্রথম $n$ সংখ্যক বাড়ী থেকে $k$ টা বাড়ি কতভাবে বাছাই করা যায় $\binom{n}{k}$।

এবার প্রতিটি বাড়ির জন্য আমাদের চয়েস আছে $j$ সংখ্যক যেহেতু একটা বাড়ি রং করার সাথে পরের বাড়ী রং করা স্বাধীন তাই সবগুলোই গুণ হবে তাই মোট $k$টা বাড় উপায় হবে $j^k$ সংখ্যক

তাহলে মোট উপায় $\binom{n}{k} j^k$

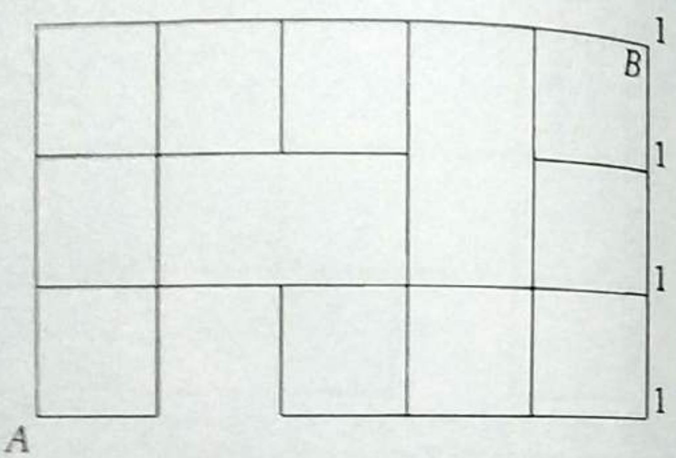


**প্রশ্ন 6 পাশের চিত্রে একটা মাকড়শা কেবল ডানে ও উপরে যেতে পারে। তাহলে সে কতভাবে A থেকে B বিন্দুতে যেতে পারে।**



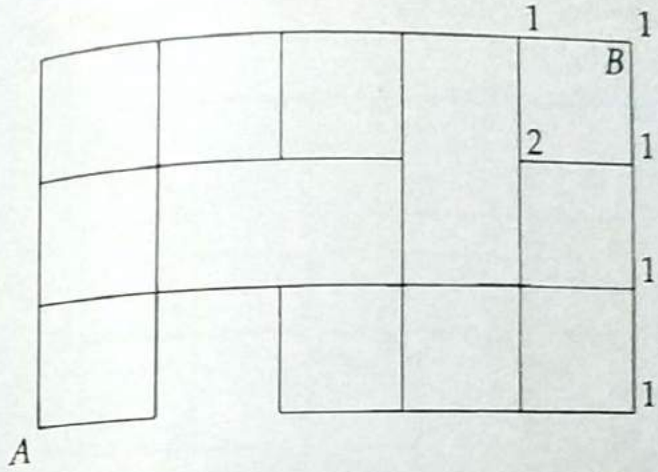

আমাদের মোট তিনটা উপরে আর ডানে পাঁচটা মুভ দিতে হবে । যদি আমাদের দাগগুলো বাদ না থাকত তাহলে আমরা যেতে পারতাম $\binom{8}{3} = 56$ ভাবে। এবার আমরা B থেকে পিছনে আসতে থাকব (সামনেও আগাতে পারতাম সেটা না হয় অনুশীলনীই থাক)

খেয়াল কর আমরা যদি কোন ভাবে ডান পাশের একদম কর্নারে চলে যাই তাহলে আমাদের কেবল একটাই উপায় তা হল উপরে যাওয়া । সেটা আমরা চিত্রে এঁকে ফেলি




এবার আমরা সবচাইতে ডানের পাশের কলামের দিকে তাকাই এবং আমরা যদি একদম উপরের পাশে থাকি তাহলে আমাদের উপায় একটাই ডানে যাওয়া আর যদি তার নীচে থাকি তাহলেও উপায় দুইটা হয় উপরে যাব বা পাশে যাব এই তথ্য চিত্রে লিখে ফেলি।

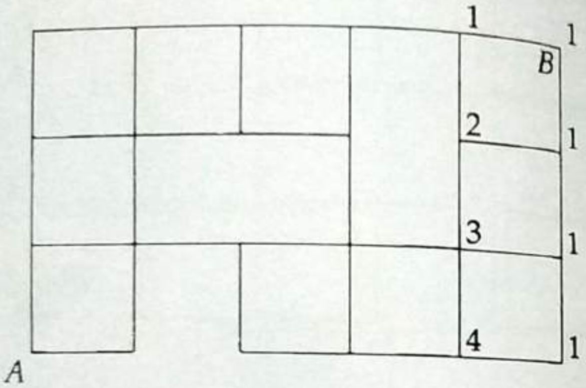





এবার 2 লেখা বিন্দুর নীচের বিন্দুটির দিকে তাকাই ঐ বিন্দু থেকে যদি উপরে যাই তাহলে আমাদের পথ থাকবে দুইটা আর পাশে গেলে পথ থাকবে একটা তাহলে মোট হবে 2+1=3 টা।

আবার এঁকেবারে নীচের বিন্দুটাতে যদি উপরে যায় তাহলে উপায় 3টা আর ডানে গেলে পথ একটা তাহলে মোট উপায় 3+1=4

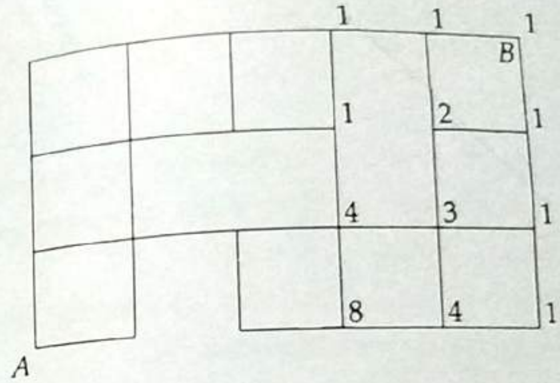
এবার আমরা যত ডাটা পেলাম সেটা অনুসারে একটা চিত্র এঁকে ফেলি



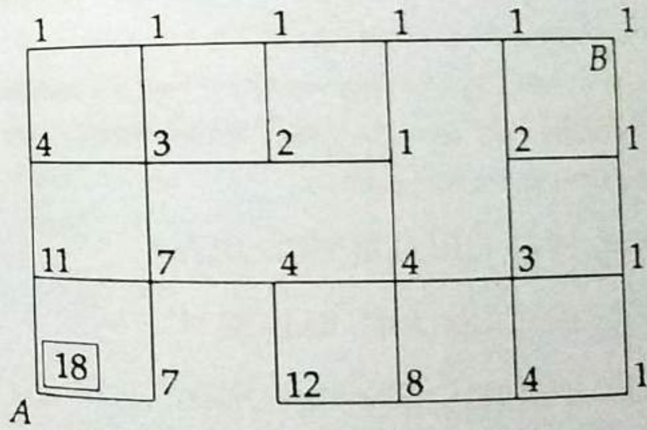

এবার আমরা তৃতীয় কলামের দিকে তাকাই, এবারও যদি শীর্ষে থাকি তাহলে একটাই পথ তার ঠিক নিচে থাকলে উপরে যাওয়া ছাড়া উপায় নাই তাই এখান থেকেও একটাই পথ। এবার তার নীচের পথটাতে উপরে গেলে একটা পথ আর ডানে গেলে 3 টা পথ । তাই এখান থেকে পথ 4 টা। একেবারে নীচের স্থান থেকে উপরে গেলে চারটা পথ আর ডানে গেলে 4টা পথ । তাহলে মোট পথ ৪টা।

এই চিত্রটাও এঁকে ফেলি






খেয়াল করে দেখি প্রতিক্ষেত্রে ডানের পথ ও উপরে যাবার পথের যোগফল হয় তাহলে মোট পথ গুলো দেখিয়ে আমরা যদি চিত্র আঁকি তাহলে হবে



পুরো চিত্র আকার পর আমরা দেখতে পাই A থেকে B তে যাবার মোট পথ 18 টা

**প্রশ্ন 7 – মি. মাকড়শা তার 8 পায়ে মোজা জুতা পড়বে মাকড়শার প্রতিটা পায়ের রং আলাদা। অবশ্যই আগে মুজা পড়বে এরপর জুতা পড়বে। কতভাবে মোজা জুতা পড়তে পারবে ?**

এই প্রশ্নটা বেশ কঠিন তাই এর জন্য আমরা এর একটা সহজ ভার্সন বানাই সেটা সমাধান করে আমরা এটার সমাধান করি

| |
|---|
| এই আইডিয়াটা আমরা আগেও ব্যবহার করেছি কিন্তু এই প্রশ্নে এই ব্যাপারটা আমাদের অনেক বেশী কাজে দেবে। |

আমরা এই প্রশ্নটা মাকড়শার জন্য না করে মানুষের জন্য করি, মনে করি আমাদের বাম পায়ের মোজা হল l, বাম পায়ের জুতা L আর ডান পায়ের মোজা হল r, ডান পায়ের জুতা R

এবার আমাদের ব্যাপারটা হল rRlL এর যতগুলো বিন্যাসে R এর আগে r আছে আর L এর আগে l আছে সেটাই আমাদের সমাধান। প্রথমে আমরা সবগুলো বিন্যাস করে ফেলি

rRlL rRLl rLRl rLlR rlRL rlLR

RrlL RrLl RlLr RlrL RLlr RLrl

lrRL lrLR lRrL lRLr lLrR lLRr

LlRr LlrR LRrl LRlr LrlR LrRl



এবার প্রথম বাম পায়ের জন্য হিসেব করি যেখানে যদি বাম পায়ের জুতা আগে পড়ে ফেলে তাহলে আমরা সেই বিন্যাসটা কেটে দেব দেখি তাহলে কারা বাকি থাকে

বাদ দেয়া গুলো গোল করে দিলাম

rRlL rRLl rLRl rLlR rlRL rlLR

RrlL RrLl RlLr RlrL RLlr RLrl

lrRL lrLR lRrL lRLr lLrR lLRr

LlRr LlrR LRrl LRlr LrlR LrRl

দেখা যাচ্ছে অর্ধেক বাদ পরে গেছে, মানে অর্ধেক ক্ষেত্রে থেকে যাচ্ছে অর্ধেক বাদ যাচ্ছে কারণ অর্ধেক ক্ষেত্রে মুজা অবশ্যই জুতার আগে পরা হচ্ছে।

এবার বাকিগুলো নিয়ে আমরা ডান পায়ের জন্য হিসেব করি। এক্ষেত্রেও অনেকগুলো বাদ চলে যায়।

সেগুলোও মার্ক করে ফেলি

rRlL rRLl rLRl rLlR rlRL rlLR

RrlL RrLl RlLr RlrL RLlr RLrl

lrRL lrLR lRrL lRLr lLrR lLRr

LlRr LlrR LRrl LRlr LrlR LrRl

মানে প্রতিক্ষেত্রেই মান অর্ধেক হচ্ছে। তার মানে প্রতি ক্ষেত্রেই প্রতি পায়ের জন্য একবার করে ভাগ করা হচ্ছে কেননা প্রতিটা পায়ের জন্যই অর্ধেক ক্ষেত্রে মুজার আগে জুতা পড়ে ফেলছি। আর বাকি অর্ধেক বিন্যাশের ক্ষেত্রে তার উলটো মানে আমরা মুজার আগে জুতা পড়ছি। পরবর্তীতে যখন সম্ভাবনার মধ্যে প্রতিসমতা পড়বে তখন বিষয়টা ভালো করে বুঝবে।

এবার মাকড়শার জন্য (8 মোজা + 8 জুতার) বিন্যাস হতে পারে 16! আর যেহেতু 8টা পাতাই মোট বিন্যাস $\frac{16!}{2^8}$।



**এই অধ্যায়ে যা শিখলাম**

| |
|---|
| যখন কোন প্রশ্ন নিয়ে আটকে যাই তখন কিছু চলক বা অন্য কিছু প্রশ্নের মধ্যে নিয়ে এসে প্রশ্নটা নিজের মত করে ফেলতে হয়। যাতে সমাধানটা সহজ হয়। |
| যখন প্রশ্নটা বেশি কঠিন তখন প্রশ্নটার একটা সহজ প্রশ্ন বের করে সেটা সলভ করে কঠিনের দিকে যেতে হয়। |
| যখন দেখবে তোমার একটা পথ কাজ করছে না তখন আবার নতুন করে ভেবে নেও কিভাবে সেটা সমাধান করা যায়। |

**মাথা খাটানোর প্রশ্ন**

1. নিচের সমীকরণ গুলোর x,y,z এর কতগুলো অশূন্য সমাধান আছে

a) $x+y+z=0$ b) $x+y+z=1$ c) $x+y+z=2$ d) $x+y+z=3$ e) $x+y+z=4$

এবার $x+y+z=n$ কতগুলো সমাধান আছে ।

2. একটা 10 ভুজের কতগুলো কর্ণ পরস্পর সমান্তরাল

3. আমার বাসার একটা বর্গাকার ঘর আমি বর্গাকার টাইস দিয়ে পূরণ করলাম। তার সবগুলোই লাল। কিন্তু কর্ণ দুইটি বরাবর আমি নীল টাইস দিয়ে রাখলাম। আমার নীল টাইস লাগলো 121টা । তাহলে লাল টাইস কয়টা লাগল

4. আমরা স্থানাংক ব্যবস্থার x অক্ষ থেকে 0 থেকে 4 আর y অক্ষ থেকেও 0 থেকে 4 এর মধ্যে করে তিনটা বিন্দু নিলাম। কতভাবে ত্রিভুজ বানানো সম্ভব।

5. 5 জন লোক একটা গোল টেবিলে বসে আছে। x হলে সেই সংখ্যা যেখানে কমপক্ষে 1জন মহিলার পাশে বসে থাকা পুরুষের সংখ্যা। y

হলে সেই সংখ্যা যেখানে কমপক্ষে 1জন পুরুষের পাশে বসে থাকা নারীর সংখ্যা। এই রকম কতগুলো (x,y) এর জোড়া সম্ভব। যেমন সবাই নারী হলে (5,0)

6. 1000টা $1\times 1\times 1$ দিয়ে একটা ঘনক বানানো হল। একবারে বাইরে থেকে সর্বোচ্চ কতগুলো ঘনক দেখা সম্ভব

7. 4 টা x, 4টা y আর 4টা z নিয়ে 12 অক্ষরের একটা শব্দ বানানো হল। কতগুলো বিন্যাস সম্ভব যাতে

a) প্রথম 4টাতে কোন x না থাকে

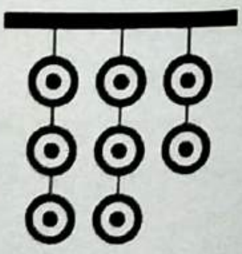
b) প্রথম চারটাতে কোন x নেই আর পরের চারটাতে y নেই।

c) প্রথম চারটাতে কোন x নেই আর পরের চারটাতে y নেই। পরের চারটাতে কোন z নেই

8. যে কোন সংখ্যা n এর জন্য O(n) হল সংখ্যাটির বিজোড় অংকগুলোর যোগফল আর E(n) হল জোড় অংকগুলোর যোগফল

তাহলে $x = E(1) + E(2) + \dots + E(100)$ আর $y = O(1) + O(2) + \dots + O(100)$ x ও y এর মান কত ?

9. একটা পোকা (0,0,0) বিন্দুতে আছে পোকাটা x,y,z অক্ষ বরাবর ধনাত্মক দিকে 1 ঘর করে আগায়। পোকাটা 1 মুভের পর (1,0,0) বা (0,1,0) বা (0,0,1) বিন্দুতে থাকতে পারে। তাহলে কতভাবে পোকাটা কতভাবে (3,5,2) বিন্দুতে থাকতে পারে যাতে পোকাটি (1,3,1) বিন্দুতে না যায়।



10 একজন শুটার পাশের সবগুলোই লক্ষ্য ভেদ করবে । শর্ত হল প্রথমে যে কলাম নিবে সেই কলামের সবার নিচেরটা লক্ষ্য ভেদ করবে। এরপর আবার কলাম সিলেক্ট করবে ।



11. একটি $4\times 4$ দাবা বোর্ডে কতগুলো আয়তক্ষেত্র নেয়া সম্ভব যেখানে কমপক্ষে চারটা কালো ঘর থাকবে।

12. পাশের চিত্রে একটা ঘর থেকে আমরা উপরে নিচে ডানে বামে যেতে পারি কতভাবে আমরা MATH শব্দটা পড়তে পারব।

```
      H
    H T H
  H T A T H
H T A M A T H
  H T A T H
    H T H
      H
```

## সম্ভাবনার শুরু

### ভূমিকা

এখন আমরা গণনা থেকে সম্ভাবনার দিকে যাব। আসলে আমরা গণনার মধ্যেই থাকব। গণনা আর সম্ভাবনা আসলে একই সূত্রে গাঁথা। তাই সমস্যা শুরু করার আগে আমরা কিছু বিষয় নিয়ে আলোচনা করি। মনে কর ক্রিকেট খেলার জন্য তোমরা কয়েন টস করবে। যার একপাশে হেড আর অন্যপাশে টেল। তাহলে আমাদের খেলার সময় টস জয়ের সম্ভাবনা কত। অবশ্যই 1/2।

ধর, আমরা বললাম হেড কিন্তু আসতে পারে কি হেড বা টেল দুটোই। আমাদের পক্ষে ঘটনা একটা আর মোট ঘটনা 2টা। তাহলে আমাদের পক্ষে ঘটনা/ মোট ঘটনা হল $\frac{1}{2}$। আমরা এইমাত্র যে হিসেবটা করলাম সেটাই হল সম্ভাবনা। এই যে আমাদের পক্ষে ঘটা একে বলা হয় অনুকূল ঘটনা। আর যতগুলো ঘটনা ঘটা সম্ভব তাকে বলা হয় ঘটন সংখ্যা।

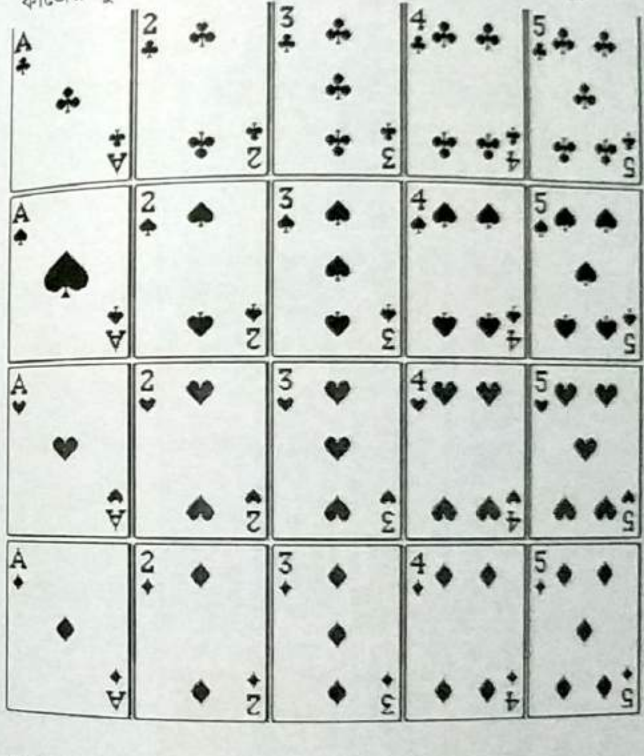
তাহলে কোন একটা বিষয় ঘটার সম্ভাবনা = $\frac{\text{অনুকূল ঘটনা সংখ্যা}}{\text{মোট ঘটনা সংখ্যা}}$

| |
|---|
| এক্ষেত্রে একটা বিষয় নিশ্চিত হতে হবে যে প্রত্যেকটা ঘটনা আসার সম্ভাবনা সমান। |
| সম্ভাবনার সমস্যা গুলোতে অনেক বেশী তাসের সমস্যা থাকে তাই তাস গুলোকে চিনে নেয়া জরুরি, |

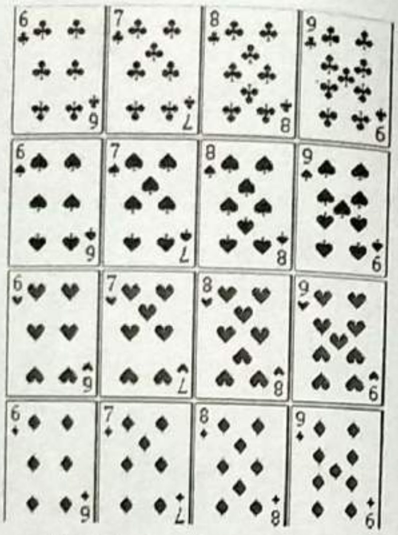


| |
|---|
| একটা তাসের প্যাকেটে 4 স্যুটের 52 টা কার্ড থাকে, যার প্রত্যেকটি 13টা করে কার্ড থাকে। দুইটা স্যুট লাল hearts♡ আর Diamond♦ আর দুইটা স্যুট কালো Spades♠ আর clubs♣. প্রত্যেক স্যুটে আবার তেরটা করে কার্ড থাকে (2,3,4,5,6,7,8,9,10 গোলাম(J), বিবি (Q), সাহেব (K), টেক্কা (A))। |

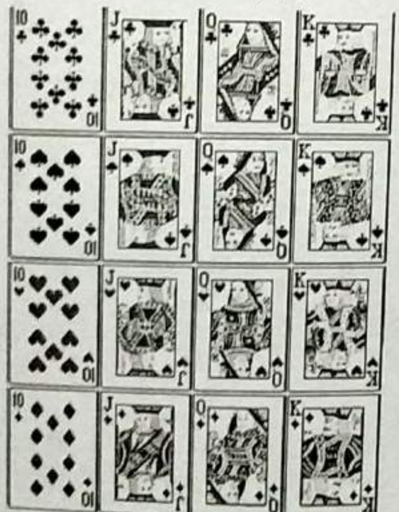
কাজের সুবিধার্থে 52 খানা তাসের সবগুলোর ছবি দেয়া হল



♣ ♠ ♡ ♦ এর A,2,3,4,5



♣ ♠ ♡ ♦ এর 6,7,8,9



♣ ♠ ♡ ♦ এর 10, J, Q, K



সাধারণ সম্ভাবনা

**প্রশ্ন 1 – একটা আদর্শ ছক্কায় 1 থেকে 6 পর্যন্ত থাকে। সম্ভাবনা কত যে সেটাতে 2 উঠবে ?**

আমরা যখন একটা ছক্কা ফেলি তখন 1,2,3,4,5,6 এর কোন একটা পড়তে পারে। মানে আমাদের মোট ঘটনা 6টা। কিন্তু আমাদের পক্ষের ঘটনা 1টা তাহলো 2 পড়া। তাহলে অনুকূল ঘটনা =1 আর মোট ঘটনা 6। তার মানে 2 আসার সম্ভাবনা $\frac{1}{6}$

> অবশ্য ছক্কাটাকে নিখুঁত হতে হবে যদি এমন হয় 2 খুব বেশি পরে তাহলে হবে না। যদি প্রশ্নে কখনও ত্রুটি পূর্ণ না বলে দেয় তাহলে ধরে নিতে হবে ঠিক আছে। মানে সবকিছুই পড়ার সম্ভাবনা সমান।

**প্রশ্ন 2 – একটা ছক্কা নিক্ষেপ করলে তাতে মৌলিক সংখ্যা ওঠার সম্ভাবনা কত ?**

আমরা যখন একটা ছক্কা ফেলি তখন 1,2,3,4,5,6 এর কোন একটা পড়তে পারে। মানে আমাদের মোট ঘটনা 6টা।

আমাদের 1 থেকে 6 এর মধ্যে মৌলিক সংখ্যাগুলো হলে 2,3,5 মানে মোট তিনটা।

মৌলিক সংখ্যা ওঠার সম্ভাবনা = $\frac{\text{অনুকূল ঘটনা সংখ্যা}}{\text{মোট ঘটনা সংখ্যা}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

**প্রশ্ন 3 একটা ঘটনা ঘটার সর্বোচ্চ সম্ভাবনা কত ? সর্বনিম্ন সম্ভাবনা কত?**

একটা বিষয় ঘটার সম্ভাবনা = $\frac{\text{অনুকূল ঘটনা সংখ্যা}}{\text{মোট ঘটনা সংখ্যা}}$

বা, A ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা $P(A) = \frac{\text{A ঘটনাটা যতভাবে ঘটতে পারে}}{\text{মোট যতগুলো ঘটনা হতে পারে}}$

তার মানে আমরা বলতে পারি,

A ঘটনাটা যতভাবে ঘটতে পারে ≤ মোট যতগুলো ঘটনা হতে পারে

তার মানে $P(A) \leq 1$

যদি এমন ঘটনা হয় যাই ঘটুক না কেন সেটা আমাদের পক্ষে যাচ্ছে তাহলে

A ঘটনাটা যতভাবে ঘটতে পারে = মোট যতগুলো ঘটনা হতে পারে

এই ক্ষেত্রে $P(A)=1$

একইভাবে সবচাইতে ছোট সম্ভাবনা হল 0 মানে যে ঘটনাটা কখনই ঘটবে না।

এরমানে যদি কখনও তোমার সম্ভাবনা এমন আসে যে 1 এর চাইতে বড় বা 0 এর চাইতে ছোট তাহলে অবশ্যই তুমি ভুল করেছ। আবার হিসেব নিকেশ কর। যেমন – একটা পয়সায় উভয় পার্শ্ব শাপলা হলে শাপলা পড়ার সম্ভাবনা 1, আর একটা ছক্কায় 7,8,9 পড়ার সম্ভাবনা 0।

কোন একটা ঘটনা হবার সম্ভাবনা 1 হলে সেটা না হবার সম্ভাবনা 0 আবার কোন একটা ঘটনা হবার সম্ভাবনা 0 হলে না হবার সম্ভাবনা 1। আর কোন একটা ঘটনা n হবার সম্ভাবনা $p(n)$ হলে

$0 \leq p(n) \leq 1$



**প্রশ্ন 4 একটা তাসের প্যাকেটে 4 স্যুটের 52 টা কার্ড থাকে, যার প্রত্যেকটি 13 টা করে কার্ড থাকে। দুইটা স্যুট লাল hearts♡ আর Diamond♦ আর দুইটা স্যুট কালো Spades♠ আর clubs♣. প্রত্যেক স্যুটে আবার তেরটা করে কার্ড থাকে (2-10, গোলাম(J), বিবি (Q), সাহেব (K), টেক্কা (A))। আমার কাছে কার্ডগুলো এলোমেলো অবস্থায় আছে। এখান থেকে দুইটা কার্ড নেয়া হল দুইটাই লাল হবে সম্ভাবনা কত ?**

যেহেতু যে কোন কার্ড তোলার সম্ভাবনা সমান তাই প্রথম কার্ডটা তুলতে পারি আমরা 52 ভাবে, এরপর আমাদের একটা কার্ড কমে গেল তাই আমরা পরের কার্ডটা তুলতে পারব 51 ভাবে। তাহলে মোট তোলা যায় $52\times 51$ ভাবে। এই কার্ড দুইটার মধ্যে কোনটা আগে তুললাম সেটা আমাদের জন্য কোন সমস্যার তৈরি করে না। তাই মোট তোলার উপায় $\frac{52\times51}{2}$

কিন্তু প্রথমে আমাদের অনুকূল তাস ছিল 26 টা (hearts♡ 13টা আর Diamond ♦ 13 টা)

তাই আমাদের প্রথম অনুকূল কার্ড তুলতে পারতাম 26 ভাবে, এরপর আমাদের একটা কার্ড কমে যেত এরপরের কার্ডটা তুলতে পারতাম 25 ভাবে। তাহলে আমাদের মোট অনুকূল কার্ড তোলা যেত $26\times 25$ ভাবে, তাই এই কার্ড দুইটার মধ্যে কোনটা আগে তুললাম সেটা আমাদের জন্য কোন সমস্যার তৈরি করে না। তাই মোট তোলার উপায় $\frac{26\times25}{2}$

আমাদের উভয় কার্ড লাল হবার সম্ভাবনা

$= \frac{\text{অনুকূল ঘটনা সংখ্যা}}{\text{মোট ঘটনা সংখ্যা}}$

$=\frac{26\times25}{52\times51}$
$=\frac{25}{102}$

অবশ্য সমস্যাটা আমরা অন্যভাবে সমাধান করতে পারতাম,

আমাদের মোট 52টি কার্ডের মধ্যে 2টা কার্ড নেয়া যায় $\binom{52}{2}$

আমাদের মোট 26টি কার্ডের মধ্যে 2টা কার্ড নেয়া যায় $\binom{26}{2}$

তাহলে, আমাদের উভয় কার্ড লাল হবার সম্ভাবনা

$=\frac{\text{অনুকূল ঘটনা সংখ্যা}}{\text{মোট ঘটনা সংখ্যা}}=\frac{\binom{26}{2}}{\binom{52}{2}}=\frac{25}{102}$

**এই অধ্যায়ে আমরা যা শিখলাম**

| |
|---|
| একটা বিষয় নিশ্চিত হতে হবে যে প্রত্যেকটা ঘটনা আসার সম্ভাবনা সমান। |
| A ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা $P(A)=\frac{\text{A ঘটনাটা যতভাবে ঘটতে পারে}}{\text{মোট যতগুলো ঘটনা হতে পারে}}$ |
| একটা ঘটনা ঘটার সর্বোচ্চ সম্ভাবনা 1, সর্বনিম্ন 0। তোমার সম্ভাবনা এমন আসে যে 1 এর চাইতে বড় বা 0 এর চাইতে ছোট তাহলে অবশ্যই তুমি ভুল করেছ। আবার হিসেব নিকেস কর। |
| একটা তাসের প্যাকেটে 4 স্যুটের 52 টা কার্ড থাকে, যার প্রত্যেকটি 13টা করে কার্ড থাকে। দুইটা স্যুট লাল hearts♡ আর Diamond♦ আর দুইটা স্যুট কালো Spades♠ আর clubs♣. প্রত্যেক স্যুটে আবার তেরটা করে কার্ড থাকে (2,3,4,5,6,7,8,9,10 গোলাম(J), বিবি (Q), সাহেব (K), টেক্কা (A))। |



অনুশীলনী

1. একটা নিখুঁত ছক্কা ছুড়ে মারা হল সম্ভাবনা বের কর

a) 3 আসবে b) জোড় সংখ্যা আসবে c) বিজোড় সংখ্যা আসবে

2. একটা তাসের প্যাকেটের কার্ডগুলিকে ভালো করে এলোমেলো করা হল (কার্ডের ভাষায় শাফল করা হল) সম্ভাবনা বের কর

a) প্রথম কার্ড Hearts

b) প্রথম কার্ড 5

c) প্রথম কার্ড Diamond♦ এর সাহেব

d) প্রথম কার্ড J,K,Q এর কোন একটা

e) প্রথম কার্ড লাল পরের কার্ড কালো

f) প্রথম কার্ড 3 পরের কার্ড 8

g) প্রথম 2টা কার্ডই A

h) প্রথম তিনটা কার্ডই Spades♠

3. আমার কাছে একটা সিকি(25 পয়সা), আধুলি (50 পয়সা), এক টাকা, ও 5টাকার মুদ্রা আছে। চারটা মুদ্রা দিয়েই টস করলাম সম্ভাবনা বের কর

a) সবগুলো হেড আসছে

b) সিকি আর আধুলিতে হেড আসছে

c) সিকি আর একটাকার মুদ্রায় একই এসেছে

d) কম পক্ষে 550 পয়সার হেড আসছে

**সমসম্ভাব্য ঘটনা**

আমরা যখন একটা সমস্যার সম্ভাবনা বের করি তখন প্রতিটা ঘটনা ঘটার চান্স সমান কিনা সেটা দেখতে হয়। এমন সমস্যা হল

**প্রশ্ন 1 আমাদের একটা ঘনকের চারটা নীল পৃষ্ঠ আর দুইটা লাল পৃষ্ঠ, আমি একবার ঘনকটা ছুড়ে মারলাম ঘনটাতে নীল আসার সম্ভাবনা কত?**

নিচের বক্সের মধ্যে দেয়া সমাধান ভুল কেন ভেবে বের কর

> আমাদের ঘনকটা ছুড়ে মারলে হয় নীল বা লাল রং আসবে। যেহেতু আমাদের অনুকূল হল নীল মানে একটা রং আর মোট রং আছে দুইটা তাই নীল আসার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$

ঘনকের 6টা পৃষ্ঠ, তার মধ্যে নীল চারটা তাই নীল আসার জন্য অনুকূল ঘটনা 4 আর মোট ঘটনা 6 তাই নীল আসার সম্ভাবনা $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

> বক্সে দেয়া সমস্যার সমাধান ভুল ধরতে পারছ না, একটা বিষয় চিন্তা কর এক স্থানে 1000 টা কার্ড আছে তার 999 টা কার্ড লাল আর একটা নীল। এখনও কি যে কোন কার্ড নিলে নীল আসার সম্ভাবনা 1/2 হবে ?



**প্রশ্ন 2 একসাথে দুইটা ছক্কা ছুড়ে মারা হলে ছক্কা দুইটির উপরের পৃষ্টের মান দুইটা যোগ করা হল যোগফল 7 হবার সম্ভাবনা কত ?**

> ভুল সমাধান – আমাদের ছক্কা মারার সাথে সাথে 2 থেকে 12 এর মধ্যে একটা কিছু তো আসবেই। তাহলে আমাদের অনুকূল ঘটনা হল একটা (7 আসা) আর মোট ঘটনা 11 টা তাহলে সম্ভাবনা $\frac{1}{11}$

এখানে 11 টা ঘটনা হতে পারে তাদের সব গুলো আসার সম্ভাবনা এক না যে কারণে যোগফল 7 আসার সম্ভাবনাও 1/11 হচ্ছে না। এবার কোনটা আসার সম্ভাবনা কত তা দেখানোর জন্য আমরা একটা ছক করতে পারি

| | | প্রথম ছক্কা | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2য় ছক্কা | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

দেখা যাচ্ছে 7 আসল 6 বার আর ঘটন সংখ্যা 36 বার। তাহলে সম্ভাবন $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

> এই যে আমরা সকল ঘটনা একটা টেবিলে দেখালাম একে ঘটন টেবিল বলা হয়।

প্রশ্ন 3 মনে কর 1 থেকে 9 এর মধ্যে দুইটা সংখ্যা তুলে নেয়া হল সম্ভাবনা বের কর যাতে দুইটাই বিজোড় হয়।

আমাদের বিজোড় সংখ্যা আছে 5টা। (1, 3, 5, 7, 9) 5টা থেকে 2টা সংখ্যা নেয়া হয় $\binom{5}{2}$=10 ভাবে। আর আমাদের 9টা সংখ্যা থেকে 2টা সংখ্যা নিতে পারি

$\binom{9}{2}$=36 ভাবে। তাহলে উভয় বিজোড় সবার সম্ভাবনা $\frac{10}{36}$ = 5/18

ভুল সমাধান 9টা সংখ্যা থেকে 2টা সংখ্যা নিতে পারি $\binom{9}{2}$=36 ভাবে। প্রথম বিজোড় সংখ্যা নেয়া যায় 5 ভাবে এরপর বাকি থাকবে চারটা বিজোড় সংখ্যা তাই মোট দুইটা সংখ্যা নিতে পারব $5\times 4 = 20$ ভাবে তাই সম্ভাবনা $\frac{20}{36}$=5/9

খেয়াল করে দেখো আমরা দুইটি সংখ্যা নিয়েছি একটার পর আরেকটা তা নয়। মানে দুইটা একসাথেই নিয়েছি তাই কোনটা আগে আর কোনটা পরে নিয়েছি সেটা আলোচ্য নয়।

**অনুশীলনী**

1. একটা 8তলের ঘনবস্তুর 4টা লাল তল, 3টা হলুদ তল আর 1টা নীল তল আছে। বস্তুটা ছুড়ে মারা হলে হলুদ হবার সম্ভাবনা কত ?

2. দুইটা নিখুঁত ছক্কা মারা হল সম্ভাবনা কত যে ছক্কা দুইটার উপরের বিন্দু দুইটির যোগফল 4 হবার সম্ভাবনা কত ?

3. মনে কর 5 থেকে 17 এর মধ্যে দুইটা সংখ্যা নিয়ে গুণ করা হল সম্ভাবনা বের গর গুণফল বিজোড় হয়।

4. 20 থেকে 69 এর মধ্যে 5টা সংখ্যা নেয়া হল সম্ভাবনা বের কর যে এই 5টা সংখ্যার মধ্যে সবগুলো অংকই আছে।





**প্রশ্ন 1। 10 জন লোক একটা টেবিলে বসেছিল তার মধ্যে তিনজনকে এনে কথা বলতে বলা হল। সম্ভাবনা কত যে তারা পাশাপাশি বসেছিল।**

প্রথমে দেখি 10 জন থেকে 3 জন কতভাবে নেয়া যায় সহজ উত্তর $\binom{10}{3}$=120 ভাবে। কিন্তু পাশাপাশি তিনজনকে কতভাবে নেয়া যায় এবার সেটা হিসেব করতে হবে। খেয়াল কর হিসেব এভাবে হতে পারে যে মাঝের জনকে কতভাবে নেয়া যায় কারণ বাকি দুইজন যে দুই পাশে আছে তাদের কে তো নিতেই হবে। না হলে পাশাপাশি তিন জন হবে না। তাহলে 10 জন গোলটেবিলে বলে 10 জনই একবার মাত্র মাঝের জন হতে পারে। তাহলে আমাদের অনুকূল ঘটনা 10 টা। তাহলে সম্ভাবনা $\frac{10}{120} = \frac{1}{12}$

**প্রশ্ন 2 দুইটা দুই অংকের সংখ্যা নিয়ে তাদের গুণ করা হল সম্ভাবনা বের কর গুণফল জোড় হবে।**

খেয়াল করে দ্যাখো আমাদের দুইটা সংখ্যার যে কোন একটা জোড় হলেই গুণফল জোড় হবে। আমরা বিপরীত দিক থেকে হিসেব করি যদি দুইটাই বিজোড় হত তাহলে গুণফল বিজোড় হয়। তাহলে 10 থেকে 99 পর্যন্ত বিজোড় সংখ্যা আছে 45 টা 45টা থেকে 2টা সংখ্যা নেয়া যায় $\binom{45}{2}$=990 ভাবে। আর মোট 90টা সংখ্যা থেকে 2টা সংখ্যা নেয়া যায় $\binom{90}{2}$=4005 তাহলে মোট জোড় হতে পারে 4005-990=3015 ভাবে। তাহলে জোড় হবার সম্ভাবনা $\frac{3015}{4005} = \frac{67}{89}$

প্রশ্ন 3 এবারের প্রশ্নটা একটু ভাবার মত- একটা তাসের প্যাকেট থেকে 5টা তাস নেয়া হল সম্ভাবনা কত যে ফুল হাউস হবে। ফুলহাউস হল তিনটা একই মানের আর বাকি দুইটার মানো সমান। যেমন (KKKAA)

প্রথমে 52খানা তাস থেকে কতভাবে 5টা তাস নেয়া যায়, উত্তর $\binom{52}{5}$=2598960 (খেয়াল কর এখানে কোনটার পর কোনটা নেয়া হয়েছে সেটা কিন্তু ব্যাপার না)

এবার 3টা কার্ডের মান সমান হবার জন্য আমাদের 13 র‍্যাঙ্কের কোন একটা হবে সেই 13 র‍্যাঙ্ক থেকে একটা নেয়া যায় $\binom{13}{1}$= 13

এবার এই র‍্যাঙ্কের 4টা কার্ডের মধ্যে 3টা কার্ড থাকবে সেটা হতে পারে $\binom{4}{3}$=4 ভাবে

আবার 2 কার্ডের হবে যা বাকি 12টা র‍্যাঙ্কের মধ্যে একটা, সেটা নেয়া যায় $\binom{12}{1}$ = 12 ভাবে

এবার এই র‍্যাঙ্কের 4টা কার্ডের মধ্যে দুইটা কার্ড নেয়া যাবে $\binom{4}{2}$=6 ভাবে।

তাহলে আমাদের মোট উপায় $13\times 4 \times 12 \times 6 = 3744$ ভাবে

তাহলে সম্ভাবনা $\frac{3744}{2598960} = \frac{6}{4165}$

> অনেক সম্ভাবনার সমস্যা আসলে দুইটা কম্বিনোটরিক্সের সমস্যার যোগফল। একটা কতভাবে অনুকূল ফলাফল পাওয়া যায়, আর কতভাবে মোট বাছাই করা যায়।



## অনুশীলনী

1. একটা ক্লাবে 10 জন সদস্য যার 5 জন বালক 5 জন বালিকা আমরা দুইজনকে নিয়ে মিটিং করলাম উভয়ই বালক হবার সম্ভাবনা কত ?
2. একটা ক্লাবে 20জন ছাত্রছাত্রী আছে যার মধ্যে যে কোন দুইজনকে নেয়া হল। সম্ভাবনা কত তারা বিপরীত লিঙ্গের হবে ?
3. "SEVEN" শব্দটাকে যতভাবে বিন্যাস করা যায় তার মধ্যে একটা বিন্যাস নেয়া হল। সম্ভাবনা কত দুইটা E পাশাপাশি থাকবে
4. 52টা কার্ড থেকে 3টা কার্ড নেয়া হল সম্ভাবনা কত যে জোড়া হবে। (মানে দুইটা কার্ডের র‍্যাঙ্ক একই অন্যটার আলাদা যেমন AA9)।
5. একটা সপ্তভুজের দুইটা কর্ণ নেয়া হল সম্ভাবনা কত তারা সপ্তভুজের ভেতরে ছেদ করবে।

## এই অধ্যায়ে যা শিখলাম

| |
|---|
| A ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা $P(A) = \frac{\text{A ঘটনাটা যতভাবে ঘটতে পারে}}{\text{মোট যতগুলো ঘটনা হতে পারে}}$ |
| সবগুলো ঘটনা সমসম্ভাব্য কিনা সেটা দেখে নেয়া উচিৎ তা না হলে হিসেব করে বের করতে হবে কোনটা হবার সম্ভাবনা কত। |
| একটা ঘটনা ঘটার সর্বোচ্চ সম্ভাবনা 1, সর্বনিম্ন 0। তোমার সম্ভাবনা এমন আসে যে 1 এর চাইতে বড় বা 0 এর চাইতে ছোট তাহলে অবশ্যই তুমি ভুল করেছ। আবার হিসেব নিকেশ কর। |
| একটা তাসের প্যাকেটে 4 স্যুটের 52 টা কার্ড থাকে, যার প্রত্যেকটি 13টা করে কার্ড থাকে। দুইটা স্যুট লাল hearts♡ আর Diamond♦ আর দুইটা স্যুট কালো Spades♠ আর clubs♣. প্রত্যেক স্যুটে আবার তেরটা করে কার্ড থাকে (2,3,4,5,6,7,8,9,10 গোলাম(J), বিবি (Q), সাহেব (K), টেক্কা (A))। |
| সম্ভাবনার সমস্যা আসলে দুইটা কম্বিনোটরিক্সের সমস্যার যোগফল। একটা কতভাবে অনুকূল ফলাফল পাওয়া যায় আর কতভাবে মোট বাছাই করা যায়। |
| অনেক সময় প্রশ্নে যে সম্ভাবনা বের করতে দেয়া হয়েছে সেটা বের করা কঠিন তার চাইতে তার বিপরীতটা বের করে নিয়ে হিসেবে সুবিধা হয়। |
| কোন একটা ঘটনা হবার সম্ভাবনা p হলে তার বিপরীত ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা 1-p। |



## অনুশিলনী

1. একটা বক্সে 5টা সাদা ও 6টা কালো বল আছে

a) একটা বল তোলা হল সেটা সাদা হবার সম্ভাবনা কত ?

b) দুইটা বল একত্রে তোলা হল একটা সাদা আর একটা কালো হবার সম্ভাবনা কত

c) পাঁচটা বল একত্রে তোলা হল পাঁচটাই সাদা হবার সম্ভাবনা কত ?

2. দুইটা নিখুঁত ছক্কা ফেলা হল সম্ভাবনা বের কর

a) দুটোতেই একই নাম্বার দেখাচ্ছে

b) তাদের যোগফল 9

c) তাদের যোগফল 3 এর বড় কিন্তু 7 এর ছোট

d) একটা ছক্কা 1 দেখাচ্ছে

3. 1 থেকে 100 এর মধ্যে একটা সংখ্যা নেয়া হল সম্ভাবনা বের কর

a) তা তিনের গুণিতক

b) পূর্ণবর্গ

c) 50 এর উৎপাদক

4. একটা নিখুঁত মুদ্রা আর ছক্কা নিক্ষেপ করা হল সম্ভাবনা বের কর যে মুদ্রায় হেড আর ছক্কায় 2 দেখাচ্ছে

5. একটা বক্সে 4টা কালো আর 4টা সাদা বল আছে। আমি একটার পর একটা বল তুলতে লাগলাম সম্ভাবনা কত যে বলগুলো একটা অন্তর একটা রঙের আসবে।

6. একটা এলাকায় 5 জন বাঙ্গালি, 6 জন ভারতীয় আর 2 জন রাশিয়ান ছিল এখান থেকে তিনজন কমিটি করল সম্ভাবনা বের কর

a. তিনজনই বাঙ্গালি

b. একজন ভারতীয় একজন বাঙালি, একজন রাশিয়ান

7. আদিতা দুইটা ছক্কা ছুড়ে মারল সম্ভাবনা বের কর ছক্কার উপরের মুখে যে নাম্বার দুইটি আছে তাদের গুণফল জোড় সংখ্যা

**একটু বেশী মাথা খাটাও**

1. একটানা 7 বার একটা নিখুঁত পয়সাকে টস করা হল সম্ভাবনা কত যে কমপক্ষে 4 বার হেড আসবে

2. 1 থেকে 60 এর মধ্যে আমি একটা সংখ্যা নিলাম সম্ভাবনা কত

a) তা 2 এর গুণিতক হবে

b) 3 এর গুণিতক হবে

c) 2 বা 3 এর গুণিতক হবে

d) a,b,c এর মাঝে সম্পর্ক কি ?

3. জয় 1 থেকে 5 এর মধ্যে একটা সংখ্যা নিল আর সাদ 1 থেকে 10 এর মধ্যে একটা সংখ্যা নিলো সম্ভাবনা বের কর তাদের দুইজনের নাম্বারের গুণফল 30 এর কম হবে।

4. একটা পোকার খেলায় 5 কার্ডের মধ্যে 2টা জোড়া পড়া বেশী সম্ভব না, 3টা একই রকম সেটা আসবে সেটার সম্ভাবনা বেশী। 3টা একই রকম হল AAA23 আর দুই জোড়া হল AAKK3.

একটা তাসের প্যাকেটে 4 স্যুটের 52 টা কার্ড থাকে, যার প্রত্যেকটি 13 টা করে কার্ড থাকে। দুইটা স্যুট লাল hearts♡ আর Diamond♦ আর দুইটা স্যুট কালো Spades♠ আর clubs♣. প্রত্যেক স্যুটে আবার তেরটা



করে কার্ড থাকে (2,3,4,5,6,7,8,9,10 গোলাম(J), বিবি (Q), সাহেব (K), টেক্কা (A))।

5. আমি একটা দুইটা নিখুঁত ছক্কার মান বদলে ফেললাম একটা ছক্কার 5 এর বদলে 2 লিখলাম আর একটা ছক্কায় 2 এর বদলে 5 লিখলাম। মানে এই ছক্কাতে একটায় কোন 5 নাই কিন্তু 2টা 2 আর একটাতে কোন 2 নাই কিন্তু 2টা 5। এবার ছক্কা দুইটি ছুড়ে মারা হল সম্ভাবনা বের কর যে

a) উপরের যে মান আসবে তার যোগফল 7

b) তাদের মানের যোগফল জোড়

6. একটা ক্লাবের সভাপতি বানানোর জন যে কোন একজনকে তোলা হবে। সেক্ষেত্রে ছেলে হবার সম্ভাবনা মেয়ে হবার সম্ভাবনার 3/4 গুণ। মেয়েদের সংখ্যা আর ছেলেদের সংখ্যার অনুপাত কত ?

7. আমার কাছে 120টা খেলনা আছে যার প্রতি দুইটা ভিন্ন পদার্থের, প্রতি তিনটা ভিন্ন রং এর, প্রতি 5 টা বিভিন্ন আকারের আর প্রতি 5টা ভিন্ন ভিন্ন আকৃতির। সম্ভাবনা বের কর আমি দুইটা বস্তু নিলে তাদের এই চারটা বৈশিষ্ট্যই একই হবে।

## সম্ভাবনার কৌশল

### ভূমিকা

আগের অধ্যায়ে সম্ভাবনা কি, সেটা নিয়ে কিছুটা আলোচনা করেছি এখন আমরা সম্ভাবনার আরো অনেক কৌশল দেখাব। এখানে আলোচ্য বিষয় হবে ঘটনা স্বাধীন বা তা নয় এর উপর। এছাড়া বিপরীত ভাবে সম্ভাবনা বের করা। এর জন্য আমরা অনেকগুলো সমস্যা সমাধান করব।

**সম্ভাবনা আর যোগ করা**

**প্রশ্ন 1- যখন একটা ছক্কা ছুড়ে মারা হয় তখন তাতে 2 অথবা 4 আসার সম্ভাবনা কত ?**

মোট ঘটনা আছে 6 টা এরমধ্যে অনুকূল ঘটনা হল দুইটা। 2 আসা বা 4 আসা। তাই আমাদের সম্ভাবনা $2/6=1/3$

এই ঘটনাকে অন্যভাবেও ব্যাখ্যা করা যায়

এখানে দেখা যাচ্ছে যখন এক স্থানে 2 আসছে তখন সেখানে একই সাথে 4 আসার কোন সুযোগ নেই। তার মানে একবারে কখনই 2 আর চার একসাথে আসবে না। এই ক্ষেত্রে আসলে একটা ঘটনা অন্য ঘটনা ঘটার মোটই হল আমাদের কাঙ্ক্ষিত মান বের করার উপায়। তাই যদি পরস্পর আলাদা ভাবে ঘটতে পারে এমন দুইটা ঘটনা A,B হয় তাহলে



A অথবা B ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা তাদের ঘটনার যোগফলের সমান।

উপরের উদাহরণের ব্যাপারটা ব্যাখ্যা করা যাক

# 2 বা 4 আসার উপায় = # 2 আসার উপায় + # 4 আসার উপায়

$$\text{তাই } P(\#\ 2 \text{ বা } 4 \text{ আসা}) = \frac{\#\text{ যতভাবে } 2 \text{ বা } 4 \text{ আসতে পারে}}{\text{মোট কতগুলো উপায় আছে}}$$

$$= \frac{\#\ 2 \text{ আসার উপায়} + \#\ 4 \text{ আসার উপায়}}{\text{মোট কতগুলো উপায় আছে}}$$

$$= \frac{\#\ 2 \text{ আসার উপায়}}{\text{মোট কতগুলো উপায় আছে}} + \frac{\#\ 4 \text{ আসার উপায়}}{\text{মোট কতগুলো উপায় আছে}}$$

$$= P(2 \text{ আসার সম্ভাবনা}) + P(4 \text{ আসার সম্ভাবনা})$$

তার মানে দুইটা ঘটনা A আর B যদি পরস্পর স্বাধীন ভাবে ঘটে তাহলে

$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$

আরো সাধারণ ভাবে বলতে হলে

A,B,C, ... M যদি পরস্পর স্বাধীন ঘটনা হয় তাহলে

$P(A \text{ or } B \text{ or } C \text{ or } \dots \text{ or } M) = P(A) + P(B) + \dots + P(M)$

**প্রশ্ন 2- আমি 1টা পয়সা নিয়ে 7বার টস করলাম। সম্ভাবনা বের কর যাতে কমপক্ষে 5টা হেড আসে।**

প্রতি টসে হয় টেল আসে বা হেড আসে তাই মোট উপায় হলে $2^7$ এবার তাহলে কেস অনুসারে ভাগ করি

1 – 5টা হেড

7বারের মধ্যে 5বার হেড আসবে সেই হেড কতভাবে আসতে আসতে পারে সেটা আগে বের করতে হবে তার তা হল $\binom{7}{5} = 21$

2- 6টা হেড

7বারের মধ্যে 6বার হেড আসবে সেই হেড কতভাবে আসতে আসতে পারে সেটা আগে বের করতে হবে তার তা হল $\binom{7}{6}=7$

3- 7টি হেড

7বারের মধ্যে 7বার হেড আসবে সেই হেড কতভাবে আসতে আসতে পারে সেটা আগে বের করতে হবে তার তা হল $\binom{7}{7}=1$

তাহলে কমপক্ষে 5 বার হেড আসার সম্ভাবনা = $\frac{21+7+1}{128}=\frac{29}{128}$

(মোট 0,1,2...7 বার হেড আসতে পারে 128 ভাবে, চাইলে বার করে দেখতে পার।)

যেহেতু 5বার হেড পরার সাথে 6 বার বার 7 বারের সাথে কোন সম্পর্ক নাই

তাহলে সম্পর্ক আছে কখন বা তখন কি করব সেটা জানার জন্য আমরা পরের সমস্যাটা সমাধান করব।

**প্রশ্ন 3 – 52টা তাসের মধ্য থেকে একটা তাস নেয়া হল। সেটি Q বা ♡ হবার সম্ভাবনা কত ?**

যেহেতু 52টা তাস আছে তাই আমরা একটা তাস 52 ভাবে নিতে পারি

ভুল সমাধান 13 টা ♡ আছে আর 4টা আছে Q তাই আমরা আমাদের অনুকূল তাস আছে 17 টা। তাই সম্ভাবনা 17/52

আমাদের Q আছে চারটি আর ♡ আছে 13টা। কিন্তু আমাদের একটা তাস আছে সেটা হল ♡ এর Q সেই কার্ডটা আমরা দুইবার গুনেছি কিন্তু



আমদের গুনতে হবে একবার তাই একবার বাদ দিতে হবে। তাহলে তাহলে 16 তা আর আমাদের সম্ভাবনা = 16/52=4/13

আমরা এই প্রশ্নটা সরাসরি সম্ভাবনা ব্যবহার করেও করতে পারতাম

ভুল সমাধান

Q আসার সম্ভাবনা 4/52 = 1/13

♡ আসার সম্ভাবনা 13/52=1/4

তাহলে মোট সমাধান 1/13+1/4=17/52

আবার এখানে ♡ আর Q আসা পরস্পর স্বাধীন ভাবে ঘটে না। একই সাথে দুটোও ঘটতে পারে তাই এখানে সঠিক হিসেব হবে

P(Q বা ♡) = P(Q)+P(♡)-P(♡ এর Q )

=1/13+1/4-1/52

= 4/13

সম্ভাবনা বের করার জন্য আমাদের অবশ্যই খেয়াল করে নিতে হবে পরস্পর স্বাধীন ভাবে ঘটে কি না যদি না হয় তাহলে কিন্তু সরাসরি যোগ করা যাবে না। যদি A আর B এর মাঝে দুইটা ঘটনা একসাথেও ঘটতে পারে তাহলে

P(A অথবা B) = P(A) + P(B) – P(A এবং B)

প্রশ্ন 4 – একটা ব্যাগে 3টা লাল আর k টা সাদা মার্বেল আছে। আমরা দুইটা মার্বেল তুললাম। দুইটা মার্বেলের রংই একই হবার সম্ভাবনা ½ হলে। K এর মান কত ?

এখানে একই সাথে একটা মার্বেল সাদা ও লাল হতে পারে না বলে

p(উভয় মার্বেলের রং একই) =P(দুইটা মার্বেলই সাদা)+p(দুইটা মার্বেলই লাল )

এবার মাদের মোট মার্বেল আছে K+3 টা। এখান থেকে 2 মার্বেল নেয়া যায় $\binom{k+3}{2}$ ভাবে

আবার 3টা লাল মার্বেল থেকে 2টা মার্বেল নেয়া যায় $\binom{3}{2} = 3$ ভাবে

তাহলে উভয় মার্বেল সাদা হবার সম্ভাবনা $\frac{3}{\binom{k+3}{2}}$

আবার K সংখ্যক মার্বেল থেকে 2টা মার্বেল নেয়া যায় $\binom{k}{2}$ ভাবে

তাহলে উভয় মার্বেল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{\binom{k}{2}}{\binom{k+3}{2}}$

যে হেতু দুইটা ঘটনা আমরা যোগ করতে পারি তাই দুইটা মার্বেলের রং একই হবার সম্ভাবনা $\frac{3+\binom{k}{2}}{\binom{k+3}{2}}$

আমাদের প্রশ্ন অনুসারে $\frac{3+\binom{k}{2}}{\binom{k+3}{2}} = \frac{1}{2}$

$$\frac{3+\frac{k(k-1)}{2}}{\frac{(K+3)(k+2)}{2}} = \frac{1}{2}$$

সেখান থেকে

$$\frac{6+k(k-1)}{(K+3)(K+2)} = 0$$



এখান থেকে কিছু সাধারণ হিসেব নিকাস করলে দেখা যায়

$k^2 - 7k + 6 = 0$ বা (K-6)(K-1)=0 তাই K=6 বা 1

অনেকে হয়তো ভাবছ k=1 হলে উভয় সাদা কিভাবে হয় সেটা তো সম্ভব না তাই যদি কখনও $\binom{n}{r}$ এর ক্ষেত্রে r>n হয় তাহলে $\binom{n}{r} = 0$

**অনুশিলনী**

1. দুইটা ছক্কা ছোড়া হল তার উপরের বিন্দু গুলোর যোগফল পূর্ণবর্গ হবার সম্ভাবনা কত ?
2. 52 টা তাস থেকে 5টা তাস নেয়া হল সম্ভাবনা কত সেখানে (3,5,7,9) অথবা একটা ♣ থাকবে।
3. একটা সিকি একটা আধুলি আর একটাকা দিয়ে টস করা হল সম্ভাবনা বের কর যাতে হেড দেখানো হচ্ছে যোগফল 75 পয়সার বেশি হয়।
4. ৪টা পয়সা পরপর টস করা হল সম্ভাবনা বের কর যাতে কমপক্ষে 2টা হেড দেখায়।
5. একটা ব্যাগে 5টা লাল আর k টা সাদা মার্বেল আছে। আমরা দুইটা মার্বেল তুললাম। দুইটা মার্বেলের একটা সাদা একটা কালো হবার সম্ভাবনা 10/21 হলে। K এর মান কত ?
6. nটা পয়সা পরপর টস করা হল। কমপক্ষে একটা টেল পড়ার সম্ভাবনা 3/16। n এর মান কত ?

## বিপরীত হিসেব করে সম্ভাবনা

**1. p(কাল বৃষ্টি হবে) +P(কাল বৃষ্টি হবে না) = এর মান কত?**

কাল বৃষ্টি হবে অথবা হবে না এর মাঝে আর কোন কিছু হবার চান্স নাই। তাহলে আমরা বলতে পারি

p(কাল বৃষ্টি হবে) +P(কাল বৃষ্টি হবে না) =1

> আরো সাধারণ ভাবে বললে বলা যায় একটি ঘটনা ঘটবে বা ঘটবে না তার সম্ভাবনার যোগফল 1
>
> P(A ঘটবে)+P(A ঘটবে না)=1
>
> সেখান থেকে বলা যায়
>
> P(A ঘটবে)=1-P(A ঘটবে না)
>
> একে বলে বিপরীত করে সম্ভাবনা গণনা

**প্রশ্ন 2 সম্ভাবনা বের কর যে আমি যখন চারটা ছক্কা একসাথে ছুড়ে মারলাম তখন সবগুলো একসাথে একই সংখ্যা দেখাবে না।**

চারটাই একসাথে দেখাতে পারে নিচের 6 ভাবে

1,1,1,1; 2,2,2,2 ; 3,3,3,3 ; 4,4,4,4 ; 5,5,5,5 ; 6,6,6,6 মোট 6টা উপায়। আর মোট একটা ছক্কায় দেখাতে পারে 6টা পিঠ তাই চারটা ছক্কা দেখাতে পারে $6^4$

তাহলে আমাদের সম্ভাবনা $\frac{6}{6^4} = \frac{1}{216}$

তাহলে চারটা একই দেখাবে না এমন সম্ভাবনা 1- $\frac{1}{216} = \frac{215}{216}$



**প্রশ্ন 3 টম আর জেরির জন্য 7টা সারি বাধা চেয়ার আছে। তারা তাদের ইচ্ছা মত বসল সম্ভাবনা বের কর যে তারা পাশাপাশি বসবে না।**

7টা চেয়ারের 2টা চেয়ার নেয়া যায় $\binom{7}{2}$=21 ভাবে

এবার এক কাজ করি তাদের পাশাপাশি রেখে কতভাবে বসানো যায় সেটা দেখি। খেয়াল করি সেটা হতে পারে তারা 1,2 বা 2,3 বা 3,4 বা 4,5 বা 5,6 বা 6,7 নাম্বারের চেয়ারে বসেছে। মানে বসার উপায় হল 6টা তাহলে পাশাপাশি বসার সম্ভাবনা $\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$

তাহলে পাশাপাশি না বসার সম্ভাবনা 1- 2/7 =5/7

> মাঝে মাঝে আমাদের যে মানটা বের করতে বলেছে সেটা বের করা কঠিন বলে তার বিপরীতটা বের করে 1 থেকে বিয়োগ করে আমরা উত্তর বের করতে পারি।

**অনুশিলনী**

1. 5টা ছক্কা ছুড়ে মারা হল এর মধ্যে সর্বোচ্চ 4টাতে 1 দেখাবে তার সম্ভাবনা কত ?

2. 6টা পয়সা দিয়ে একত্রে টস করলে সম্ভাবনা কত যে তার কমপক্ষে 2টা হেড হবে।

3. একটা বাক্সে 7টা সাদা বল আছে , 8টা কালো বল আছে। আমি সেখান থেকে 3 টা বল নিলাম সম্ভাবনা বের কর তার 2টা এক রং এর অন্যটা ভিন্ন রং এর

4. 'SIXTEEN' শব্দটাকে এলোমেলো করে ফেলা হল। এবার একটা বিন্যাস নেয়া হল সম্ভাবনা বের কর যাতে E দুইটা পাশাপাশি নেই

5. 20 জনের একটা ক্লাবে 10জন ছেলে আর 10জন মেয়ে। সেখান থেকে 4 জনকে নেয়া হল সম্ভাবনা বের কর তার কমপক্ষে একজন মেয়ে আর একজন ছেলে আছে।

## সম্ভাবনা আর গুণন

আমরা যখন বিন্যাস শিখছিলাম তখন দুইটা স্বাধীন ঘটনার মাঝে কি হত গুণ হত। সম্ভাবনাতে কি গুণ হয় হ্যাঁ অবশ্যই হয় এবার সেই বিষয় এই অধ্যায়ে নিয়ে আসছি

**প্রশ্ন 1 দুইটা ছক্কা একটা লাল আর একটা সবুজ নিক্ষেপ করা হল। লাল ছক্কায় 2 আর সবুজ ছক্কায় 5 পরার সম্ভাবনা কত ?**

এটা তো বুঝা যাচ্ছে লাল ছক্কায় 2 আর সবুজ ছক্কায় 5 আসবে এরকম একটাই বিন্যাস সম্ভব আর মোট ঘটনা হতে পারে 36টা

তাই আমাদের মোট সম্ভাবনা 1/36

এখানে দেখার বিষয় প্রথম ছক্কার সাথে 2য় ছক্কার কোন সম্পর্ক নেই। তাই ক্ষেত্রে গুণন বিধি প্রযোজ্য। কিভাবে খেয়াল কর

সবুজ ছক্কায় 5 আসার সম্ভাবনা 1/6

লাল ছক্কায় 2 আসার সম্ভাবনা 1/6

তাই দুটো একসাথে ঘটার সম্ভাবনা

$1/36=1/6\times 1/6$

অন্য ভাবে

p(লাল ছক্কায় 2 এবং সবুজ ছক্কায় 5)

= p(লাল ছক্কায় 2) × P(সবুজ ছক্কায় 5)

আবার আরো একটা সমস্যা দেখা যাক



**প্রশ্ন 2 দুইটা ছক্কা একটা লাল আর একটা সবুজ নিক্ষেপ করা হল। লাল ছক্কায় বিজোড় আর সবুজ ছক্কায় পূর্ণবর্গ পড়ার সম্ভাবনা কত ?**

লাল ছক্কায় 1,3,5 হল অনুকূল ঘটনা আর সবুজ ছক্কায় 1,4 হল অনুকূল ঘটনা। যেহেতু ঘটনা দুইটি স্বাধীন তাই এই দুইটা ঘটনা একসাথে ঘটতে পারে $3\times 2=6$ ভাবে।

কিন্তু আমাদের মোট ঘটনক্ষেত্র 36

তাই আমাদের সম্ভাবন 6/36=1/6

এবার সমস্যাটা সম্ভাবনা দিয়ে করা যাক,

লাল ছক্কায় 1,3,5 হল অনুকূল ঘটনা তাই লাল ছক্কায় বিজোড় পড়ার সম্ভাবনা 3/6=1/2

আর সবুজ ছক্কায় 1,4 হল অনুকূল ঘটনা তাই সবুজ ছক্কায় পূর্ণবর্গ হবার সম্ভাবনা 2/6=1/3

দুটোই স্বাধীন ঘটনা বলে দুটো একসাথে ঘটার সম্ভাবনা = $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

অন্যভাবে

P(লাল ছক্কায় বিজোড় আর সবুজ ছক্কায় পূর্ণবর্গ হবার সম্ভাবনা )

= P(লাল ছক্কায় বিজোড়) ×P(সবুজ ছক্কায় পূর্ণবর্গ হবার সম্ভাবনা )

> যদি A,Bদুইটি স্বাধীন ঘটনা হয় তাহলে
> P(A and B) = P(A) × P(B)

এই বিষয়টা খুব ভালো করে গণনার মাধ্যমে বুঝানো যায়

$$P(A)=\frac{A \text{ ঘটনার সাফল্য যতগুলো}}{A \text{ যতভাবে ঘটে পারে}}\quad P(B)=\frac{B \text{ ঘটনার সাফল্য যতগুলো}}{B \text{ যতভাবে ঘটে পারে}}$$

$$P(A \text{ and } B) = \frac{A \text{ এবং } B \text{ একত্রে ঘটনার সাফল্য যতগুলো}}{A \text{ আর } B \text{ যতভাবে ঘটতে পারে}}$$

$A$ এবং $B$ একত্রে ঘটনার সাফল্য যতগুলো

= $A$ ঘটনার সাফল্য যতগুলো

× B ঘটনার সাফল্য যতগুলো

A আর B যতভাবে ঘটতে পারে

= A যতভাবে ঘটে পারে × B যতভাবে ঘটে পারে

$$P(A \text{ and } B) = \frac{A \text{ এবং } B \text{ একত্রে ঘটনার সাফল্য যতগুলো}}{A \text{ আর } B \text{ যতভাবে ঘটতে পারে}}$$

$$= \frac{A \text{ ঘটনার সাফল্য যতগুলো} \times B \text{ ঘটনার সাফল্য যতগুলো}}{A \text{ যতভাবে ঘটে পারে} \times B \text{ যতভাবে ঘটে পারে}}$$

$$= \frac{A \text{ ঘটনার সাফল্য যতগুলো}}{A \text{ যতভাবে ঘটে পারে}} \times \frac{B \text{ ঘটনার সাফল্য যতগুলো}}{B \text{ যতভাবে ঘটে পারে}} = P(A) \times P(B)$$

**প্রশ্ন 3 – বাংলাদেশ আর ভারতের মধ্যে পরপর চারটা খেলা হল। বাংলাদেশ ভারতের চাইতে ভাল খেলে তাই বাংলাদেশের জয়ের সম্ভাবনা 75%। এবার খেলায় প্রতিটাতেই বাংলাদেশ জিতল তার সম্ভাবনা কত?**

ভুল সমাধান – প্রতি খেলায় জয় বা পরাজয় দুইটা উপায়। তাই মোট চারটা খেলায় ফলাফল হতে পারে $2^4$ টা। যার একটায় মাত্র বাংলাদেশ সবগুলো জয় লাভ করেছে। তাই ভারতের অন্তত 1টা জয়ের সম্ভাবনা 1/16



উপরের উত্তর হচ্ছে না কারণ এখানে উভয় দলের ম্যাচ জয়ের সম্ভাবনা সমান না। এখানে চারটা ম্যাচই আলাদা আলাদা আর স্বাধীন। তাই প্রতিটা ম্যাচের সাথে পরের ম্যাচের কোন সম্পর্ক নেই

তাই p(বাংলাদেশ চারটা ম্যাচই জিতল)=

p(বাংলাদেশ প্রথম ম্যাচ জিতল)× p(বাংলাদেশ 2য় ম্যাচ জিতল)× p(বাংলাদেশ 3য় ম্যাচ জিতল) × p(বাংলাদেশ প্রথম ম্যাচ জিতল)×

$= (\frac{3}{4}) (\frac{3}{4}) (\frac{3}{4}) (\frac{3}{4})$

$= (\frac{81}{256})$

যার আমাদের দুইটা টেকনিক শিখলাম এক স্থানে যোগ হয় এক স্থানে গুণ হয়। এমন কি হতে পারে না দুটোই একটা সমস্যা সমাধানে দরকার হয়। তা দেখার জন্য পরের প্রশ্নের জন্য অপেক্ষা কর

**প্রশ্ন 4 – বাংলাদেশ আর ভারতের মধ্যে খেলা হচ্ছে এখানে ব্যাপার হল যারা প্রথম চারটি ম্যাচ জিতবে তারাই সিরিজ জিতবে।(চারটা ম্যাচ জয়ের পর আর খেলা হবে না) বাংলাদেশের প্রতি ম্যাচ জয়ের সম্ভাবনা 75%। সম্ভাবনা বের কর যে 7 টা ম্যাচের পর বাংলাদেশ সিরিজ জিতবে**

বাংলাদেশের জয় B দিয়ে আর ভারতের জয়কে I দিয়ে প্রকাশ করি। যার মানে প্রথম 6 ম্যাচ পর ভারত আর আর বাংলাদেশ 3টা করে ম্যাচ জিতেছে। প্রত্যেক খেলা যেহেতু আলাদা তাই এই 6 ম্যাচে BBBIII ঘটেছে। এদেরকে যত ভাবেই জানানো যাক না কেন প্রত্যেক ক্ষেত্রেই 6 ম্যাচ পর ফলাফল একই থাকে। এই রকম খেলা হতে পারে

$\binom{6}{3}$=20 ভাবে। আর সর্বশেষ ম্যাচে বাংলাদেশকে জিততে হবে তাই শেষের বার হবে B

তাহলে যে কোন এক ক্ষেত্রে BBBIIIB হবার যে সম্ভাবনা সেটা বের করার পর সেটা হল এক বিন্যাসে। শেষ ম্যাচে জয় নিয়র বাংলাদেশের সিরিজ জয় এ রকম বিন্যাস হতে পারে 20 টি তাই এই উত্তরটিকে 20 দিয়ে গুণ করে সঠিক ফলাফল পাব।

P(BBBIIIB)=P(B)× P(B)× P(B) × P(I) × P(I) × P(I) × P(B)

$$= p(B)^4 p(I)^3$$

$$= (\tfrac{3}{4})^4 (\tfrac{1}{4})^3$$

$$= \frac{81}{16{,}384}$$

একে 20 দিয়ে গুণ করে পাই $20\times \frac{81}{16{,}384} = \frac{405}{4096}$

এবার এই প্রশ্নের একটা কঠিন রূপ করি

**প্রশ্ন 5 – বাংলাদেশ যে কোন সংখ্যক ম্যাচে সিরিজ জিতবে তার সম্ভাবনা কত ?**

বাংলাদেশ 4,5,6,7 ম্যাচের যে কোন ম্যাচে গিয়ে সিরজ জিতিতে পারে।

বাংলাদেশ 7 ম্যাচে জিতল

তার সমাধান একটু আগে করলাম

বাংলাদেশ 6 ম্যাচে জিতল

তার মানে 6ষ্ঠ ম্যাচে বাংলাদেশ জিতেছে। আগের 5টা ম্যাচের জিতেছে 3টা। সেটা হতে পারে $\binom{5}{3}$=10



যার মানে এখানের ম্যাচগুলোতে 2টা ম্যাচ জিতেছে ভারত আর 4 টা বাংলাদেশ সেটা ঘটার সম্ভাবনা

P(B)× P(B)× P(B) × P(I) × P(I) × P(B)

$$=p(B)^4 p(I)^2$$

$$= (\tfrac{3}{4})^4 (\tfrac{1}{4})^2$$

$$= \frac{81}{4096}$$

আর এটা যেহেতু 10 টা ভাবে হতে পারে তাই মোট ফলাফল

$10\times \frac{81}{4096} = \frac{405}{2048}$

বাংলাদেশ 5 ম্যাচে জিতল

তার মানে 5ম ম্যাচে বাংলাদেশ জিতেছে। আগের 4টা ম্যাচের জিতেছে 3টা। সেটা হতে পারে $\binom{4}{3}$=4

যার মানে এখানের ম্যাচগুলোতে 1টা ম্যাচ জিতেছে ভারত আর 4 টা বাংলাদেশ সেটা ঘটার সম্ভাবনা

P(B)× P(B)× P(B) × P(I) × P(B)

$$=p(B)^4 p(I)$$

$$= (\tfrac{3}{4})^4 (\tfrac{1}{4})$$

$$= \frac{81}{1024}$$

আর এটা যেহেতু 4 টা ভাবে হতে পারে তাই মোট ফলাফল

$4\times \frac{81}{1024} = \frac{81}{256}$

আর চারটার চারটাই জিতছে সেটা হতে পারে $(\frac{3}{4})^4 = \frac{81}{256}$

তার মানে মোট সিরিজ জয়ের সম্ভাবনা

$$\frac{405}{4096} + \frac{405}{2048} + \frac{81}{1024} + \frac{81}{1024} = \frac{3807}{4096}$$

অনুশীলনী

1. একটা নিখুঁত কয়েনকে 10 বার টস করা হল বের কর

a) ঠিক 8 বার হেড পড়ল

b) কমপক্ষে 8 বার হেড পড়েছে

2. একটা নিখুঁত ছক্কাকে 5 বার নিক্ষেপ করা হল সম্ভাবনা বের কর

a) আমরা বিজোড় সংখ্যা ঠিক 4 বার পাব

b) 1 অথবা 2 ঠিক 3 বার পাব

c) 6 সর্বোচ্চ 2 বার পাব

3. জুন মাসে কোন দিন বৃষ্টি হবার সম্ভাবনা 1/10 তাহলে ঐ মাসে সর্বোচ্চ 2 দিন বৃষ্টি হবার সম্ভাবনা কত ?

4. শেষের উদাহরণটার কথা তো মনে আছে। দেখলে বাংলাদেশের জয়ের সম্ভাবনা বেশি। এবার তোমাকে বলতে হবে বাংলাদেশ যদি ভারত কে হারাতে চায় তাহলে কত ম্যাচের সিরিজ করা বেশী উচিৎ 5 ম্যাচের, 7 ম্যাচের না 9 ম্যাচের।



শর্তাধীন সম্ভাবনা

আমরা আগের সকল প্রশ্নে দেখলাম উত্তর গুলো ছিল স্বাধীন। এবারে যদি তা না হয় তাহলে কি হতে পারে সেটা দেখব এবার (অবশ্য পরের কোন এক অধ্যায়ে আরো ভালো করে জানব)।

**1. তুমি 52টা তাস থেকে প্রথমটা তাস নিলে যদি সেটা ♦ হয় এরপর সেটা হাতেই রেখে আরো একটা তাস নিলে সেটা ♣ হবার সম্ভাবনা কত ?**

| |
|---|
| ভুল সমাধান - ♦ এর সংখ্যা 13 টা মানে ¼ এর পর ♣ এর সংখ্যা 13 মানে 1/4 তাহলে দুইটা ঘটনাই ঘটার সম্ভাবনা $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ |

আমাদের প্রথম তাসটা হবে ♦ আমাদের যা আছে 13 টা তাহলে প্রথম কার্ডটা নেয়া যাবে 13/52 =1/4 ভাবে আমাদের 2য় তাসটা হবে ♣ আমাদের যা আছে 13 টা। কিন্তু এখন আমাদের কার্ড আছে 51 তাহলে 2য় কার্ডটা নেয়া যাবে 13/51 ভাবে

তাহলে মোট সম্ভাবনা $\frac{1}{4} \times \frac{13}{51} = \frac{13}{204}$

আমরা এটা এভাবেও সলভ করতে পারতাম

প্রথম 2টি তাস নিতে পারি 52× 51 ভাবে

আর 13 ভাবে প্রথম তাস হিসেবে ♦ নিতে পারি আর 2য় তাস হিসেবে ♣ নিতে পারি 13 ভাবে তাহলে আমাদের সম্ভাবনা $\frac{13\times13}{51\times52} = \frac{13}{204}$

আমাদের মোট ফলাফল প্রথম দুইটি তাস নিতে পারি 52×51 ভাবে এখানে $\binom{52}{2} = \frac{52\times51}{2}$ হবে না কারন এখানে ক্রম বিবেচ্য। আমাদের প্রথম ♦ পরে ♣ আমাদের জন্য অনুকূল ঘটনা কিন্তু প্রথমে ♣ পরে ♦ আমাদের জন্য অনুকূল নয়।

**2. একটা বাক্সে 4টা লাল আর 6টা নীল বল আছে। একটা মার্বেল নেয়া হল আর বাক্সে ফেরত দেয়া হল না। এবার আবার একটা বল নেয়া হল সম্ভাবনা কি যে দুইটা বলের রং একই হবে**

যার মানে আমাদের দুইটাই লাল অথবা দুইটাই নীল হবে

দুইটাই লাল হলে

P(দুটোই লাল)

= P(প্রথম বল লাল)× P(প্রথম বল লাল হবার পর 2য় বল লাল)

প্রথম বলটা লাল হবের সম্ভাবনা 4/10

এবার একটা বল নেবার পর আর লাল বল থাকল 3টা আর মোট বল হল 9 টা তাহলে প্রথম বল লাল হবার পর 2য় বল লাল হবার সম্ভাবনা

= 3/9

তাহলে দুইটা বলই লাল হবার সম্ভাবনা = $\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$

দুইটাই নীল হলে

P(দুটোই নীল)

= P(প্রথম বল নীল)× P(প্রথম বল নীল হবার পর 2য় বল নীল)

প্রথম বলটা নীল হবার সম্ভাবনা 6/10



এবার একটা বল নেবার পর আর নীল বল থাকল 5টা আর মোট বল হল 9 টা তাহলে প্রথম বল নীল হবার পর 2য় বল নীল হবার সম্ভাবনা

= 5/9

তাহলে দুইটা বলই নীল হবার সম্ভাবনা = $\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$

তাহলে দুইটা একই রং এর হবার সম্ভাবনা = $\frac{2}{15} + \frac{1}{3} = \frac{7}{15}$

### অনুশীলনী

1. 52টা কার্ড থেকে 2টা একটার পর একটা কার্ড নেয়া হল সম্ভাবনা বের কর

a) প্রথম কার্ড ♡ 2য় কার্ড ♣

b) প্রথম কার্ড 6 2য় কার্ড Q

c) প্রথম কার্ড K 2য় কার্ড ♣

d) প্রথম কার্ড ♦ 2য় কার্ড A

2. 52টা কার্ড থেকে 3টা একটার পর একটা কার্ড নেয়া হল সম্ভাবনা বের কর

a) প্রথম কার্ড j 2য় কার্ড Q 3য় কার্ড K

b) সকল কার্ড ♡

c) প্রথম কার্ড 4 2য় কার্ড ♣ 3য় কার্ড 5

3.একটা বাক্সে 3টা লাল আর 5টা নীল বল আছে। একটা বল নেয়া হল আর বাক্সে ফেরত দেয়া হল না। এবার আবার একটা বল নেয়া হল সম্ভাবনা কি যে দুইটা বলের রং একই হবে

4. 1ম বাক্সে 3টা লাল আর 4টা নীল বল আছে। 2য় বাক্সে 6টা কাল আর 4টা সাদা বল আছে 3য় বাক্সে বাক্সে 2টা কাল আর 5টা সাদা বল আছে। একটা বল নেয়া হল 1ম বাক্স থেকে যদি তা লাল হয় তাহলে তাহলে 2য় ব্যাগ থেকে বল নেয়া হয় আর যদি নীল হয় তাহলে 3য় বক্স থেকে বল নেয়া হয়। সম্ভাবনা বের কর যে 2য় বলটা কালো হবে।

5. জিম একটা পিকনিক আয়োজন করল। পিকনিক বৃষ্টি বা রোদে হতে পারে যদি বৃষ্টি হয় তাহলে সিয়ামের যাবার সম্ভাবনা 20% আর রোদ থাকলে যাবার সম্ভাবনা 80%। কাল বৃষ্টি হবার সম্ভাবনা 40% তাহলে সিয়ামের পিকনিকে যাবার সম্ভাবনা কত ?



**মঙ্গলগ্রহ দেখায় এ সম্ভাবনা ...**

এখানের সমস্যা গুলো একটু কঠিনই বটে

**1. শুভ ভালো একটা যায়গায় থাকে যেখানে খুব একটা মেঘাচ্ছন্ন হয় না, সেখানে যদি সে 1 ঘণ্টা মঙ্গলগ্রহ দেখে তাহলে 60% সম্ভাবনা সে মঙ্গলগ্রহ দেখতে পাবে। সে দুই ঘণ্টা মঙ্গলগ্রহ দেখল মঙ্গল গ্রহ দেখার সম্ভাবনা কত ?**

এখানে তিনটা ঘটনা হতে পারে

# শুভ প্রথম ঘণ্টায় মঙ্গলগ্রহ দেখল না কিন্তু 2য় ঘণ্টায় দেখল তা হবার সম্ভাবনা

P(প্রথম ঘণ্টার মঙ্গলগ্রহ না দেখার সম্ভাবনা)× P(2য় ঘণ্টার মঙ্গলগ্রহ দেখার সম্ভাবনা) = $\frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$

# শুভ প্রথম ঘণ্টায় মঙ্গলগ্রহ দেখল কিন্তু 2য় ঘণ্টায়ও মঙ্গলগ্রহ দেখল না তা হবার সম্ভাবনা

P(প্রথম ঘণ্টার মঙ্গলগ্রহ দেখার সম্ভাবনা)× P(2য় ঘণ্টার মঙ্গলগ্রহ না দেখার সম্ভাবনা) = $\frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$

# শুভ প্রথম ঘণ্টায় মঙ্গলগ্রহ দেখল সাথে 2য় ঘণ্টায়ও মঙ্গলগ্রহ দেখল তা হবার সম্ভাবনা

P(প্রথম ঘণ্টার মঙ্গলগ্রহ দেখার সম্ভাবনা)× P(2য় ঘণ্টার মঙ্গলগ্রহ দেখার সম্ভাবনা) = $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

মোট মঙ্গলগ্রহ দেখার সম্ভাবনা $\frac{6}{25} + \frac{6}{25} + \frac{9}{25} = \frac{21}{25}$

এই সমস্যাটাকে আমরা অন্যভাবে সমাধান করতে পারতাম

আমরা জানি মোট সম্ভাবনা 1 সেখান থেকে মঙ্গলগ্রহ না দেখার সম্ভাবনা বাদ দিলেই মঙ্গলগ্রহ দেখার সম্ভাবনা পেয়ে যেতাম।

শুভর মঙ্গলগ্রহ না দেখার সম্ভাবনা = শুভ প্রথম ঘণ্টায় মঙ্গলগ্রহ না দেখার সম্ভাবনা × শুভ 2য় ঘণ্টায় মঙ্গলগ্রহ না দেখার সম্ভাবনা $=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$

তাহলে মঙ্গলগ্রহ দেখার সম্ভাবনা = $1-\frac{4}{25}=\frac{21}{25}$

এই সমস্যাটা সমাধান করতে তোমাদের তেমন কোন সমস্যা হবার কথা না। এবার 2য় সমস্যাটার দিকে খেয়াল কর, এটা তুলনামূলক ভাবে একটু চিন্তার

**2. এবার শুভ খুব ভালো একটা যায়গায় থাকে যেখানে খুব একটা মেঘাচ্ছন্ন হয় না, সেখানে যদি সে 1 ঘণ্টা মঙ্গলগ্রহ দেখে তাহলে 80% সম্ভাবনা সে মঙ্গলগ্রহ দেখতে পাবে। সে 15 মিনিট মঙ্গলগ্রহ দেখল মঙ্গল গ্রহ দেখার সম্ভাবনা কত ?**

| |
|---|
| ভুল সমাধান যেহেতু 1 ঘণ্টায় দেখার সম্ভাবনা 80% তাই 15 মিনিট 1 ঘণ্টার চারভাগের একভাগ তাই মঙ্গল গ্রহ দেখার সম্ভাবনা (80%/4)=20% |

উপরের সমাধানে যারা ভুল পাচ্ছ না তাদের জন্য খেয়াল কর আগের প্রশ্নে 60% ছিল মঙ্গল গ্রহ দেখার সম্ভাবনা তাহলে 2ঘণ্টায় গ্রহ দেখার সম্ভাবনা হবার কথা 60%+60%=120% !!! কোন কিছুর সম্ভাবনা 120% হওয়া মানে অবশ্যই ভুল করেছি। তাই আমাদের এই সমাধানেও ভুল আছে।



তার মানে বুঝা যাচ্ছে প্রতিটা সময়ে গ্রহ দেখার সম্ভাবনা সমান না।এবার ঝামেলায় পরে গেলাম আমাদের সমস্যাটা কিভাবে সমাধান কিভাবে করি। এটা সমাধানের জন্য আমরা ধরি 15 মিনিটে গ্রহ দেখার সম্ভাবনা p। এবার এভাবে আগাতে পারি 1ম ঘণ্টায় গ্রহ দেখল বাকি সময় দেখল না, বা চার ভাগেই দেখল , বা 2 বার দেখল এভাবে আগাতে থাকলে আমাদের সমস্যাটা জটিল হয়ে পড়ছে তাহলে সমাধানটা নিচের উপায়ে করি

তাহলে না দেখার সম্ভাবনা (1-p)

এবার সে কখনই গ্রহ দেখে নাই তার মানে

P(শুভ কখনই গ্রহ দেখে নাই)

= P(প্রথম 15 মিনিটে গ্রহ দেখে নাই) × P(2য় 15 মিনিটে গ্রহ দেখে নাই) × P(3য় 15 মিনিটে গ্রহ দেখে নাই) × P(4র্থ 15 মিনিটে গ্রহ দেখে নাই)

= $(1-p)^4$

শর্ত অনুসারে $(1-p)^4 = 1/5$

সেখান থেকে p এর মান বের করে দেখা যায় p= 33.1% (প্রায়)

### এই অধ্যায় থেকে যা শিখলাম

তার মানে দুইটা ঘটনা A আর B যদি পরস্পর স্বাধীন মানে একটা ঘটার সাথে অন্যটার কোন সম্পর্ক না থাকে তাহলে

$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$

আরো সাধারণ ভাবে বলতে হলে

A,B,C, ... M যদি পরস্পর স্বাধীন হয় তাহলে

$P(A \text{ or } B \text{ or } C \text{ or } \ldots \text{ or } M) = P(A) + P(B) + \ldots + P(M)$

সম্ভাবনা বের করার জন্য আমাদের অবশ্যই খেয়াল করে নিতে হবে পরস্পর স্বাধীন কি না যদি না হয় তাহলে কিন্তু সরাসরি যোগ করা যাবে না। যদি A আর B এর মাঝে দুইটা ঘটনা একসাথেও ঘটতে পারে তাহলে

P(A অথবা B) = P(A) + P(B) – P(A এবং B)

আরো সাধারণ ভাবে বললে বলা যায় একটি ঘটনা ঘটবে বা ঘটবে না তার সম্ভাবনার যোগফল 1

P(A ঘটবে)+P(A ঘটবে না)=1

সেখান থেকে বলা যায়

P(A ঘটবে)=1-P(A ঘটবে না)

যদি A,B দুইটি স্বাধীন ঘটনা হয় তাহলে

$P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B)$

### অনুশীলনী

1. একটা ছক্কা ছুড়লে তাতে 6 এর উৎপাদক পাবার সম্ভাবনা কত ?



2. দশটা ছক্কা ছুড়লে তাতে ঠিক একটাতে 1 পাবার সম্ভাবনা কত ?

3. ছয়টা ছক্কা ছুড়লে তাতে ঠিক যতটা জোড় সংখ্যা দেখাচ্ছে ঠিক ততগুলোই বিজোড় সংখ্যা দেখানোর সম্ভাবনা কত ?

4. আমি একটা ক্রটি পূর্ণ পয়সা দিয়ে টস করলাম তাতে হেড আসার সম্ভাবনা p তাহলে n বার টস করলে ঠিক k বার হেড আসার সম্ভাবনা কত ?

5. 52টা তাস থেকে 2টা তাস নেয়া হল সম্ভাবনা বের কর

a) উভয়ে (J,K,Q) এর মধ্যে আছে

b) প্রথম কার্ড ♡ 2য় কার্ড 10

c) কার্ড দুইটির সংখ্যা যোগ করা হলে 12 হয়

6. 52টা তাস থেকে 2টা তাস নেয়া হল সম্ভাবনা বের কর তাস দুইটার রং ভিন্ন

7. নিচের ছক থেকে ডাটা দেখ। প্রথমে একটি বাক্স দৈব ভাবে নেয়া হল সেখান থেকে একটা বল নেয়া হল বলটি সবুজ হবার সম্ভাবনা কত

| | 1ম বক্স | 2য় বক্স | 3য় বক্স |
|---|---|---|---|
| লাল বল | 8 | 2 | 2 |
| সবুজ বল | 4 | 4 | 4 |

8. একটা বাক্সে 6টা সবুজ আর 4টা লাল বল আছে, একটা বল নেয়া হল এর রং লেখা হল এরপর বলটা আবার ব্যাগে ফেরত দেয়া হল। 2য় একটা বল নেয়া হল সেটার রং আবার লেখা হল

a) দুইটা বলের রং একই হবার সম্ভাবনা কত

b) যদি বল আবার ফেরত না দেয়া হত তাহলে কি পরিবর্তন হত

9. একটা সিকি দিয়ে 3 বার আর একটা আধুলি 2বার দিয়ে টস করা হলে সিকির চাইতে আধুলিতে বেশিবার হেড আসার সম্ভাবনা কত ?

10. মনোপলি খেলায় যদি দুইটা ছক্কায় একসাথে একই সংখ্যা দুইবার পরে তাহলে আমি আরো একটা দান পাই যাকে ডাবল বলে। কিন্তু আমার যদি তিনবার ডাবল পরে তাহলে আমি জেলে যাব।

a) আমার দানে ডাবল পড়ার সম্ভাবনা কত ?

b) আমি আমার দানে জেলে না যাবার সম্ভাবনা কত ?

**একটু মাথা খাটাও**

1. আমার স্কুলে 16 সদস্যের গণিত টিম থেকে 1 জন সভাপতি আর 3 জন সহ সভাপতি করা হবে। এজন্য ক্লাশ 9 থেকে 7 জন আর ক্লাশ 10 থেকে 9 জন আসল। সম্ভাবনা বের কর কোন এক ক্লাশের আধিক্য থাকবে

2. মীর্জা আর রিফাত ক্রিকেট খেলছে। যে পাঁচটা ম্যাচ প্রথম জিতবে তারাই জয়ী। মীর্জা ভালো খেলে বলে তাই তার 1 ম্যাচে জয়ের সম্ভাবনা 60%। মীর্জার সিরিজ জয়ের সম্ভাবনা কত ?

3. আমি ছক্কা ফেলতেই লাগলাম যতক্ষণ না আমার 6 পড়ে সম্ভাবনা বের কর আমি 6 বারে ছক্কা ফেলেছি।

4. একটা ছক্কা এমন বানানো হল যে $P(1)=P(2)$

$P(3)=P(4)=P(5)$

$P(4)=3P(2)$



$P(5)=2P(6)$ হলে $p(6) = ?$

5. তিনটা বলে 1,2,3 নাম্বার দেয়া হল। এরপর একটা ব্যাগে রাখা হল। একটা তোলা হল তার নাম্বার লেখা হল, এরপর আবার বলটা ব্যাগে রাখা হল, আবার একই কাজ 2 বার করা হল। তাতে যে তিনটা সংখ্যা পাওয়া গেল তা যোগ করা হল।

a) যোগফল 6 হবার সম্ভাবনা কত ?

b) তুমি যোগফল দেখে বললে আসলেই 6, এটা শুনে তারেক বলল তাহলে তো প্রতিবারেই 2 পড়েছে। তার কথা সঠিক হবার সম্ভাবনা কত ?

6. রাফি আর মাইসা একটা কয়েন দিয়ে টস করতে লাগল। রাফি আগে শুরু করল। রাফি বা মাইসা যার আগে হেড পড়বে সেই জিতবে। রাফির জয়ের সম্ভাবনা কত ?

7. একটা তাস খেলায় চারজনের সবাইকে 13টা করে কার্ড দেয়া হল সম্ভাবনা বের কর যে সবার হাতে একটা করে টেক্কা আছে।

8. আমার ক্লাশে 100 জন আছে 365 দিনে বছর ধরে সম্ভাবনা বের কর কমপক্ষে দুইজনের বয়স বছরের একই দিনে

9. আমি যখন ছবি তুমি তখন 25% চান্স সবাই ক্যামেরার দিকে তাকানো আমাকে কতগুলো ছবি তুলতে হবে যাতে কমপক্ষে 4/5 চান্স যে সবাই ক্যামেরার দিকে তাকিয়েছে

## করার আগে আর একটু ভাবো

এতক্ষণ আমরা সম্ভাবনা বের করার অনেক নিয়ম কানুন শিখে ফেলছি। এবার আমরা বিভিন্ন ভাবে কিছু সমস্যা সমাধানের চেষ্টা করব

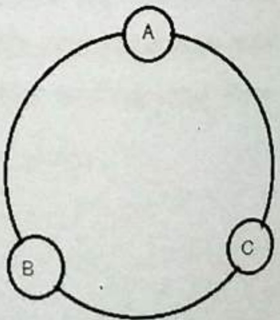
> যে কোন প্রশ্ন পাবার সাথে সাথে সমাধানের চেষ্টা না করে সেটা নিয়ে আগে ভাবো এরপর সমাধানের চেষ্টা কর।

**করার আগে একটু ভাবো**

**সমস্যা 1- দুইটা ছক্কা ছুড়ে মারা হল সম্ভাবনা বের কর ছক্কা দুইটাতে একই সংখ্যা দেখাচ্ছে।**

আমাদের মোট পেতে পারি 36টা উপায় এরমধ্যে (1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6) হল আমাদের অনুকূল সমাধান

তাই আমাদের সম্ভাবনা $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$




এবার প্রশ্নটাকে অন্যভাবে ভাবি এখানে কোনটাতে আগে কি এসেছে সেটা কোন ব্যাপার না। তাহলে প্রথম ছক্কাটার জন্য ভাবি। এখানে অবশ্যই একটা



কিছু আসবেই সেটা এরপর পরের ছক্কাতেও আসতে হবে। যেহেতু যে কোনটা আসার জন্য সম্ভাবনা 1/6 তাই প্রথম ছক্কায় যা পরেছে সেটাই পড়বে তার সম্ভাবনা 1/6. এখানেও সম্ভাবনা থাকছে 1/6

প্রথম সমস্যাটা দেখাচ্ছে যে আমরা সহজ গণনার পদ্ধতি ব্যবহার করলেই সমস্যা সহজ হয়ে যায়।

**এবার বিপিএল এ মাশরাফির টিম আর মাহামুদুল্লার টিম সিরিজ খেলবে। দুই দলই সমান শক্তিশালী। যারা 4 ম্যাচ জিতবে তারাই সিরিজ জয়ী ঠিক ছয় ম্যাচেই খেলার ফলাফল জানা গেল। মাশরাফির টিমের জয়ের সম্ভাবনা কত ?**

আগের অধ্যায়ে আমরা যেভাবে সমাধান করেছি সেভাবে আমরা সমাধান করতে পারি। কিন্তু আমরা অন্য পথে ভাবব । যেহেতু সমান শক্তিশালী তাই মাশরাফির টিমের জয়ের সম্ভাবনা যা আর মাহামুদুল্লারও তাই। আর তাহলে জয় আর পরাজয়ের সম্ভাবনা সমান।তাই জয়ের সম্ভাবনা 1/2

> প্রতিসাম্যতা বা উভয় পাশের মান সমান হলে তুমি এর সুবিধা নিতে পার।

**সমস্যা 2 – A,B ও C তিনটা বিন্দু দেখা যাচ্ছে। আমরা একটা মাছিকে A তে রাখলাম এরপর একটা ছক্কা ফেললাম । যদি 1 বা2 পরে তাহলে মাছিটা সেখানেই থাকে 3 বা 4 পড়লে ডানে যায় আর 5 বা 6 পড়লে**

বামে যায়। ৪ বার ছক্কা ফেলার পর মাছিটা A বিন্দুতে থাকার সম্ভাবনা কত ?

আমরা এখানে কতরকমের ঘটনা ঘটতে পারে সেটা বের করতে পারি $6^৪$ এটা করার আগে এক মিনিট দাঁড়াও একটু ভেবে নেই।

আমি যেখানেই থাকি না কেন সেখানে থাকার সম্ভাবনা 1/3, ডানে যাবার সম্ভাবনা 1/3 আর বামে যাবার সম্ভাবনা 1/3 মানে আমি যেকোন বিন্দুতে থাকার সম্ভাবনা সমান। তাহলে কতবার ছক্কা পড়ল সেটা ব্যাপার না আমি যে কোন বিন্দুতে থাকার সম্ভাবনা 1/3

তাহলে যায়। ৪ বার ছক্কা ফেলার পর মাছিটা A বিন্দুতে থাকার সম্ভাবনা 1/3

**একটা ক্লাশে তিন ভাই বোন রিফাত, রিমা, রিপা আছে ।আজ তাদের রেজাল্ট দেবে। ক্লাশে আছে মোট 11 জন । ম্যাডাম আজ তাদের খাতা নিয়ে আসবেন আর তাদের রেজাল্ট দেবেন। সম্ভাবনা কত যে তিন ভাই বোনের মধ্যে রিফাতের রেজাল্ট সবার আগে দেবে ।**

11 জনের খাতা আনা যায় 11! ভাবে ... দাঁড়াও তো এই তিন জনের যে কাউকে প্রথমে ডাকার সম্ভাবনা তো সমান তাহলে সবার আগে রিফাতকে ডাকবে তার সম্ভাবনা 1/3

| এখানে দেখতেই পাচ্ছ মোট ছাত্রের সংখ্যা কোন কাজেই আছে না। তাই প্রশ্ন অনেক সময় অনেক গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা রাখে। |
|---|



**একটা ক্লাশে তিন ভাই বোন রিফাত, রিমা, রিপা আছে ।আজ তাদের রেজাল্ট দেবে। ক্লাশে আছে মোট 11 জন । ম্যাডাম আজ তাদের খাতা নিয়ে আসবেন আর তাদের রেজাল্ট দেবেন। রিফাত টয়লেটে ছিল তাই প্রথম জনকে যখন খাতা দেয় তখন সে ক্লাশে ছিল না। তাই ম্যাডাম তার নামও ডাকল না। এবার সে 1ম জনের খাতা দেবার পর ফিরে আসল এখন সম্ভাবনা কত যে তিন ভাই বোনের মধ্যে রিফাতের রেজাল্ট সবার আগে দেবে ।**

এবার আগের মত আমরা প্রতিসাম্যতা ব্যবহার করতে পারব না। এখন প্রথম জন যদি রিফাতের কোন বোনকে ডাকে তাহলে সে আর কখনই প্রথমে খাতা পাবে না। তাই প্রথমে তার বোনকে ডাকে নাই মানে বাকি 8 জনের একজনকে ডাকছে তার সম্ভাবনা। 8/10 = 4/5 । যখন রিফাত চলে আসল তখন আবার আগের প্রশ্ন। এবার সম্ভাবনা আবার 1/3 । তাই এক্ষেত্রে মোট সম্ভাবনা $\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{15}$

**আগের প্রশ্নেই যদি বলা যয় রীমাকে প্রথমে ডাকার সম্ভাবনা কত সেটা বের করতে পারবে ?**

এবার দ্যাখো রিফাতকে প্রথমে ডাকার সম্ভাবনা 4/15

তাহলে রীমা বা রীপাকে প্রথমে ডাকার সম্ভাবনা 11/15

যেহেতু এখানে রীমা ও রীপার কার্যক্রম একই তাই তারা প্রতিসম তাদের সম্ভাবনা সমান। তাই রীমাকে ডাকার সম্ভাবনা 11/30 একই কথা রীপার জন্যও

**আমরা 1 থেকে 8 পর্যন্ত ব্যবহার করে একটা সংখ্যা লিখলাম সেটি 5 দিয়ে বিভাজ্য সম্ভাবনা বের কর যে আর 6 কোটির চাইতে বড়।**

যেহেতু 5 দিয়ে বিভাজ্য তাই শেষ অংকটা অবশ্যই 5। এবার বাকি 7টা থেকে 6,7,8 এর যে কোন একটা সামনে থাকলেই সেটা 6 কোটির বড় হবে। তাই 7টি সংখ্যার মধ্যে এই তিনটি সংখ্যা থাকার সম্ভাবনা 3/7

**MATHEMATICS শব্দের একটা বিন্যাস নেয়া হল সম্ভাবনা বের কর তার প্রথমে শুরু MATH দিয়ে**

প্রথমে M আসতে পারে তার সম্ভাবনা 2/11 (যেহেতু 2টা M)

এরপর A আসতে পারে তার সম্ভাবনা 2/10 (2টা A আর একটা M চলে গেছে)

এরপর T আসতে পারে তার সম্ভাবনা 2/9 (2টা T )

এরপর H আসতে পারে তার সম্ভাবনা 1/8

তাহলে MATH প্রথমে আসার সম্ভাবনা $\frac{2}{11} \times \frac{2}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{990}$



**অধ্যায়ে যা শিখলাম**

| |
|---|
| কোন প্রতিসাম্যতা আছে নাকি সেটা খুঁজে বের কর এবার তার থে সুবিধা নিয়ে নেও |
| আমার কোন অপ্রয়জনীয় ডাটা আছে নাকি যা বাদ দিলে হিসেব সুবিধা হয় |
| আমি কি অন্য কোন উপায় পাচ্ছি সেটা আমাদের সমাধান আরো সহজ করে । |
| সমস্যা পেয়েই সমাধান করতে যেও না<br>একটু ভেবে কর। তাতে সমাধান করা সহজ হতে পারে। |

**অনুশীলনী সমস্যা**

1.আমার ড্রয়ারে 6টা নীল, 5টা কালো আর 7টা মোজা আছে। আমি চারটা মোজা তুললাম সম্ভাবনা কত যে কমপক্ষে একটা একই জোড়ার মুজা পাব।

2. আমি একটা মুদ্রাকে 11 বার টস করলাম সম্ভাবনা কত আমি হেডের চাইতে টেল বেশী পাব

3. আমি 1-100 কে দুইটা 50 -50 এর গ্রুপে ভাগ করলাম। সম্ভাবনা কত 19 আর 48 একই গ্রুপে থাকবে

4. বাপ্পির একটা কফি শপ আছে সে তার বন্ধু দের ডাকল কফিশপে মিটিং করার জন্য । কিন্তু তারা তার কফি শপে আসবে কিনা সেটা না বলে একটা ইচ্ছা মত চয়েস করল। শহরে 5টা কফিশপ থাকলে তারটা চয়েসের সম্ভাবনা কত ?

5. আটটা ছক্কা পর পর ফেলা হল তাতে যে নাম্বার আসল তা লিখে ফেলা হল, সংখ্যাটা 8 দিয়ে বিভাজ্য হবার সম্ভাবনা কত ?

## জ্যামিতিক সম্ভাবনা

আমরা এতক্ষণ যত সম্ভাবনা সমাধান করেছি তাতে গণনা করেই সমাধান করা গেছে কিন্তু আমাদের গণিতের একটা গুরুত্বপূর্ণ অংশ হল জ্যামিতি। আমাদের জ্যামিতি থেকেও সম্ভাবনার প্রশ্ন আসতে পারে। সেক্ষেত্রে হতে পারে সেটা কোন ক্ষেত্রফল বা আয়তন।

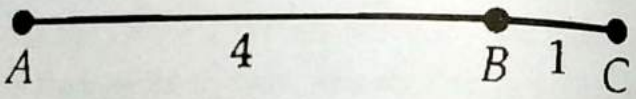
সেক্ষেত্রে আমাদের সম্ভাবনা

$P(A) = \frac{A \text{ এর অনুকূল এলাকা}}{\text{মোট এলাকা}}$

আমাদের এই ব্যাপারটা অনেকের কাছে একটু কঠিন মনে হতে পারে কিন্তু আশা রাখি অধ্যায়ের শেষে আমাদের এই সমস্যা আর থাকবে না।

### দৈর্ঘ্য আর সম্ভাবনা

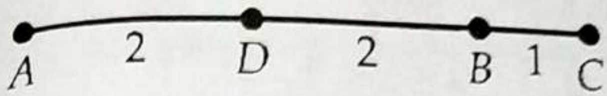
**1. নিচের চিত্রটা দেখ AC এর উপর একটা বিন্দু P নেয়া হল সম্ভাবনা বের কর P, B এর চাইতে A এর কাছে থাকবে তার সম্ভাবনা কত ?**




এই ধরণের প্রশ্ন আসার সাথে সাথে আমাদের ভাবতে হবে আমাদের কোন এলাকাটা সবচাইতে কাছে। যদি P বিন্দু c এর দিকে থাকে তাহলে



সেটা আমারের অনুকূল এলাকা না। এবার AB এর মাঝের এলাকার প্রথম এলাকাটুকু আমাদের জন্য অনুকূল। কতটা অনুকূল তা জানার জন্য AB কে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করি। তাহলে চিত্রটা হবে




এবার দেখা যাচ্ছে আমাদের অনুকূল এলাকা হল AD যার দৈর্ঘ্য 2 আর মোট দৈর্ঘ্য 5 তাহলে

কর P, B এর চাইতে A এর কাছে থাকবে তার সম্ভাবনা $= \frac{2}{5}$

**প্রশ্ন 2 একটা সংখ্যা x কে নেয়া হল যাতে $0 \leq x \leq 3$ সম্ভাবনা বের কর $|x-1| < \frac{1}{2}$**

$|x-1| < \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} < x - 1 < \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$

যার দৈর্ঘ্য 1

$P(|x-1| < \frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \text{ এর দৈর্ঘ্য}}{0 \leq x \leq 3 \text{ এর দৈর্ঘ্য}} = \frac{1}{3}$

প্রশ্ন 3 একটা বাস্তব সংখ্যা x নেয়া হল যাতে $0 < x < 100$। সম্ভাবনা বের কর $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ একটা জোড় সংখ্যা

এটা করা জন্য নিচের ছকটা ব্যবহার করি

| $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ | ব্যবধি | দৈর্ঘ্য |
|---|---|---|
| 0 | $0 \le x < 1$ | 1 |
| 1 | $1 \le x < 4$ | 3 |
| 2 | $4 \le x < 9$ | 5 |
| 3 | $9 \le x < 16$ | 7 |
| 4 | $16 \le x < 25$ | 9 |
| 5 | $25 \le x < 36$ | 11 |
| 6 | $36 \le x < 49$ | 13 |
| 7 | $49 \le x < 64$ | 15 |
| 8 | $64 \le x < 81$ | 17 |
| 9 | $81 \le x < 100$ | 19 |

এখান থেকে বলা যায় আমাদের অনুকূল এলাকা 1+5+9+13+17=45

তাহলে সম্ভাবনা $\frac{45}{100} = \frac{9}{20}$



**অনুশীলনী**

1. একটা লাইন AB এর দৈর্ঘ্য 10, একটা বিন্দু P এর উপর নেয়া হল সম্ভাবনা বের কর যে p বিন্দু টি মাঝের দিকে অবস্থিত (প্রান্ত অপেক্ষা দূরে আছে।)

2. একটা বাস্তব সংখ্যা x যেন $-2 \le x \le 5$

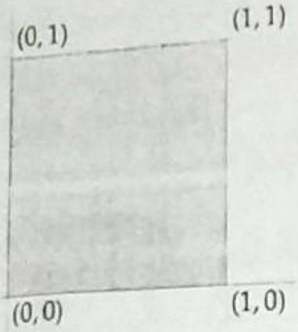
সম্ভাবনা বের কর যে $x^2 < 2$

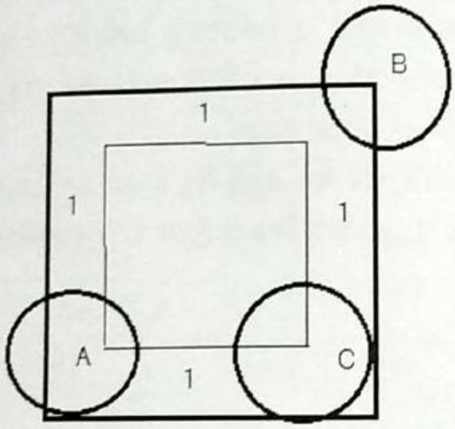
প্রশ্ন 3 একটা বাস্তব সংখ্যা x নেয়া হল যাতে $0 < x < 100$। সম্ভাবনা বের কর $x - \lfloor\sqrt{x}\rfloor \ge \frac{1}{3}$

প্রশ্ন 4 - . একটা লাইন AB এর দৈর্ঘ্য 6, একটা বিন্দু P এর উপর নেয়া হল সম্ভাবনা বের কর যে p বিন্দুটি থেকে C এর দূরত্ব P থেকে D এর দূরত্বের বর্গ অপেক্ষা কম

5. (0,1) ও (3,4) এর মধ্যে একটা বিন্দু P নেয়া হল। সম্ভাবনা বের কর যাতে (0,0),(3,0) ও P নিয়ে যে ত্রিভুজ হয় তার ক্ষেত্রফল 2 এর চাইতে বড়

**একটা $5ft \times 5ft$ আকারের বর্গাকার টেবিলে 1ফুট ব্যাসার্ধের একটা বৃত্তাকার থালা রাখা হবে সম্ভাবনা বের কর যে থালাটার কোন অংশ টেবিলের বাইরে যাবে না।**




চিত্র থেকে যেখানে যাচ্ছে A,B পজিশনে থালাটা টেবিলের বাইরে থাকছে আর C পজিশনে থালাটা টেবিলের মাঝে থাকছে। দেখা যাচ্ছে যদি প্রতি সাইড থেকে 1 ফুট করে দৈর্ঘ্য কেটে নেই তাহলে যে টেবিল থাকে সেখানে যদি বৃত্তের কেন্দ্র হয় তাহলেই কেবল থালাটা টেবিলের উপর



থাকে। তাহলে আমাদের অনুকূল এলাকা $3 \times 3$ এলাকা। আর মোট এলাকা হল $5 \times 5$ তাহলে থালাটা টেবিলে থাকার সম্ভাবনা $\frac{9}{25}$

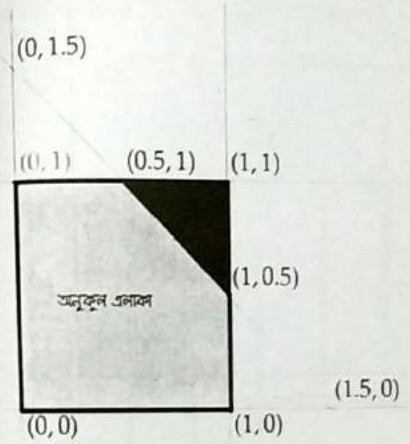
**মনে কর আমি দুইটা বাস্তব সংখ্যা x,y নিলাম যেখানে $0 < x < 1$ এবং $0 < y < 1$ সম্ভাবনা বের কর $x+y < 3/2$**

প্রথমে $0 < x < 1$ এবং $0 < y < 1$ নিয়ে যে ক্ষেত্রটা তৈরি হয় সেটার চিত্র এঁকে ফেলি

এটা আসলে আমাদের সম্পূর্ণ নমুনা ক্ষেত্র প্রকাশ করছে এবার আমাদের সমাধানের জন্য

$x+y= 3/2$ সরলরেখাটাও আঁকি

আমাদের নমুনা ক্ষেত্রের যত এলাকা এই সরলরেখার বামে থাকবে সেই এলাকাই হবে আমাদের অনুকূল এলাকা। ($<$ বলে)

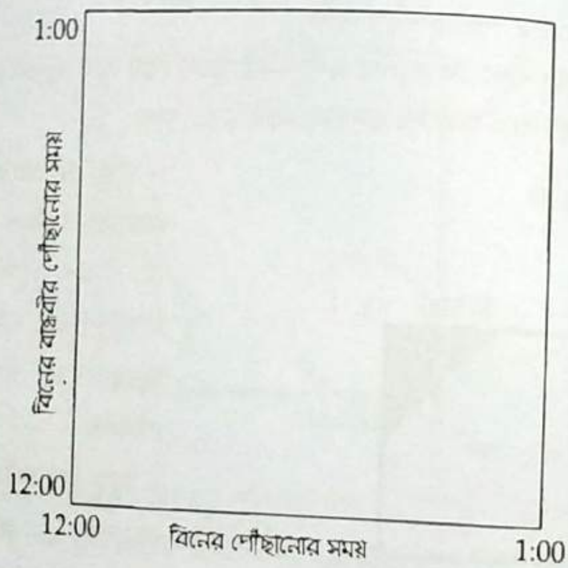



এখানে যে এলাকাটা আমাদের অনুকূলে নয় তা হল কালো অংশটুকু। এর ভূমি .5, উচ্চতা .5 তাহলে ক্ষেত্রফল $\frac{1}{8}$ আর মূল বর্গক্ষেত্রে ক্ষেত্রফল 1 তাহলে অনুকূল এলাকা $1 - \frac{1}{8}$

তাহলে সম্ভাবনা $\frac{7}{8}$

**মি বিন ও তার প্রেমিকা একটা লাঞ্চ করতে যাবে। তারা বলল আমরা দুপর 12টা থেকে একটার মধ্যে যাবে। তাদের যে স্বভাব তাতে তারা গিয়ে 15 মিনিট অপেক্ষা করে চলে আসে তাহলে তাদের একসাথে লাঞ্চ করার সম্ভাবনা কত ? (যদি একজন আসার আগে অন্যজন চলে যায় তাহলে কি আর হবে)**

এবার এই ব্যপারটা আমরা গ্রাফে আঁকব। এদের আসা আর যাওয়ার গ্রাফ। যেখানে x অক্ষ বরাবর বিনের পৌঁছানোর সময় আর y অক্ষ বরাবর তার প্রেমিকার পৌঁছানোর সময়।

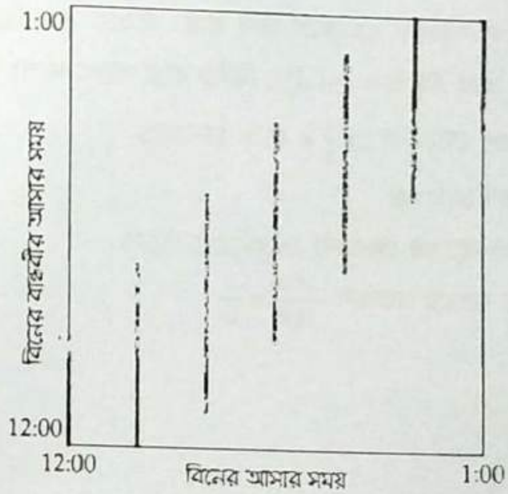




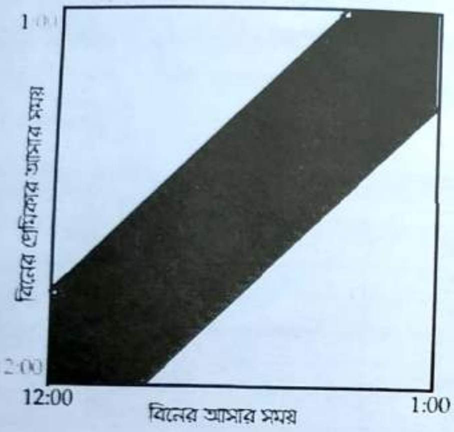

যদি বিন আর তার বান্ধবীর একসাথে খেতে হয় তাহলে বিনের বান্ধবীকে বিন আসার 15 এর বেশী আগে আসলে হবে না আর 15 মিনিট পরে আসলে হবে না। তাহলে যে সময়গুলো বিনের বান্ধবীর আসার জন্য অনুকূল তার ছক দেয়া হল

| বিনের আসার সময় | দেখা হবার জন্য প্রেমিকাকে আসতে হবে |
|---|---|
| 12:00 | 12:00-12:15 |
| 12:10 | 12:00-12:25 |
| 12:20 | 12:05-12:35 |
| 12:30 | 12:15-12:45 |
| 12:40 | 12:25-12:55 |
| 12:50 | 12:35-1:00 |
| 1:00 | 12:45-1:00 |

এবার সেটাকে গ্রাফে দেখানো হলে যা হয়



এবার যদি সম্পূর্ণ সময়কে গ্রাফে বসানো হয় তাহলে হয় তাহলে,




এবার আমাকে সাদা কালো অংশের ক্ষেত্রফল বের করতে হবে । আমরা প্রতিটা সময়কে 60 ভাগে ভাগ করি। তাহলে সাদা ত্রিভুজের ভূমি হল 45 আর উচ্চতাও 45। (15 মিনিট করে কালো অংশ) তাহলে দুইটা ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $2\times\frac{1}{2}\times 45 \times 45=2025$

মোট ক্ষেত্রফল $60\times 60$

তাহলে কালো অংশের ক্ষেত্রফল 3600-2025=1575

তাহলে দেখা হওয়ার সম্ভাবনা $=\frac{1575}{3600}=\frac{7}{16}$

**অনুশীলনী**

1. একটা বর্গক্ষেত্র (0,0),(0,1),(1,1),(1,0) থেকে দুইটা বিন্দু x,y নেয়া হল। সম্ভাবনা বের কর

a) $x+y \leq .5$

b) $x+2y \geq 1$

c) $|x-y|\leq 0.2$

d) $x^2 + y^2 < 1$

e) (x,y) থেকে (0.5,0.5) এর দূরত্ব .5 এর কম

e) (x,y) থেকে (0,1) এর দূরত্ব 1 এর বড়

2. বিনের প্রশ্নটা একটু নতুন ভাবে কর. বিনের বান্ধবী 20 মিনিট অপেক্ষা করে কিন্তু বিন অপেক্ষা করে 15 মিনিট

## এই অধ্যায়ে যা শিখলাম

$$P(A) = \frac{A \text{ এর অনুকূল এলাকা}}{\text{মোট এলাকা}}$$

অধ্যায়ের অনুশীলনী

1. x এমন বাস্তব সংখ্যা নেয়া হল যাতে $-1 \leq x \leq 1$ তাহলে সম্ভাবনা বের কর যাতে $x^2 > \frac{1}{2}$

2. একটা বৃত্তের উপর দুইটা বিন্দু P ও Q নেয়া হল। সম্ভাবনা কত বিন্দু দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রে $60^0$ এর কম কোন তৈরি করবে।

3. (0,0) থেকে (5,10) বিন্দু পর্যন্ত যে রেখাংশ আছে তা থেকে একটা বিন্দু R নেয়া হল সম্ভাবনা বের কর R এর কোটি কমপক্ষে 7

4. একটা সুষম অষ্টভুজ ABCDEFGH এর ভিতরে একটা বিন্দু S সম্ভাবনা বের কর S বিন্দু A বিন্দু থেকে সবচাইতে কাছে

5. $0 \leq x \leq 1$ এবং $0 \leq y \leq 2$ সম্ভাবনা বের কর

a) $x \leq y$

b) $x+1 \leq y$

c) $y^2 + x^2 > 1$

d) $y > 5x$

e) কেন্দ্র থেকে (x,y-1) এর দূরত্ব 1 এর চাইতে কম

6. (0,0),(2,0),(2,2) আর (0,2) বর্গক্ষেত্রের ভেতর একটা বিন্দু P নেয়া হল। সম্ভাবনা কত যে এই বিন্দুই (0,0) বিন্দু অপেক্ষা (3,3) বিন্দুর চাইতে নিকটতম

6. $-3 \leq a \leq 1$ এবং $-2 \leq b \leq 4$ সম্ভাবনা বের কর ab ধনাত্মক।

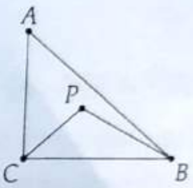
একটু বেশি মাথা খাটাও



1. (0,1) এর মধ্যে তিনটা বিন্দু x,y,z নেয়া হল সম্ভাবনা কত $x \leq y \leq z$ ?

2. একটা লাঠিকে তিনটা খণ্ডে ভাগ করা হল সম্ভাবনা বের কর যে তারা একটা ত্রিভুজ গঠন করতে পারবে

3. পাশের চিত্রটা খেয়াল কর। সম্ভাবনা বের কর যে $\Delta PBC$ এর ক্ষেত্রফল $\Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল এর অর্ধেকের বেশী।




4. ABCD বর্গক্ষেত্রের ভেতর একটা বিন্দু P নেয়া হল সম্ভাবনা বের কর $\Delta ABP > \Delta CDP$

5. একটা ত্রিভুজের উপর তিনটা বিন্দু নেয়া হল সম্ভাবনা বের কর যে ত্রিভুজের প্রতিটা বাহু ব্যাসার্ধের চাইতে ছোট হবে।

6. বৃত্তের উপর তিনটা বিন্দু বিন্দু নেয়া হল সম্ভাবনা বের কর ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ভেতর বৃত্তের কেন্দ্র অবস্থান করে।

## প্রত্যাশিত মান

### ভূমিকা

তোমরা অবশ্যই গড় কি সেটা জানো। যদি মনে না থেক তাহলে মনে করে দেখো 5,8,14 এর গড় $\frac{5+8+14}{3}=9$ তার মানে

$x_1, x_2 \ldots x_n$ এর গড়

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

কিন্তু আমরা যখন ব্যাপারটা সম্ভাবনার মাধ্যমে আনি তখন সেটা হয় প্রত্যাশিত মান ।ব্যাপারটা ব্যাখ্যা করা যাক মনে করা যাক একটা নিখুঁত পয়সা নিক্ষেপ করা হল 1000 বার তাহলে আমাদের প্রত্যাশা হল 500 বার হেড আর 500 বার টেল পড়েছে। ধরে নেই হেড পড়লে আমরা 2 টাকা করে পাই আর টেল পড়লে 1 টাকা করে হারাই তাহলে 1000 বারের পর আমাদের প্রত্যাশা $500\times 2 - 500 \times 1 = 500$ টাকা পাব তাহলে প্রতি বারে আমাদের প্রত্যাশা $\frac{500}{1000}=0.5$ টাকা করে পাব। যেহেতু হেড আর টেল পাবার সম্ভাবনা সমান তাই আমরা গড়ে দেখতে পাই আমাদের প্রাপ্ত মানের গড়ও একই হয় $\frac{2-1}{2}=0.5$ টাকা



### প্রত্যাশিত মানের সংজ্ঞা

মনে করি, আমাদের $x_1, x_2 \ldots x_n$ এতগুলো ঘটনা ঘটতে পারে যাদের সম্ভাবনা যথাক্রমে $p_1, p_2 \ldots p_n$ যেহেতু সকল সম্ভাবনার যোগফল 1

তাই $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$

তাহলে প্রত্যাশিত মান $E = x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$

এবার ব্যপারটা আমাদের উদাহরণের সাথে মিলিয়ে দেখি

আমাদের আগের প্রশ্নে হয় 2টাকা আসবে বা 1টাকা হারাবো দুইটা ঘটনা সম্ভব। যার সম্ভাবনা উভয় ক্ষেত্রেই .5 করে তাই প্রত্যাশিত মান

$E = (2)\frac{1}{2}+(-1)\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

সম্ভাবনার ক্ষেত্রে প্রত্যাশিত মান অনেকটা গাণিতিক গড়ের ন্যায়। কোন ক্লাশের পরীক্ষায় ছাত্রদের গড় মান 87 হলেও সেই ক্লাশে এমনও হতে পারে কেউ 87 পায় নি। তেমনি একটা ছক্কায় প্রত্যাশিত মান 3.5 কিন্তু এই মান ছক্কাতে নেই ...।

### অনুশীলনী

1. একটা আদর্শ কয়েন টস করা হচ্ছে যদি হেড পাই তাহলে 3 টাকা পাই আর যদি টেল হয় তাহলে 2 টাকা হারাই। তাহলে আমাদের টাকা পাবার প্রত্যাশিত মান কত ?

2. যদি একটা ঘটনার সকল মান ধনাত্মক হয় তাহলে প্রত্যাশিত মান কি ঋণাত্মক কি হতে পারে ? কেন পারে কেন পারে না

3. একটা ঘটনার মান 0 বা 1 আর ঘটনা 1 ঘটার সম্ভাবনা p হলে প্রত্যাশিত মান কত ?

## প্রত্যাশিত মানের সমস্যা

**1. একটা ছক্কা মারা হলে তাতে প্রত্যাশিত মান কত ?**

জানি ছক্কার প্রত্যেকটা মান আসার সম্ভাবনা $\frac{1}{6}$ আর মান আসতে পারে 1,2,3,4,5,6 তাহলে প্রত্যাশিত মান

$$\frac{1}{6}(1)+\frac{1}{6}(2)+\frac{1}{6}(3)+\frac{1}{6}(4)+\frac{1}{6}(5)+\frac{1}{6}(6)=3.5$$

যেহেতু প্রত্যেকটা ঘটার সম্ভাবনা সমান তাই এটা আসলে গড় মানের সমান হয় $\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.5$

**2. তুমি এখন একটা পয়সা ব্যবহার করছ যেটাতে হেড আসার সম্ভাবনা $=\frac{3}{4}$ তুমি হেড পেলে 2 টাকা পাও আর টেল পড়লে 1 টাকা হারাও তাহলে এখানে টাকা পাবার প্রত্যাশিত মান কত ?**

সংজ্ঞা অনুসারে প্রত্যাশিত মান $E=\frac{3}{4}(2)+\frac{1}{4}(-1)=1.25$

প্রত্যাশিত মানের সাথে গড়ের ভালো একটা সম্পর্ক আছে, সেটা ভালো করে বুঝা যায় যদি আমরা কয়েনটা 1000 বার টস করি তাহলে আমরা ধরে নিতে পারে 750 বার হেড আসবে আর 250 বার টেল আসবে । তখন গড়ে আমরা টাকা পাবার প্রত্যাশিত মান

$$=\frac{750\times 2+250\times(-1)}{1000}=1.25$$



**প্রশ্ন 3- একটা বাক্সে 2টা লাল,3টা হলুদ,4টা নীল,5টা সবুজ আর 6টা কালো বল আছে । কোন বল তুললে কত টাকা আসবে সেটা দেয়া হল**

| রং | লাল | হলুদ | নীল | সবুজ | কাল |
|---|---|---|---|---|---|
| টাকা | 10 | 5 | 2 | 1 | 0 |

**তাহলে প্রত্যাশিত মান কত ?**

দেখতে পাচ্ছি লাল আসার সম্ভাবনা $\frac{2}{20}$, হলুদ বলে $\frac{3}{20}$ এভাবে তাহলে প্রত্যাশিত মান হল

$$\frac{2}{20}(10)+\frac{3}{20}(5)+\frac{4}{20}(2)+\frac{5}{20}(1)+\frac{6}{20}(0)=2.40$$

আমাদের এই লজিকটা অনেক লটারিতে কাজে লাগানো হয় যদি এই নিয়মের লটারির প্রত্যেকটার দাম ধরা হয় 2.50 টাকা তখন ধরে নেয়া যায় প্রতি লটারিতে সে 10 পয়সা করে লাভ করছে

**প্রশ্ন 4 - একটা ব্যাগে 12টা চকলেটের বক্স আছে যায় অনেকগুলোতে 2টা চকলেট আর বাকি গুলোতে 7 টা করে চকলেট। কোন একটা বক্সে চকলেট থাকার প্রত্যাশিত মান 3.25 কতগুলো বক্সে 2টা চকলেট ?**

ধরি 2টা চকলেটের বক্স x টি। কোন একটা চকলেট বক্স তোলা হলে সেটা 2 চকলেটের বক্স হবার সম্ভাবনা $\frac{x}{12}$ ;7 চকলেটের বক্স হবার সম্ভাবনা $\frac{12-x}{12}$

তাহলে চকলেট থাকার প্রত্যাশিত মান $=\frac{x}{12}\times 2+\frac{12-x}{12}\times 7$

প্রশ্ন অনুসারে $\frac{x}{12}\times 2+\frac{12-x}{12}\times 7=3.25$

তাহলে x=9

তার মানে 2 চকলেটের বক্স 9টা

## অনুশীলনী

1. দুইটা ছক্কা ছুড়ে মারা হল তাদের মানের যোগফলের প্রত্যাশিত মান কত ? তাদের মানের গুণফলের প্রত্যাশিত মান কত ?

2.একটা অদ্ভুত কয়েনে হেড আসার সম্ভাবনা $1/2$, টেল আসার সম্ভাবনা $1/3$ আর খাড়া পড়ার সম্ভাবনা $1/6$। যদি হেড পড়ে তাহলে 1 টাকা পাওয়া যায়, টেল হলে 3টাকা পাওয়া যায় আর আর খাড়া পড়লে 5 টাকা হারাতে হয় আমাদের তাহলে প্রত্যাশিত মান কত ?

3. একটা ছক্কা ছোটা হল যদি তাতে n পড়ে তাহলে আমরা $n^2$ টাকা পাই তাহলে আমাদের টাকা পাবার প্রত্যাশিত মান কত ?

4. আমি 52টা তাস থেকে একটা তাস নিলাম । আমাদের A=1 টাকা আর বাকিগুলো নাম্বারের সমপরিমাণ টাকা পাই আর J,Q,K এর জন্য 10 টাকা করে আর যদি আবার সেটা ♠ হয় তাহলে 2গুন টাকা পাই, ♡ হলে তিনগুণ যেমন (2♠ এর জন্য আমরা 4 টাঁকা পাব)। আমার টাকা পাবার প্রত্যাশিত মান কত ?

5. একটা বাক্সে 5টা সাদা বল আর kটা কালো বল আছে। একটা বল তোলা হল যদি সে সাদা বল তোলে তাহলে 1 টাকা পায় আর যদি কালও তোলে তাহলে 1টাকা হারায়। তা প্রত্যাশিত মান হল 1টাকা হারানো। কালও বল কয়টি।

6. একটা ছক্কায় যেকোন একটা মান পড়ার সম্ভাবনা তার উপরের মানের সমানুপাতিক। মানে 1 পড়ার চাইতে 2 পড়ার সম্ভাবনা দ্বিগুণ। তাহলে একটা ছক্কা ছুড়লে কত মান আশার প্রত্যাশিত মান কত ।



## এই অধ্যায়ে যা শিখলাম

| |
|---|
| আমাদের $x_1, x_2 \dots x_n$ এতগুলো ঘটনা ঘটতে পারে যাদের সম্ভাবনা যথাক্রমে $p_1, p_2 \dots p_n$ যেহেতু সকল সম্ভাবনার যোগফল 1 তাই $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$<br>তাহলে প্রত্যাশিত মান $E = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$ |
| যদি সমসম্ভাব্য ঘটনা হয় তাহলে তার প্রত্যাশিত মান তাদের গড়ের সমান। |

## অনুশীলনী

1. একটা ছক্কা মারা হল যদি জোড় সংখ্যা হয় তাহলে সেই পরিমাণ টাকা পাওয়া যায়। যদি বিজোড় হয় তাহলে কোন টাকা পাওয়া যায় না। টাকা পাবার প্রত্যাশিত মান কত ?

2. আমি চারটা পয়সা নিক্ষেপ করলাম আমার হেড পাওয়ার সংখ্যার প্রত্যাশিত মান কত ?

3. দুইটা আট তলের ছক্কা ছোড়া হল যার উপরে 1-8 পর্যন্ত সংখ্যা লেখা আছে। 1টা এই ধরণের ছক্কার প্রত্যাশিত মান কত ? 2টা এই ধরণের ছক্কার যোগফলের প্রত্যাশিত মানের কত ?

4. একটা বক্সে 1টা সাদা 4টা কালও বল আছে। 2য় বক্সে তিনটা বলের গাতে 1 লেখা, একটা বলের গায়ে 7 লেখা, 3য় বক্সে 5টা বলে 8 লেখা আর একটা বলে 500 লেখা। প্রথমে একজন প্রথম বক্স থেকে একটা বল তোলে যদি তা সাদা হয় তবে 2য় বক্স থেকে বল তোলে আর কালও হলে 3য় বক্স থেকে বল তোলে। তোমার শেষের

বলটাতে যত টাকা লেখা আছে তুমি তত টাকা পাও। তোমার টাকা পাবার প্রত্যাশিত মান কত ?

5. আমার কাছে 5টা বল আছে যার নাম্বার 1 থেকে 5 । আমি দুটা বল নিলাম। বল দুইটার মানের যোগফলের প্রত্যাশিত মান কত ? বল দুইটার মানের গুণফলের প্রত্যাশিত মান কত ?

6. একটা ছক্কায় এমনভাবে বিন্দু দেয়া যাতে দুই পাশের যোগফল 7 হয়। ছক্কা ফেলার পর যে মান আসে তার উপর আর নীচের দুইটা বাদ দিয়ে গুণ করা হল। এই মানের প্রত্যাশিত মান কত ?

**একটু মাথা খাটাও**

1. একটা স্থানে 8টা চকলেট বক্স আছে। যার 6টায় 1টা করে বাকি 2টায় 3 টা করে

a) যদি আমরা একটা বক্স নেই তাতে কয়টা চকলেট থাকা প্রত্যাশা করি

b) আরো একটা 3 টা করে থাকা বক্স যোগ করা হলে এখন চকলেটের প্রত্যাশিত মান কত ?

c) আরো একটা 3 টা করে থাকা বক্স যোগ করা হলে এখন চকলেটের প্রত্যাশিত মান কত ?

d) কতগুলো বক্স যোগ করলে প্রত্যাশিত মান 2 হবে

e) কতগুলো বক্স যোগ করলে প্রত্যাশিত মান 2 হবে



2. দুইটা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা x,y যেখানে $1 \le x \le 5, 1 \le y \le 5$ তাহলে ত্রিভুজ (0,0),(x,0),(0,y) এর ক্ষেত্রফল এর প্রত্যাশিত মান কত ?

3. একটা বাক্সে 2টা সাদা আর 3টা কাল বল আছে, তুমি বল তোলার পর আর ফেরত দেবে না। তুমি যদি সাদা বল তোল তাহলে 1টাকা পাবে আর কালো তুললে তুমি 1টাকা হারাবে । এতে তোমার যেহেতু লস বেশি তাই তুমি যে কোন সময় খেলাটা বন্ধ করতে পারবে। সর্বোচ্চ প্রত্যাশিত মান বের কর যাতে তুমি সর্বোচ্চ লাভ করতে পার।

4. তুমি টস করতেই থাকবে যতক্ষণ না হেড আসে। তোমার কয়েনে হেড আশার সম্ভাবনা p হলে। টস করার প্রত্যাশিত মান কত ?

5. আমার 100,000 টাকার বক্স একটা পাহাড়ে পড়ে গেছে। তুমি পাহাড়ি লোক লাগাতে পার যাতে তারা যাতে তারা বক্সটা খুঁজে পায়। প্রতিটা লোক লাগানোর জন্য 1000 টাকা করে খরচ হয়। আর একজন লোক লাগালে আমি খুঁজে পাবার সম্ভাবনা 90%। আমার কতজন লোক লাগানো উচিৎ।

6. খোকন 500 টাকা আর অসীম 1000 টাকা নিয়ে খেলতে নামে একবার একটা কয়েন টস করা হয় যদি হেড হয় তাহলে খোকন অসীমকে 1টাকা দেয় আর টেল পরলে অসীম খোকনকে 1টাকা দেয়। যখন একজনের সব টাকা শেষ হলে খেলা শেষ। অসীমের জয়ের সম্ভাবনা কত ?

## শর্তাধীন সম্ভাবনা

এতক্ষণ আমরা অনেক ধরণের সম্ভাবনা নিয়ে জানলাম। এবার আমরা জানব শর্তাধীন সম্ভাবনা।

**সমস্যা -**

**দুইটা নিখুঁত ছক্কা ছুড়ে মারা হল যদি তার অন্তত একটা 3 দেখায় তাহলে সম্ভাবনা বের কর যে ছক্কার মান দুইটার যোগফল 7।**

> ভুল সমাধান – চার পড়েছে আর 7 যোগফল হবে এমন কেস আছে 2টা (3,4) ও (4,3) । আর আমাদের মোট নমুনাক্ষেত্র 36 টা তাহলে সম্ভাবনা $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

এটা ভুল কেননা আমাদের দেয়া তথ্য অনুসারে নমুনা ক্ষেত্র 36 টা না

মোট নমুনা ক্ষেত্র

= 1ম ছক্কায় 3 পড়ল আর 2য় ছক্কায় যা ইচ্ছা তাই + 2য় ছক্কায় 3 পড়ল আর 1ম ছক্কায় যা ইচ্ছা তাই – উভয় ছক্কায় 3 পড়ল

=6+6-1=11

তাহলে আমাদের নমুনা ক্ষেত্র 11 আর অনুকূল ঘটনা 2 টা তাহলে সম্ভাবনা $\frac{2}{11}$



> এটা মূলত pie (principle of inclusion exclusion) নিয়মে করা হয়েছে।

**তিনটা পয়সা টস করা হল তার একটাতে অন্তত হেড দেখালো তাহলে তিনটা পয়সাতেই হেড দেখানোর সম্ভাবনা কত ?**

> ভুল সমাধান – একটা পয়সা তো হেড দেখিয়েছে তাহলে বাকি দুইটা হেড দেখালেই হবে। তাহলে বাকি দুইটার হেড হবার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

উপরের প্রশ্নে ভুল হল কারণ উপরের কথা সঠিক হবে যদি বলা হয় কোণ একটা নির্দিষ্ট করে বলা হয় হেড পড়েছে। যেমন যদি বলা হত 2য় কয়েনে হেড পড়েছে তখন এই উত্তর টা সঠিক ছিল ।

এখানে তিনটাতেই হেড আসতে পারে একভাবে, আর অন্তত একটা হেড হল সেই অবস্থাটা বাদ যাবে যেখানে সবগুলো টেল পড়েছে। তার মানে 7ভাবে অন্তত একটা হেড আসতে পারে।

তাহলে আমাদের সম্ভাবনা $\frac{1}{7}$

## অনুশীলনী

1. দুইটা ছক্কা মারা হল, এর কোনটাতেই 1 দেখায়নি তাহলে তাদের উপরের পিঠের বিন্দু দুইটির যোগফল 7 দেখানোর সম্ভাবনা কত ?

2. একটা নিখুঁত ছক্কাকে তিনবার ছোড়া হল দেয়া আছে দুইটা ছক্কার বিন্দু গুলোর যোগফল অন্যটির সমান। তাহলে সম্ভাবনা কত যে অন্তত একটাতে 2 দেখাবে।

3. দুইটা মুদ্রা একসাথে নিক্ষেপ করতে থাকা হল যতক্ষণ না অন্তত একটাতে হেড আসে। সম্ভাবনা কত যখন একটাতে হেড আসল তখন অন্যটাতেও হেড আসবে।

4. 52টা তাস থেকে 4টা তাস নেয়া হল যার অন্তত 3টা ♡ সম্ভাবনা কত বাকিটিও ♡

5. {1,2,3, ... 100} থেকে দুইটা x,y সংখ্যা নেয়া হল, দেয়া আছে x+y জোড় সংখ্যা সম্ভাবনা বের কর যে তাদের একক স্থানীয় অংক দুইটির যোগফল 10 এর চাইতে বেশী।



## কিছু নতুন করে শিখি

**প্রথম বক্সে 2টা লাল বল আর 3টা নীল বল আছে আর 2য় বক্সে 8টা লাল বল আর 2টা নীল বল আছে। আমরা যে কোন একটা বক্স নিলাম আর সেখান থেকে একটা বল নিলাম দেখলাম বলটা নীল তাহলে আমরা প্রথম বক্স নির্বাচন করেছি তার সম্ভাবনা কত ?**

| ভুল সমাধান - আমাদের 1ম বক্সে 3টা আর 2য় বক্সে 2টা নীল বল আছে তাই আমরা প্রথম বক্স থেকে নিয়েছি তার সম্ভাবনা $\frac{3}{5}$ |
|---|

আগের সমাধান হবে না কারণ উভয় ব্যাগে মোট বলের সংখ্যা সমান না, তাই 1ম ব্যাগে 2টা বল থাকা আর 2য় ব্যাগে 2টা বল থাকা এর মাঝে অনেক তফাত আছে। যেহেতু 1ম ব্যাগের বেশীর ভাগ বল (60%) বল নীল তাই এই ব্যগটা নেবার চান্স বেশী আর 2য় ব্যাগে মাত্র 20% বল নীল তাই এটা নেবার চান্স কম। প্রথম বক্সে যেহেতু 5 টা বল আর বক্স 2টা তাই প্রথম বক্সের প্রতিটা বল নেবার সম্ভাবনা $(\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}) = 1/10$ আবার 2য় বক্সে যেহেতু 10 টা বল আর বক্স 2টা তাই 2য় বক্সের প্রতিটা বল নেবার সম্ভাবনা $(\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}) = 1/20$, খেয়াল করে দেখা যায় আমাদের 5টা বলের আর 10টা মোট সম্ভাবনা 1 ঠিকই আছে।

$$5\times\frac{1}{10}+10\times\frac{1}{20}=1$$

এবার আমাদের সম্ভাবনার প্রশ্নে আসা যাক একটা নীল বল নেবার সম্ভাবনা

p(প্রথম বক্স)× P(প্রথম বক্স থেকে নীল বল)+ p(প্রথম বক্স)× P(প্রথম বক্স থেকে নীল বল) $=\frac{1}{2}.\frac{3}{5}+\frac{1}{2}.\frac{2}{10}=\frac{2}{5}$

প্রথম বক্স থেকে নীল বল নেয়ার সম্ভাবনা $=\frac{1}{2}.\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$

তাহলে P(নীল বল হলে প্রথম বাক্স নির্বাচিত হবার সম্ভাবনা)

$$= \frac{\text{প্রথম বক্স থেকে নীল বল নেয়ার সম্ভাবনা}}{\text{নীল বল হবার সম্ভাবনা}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}}.$$

সাধারণ ভাবে আমরা বলতে পারি

$$P(\text{শর্তাধীন ঘটনা}) = \frac{P(\text{শর্ত আর ঘটনা উভয়ে ঘটেছে})}{P(\text{শর্ত})}$$

এই ঘটনা কে আমরা প্রতীকের মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারি, মনে করি দুইটা ঘটনা A আর B. আমরা $P(A|B)$ কে বলে থাকি যদি B ঘটে থাকে তাহলে A ঘটার সম্ভাবনা, আর $p(A\cap B)$ দিয়ে A আর B উভয় ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা নির্দেশ করে।

তাহলে আমরা পাই $P(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$

তুমি অবশ্যই ঘটনাটা মুখস্থ করবে না, ব্যাপারটা বুঝবে, শিখবে । তোমাকে সূত্র মুখস্থ রাখার দরকার নেই যদি তুমি ব্যাপারটা বুঝতে শেখো তাহলে সূত্র ব্যবহার না করেই সমস্যা সমাধান করতে পারবে।

এবার সমস্যাটা অন্যভাবে ভাবি

দুইটা ঘটনা A আর B. আমরা $P(A|B)$ কে বলে থাকি যদি B ঘটে থাকে তাহলে A ঘটার সম্ভাবনা, আর $p(A\cap B)$ দিয়ে A আর B উভয় ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা নির্দেশ করে।

তাহলে আমরা পাই $P(A|B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$



এবার আমরা $P(A|B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$ সূত্রটার দিকে একটু বিশেষ ভাবে নজর দেব।

মনে করি একটা ঘটনা A,B,C তিন ভাবে ঘটতে পারে, এর ফলে x,y,z তিনটা অবস্থার তৈরি হতে পারে। উদাহরণ হিসবে আগের (উদাহরণে লক্ষ্য কর আমাদের A,B হল 1ম বাক্স নির্বাচন করব না 2য় বাক্স নির্বাচন করব সেটা আর x,y হল লাল বল তুলব না নীল বল তুলব।)

এবার যদি আমাদের প্রশ্ন করা হয় x ঘটলো তাহলে তা A ঘটনা ঘটার কারণে হয়েছে তার সম্ভাবনা কত ?

মানে $P(A|x)$ বের করতে বলা হয়েছে

এবার আমাদের সূত্রটা লিখে ফেলি $P(A|x) = \frac{p(A\cap x)}{p(x)}$

এবার খেয়াল করি $p(A \cap x)$এর মানে কি ?

এর মানে প্রথমে A ঘটেছে এরপর একইসাথে x ঘটনা ঘটেছে। (যেহেতু A,B,C ঘটার পর x,y,z ঘটেছে)

তার মানে সেই $p(A \cap x)$ ঘটার সম্ভাবনা = A ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা × P(A ঘটনা ঘটার পর x ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা) যাকে বলা যায় $P(A).P(x|A)$

মানে $p(A \cap x) = P(A).P(x|A)$

এবার $p(x)$ এর দিকে নজর দেয়া যাক, x ঘটনা যতভাবে ঘটতে পারে তার সম্ভাবনাই হল এখানে আসবে x ঘটতে পারে A,B,C ঘটলে তাহলে

মোট সম্ভাবনা $P(A).P(x|A)+ P(B).P(x|B)+ P(C).P(x|C)$ {A ঘটলে x ঘটার সম্ভাবনা + B ঘটলে x ঘটার সম্ভাবনা + C ঘটলে x ঘটার সম্ভাবনা + }

$$P(x)= P(A).P(x|A)+ P(B).P(x|B)+ P(C).P(x|C)$$

তাহলে $P(A|x) = \frac{P(A).P(x|A)}{P(A).P(x|A)+ P(B).P(x|B)+ P(C).P(x|C)}$

উপরের সূত্রটা আসলে বায়োসের উপপাদ্যের একটা রূপ তিনটা ঘটনার জন্য বায়োসের উপপাদ্য কিন্তু যদি এখানে 3টা ঘটনা না হয়ে N সংখ্যক ঘটনার জন্য হয় তাহলে

$$P(A|x) = \frac{P(A).P(x|A)}{P(A).P(x|A)+ P(B).P(x|B)+\cdots+ P(N).P(x|N)}$$

**এবার বায়োসের উপপাদ্যের একটা উদাহরণ করা যাক**

**উদাহরণ – একটা নৈর্ব্যক্তিক পরীক্ষায় বহু নির্বাচনী প্রশ্নে m টা অপশন আছে। একটা ছেলে প্রশ্নের উত্তর জানে তার সম্ভাবনা P।একটা অপশনের উত্তর সঠিক। পরীক্ষায় দেখা গেল একটা অপশনের উত্তর সে সঠিক দিয়েছে, সম্ভাবনা কত যে সে উত্তর জেনে দিয়েছে ?**

আমাদের প্রশ্ন অনুসারে

$$p(\text{ছেলে উত্তর জানত}|\text{ প্রশ্নের উত্তর সঠিক})$$

$$= \frac{p(\text{ছেলে উত্তর জানত এবং প্রশ্নের উত্তর সঠিক})}{P(\text{প্রশ্নের উত্তর সঠিক})}$$

$$= \frac{p(\text{ছেলে উত্তর জানত})\, P(\text{প্রশ্নের উত্তর সঠিক}|\text{ছেলে উত্তর জানত})}{p(\text{ছেলে উত্তর জানত})P(\text{প্রশ্নের উত্তর সঠিক}|\text{ছেলে উত্তর জানত}) + p(\text{ছেলে উত্তর জানত না})\, P(\text{প্রশ্নের উত্তর সঠিক}|\text{ছেলে উত্তর জানত না})}$$

P(প্রশ্নের উত্তর সঠিক|ছেলে উত্তর জানত) এর মান কত হবে যেহেতু কেউ একটা প্রশ্নের উত্তর জানলে সে অবশ্যই সঠিক উত্তর দেবে তাই সম্ভাবনা =1



p(ছেলে উত্তর জানত)=p

p(ছেলে উত্তর জানত না)=1-p

এবার না জানলে ছেলেটা অনুমানের উপর m থেকে একটা উত্তর দেবে। তাহলে তার সঠিক হবার সম্ভাবনা $\frac{1}{m}$

মান বসিয়ে পাই

$$p(\text{ছেলে উত্তর জানত}|\text{ প্রশ্নের উত্তর সঠিক})=\frac{p}{p+\frac{1-p}{m}}=\frac{mp}{1+(m-1)p}$$

অনুশীলনী

1. একটা বক্সে 9টা লাল বল আর 1টা সাদা বল আছে, আর 2য় বক্সে দুইটা সাদা বল আছে। আমরা একটা বাক্স সিলেক্ট করলাম এরপর সেখান থেকে একটা বল নিলাম, সেটা সাদা হলে আমরা প্রথম বাক্স থেকে বলটা তুললাম তার সম্ভাবনা কত ?

2. একটা ঘটনা A ঘটার সম্ভাবনা 3/4 আর B ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা 2/3

a) $P(A\cap B)$ এর সর্বোচ্চ মান কত সর্বনিম্ন মান কত ?

b) $P(A|B)$, $P(B|A)$ এর সর্বোচ্চ মান কত সর্বনিম্ন মান কত ?

3. $P(A|B) = P(B|A)$ সত্য কি ? হলে কেন ? না হলেও কেন না।

4. 1ম বক্সে 4টা সাদা বল আর 2টা লাল বল, 2য় বক্সে 3টা লাল আর 3টা কালও বল আছে। আমরা প্রথমে একটা বক্স নিলাম সেখান থেকে একটা বল নিলাম সেটা আর বক্সে ফেরত দিলাম না এরপর আবার একই কাজ করলাম। যদি 2য় বলটা কালও হয় তাহলে প্রথম বলটা লাল হবার সম্ভাবনা কত ?

একটু কঠিন সমস্যা

1. একটা স্থানে m জন পুরুষ আর n জন নারী আছেন। আমরা দুইজনকে একটা কাজে মিটিং এ পাঠাবো। বলা হয়েছে আমাদের মিটিং এ কমপক্ষে একজন নারী পাঠাতে হবে। সম্ভাবনা কত যে উভয়ই নারী সেখানে নির্বাচিত হয়েছে ।

| |
|---|
| ভুল সমাধান - যে হেতু একজন নারী অবশ্যই যাবে তাহলে বাকি থাকল n-1জন নারী আর মোট লোক m+n-1 তাই উভয়েই নারী হবার সম্ভাবনা $\frac{n-1}{m+n-1}$ |

আমরা এখানে জানি প্রথমে কাকে চয়েস করা হয়েছে আমরা কেবল জানি যেকোন একজনকে পাঠানো হয়েছে।

এবার যেহেতু একজন অবশ্যই নারী পাঠানো হয়েছে তাই আমরা মোট যতভাবে দুইজনকে নেয়া যায় সেখান থেকে দুইজন পুরুষকে যতভাবে নেয়া যায় সেটা বাদ দিলেই অন্তত একজন নারীকে নেয়া হবে আর সেটাই আমাদের সম্পূর্ণ নমুনা ক্ষেত্র। তাহলে নমুনা ক্ষেত্র

$\binom{m+n}{2} - \binom{m}{2}$

আর দুইজন নারীকে নেয়া যাবে $\binom{n}{2}$

তাহলে সম্ভাবনা $\frac{\binom{n}{2}}{\binom{m+n}{2}-\binom{m}{2}}$

যদি এই সমীকরণকে একটু সাজিয়ে লিখি তাহলে আমরা পাব এই সম্ভাবনা $=\frac{n-1}{n+2m-1}$

এতে দেখা যাচ্ছে যদি আমাদের নারী সংখ্যা 1 জন হয় তাহলে সম্ভাবনা শূন্য হয়। যেটা আমাদের উত্তর সঠিক হবার নিশ্চয়তা দিচ্ছে।



একটা মিথ্যা ধরার যন্ত্র বের করা হল । সেটা 90% সঠিক ফলাফল দেয়। মনে কর দেশে মাত্র 5% মিথ্যাবাদী আছে। এবার যন্ত্রটা একজনকে যদি মিথ্যাবাদী বলে তাহলে সে আসলেই মিথ্যাবাদী হবার সম্ভাবনা কত ?

P(শর্তাধীন ঘটনা)=$\frac{\text{P(শর্ত আর ঘটনা উভয়ে ঘটেছে)}}{\text{P(শর্ত)}}$

একজন লোক মিথ্যাবাদী আর যন্ত্র তাকে মিথ্যাবাদী বলার সম্ভাবনা $0.05\times 0.90=0.045$

এবার যন্ত্রটা মিথ্যাবাদী বলতে পারে 2 ক্ষেত্রে 1 লোকটা আসলেই মিথ্যাবাদী এবং যন্ত্রটাও মিথ্যাবাদী বল, লোকটা সত্যবাদী আর কিন্তু যন্ত্র বল মিথ্যাবাদী তাহলে মোট মিথ্যাবাদী বলার সম্ভাবনা

$=0.05\times 0.90 + .95 \times .10=0.140$ (90% সঠিক তাহলে 10% ভুল উত্তর দেবে)

তাহলে

P(মিথ্যাবাদী | যন্ত্র বলেছে মিথ্যাবাদী ) =

$\frac{\text{P(লোক মিথ্যাবাদী এবং যন্ত্র তাকে মিথ্যাবাদী বলার )}}{\text{P(যন্ত্রতাকে মিথ্যাবাদী বলার )}} = \frac{.045}{.140}$

**একটা খেলা খেলা হল একজন একটা খেলা দেখাল তিনটা দরজার দুইটাতে দুইটা ছাগল আর একটাতে একটা গাড়ি দেখালো। তুমি প্রথমে একটা দরজা চয়েস করলে এরপর আরেকজন এসে দেখলো বাকি দুইটা দরজার একটাতে ছাগল আছে তাহলে এবার তোমাকে বলা হল তুমি যে বাক্সটা চয়েস করলে সেটাই নেবে না পরিবর্তন করবে ?**

প্রথমেই যে কোন দরজাতে গাড়ি থাকার সম্ভাবনা সমান । মানে 1/3 এরপর যখন তুমি দরজাটা চয়েস করে নিলে তখন সেটার পেছনে গাড়ি থাকার সম্ভাবনা 1/3। এবার বাকি দুইটাতে গাড়ি থাকার সম্ভাবনা 2/3। এবার যখন তোমাকে দেখালো বাকি দুইটার একটাতে ছাগল তাহলে বাকি যে একটা আছে তাতেই সম্পূর্ণ 2/3 সম্ভাবনা যে গাড়ি থাকবে । তার মানে আমাদের চয়েস পরিবর্তন করলে লাভের সম্ভাবনা বেশী ।

### অনুশীলনী

1. দুইটা বাস্তব সংখ্যা r,s নেয়া হল যার মান 0 থেকে 1 এর মধ্যে, আমরা জানি যে $|r-s| < 1/4$ সম্ভাবনা বের কর $r<1/2<s$

2. একটা খেলা খেলা হল একজন একটা খেলা দেখাল চারটা দরজার দুইটাতে তিনটা ছাগল আর একটাতে একটা গাড়ি দেখালো। তুমি প্রথমে একটা দরজা চয়েস করলে এরপর আরেকজন এসে দেখলো বাকি তিনটা দরজার একটাতে ছাগল আছে তুমি চয়েস পরিবর্তন করলে। এবার আবার বাকি তিনটার মধ্যে একটা চয়েস করলে আবার বাকি দুইটা দরজার একটাতে ছাগল আছে । এবার কি করলে তুমি গাড়ি পাবার সর্বোচ্চ সম্ভাবনায় থাকবে?



### অধ্যায়ের অনুশীলনী

1. প্রথম বক্সে 3টা লাল বল আর 2টা নীল বল আছে আর 2য় বক্সে 4টা লাল বল আর 3টা নীল বল আছে । আমরা প্রথম বক্স থেকে একটা বল নিয়ে 2য় বক্সে রাখলাম, এরপর 2য় বক্স থেকে একটা বল তুললাম সেটা যদি লাল বল হয় তাহলে প্রথম বলটা লাল হবার সম্ভাবনা কত ?

2. একটা বাক্সে 999 টা নিখুঁত কয়েন আছে আর একটা দুই প্রান্তেই হেড । আমরা সেই বাক্স থেকে 1 টা কয়েন নিলাম তাতে 9 বার টস করলাম প্রতিবার হেড আসলে সেটা ত্রুটিপূর্ণ কয়েন হবার সম্ভাবনা কত?

3. একটা বৃত্তাকার টেবিলের ব্যাসার্ধ 3 সেমি একটা কয়েনের ব্যাসার্ধ 1 সেমি সেটা টেবিলে রাখা হল । যদি কয়েনের কোণ অংশই টেবিলের বাইরে না থাকে তাহলে সেটা টেবিলের কেন্দ্রে আছে তার সম্ভাবনা কত?

4. একটা কয়েনকে 20বার টস করা হল দেয়া হল ঠিক 14 বার হেড আসল সম্ভাবনা বের কর পরপর দুইটা টেল আসেনি।

### সহায়ক গ্রন্থ ও ওয়েবসাইট


1. www.artofproblemsolving.com
2. উচ্চমাধ্যমিক গণিত বই
3. art and craft of problem solving
4. introduction to counting & probability by David Patrick

দিপু সরকার ১৯৯২ সালের ১৭ মার্চ জন্ম গ্রহণ করেন। তার পিতার নাম এইচ. কে. সরকার, মাতা মৃদুলা রানী সরকার, ছোট ভাই সবুজ সরকার। তিনি ২০০৭ সালে বরিশাল জিলা স্কুল থেকে এসএসসি ও ২০০৯ সালে অমৃতলাল দে কলেজ থেকে এইচ এসসি পাস করেন । তিনি বাংলাদেশ প্রকৌশল বিশ্ববিদ্যালয় এ CSE (Computer Science and Engineering) বিভাগ থেকে স্নাতক সম্পন্ন করেন।

আলোকচিত্র : মাহামুদুল হাসান চিশতি