ALLA SCOPERTA DELLA GEOMETRIA

Cerioni Valentino
Rinaldi Michele
Sabbatini Riccardo
Traino Sabrina

Classe 2BM
Anno Scolastico 2021/22
Febbraio 2022

IIS MARCONI PIERALISI
Istituto Istruzione Superiore Jesi
INFORMATICA
Informatica
e Telecomunicazioni

ALLA SCOPERTA DELLA GEOMETRIA

La Geometria Euclidea
- La geometria Euclidea
- Euclide
- Enti primitivi
- Figure e proprietà
- Figure concave e convesse
- Rette parallele e perpendicolari
- Asse di un segmento

Triangoli e congruenza
- Definizione di triangolo
- Tipi di triangolo
- Calcolo perimetro e area
- Angoli interni ed esterni
- Criterio di congruenza
- Elementi caratteristici

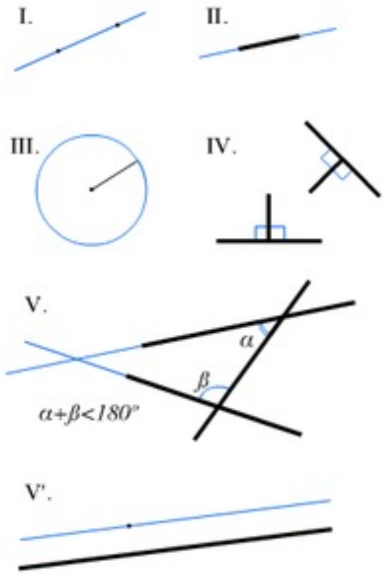
Quadrilateri
- Quadrilateri
- Trapezi
- Parallelogrammi
- Rettangoli
- Rombi
- Quadrati

Circonferenza
- Definizione di circonferenza e di cerchio
- Calcolo lunghezza della circonferenza e area del cerchio
- Poligoni iscritti e circoscritti
- Angoli al centro, angoli alla circonferenza e proprietà

Equivalenza
- Definizione concetto di equivalenza
- Teorema di Pitagora
- Primo teorema di Euclide
- Secondo teorema di Euclide

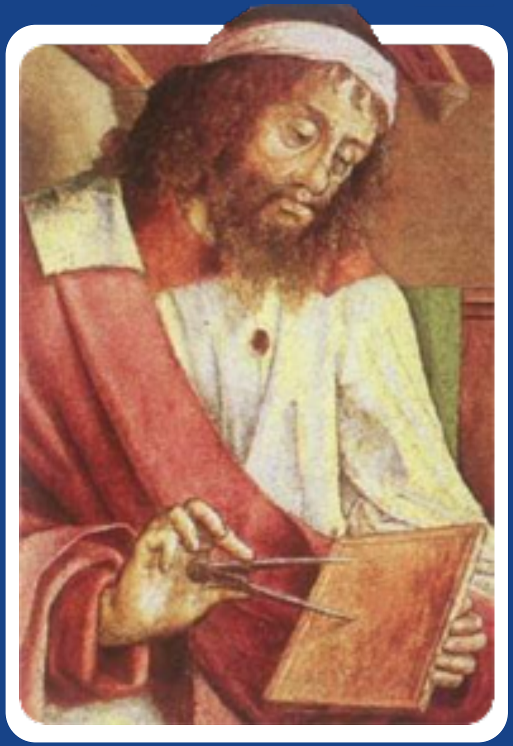
LE NOSTRE FONTI

La geometria Euclidea



Definizione

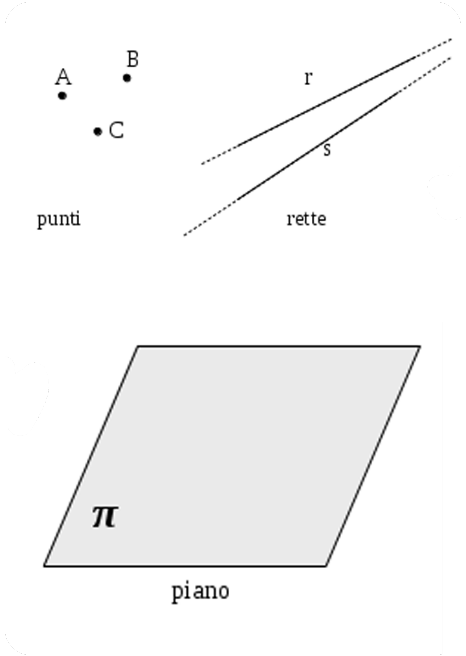
E’ un sistema matematico attribuito a Euclide; la sua geometria consiste nell'assunzione di **cinque assiomi** e nella derivazione di teoremi.
Questa organizzazione permise l'introduzione della retta, del piano, della lunghezza e area.
Gli Elementi di Euclide incominciano con un'analisi della geometria piana, per poi passare alla geometria solida in tre dimensioni.



Euclide

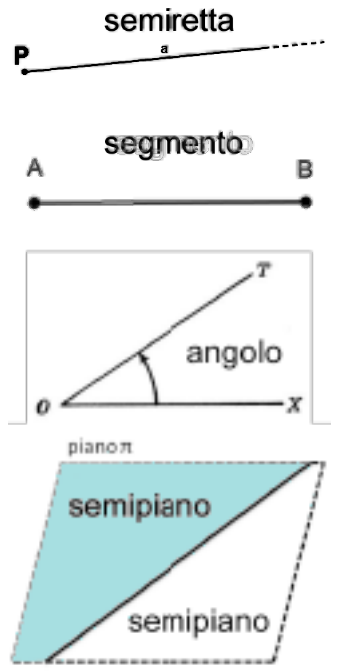
Euclide (323-283 a.C.) è stato un **matematico e filosofo** greco antico. Si occupò di vari ambiti: matematica, meccanica, musica e astronomia.
Il suo lavoro più noto è «**Gli Elementi**», che influenzò opere di tutta la storia della matematica.
Insegnò matematica ad Alessandria in una scuola istituita dal faraone Tolomeo I.

Enti primitivi



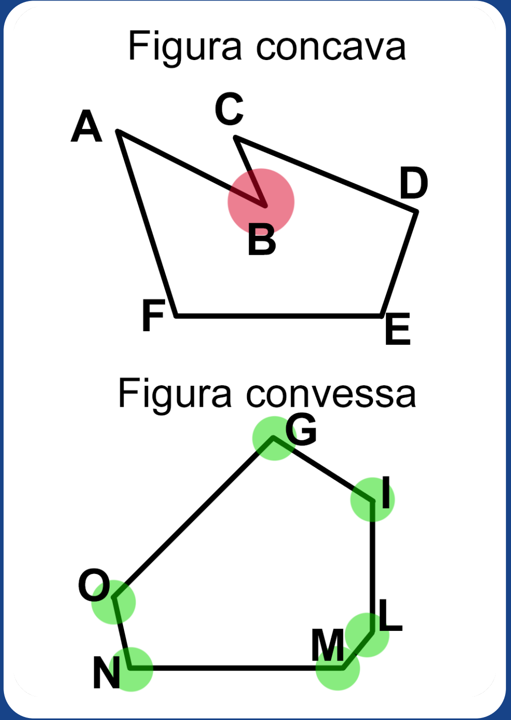
- **Punto**: corrisponde ad una posizione nello spazio (0 dimensioni). Viene indicato con una lettera maiuscola (A,B...).
- **Retta**: corrisponde ad un insieme infinito di punti allineati nello spazio (1 dimensione). Viene indicato con una lettera minuscola (a,b...).
- **Piano**: corrisponde ad una superficie piana illimitata e priva di spessore (2 dimensioni). Viene indicato con una lettera greca (α, β...).

Figure e proprietà



- **Semiretta**: ciascuna delle due parti in cui è stata divisa una retta da uno dei suoi punti, tale punto è chiamato origine. Ha lunghezza infinita.
- **Segmento**: una parte di retta delimitata da due dei suoi punti non coincidenti, chiamati estremi.
- **Angolo**: la porzione di piano compresa tra due semirette aventi l'origine in comune.
- **Semipiano**: ciascuna delle due parti in cui è diviso un piano da una retta chiamata origine dei semipiani.

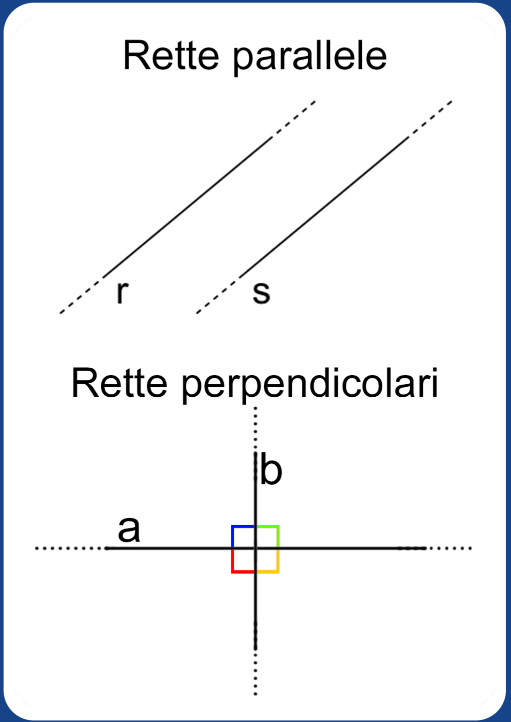
Figure concave e convesse



Una figura geometrica viene detta:

- **Concava**: se contiene il prolungamento di uno dei suoi lati nell'area e almeno uno dei suoi angoli interni è maggiore a 180°.
- **Convessa**: se prolungando tutti i lati, nessuno di essi entra all'interno della figura e tutti i suoi angoli interni sono inferiori a 180°.

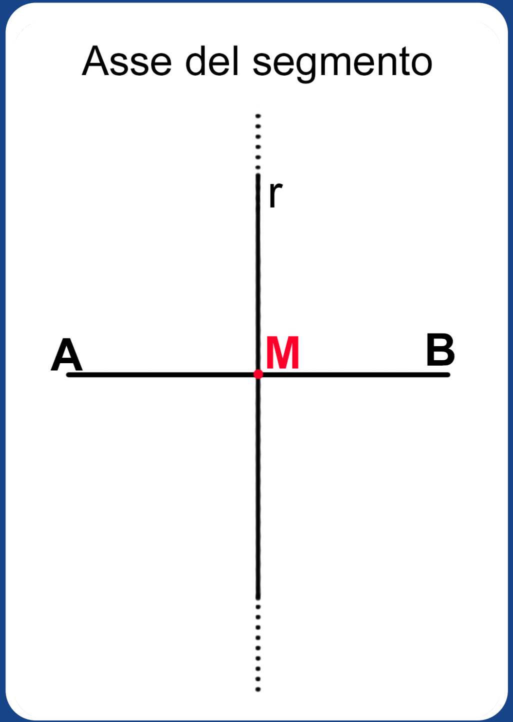
Rette parallele e perpendicolari



Due linee rette vengono dette:

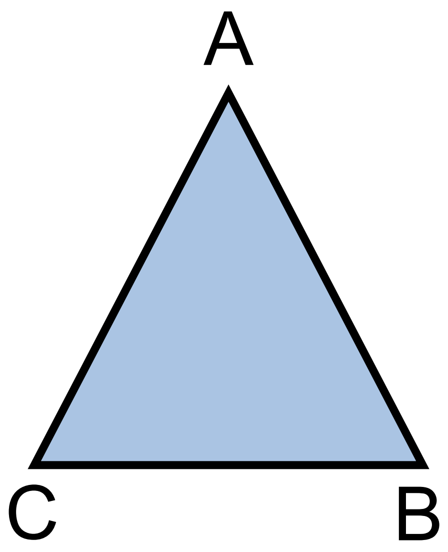
- **Parallele**: se appartengono allo stesso piano e non hanno alcun punto in comune.
- **Perpendicolari**: se sono incidenti, appartengono allo stesso piano e formano 4 angoli retti

Asse del segmento



L'**asse di un segmento** in geometria euclidea è definito come la retta perpendicolare al segmento e passante per il suo punto medio.
È anche un'**asse di simmetria** per il segmento stesso.

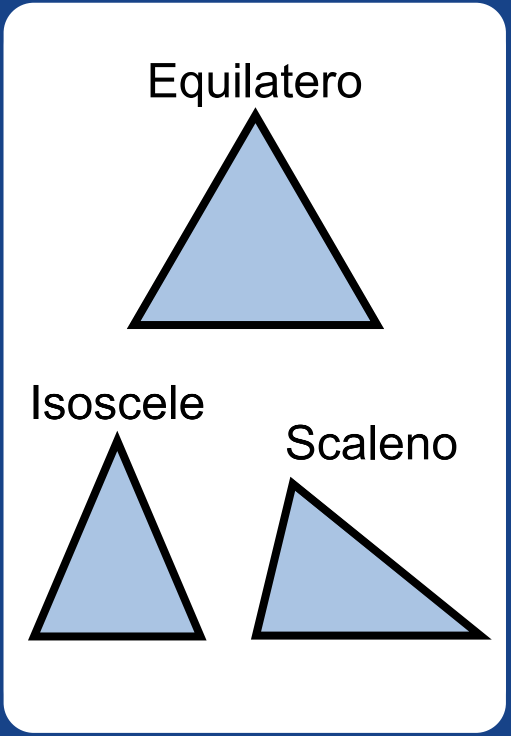
Triangoli e congruenza



Definizione di triangolo

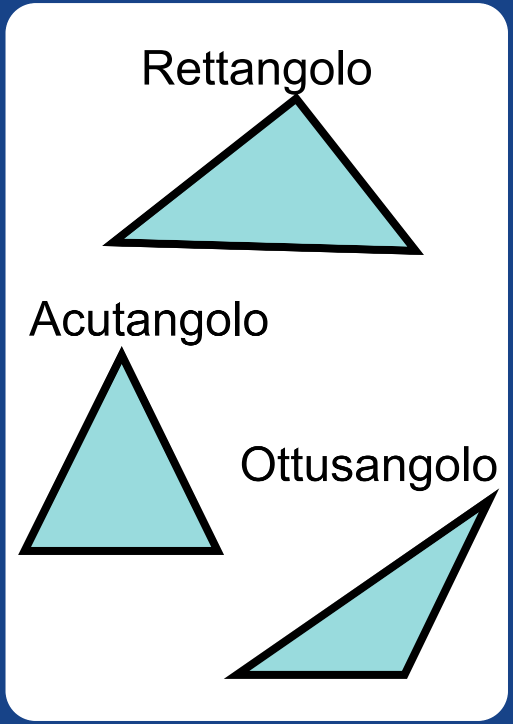
Un **triangolo** è un poligono formato da tre lati che congiungono, a due a due, tre punti non allineati chiamati **vertici**.
Ciascuno dei vertici ha una lettera e per indicarlo scriviamo ABC.

Tipi di triangoli in base ai lati



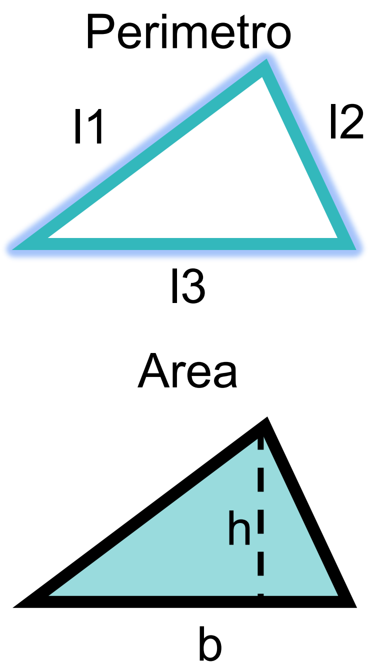
- **Equilatero**: un triangolo equilatero è un triangolo avente i suoi tre lati congruenti tra di loro.
- **Isoscele**: un triangolo isoscele è un triangolo che possiede due lati congruenti tra di loro.
- **Scaleno**: Un triangolo scaleno è un triangolo avente i lati non congruenti e gli angoli di ampiezza diversa.

Tipi di triangoli in base agli angoli



- **Rettangolo**: un triangolo rettangolo è un triangolo che possiede un angolo retto, cioè di 90°.
- **Acutangolo**: un triangolo acutangolo è un triangolo che ha tutti gli angoli acuti, cioè di ampiezza inferiore ai 90°.
- **Ottusangolo**: un triangolo ottusangolo è un triangolo avente un angolo ottuso, cioè di ampiezza superiore ai 90°.

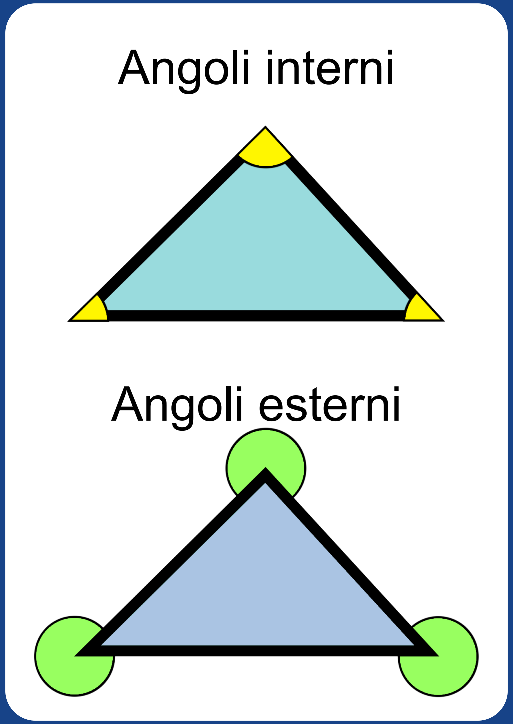
Calcolo perimetro ed area



Perimetro ⟶ $\boldsymbol{P} = l1 + l2 + l3$

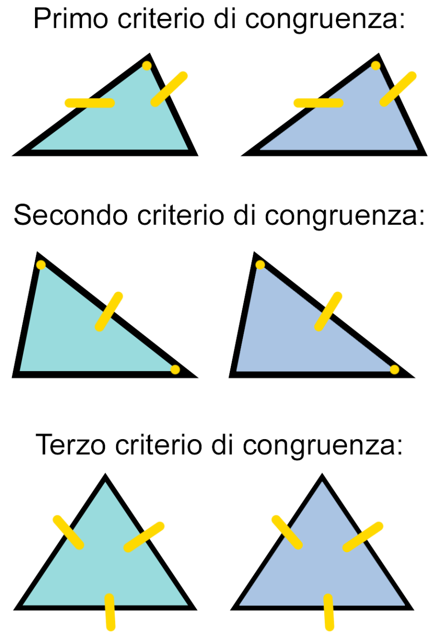
Area ⟶ $\mathbf{A} = \dfrac{bxh}{2}$

Angoli dei triangoli



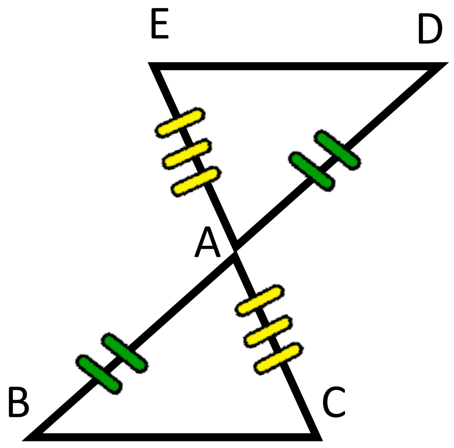
- **Angoli interni**: La somma degli angoli interni di ciascun triangolo è sempre 180°.
- **Angoli esterni**: ogni angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni ad esso non adiacenti, anche la loro somma è sempre 180°.

Criteri di congruenza



Primo criterio di congruenza: due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti due lati e l’angolo tra essi compreso.
Secondo criterio di congruenza: due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti un lato e i due angoli ad esso adiacenti.
Terzo criterio di congruenza: due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti i tre lati.

Criteri di congruenza



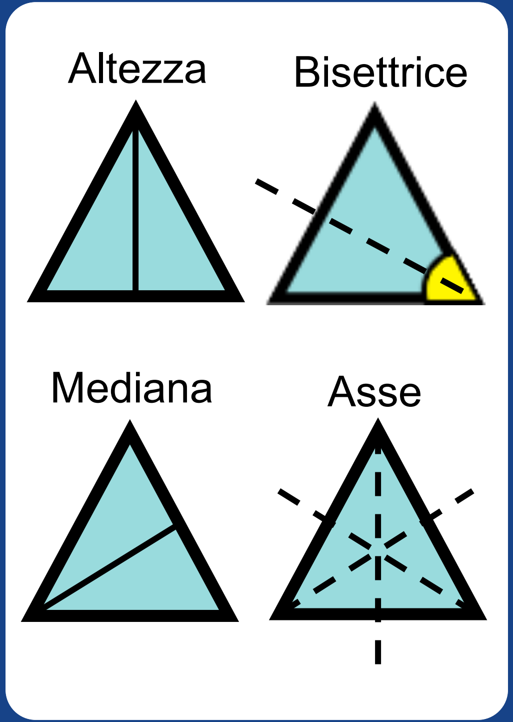
Problema:

Ipotesi
AB = AD AC = AE

Tesi
BC=DE

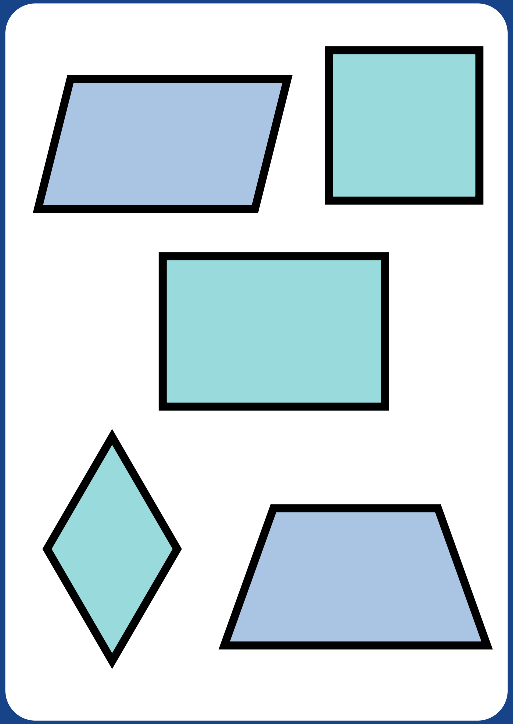
Gli angoli BAC=DAE perché angoli opposti al vertice
Quindi i due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza ed in particolare saranno congruenti BC e DE come volevamo dimostrare.

Elementi caratteristici



- **Altezza**: è il segmento perpendicolare che congiunge un vertice con il lato opposto.
- **Bisettrice**: è un raggio che collega il vertice del triangolo con il lato opposto, dividendo l'angolo in due parti uguali.
- **Mediana**: è un segmento che congiunge un vertice al punto medio del lato opposto.
- **Asse**: gli assi di un triangolo sono le rette perpendicolari ai tre lati e passanti per i loro punti medi. I tre assi di un triangolo concorrono in un punto detto circocentro.

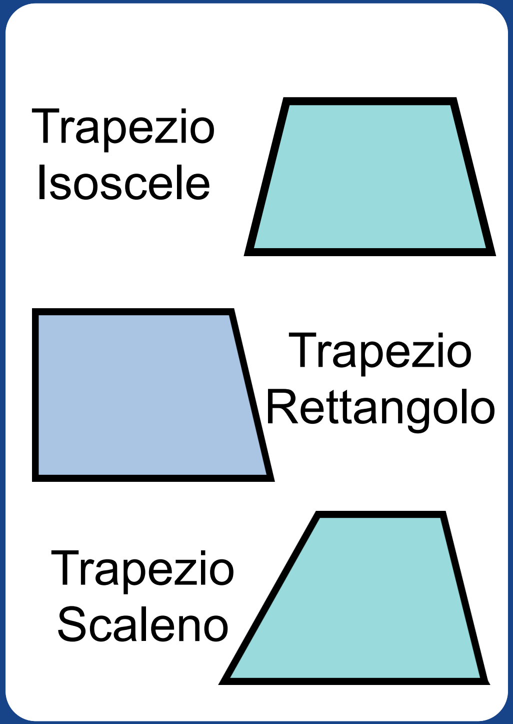
I quadrilateri



Definizione

Si dicono quadrilateri tutti quei poligoni che hanno quattro lati, quattro angoli e quattro vertici.
La somma degli angoli interni di un quadrilatero è sempre di 360°.

Trapezi



Definizione

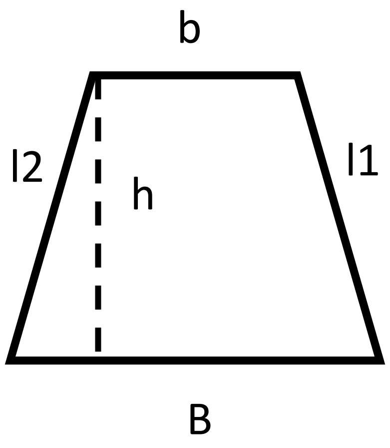
Un trapezio è un quadrilatero avente due lati paralleli detti base maggiore (B) e base minore (b). I due lati rimanenti vengono chiamati lati obliqui. (l)

- Se i lati obliqui sono congruenti il trapezio è detto **isoscele.**
- se uno dei due lati è perpendicolare ad una base il trapezio è detto **rettangolo.**
- Se il trapezio non ha particolari proprietà è detto **scaleno.**

Proprietà:

- Gli angoli adiacenti ai lati obliqui sono supplementari.
- Le diagonali di un trapezio si tagliano in segmenti corrispondenti proporzionali.

Trapezi

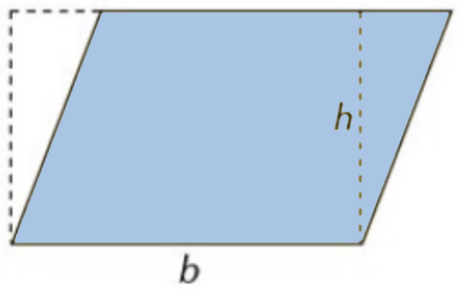


Formule:

Perimetro ⟶ $2p = B + b + l_1 + l_2$

Area ⟶ $A = \dfrac{(B + b)\ x\ h}{2}$

Parallelogramma



Parallelogramma

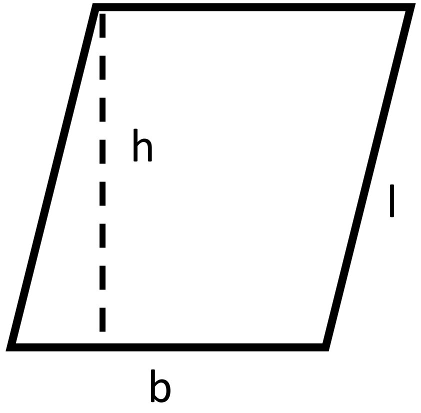
Definizione:

Un parallelogramma è un quadrilatero avente i lati opposti paralleli e congruenti.

Proprietà:

- I lati opposti sono paralleli e congruenti.
- Gli angoli opposti sono uguali, gli angoli consecutivi sono supplementari
- Le diagonali si intersecano nel loro punto medio e dividono il parallelogramma in due triangoli congruenti.
- Il punto di intersezione delle diagonali è il centro di simmetria
- È un caso particolare di trapezio in cui i lati sono a due a due paralleli.

Parallelogramma

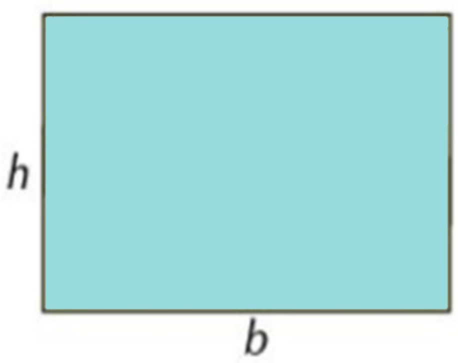


Formule:

Perimetro ⟶ $2p = 2b + 2l$

Area ⟶ $A = b \; x \; h$

Rettangolo



Rettangolo

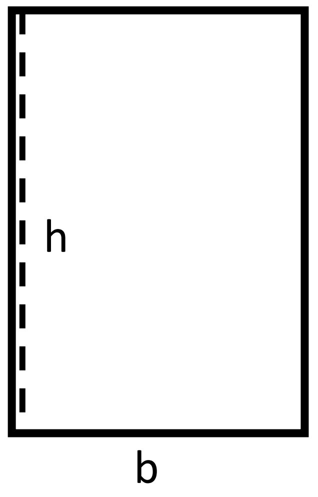
Definizione:

Un rettangolo è un quadrilatero avente tutti gli angoli retti e congruenti tra loro.

Proprietà:

- Ha quattro angoli retti.
- I lati opposti sono congruenti e paralleli, i lati consecutivi sono perpendicolari.
- Le diagonali sono congruenti e si incontrano nel centro del rettangolo che le divide in due segmenti congruenti.
- Ciascuna diagonale forma due triangoli rettangoli e le due diagonali formano quattro triangoli isosceli.
- Vi sono due assi di simmetria
- Un rettangolo è sempre inscrivibile in una circonferenza.

Rettangolo

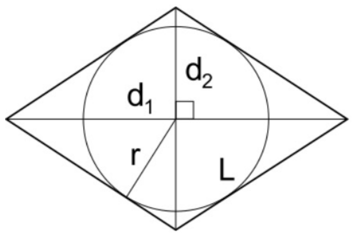


Formule:

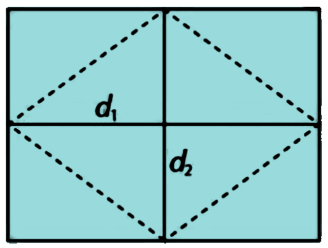
Perimetro ⟶ $2p = 2b + 2h$

Area ⟶ $A = b\ x\ h$

Rombo



Rombo



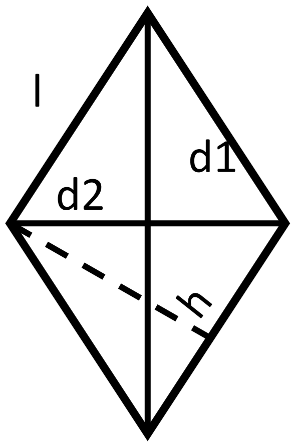
Definizione:

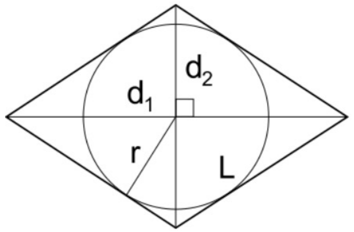
Un rombo è un poligono formato da quattro lati congruenti.

Proprietà:

- I lati sono congruenti e quelli opposti sono paralleli.
- Gli angoli opposti sono congruenti e gli angoli consecutivi sono supplementari.
- Le diagonali sono perpendicolari e dividono il rombo in quattro triangoli rettangoli.
- Le diagonali sono bisettrici degli angoli interni e sono anche assi di simmetria della figura.
- Il rombo è inscrivibile in una circonferenza.

Rombo





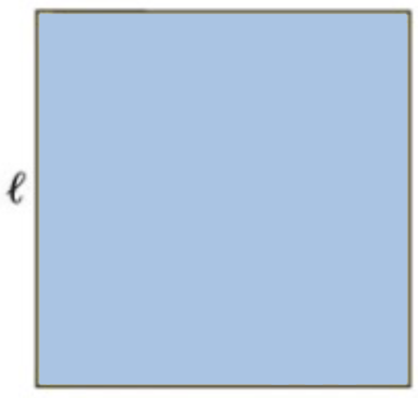
Formule:

Perimetro → $2p = 4l$

Area
(con lato e raggio) → $A = L\ x\ 2r$

(con diagonali) → $A = \frac{d_1\ x\ d_2}{2}$

Quadrato



Quadrato

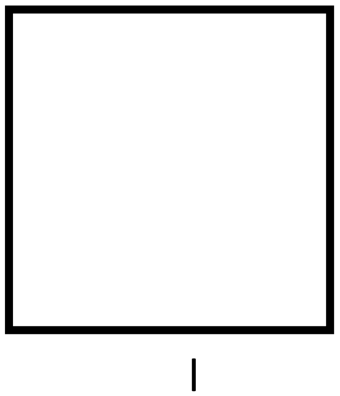
Definizione:

Un quadrato è un poligono convesso formato da quattro lati congruenti e quattro angoli uguali pari a 90°.

Proprietà:

- I lati sono congruenti tra loro e perpendicolari a due a due.
- Gli angoli interni sono congruenti ed hanno ampiezza pari a 90°
- Le diagonali sono perpendicolari tra loro e dividono il quadrato in quattro triangoli isosceli.
- Ciascuna diagonale forma due triangoli rettangoli e isosceli.
- Possiede quattro assi di simmetria.
- Un quadrato è inscrivibile in una circonferenza.
- È un rettangolo con i lati congruenti e un rombo con gli angoli uguali.
- È un poligono regolare.

Quadrato

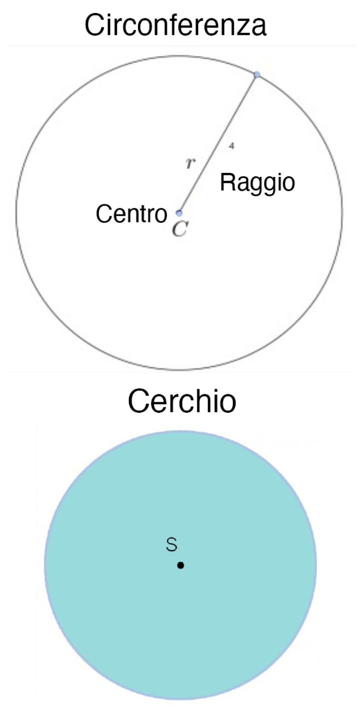


Formule:

Perimetro → $2p = 4l$

Area → $A = l^2$

Circonferenze

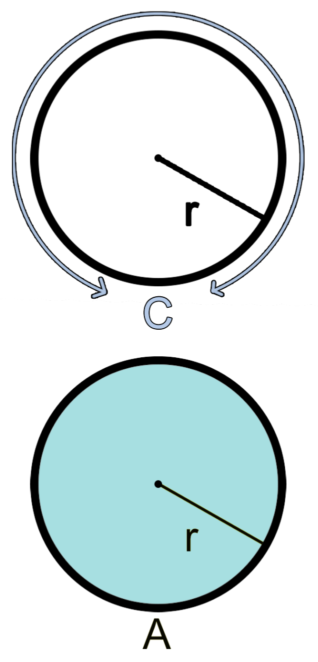


Definizione di circonferenza e cerchio

- **Circonferenza:** insieme/luogo di punti che sono equidistanti da un punto fisso, il centro.
  Questa distanza viene chiamata **raggio**(r).

- **Cerchio:** è l'insieme dei punti di una circonferenza e di tutti i suoi punti interni, cioè l'area del piano racchiusa all'interno della circonferenza.

Calcolo circonferenza e area del cerchio



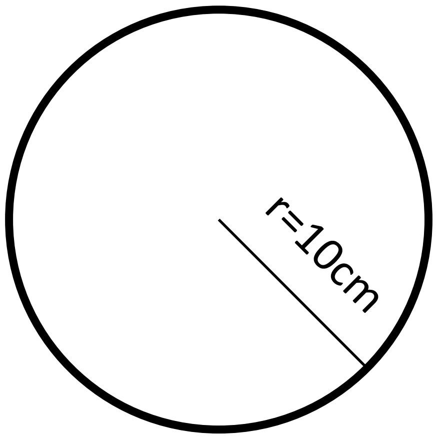
Per trovare la **lunghezza della circonferenza** bisogna usare la seguente formula:

$$C = 2\pi r$$

Per trovare **l'area del cerchio** usiamo la formula seguente:

$$A = \pi r^2$$

Calcolo circonferenza e area del cerchio



Problema:

Calcola l'area di un cerchio e la lunghezza della circonferenza avente un raggio pari a 10 cm

DATI: $r = 10cm$

$\pi = 3{,}14$

RICHIESTA: $A = ?$

$C = ?$

SVOLGIMENTO: $C = 2\pi r \rightarrow 2 \cdot (3{,}14) \cdot (10cm) = 62{,}8\ cm$

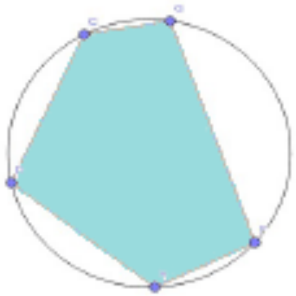
$A = \pi r^2 \rightarrow (3{,}14) \cdot (10cm)^2 = 314cm^2$

RISPOSTA: $C = 62{,}8\ cm$

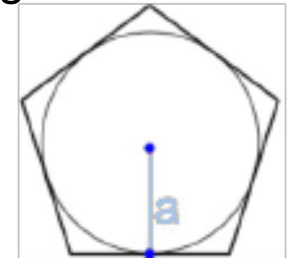
$A = 314^2$

Poligoni iscritti e circoscritti

Poligono iscritto



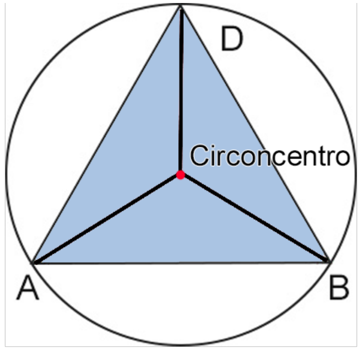
Poligono circoscritto

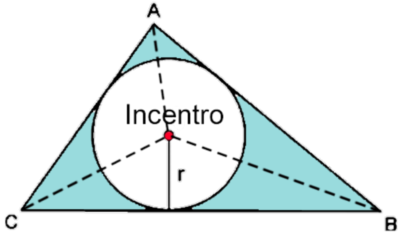


Un poligono rispetto ad una circonferenza si dice:

- **Poligono iscritto:** quando tutti i suoi vertici sono punti della circonferenza
- **Poligono circoscritto:** quando tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza. Il raggio in questo caso è l'**apotema** del poligono.

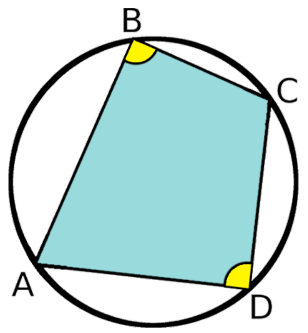
Criteri di inscrittibilità e circoscrittibilità per triangoli

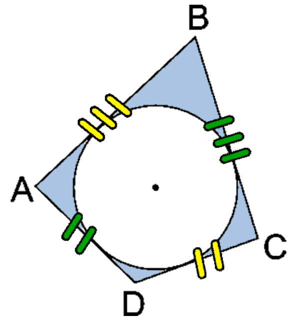




- **Condizione di inscrittibilità:** tutti i triangoli sono sempre inscrittibili perché hanno il circocentro.
- **Condizioni di circoscrivibilità:** tutti i triangoli sono sempre circoscrittibili perché hanno l’incentro.

Criteri di inscrittibilità e circoscrittibilità per quadrilateri

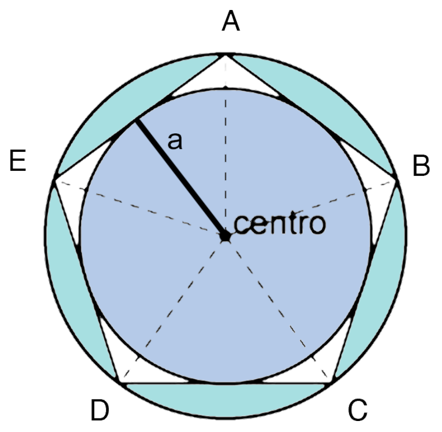




- **Condizione di inscrittibilità:** un quadrilatero è inscrittibile se ha una coppia di angoli **opposti supplementari.**
  $\hat{B} + \hat{D} = 180°$

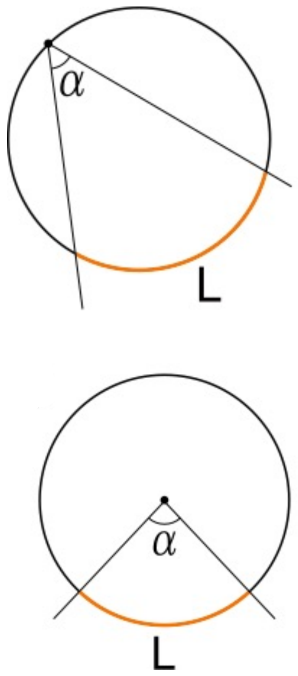
- **Condizioni di circoscrivibilità:** un quadrilatero è circoscrittibile se **la somma dei due lati opposti sia congruente alla somma degli altri due.**
  $\overline{AB} + \overline{CD} \cong \overline{BC} + \overline{AD}$

Criteri di inscrittibilità e circoscrittibilità per poligoni regolari



Tutti i poligoni regolari sono circoscrittibili e inscrittibili.
Il **centro** delle due circonferenze è in **comune** e il raggio di quella inscritta al poligono prende il nome di **apotema**.

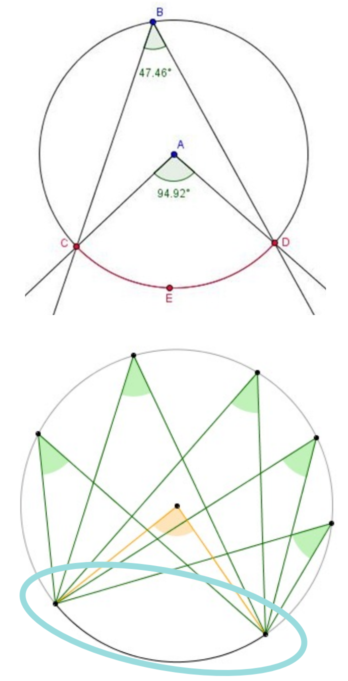
Angoli alla circonferenza e al centro



- **Angolo alla circonferenza:** un angolo convesso che ha il vertice sulla circonferenza in cui i lati sono entrambi secanti oppure uno secante e l'altro tangente alla circonferenza

- **Angolo al centro:** un angolo che ha il vertice nel centri della circonferenza

Angoli alla circonferenza e al centro: proprietà



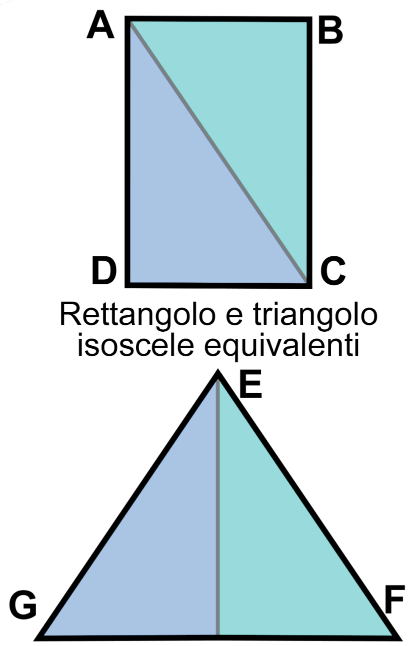
- **Relazione tra gli angoli alla circonferenza e angoli al centro:** Ogni angolo alla circonferenza è congruente alla metà del corrispondente angolo al centro.
  Per ogni angolo al centro corrispondono infiniti angoli alla circonferenza.

- Gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco o su archi congruenti sono congruenti a loro volta.

Equivalenza

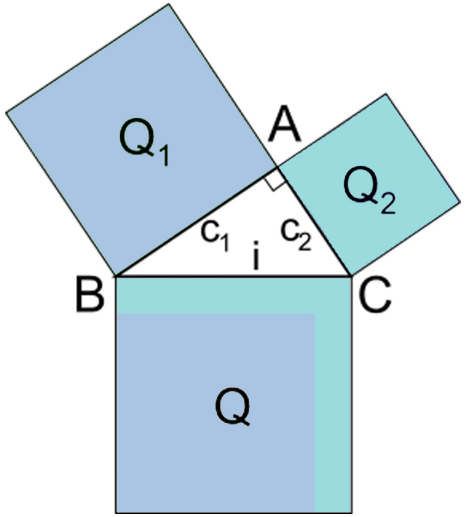
Definizione e concetto

Si dicono **equivalenti** due figure aventi uguale area.
Due superfici, anche se di forme diverse possono essere confrontate rispetto alla loro estensione.



Rettangolo e triangolo isoscele equivalenti

Teorema di Pitagora



In ogni triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti, quindi $Q = Q1 + Q2$.

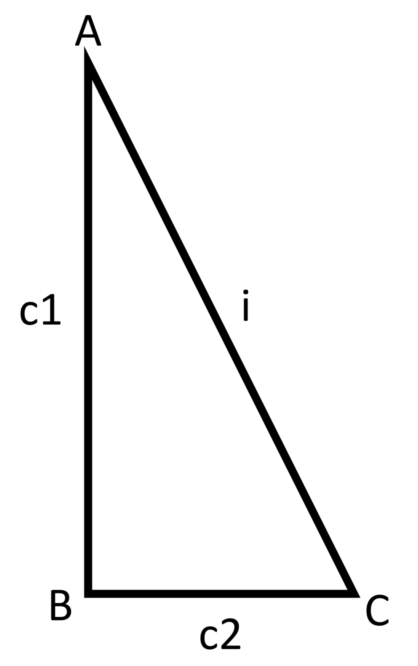
Formule:

Ipotenusa $\longrightarrow$ $i^2 = c1^2 + c2^2$

Cateti $\longrightarrow$ $c1^2 = i^2 - c2^2$

$c2^2 = i^2 - c1^2$

Teorema di Pitagora



Problema:

In un triangolo rettangolo un cateto misura 11 cm, l’altro 6 cm. Calcola la misura dell’ipotenusa

DATI: $c1 = 11cm$

$c2 = 6cm$

RICHIESTA: $i = ?$

SVOLGIMENTO: $i = \sqrt{c1^2 + c2^2}$

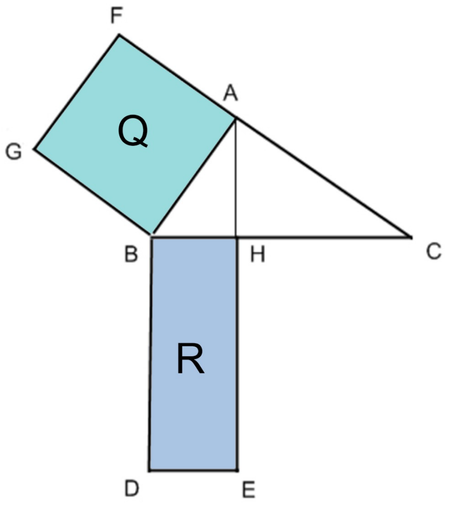
$= \sqrt{11^2 + 6^2}$

$= \sqrt{121 + 36}$

$= \sqrt{157} =$12,5

RISPOSTA: $i = 12{,}5cm$

Primo teorema di Euclide



In ogni triangolo rettangolo, il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti all'ipotenusa e alla proiezione di quel cateto sull'ipotenusa, quindi Q=R.

Formule:

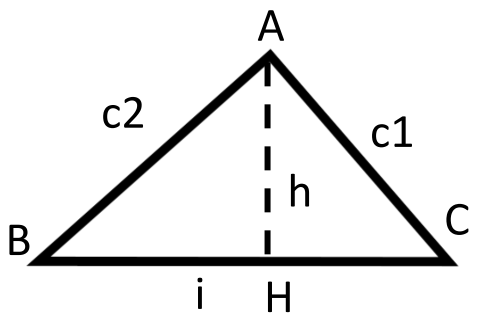
Cateti ⟶ $AB^2 = BH * BC$

$AC^2 = CH * BC$

Proporzioni ⟶ $BC : AB = AB : BH$

$\ldots$

Primo teorema di Euclide



Problema:

Un triangolo rettangolo ha una proiezione sull'ipotenusa di 4cm e il cateto maggiore di 6cm. Calcola il perimetro del triangolo

DATI: $h(AH) = 3cm$

$c1(AC) = 6cm$

RICHIESTA: $P = ?$

SVOLGIMENTO: $BC : AC = AC : HC \rightarrow x : 6 = 6 : 4$

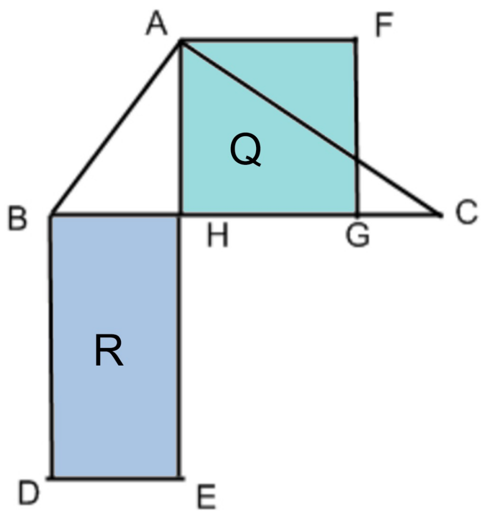
$$x = \frac{6 * 6}{4} = 9 \rightarrow BC = 9cm$$

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2 =}\ 6{,}7cm$$

$$P = (6 + 9 + 6{,}7)cm = 21{,}7cm$$

RISPOSTA: $P = 21{,}7cm$

Secondo teorema di Euclide



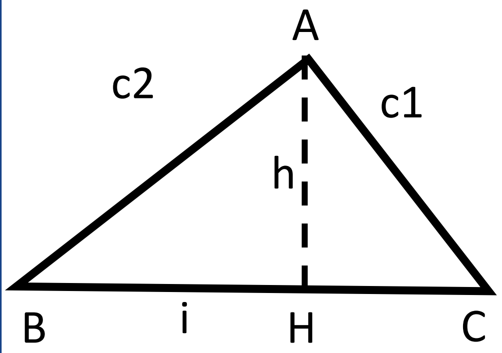
In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull’altezza relativa all’ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti alle proiezioni dei due cateti sull’ipotenusa, quindi Q=R.

Formule:

Altezza ⟶ $AH^2 = BH * HC$

Proporzione ⟶ $BH : AH = AH : HC$

Secondo teorema di Euclide



Problema:

Un triangolo rettangolo ha le proiezione sull'ipotenusa di 3cm e 5cm. Calcola l'area del triangolo

DATI: $(BH) = 3cm$

$(HC) = 5cm$

RICHIESTA: $A =?$

SVOLGIMENTO: $AH^2 = BH * HC$

$$AH = \sqrt{3 * 5}$$

$$AH = \sqrt{15} = 3,9cm$$

$$A = \frac{(3+5)*3,9}{2} = 15,6cm^2$$

RISPOSTA: $A = 15,6cm^2$

Le nostre fonti

Wikipedia
Skuola.net
Mauitaui.org
Youmath
Treccani
Tecniche matematiche 2 (Algebra e Geometria)
Esercizimatematica.com