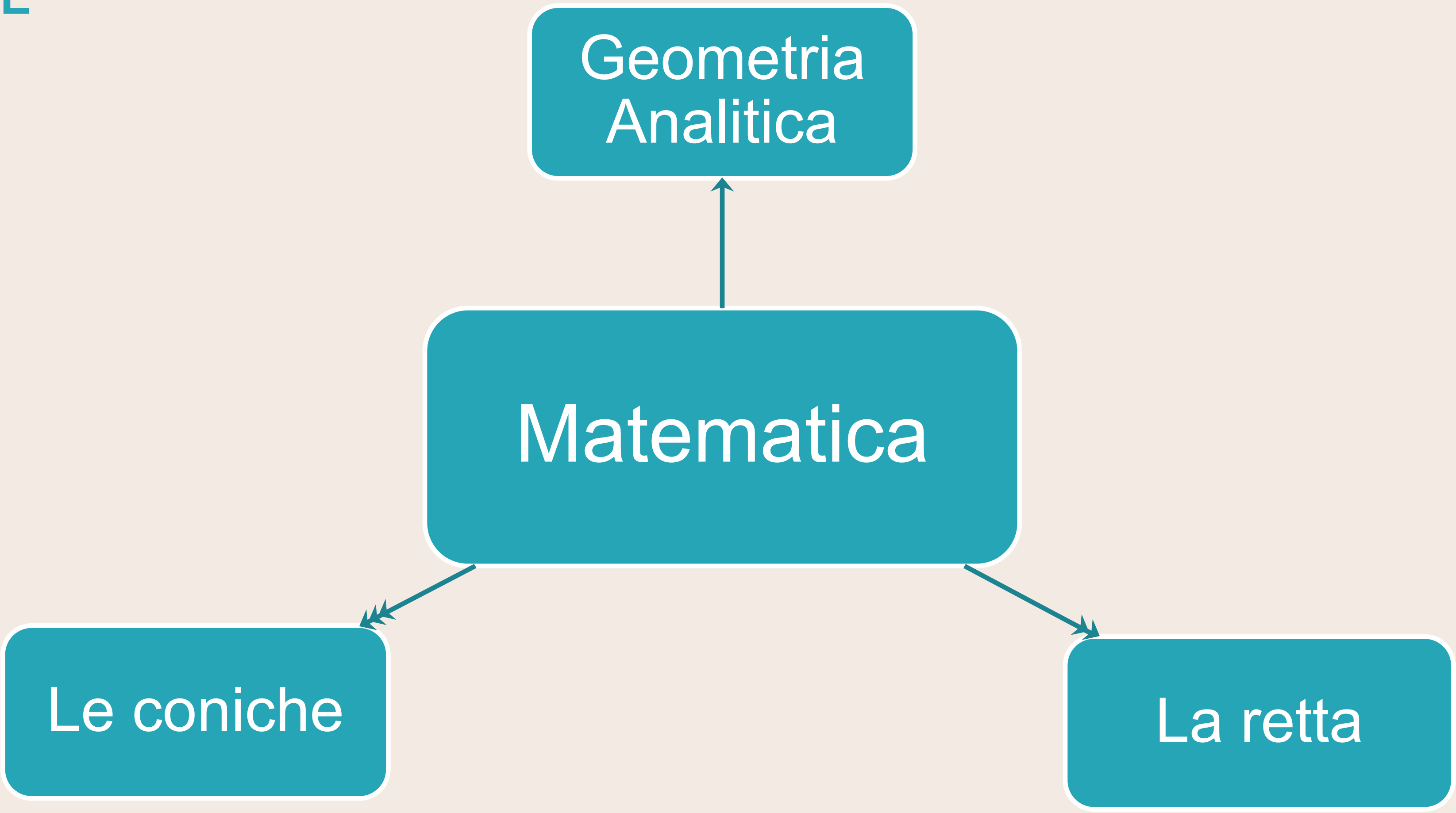
# GEOMETRIA ANALITICA E CONICHE

Cerioni Valentino, Koka Alex,
Riccardo Sabbatini Peverieri, Traino Sabrina

Fonti

Classe 3B

Anno scolastico 2022/2023


Geometria Analitica
Matematica
Le coniche
La retta

# Geometria analitica

- Definizione
- Il punto
- Distanza tra due punti

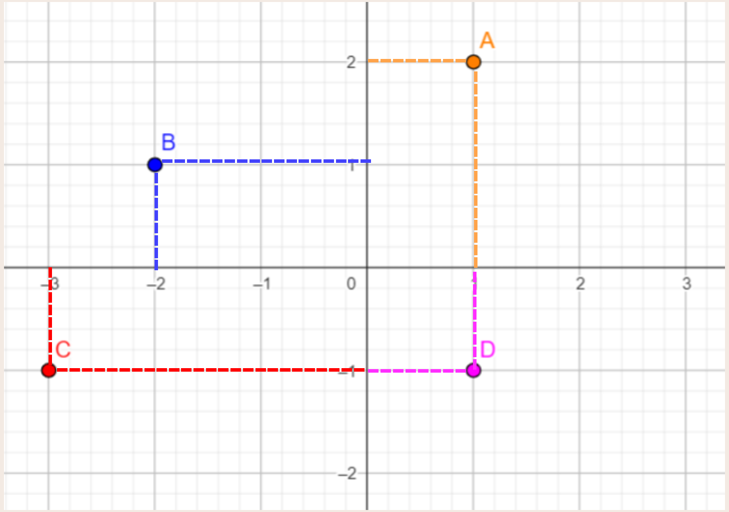
# Definizione

La **geometria analitica** è il ramo della geometria in cui le figure vengono espresse mediante espressioni algebriche e per mezzo di un sistemi di assi cartesiani → **piano cartesiano**

# Il punto

Ogni punto sul piano cartesiano è definito da una coppia di coordinate:

- l'**ascissa** (coordinata X)
- l'**ordinata** (coordinata Y)



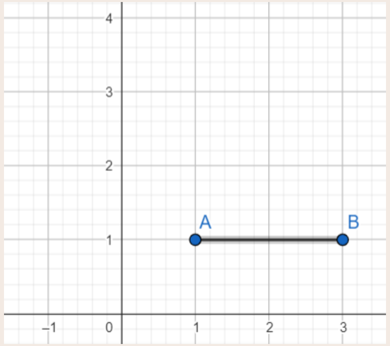
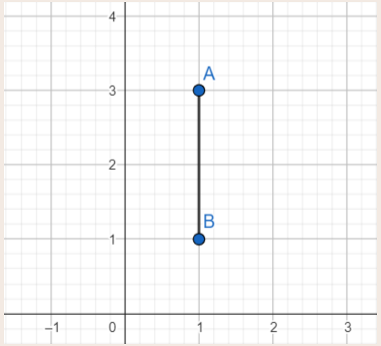
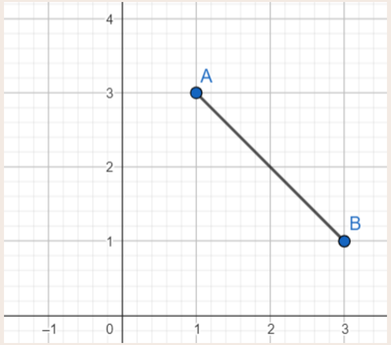

$A(1;2)$

$B(-2;1)$

$C(-3;-1)$

$D(1;-1)$

# Distanza tra due punti

| Se il segmento AB è ORIZZONTALE | Se il segmento AB è VERTICALE | Se il segmento AB è OBLIQUO |
|---|---|---|
| $d(A,B) = \lvert X_A - X_B \rvert$ | $d(A,B) = \lvert Y_A - Y_B \rvert$ | $d(A,B) = \sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}$ |
|  |  |  |

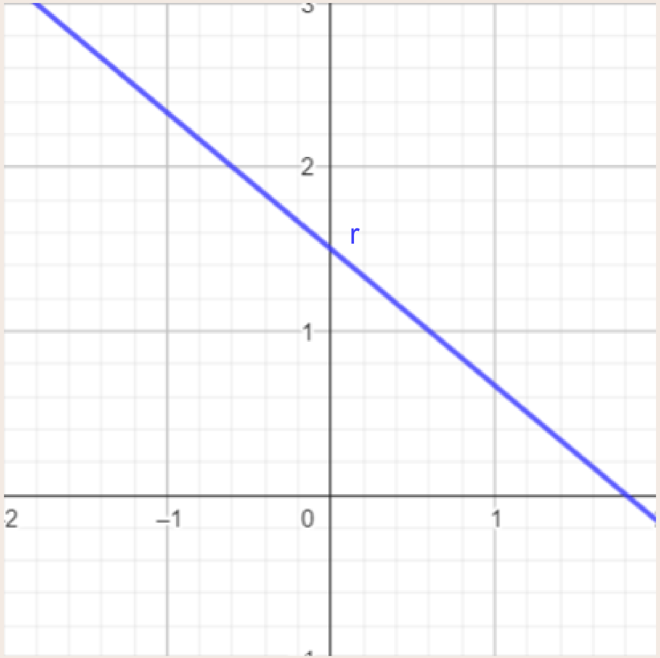
# Retta

- Definizione
- Equazione esplicita
- Coefficiente angolare e intercetta
- Rette particolari
- Equazioni speciali
- Punto e retta
- Rette perpendicolari e parallele
- Esercizi

# Definizione

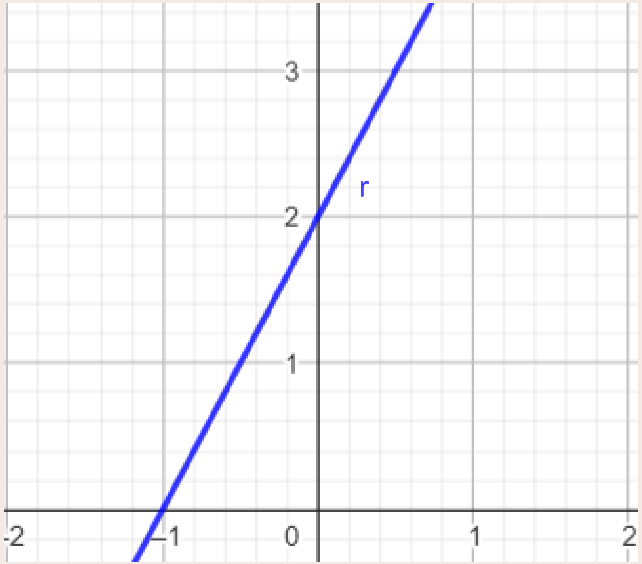
La **retta** sul piano cartesiano è il luogo dei punti del piano che sono soluzione dell'equazione

$\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ a, b non entrambi nulli.



# Equazione esplicita

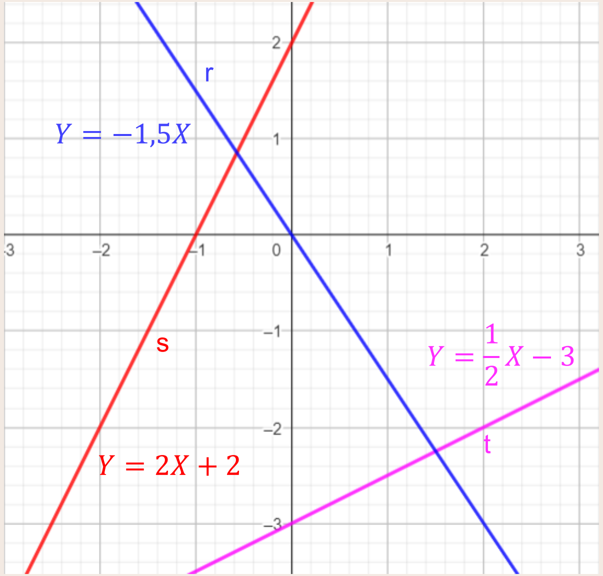
$$Y = \underbrace{m}_{\downarrow \atop \text{Coefficiente Angolare}} x + \underbrace{q}_{\downarrow \atop \text{Intercetta}}$$



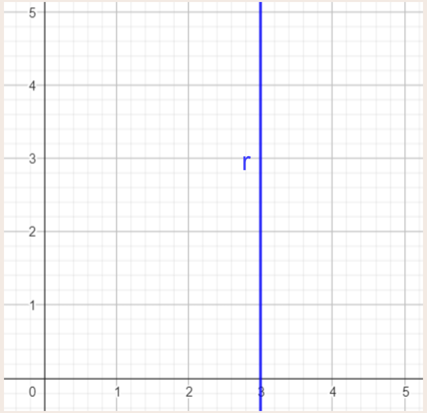
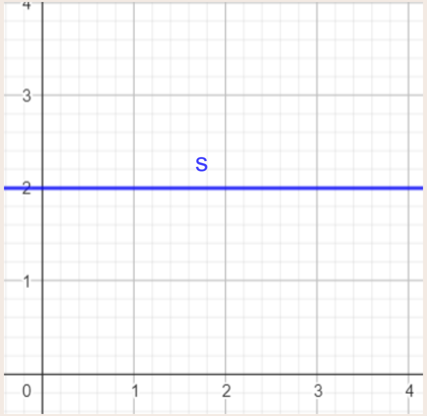
# Coefficiente angolare e Intercetta

**Coefficiente angolare**: quel valore che stabilisce l'inclinazione della retta rispetto all'asse X.

**Intercetta**: quel valore che stabilisce in che punto la retta interseca l'asse Y.

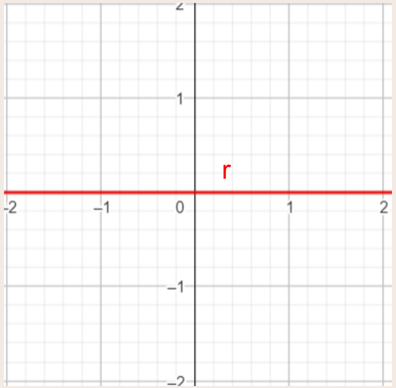


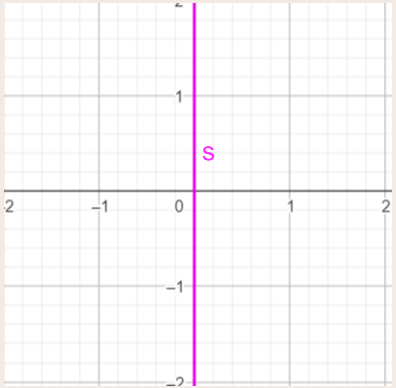
# Rette particolari

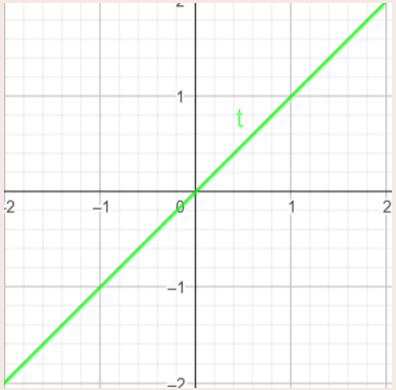
| RETTE VERTICALI | RETTE ORIZZONTALI |
|---|---|
| $X = N$ <br> $con\ N \in \mathbb{R}$ | $Y = N$ <br> $con\ N \in \mathbb{R}$ |
|  |  |

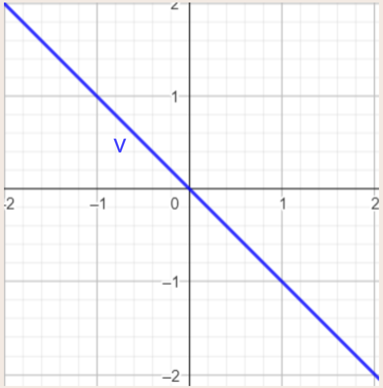
# Equazioni speciali

| ASSE X | ASSE Y | BISETTRICE I e III QUADRANTE | BISETTRICE II e IV QUADRANTE |
| --- | --- | --- | --- |
| $Y = 0$ | $X = 0$ | $Y = X$ | $X = Y$ |



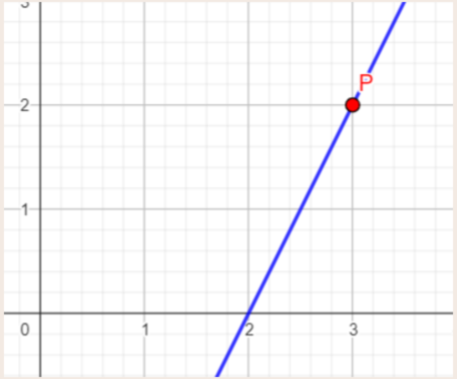



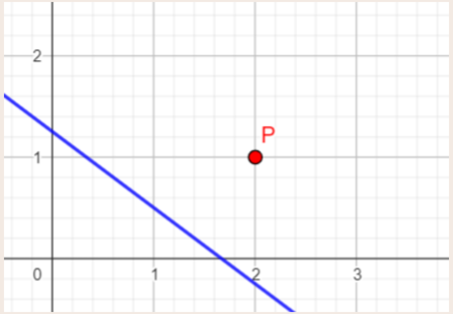



# Punto di una retta

Un punto **appartiene** alla retta se le sue coordinate sono soluzioni dell'equazione della retta.



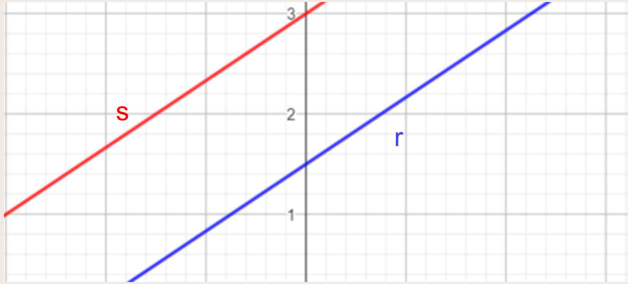

Altrimenti se non è soluzione dell'equazione allora **non appartiene** alla retta.



# Rette parallele o perpendicolari

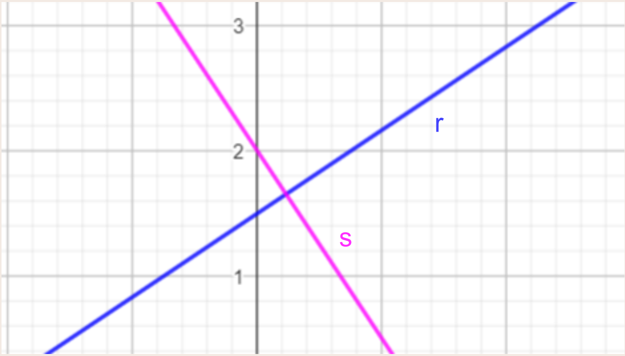
Due rette sono **parallele** se hanno lo stesso coefficiente angolare.

$$r \parallel s \iff m_r = m_s$$




Due rette si dicono **perpendicolari** se hanno coefficienti angolari antireciproci.

$$r \perp s \iff m_r = -\frac{1}{m_s}$$



# Esercizi

- Punto d’intersezione tra due rette
- Equazione passante per un punto

# Esercizio 1

## Date due rette trovare il loro punto di intersezione

Mettiamo a sistema le loro equazioni:

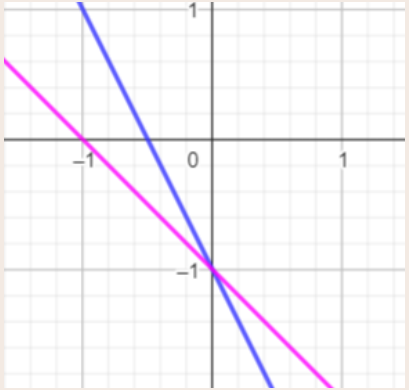
Dati:

$r: y = -2x - 1$

$s: y = -x - 1$

$$\begin{cases} y = -2x - 1 \\ y = -x - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -2x - 1 \\ -2x - 1 = -x - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -2x - 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2(0) - 1 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$




Il sistema è **determinato** perciò le due rette sono **incidenti**, si incontrano nel punto **P(0,-1)**.

# Esercizio 2

**Data una retta passante per un punto e con coefficiente angolare assegnato trovare la sua equazione**

Dati:

$P(-1,2)$

$s: y = 5x \ -2$

La formula da utilizzare è:

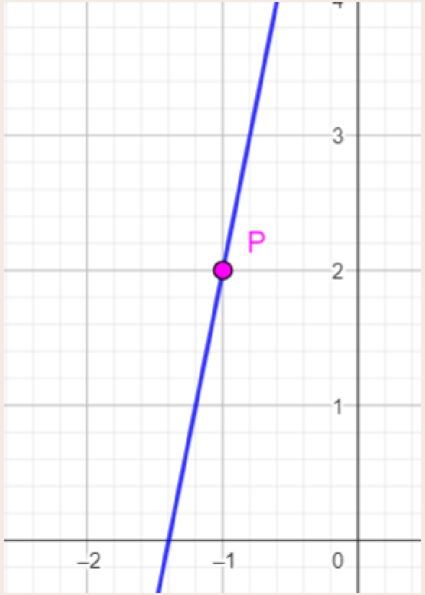
$$y - y_p = m_r(x - x_p)$$

$$\downarrow$$

$$y - (2) = 5\ (x - (-1))$$

$$y - 2 = 5\ (x + 1)$$

$$y = 5x + 7$$



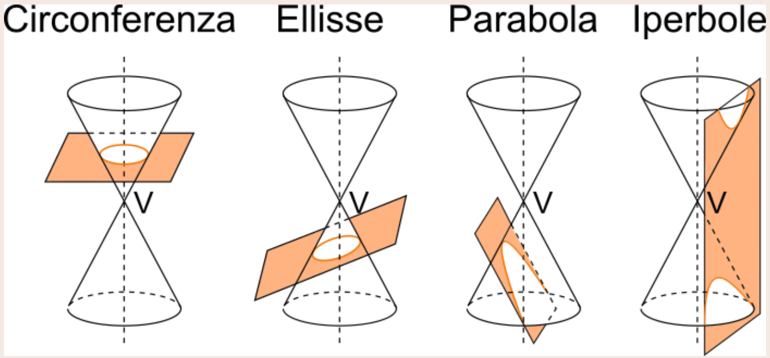
# Coniche

- Definizione
- Parabola
- Circonferenza
- Ellisse
- Iperbole

# Le coniche

Le coniche sono:

- Circonferenza
- Parabola
- Ellisse
- Iperbole



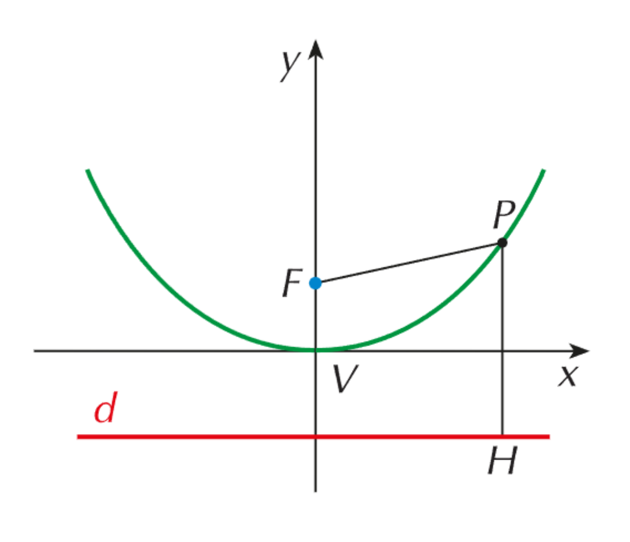

Sono chiamate così perché si ottengono intersecando la superficie di un cono retto indefinito con un piano non passante per il vertice.

# Parabola

- Definizione
- Equazione esplicita
- Formule
- Retta e parabola
- Esercizi

# Definizione

La **parabola** è il luogo geometrico dei punti del piano che sono equidistanti da un punto fisso **F**(fuoco) e da una retta fissa **d**(direttrice).



# Equazione

Equazione in forma esplicita:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Il coefficiente **a** indica la concavità della parabola e la sua apertura.
Il coefficiente **b** indica la posizione dell'asse di simmetria rispetto all'asse *y*.
Il termine noto **c** indica il punto in cui la parabola interseca l'asse *y*.

# Formule

Vertice: $\mathbf{V} = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$

Asse (x): $\mathbf{x} = \frac{-b}{2a}$

Fuoco: $\mathbf{F} = (-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a})$

Direttrice:

- Verticale: $\mathbf{X} = (-\frac{1+\Delta}{4a})$
- Orizzontale: $\mathbf{Y} = (-\frac{1+\Delta}{4a})$

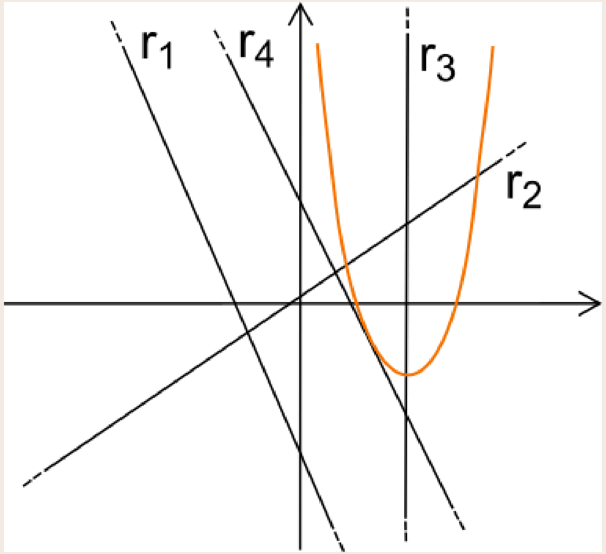
In tutti i casi:

$\Delta = b^2 - 4ac$

# Posizioni della retta

Le possibili posizioni di una retta rispetto a una parabola sono quattro:

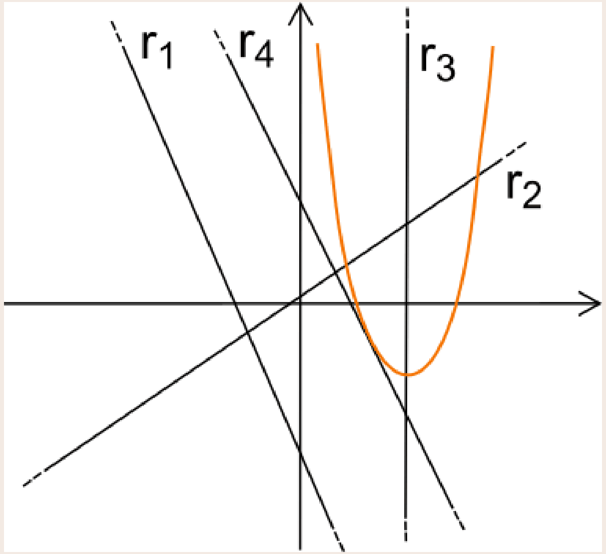
- Retta **esterna**($r_1$);
- Retta **secante in due punti**($r_2$);
- Retta **secante in un punto**($r_3$);
- Retta **tangente alla parabola**($r_4$).



# Posizioni della retta

Definizioni rette:

- **Esterna**: nessun punto di intersezione.
- **Secante in due punti**: due punti di intersezione.
- **Secante in un punto**: un unico punto di intersezione.
- **Tangente: un unico punto** di intersezione (due punti di intersezione coincidenti).



Esercizi

- Punto d’intersezione retta-parabola
- Equazione parabola conoscendo punto-vertice
- Equazione parabola passante per tre punti

# Esercizio 1

**Data una retta e una parabola trovare i loro punti di intersezione**

Dati:

$r: y = -2x + 6$

$p: y = -2x^2 + 2x + 4$

Eguaglio le due espressioni:

$-2\mathrm{x} + 6 = -2\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} + 4$

$2x^2 - 2x \; - 2x - 4 + 6 = 0$

$2x^2 - \; 4x + 2 = 0$

Calcolo del Δ:

$(-4)^2 - 4(-2)(2) = \; 16 - 16 = 0$

Δ= 0 quindi la retta è tangente alla parabola.

# Esercizio 1

Si trova il punto:

$$\frac{-(-4)}{2(2)} = \frac{4}{4} = 1$$

1 è la coordinata della x.

Per trovare quella della y si usa o l'equazione della retta o della parabola:

$$y = -2x + 6$$

$$y = -2(1) + 6$$

$$y = \ 4$$

**Il punto di tangenza è $P(1;4)$.**

# Esercizio 2

**Dato un punto e il vertice di una parabola, trova la sua equazione**

Dati:
$V(1;-2)$
$P(0;3)$

La parabola passante per V è: $-2 = a(1)^2 + b(1) + c$
Che diventa $-2 = a + b + c$

Quella per P è: $3 = a(0)^2 + b(0) + c$
Che diventa $3 = c$

Per la terza equazione utilizziamo la formula $\frac{-b}{2a}$ e la eguagliamo alla coordinata x del vertice.

# Esercizio 2

Li mettiamo a sistema e risolviamo:

$$\begin{cases} -2 = a + b + c \\ 3 = c \\ \dfrac{-b}{2a} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2 = a + b + 3 \\ 3 = c \\ \dfrac{-b}{2a} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -5 - b \\ 3 = c \\ \dfrac{-b}{2(-5-b)} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -5 - b \\ 3 = c \\ -b = -10 - 2b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -5 - (-10) \\ 3 = c \\ b = -10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ 3 = c \\ b = -10 \end{cases}$$

Troviamo i valori delle incognite e le sostituiamo:

$$\boldsymbol{y = 5x^2 - 10x + 3}$$

# Esercizio 3

**Dati tre punti trovare la parabola passante per essi**

Dati:
A$(0;-2)$
B$(1;2)$
C$(-2;-4)$

Si creano tre equazioni sostituendo le coordinate all'equazione base:

Equazione per A: $-2 = c$
Equazione per B: $2 = a + b + c$
Equazione per C: $-4 = 4a - 2b + c$

# Esercizio 3

Si forma il sistema e lo si risolve:

$$\begin{cases} -2 = c \\ 2 = a + b + c \\ -4 = -4a - 2b + c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2 = c \\ -a = b - 2 - 2 \\ -4 = 4a - 2b - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2 = c \\ a = -b + 4 \\ -4 = 4(-b + 4) - 2b - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 = c \\ a = -b + 4 \\ -4 = -6b + 14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2 = c \\ a = -b + 4 \\ 6b = 18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2 = c \\ a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

Troviamo i valori di a,b e c e si crea l'equazione della parabola:

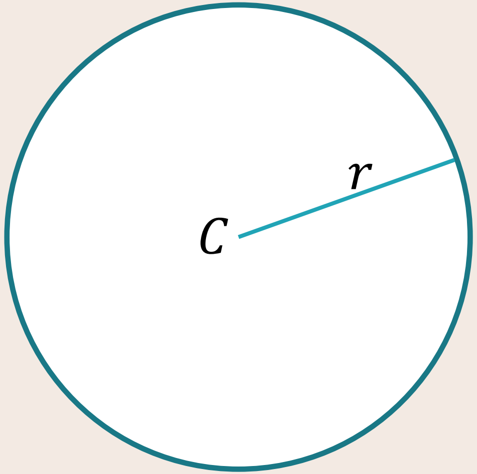
$\boldsymbol{y = x^2 + 3x - 2}$

# Circonferenza

- Definizione
- Equazione esplicita
- Equazione implicita
- Formule
- Condizione di realtà
- Circonferenza e area
- Retta e circonferenza
- Esercizi

# Definizione

La **circonferenza** è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso, detto centro.
La distanza costante è detta **raggio**.

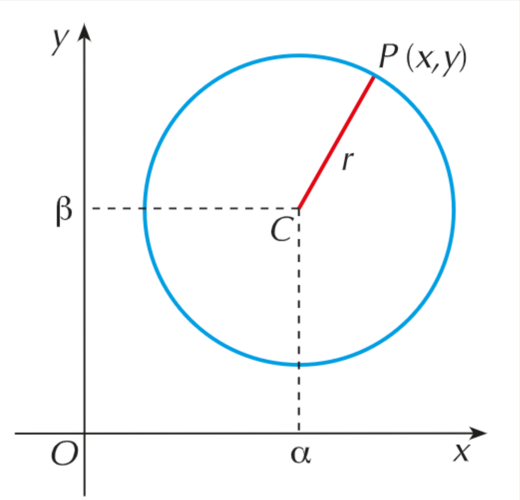


# Equazione esplicita

Conoscendo le coordinate del centro della circonferenza $(\alpha, \beta)$ e la misura $r$ del raggio, è possibile esprimere l'equazione della circonferenza nella forma esplicita:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

Si tratta di un'equazione quadratica con due incognite $(x, y)$.



# Equazione implicita

Sviluppando il calcolo e riordinando i termini arriviamo all'equazione:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

Se adesso poniamo:

$$-2\alpha = a \qquad - 2\beta = \mathrm{b} \qquad \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = c$$

Otteniamo la forma implicita dell'equazione di una circonferenza:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}$$

# Formula raggio e coordinate

Dalle precedenti relazioni ricaviamo che:

$$-2\alpha = a \rightarrow \alpha = -\frac{a}{2} \qquad -2\beta = b \rightarrow \beta = -\frac{b}{2}$$

Le coordinate del centro e la misura del raggio, in funzione dei coefficienti $a, b, c$ sono date da:

$$\boldsymbol{C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)} \qquad \boldsymbol{r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}$$

# Condizione di realtà

Affinché l'equazione descriva effettivamente un insieme di punti nel piano cartesiano è necessaria la richiesta della **condizione di realtà**:

$$a^2 + b^2 - 4c \geq 0$$

Nel caso in cui la richiesta eguaglia a 0, la circonferenza si riduce a un solo punto.
Se invece è minore di 0 la circonferenza non esiste del tutto.

# π

La lunghezza di una circonferenza e quella del suo diametro sono grandezze direttamente proporzionali e il rapporto tra le loro misure è costante:

$$\frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{d}} = \textbf{costante}$$

Il valore di questo rapporto si indica con la lettera π (pi greco) e corrisponde approssimativamente a 3,14

# Calcolo circonferenza

Possiamo quindi scrivere la formula $\frac{C}{d} = \pi$ da cui si ottiene:

$$C = \pi \cdot d \qquad \text{o} \qquad C = \pi \cdot 2r$$

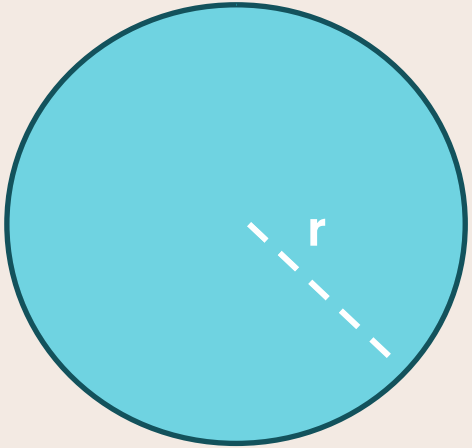
La lunghezza di una circonferenza è uguale al prodotto della lunghezza del suo diametro per π oppure la lunghezza del suo raggio per 2π.

# Calcolo area

L'area di un cerchio si ottiene moltiplicando il quadrato della misura del raggio per π.

Formula:

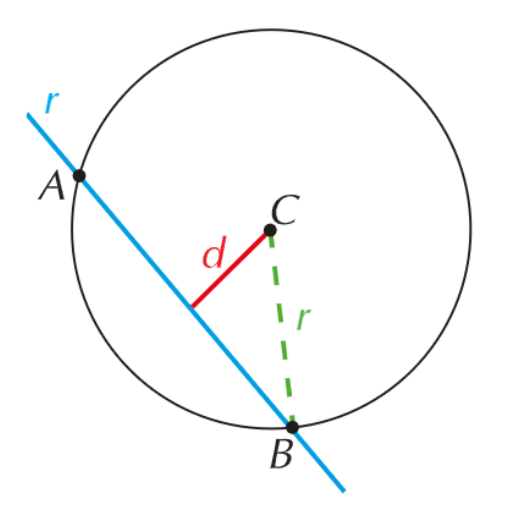
$$A = r^2 \cdot \pi$$



# Retta secante

Una retta si dice secante quando ha due punti in comune con la circonferenza.

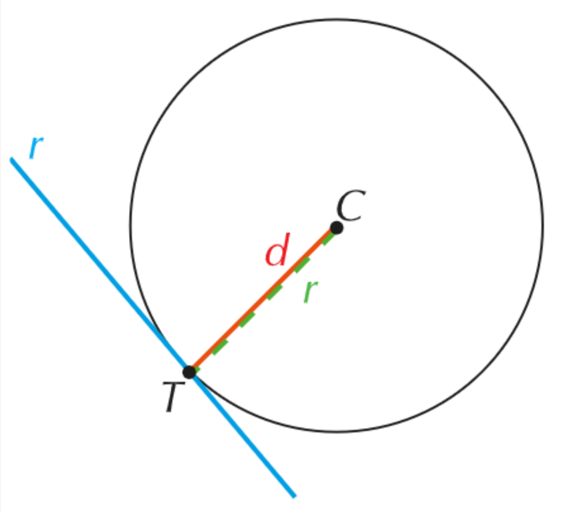
$d < r$



# Retta tangente

Una retta si dice tangente quando ha un solo punto in comune con la circonferenza.

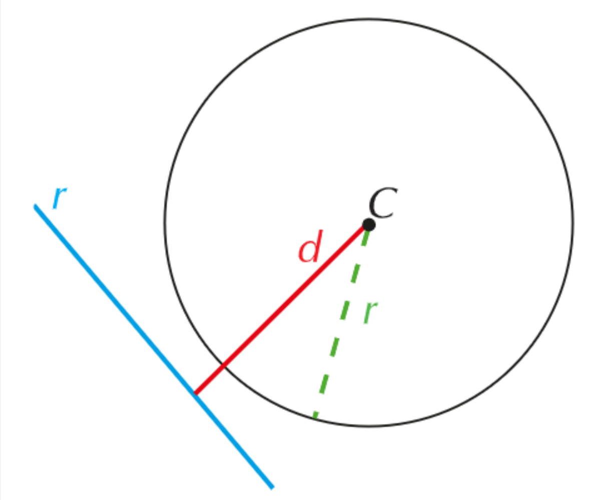
$d = r$



# Retta esterna

Una retta si dice esterna quando non ha punti in comune con la circonferenza.

$d > r$



Esercizi

- Punto d’intersezione retta-circonferenza
- Equazione parabola conoscendo misura assi-centro

# Punti di intersezione

Dal punto di vista algebrico, le intersezioni di una circonferenza con una retta si determinano risolvendo il sistema delle loro equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y = mx + q \end{cases}$$

# Esempio 1

**Data una retta e una circonferenza, trovare i loro punti di intersezione**

Dati: $c\colon\ y = x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ r: $y = x - 2$

Le mettiamo a sistema e risolviamo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \\ y = x - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + (x-2)^2 - 4x - 2(x-2) = 0 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

# Esempio 1

$$\begin{cases} x^2 + x^2 + 4 - 4x - 4x - 2x + 4 = 0 \\ y = x - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 10x + 8 = 0 \\ y = x - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

Calcolo delta:

$$\Delta = 25 - 4(1)(4) = 9$$

$$x_{1/2} = \frac{+5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{+5 \pm 3}{2} = \qquad x_1 = \frac{8}{2} = 4 \qquad x_2 = \frac{2}{2} = 1$$

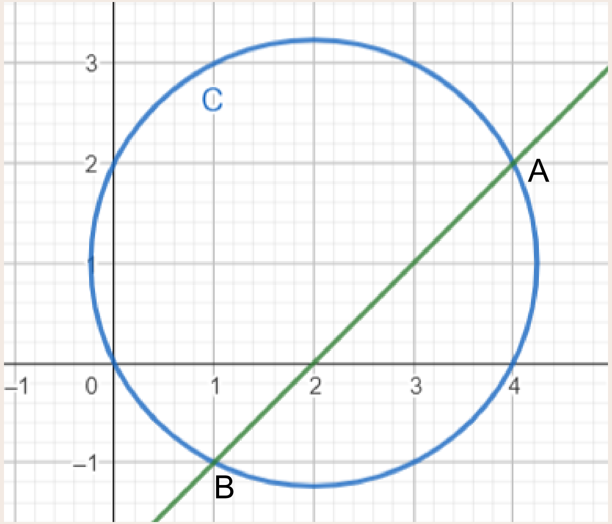
# Esempio 1

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 - 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

**A(4,2)** **B(1,-1)**

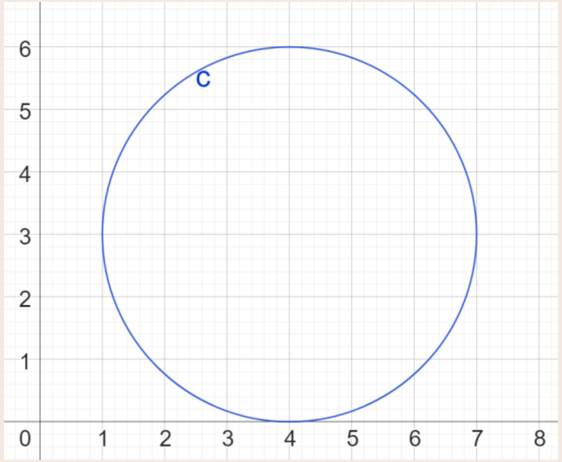



I punti di intersezione sono A(4,2) e B(1,-1)

# Esempio 2

**Dato il centro e il raggio di una circonferenza, trova la sua equazione**

Dati: $r = 3$ $C(4,3) \rightarrow \alpha = 4 \quad \beta = 3$




Calcolo:

$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 3^2$

$x^2 + 16 - 8x + y^2 + 9 - 6y = 9$

$\boldsymbol{x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0}$

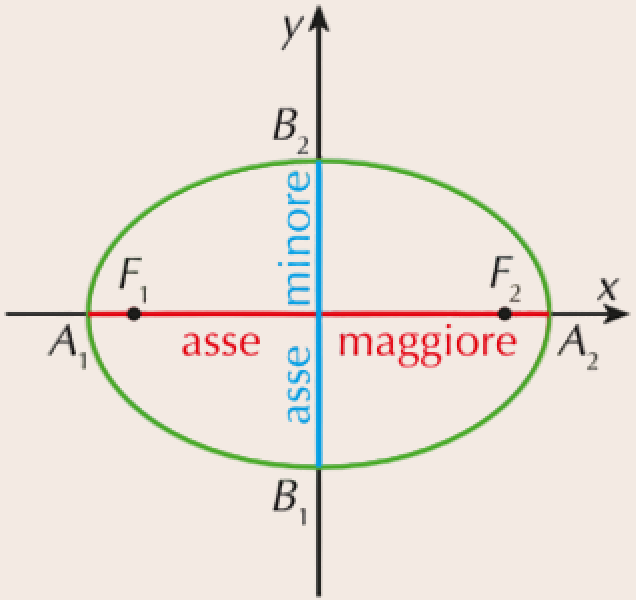
Ellisse

- Definizione
- Equazione
- Eccentricità
- Retta e ellisse
- Esercizi

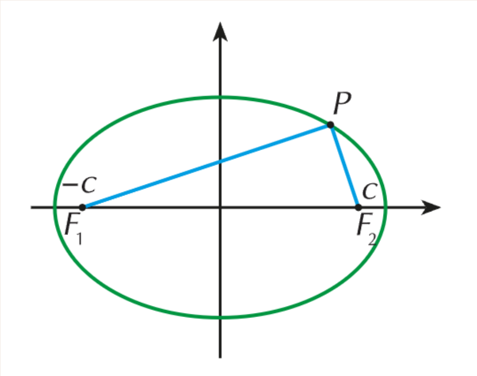
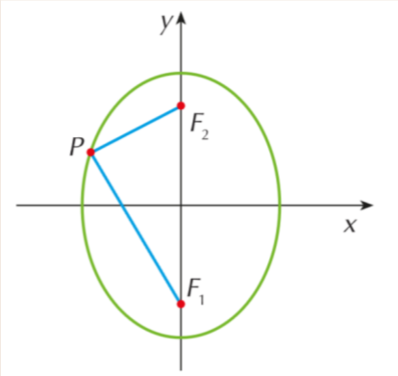
# Definizione

L'**ellisse** è il luogo geometrico dei punti *P* del piano per i quali è costante la somma delle stanze da due punti fissi $F_1$ e $F_2$ detti **fuochi**:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = costante$$

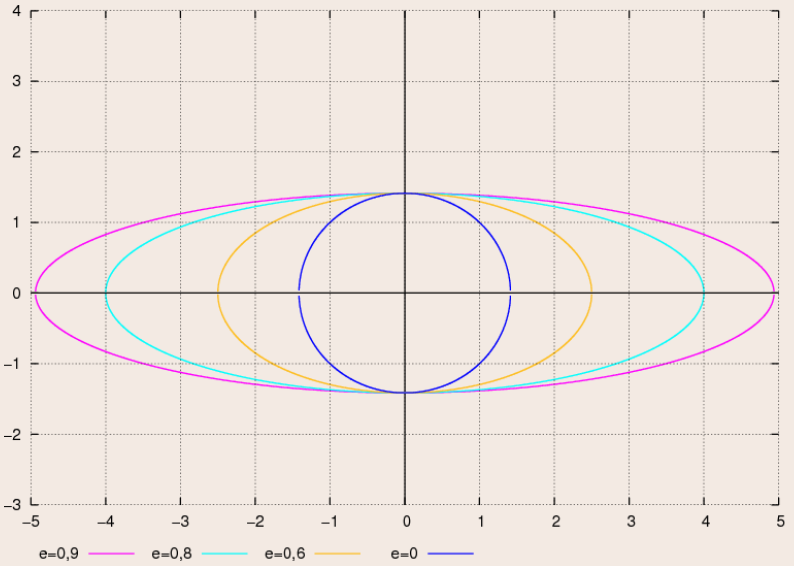


# Rette particolari

| Fuochi sull'asse x | Fuochi sull'asse y |
|---|---|
| $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad con\ a > b$ | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad con\ a < b$ |
| $F_1(-c, 0) \qquad F_2(c, 0) \qquad con\ c = \sqrt{a^2 - b^2}$ | $F_1(0, -c) \qquad F_2(0, c) \qquad \text{con}\ c = \sqrt{b^2 - a^2}$ |
|   |   |

# Eccentricità

L'eccentricità dell'ellisse è il valore della deformità dell'ellisse rispetto a una circonferenza.




Chiamiamo eccentricità il rapporto:

$$e = \frac{\text{semiasse focale}}{\text{semiasse maggiore}}$$

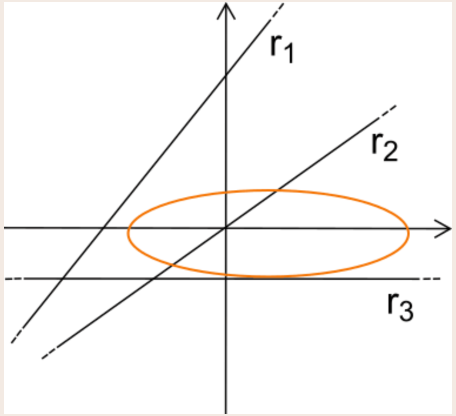
Se i fuochi appartengono all'asse x: $e = \frac{c}{a}$

Se i fuochi appartengono all'asse y: $e = \frac{c}{b}$

# Posizioni reciproca

Le intersezioni di un’ellisse e una retta si determinano risolvendo il sistema delle loro equazioni.
A seconda del discriminante $\Delta$ dell’equazione risolvente il sistema ellisse-retta, i casi che si posso presentare sono i seguenti:

- Retta secante
- Retta tangente
- Retta esterna



Esercizi

- Equazione ellisse conoscendo i vertici
- Equazione ellisse conoscendo misura assi-centro

# Esercizio 1/2

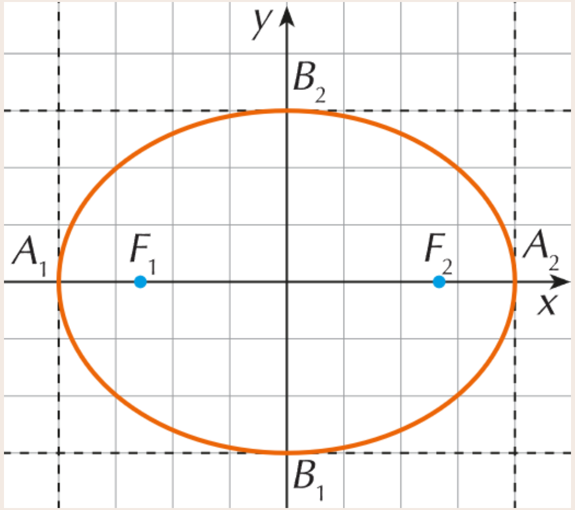
Date le coordinate dei vertici di un'ellisse, trova la sua equazione

Dati: $A_1\,(-4;0), A_2\,(-4;0), B_1\,(0;-3), B_2(0;3)$

Dalle coordinate dei vertici ricaviamo che a = 4 e b = 3.

Applicando questi dati all'equazione canonica dell'ellisse:

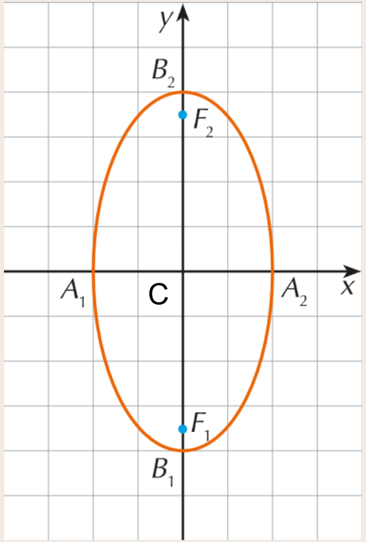
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{16^2}+\frac{y^2}{9^2}=1$$



# Esercizio 2/2

Data la misura degli assi e il centro di un'ellisse, trova la sua equazione

Dati: asse maggiore $B_1B_2 = 8$ asse minore $A_1A_2 = 4$ $C(0;0)$




Possiamo determinare le posizioni dei vertici dividendo per due i due assi: $A_1\,(-2;0), A_2\,(-2;0), B_1\,(0;-4), B_2(0;4)$

Applicando questi dati all'equazione canonica dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{16^2} = 1$$

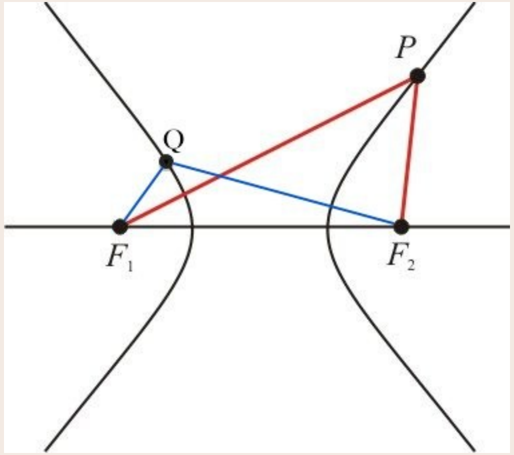
# Iperbole

- Definizione
- Equazione
- Iperbole particolare

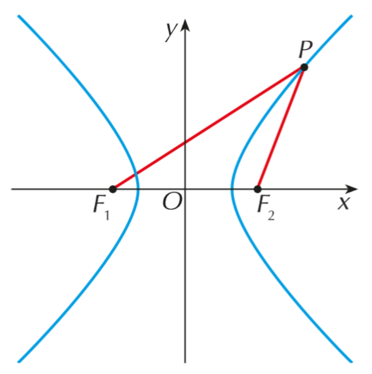
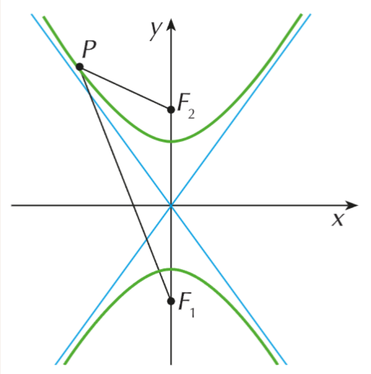
# Definizione

L'**iperbole** è il luogo geometrico dei punti P del piano per i quali è costante la differenza in modulo delle distanze da due punti fissi F1 e F2 detti **fuochi**:

$$|PF_1 - PF_2| = costante$$



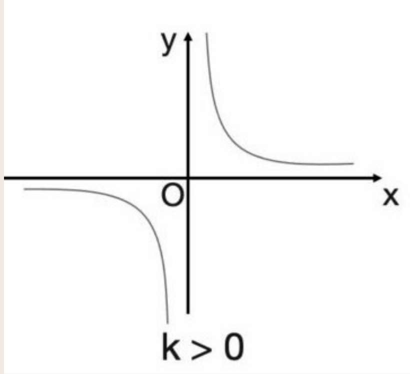
# Rette particolari

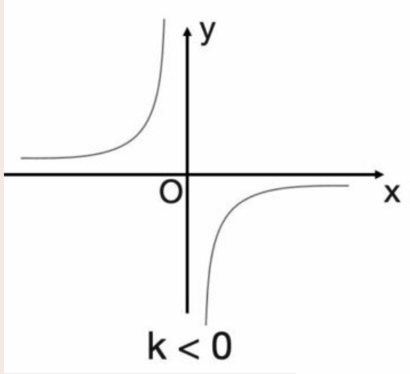
| Fuochi sull'asse x | Fuochi sull'asse y |
|---|---|
| $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ |
| $F_1(-c,0)$ $F_2(c,0)$ $con\ c = \sqrt{a^2 - b^2}$ | $F_1(0,-c)$ $F_2(0,c)$ con $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ |
|  |  |

# Iperbole particolare

Se ruotiamo la curva di 45° in senso orario oppure antiorario gli asintoti vanno a coincidere con gli assi cartesiani e si parla di iperbole riferita agli **asintoti.**

$$xy = k$$



# Fonti

Dizionario

YouMath

Studenti

Altervista

Wikihow

MeeTheSkilled

LezioniDiMatematica

"Tecniche matematiche 3A"

Materiale fornito dal professore