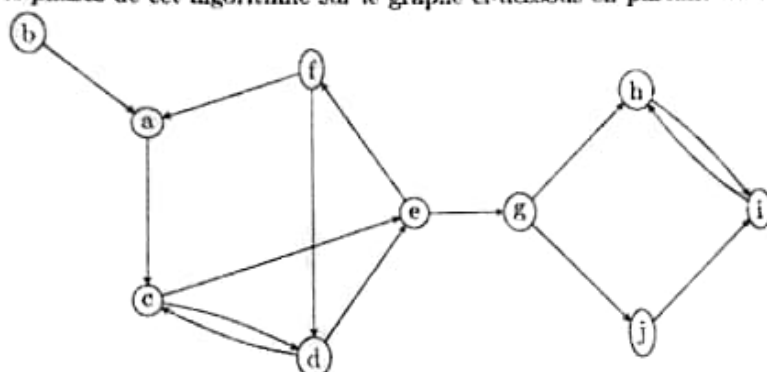


Examen — session 2

- L'épreuve dure deux heures.
- L'utilisation d'ordinateurs, de calculatrices, de tablettes ou de téléphones portables est interdite.
- Seules vos notes de cours et de TD sont autorisées.
- La clarté de la rédaction sera prise en compte dans la notation.
- Les exercices sont indépendants, prenez le temps de lire l'énoncé avant de commencer.

Question 1 : Kosaraju-Sharir.

- (a) Donnez et justifiez la complexité au pire cas de l'algorithme de Kosaraju-Sharir, en fonction du nombre de sommets et d'arcs du graphe orienté donné en entrée.
- (b) Illustrez les trois phases de cet algorithme sur le graphe ci-dessous en partant du sommet b .



- (c) Donnez le graphe des composantes fortement connexes correspondant.

Question 2 : Algorithmes gloutons.

L'université décide d'installer des fontaines à eau dans chacun de ses bâtiments. Pour que chaque membre du personnel n'ait pas à parcourir une distance trop grande au départ de son bureau avant de pouvoir se désaltérer, on choisit de placer ces fontaines aux intersections des couloirs, de sorte que les employés n'ont qu'à se diriger vers l'une des deux extrémités de leur couloir en quittant leur bureau pour atteindre une fontaine. Il est donc inutile de placer une fontaine aux deux extrémités d'un couloir. Pour des raisons de budget, l'université ne peut pas se permettre d'installer une fontaine à chaque intersection, et désire donc en disposer le moins possible.

On modélise le plan du site sous la forme d'un graphe non-orienté $G = (V, E)$ où chaque sommet représente un potentiel point d'installation d'une fontaine et les arêtes représentent les tronçons de couloir.

- (a) Reformulez le problème précédent comme un problème sur le graphe G .
- (b) Proposez une stratégie gloutonne pour calculer un placement de fontaines à eau qui permet de surveiller tous les tronçons.
- (c) Expliquez en quelques phrases pourquoi votre algorithme est correct (c'est-à-dire qu'il construit bien une solution).
- (d) Écrivez en pseudocode l'algorithme correspondant.
- (e) Votre stratégie est-elle optimale? Si oui, démontrez-le. Sinon, donnez un exemple de cas où la solution renvoyée par l'algorithme ne minimise pas le nombre de fontaines à eau.

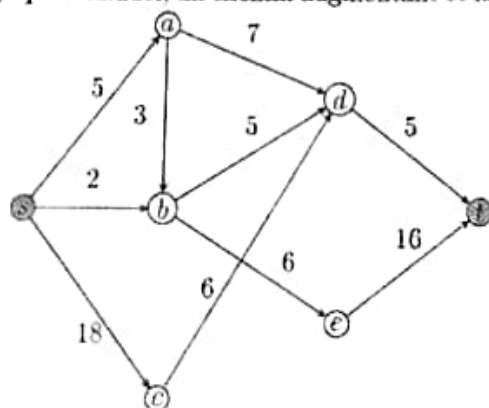
Question 3 : Modélisation.

Le bâtiment Copernic est en travaux, et l'entreprise de construction qui s'en charge doit maintenant planifier l'exécution de la dernière phase. À ces fins, elle dispose de la liste des tâches à accomplir, et des dépendances entre chaque paire de tâches (par exemple : avant de placer une fenêtre, il faut avoir terminé le mur qui va la contenir). La première tâche est bien entendu l'ouverture du chantier, et la dernière est l'inauguration du bâtiment. (Pour simplifier l'énoncé, on suppose que toutes les tâches prennent le même temps, et ces durées peuvent donc être ignorées.)

- Expliquez comment représenter les données fournies sous la forme d'un graphe. Ce modèle devra être utilisé pour répondre aux questions suivantes ; commencez donc par les lire pour vous assurer que votre modélisation sera pertinente.
- Quelle propriété le graphe doit-il vérifier pour que le projet soit réalisable en un temps fini ?
- En supposant qu'une solution existe, et qu'une seule équipe est disponible pour réaliser chaque tâche, donnez un algorithme permettant de déterminer un ordre dans lequel cette équipe devra réaliser les tâches. Dans la solution trouvée par l'algorithme, il faut donc que chaque tâche ne débute qu'après que toutes les tâches dont elle dépend aient été réalisées. Donnez également la complexité de votre algorithme. $\Theta(n^2)$
- Supposons maintenant qu'on dispose d'un nombre illimité d'équipes, qui peuvent donc travailler en parallèle sur des tâches indépendantes. Donnez un algorithme permettant d'estimer au mieux le minimum de temps que le projet prendra, de l'ouverture du chantier à l'inauguration des lieux, ainsi que sa complexité.
- Le chef de chantier veut minimiser le nombre d'équipes mobilisées pour le projet, tout en réalisant le projet le plus rapidement possible. Il souhaite donc savoir combien d'équipes seront nécessaires. Donnez un algorithme calculant le nombre maximum d'équipes qui devront travailler en parallèle sur le projet ainsi que sa complexité.

Question 4 : Flots.

- Quelle est la complexité au pire cas de l'algorithme de Ford-Fulkerson-Edmonds-Karp, en fonction du nombre de sommets et d'arcs du graphe donné en entrée ?
- Illustrez les étapes de l'algorithme de Ford-Fulkerson-Edmonds-Karp sur le graphe suivant, en donnant à chaque étape le graphe résiduel, un chemin augmentant et la valeur dont le flot augmente.



- Donnez la coupe minimale obtenue à la dernière étape de l'algorithme ainsi que la valeur du flot maximum.
- Supposons maintenant que l'on reçoive un réseau $G = (V, A, c)$ sur lequel un certain flot f a été calculé. Comment peut-on vérifier en temps $O(|A| + |V|)$ si f est bien un flot maximum ?