Examen — session 1

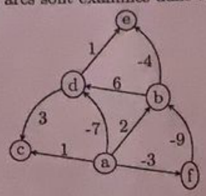
— L'épreuve dure **deux heures**.
— L'utilisation d'ordinateurs, de calculatrices, de tablettes ou de téléphones portables est interdite.
— Seules vos notes de cours et de TD sont autorisées.
— La clarté de la rédaction sera prise en compte dans la notation.
— Les exercices sont indépendants, prenez le temps de lire l'énoncé avant de commencer.

Question 1.

(a) Quelle est la complexité de l'algorithme de Bellman-Ford, en fonction du nombre de sommets et d'arêtes du graphe donné en entrée ? O(|V||A|)

(b) Quand est-il recommandé d'utiliser l'algorithme de Dijkstra plutôt que celui de Bellman-Ford et inversement ? Pourquoi ? Bellman-Ford si il y a des poids négatifs, sinon Dijkstra car il est plus optimisé.

(c) Exécutez l'algorithme de Bellman-Ford sur le graphe orienté ci-dessous à partir du sommet a, en précisant à chaque étape les valeurs du tableau des distances. **Attention : limitez-vous aux deux premières passes** sur l'ensemble des arcs, en donnant le déroulement complet de l'algorithme ; n'oubliez pas que les sommets et les arcs sont examinés dans l'ordre lexicographique.



etape	a	b	c	d	e	f
0.	0	I	I	I	I	I
1.a	0	2	1	-7	I	-3
.b	0	2	1	-7	-2	-3
.c	0	2	1	-7	-2	-3
.d	0	2	-4	-7	-6	-3
.e	0	2	-4	-7	-6	-3
.f	0	-12	-4	-7	-6	-3
2.a	0	-12	-4	-7	-6	-3
.b	0	-12	-4	-7	-16	-3
.c	0	-12	-4	-7	-16	-3
.d	0	-12	-4	-7	-16	-3
.e	0	-12	-4	-7	-16	-3
.f	0	-12	-4	-7	-16	-3

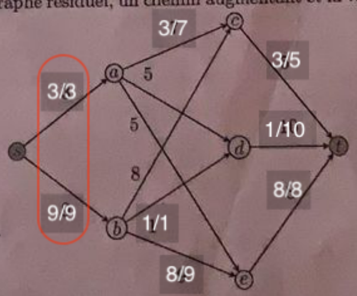
Question 2.

(a) Quelle est la complexité au pire cas de l'algorithme de Ford-Fulkerson-Edmonds-Karp, en fonction du nombre de sommets et d'arcs du graphe donné en entrée ? O(|V||A|^2)

(b) Illustrez les étapes de l'algorithme de Ford-Fulkerson-Edmonds-Karp sur le graphe suivant, en donnant à chaque étape le graphe résiduel, un chemin augmentant et la valeur dont le flot augmente.

Flot max = 12
Coupe min = {S} + {A,B,C,D,E,T}
= 12

Comme les capacités sont paires, la sommes des capacités des arcs saturés formant la coupe sera paire également. CQFD.



(c) Donnez la coupe minimale obtenue à la dernière étape de l'algorithme ainsi que la valeur du flot maximum.

(d) Soit G un réseau de flot dont les capacités de tous les arcs sont paires. Prouvez que la valeur d'un flot maximum circulant sur ce réseau est paire.

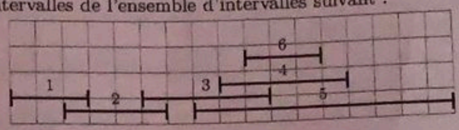
(e) Soit G un réseau de flot, et e un arc de ce réseau. Notons G' le réseau obtenu à partir de G en augmentant la capacité de l'arc e d'une quantité $\alpha > 0$ (le reste de G ne change pas). Notons également $|f|$ et $|f'|$ les valeurs des flots maximums sur G et G', respectivement. Prouvez que $|f'| \leq |f| + \alpha$.

(f) On souhaite calculer la valeur d'un flot maximum sur un réseau de flot G avec la contrainte supplémentaire que chaque sommet v de G ne peut pas recevoir une quantité totale de flot excédant un seuil k_v. Comment modifier G de manière à pouvoir résoudre ce problème à l'aide d'un algorithme de calcul de flot maximum classique ?

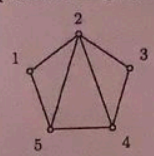
Question 3.

Un graphe G est un *graphe d'intervalles* s'il existe un ensemble d'intervalles sur la droite réelle tel que chaque intervalle de cet ensemble est un sommet de G et deux sommets de G sont adjacents si et seulement si les intervalles correspondants ont une intersection non vide.

(a) Dessinez le graphe d'intervalles de l'ensemble d'intervalles suivant :



(b) Donnez un ensemble d'intervalles correspondant au graphe suivant :



(c) Prouvez que tout graphe d'intervalles G est *triangulé*, c'est-à-dire que G ne contient pas de cycle induit de longueur > 3.

Rappel : un sous-graphe induit par un ensemble S de sommets est un sous-graphe obtenu en prenant toutes les arêtes du graphe dont les deux extrémités sont dans S. Dans l'exemple ci-dessus, le sous-graphe induit par 2, 4, et 5 est un cycle de longueur 3 ; celui induit par 1, 2, 4 et 5 n'est pas un cycle de longueur 4 même s'il en contient un.

Question 4.

Le village d'Astérix est en crise : les Romains approchent et Panoramix arrive au bout de ses réserves de potion magique. Il offre sa dernière dose à Astérix, et lui confie une carte avec les emplacements des ingrédients dont il aura besoin pour en préparer de nouvelles rations. Astérix désire trouver un itinéraire lui permettant de revenir au village le plus vite possible avec tous les ingrédients demandés afin d'éviter que l'effet de la potion ne s'estompe avant qu'il ne soit rentré.

(a) Modélisez le problème d'Astérix sous la forme d'un problème sur un graphe.

(b) Proposez une stratégie gloutonne pour résoudre ce problème.

(c) Écrivez en pseudocode l'algorithme correspondant.

(d) Votre stratégie est-elle optimale ? Si oui, démontrez-le. Sinon, donnez un exemple de cas où la solution renvoyée par l'algorithme n'est pas optimale.