Cardinaux, Ordinaux et Induction Transfinie

Samir Gueblaoui   Sacha Fela

11 janvier 2024

Table des matières

1 Introduction

Les cardinaux et les ordinaux sont des notions fondamentales de la théorie des ensembles. La notion de cardinal nous permet de définir puis de géneraliser la notion intuitive de "taille" d'un ensemble. Les ordinaux, quant à eux, sont des nombres qui décrivent l'ordre dans lequel les éléments d'un ensemble sont arrangés ou indexés.

L'étude des cardinaux nous permettra d'éclaircir la notion d'infini qui est au premier abord très peu intuitif. Nous verrons nottament qu'il existe des infinis plus grand que d'autre.

Les ordinaux nous permetterons d'obtenir des résultat fondamentaux sur les cardinaux et d'utiliser un outil appellé induction qui généralise le principe de récurrence. Cela nous permettra de résoudre des problèmes non intuitif tel que quantifier le cardinal des boréliens.

En résumé, les cardinaux et les ordinaux sont des outils mathématiques puissants qui nous permettent de décrire la taille et la structure des ensembles.

Nous nous placerons dans la théorie ZFC qui est la théorie la plus utilisée en mathématiques mais certaines notions qui requierent une veritable compréhension du concept d'ensemble peuvent être définis de manière plus "rigoureuse" en ce plaçant dans d'autres théories comme par exemple la théorie NBG.

2 Cardinaux

2.1 Définition

Nous allons définir ici deux outils qui permettrons de comparer deux ensembles.

Une bijection entre deux ensembles associe toujours à un élément de l'ensemble d'arrivé un unique élément de l'ensemble de départ. L'ensemble de départ a par conséquent la même "taille" que l'ensemble d'arrivé. Il en découle alors la définition suivante.

Définition 2.1 (Avoir même cardinal)**.** *Soit A et B deux ensembles.*

On dit que A et B ont même cardinal (noté $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$*) s'il existe une bijection de A vers B.*

Voici alors trois exemples importants de bijections explicites entre deux ensembles

Exemple 2.2. $]0;1[$ *et* $\mathbb{R}$ *ont même cardinal.*
En effet :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to &]0;1[\\ & & x & \mapsto & \frac{1}{2}\tanh x + \frac{1}{2} \end{array}$$

est une bijection.

Exemple 2.3. $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ *et* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *ont même cardinal.*
En effet :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathscr{P}(\mathbb{N}) & \to & \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ & & X & \mapsto & \mathbb{1}_X \end{array}$$

est une bijection.

Exemple 2.4. $\mathbb{N}$ *et* $\mathbb{N}^2$ *ont même cardinal.*
En effet :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ & & (n,p) & \mapsto & \frac{(n+p)^2+p+3n}{2} \end{array}$$

est une bijection.

Une injection entre deux ensembles associe à un élément de l'ensemble d'arrivé aucun ou un unique élément de l'ensemble de départ. L'ensemble de départ a par conséquent une "taille" infèrieure à l'ensemble d'arrivé. On en déduit la définition suivante.

Définition 2.5. *Soit A et B deux ensembles.*

On dit que A a un cardinal inférieur au cardinal de B (noté $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B)$*) s'il existe une injection de A vers B.*

De plus on dit que A a un cardinal strictement inférieur au cardinal de B (noté $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(B)$*) s'il existe une injection de A vers B mais il n'existe pas de bijection entre eux.*

Remarque 2.6. *On peut être tenté de définir un cardinal comme une classe d'équivalence de la relation "avoir même cardinal", or pour un ensemble A on aurait* $\mathrm{Card}(A) = \{B \in E \mid$ *il existe une bijection de* $A \to B\}$ *avec E "l'ensemble de tous les ensembles", or cette "ensemble de tous les ensembles" n'est pas un esemble dans la théorie ZFC (de part le paradoxe de Russell). Nous allons donc poser pour la suite un ensemble "très grand" (au sens de $\leq$ de la définition 2.5) et étudier les ensembles de cardinal strictement infèrieure à celui-ci. On appellera alors cardinal la classe d'équivalence d'un élément plus petit que cette ensemble "très grand" de la relation "avoir même cardinal". L'ensemble des ensembles strictement infèrieure à un ensemble E est quant-à-lui bien un ensemble dans ZFC car il a même cardinal que E (voir théorème 3.24) et ne se contient donc pas lui même.*

Propriété 2.7. $\leq$ *est réflexive et transitive.*

Démonstration. Soit α, β et γ trois cardinaux et A, B et C des représentant respectif.

Réflexivité : $\alpha = \alpha$ car la fonction fonction Id_A est une bijection de A dans A et on a donc bien $\alpha \leq \alpha$.

Transitivité : On suppose que $\alpha \leq \beta$ et $\beta \leq \gamma$. On pose les injections $f : A \to B$ et $g : B \to C$ alors $g \circ f$ est une injection de $A \to C$ et donc $\alpha \leq \gamma$

□

2.2 Théorème de Cantor et de Cantor-Bernstein

Nous pouvons déduire des propriétés de la bijection et de l'injection deux théorèmes fondamentaux sur les ensembles.

Théorème 2.8. *(Cantor-Bernstein)*

Soit E et F deux ensembles. Si

$$\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(F) \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{Card}(F) \leq \mathrm{Card}(E)$$

alors $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$

Remarque 2.9. *Ce résultat ne choque pas l'intuition compte tenu de l'analogie marquante avec les relations d'ordre usuelles (sur les réels ou les entiers par exemple). Le théoreme de Cantor-Bernstein correspond ainsi à l'antisymetrie de $\leq$.*

Démonstration. Soit E et F deux ensembles

Montrons d'abord que si f est une injection de E vers F avec $F \in \mathscr{P}(E)$ alors il existe une bijection g de E vers F

Soit $\begin{cases} C_0 = E \backslash F \\ \forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = f(C_n) \end{cases}$ et $C = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} C_n$

Soit alors :

$$\begin{array}{rcccl} g & : & E & \to & F \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in C \\ x & \text{si } x \notin C \end{cases} \end{array}$$

On a bien $g(E) \subset F$ car $f(E) \subset F$ et si $x \notin C$ alors $x \notin C_0$ et donc $x \in F$.De plus g est injective car g envoie injectivement C dans

$$f(C) = f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(C_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_{n+1} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} C_m \subset C$$

(car f injective) et envoie injectivement $E \backslash C = F \backslash C$ dans $F \backslash C$ (car $Id_{F \backslash C}$ injective). Montrons maintenant que g est surjective : Soit $y \in F$

Si $y \in C$ alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $y \in C_n$ ($y \notin C_0$ car $y \in F$) et donc $y \in f(C_{n-1})$ donc il existe $x \in C_{n-1}$ tel que $f(x) = y$ et donc tel que $g(x) = y$.

Si $y \notin C$ alors $g(y) = y$. On a donc bien g surjective. Et donc g bijective. Montrons maintenant le théorème de Cantor-Bernstein. Soit $u : E \to F$ injective et $v : F \to E$ injective. Soit alors

$$\begin{array}{rcccl} w & : & F & \to & v(F) \\ & & x & \mapsto & v(x) \end{array} \text{ bijective (car } v \text{ injective)}$$

on a $h := w \circ u$ une injection de E vers $v(F) \in \mathscr{P}(E)$ (comme composée d'injections) donc il existe une bijection $f : E \to v(F)$ (D'après la proprété demontré si-dessus) et donc $g := w^{-1} \circ f$ est une bijection de E dans F (comme composée de bijections).

Conclusion : $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$ □

Le théorème de Cantor-Bernstein est très pratique lorsque les ensembles n'ont pas les même propriétés topologiques, en effet on ne peut par exemple pas trouver de bijection continue entre un ensemble ouvert et un ensemble non ouvert.

Exemple 2.10. $]0;1[$ *et* $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ *ont même cardinal.*
En effet : On note $0a_0a_1a_2...$ *l'écriture en base 10 d'un réel de* $]0;1[$ *avec les* $a_i \in \{0,...,9\}$ *tel que la suite ne soit pas stationnaire à* 9*. Alors*

$$\begin{array}{cccc} f & : &]0;1[& \to & \mathscr{P}(\mathbb{N}) \\ & & 0a_0a_1a_2... & \mapsto & \{a_i + 10^i, i \in \mathbb{N}\} \end{array} \quad \textit{est injective}$$

$$\begin{array}{cccc} g & : & \mathscr{P}(\mathbb{N}) & \to &]0;1[\\ & & A & \mapsto & 0\mathbb{1}_A(1)\mathbb{1}_A(2)\mathbb{1}_A(3)... \end{array} \quad \textit{est injective}$$

D'où le résultat d'après le théorème de Cantor-Bernstein.

Théorème 2.11 (Cantor)**.** *Soit* E *un ensemble alors on a :*

$$\mathrm{Card}(E) < \mathrm{Card}(\mathscr{P}(E))$$

Démonstration. On remaque :

$$\begin{array}{cccc} f & : & E & \to & \mathscr{P}(E) \\ & & x & \mapsto & \{x\} \end{array}$$

est une injection. Donc $\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(\mathscr{P}(E))$.

Supposons maintenant qu'il existe une surjection f de E vers $\mathscr{P}(E)$. Soit

$$P = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}.$$

$P \in \mathscr{P}(E)$ donc il existe $p \in E$ tel que $f(p) = P$ (car f surjective).

Si $p \notin P$ alors $p \in f(p)$ et donc $p \in P$. (Contradiction)

Si $p \in P$ alors $p \notin f(p)$ et donc $p \notin P$. (Contradiction)

Donc f n'est pas surjective.

Il n'existe donc pas de bijection de E vers $\mathscr{P}(E)$, donc $\text{Card}(E) \neq \text{Card}(\mathscr{P}(E))$.

On conclu que :

$$\text{Card}(E) < \text{Card}(\mathscr{P}(E))$$

$\square$

En combinant les deux théorèmes de Cantor et Cantor-Bernstein on retrouve un résultat très connu dans l'exemple suivant.

Exemple 2.12. *$\mathbb{R}$ est indénombrable. En effet :* $\text{Card}(\mathbb{R}) = \text{Card}(]0;1[)$ *d'après l'exemple 2.2 et* $\text{Card}(\mathscr{P}(\mathbb{N})) = \text{Card}(]0;1[)$ *d'après l'exemple 2.10 donc* $\text{Card}(\mathscr{P}(\mathbb{N})) = \text{Card}(\mathbb{R})$. *D'après le théorème de cantor on a* $\text{Card}(\mathbb{N}) < \text{Card}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$ *donc* $\text{Card}(\mathbb{N}) < \text{Card}(\mathbb{R})$

2.3 Opérations sur les Cardinaux

Définissons maintenant différentes opérations sur les cardinaux.

Définition 2.13 (Addition)**.** *Soit A et B deux ensembles tel que $A \cap B = \varnothing$.*

$$\text{Card}(A) + \text{Card}(B) = \text{Card}(A \cup B)$$

Définition 2.14 (Multiplication)**.** *Soit A et B deux ensembles.*

$$\text{Card}(A) \times \text{Card}(B) = \text{Card}(A \times B)$$

Définition 2.15 (Puissance)**.** *Soit A et B deux ensembles.*

$$\text{Card}(A)^{\text{Card}(B)} = \text{Card}(\{\textit{application de } B \to A\})$$

Remarque 2.16. *Ces opérations sont bien définies et ne dépendent pas des représentants.*

Démonstration. Soit A, B, C et D des ensembles tel que : $A \cap C = B \cap D = \varnothing$ $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$ et $\text{Card}(C) = \text{Card}(D)$. Soit alors f une bijection de $A \to B$ et g une bijection de $C \to D$ alors

$$\begin{array}{rccc} h & : & A \cup C & \to & B \cup D \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A \\ g(x) & \text{si} \quad x \in C \end{cases} \end{array}$$

est une bijection.

Si $A \cap B \neq \varnothing$ on remarque que $\mathrm{Card}(\{0\} \times A) = \mathrm{Card}(A)$, $\mathrm{Card}(\{1\} \times B) = \mathrm{Card}(B)$ et $(\{0\} \times A) \cap (\{1\} \times B) = \varnothing$. On conclu que l'addition est toujours défini et ne dépend pas des représentants des cardinaux. On retouve ce résultat de manière analogue pour les deux autres opérations. □

Il vient alors avec des bijections bien choisies les propriétés suivante.

Propriété 2.17. *Soit A, B et C trois ensembles de cardinal respectif α, β et γ. Alors*

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta &= \beta + \alpha \\
\alpha \times \beta &= \beta \times \alpha \\
(\alpha + \beta) + \gamma &= \alpha + (\beta + \gamma) \\
(\alpha \times \beta) \times \gamma &= \alpha \times (\beta \times \gamma) \\
(\alpha^\beta)^\gamma &= \alpha^{\beta \times \gamma}
\end{aligned}$$

Démonstration. On a $A \cup B = B \cup A$ d'où $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

On a :

$$\begin{array}{cccc} f : & A \times B & \to & B \times A \\ & (a,b) & \mapsto & (b,a) \end{array}$$

une bijection d'où $\alpha \times \beta = \beta \times \alpha$.

On a $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ d'où $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

On a :

$$\begin{array}{cccc} f : & (A \times B) \times C & \to & A \times (B \times C) \\ & ((a,b),c) & \mapsto & (a,(b,c)) \end{array}$$

une bijection d'où $(\alpha \times \beta) \times \gamma = \alpha \times (\beta \times \gamma)$.

On a :

$$\begin{array}{cccc} f : & A^{B \times C} & \to & (A^B)^C \\ & g & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} C & \to & A^B \\ c & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} B & \to & A \\ b & \mapsto & g(b,c) \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array}$$

est une bijection d'où $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \times \gamma}$. □

Définition 2.18. *On notera :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(\varnothing) &=: 0\\ \mathrm{Card}(\{\varnothing\}) &=: 1\\ \mathrm{Card}(\{\varnothing,\{\varnothing\}\}) &=: 2\\ \mathrm{Card}(\mathbb{N}) &=: \aleph_0\\ \mathrm{Card}(\mathbb{R}) &=: \mathbf{c}\end{aligned}$$

Remarque 2.19. *On a vu dans l'exemple 2.12 que* $\mathrm{Card}(\mathbb{R}) = \mathrm{Card}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$ *et l'exemple 2.3 nous affirme que* $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(\mathbb{N})) = \mathrm{Card}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$*. On conclu donc que* $\mathbf{c} = 2^{\aleph_0}$

Exemple 2.20. $\mathbf{c} = \mathbf{c}^2$
En effet : $\mathbf{c}^2 = (2^{\aleph_0})^2 = (2^{\aleph_0 \times 2})$ *or il est facile de voir que* $\aleph_0 \times 2 = \aleph_0$ *donc* $\mathbf{c}^2 = 2^{\aleph_0} = \mathbf{c}$

3 Ordinaux

3.1 Définition

Définition 3.1 (Ensemble bien ordonné)**.** *Soit A un ensemble, et $\leq_A$ une relation d'ordre sur A. On dit que $\mathscr{A} = (A, \leq_A)$ est un ensemble bien ordonné si toute partie non vide de A admet un plus petit élément, i.e :*

$$\forall B \in \mathscr{P}(A), B \neq \varnothing \Rightarrow \exists b \in B \text{ tel que } \forall x \in B, b \leq_A x.$$

Voici un exemple d'ensemble bien ordonné.

Exemple 3.2. $(\mathbb{Z}, \leq_{\mathbb{Z}})$ *est un ensemble bien ordonné si on défini :*

$$\forall (n,p) \in \mathbb{Z}, n \leq_{\mathbb{Z}} p \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0, p \in \mathbb{Z} & ou \\ |n| = |p|, n < p & ou \\ |n| < |p| \end{cases}$$

Comme pour les cardinaux on peut définir la notion d'avoir même ordinal.

Définition 3.3 (Avoir même ordinal)**.** *Soient $\mathscr{A} = (A, \leq_A)$ et $\mathscr{B} = (B, \leq_B)$ deux ensembles bien ordonnées. $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ ont même ordinal (noté :* $\mathrm{Ord}(\mathscr{A}) = \mathrm{Ord}(\mathscr{B})$*) s'il existe une bijection f de $A \to B$ qui conserve le bon ordre.*

$$(ie\ \forall (x,y) \in A^2, x \leq_A y \Rightarrow f(x) \leq_B f(y)).$$

Exemple 3.4. $(\mathbb{N}, \leq)$ *et* $(\mathbb{Z}, \leq_{\mathbb{Z}})$ *ont même ordinal. Il suffit de prendre la bijection :*

$$\begin{array}{rcl} f \; : \; \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ k & \mapsto & \begin{cases} 2k & si\ k \geq 0 \\ -2k-1 & si\ k < 0 \end{cases} \end{array}$$

en effet f conserve le bonne ordre.

De même que pour les cardinaux on pourra définir la notion d'avoir un ordinal plus petit qu'un autre mais nous devons d'abord introduire les segments d'un ensemble bien ordonné.

Définition 3.5 (Segment)**.** *Soit $\mathscr{A} = (A, \leq_A)$ un ensemble bien ordonné. On appelle segment de $\mathscr{A}$ tous les ensembles bien ordonnés $(A_m, \leq_{A_m})$ où $A_m = \{x \in A, x <_A m\}$ avec $m \in A$ et $\leq_{A_m}$ la restriction de $\leq_A$ à A_m.*

Propriété 3.6. *Soit $\mathscr{A} = (A, \leq_A)$ et $\mathscr{B} = (B, \leq_B)$ deux ensembles bien ordonnés. Soit f une bijection qui conserve le bon ordre de $\mathscr{A} = (A, \leq_A)$ vers $\mathscr{B} = (B, \leq_B)$, alors $\forall a \in A, f(A_a) = B_{f(a)}$*

Démonstration. Soit $y = f(x) \in f(A_a)$ alors $x <_A a$, donc $f(x) <_B f(a)$ car f conserve le bon ordre et donc $f(x) = y \in B_{f(a)}$ d'où $f(A_a) \subset B_{f(a)}$. Soit maintenant $y \in B_{f(a)}$ alors $y <_B f(a)$, donc $f^{-1}(y) <_A a$ car f^{-1} conserve le bon ordre, et donc $f^{-1}(y) \in A_a$, donc $y \in f(A_a)$ d'où $B_{f(a)} \subset f(A_a)$.

Conclusion :

$$f(A_a) = B_{f(a)}.$$

□

Théorème 3.7. *Soit $\mathscr{A} = (A, \leq_A)$ un ensemble bien ordonné.*
Soit $(A_m, \leq_{A_m})$ et $(A_n, \leq_{A_n})$ deux segment de $\mathscr{A}$ tel que :

$$\mathrm{Ord}(A_m, \leq_{A_m}) \neq \mathrm{Ord}(A_n, \leq_{A_n})$$

alors $(m \neq n)$.

De plus on a :

$$\mathrm{Ord}(A_m, \leq_{A_m}) \neq \mathrm{Ord}(\mathscr{A})$$

Démonstration. Soit f une bijection qui consrve le bon ordre de A_m vers A. Soit $P = \{x \in A_m, f(x) \neq x\}$. On a alors $P \in \mathscr{P}(A_m)$ et $P \neq \varnothing$ car

$f^{-1}(m) \in P$. Soit a le plus petit élément de P, alors $f(a) \neq a$ et $\forall x \in A$ tel que $x <_{A_m} a$, on a $f(x) = x$. Or $f(A_a) = A_{f(a)}$ (d'après la propriété 3.6) donc $A_a = A_{f(a)}$ donc $a = f(a)$ (Contradiction).
Conclusion : $\text{Ord}(A_m, \leq_{A_m}) \neq \text{Ord}(\mathscr{A})$. De plus si $m <_A n$, on a A_m un segment de A_n d'où : $\text{Ord}(A_m, \leq_{A_m}) \neq \text{Ord}(A_n, \leq_{A_n})$ □

3.2 Relations et opérations sur les Ordinaux

Définissons maintenant les différentes opérations sur les ordinaux.

Définition 3.8 (Inégalités)**.** *Soit* $\mathscr{A} = (A, \leq_A)$ *et* $\mathscr{B} = (B, \leq_B)$ *deux ensembles bien ordonné.*

On dit que $\mathscr{A}$ *à un ordinal strictement inférieur à* $\mathscr{B}$ *(noté* $\text{Ord}(\mathscr{A}) < \text{Ord}(\mathscr{B})$*) s'il existe* $m \in B$ *tel que* $\text{Ord}(\mathscr{A}) = \text{Ord}((B_m, \leq_{B_m}))$.

On dit que $\mathscr{A}$ *à un ordinal inférieur à* $\mathscr{B}$ *(noté* $\text{Ord}(\mathscr{A}) \leq \text{Ord}(\mathscr{B})$*) si* $\text{Ord}(\mathscr{A}) < \text{Ord}(\mathscr{B})$ *ou* $\text{Ord}(\mathscr{A}) = \text{Ord}(\mathscr{B})$

Remarque 3.9. *Comme pour les cardinaux on ne peut pas définir un ordinal comme la classe d'équivalence de la relation "avoir même ordinal". En effet elles supposent qu'il existe un ensemble de tous les ensembles. Le lemme de Zermelo (5.2) nous permetterait donc d'y associer un bon ordre, et donc ce dit ensemble se contiendrait lui meme. Pour palier à ce problème, on pose un ensemble "très grand" munit d'un bon ordre, qui ne nous restreint pas pour les resultats que nous voulons montrer. Il suffit par exemple de prendre l'ensemble des parties ou les parties des parties de l'ensemble qu'on souhaite étudier. On appellera alors ordinal la classe d'équivalence d'un ensemble bien ordonné strictement inférieur à notre ensemble bien ordonné "très grand" pour la relation "avoir même ordinal". La cohérence de ce point de vue est assurée par le théorème 3.24*

Remarque 3.10. *La définition 3.8 ne dépend que des ordinaux et pas de leurs représentants* $\mathscr{A}$ *et* $\mathscr{B}$ *i.e : pour* $\mathscr{C} = (C, \leq_C)$ *et* $\mathscr{D} = (D, \leq_D)$ *on a :*

$$\begin{cases} \text{Ord}(\mathscr{A}) = \text{Ord}(\mathscr{C}) \\ \text{Ord}(\mathscr{B}) = \text{Ord}(\mathscr{D}) \end{cases} \Longrightarrow (\text{Ord}(\mathscr{A}) < \text{Ord}(\mathscr{B}) \Leftrightarrow \text{Ord}(\mathscr{C}) < \text{Ord}(\mathscr{D}))$$

Démonstration. Supposons que $\text{Ord}(\mathscr{A}) = \text{Ord}(\mathscr{C})$, $\text{Ord}(\mathscr{B}) = \text{Ord}(\mathscr{D})$ et $\text{Ord}(\mathscr{A}) < \text{Ord}(\mathscr{B})$ alors il existe m tel que $\text{Ord}(\mathscr{A}) = \text{Ord}((B_m, \leq_{B_m}))$

donc $\mathrm{Ord}(\mathscr{C}) = \mathrm{Ord}((B_m, \leq_{B_m}))$.
Soit alors une fontion f de $\mathscr{B} \to \mathscr{D}$ bijective qui conserve le bon ordre.

On remarque que : $\mathrm{Ord}((D_{f(m)}, \leq_{D_{f(m)}})) = \mathrm{Ord}((B_m, \leq_{B_m}))$, en effet soit $f(x) \in f(B_m)$, on a $x \leq_B m$ donc $f(x) \leq_D f(m)$ donc $f(x) \in D_{f(m)}$.

De même soit $f^{-1}(y) \in (f^{-1})(D_{f(m)})$, on a $y \leq_D f(m)$ donc $f^{-1}(y) \leq_B m$ donc $f^{-1}(y) \in B_m$.

La fonction qui restreint f de B_m vers $D_{f(m)}$ est donc bijective, de plus elle conserve le bonne ordre car f conserve le bonne ordre.

D'où $\mathrm{Ord}((D_{f(m)}, \leq_{D_{f(m)}})) = \mathrm{Ord}((B_m, \leq_{B_m}))$.

On a donc $\mathrm{Ord}((D_{f(m)}, \leq_{D_{f(m)}})) = \mathrm{Ord}(\mathscr{C})$. Il existe donc $p = f(m) \in \mathscr{D}$ tel que $\mathrm{Ord}((D_p, \leq_{D_p})) = \mathrm{Ord}(\mathscr{C})$ donc $\mathrm{Ord}(\mathscr{C}) < \mathrm{Ord}(\mathscr{D})$.

La réciproque est analogue au sens direct. □

Propriété 3.11. *$\leq$ est réfléxive, antisymétrique et transitive.*

Démonstration. Soit A,B et C trois ensemble bien ordonné d'ordinal α, β et γ.

Réfléxivité : $\alpha \leq \alpha$ car $\alpha = \alpha$.

Transitivité : Supposons que $\alpha \leq \beta$, $\beta \leq \gamma$. Si $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$ il existe f bijection qui conserve le bon ordre de A dans un segment B_m de B et g bijection qui conserve le bon ordre de B dans un segment de C et par conséquent $g \circ f$ est une bijection qui conserve le bon ordre de A dans le segment $C_{g(m)}$ de C d'où $\alpha < \gamma$. Si $\alpha = \beta$ et $\beta < \gamma$ on a directement une bijection de A vers un segment de C. De même si $\beta = \gamma$ et $\alpha < \beta$ et si $\alpha = \beta$ et $\beta = \gamma$.

Antisymétrie : Supposons que $\alpha \leq \beta$, $\beta \leq \alpha$ et que $\alpha \neq \beta$ alors $\alpha < \beta$ et $\alpha > \beta$. Alors il existe f bijection qui conserve le bon ordre de A dans un segment B_m de B et g bijection qui conserve le bon ordre de B dans un segment de A et par conséquent $g \circ f$ est une bijection qui conserve le bon ordre de A dans le segment $A_{g(m)}$ de A (contradiction) d'où $\alpha = \beta$ □

Définition 3.12 (Addition)**.** *Soit $\mathscr{A} = (A, \leq_A)$ et $\mathscr{B} = (B, \leq_B)$ deux ensembles bien ordonné tel que $A \cap B = \varnothing$.*

$$\mathrm{Ord}(\mathscr{A}) + \mathrm{Ord}(\mathscr{B}) = \mathrm{Ord}((A \cup B, \leq_{AB}))$$

où $\leq_{AB}$ est défini par :

$$\forall (x,y) \in (A \cup B)^2, x \leq_{AB} y \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A, y \in B & ou \\ x \in A, y \in A, x \leq_A y & ou \\ x \in B, y \in B, x \leq_B y. \end{cases}$$

Remarque 3.13. *$\leq_{AB}$ est un bon ordre sur $A \cup B$.*

Démonstration. Soit $C \in \mathscr{P}(A \cup B)$. Si $C \cap A \neq \varnothing$ alors il existe $a \in C \cap A \in \mathscr{P}(A)$ tel que $\forall x \in C \cap A, a \leq_A x$ et donc $a \leq_{AB} x$. Soit alors $x \in C$

si $x \notin B$ alors $a \leq_{AB} x$ (car $x \in C \cap A$).

si $x \in B$ alors $a \leq_{AB} x$ (car $a \in A$)

Si $C \cap A = \varnothing$ alors il existe $b \in C \in \mathscr{P}(B)$ tel que $\forall x \in C, b \leq_B x$ et donc $b \leq_{AB} x$. □

Remarque 3.14. *La définition 3.12 ne dépend que des ordinaux et pas de leurs représentants $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ i.e : pour $\mathscr{C} = (C, \leq_C)$ et $\mathscr{D} = (D, \leq_D)$ on a :*

$$\begin{cases} \mathrm{Ord}(\mathscr{A}) = \mathrm{Ord}(\mathscr{C}) \\ \mathrm{Ord}(\mathscr{B}) = \mathrm{Ord}(\mathscr{D}) \end{cases} \Longrightarrow \mathrm{Ord}(\mathscr{A}) + \mathrm{Ord}(\mathscr{B}) = \mathrm{Ord}(\mathscr{C}) + \mathrm{Ord}(\mathscr{D})$$

Démonstration. Il suffit de montrer que :

$$\mathrm{Ord}(A \cup B, \leq_{AB}) = \mathrm{Ord}(C \cup D, \leq_{CD})$$

Soit la bijection f (resp g) conservant le bon ordre entre $(A, \leq_A)$ et $(C, \leq_C)$ (resp $(B, \leq_B)$ et $(D, \leq_D)$). On remarque que :

$$\begin{array}{rcll} h & : & A \cup B & \rightarrow & C \cup D \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \end{cases} \end{array}$$

est une bijection conservant le bon ordre entre $\mathrm{Ord}(A \cup B, \leq_{AB})$ et $\mathrm{Ord}(C \cup D, \leq_{CD})$.

En effet f et g sont des bijections et $A \cap B = C \cap D = \varnothing$ donc h bijective. De plus h conserve le bon ordre, en effet soit $(x, y) \in (A \cup B)^2$ tel que $x \leq_{AB} y$,

si $x, y \in A$ alors $x \leq_A y$ et donc $f(x) \leq_C f(y)$ donc $f(x) \leq_{CD} f(y)$ donc $h(x) \leq_{CD} h(y)$

si $x, y \in B$ alors $x \leq_B y$ et donc $g(x) \leq_D g(y)$ donc $g(x) \leq_{CD} g(y)$ donc $h(x) \leq_{CD} h(y)$

si $x \in A, y \in B$ alors $h(x) = f(x) \in C, h(y) = g(y) \in D$ donc $h(x) \leq_{CD} g(y)$.

Conclusion : $\mathrm{Ord}(\mathscr{A}) + \mathrm{Ord}(\mathscr{B}) = \mathrm{Ord}(\mathscr{C}) + \mathrm{Ord}(\mathscr{D})$ $\square$

Remarque 3.15. *On peut toujours additionner deux ordinaux α et β, c'est-à-dire trouver des représentants de α et β d'intersection vide.*

Démonstration. Soit $E = \{0,1\}$. Soit $\alpha = \mathrm{Ord}(A, \leq_A)$ et $\beta = \mathrm{Ord}(B, \leq_B)$ deux ordinaux quelconques. On pose alors $C = \{0\} \times A$, $D = \{1\} \times B$, $\leq_C$ tel que : $\forall (0,x),(0,y) \in C, (0,x) \leq_C (0,y) \Leftrightarrow x \leq_A y$, et $\leq_D$ tel que : $\forall (1,x),(1,y) \in D, (1,x) \leq_D (1,y) \Leftrightarrow x \leq_B y$.
On a alors $\alpha = \mathrm{Ord}(C, \leq_C)$, $\beta = \mathrm{Ord}(D, \leq_D)$ et $C \cap D = \varnothing$. $\square$

Propriété 3.16. *L'addition est associative c'est-à-dire que pour trois ordinaux α, β et γ on a :*

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

Démonstration. Soit $\mathcal{A} = (A, \leq_A)$, $\mathcal{B} = (B, \leq_B)$ et $\mathcal{C} = (C, \leq_C)$ trois ensembles bien ordonnés tel que $A \cap B = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$.

On a : $(Ord(\mathcal{A}) + Ord(\mathcal{B})) + Ord(\mathcal{C}) = Ord(A \cup B \cup C, \leq_{(AB)C})$ où $\leq_{(AB)C}$ est défini par : $\forall (x,y) \in (A \cup B \cup C)^2$,

$$x \leq_{(AB)C} y \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \cup B, y \in C & \text{ou} \\ x, y \in A \cup B, x \leq_{AB} y & \text{ou} \\ x, y \in C, x \leq_C y \end{cases}$$

et

On a : $Ord(\mathcal{A}) + (Ord(\mathcal{B}) + Ord(\mathcal{C})) = Ord(A \cup B \cup C, \leq_{A(BC)})$ où $\leq_{A(BC)}$ est défini par : $\forall (x,y) \in (A \cup B \cup C)^2$,

$$x \leq_{A(BC)} y \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A, y \in B \cup C & \text{ou} \\ x, y \in A, x \leq_A y & \text{ou} \\ x, y \in B \cup C, x \leq_{BC} y \end{cases}$$

On remarque que :

$$\begin{array}{rccc} Id : & A \cup B \cup C & \rightarrow & A \cup B \cup C \\ & x & \mapsto & x \end{array} \text{ est une bijection.}$$

Montrons alors que :

$$\forall (x,y) \in (A \cup B \cup C)^2, x \leq_{(AB)C} y \Rightarrow x \leq_{A(BC)} y$$

Soit $x, y \in A \cup B \cup C$. Supposons que $x \leq_{(AB)C} y$.

Si $x, y \in C, x \leq_C y$, on a $x \leq_{BC} y$, et donc $x \leq_{A(BC)} y$ (car $x, y \in B \cup C$)
Si $x \in A \cup B, y \in C$ alors $\begin{cases} x \in A, y \in C & \text{ou} \\ x \in B, y \in C \end{cases}$
donc
si $x \in A, y \in C$, on a $x \leq_{A(BC)} y$ (car $y \in B \cup C$)
si $x \in B, y \in C$, on a $x \leq_{BC} y$, donc $x \leq_{A(BC)} y$ (car $x, y \in B \cup C$)
Si $x, y \in A \cup B, x \leq_{AB} y$ alors $\begin{cases} x, y \in A & \text{ou} \\ x, y \in B & \text{ou} \\ x \in A, y \in B \end{cases}$
donc
si $x, y \in A$, on a $x \leq_A y$, donc $x \leq_{A(BC)} y$
si $x, y \in B$, on a $x \leq_B y$, donc $x \leq_{BC} y$, donc $x \leq_{A(BC)} y$ (car $x, y \in B \cup C$)
si $x \in A, y \in B$, on a $x \leq_{A(BC)} y$ (car $y \in B \cup C$)

Conclusion : $(Ord(\mathcal{A}) + Ord(\mathcal{B})) + Ord(\mathcal{C}) = Ord(\mathcal{A}) + (Ord(\mathcal{B}) + Ord(\mathcal{C}))$
□

Propriété 3.17. *L'addition n'est pas commutative c'est-à-dire qu'il existe deux ordinaux α et β tel que on a :*

$$\alpha + \beta \neq \beta + \alpha$$

Démonstration. Soit $a = \varnothing$. On défini $\leq_{\{a\}}$ tel que : $a \leq_{\{a\}} a$. Soit alors $1 := \mathrm{Ord}(\{a\}, \leq_{\{a\}})$ et $\omega = \mathrm{Ord}(\mathbb{N}, \leq)$.

On a $1+\omega = \mathrm{Ord}(\{a\}\cup\mathbb{N}, \leq_{\{a\}\mathbb{N}})$, où $\leq_{\{a\}\mathbb{N}}$ est défini tel que :

$$\forall (n,p) \in (\{a\}\cup\mathbb{N})^2, n \leq_{\{a\}\mathbb{N}} p \Leftrightarrow \begin{cases} n = a, p \in \mathbb{N} & \text{ou} \\ n, p \in \mathbb{N}, n \leq p & \text{ou} \\ n = p = a \end{cases}$$

On remarque que la fonction :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \{a\}\cup\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & & n & \mapsto & \begin{cases} n+1 & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } n = a \end{cases} \end{array}$$

est bijective.
De plus f conserve le bon ordre de $(\{a\}\cup\mathbb{N}, \leq_{\{a\}\mathbb{N}})$ vers $(\mathbb{N}, \leq)$, en effet soit $(n,p) \in (\{a\}\cup\mathbb{N})^2$ tel que $n \leq_{\{a\}\mathbb{N}} p$.

Si $n = a$ et $p \in \mathbb{N}$ alors $f(n) = f(a) = 0 \leq p+1 = f(p)$.

Si $n, p \in \mathbb{N}$ et $n \leq p$ alors $f(n) = n+1 \leq p+1 = f(p)$.

Si $n = p = a$ alors $f(n) = f(a) = 0 \leq 0 = f(a) = f(p)$.

D'où $1+\omega = \omega$.

On s'intéresse maintenant à $\omega + 1 = \mathrm{Ord}(\mathbb{N}\cup\{a\}, \leq_{\mathbb{N}\{a\}})$, où $\leq_{\mathbb{N}\{a\}}$ est défini tel que :

$$\forall (n,p) \in (\mathbb{N}\cup\{a\})^2, n \leq_{\mathbb{N}\{a\}} p \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{N}, p = a & \text{ou} \\ n, p \in \mathbb{N}, n \leq p & \text{ou} \\ n = p = a \end{cases}$$

On remarque qu'il n'existe pas de bijection qui conserve le bon ordre de $(\mathbb{N}, \leq)$ vers $(\mathbb{N}\cup\{a\}, \leq_{\mathbb{N}\{a\}})$.

En effet supposons qu'il existe g une bijection de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}\cup\{a\}$ tel que $\forall n, p \in \mathbb{N}, n \leq p \Rightarrow g(n) \leq_{\mathbb{N}\{a\}} g(p)$. Alors comme g est surjective, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $g(p) = a$, on a $p \leq p+1$ donc $g(p) = a \leq_{\mathbb{N}\{a\}} g(p+1)$ or par definition de $\leq_{\mathbb{N}\{a\}}$, on a $g(p+1) \leq_{\mathbb{N}\{a\}} a$ et donc il vient par antisymétrie que $a = g(p+1)$ on a donc $g(p) = g(p+1)$ donc g n'est pas injective donc n'est pas bijective (Contradiction). D'où $\omega + 1 \neq \omega$. Conclusion : $\omega + 1 \neq 1 + \omega$ $\square$

Définition 3.18 (Multiplication)**.** *Soit* $\mathscr{A} = (A, \leq_A)$ *et* $\mathscr{B} = (B, \leq_B)$ *deux ensembles bien ordonné.*

$$\mathrm{Ord}(\mathscr{A}) \times \mathrm{Ord}(\mathscr{B}) = \mathrm{Ord}((A \times B, \leq_{A\times B}))$$

où $\leq_{A\times B}$ *est l'ordre lexicographique défini par :*

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in (A\times B)^2, (x_1, y_1) \leq_{A\times B} (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 <_A x_2 & \textit{ou} \\ x_1 = x_2,\ y_1 \leq_B y_2 \end{cases}$$

La plupart des propriétés de la multiplication sont similaire a l'addition et se démontrent de façon analogue.

Remarque 3.19. $\leq_{A\times B}$ *est un bon ordre sur* $A \times B$

Remarque 3.20. *La définition 3.18 ne dépend que des ordinaux et pas de leurs représentants* $\mathscr{A}$ *et* $\mathscr{B}$ *i.e : pour* $\mathscr{C} = (C, \leq_C)$ *et* $\mathscr{D} = (D, \leq_D)$ *on a :*

$$\begin{cases} \mathrm{Ord}(\mathscr{A}) = \mathrm{Ord}(\mathscr{C}) \\ \mathrm{Ord}(\mathscr{B}) = \mathrm{Ord}(\mathscr{D}) \end{cases} \Longrightarrow \mathrm{Ord}(\mathscr{A}) \times \mathrm{Ord}(\mathscr{B}) = \mathrm{Ord}(\mathscr{C}) \times \mathrm{Ord}(\mathscr{D})$$

Propriété 3.21. *La multiplication est associative.*

Propriété 3.22. *La multiplication n'est pas commutative.*

Démonstration. Soit α un ordinal. On peut montrer comme $(\alpha + 1 \neq 1 + \alpha)$ que $(\alpha \times 2 \neq 2 \times \alpha)$ □

3.3 Lien avec les Cardinaux

Définition 3.23. *Soit* μ *un ordinal.* W_μ *est l'ensemble des ordinaux* $< \mu$.

Théorème 3.24. *Soit un ordinal* μ. $(W_\mu, \leq)$ *est bien ordonné et on a :*

$$\mathrm{Ord}(W_\mu, \leq) = \mu$$

Remarque 3.25. W_μ *est à priori bien un ensemble dans ZFC car il est d'ordinal* μ *et donc ne se contient pas lui même.*

Démonstration. Soit $(A, \leq_A)$ un ensemble bien ordonné tel que :
$\mathrm{Ord}(A, \leq_A) = \mu$.

$$\begin{array}{rccc} f & : & (A, \leq_A) & \to & (W_\mu, \leq) \\ & & m & \mapsto & \mathrm{Ord}(A_m, \leq_{A_m}) \end{array}$$

est une bijection. En effet :

Surjectivité : Soit $\alpha \in (W_\mu, \leq)$ alors $\alpha < \mu = \mathrm{Ord}(A, \leq_A)$ donc (d'après la définition 3.8) il existe $m \in A$ tel que $\alpha = \mathrm{Ord}(A_m, \leq_{A_m})$.

Injectivité : soit $m, n \in A$ tel que $f(m) = f(n)$ alors $m = n$ car si $m \neq n$ on aurait $\mathrm{Ord}(A_m, \leq_{A_m}) = \mathrm{Ord}(A_n, \leq_{A_n})$ ce qui est en contradiction avec le théorème 3.7.

De plus on remarque que :

$$\forall (m, n) \in A^2, m \leq_A n \Leftrightarrow f(m) \leq f(n) \tag{1}$$

En effet soit $m, n \in A$ tel que $m \leq_A n$ alors si $m = n$ on a bien
$\mathrm{Ord}(A_m, \leq_{A_m}) = \mathrm{Ord}(A_n, \leq_{A_n})$ donc $f(m) \leq f(n)$. Si $m <_A n$ alors Id_{A_m} est une bijection qui conserve le bon ordre de $(A_m, \leq_{A_m})$ vers le segment $(A_m, \leq_{A_m})$ de $(A_n, \leq_{A_n})$ et donc $\mathrm{Ord}(A_m, \leq_{A_m}) < \mathrm{Ord}(A_n, \leq_{A_n})$ d'où $f(m) \leq f(n)$.

Réciproquement si $f(m) = f(n)$ alors $m = n$ car f bijective.
Si $f(m) < f(n)$ alors il existe une bijection qui conserve le bon ordre de $(A_m, \leq_{A_m})$ a un segment de $(A_n, \leq_{A_n})$ donc a un segment de $(A, \leq_A)$. Ce segment est forcément $(A_m, \leq_{A_m})$ d'après le théorème 3.7. On a donc $(A_m, \leq_{A_m})$ un segment de $(A_n, \leq_{A_n})$ et donc $m <_A n$.

On conclu de la formule (1) que $(W_\mu, \leq)$ est bien ordonné car pour une partie U non vide de W_μ on a $f^{-1}(U)$ une partie non vide de A or $(A, \leq_A)$ est bien ordonné donc $f^{-1}(U)$ admet un plus petit élément a et donc $f(a)$ est le plus petit élément de U. La formule (1) nous dit aussi que f conserve le bon ordre. □

Théorème 3.26. *Soient α et β deux ordinaux, alors l'une exactement des deux affirmations suivante est vrai :*

$$\alpha \leq \beta \text{ ou } \alpha > \beta$$

Démonstration. Soit α et β deux ordinaux et A, B des représentants respectif.

Montrons d'abord que l'on a une seul des deux affirmations et non les deux en même temps. Supposons que $\alpha \leq \beta$ et $\alpha > \beta$ alors $\alpha < \beta$ et $\alpha > \beta$. Alors il existe f bijection qui conserve le bon ordre de A dans un segment B_m de B et g bijection qui conserve le bon ordre de B dans un segment de A et par conséquent $g \circ f$ est une bijection qui conserve le bon ordre de A dans le segment $A_{g(m)}$ de A (contradiction).

Montrons maintenant que l'on a toujours une des deux affirmation. Supposons que ($W_\alpha \subset W_\beta$ ou $W_\beta \subset W_\alpha$). Supposons que $W_\alpha \backslash W_\beta \neq \varnothing$ et $W_\beta \backslash W_\alpha \neq \varnothing$. Soit α_0 le plus petit ordinal (pour la relation d'ordre $\leq$) de $W_\alpha \backslash W_\beta$ et β_0 le plus petit ordinal (pour la relation d'ordre $\leq$) de $W_\beta \backslash W_\alpha$.

Montrons que $W_{\beta_0} = W_\beta \cap W_\alpha$: Soit $\gamma \in W_{\beta_0}$ alors $\gamma < \beta_0$. On a donc d'une part $\gamma < \beta$ car $\beta_0 < \beta$ et d'une autre part, $\gamma < \alpha$ car $\gamma \notin W_\beta \backslash W_\alpha$ (car β_0 est le plus petit élément de $W_\beta \backslash W_\alpha$). On a donc $\gamma \in W_\beta \cap W_\alpha$. Soit maintenant $\gamma \in W_\beta \cap W_\alpha$ alors $\gamma < \alpha$ et $\gamma < \beta$. On a γ et β_0 dans W_β donc ($\gamma < \beta_0$ ou $\beta_0 \leq \gamma$) car $(W_\beta, \leq)$ est bien ordonné. On a donc $\gamma < \beta_0$ car si $\beta_0 \leq \gamma$ on aurais $\beta_0 \leq \alpha$ ce qui serais en contradiction avec $\beta_0 \in W_\beta \backslash W_\alpha$. On conclu que $\gamma \in W_{\beta_0}$.

Par symétrie on obtient $W_{\alpha_0} = W_\beta \cap W_\alpha$ et donc $W_{\alpha_0} = W_{\beta_0}$ et donc d'après le théorème 3.24, $\alpha_0 = \beta_0$ or $\alpha_0 \in W_\alpha$ et $\beta_0 \notin W_\alpha$ donc $\alpha_0 \neq \beta_0$ (Contradiction) donc ($W_\alpha \subset W_\beta$ ou $W_\beta \subset W_\alpha$).

Finalement comme on a toujours ($W_\alpha \subset W_\beta$ ou $W_\beta \subset W_\alpha$), on a toujours ($\alpha = \beta_0$ ou $\beta = \alpha_0$), et donc toujours ($\alpha \leq \beta$ ou $\beta \leq \alpha$). □

Définition 3.27. *On appelle proposition P une chaine de caractère finie dépendant d'une variable a, et tel que $P(a)$ soit un booléen.*

Nous avons alors tous les outils pour démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.28. *Soit P une propriété vérifiée par un ordinal alors il existe un unique plus petit ordinal (au sens de $\leq$) qui vérifie P.*

Démonstration. Soit α un ordinal vérifiant P.

Soit alors $A := \{\gamma < \alpha \text{ tq } P(\gamma) \text{ vrai}\}$. On a $A \in \mathscr{P}(W_\alpha)$ donc si $A \neq \varnothing$ comme $(W_\alpha, \leq)$ est bien ordonné, il existe $\beta \in A$ tel que $\forall \gamma \in A$ on a $\beta < \gamma$ et le théorème 3.26 assure que β est l'unique plus petit ordinal qui vérifie P (au sens de $\leq$). Si $A = \varnothing$ alors le théorème 3.26 assure que α est l'unique plus petit ordinal qui vérifie P (au sens de $\leq$). □

Avant de donner un exemple d'utilisation de ce théorème, nous allons définir ce qu'est le cardinal d'un ordinal.

Définition 3.29. *Soit* $\alpha = \mathrm{Ord}(A, \leq_A)$ *un ordinal. On appelle cardinal de* α *(noté* $|\alpha|$*), le cardinal de* A*.*

Remarque 3.30. $|\alpha|$ *ne dépent pas du représentant choisi. En effet si* $\mathrm{Ord}(A, \leq_A) = \mathrm{Ord}(B, \leq_B)$ *alors il existe une bijection entre* A *et* B *et donc ils ont même cardinal et donc* $|\mathrm{Ord}(A, \leq_A)| = |\mathrm{Ord}(B, \leq_B)|$

Exemple 3.31. *Un ordinal est dit indénombrable si son cardinal est indénombrable. Soit alors* $\leq_{\mathbb{R}}$ *un bon ordre sur* $\mathbb{R}$ *(ce bon ordre existe d'après le lemme 5.2), l'ordinal* $\alpha = \mathrm{Ord}(\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}})$ *est alors infini indénombrable. Le théorème 3.28 nous donne alors un unique plus petit ordinal (noté :* ω_1*) tel que* ω_1 *est infini indénombrable.*

Les ordinaux nous donnent alors deux théorèmes important sur les cardinaux.

Théorème 3.32. *Soient* α *et* β *deux cardinaux, alors :*

$$\alpha \leq \beta \text{ ou } \alpha > \beta$$

Démonstration. Soit A et B deux ensembles avec $\alpha = \mathrm{Card}(A)$ et $\beta = \mathrm{Card}(B)$. Soit $\leq_A$ et $\leq_B$ des bons ordres sur A respectivement B (ces bons ordres existent d'après le lemme 5.2)on a alors $(\mathrm{Ord}(A, \leq_A) \leq \mathrm{Ord}(B, \leq_B)$ ou $\mathrm{Ord}(B, \leq_B) \leq \mathrm{Ord}(A, \leq_A))$ d'après le théorème 3.26. Donc (il existe une bijection de A vers un segment de B ou il existe une bijection de B vers un segment de A) et donc (il existe une injection de $A \to B$ ou il existe une injection de $B \to A$). On en conclu que $(\alpha \leq \beta$ ou $\beta \leq \alpha)$ □

Théorème 3.33. *Soit* P *une propriété vérifiée par un cardinal alors il existe un unique plus petit cardinal (au sens de* $\leq$*) qui vérifie* P*.*

Démonstration. Soit A un ensemble tel que $\mathrm{Card}(A)$ vérifie une propriété P, soit $\leq_A$ un bon ordre sur A (un tel bon ordre existe d'après le lemme 5.2) et soit $\alpha = \mathrm{Ord}(A, \leq_A)$. On a alors $Q(\alpha)$ vrai avec Q la propriété tel que : $Q(\gamma) :=$ "$P(|\gamma|)$ est vrai". Il existe donc un unique plus petit ordinal β tel que $Q(\beta)$ est vrai (d'apres le théorème 3.28). On en conclu que $|\gamma|$ est l'unique plus petit cardinal vérifiant P d'après le théorème 3.32. □

Exemple 3.34. *On sait d'aprés l'exemple 2.12 que le cardinal* $\mathbf{c}$ *vérifie :* $\aleph_0 < \mathbf{c}$ *alors il existe un unique plus petit cardinal (noté :* $\aleph_1$*) tel que :* $\aleph_0 < \aleph_1$*. (on a* $|\omega_1| = \aleph_1$*)*

L'exemple ci-dessus nous affirme que $\aleph_1 \leq \mathbf{c}$. Une question naturelle se pose alors : Avons nous $\aleph_1 = \mathbf{c}$? Le lecteur aguerri pourra tenter d'y apporter une réponse.

4 Induction

4.1 Principle

Now that we presented the main notions of set and ordinal theory, we introduce a tool which will be use to demonstrate a fundamental theorem in set theory. The principle is to generalize the basic induction on the integer to well ordered sets.

Theorem 4.1 (Zermelo's Lemma)**.** *Every well defined set can be well ordered.*

Remark 4.2. *Zermelo's lemma is equivalent to the choice axiom, and is proved at the end of the document.*

With the choice axiom we can now use the ordinal theory on any well defined set, which motivate this part. Let $\mu = \mathrm{Ord}(A, \leq_A)$ be an ordinal set, our goal is to prove an assertion P defined on μ for all $u \in A$.

Theorem 4.3 (transfinite induction)**.** *Let* P *an assertion define on an ordinal* $\mu = \mathrm{Ord}(A, \leq_A)$*.To prove that for any* $u \in A$*, P(u), it is enough to show that :* $\forall u \in A$*, if P(u) is true for any* $v \leq_A u$*, then P(u) is true.*

Proof. Let assume that it exists an $u \in A$ that doesn't verify $P(u)$, we define u_0 as the smallest element of A which doesn't verify $P(u)$, so we have that for every $v <_A u_0$, $P(v)$, so we have $P(u_0)$ true which is a contradiction. $\square$

The property of well ordered set can also be used to define new object similarly to the regular induction, but it will be harder to implement.

Definition 4.4. *Let* $\mu = \mathrm{Ord}(A, \leq_A)$ *be an ordinal set. To define a function* f *with transfinite induction, let assume that it exists a set* B *such as the image of* A *by* f *is a subset of* B*. We want the function to be like :*
$f(u) = g(\{(v, f(v)), \forall v \in A \mid v <_A u\})$

where we have $g : U \subset \mathscr{P}(A \times B) \to B$*. To create such function let's use 4.1 and define an assertion* $P(u)$ *: it exists* $f_u : v \in A : v \leq_A u \to B$ *such as for every* $v \leq_A u$ *we have :* $f_u(v) = g(\{(c, f(c)), \forall c <_A u\})$

Remark 4.5. *The hypothesis of the existence of* B *which contains* $f(A)$ *is a precaution to avoid the construction of wrongly defined sets like in 3.9*

The following propositions will help us to prove the uniqueness and existence of the function.

Property 4.6. *For any* $u \in A$*, if* $P(u)$ *is true, then the function* f_u *is unique.*

Proof. Let f_1 and f_2 be two functions such as for any $v \leq_A u$ we have the relation : $f_1(v) = g(\{(c, f(c)), \forall c <_A v\})$ and $f_2(v) = g(\{(c, f(c)), \forall c <_A v\})$ with $f_1 \neq f_2$. Then it exist a smaller element u_0 such as $f_1(u_0) \neq f_2(u_0)$,but we would also have :
$f_1(u_0) = g(\{(v, f_1(v)), \forall v <_A u_0\}) = g(\{(v, f_2(v)), \forall v <_A u_0\}) = f_2(u_0)$
Wich is in contradiction with the statement $f_1(u_0) \neq f_2(u_0)$, so we have $f_1 = f_2$ □

Property 4.7 (uniqueness on the segments)**.** *Let* $u \in A$*. If* $P(u)$ *is true, then for any* $v \leq_A u$*,* $P(v)$ *is true and the functions* f_w *for* $w \leq_A v$ *coincide on the segment* A_v*.*

Proof. On the segment A_v, the function f_u satisfy $P(w)$ for any $w \in A_v$ by definition and the uniqueness is given by the last proposition. □

Property 4.8. *The assertion* $P(u)$ *is true for any* $u \in A$ *!*

Proof. By contradiction let assume that it exist u such as $P(u)$ is false and let's consider u_0, the smallest element of μ that doesn't verify P. Then we still can define f_v for any $v < u_0$. Knowing that we define :

$$\begin{array}{cccc} f & : & A_{u_0} & \to & B \\ & & v <_A u_0 & \mapsto & f_v(v) \\ & & u_0 & \mapsto & g(\{(c, f(c)), \forall c < u_0\}) \end{array}$$

Let's prove that f verify the assertion expected. For any $v <_A u_0$ by definition we have $f(v) = f_v(v)$ and with 4.7 we have
$f_v(v) = g(\{(c, f_c(c)), \forall c <_A v\})$ so we have :
$f(v) = g(\{(c, f(c)), \forall c <_A v\})$
So we have $P(u)$ for any $u \in A_{u_0}$ which is in contradiction with the statement $P(u_0)$ false. So for any u, $P(u)$ is true.

□

Theorem 4.9. *It exists a unique function f such as for any $u \in A$, we have $f(u) = g(\{(v, f(v)), \forall v \in A \mid v <_A u\})$*

Proof. For any $u \in A$ we have $f(u) = f_u(u)$ that is solution, and the uniqueness is given by the proposition 4.6 . □

4.2 The Cardinal of the Borel set of $\mathbb{R}$

As an illustration of the induction we will now establish the cardinality of the Borel set of $\mathbb{R}$, which is a fundamental set in measure theory.

Definition 4.10 (σ-algebra)**.** *Let X be a set. $\mathscr{X} \subset \mathscr{P}(X)$ is a σ-algebra on X if :*

- $\varnothing \in \mathscr{X}$.
- $\forall A \in \mathscr{X}, (X \backslash A) \in \mathscr{X}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathscr{X}$ *we have :* $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathscr{X}$

Definition 4.11 (Borel set of $\mathbb{R}$)**.** *The Borel set of $\mathbb{R}$ (marked : $\mathscr{B}(\mathbb{R})$) is the smallest σ-algebras on $\mathbb{R}$ wich contains all intervals.*

Remark 4.12. *The Borel set of $\mathbb{R}$ can also be defined as the intersection of all the σ-algebra wich contains every open intervals of $\mathbb{R}$.*

Property 4.13. *The cardinal of* $\mathbf{I}$*, the set of all the intervals of $\mathbb{R}$ is* $\mathbf{c}$.

Démonstration. Let $\mathscr{O}$ be the set of all the open set of $\mathbb{R}$. The map :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathscr{O} & \to & \overline{\mathbb{R}}^2 \\ ]a,b[& \mapsto & (a,b) \end{array} \quad \text{is an injection.}$$

so $\mathrm{Card}(\mathscr{O}) \leq \mathrm{Card}(\overline{\mathbb{R}}^2) = \mathbf{c}^2 = \mathbf{c}$

Besides, the map :

$$\begin{array}{rcrcl} g & : & \mathbb{R} & \to & \mathscr{O} \\ & & x & \mapsto &]-\infty, x[\end{array} \text{ is also an injection.}$$

So $\mathbf{c} = \mathrm{Card}(\mathbb{R}) \leq \mathrm{Card}(\mathscr{O})$.

So we have $\mathrm{Card}(\mathscr{O}) = \mathbf{c}$, and we obtain the same result for closed and half open intervals, so we can conclude that :

$$\mathrm{Card}(\mathbf{I}) = \mathbf{c} + \mathbf{c} + \mathbf{c} + \mathbf{c} = \mathbf{c}$$

□

Theorem 4.14. *Let $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequence of sets of cardinal $\aleph_0$. Let $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequence of sets of cardinal $\mathbf{c}$. Let V a set such as $\mathrm{Card}(V) \leq \mathbf{c}$. Let $(R_x)_{x\in V}$ a family of sets of cardinal $\mathbf{c}$ so :*

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n\right) = \aleph_0$$
$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n\right) = \mathbf{c}$$
$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{x\in V} R_x\right) = \mathbf{c}$$

Proof. We set the bijections $f_n : N_n \to \mathbb{N}$, $g_n : Z_n \to \mathbb{R}$ for all $n \in \mathbb{N}$ and $h_x : R_x \to \mathbb{R}$ for all $x \in V$. So the functions :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n & \to & \mathbb{N}^2 \\ & & x & \mapsto & (n_0, f_{n_0}(x)) \end{array} \text{ with } n_0 \text{ the lowest integer such that } x \in N_n.$$

$$\begin{array}{rcccc} g & : & \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n & \to & \mathbb{N} \times \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & (n_0, f_{n_0}(x)) \end{array} \text{ with } n_0 \text{ the lowest integer such that } x \in Z_n.$$

(for the last function we use the lemma 5.2 to have a well-order on V).

$$h : \begin{array}{ccc} \bigcup\limits_{x \in V} R_x & \to & V \times \mathbb{R} \\ y & \mapsto & (x_0, f_{x_0}(y)) \end{array} \quad \text{with } x_0 \text{ the smallest element of } V \text{ such that } y \in R_x$$

are injective.

Hence :

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n\right) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{N}^2) \underset{2.4}{=} \mathrm{Card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$$

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n\right) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{N}\times\mathbb{R}) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{R}^2) \underset{2.20}{=} \mathrm{Card}(\mathbb{R}) = \mathbf{c}$$

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{x\in V} R_x\right) \leq \mathrm{Card}(V\times\mathbb{R}) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{R}^2) \underset{2.20}{=} \mathrm{Card}(\mathbb{R}) = \mathbf{c}$$

moreover

$$\aleph_0 = \mathrm{Card}(N_0) \leq \mathrm{Card}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n\right)$$

$$\mathbf{c} = \mathrm{Card}(Z_0) \leq \mathrm{Card}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n\right)$$

$$\mathbf{c} = \mathrm{Card}(R_a) \leq \mathrm{Card}\left(\bigcup_{x\in V} R_x\right) \text{ with } a \in V$$

Hence the three equalities according to the theorem of Cantor and Bernstein. □

Theorem 4.15.

$$\mathrm{Card}(\mathscr{B}(\mathbb{R})) = \mathbf{c}$$

Before proving this theorem, we will define for any ordinal α a set E_α by induction.

Definition 4.16. *Let α an ordinal. We define E_α by induction :*

— *E_0 is the set of intervals of $\mathbb{R}$.*

— *$\alpha \neq 0 \Rightarrow E_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} P_\beta$ where : $P_\beta = \{A, \mathbb{R}\backslash A, \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \ / \ A, A_n \in E_\beta, n \in \mathbb{N}\}$*

We then have two important properties on this set.

Property 4.17. *Let ω_1 the smallest uncountable infinite ordinal of the example 3.31. Then E_{ω_1} is a σ-algebra.*

Proof. Let $A \in E_{\omega_1}$.

E_{ω_1} **is closed under complementation** : It exists an ordinal $\beta < \omega_1$ (therefore countable) such that $A \in P_\beta$, but $P_\beta \subset E_{\beta+1}$ so $A \in E_{\beta+1}$ hence $\mathbb{R}\backslash A \in P_{\beta+1}$, we have $\beta+1$ countable so $P_{\beta+1} \subset E_{\omega_1}$. We conclude that $\mathbb{R}\backslash A \in E_{\omega_1}$.

E_{ω_1} **is closed under countable unions** : Let $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \in E_{\omega_1}$. There is then a sequence of ordinal $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ such as $\beta_n < \omega_1$ (therefore countable) and $A_n \in P_{\beta_n}$. Let then be $\beta = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \beta_n$, then β is countable because $|\beta|$ is the cardinal of a countable union of countable sets (and therefore countable by the theorem 4.14) and we have : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\beta_n \leq \beta < \beta+1$. This implies that $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{\beta_n} \subset E_{\beta+1}$ so $A_n \in E_{\beta+1}$ and so $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in P_{\beta+1}$, but $\beta+1$ is countable so $P_{\beta+1} \subset E_{\omega_1}$. We conclude that $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in E_{\omega_1}$.

$\varnothing$ **is in** E_{ω_1} : We have $E_0 \subset E_{\omega_1}$ so $\mathbb{R} \in E_{\omega_1}$ but E_{ω_1} is closed under countable unions so $\varnothing \in E_{\omega_1}$. ☐

Property 4.18. *Let α a finite or countable ordinal. We have :*

$$\mathrm{Card}(E_\alpha) = \mathrm{Card}(P_\alpha) = \mathbf{c}.$$

Proof. We make an induction on α :

Let us show that : $\mathrm{Card}(E_0) = \mathrm{Card}(P_0) = \mathbf{c}$. On the one hand, we have $\mathrm{Card}(E_0) = \mathbf{c}$ according to the theorem 4.13. On the other hand $P_0 = E_0 \cup \{\mathbb{R}\backslash A \mid A \in E_0\} \cup K$ with $K = \{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \mid A_n \in E_0, n \in \mathbb{N}\}$.

We then have $\mathrm{Card}(\{\mathbb{R}\backslash A \mid A \in E_0\}) = \mathbf{c}$ because it is easy to see that $\mathrm{Card}(\{\mathbb{R}\backslash A \mid A \in E_0\}) = \mathrm{Card}(E_0)$ ($g : A \mapsto \mathbb{R}\backslash A$ bijective) and $\mathrm{Card}(K) = \mathbf{c}$ because the function :

$$\begin{array}{cccc} f & : & K & \to & (E_0)^{\mathbb{N}} \\ & & \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n & \mapsto & (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

is an injection and therefore :

$$\mathrm{Card}(K) \leq \mathrm{Card}(E_0) = \mathbf{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0^2} = 2^{\aleph_0} = \mathbf{c}$$

and moreover $E_0 \subset K$ so $\mathbf{c} = \text{Card}(E_0) \leq \text{Card}(K)$ hence $\text{Card}(K) = \mathbf{c}$ according to the theorem of Cantor-Bernstein. We conclude that $\text{Card}(P_0) = \mathbf{c} + \mathbf{c} + \mathbf{c} = \mathbf{c}$.

Suppose that for all ordinal $\beta < \alpha, \text{Card}(E_\beta) = \text{Card}(P_\beta) = \mathbf{c}$.We have $E_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} P_\beta = \bigcup\limits_{\beta\in W_\alpha} P_\beta$. But $|W_\alpha| = |\alpha|$ (according to the theorem 3.24) and α is finite or countable so W_α is finite, since countable and therefore E_α is a finite or countable union of sets of cardinal $\mathbf{c}$ so according to the theorem 4.14, $\text{Card}(E_\alpha) = \mathbf{c}$. In addition $P_\alpha = E_\alpha \cup \{\mathbb{R}\backslash A \mid A \in E_\alpha\} \cup Q$ with $Q = \{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \mid A_n \in E_\alpha, n \in \mathbb{N}\}$.

We then have $\text{Card}(\{\mathbb{R}\backslash A \mid A \in E_\alpha\}) = \mathbf{c}$ because it is easy to see that $\text{Card}(\{\mathbb{R}\backslash A \mid A \in E_\alpha\}) = \text{Card}(E_\alpha)$ ($g : A \mapsto \mathbb{R}\backslash A$ bijective) and $\text{Card}(Q) = \mathbf{c}$ because the function :

$$\begin{array}{cccc} f & : & Q & \to & (E_\alpha)^{\mathbb{N}} \\ & & \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n & \mapsto & (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

is an injection and therefore :

$$\text{Card}(Q) \leq \text{Card}(E_\alpha) = \mathbf{c}^{\aleph_\alpha} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0^2} = 2^{\aleph_0} = \mathbf{c}$$

and moreover $E_\alpha \subset Q$ so $\mathbf{c} = \text{Card}(E_\alpha) \leq \text{Card}(Q)$ hence $\text{Card}(Q) = \mathbf{c}$ according to the theorem of Cantor-Bernstein. We conclude that $\text{Card}(P_\alpha) = \mathbf{c} + \mathbf{c} + \mathbf{c} = \mathbf{c}$.

Conclusion : By induction we have for any ordinal α finite or countable :

$$\text{Card}(E_\alpha) = \text{Card}(P_\alpha) = \mathbf{c}.$$

□

We now have all the tools to prove the theorem 4.15 which states that $\text{Card}(\mathscr{B}(\mathbb{R})) = \mathbf{c}$

Proof. We have $E_{\omega_1} = \bigcup\limits_{\beta<\omega_1} P_\beta = \bigcup\limits_{\beta\in W_{\omega_1}} P_\beta$, and $|W_{\omega_1}| = |\omega_1| \leq \mathbf{c}$ according to the theorem 3.24. So E_{ω_1} is a union indexed by elements belonging to a set of cardinal at most $\mathbf{c}$ of sets of cardinal $\mathbf{c}$ so according to the theorem 4.14, we have $\text{Card}(E_{\omega_1}) = \mathbf{c}$.

In addition E_{ω_1} is a σ-algebra containing the intervals of $\mathbb{R}$ so by definition of Borel sets of $\mathbb{R}$, we have $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset E_{\omega_1}$ and so

$$\mathrm{Card}(\mathscr{B}(\mathbb{R})) \leq \mathrm{Card}(E_{\omega_1}) = \mathbf{c}$$

Finally, $E_0 \subset \mathscr{B}(\mathbb{R})$ so

$$\mathbf{c} = \mathrm{Card}(E_0) \leq \mathrm{Card}(\mathscr{B}(\mathbb{R}))$$

.

Conclusion :

$$\mathrm{Card}(\mathscr{B}(\mathbb{R})) = \mathbf{c}$$

□

5 Annexe

5.1 Lemme de Zermelo

L'utilisation du bon ordre repose sur le lemme de Zermelo, qui est en fait équivalent à l'axiome du choix. Nous allons ici démontrer cette équivalence.

Axiome 5.1 (Du choix)**.** *Pour tout ensemble E il existe une fonction de choix f_E qui a chaque partie non vide de E lui associe un de ses élements.*

Propriété 5.2 (Lemme de Zermelo)**.** *Tout ensemble peut etre bien ordonné.*

Théorème 5.3. *Les deux propositions sont équivalentes*

Pour démontrer que l'axiome du choix implique le lemme de Zermelo nous avons besoin des definitions suivantes :

Définition 5.4 (Chaine)**.** *On suppose vrai l'axiome du choix. Soit E un ensemble, f_E sa fonction de choix associée et A une partie de E munie d'une relation d'ordre $\leq$. Le couple $(A, \leq)$ est appelé f chaine de E , si pour tout x de A on a :*

$$x = f(E \backslash \{y \in A \mid y \leq x\}).$$

Définition 5.5 (Segment)**.** *Soient E un ensemble, $(B,\leq)$ une partie de E munit d'un bon ordre et soit A une partie de B. On dit que A est segment initial de B si pour tout x appartenant à A et tout y appartenant à B on a : $y \leq x \Rightarrow y \in A$.*

Pour montrer que l'axiome du choix implique le lemme de Zermelo, on va se laisser guider par l'intuition qui nous dit de choisir successivement des élements d'un ensemble E et d'y appliquer un odre croissant (et donc un bon ordre). C'est cette idée qui est formalisée par la notion de f chaine. Le but est donc de verifier que pour un ensemble E donné toutes ses chaines coincident, ce qui nous amène à la notion de segment initial et à la proprieté ci dessous.

Lemme 5.6. *Si $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$ sont deux f chaines d'un ensemble E, alors l'une est segment initial de l'autre. De plus leurs ordres coincident sur le segment.*

Démonstration. On va raisonner par l'absurde en posant H l'ensemble des élements de A et B dont les minorants le sont pour $<_A$ et $<_B$ (H rassemble en quelque sorte "les points fixes" pour le changement de relation d'ordre) et en supposant que H est différent de A et B. Formellement, on a :

$$H := \{x \in A \cap B \mid \forall a \in A, a <_A x \Rightarrow (a \in B) \wedge (a <_B x)$$

$$et\ \forall b \in B, b <_B x \Rightarrow (b \in A) \wedge (b <_A x)\}.$$

Soient a_0 et b_0 les plus petits élements (au sens du choix) de $A \backslash H$ et $B \backslash H$ et soit I (resp J) l'ensemble des élements de A (resp B) plus petits que a_0 (resp b_0). Par définition, si a (resp b) appartient à I (resp J) alors a (resp b) appartient à H, et donc appartient a B (resp A).
Soit $a \in I$, donc $a \in H$ et $a \in B$, on peut donc comparer a et b_0.
On a plusieurs cas de figure : si $b_0 <_B a$, alors comme a est dans H on aura $b_0 \in A$ et $b_0 <_A a$ par définition des élements de H. On aura donc $b_0 <_A a <_A a_0$ et donc $b \in I$.
Si $b_0 \leq_B a$, alors la conclusion est la meme, or par définition b_0 n'est pas dans H et donc pas dans I. On en déduit donc qu'on a $a <_B b_0$ et donc que $a \in J$. On a montré que $I \subset J$. On montre de la meme maniere que $J \subset I$, et donc que $I = J$. La définition d'une f chaine nous donne $a_0 = b_0$.
Soit $b \in B$ tel que $b <_B b_0$ alors on a $b \in I = J$ et donc $b <_A a_0 = b_0$. Symetriquement on obtient pour $a \in a$ tel que $a <_A a_0$, $b = a <_B b_0 = a_0$. Donc on a $a_0 \in H$, ce qui contredit $a_0 \in A \backslash H$. Donc on a $H = A$ ou $H = B$. ☐

On démontre maintenant l'équivalence entre l'axiome du choix et le lemme de Zermelo.

Démonstration. On suppose l'axiome du choix et on considère C, l'union de toutes les f chaines de notre ensemble E. On définit la relation $\leq$ sur C par : $\forall a, b \in C, a \leq b \Leftrightarrow \exists$ une f chaine $(T, \leq_T)$ tq $a, b \in T$ et a $\leq_T b$.
Soit P une partie non vide de C, et $a \in P$ contenu dans une f chaine $(T, \leq_T)$. Par définition $P \cap T$ est non vide, et donc admet un plus petit élement (au sens de T) qu'on note a_0.
Soit $b \in P$ et $(B, \leq_B)$ sa f chaine. Soit $b \in T$, et dans ce cas on a $a_0 \leq_T b$. Sinon, si $b \notin T$, alors notre proposition nous dis que T est un segment initial de B ce qui aboutit au meme résultat. On en conclut donc que $\leq$ est un bon ordre sur C.
Il reste maintenant à montrer que $C = E$, ce qui nous donnera la premiere implication.
Soit $a \in C$, et $(A, \leq_A)$ sa f chaine, notre lemme nous dis que tous les élements b de C tels que $b \leq a$ appartiennent à A, donc C est une f chaine.
Supposons maintenant que $C \neq E$ alors on a $C \subset E$ et on peut donc poser $e_0 = f(C \backslash E)$. Pour l'ensemble $C \cup \{e_0\}$ on définit le bon ordre $\leq_1$ par $\leq_1 = \leq$ pour les élements de C et pour tout $c \in C$, $c <_1 e_0$. Or comme C est une f chaine, l'ensemble $C \cup \{e_0\}$ est aussi une f chaine et donc on devrait avoir $C \cup \{e_0\} \subset C$, ce qui entre en contradiction avec $e_0 \in E \backslash C$. Donc $(E, \leq)$ est bien un ensemble bien ordonné.
Réciproquement on suppose vrai le Lemme de Zermelo, on pose alors :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathscr{P}(E)\backslash\{\emptyset\} & \rightarrow & E \\ & & A & \mapsto & \min(A) \end{array}$$

f est bien une fonction de choix sur E. $\square$

Références

[1] Jacques Patarin : *Théorie des ensembles et logique mathématique : des infinis mathématiques aux théorèmes de Gödel*. Edition ellipses, 2020.

[2] Wikipedia : *Théorème de Cantor-Bernstein*. 2023.

[3] Wikipedia : σ-*algebra*. 2023.

[4] Wikipedia : *Ordinal number*. 2023.