

# Mini-Projet d'analyse numérique MAP411 : Effets du courant sur la dispersion d'un polluant

Sacha IZADI et Paola FEDOU

décembre 2016

## 1 Évolution de la concentration de polluant dans le fleuve

### 1.1 Équation de convection uni-dimensionnelle

**Question 1** - Soit  $u(t, x)$  une solution de l'équation de convection (2), et soit  $X(t)$  telle que  $u$  soit constante le long de  $(t, X(t))$ , et posons  $\Phi(t) = u(t, X(t))$ . On suppose  $X$  dérivable. Alors  $\Phi$  est dérivable, et sa dérivée s'obtient par la "règle de la chaine" :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t}(t, X(t)) + \frac{\partial u}{\partial x}(t, X(t)) \cdot X'(t)$$

Puisque  $u(t, X(t)) = C^{te}$ , on en déduit que  $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ . En utilisant le fait que  $u(t, x)$  est solution, et donc que  $\partial_t u = -V \partial_x u$ , on obtient :

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0 \iff (-V + X'(t)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(t, X(t)) = 0 \iff X(t) = X_0 + V.t$$

(où  $X_0 \in \mathbb{R}$ )

Rq : Nous admettons que  $\partial_x u(t, X(t)) \neq 0$ .

Ainsi, si elle existe, la solution au problème  $u(t, x)$ , vérifie :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \quad u(0, x - V.t) = u(t, x - V.t + V.t) = u(t, x)$$

In fine :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \quad u^0(x - V.t) = u(t, x)$$

Nous avons donc une condition nécessaire sur la solution  $u(t, x)$ . Réciproquement, on vérifie immédiatement que  $u(t = 0, x) = u^0(x)$ , et en injectant  $u^0(x - V.t)$  dans l'équation (2), on trouve que :

$$\frac{\partial}{\partial t} u^0(x - vt) + V \cdot \frac{\partial}{\partial x} u^0(x - Vt) = -V \cdot (u^0)'(x - Vt) + V \cdot (u^0)'(x - Vt) = 0$$

$u^0(x - V.t) = u(t, x)$  est donc une condition nécessaire et suffisante à la résolution de l'équation (2). Il y a donc existence et unicité de la solution à (2).

**Question 2** - On a  $u_N^n = u_0^n = 0$ , ainsi que la relation suivante :

$$\forall (j, n) \in [0, N] \times \mathbb{N}, \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{V \Delta t}{2 \Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

Matriciellement, cela donne :

$$U^{n+1} = [I_N - V\Delta t.K_c].U^n$$

Avec  $U^n = (u_i^n)_{i=1,\dots,N}$  ( $U^n$  ne contient pas d'information sur les valeurs aux bords  $u_0^n$  et  $u_{N+1}^n$ ), et avec  $K_c \in \mathcal{M}_{n \times n}$  :

$$K_c = \frac{1}{2\Delta x} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quelques commentaires sur la matrice  $K_c$  : les lignes 2 à  $N-1$  correspondent à la relation de récurrence. Les lignes 1 et  $N$  prennent en compte les conditions de Dirichlet  $u_0^n = u_{N+1}^n = 0$ , en effet :

$$u_1^{n+1} = u_1^n - \frac{V\Delta t}{2\Delta x} (u_2^n - u_0^n) = u_1^n - \frac{V\Delta t}{2\Delta x} u_2^n$$

$$u_N^{n+1} = u_N^n - \frac{V\Delta t}{2\Delta x} (u_{N+1}^n - u_{N-1}^n) = u_N^n + \frac{V\Delta t}{2\Delta x} u_{N-1}^n$$

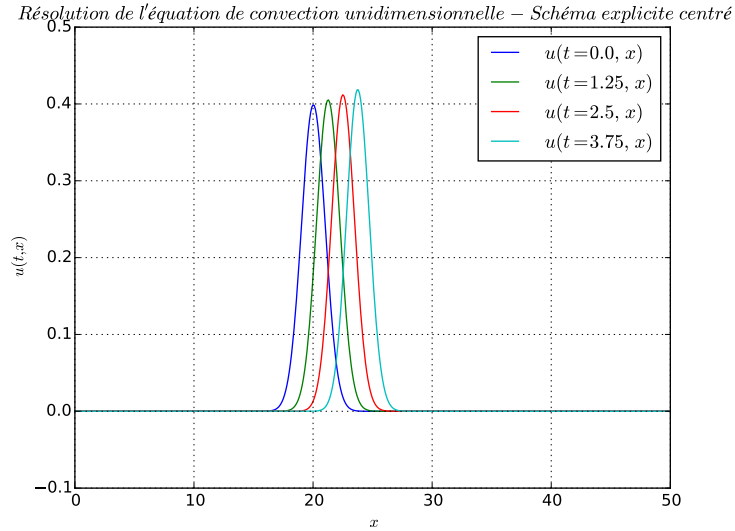


FIGURE 1 – Résolution de l'équation de convection par un schéma explicite centré

On observe que le schéma est instable car la solution approchée ne vérifie pas le principe du maximum discret : il y a une amplification du signal à mesure qu'il se propage à la vitesse  $V$ . Par ailleurs, les graphes qui suivent montrent l'apparition d'oscillations après un certain temps [Fig.2] (ce sont les modes de Fourier de  $u^0$  les plus amplifiés), et ce phénomène s'accroît lorsque le front d'onde s'approche du bord du domaine [Fig.3].

**Question 3** - Le schéma explicite centré converge sous la condition CFL :  $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{V}$ . Il est d'ordre 1 en temps et d'ordre 1 en espace (i.e. erreur en  $\mathcal{O}(\Delta x + \Delta t)$ ). Son équation équivalente est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t - V \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \right)$$

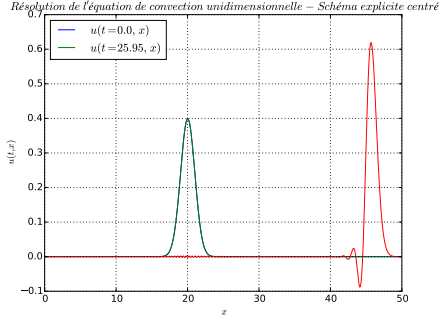


FIGURE 2 – Mise en évidence du caractère instable du schéma

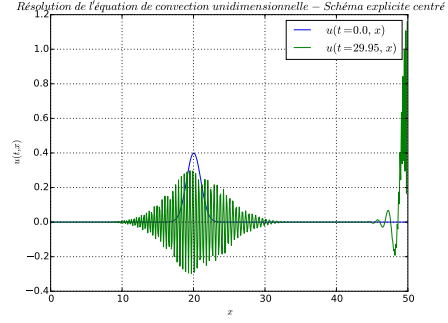


FIGURE 3 – Comportement lorsque  $Vt > L$

Du schéma centré explicite on tire la relation suivante :

$$\forall(j, n) \in [0, N] \times \mathbb{N}, \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{V\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n)$$

Matriciellement, cela donne :

$$U^{n+1} = [I_N - V\Delta t.K_d].U^n$$

Avec :

$$K_d = \frac{1}{\Delta x} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rq : A nouveau, la première ligne tient compte des conditions aux limites de Dirichlet.

$$u_1^{n+1} = u_1^n - \frac{V\Delta t}{\Delta x} (u_1^n - u_0^n) = u_1^n - \frac{V\Delta t}{\Delta x} u_1^n$$

Une simulation sous la condition CFL ( $\Delta t = 0.025$ ,  $\Delta x = 0.1$ ,  $V = 1$ ) donne les résultats présentés à la page suivante. Le schéma est effectivement stable mais il n'est pas conservatif [Fig.5] (l'amplitude du signal diminue au cours du temps). On observe aussi un phénomène de diffusion numérique [Fig.5] (le signal s'étale dans l'espace).

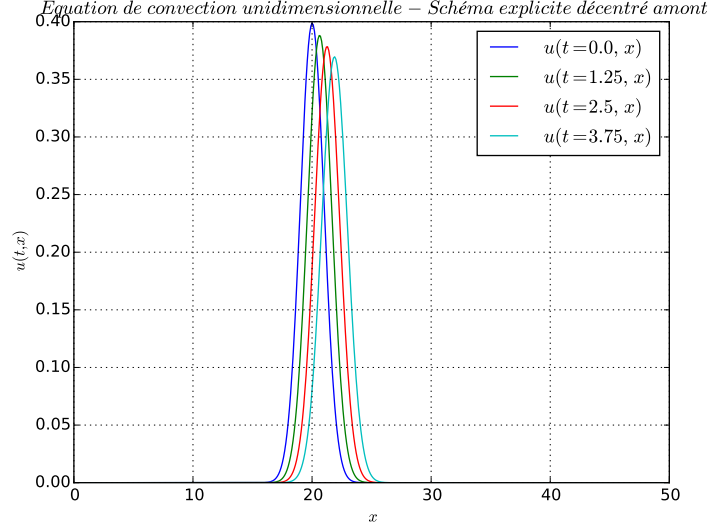


FIGURE 4 – Résolution de l'équation de convection par un schéma explicite centré

Passé un certain temps on voit apparaître des oscillations dans la solution qui ne respecte pas la condition CFL (la courbe rouge) [Fig.6]. On observe alors que ces oscillations s'amplifient exponentiellement au cours du temps.

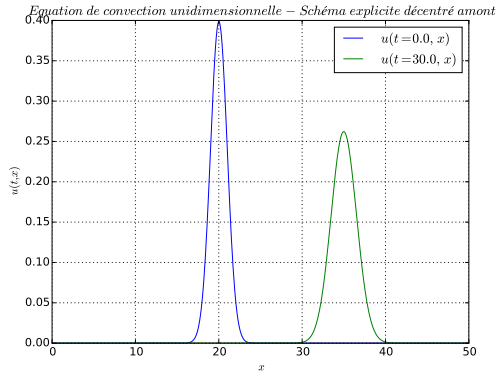


FIGURE 5 – Mise en évidence du caractère non conservatif et diffusif du schéma

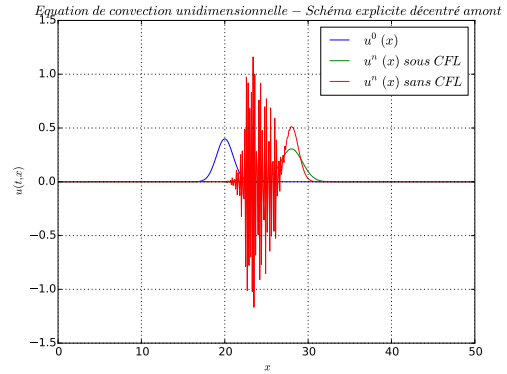


FIGURE 6 – Comportements du schéma selon la condition CFL

**Question 4** - Du schéma de Crank-Nicholson on tire la relation suivante :

$$\forall (j, n) \in [0, N] \times \mathbb{N}, \quad u_j^{n+1} + \frac{V\Delta t}{2} \times \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = u_j^n - \frac{V\Delta t}{2} \times \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

Dans le terme de gauche on voit apparaître un schéma centré appliqué à  $U^{n+1}$ . Dans celui de droite on voit apparaître un schéma décentré amont appliqué à  $U^n$ . Par rapport aux questions 1 et 2, la vitesse est "réduite" d'un facteur 2. D'où la relation matricielle :

$$\left[ I_N + \frac{V\Delta t}{2} . K_c \right] U^{n+1} = \left[ I_N - \frac{V\Delta t}{2} . K_c \right] . U^n$$

Montrons que le schéma est inconditionnellement stable en norme  $\mathbb{L}^2$ . On introduit la fonction  $u^n(x)$   $L$ -périodique, qui vaut  $u^n(x) = u_j^n$  si  $x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2}$ . On décompose  $u^n$  en série de Fourier :  $u^n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{u}^n(k) \exp(2i\pi kx/L)$ .  
On en déduit que :

$$\frac{\widehat{u}^{n+1}(k) - \widehat{u}^n(k)}{\Delta t} + \frac{V}{2} \left( \frac{\widehat{u}^n(k)e^{2i\pi k\Delta x/L} - \widehat{u}^n(k)e^{-2i\pi k\Delta x/L}}{2\Delta x} + \frac{\widehat{u}^{n+1}(k)e^{2i\pi k\Delta x/L} - \widehat{u}^{n+1}(k)e^{-2i\pi k\Delta x/L}}{2\Delta x} \right) = 0$$

D'où :

$$\left( 1 + \frac{V\Delta t}{2\Delta x} \times i \sin(2k\pi\Delta x/L) \right) \widehat{u}^{n+1}(k) = \left( 1 - \frac{V\Delta t}{2\Delta x} \times i \sin(2k\pi\Delta x/L) \right) \widehat{u}^n(k)$$

On obtient la relation de récurrence :

$$\widehat{u}^{n+1}(k) = \frac{1 - \frac{V\Delta t}{2\Delta x} \times i \sin(2k\pi\Delta x/L)}{1 + \frac{V\Delta t}{2\Delta x} \times i \sin(2k\pi\Delta x/L)} \widehat{u}^n(k) = \rho \widehat{u}^n(k)$$

Comme  $|\rho| = 1$ , on a  $\forall n, |\widehat{u}^{n+1}(k)| = |\widehat{u}^n(k)|$ .

Ainsi le schéma de Crank-Nicholson est inconditionnellement stable en norme  $\mathbb{L}^2$ .

Cherchons son équation équivalente. On s'appuiera sur les développements de Taylor suivants :

— **Approximation de  $u_j^{n\pm 1}$  :**

$$u_j^{n\pm 1} = u(t, x) \pm \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

— **Approximation de  $u_{j\pm 1}^n$  :**

$$u_{j\pm 1}^n = u(t, x) \pm \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x^2 \pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Delta x^3 + \mathcal{O}(\Delta x^3)$$

— **Approximation de  $u_{j\pm 1}^{n+1}$  :**

$$u_{j\pm 1}^{n+1} = u^{n+1} \pm \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} \Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

$$u_{j\pm 1}^{n+1} = u(t, x) + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t) \pm \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t) \right) \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

Le schéma de Crank-Nicholson donne alors :

$$0 = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^2) \right) + \frac{V}{2} \left( \frac{1}{2\Delta x} \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Delta x^3 + \mathcal{O}(\Delta x^3) \right) + \frac{1}{2\Delta x} \left( \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \Delta t \right) \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x \Delta t) \right) \right)$$

Finalement on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{V}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \Delta t + \frac{V}{12} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^2 + \Delta t) = 0$$

C'est-à-dire que le schéma de Crank-Nicholson est d'ordre 1 en temps et 2 en espace. On en déduit son équation équivalente :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{V}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \Delta t + \frac{V}{12} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Delta x^2 = 0$$

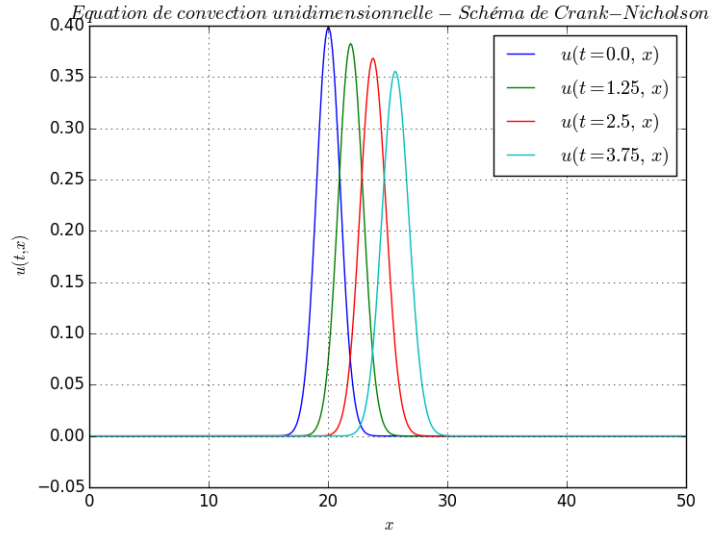


FIGURE 7 – Résolution de l'équation de convection par un schéma de Crank-Nicholson

La figure suivante illustre le fait que le Schéma de Crank-Nicholson est inconditionnellement stable :

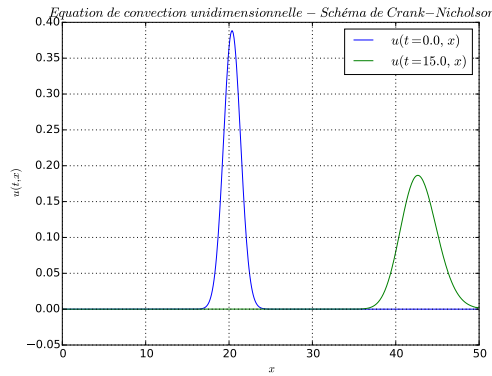


FIGURE 8 – Schéma de Crank-Nicholson avec  $V > \frac{\Delta x}{\Delta t}$

**Question 5** - On fixe le rapport  $\frac{V\Delta t}{\Delta x} = 0,25$  et on évalue un terme d'erreur en fonction de  $\Delta x$ . Pour se faire nous avons choisi de définir l'erreur comme  $Err = |u^n(x_0 + V.T) - f(x_0)|$ , or le phénomène de diffusion numérique décale le maximum de  $u^n(x)$  (il ne se trouve alors plus en  $x_0 + V.T$ ), nous avons donc modifié la définition de l'erreur par  $Err = |\max_j u^n(x_j) - f(x_0)|$ . On observe alors une convergence qui semble quadratique [Fig.9].

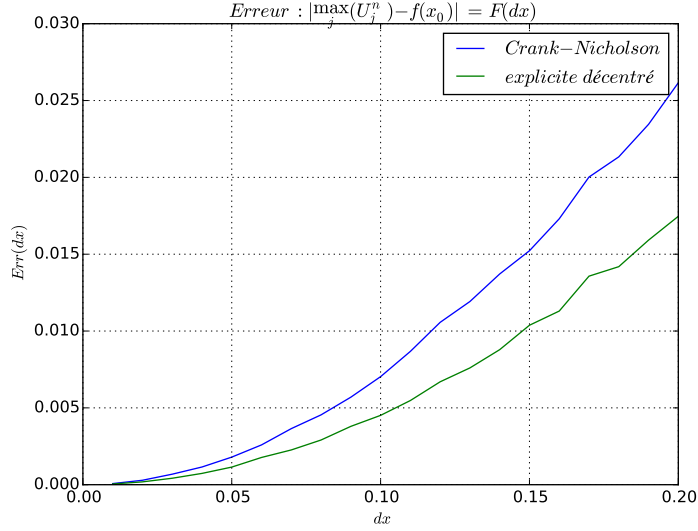


FIGURE 9 – Erreur =  $F(\Delta x)$ , avec  $\frac{V\Delta t}{\Delta x} = 0,25$

## 1.2 Équation de convection-diffusion uni-dimensionnelle

**Question 6** - Il y a une légère coquille dans l'énoncé, l'approximation de  $\partial_{xx}u$  est en réalité :

$$\frac{1}{2\Delta x^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1})$$

Le terme diffusif s'écrit alors :

$$-\frac{\nu\Delta t}{2} \times \frac{1}{2\Delta x^2\Delta t} \left( (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) \right)$$

On en déduit que la matrice  $A$  :

$$A = \frac{1}{2\Delta x^2\Delta t} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

A nouveau les première et dernière lignes tiennent compte de la condition aux bords de Dirichlet. Par exemple la première ligne correspond à :

$$\begin{aligned} & -\frac{\nu\Delta t}{2} \times \frac{1}{2\Delta x^2\Delta t} ((u_2^n - 2u_1^n + u_0^n) + (u_2^{n+1} - 2u_1^{n+1} + u_0^{n+1})) \\ & = -\frac{\nu\Delta t}{2} \times \frac{1}{2\Delta x^2\Delta t} ((u_2^n - 2u_1^n) + (u_2^{n+1} - 2u_1^{n+1})) \end{aligned}$$

La matrice  $A$  est donc telle que :

$$\left[ I_N + \frac{V\Delta t}{2}K_c - \frac{\nu\Delta t}{2}A \right] U^{n+1} = \left[ I_N - \frac{V\Delta t}{2}K_c + \frac{\nu\Delta t}{2}A \right] U^n$$

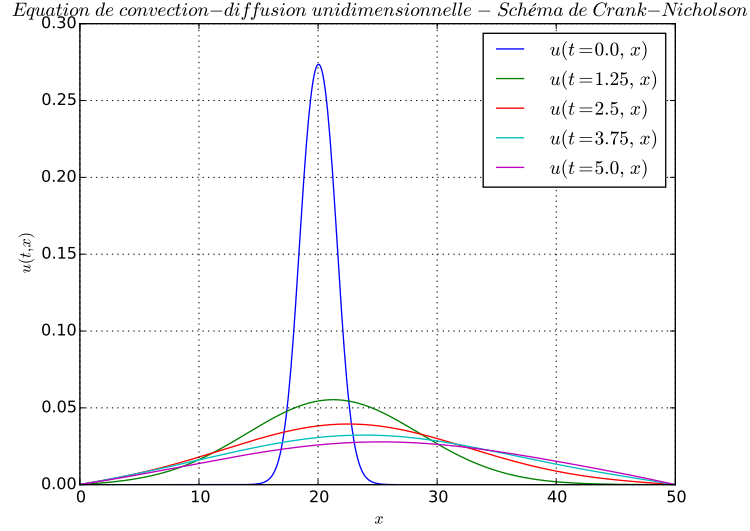


FIGURE 10 – Résolution de l'équation de convection-diffusion par un schéma de Crank-Nicholson

On voit sur la [Fig.11] que la cloche perd sa symétrie à cause des conditions aux limites de Dirichlet  $u(x = 0, t) = u(x = L, t) = 0$ .

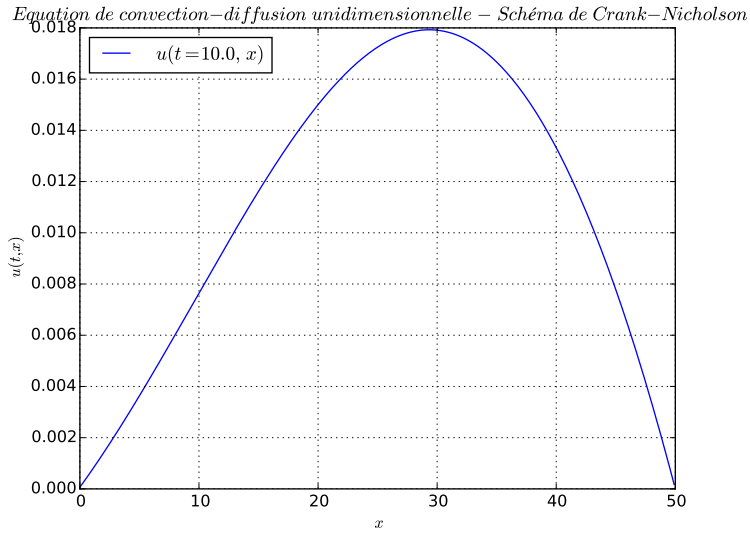


FIGURE 11 – Erreur lorsque le front d'onde s'approche du bord

**Question 7** - La condition de type Neumann s'interprète comme  $u_N^n = f(u_{N+1}) = u_{N+1}$ . Il s'agit donc de remplacer  $u_{N+1}$  par  $u_N$  dans les relations de récurrence.

Au bord, le terme diffusif s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\nu \Delta t}{2} \times \frac{1}{2\Delta x^2 \Delta t} ((u_{N+1}^n - 2u_N^n + u_{N-1}^n) + (u_{N+1}^{n+1} - 2u_N^{n+1} + u_{N-1}^{n+1})) \\
 & = -\frac{\nu \Delta t}{2} \times \frac{1}{2\Delta x^2 \Delta t} (-u_N^n + u_{N-1}^n) + (-u_N^{n+1} + u_{N-1}^{n+1})
 \end{aligned}$$



La matrice  $A$  modifiée est :

$$\tilde{A} = \frac{1}{2\Delta x^2 \Delta t} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Au bord, le terme convectif s'écrit :

$$u_N^{n+1} = u_N^n - \frac{V\Delta t}{2\Delta x} (u_{N+1}^n - u_{N-1}^n) = u_N^n - \frac{V\Delta t}{2\Delta x} (u_N^n - u_{N-1}^n)$$

La matrice  $K_c$  modifiée est donc :

$$\tilde{K}_c = \frac{1}{2\Delta x} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

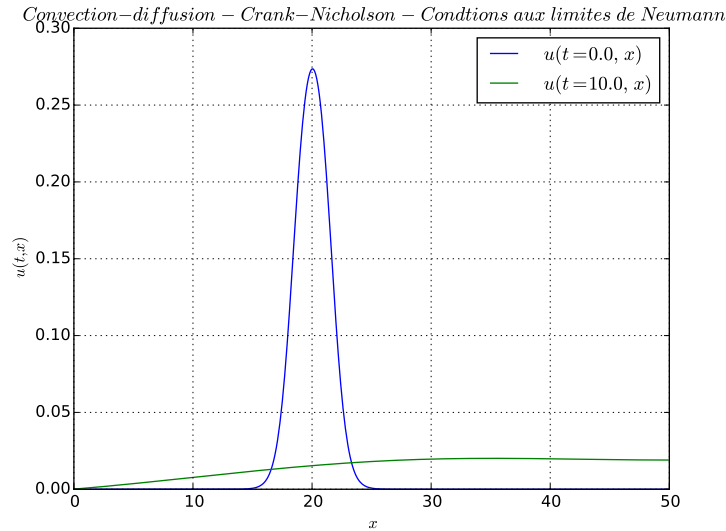


FIGURE 12 – Schéma de Crank-Nicholson - CL de Neumann

Le résultat obtenu rend mieux compte de la solution réelle sur  $\mathbb{R}$ .

**Question 8** - En tenant compte du terme de source, la relation de récurrence devient :

$$\left[ I_N + \frac{V\Delta t}{2} \tilde{K}_c - \frac{\nu\Delta t}{2} \tilde{A} \right] U^{n+1} = \left[ I_N - \frac{V\Delta t}{2} \tilde{K}_c + \frac{\nu\Delta t}{2} \tilde{A} \right] U^n + \Delta t F^n$$

Avec  $F^n = (f(t_n, x_j))_{j \in [0; N+1]}$ .

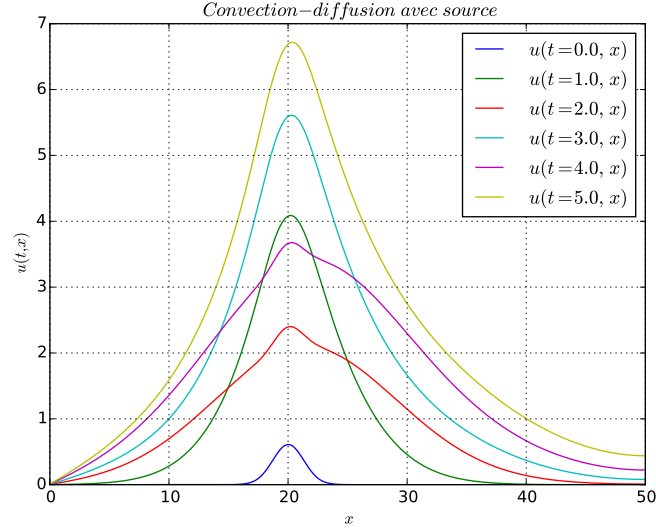


FIGURE 13 – Ajout du terme source dans le modèle

## 2 Évolution de la concentration de polluant dans l'océan

### 2.1 Discrétisation du Laplacien en dimension 2

Question 9 - On notera :

$$U = \begin{pmatrix} (U_{1,j})_{j=1,\dots,N} \\ (U_{2,j})_{j=1,\dots,N} \\ \vdots \\ (U_{N,j})_{j=1,\dots,N} \end{pmatrix}$$

On a donc la relation  $-A.U = b$ , avec :

$$b = h^2 \begin{pmatrix} (f_{1,j})_{j=1,\dots,N} \\ (f_{2,j})_{j=1,\dots,N} \\ \vdots \\ (f_{N,j})_{j=1,\dots,N} \end{pmatrix}$$

Et  $A$  est la matrice tridiagonale par blocs suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -B & I_N & & & \\ I_N & -B & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -B & I_N \\ & & & I_N & -B \end{pmatrix}$$

Le bloc  $B \in \mathcal{M}_N$  vaut :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ce schéma est d'ordre 1 en espace, car  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + \mathcal{O}(h)$ .

On prendra pour terme source :

$$f(x, y) := \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{L}y\right)$$

On cherche alors la solution sous la forme  $u(x, y) = \alpha f(x, y)$ , ce qui conduit à

$$2 \times \left(\alpha \frac{4\pi^2}{L^2}\right) = 1$$

Donc  $u(x, y) = \frac{L^2}{8\pi^2} f(x, y)$  est solution de l'équation de Laplace  $-\Delta u = f$  sur  $\overset{\circ}{\Omega}$  et  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ .

Pour la résolution numérique on utilise une matrice creuse (une sparse matrix de la classe `scipy.sparse` en Python) afin d'alléger la place en mémoire que prend la matrice de Laplacien.

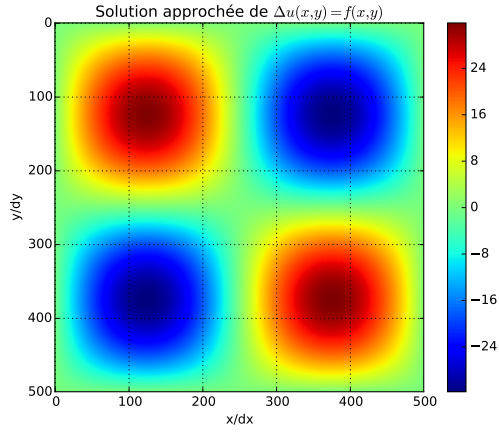


FIGURE 14 – Résolution numérique de l'équation de Laplace

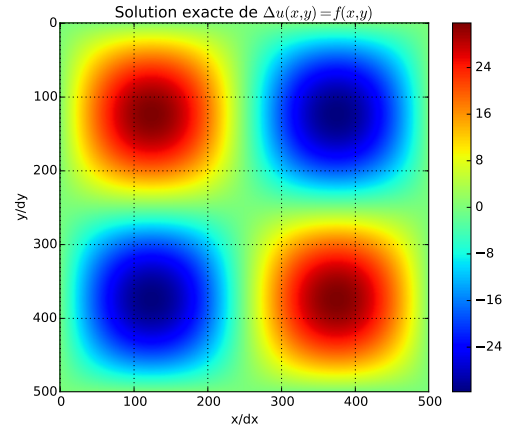


FIGURE 15 – Solution exacte de l'équation de Laplace

On trace également l'erreur définie par  $Err = \left| \frac{u(L/4, L/4) - U_{L/4, L/4}}{u(L/4, L/4)} \right| = f(h)$ . On observe une courbe décroissante. Nous n'avons pas pu descendre en dessous de  $h = 0.1$  pour des questions d'occupation en mémoire.

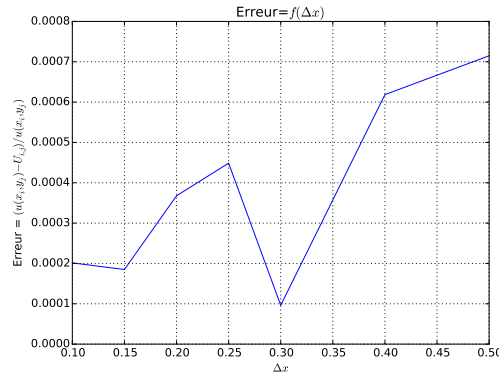


FIGURE 16 – Erreur d'approximation en fonction du pas h

**Question 10** - Nous allons traiter le cas général (cf. question 13), c'est-à-dire lorsque  $(V^x, V^y)$  est quelconque.

On cherche à écrire le schéma sous la forme

$$\left[ I_N + \frac{\Delta t}{2} (K_c^x + K_c^y) - \frac{\nu \Delta t}{2} A \right] U^{n+1} = \left[ I_N - \frac{\Delta t}{2} (K_c^x + K_c^y) + \frac{\nu \Delta t}{2} A \right] U^n$$

La matrice  $K_c^x$  correspond au terme  $\frac{V_{i,j}^x}{2} \times \left( \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right)$ . L'écriture par blocs de  $K_c^x$  est donc définie par :

$$K_c^x = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_N & V_{(1)}^x & & & \\ -V_{(2)}^x & \mathbf{0}_N & V_{(2)}^x & & \\ & -V_{(3)}^x & \mathbf{0}_N & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & V_{(N-1)}^x \\ & & & -V_{(N)}^x & \mathbf{0}_N \end{pmatrix}$$

Où les  $V_{(i)}^x$  sont des matrices de taille  $N \times N$  définies par :

$$V_{(i)}^x = \frac{1}{2\Delta x} \text{diag} (V_{i,1}^x, V_{i,2}^x, \dots, V_{i,N}^x)$$

La matrice  $K_c^y$  correspond au terme  $\frac{V_{i,j}^y}{2} \times \left( \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta x} \right)$ . L'écriture par blocs de  $K_c^y$  est donc définie par :

$$K_c^y = \begin{pmatrix} V_{(1)}^y & & & \\ & V_{(2)}^y & & \\ & & \ddots & \\ & & & V_{(N)}^y \end{pmatrix}$$

Où les  $V_{(i)}^y$  sont des matrices de taille  $N \times N$  définies par :

$$V_{(i)}^y = \frac{1}{2\Delta x} \begin{pmatrix} 0 & V_{i,1}^y & & & \\ -V_{i,1}^y & 0 & V_{i,2}^y & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -V_{i,N}^y & 0 & V_{i,N}^y \end{pmatrix}$$

**Question 11** - On implémente l'algorithme précédent en Python avec  $\vec{V} = (1, 1)$  en utilisant des matrices creuses. On obtient le résultat suivant où on a représenté  $u(x, y, t)$  à  $t = \{0, 5, 10, 15\}$ . On voit bien que la direction du transport est portée par  $\vec{V}$  et que la tâche s'étale au cours du temps.

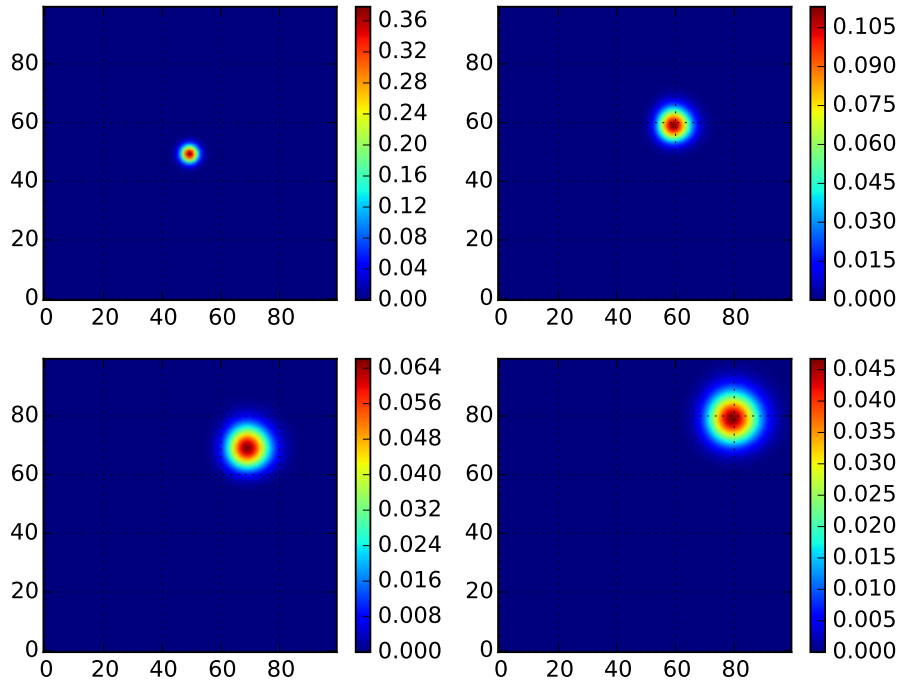


FIGURE 17 – Résolution de l'équation de convection-diffusion en dimension 2

**Question 12** - Le schéma de Crank-Nicholson prenant en compte le terme de source est :

$$\left[ I_N + \frac{\Delta t}{2} (K_c^x + K_c^y) - \frac{\nu \Delta t}{2} A \right] U^{n+1} = \left[ I_N - \frac{\Delta t}{2} (K_c^x + K_c^y) + \frac{\nu \Delta t}{2} A \right] U^n + \Delta t F$$

Avec  $F_{(i-1)N+j} = (f_{x_0, y_0, \sigma}(x_i, y_j))$ . On prendra comme condition initiale  $U^0 = 0$ . On obtient le résultat suivant où on a représenté  $u(x, y, t)$  à  $t = \{0, 4, 8, 16\}$ .

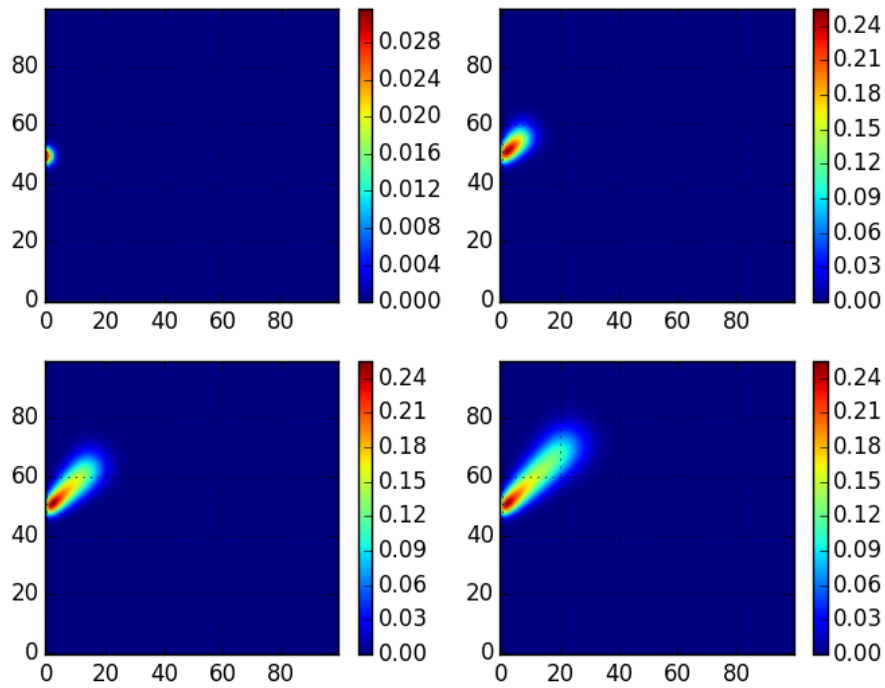


FIGURE 18 – Simulation de la dispersion d'un polluant dans l'océan

**Question 13** - On reprend le résultat de la question 10, et on prendra  $l = 1$  et  $k = 1$ . Le champ des vitesses  $\vec{V}(x, y)$  obtenu est représenté sur la figure suivante.

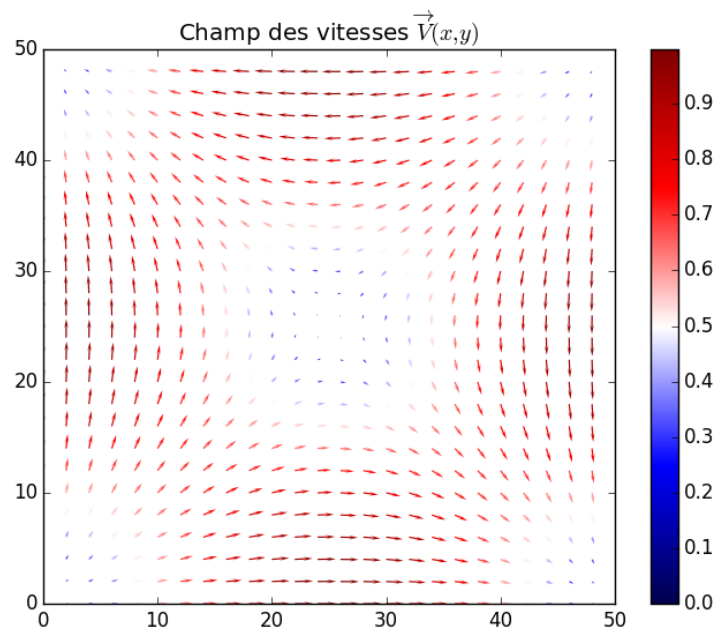


FIGURE 19 – Champ des vitesses

En utilisant le même terme source qu'à la question précédente, on obtient in fine la simulation suivante aux dates  $t = \{50, 100, 500, 1000\}$ .

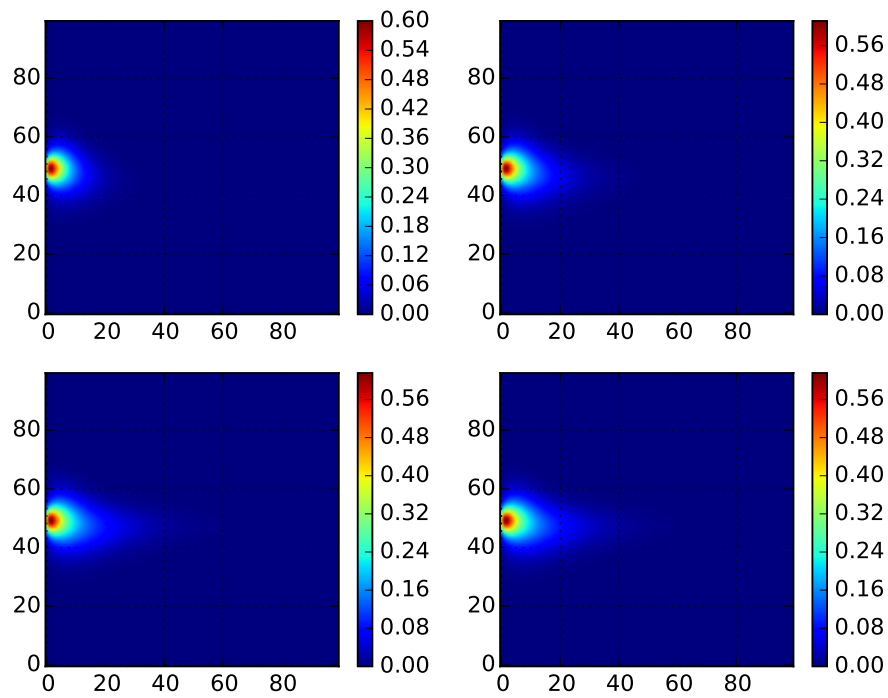


FIGURE 20 – Simulation de la dispersion d'un polluant dans l'océan

**Fin**