Projet Python MAP311 : Résolution de l'équation de Laplace par méthode de Monte Carlo

Sacha IZADI et Elior ILLOUZ

juin 2016

Question 1 - Nous allons montrer que (1) admet au plus une solution, mais avant cela nous résolvons l'équation (1) pour $f := 0$ et a, b quelconques.

• $u'' = 0 \iff \exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ tq.\ \forall\ x \in I, u(x) = \alpha x + \beta$
Les conditions aux bords, $u(0) = a,\ u(1) = b$, conduisent à la solution :

$$u(x) = (b - a) \times x + a$$

• Montrons qu'il existe au plus une solution Soit u et v deux solutions de (1), alors :
$\forall\ x\ \in I,\ u''(x) = f(x) = v''(x)$ i.e. $\forall\ x\ \in I, (u - v)"(x) = 0$
Et, $(u - v)"(0) = (u - v)"(1) = 0$
D'après le résultat précédent, $u - v$ est nulle sur I. Ainsi $u = v$.

La solution de (1), si elle existe, est unique.

• Enfin, (1) étant linéaire, ses solutions à f donné, sont de la forme $u = u_H + u_{part}$ où u_H est la solution de l'équation homogène et u_{part} une solution particulière de (1). Cherchons $u_p(x)$ sous la forme $u_p(x) = A\sin(2\pi x + \phi)$. Nous obtenons $u_p(x) = -\frac{1}{4\pi^2}\sin(2\pi x)$
Ainsi, $u(x) = \alpha x + \beta - \frac{1}{4\pi^2}\sin(2\pi x)$. Les conditions aux bords $u(0) = u(1) = 0$, conduisent in fine à :

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi^2}\sin(2\pi x)$$

Question 2 - Comme u est de classe C^4, nous appliquons la formule de Taylor-Young à l'ordre 3, ce qui donne : Pour tous $x, h \in I \times \mathbb{R}$, tels que $x \pm h \in I$

$$u(x \pm h) = u(x) \pm h.u'(x) + \frac{h^2}{2}.u''(x) \pm \frac{h^3}{6}.u'''(x) + O(h^4)$$

D'où :

$$u(x-h) - 2u(x) + u(x+h) \underset{h\to 0}{=} u(x) - u(x) + h.u'(x) - h.u'(x) + \frac{h^2}{2}.u''(x) + \frac{h^2}{2}.u''(x) + \frac{h^3}{6}.u'''(x) - \frac{h^3}{6}.u'''(x) + O(h^4)$$

Finalement on obtient le résultat attendu :

$$u''(x) \underset{h\to 0}{=} \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2} + O(h^2)$$

Question 3 - Nous avons simulé cinq trajectoires $\{X_0, X_1, ..., X_{T^x}\}$, pour $h = 5.10^{-2}$ et $x = 0,5$.

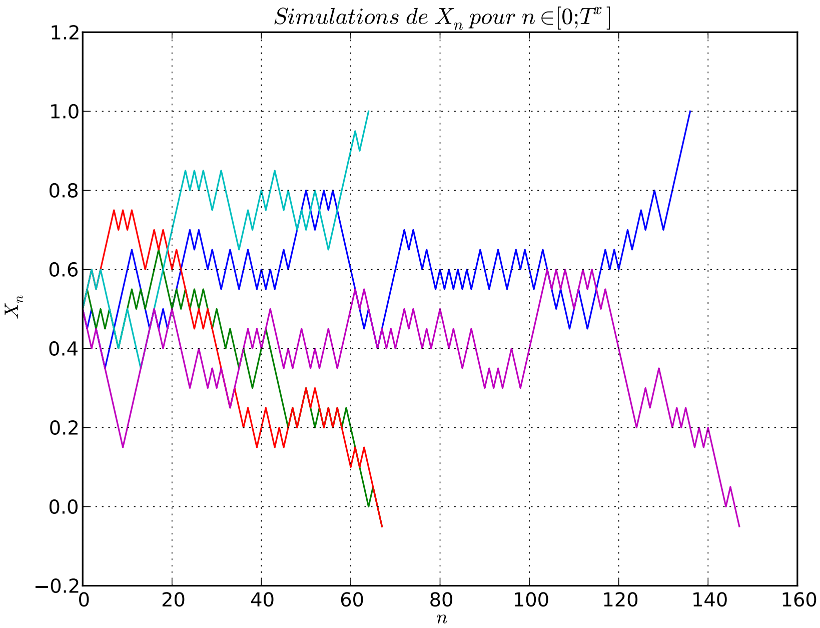


FIGURE 1 – Simulation de trajectoires

Comme le montrent ces courbes, la durée de simulation T^x est aléatoire. En outre, partant de la position initiale $X_0 = x = 0.5$, il y a environ autant de trajectoires se terminant en $X_{T^{0.5}} = 0$ qu'en $X_{T^{0.5}} = 1$, ce qui est logique puisque ces deux positions d'arrêt sont symétriques par rapport à la position initiale. Enfin après avoir réalisé plus de 1000 simulations, nous n'avons jamais observé l'évènement $[T^{0.5} = \infty]$ (et donc le programme a toujours terminé), ce qui tend à corroborer le fait que $\mathbb{P}(T^{0.5} < \infty) = 1$.

Question 4 - a) Soit $x \in I_h \cup \{0,1\}$, montrons que la v.a.r., $a\mathbf{1}_{X_{T^x}=0} + b\mathbf{1}_{X_{T^x}=1}$ est bornée presque partout. En effet, presque partout, $a\mathbf{1}_{X_{T^x}=0}+b\mathbf{1}_{X_{T^x}=1}$ est bien définie car $T^x \neq \infty$ p.p., et donc $[X_{T^x} = 0]$, $[X_{T^x} = 1]$ a un sens p.p. Aussi, en tout ω où elle est définie,
$|a\mathbf{1}_{X_{T^x}=0} + b\mathbf{1}_{X_{T^x}=1}| \leqslant |a| + |b| < +\infty$.

Ainsi v_h est bien définie sur $I_h \cup \{0,1\}$.

b) Soit $x \in I_h - \{0,1\}$. L'ensemble $\{[\xi_1 = 1], [\xi_1 = -1]\}$, forme un système complet d'évènements. Nous avons donc l'égalité :

$$\mathbb{P}(X_{T^x} = 0) = \mathbb{P}([X_{T^x} = 0] \cap [\xi_1 = 1]) + \mathbb{P}([X_{T^x} = 0] \cap [\xi_1 = -1])$$

Intéressons nous à $\mathbb{P}([X_{T^x} = 0] \cap [\xi_1 = 1])$:

$$\mathbb{P}([X_{T^x} = 0] \cap [\xi_1 = 1]) = \mathbb{P}\left(\left[\left(\sum_{i=1}^{T^x} \xi_i\right).h + x = 0\right] \cap [\xi_1 = 1]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\left(\sum_{i=2}^{T^x} \xi_i\right).h + (x+h) = 0\right] \cap [\xi_1 = 1]\right)$$

Notons que l'événements $[X_{T^x} = 0]$ correspond à l'évenement $[\exists n \in \mathbb{N}, X_n = (\sum_{i=1}^{n} \xi_i).h + x = 0]$. Ainsi,

$$\mathbb{P}([X_{T^x} = 0] \cap [\xi_1 = 1]) = \mathbb{P}\left(\left[\exists n \in \mathbb{N}, X_n = \left(\sum_{i=2}^{n} \xi_i\right).h + (x+h) = 0\right] \cap [\xi_1 = 1]\right)$$

Or les $(\xi_i)_{i\geq 2}$ sont indépendants de ξ_1. Donc, $[\exists n \in \mathbb{N},\ \left(\sum_{i=2}^{n} \xi_i\right).h + (x+h) = 0]$ est indépendant de $[\xi_1 = 1]$. Ce qui donne :

$$\mathbb{P}([X_{T^x} = 0] \cap [\xi_1 = 1]) = \mathbb{P}\left(\exists n \in \mathbb{N}, X_n = \left(\sum_{i=2}^{n} \xi_i\right).h + (x+h) = 0\right)\mathbb{P}(\xi_1 = 1)$$

Par ailleurs, comme les ξ_i sont identiquement distribués, on a l'égalité en loi :

$$\left(\sum_{i=2}^{n} \xi_i\right).h + (x+h) \overset{\mathcal{L}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i\right).h + (x+h)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_{T^x} = 0] \cap [\xi_1 = 1]) &= \mathbb{P}\left(\exists n \in \mathbb{N}, X_n = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i\right).h + (x+h) = 0\right)\mathbb{P}(\xi_1 = 1)\\ &= \mathbb{P}\left(\exists n \in \mathbb{N}, X_n = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right).h + (x+h) = 0\right)\mathbb{P}(\xi_1 = 1)\end{aligned}$$

Donc,

$$\mathbb{P}([X_{T^x} = 0] \cap [\xi_1 = 1]) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(X_{T^{x+h}}) = 0\right)$$

Nous obtenons donc in fine le résultat souhaité :

$$\forall x \in I_h - \{0,1\},\ \mathbb{P}(X_{T^x} = 0) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(X_{T^{x+h}} = 0\right) + \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(X_{T^{x-h}} = 0\right)$$

Notons qu'en passant au complémentaire : $\mathbb{P}(X_{T^x} = 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(X_{T^{x+h}} = 0\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(X_{T^{x-h}} = 0\right)$
Ce qui donne également :

$$\forall x \in I_h - \{0,1\},\ \mathbb{P}(X_{T^x} = 1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(X_{T^{x+h}} = 1\right) + \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(X_{T^{x-h}} = 1\right)$$

c) Par linéarité de l'espérance, $\forall x \in I_h \cup \{0,1\},\ v_h(x) = a.\mathbb{P}(X_{T^x} = 0) + b.\mathbb{P}(X_{T^x} = 1)$.

Si $x = 0$, alors $\mathbb{P}(X_{T^x} = 0) = 1$ et $\mathbb{P}(X_{T^x} = 1) = 0$, donc $v_h(0) = a$. De même, si $x = 1$, alors $v_h(1) = b$.

Soit $x \in I_h - \{0,1\}$,

$$v_h(x) = \frac{1}{2}\left(a.\mathbb{P}\left(X_{T^{x+h}} = 0\right) + a.\mathbb{P}\left(X_{T^{x-h}} = 0\right) + b.\mathbb{P}\left(X_{T^{x+h}} = 1\right) + b.\mathbb{P}\left(X_{T^{x-h}} = 1\right)\right)$$

$$v_h(x) = \frac{1}{2}\left(a.\mathbb{P}\left(X_{T^{x+h}} = 0\right) + b.\mathbb{P}\left(X_{T^{x+h}} = 1\right) + a.\mathbb{P}\left(X_{T^{x-h}} = 0\right) + b.\mathbb{P}\left(X_{T^{x-h}} = 1\right)\right)$$

C'est-à-dire que :

$$\begin{aligned}v_h(x) &= \frac{1}{2}\left(v_h(x+h) + v_h(x-h)\right)\\ \Rightarrow v_h(x-h) &- 2v_h(x) + v_h(x+h) = 0\end{aligned}$$

Finalement nous obtenons :

$$\begin{aligned}\forall x \in I_h - \{0,1\},\ \Delta_h v_h(x) = 0\\ v_h(0) = a,\ v_h(1) = b\end{aligned}$$

Donc v_h est solution de (2) avec $f := 0$.

Question 5 - a) Nous avons résolu numériquement l'équation (2), avec les paramètres suivants : $h = 3.10^{-2}$, $N = 1000$. Les conditions au bord sont $u(0) = a = 0.5$ et $u(1) = b = 1$. La solution approchée obtenue est relativement satisfaisante comme le montre la courbe suivante.

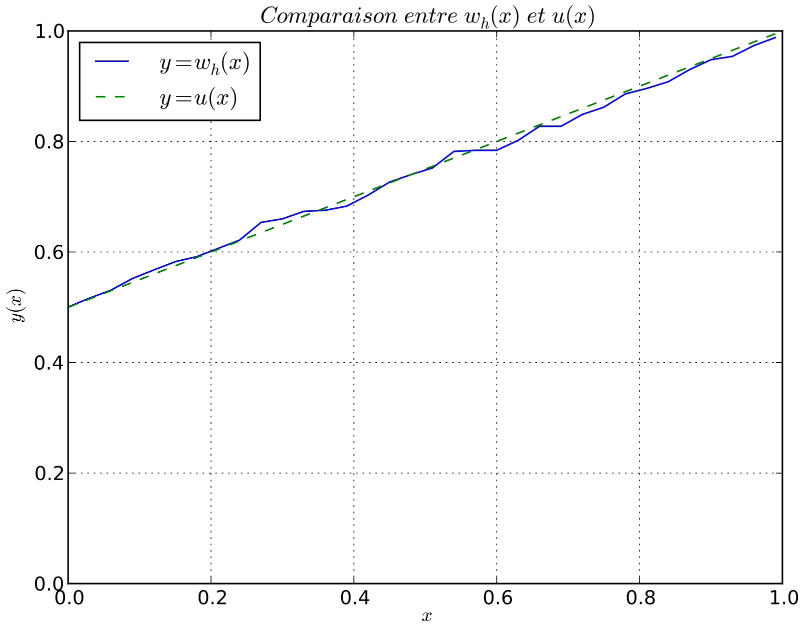


FIGURE 2 – Courbes de la solution approchée $v_h(x)$ et de la solution exacte $u(x)$

Sans rentrer dans les détails de programmation, la démarche a consisté à :

1. Discrétiser $I = [0, 1]$ en I_h.
2. Pour chaque $x \in I_h$, Simuler N fois le processus $\{X_1, ..., X_{T^x}\}$ Noter $N_{X_{T^x}=1}$ le nombre de résultats où $X_{T^x} = 1$. Puis, en vertu de la loi des grands nombres, réaliser l'approximation $\mathbb{P}\left(X_{T^x} = 1\right) \simeq \frac{N_{X_{T^x}=1}}{N}$
3. Puis à calculer $v_h(x) = a.\mathbb{P}\left(X_{T^{x+h}} = 0\right) + b.\mathbb{P}\left(X_{T^{x+h}} = 1\right)$ avec l'approximation réalisée précédemment.

b) L'étude qui suit (**Questions 5 -** a) & b)), cherche à optimiser les paramètres de discrétisation N et h. Nous nous plaçons à $x = 0.5$ fixé, et nous choisissons N suffisamment grand pour que l'approximation de la loi des grands nombres reste valable ($N = 10000$). Nous reportons l'erreur définie comme $|v_h(x) - u(x)|$, en fonction du pas de discrétisation h en échelle log-log.

Au vu des oscillations de cette courbe, il apparaît clairement qu'à x fixé l'erreur est aléatoire et ne présente pas de tendance évidente à la baisse, d'autant plus qu'une réduction du paramètre h rallonge de manière notoire les temps de calculs ... Il ne faut toutefois pas conclure qu'une meilleure discrétisation (et donc une réduction du paramètre h) est inutile. En effet, en réduisant h, on vient "lisser" la ligne brisée $y = v_h(x)$, ce qui rend l'approximation meilleure à l'échelle globale.

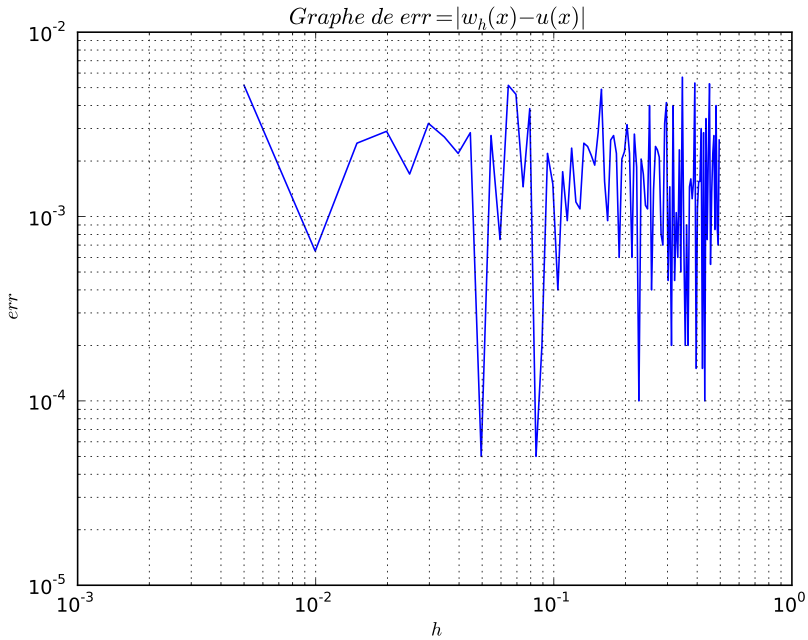


FIGURE 3 – Courbe d'erreur $|v_h(0.5) - u(0.5)| = f(h)$

c) Toujours à $x = 0.5$ fixé, nous choisissons h suffisamment petit (mais pas trop de manière à éviter des temps de calculs trop longs) ($h = 5.10^{-3}$). Nous reportons l'erreur en fonction du nombre de trajectoires simulées N en échelle log-log.

Là encore l'erreur est aléatoire, mais elle présente clairement une tendance à la baisse avec le paramètre N. Cela est très satisfaisant, d'autant plus qu'on observe empiriquement qu'une augmentation de N n'augmente pas aussi drastiquement les temps de calculs qu'une diminution de h.

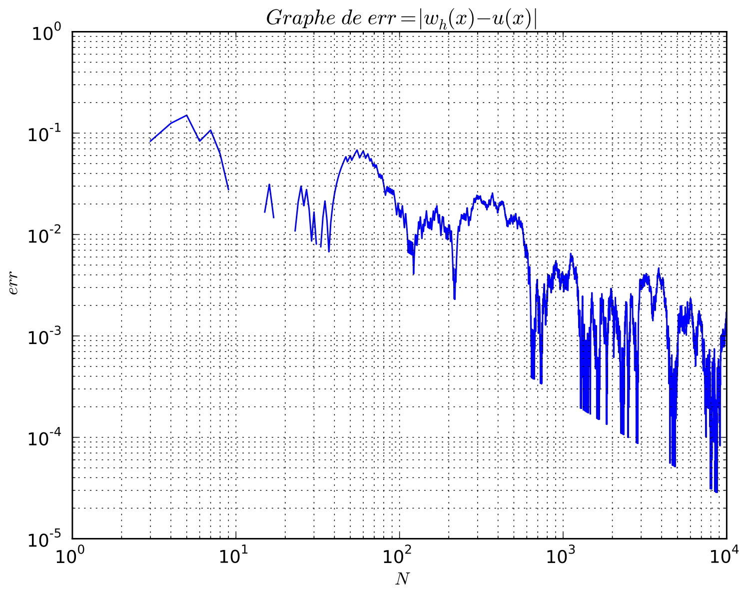


FIGURE 4 – Courbe d'erreur $|v_h(0.5) - u(0.5)| = f(N)$

Question 6 - a) f est bornée par $\|f\|_\infty$. Donc, pour tout $x \in I_h$,

$$|\sum_{n=0}^{T^x-1} f(X_n)| \leq \sum_{n=0}^{T^x-1} \|f\|_\infty = T^x \|f\|_\infty$$

Par croissance de l'espérance :

$$\mathbb{E}\left[|\sum_{n=0}^{T^x-1} f(X_n)|\right] \leq \mathbb{E}(T^x)\|f\|_\infty < \infty$$

Ainsi, $\sum_{n=0}^{T^x-1} f(X_n)$ est intégrable, donc

$$\forall x \in I_h, w_h(x) \textbf{ est bien définie.}$$

b) Notons $Y := \sum_{n=0}^{T^x-1} f(X_n)$. C'est une variable aléatoire discrète dont on notera Δ_Y le support.
Soit $x \in D_h - 0, 1$, par définition :

$$w_h(x) = -\frac{h^2}{2}\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T^x-1} f(X_n)\right]$$

En conditionnant par rapport aux valeurs prises par X_1 :

$$w_h(x) = -\frac{h^2}{2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{T^x-1} f(X_n)|X_1 = x+h\right]\mathbb{P}(X_1 = x+h) - \frac{h^2}{2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{T^x-1} f(X_n)|X_1 = x-h\right]\mathbb{P}(X_1 = x-h)$$

Intéressons nous à $\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{T^x-1} f(X_n)|X_1 = x+h\right]$:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{T^x-1} f(X_n)|X_1 = x+h\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{T^x-1} f(X_n) + f(x)|X_1 = x+h\right] = f(x) + \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{T^x-1} f(X_n)|X_1 = x+h\right]$$

Explicitons le second terme de la somme :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{T^x-1} f(X_n)|X_1 = x+h\right] &= \sum_{y\in\Delta_Y} y.\mathbb{P}_{X_1=x+h}\left(\sum_{n=1}^{T^x-1} f(X_n) = y\right)\\ &= \sum_{y\in\Delta_Y} y.\mathbb{P}_{X_1=x+h}\left(\sum_{n=2}^{T^x-1} f(X_n) + f(x+h) = y\right)\end{aligned}$$

Or on a l'égalité des événements suivants :

$$\begin{aligned}\left[\sum_{n=2}^{T^x-1} f(X_n) + f(x+h) = y\right] &= \left[\exists N \in \mathbb{N},\ tq\ \sum_{i=2}^{N} \xi_i.h + (x+h) \in \{0,1\}\right]\\ &\cap \left[\sum_{n=2}^{N} f\left(\sum_{i=2}^{n} \xi_i\right) + f(x+h) = y\right]\end{aligned}$$

On a vu que les ξ_i étaient identiquement distribués, ce qui entraîne l'égalité en loi $\left(\sum_{i=2}^{n} \xi_i\right).h + (x+h) \overset{\mathcal{L}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i\right).h + (x+h)$. Ceci entraîne que :

$$\mathbb{P}_{X_1=x+h}\left(\sum_{n=2}^{T^x-1} f(X_n)+f(x+h)=y\right)=\mathbb{P}_{X_1=x+h}\left(\left[\exists N\in\mathbb{N},\ tq\ \sum_{i=2}^{N}\xi_i.h+(x+h)\in 0,1\right]\right.$$
$$\left.\cap\left[\sum_{n=2}^{N} f\left(\sum_{i=2}^{n}\xi_i\right)+f(x+h)=y\right]\right)$$

Or, $X_1=x+\xi_1.h$ est indépendante de $\sum_{i=2}^{n}\xi_i$. Donc :

$$\mathbb{P}_{X_1=x+h}\left(\left[\exists N\in\mathbb{N},\ tq\ \sum_{i=2}^{N}\xi_i.h+(x+h)\in 0,1\right]\cap\left[\sum_{n=2}^{N} f\left(\sum_{i=2}^{n}\xi_i\right)+f(x+h)=y\right]\right)$$
$$=\mathbb{P}\left(\left[\exists N\in\mathbb{N},\ tq\ \sum_{i=2}^{N}\xi_i.h+(x+h)\in 0,1\right]\cap\left[\sum_{n=2}^{N} f\left(\sum_{i=2}^{n}\xi_i\right)+f(x+h)=y\right]\right)$$

$$=\mathbb{P}\left(\left[\exists N\in\mathbb{N},\ tq\ \sum_{i=1}^{N-1}\xi_i.h+(x+h)\in \{0,1\}\right]\cap\left[\sum_{n=2}^{N} f\left(\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i\right)+f(x+h)=y\right]\right)$$
$$=\mathbb{P}\left(\left[\exists N\in\mathbb{N},\ tq\ \sum_{i=1}^{N-1}\xi_i\in \{0,1\}\right]\cap\left[\sum_{n=1}^{N-1} f\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)+f(x+h)=y\right]\right)$$
$$=\mathbb{P}\left(\left[\exists N'\in\mathbb{N},\ tq\ \sum_{i=1}^{N'}\xi_i\in \{0,1\}\right]\cap\left[\sum_{n=1}^{N'} f\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)+f(x+h)=y\right]\right)$$
$$=\mathbb{P}\left(\sum_{n=0}^{T^{x+h}-1} f(X_n)=y\right)$$

Cela donne :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{T^x-1} f(X_n)|X_1=x+h\right]=\sum_{y\in\Delta_Y} y.\mathbb{P}\left(\sum_{n=0}^{T^{x+h}-1} f(X_n)=y\right)=\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T^{x+h}-1} f(X_n)\right]$$

D'où :

$$w_h(x)=-\frac{h^2}{2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{T^{x+h}-1} f(X_n)\right]\mathbb{P}(X_1=x+h)-\frac{h^2}{2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{T^{x+h}-1} f(X_n)\right]\mathbb{P}(X_1=x-h)$$

$$w_h(x)=-\frac{h^2}{4}\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T^{x+h}-1} f(X_n)\right]-\frac{h^2}{2}f(x)-\frac{h^2}{4}\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T^{x-h}-1} f(X_n)\right]-\frac{h^2}{2}f(x)$$
$$w_h(x)=-h^2f(x)+\frac{1}{2}(w_h(x+h)+w_h(x-h))$$

Finalement on obtient :

$$\forall x\in D_h-\{0,1\},\ \Delta_h w_h(x)=\frac{w_h(x+h)-2w_h(x)+w_h(x+h)}{h^2}=f(x)$$

Et si $x=0$ ou 1, $T^x=0$, et $\sum_{n=0}^{T^x-1} f(X_n)=\sum_{n=0}^{-1} f(X_n)=0$. D'où :

$$\forall x\in\partial D_h=\{0,1\},\ \Delta_h w_h(x)=0$$

Ainsi w_h est solution de l'équation de Laplace discrétisée.

Question 7 - a) Nous avons résolu numériquement l'équation (2), avec les paramètres suivants : $h = 3.10^{-2}$, $N = 10000$. Les conditions au bord sont $u(0) = a = 0$ et $u(1) = b = 0$. Le second membre est $f(x) = \sin(2\pi x)$. La solution approchée, w_h rend relativement bien compte de l'allure et des variations de la solution exacte u_h comme le montre la courbe suivante.

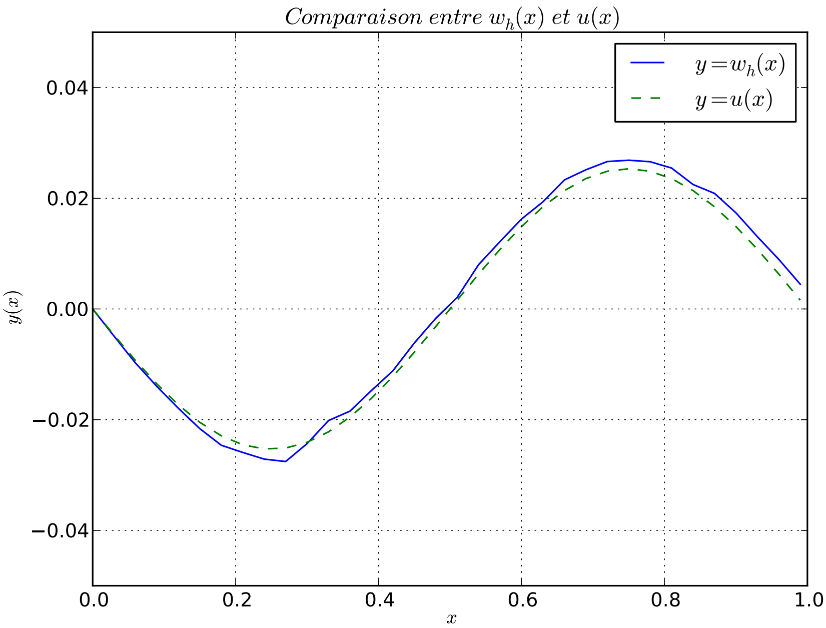


FIGURE 5 – Courbes de la solution approchée $w_h(x)$ et de la solution exacte $u(x)$

b) Comme pour la **Question 5**, nous nous plaçons à $x = 0.5$ fixé, et nous choisissons N suffisamment grand pour que l'approximation de la loi des grands nombres reste valable ($N = 10000$). Nous reportons l'erreur définie comme $|w_h(x) - u(x)|$, en fonction du pas de discrétisation h en échelle log-log.

La tendance est exactement la même que pour l'équation sans second membre $\Delta u = 0$: à x fixé l'erreur est aléatoire et ne présente pas de tendance évidente à la baisse. On rappelle néanmoins qu'en réduisant h, on vient "lisser" la ligne brisée $y = w_h(x)$, ce qui rend l'approximation meilleure à l'échelle globale.

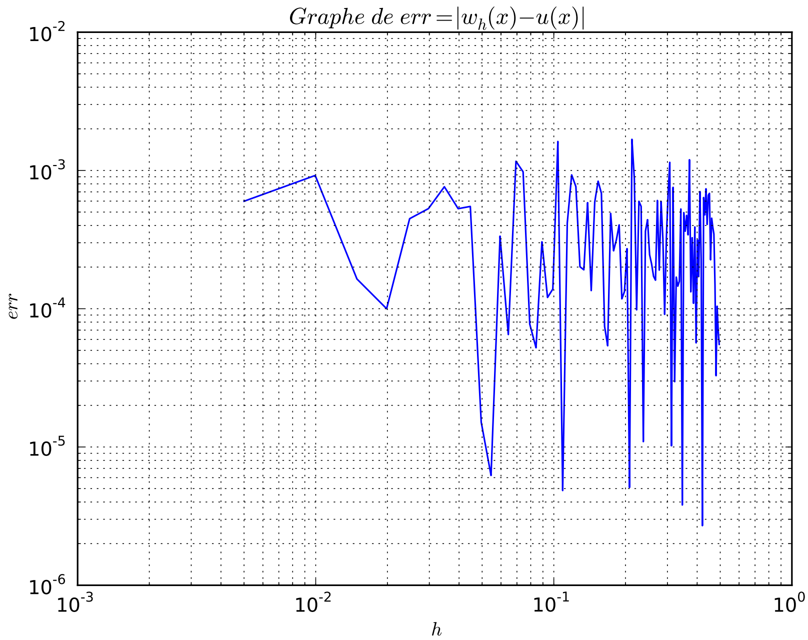


FIGURE 6 – Courbe d'erreur $|w_h(0.5) - u(0.5)| = f(h)$

c) Toujours à $x = 0.5$ fixé, nous choisissons h suffisamment petit ($h = 5.10^{-3}$). Nous reportons l'erreur en fonction du nombre de trajectoires simulées N en échelle log-log.

De manière similaire à la résolution de l'équation sans second membre, l'erreur est aléatoire mais présente clairement une tendance à la baisse avec le paramètre N.

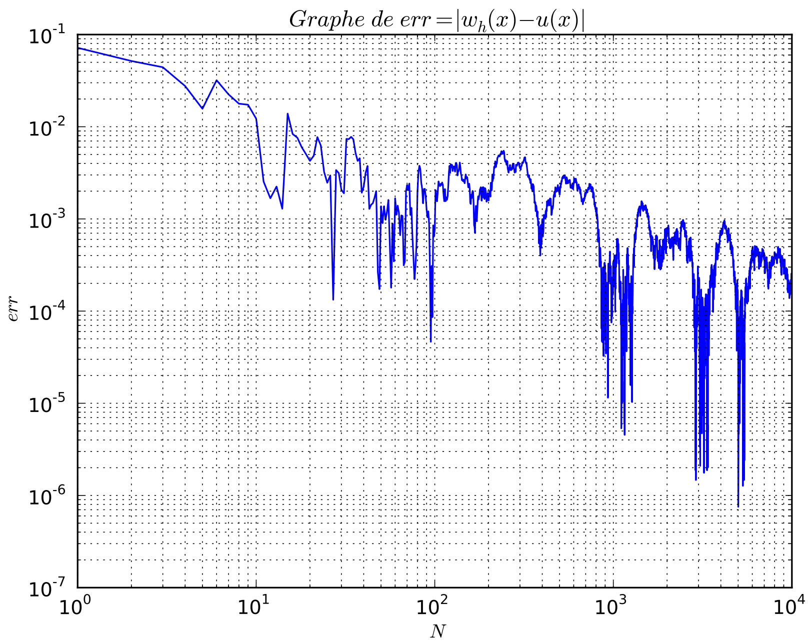


FIGURE 7 – Courbe d'erreur $|w_h(0.5) - u(0.5)| = f(N)$

Ces résultats sont très satisfaisants. En effet, la résolution de l'équation de Laplace par méthode de Monte-Carlo présente les mêmes caractéristiques de convergence par rapport aux paramètres

h et N, avec et sans second membre.

Question 8 - Partant des positions $x = 0.5$, $x = 0.1$ et $x = 0.9$, nous avons simulé $N = 10.000$ processus de marche aléatoire $\{X_1,\ X_2,\ ...,\ X_{T^x}\}$. Nous avons fait varier le pas de discrétisation h. Nous avons ensuite tracé $\mathbb{E}(T^x) = f(h)$ en échelle $\log - \log$.

On remarque que dans la limite $h \to 0$ (typiquement ici $h < 10^{-2}$), $\mathbb{E}(T^x) = f(h)$ en échelle $log - log$ a l'allure d'une droite de coefficient directeur -2. Ce qui traduit le fait que :

$$\mathbb{E}(T^x) \underset{h\to 0}{\sim} C^{te} h^{-2}$$

Autre fait remarquable, $\mathbb{E}(T^x)$ est symétrique par rapport à $x = 0.5$ ce qui se comprend assez bien intuitivement. Partant de la position $x = x_0 = 0.5 + \alpha$ ($\alpha \geq 0$), il est tout aussi facile de se retrouver en $x = 1$ (resp. en $x = 0$) que de se retouver en $x = 0$ (resp. en $x = 1$) partant de la position $x = x_0' = 0.5 - \alpha$. Cette idée de facilité traduisant le nombre T^{x_0} de ξ_i à simuler pour se retrouver à l'une des position $x = 0$ ou $x = 1$.

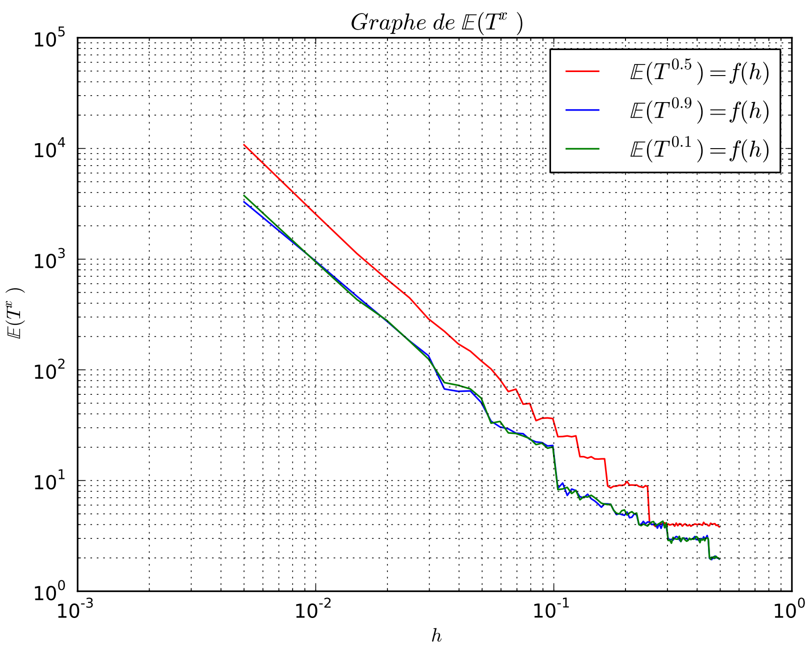


FIGURE 8 – Courbes $\mathbb{E}(T^x) = f(h)$ pour différentes valeurs de x

Question 9 - a) Nous avons

$$\mathbb{E}\left[T^x|X_1=x+h\right]=\sum_{t\in\mathbb{N}}t.\mathbb{P}\left(T^x=t|X_1=x+h\right)$$

$$\underset{\mathbb{P}(T^x=\infty)=0}{=}\sum_{t\in\mathbb{N}-\{\infty\}}t.\mathbb{P}\left(\inf\{n\in\mathbb{N}|\sum_{i=1}^{n}\xi_i.h+x\in\{0,1\}\}=t|X_1=x+h\right)$$

$$=\sum_{t\in\mathbb{N}-\{\infty\}}t.\mathbb{P}\left(\inf\{n\in\mathbb{N}|\sum_{i=1}^{n-1}\xi_{i+1}.h+(x+h)\in\{0,1\}\}=t|X_1=x+h\right)$$

$$\underset{X_1 indep.(\xi_i)_{i>1}}{=}\sum_{t\in\mathbb{N}-\{\infty\}}t.\mathbb{P}\left(\inf\{n\in\mathbb{N}|\sum_{i=1}^{n-1}\xi_{i+1}.h+(x+h)\in\{0,1\}\}=t\right)$$

$$\underset{(\xi_i)i.i.d.}{=}\sum_{t\in\mathbb{N}-\{\infty\}}t.\mathbb{P}\left(\inf\{n\in\mathbb{N}|\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i.h+(x+h)\in\{0,1\}\}=t\right)$$

Nous avons besoin du lemme suivant :

Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Alors $\inf\{n\in\mathbb{N}|n-1\in A\}=\inf\{n\in\mathbb{N}|n\in A\}+1$

En effet :
- Si $\inf\{x\in\mathbb{R}|x-1\in A\}=\infty$, alors $\inf\{x\in\mathbb{R}|x\in A\}-1=\infty-1=\infty$.
- Si $\inf\{x\in\mathbb{R}|x\in A\}=n_0$, alors $(n_0+1)-1\in A$, et $\forall n'\in A,\ n\leq n_0$. Donc, $\forall n\ tq\ n'=n-1\in A,\ n'=n-1\leq n_0,\ i.e.\ n\leq n_0+1$. D'où le résultat.

Appliqué à $A=\{n\in\mathbb{N}|\sum_{i=1}^{n}\xi_i.h+(x+h)\in\{0,1\}\}$, cela donne :

$$\mathbb{E}\left[T^x|X_1=x+h\right]=\sum_{t\in\mathbb{N}-\{\infty\}}t.\mathbb{P}\left(\inf\{n\in\mathbb{N}|\sum_{i=1}^{n}\xi_i.h+(x+h)\in\{0,1\}\}+1=t\right)$$

$$=\sum_{t\in\mathbb{N}-\{\infty\}}t.\mathbb{P}\left(\inf\{n\in\mathbb{N}|\sum_{i=1}^{n}\xi_i.h+(x+h)\in\{0,1\}\}=t-1\right)$$

$$=1+\sum_{t\in\mathbb{N}-\{\infty\}}(t-1).\mathbb{P}\left(\inf\{n\in\mathbb{N}|\sum_{i=1}^{n}\xi_i.h+(x+h)\in\{0,1\}\}=t-1\right)$$

Nous avons donc bien prouvé que $\mathbb{E}\left[T^x|X_1=x+h\right]=1+\mathbb{E}\left[T^{x+h}\right]$

b) Déterminons $\mathbb{E}[T^x]$, pour $x\in I_h$:

$$\mathbb{E}[T^x]=\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[T^x|X_1=x+h\right]+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[T^x|X_1=x-h\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\mathbb{E}[T^{x+h}]+1+\mathbb{E}[T^{x-h}]\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\mathbb{E}[T^{x+h}]-2\mathbb{E}[T^x]+\mathbb{E}[T^{x-h}]}{h^2}=-\frac{2}{h^2}\Rightarrow\frac{d^2}{dx^2}\mathbb{E}[T^x]\underset{h\to 0}{\simeq}-\frac{2}{h^2}$$

On en déduit l'expression de $\mathbb{E}[T^x]$:

$$\mathbb{E}[T^x] = -\frac{2x^2}{h^2} + \alpha.x + \beta$$

Les conditions aux bords $\mathbb{E}[T^0] = \mathbb{E}[T^1] = 0$ imposent $\beta = 0$ et $\alpha = \frac{2}{h^2}$:

$$\mathbb{E}[T^x] \underset{h\to 0}{=} \frac{2x(1-x)}{h^2}$$

On retrouve la relation empirique $\mathbb{E}(T^x) \underset{h\to 0}{\sim} C^{te}_{(x)} h^{-2}$ de la **Question 8**, les observations de symétrie par rapport à la position $x = 0.5$, et le fait que le maximum est atteint en $x = 0.5$.

Question 10 - a) Déterminons la solution exacte u du problème :

$$\Delta u(x,y) = 0, \text{ pour } (x,y) \in D$$
$$u(x,y) = g(x,y) = \exp(\pi y)\sin(\pi x), \text{ pour } (x,y) \in \partial D$$

Comme l'équation $\Delta u(x,y) = 0$ est linéaire, elle admet une unique solution pour un jeu de conditions au bord donné. Il suffit donc de déterminer **une** solution qui répond au problème. Par unicité il s'agira de **la** solution au problème.

Nous remarquons que $u(x,y) = \exp(\pi y)\sin(\pi x)$, vérifie clairement les conditions aux limites ainsi que :

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sin(\pi x))\exp(\pi y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\exp(\pi y))\sin(\pi x)$$
$$\Delta u(x,y) = -\pi^2 \sin(\pi x)\exp(\pi y) + \pi^2 \exp(\pi y)\sin(\pi x) = 0$$

Donc $u(x,y) = \exp(\pi y)\sin(\pi x)$ est la solution au problème.

b) En nous inspirant de la démarche de la **Question 4**, nous proposons une solution $u_h(x,y)$, telle que $\Delta_h u_h(x,y) = 0$ sur le domaine D_h et $u_h(x,y) = g(x,y)$ sur le bord ∂D_h.
Soit

$$u_h(x,y) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\lfloor 1/h \rfloor}\left(g(k.h,0)\mathbf{1}_{\{X_{T^{x,y}_{\partial D}}=(kh,0)\}} + g(k.h,1)\mathbf{1}_{\{X_{T^{x,y}_{\partial D}}=(kh,1)\}}\right.\right.$$
$$\left.\left. + g(0,k.h)\mathbf{1}_{\{X_{T^{x,y}_{\partial D}}=(0,k.h)\}} + g(1,k.h)\mathbf{1}_{\{X_{T^{x,y}_{\partial D}}=(1,k.h)\}}\right)\right]$$

En développant :

$$u_h(x,y) = \sum_k \left(g(k.h,0)\mathbb{P}\left(X_{T^{x,y}_{\partial D}} = (kh,0)\right) + g(k.h,1)\mathbb{P}\left(X_{T^{x,y}_{\partial D}} = (kh,1)\right) + g(0,k.h)\mathbb{P}\left(X_{T^{x,y}_{\partial D}} = (0,k.h)\right)\right.$$
$$\left. + g(1,k.h)\mathbb{P}\left(X_{T^{x,y}_{\partial D}} = (1,k.h)\right)\right)$$

Nous admettrons, eu égard aux **Questions 4** b) et **6** b), que :

$$\mathbb{P}\left(X_{T^{x,y}_{\partial D}} = (kh,0)\right) = \frac{1}{4}\left[\mathbb{P}\left(X_{T^{x+h,y}_{\partial D}} = (kh,0)\right) + \mathbb{P}\left(X_{T^{x-h,y}_{\partial D}} = (kh,0)\right) + \mathbb{P}\left(X_{T^{x,y+h}_{\partial D}} = (kh,0)\right)\right.$$
$$\left. + \mathbb{P}\left(X_{T^{x,y-h}_{\partial D}} = (kh,0)\right)\right]$$

Ce résultat se prouve en conditionnnant par rapport aux événements $[\eta_1 = ...]$. Par ailleurs cela s'applique aux 3 autres probabilités de l'expression de $u_h(x,y)$. En regroupant les différents termes de $u_h(x,y)$ selon $x \pm h$, $y \pm h$, on obtient la relation suivante :

$$4u_h(x,y) = u_h(x+h,y) + u_h(x-h,y) + u_h(x,y+h) + u_h(x,y-h)$$
$$\Rightarrow u_h(x+h,y) - 2u_h(x,y) + u_h(x-h,y) \; + \; u_h(x,y+h) - 2u_h(x,y) + u_h(x,y-h) = 0$$

Donc :

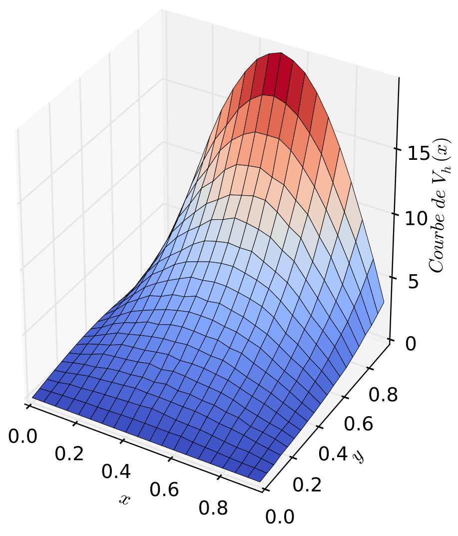
$$\forall (x,y) \in D_h, \; \Delta_h u_h(x,y) = 0$$

Et par construction, $u_h(x,y) = g(x,y)$ sur ∂D_h.

c) Résolution de l'équation par méthode de Monte-Carlo et comparaison à la solution exacte.
La résolution de l'équation a été codée en respectant la procédure décrite précédemment. Néanmoins la méthode proposée est très consommatrice en ressource de calculs. Prenons h fixé, alors pour échantilloner correctement les probas $\mathbb{P}\left(X_{T_{\partial D}^{x,y-h}} = (kh,0)\right)$, il faut choisir $N \gg 1/h$, typiquement : $N \sim 10^3/h$. Chaque simulation de marche aléatoire nécessite environ $\mathbb{E}[T^{x,y}]$ itération, or en dimension 1, $\mathbb{E}[T^{x,y}] \sim h^{-2}$, on envisage qu'en dimension 2 l'ordre de grandeur est plutôt $\mathbb{E}[T^{x,y}] \sim h^{-4}$. On itère le processus sur chaque (x,y) du domaine D_h, avec $\#D_h \sim \frac{1}{h^2}$.

On en conclut qu'une simulation nécesite de l'ordre de $\mathcal{O}(10^3 h^{-6})$ calculs.

Néanmoins, en prenant $h = \frac{1}{20}$ et $N = 10000$, on obtient un graphe relativement satisfaisant.



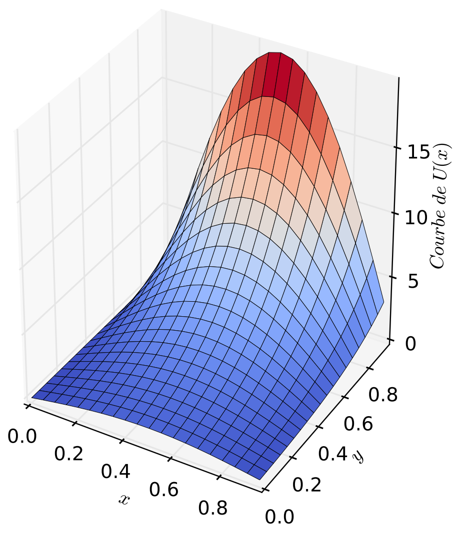


FIGURE 9 – Graphes de la solution approchée $u_h(x,y)$ (à gauche) et de la solution exacte $u(x,y)$ (à droite)