Optimisation robuste : faire face au pire cas

Boris Detienne
Equipe Inria RealOpt
IMB - Equipe Optimal
2ème journée IA/RO en Aquitaine

7 février 2019

Objectif

Bref aperçu de l'optimisation robuste

- Cas d'utilisation et intérêt
- Quelques approches
- Mises en garde

Plan de l'exposé

Problématiques courantes

- Production d'énergie
  demande, capacité de production, pannes. . .
- Optimisation de traitements phytosanitaires
  météo, développement de maladies. . .
- Ordonnancement de processus informatiques
  arrivée de processus en temps réel. . .
- Routage maritime à propulsion mixte météo
- Investissements à moyen/long termes
  prévisions de demande, vente. . .
- Trafic routier, ferroviaire, aérien, maritime. . .
- Processus industriels de pointe (microélectronique)
  état du système incertain, effets incertains

Problèmes d'optimisation

Paradigme de modélisation : **Programmation mathématique**

$$
\begin{array}{lll}
min & f(x) & \\
s.c. & g_k(x) \leq b_k & \forall k \\
 & x \in X \subseteq \mathbb{R}^n &
\end{array}
$$

Dans cette présentation

- f, g_k linéaires : *Programmation Linéaire*
- X non convexe ($\subseteq \mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^q$) : *Programmation mixte*

Optimisation stochastique

- Objectif : solution bonne **en moyenne**
- Pré-requis : **statistiques** précises sur les paramètres
  lois de probabilité, ensemble de scénarios représentatifs...
- Contexte : **expérience répétée** de nombreuses fois, pas de risque grave en cas de mauvaise réalisation de l'aléa
  Conception de réseau de distribution de biens

Approche orientée "moyenne"

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ s.c. \quad & t \geq \mathbb{E}_{\xi \in \Xi}[Q(x,\xi)] \\ & g(x) \leq 0 \\ & x \in X, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$Q(x,\xi)$: coût de la solution x sous l'aléa ξ (inclut l'irréalisabilité)

Approches "risk-averse" : (Conditional) Value-At-Risk, variance...

Optimisation robuste

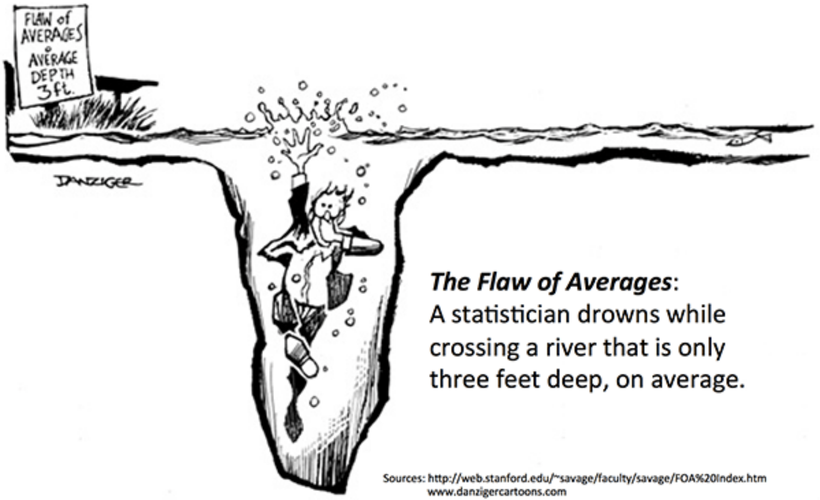
- Objectif : **immuniser** contre les événements incertains les plus néfastes
  - solution **réalisable** ou réparable dans tous les cas
  - solution bonne dans le **pire des cas**
- Pré-requis : description des **paramètres plausibles** Ξ
- Contexte : expérience rare, mauvaise réalisation de l'**aléa très néfaste**
  Conception de réseau : câblage de satellite

Approche pire cas

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{s.c.} & \left.\begin{array}{r} t \geq Q(x,\xi) \\ g(x,\xi) \leq 0 \end{array}\right\} \forall \xi \in \Xi \\ & x \in X, t \in \mathbb{R} \end{array}$$

$Q(x,\xi)$: coût de la solution x sous l'aléa ξ

Stochastique VS Robuste



Solutions de contournement de l'aléa

Approche valeur moyenne

Idée : remplacer l'aléa $\xi \in \Xi$ par sa valeur moyenne $\bar{\xi}$.
On obtient un problème déterministe.

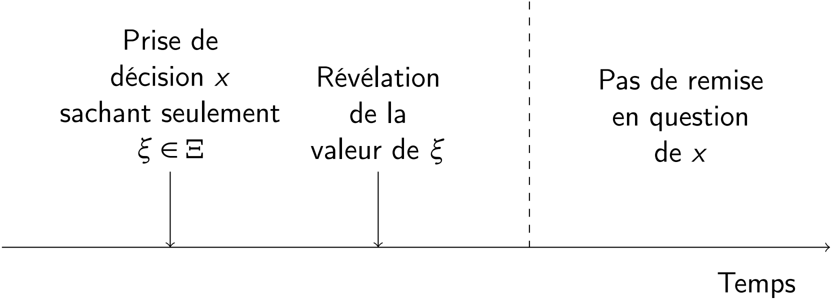
- L'approximation peut être très grossière
  Le coût n'est pas une fonction linéaire de l'aléa
- Ne protège pas des infaisabilités

Approche pire cas basique

Idée : ajouter de la marge sur les paramètres.
On obtient un problème déterministe.

- On se protège contre des événements impossibles
  Tous les paramètres dévient rarement simultanément
- Au détriment de la qualité économique de la solution

Modèles statiques (sans recours)



Approche classique : Budget d'incertitude

Amélioration de l'approche pire cas basique [Bertsimas et Sim, 2004]

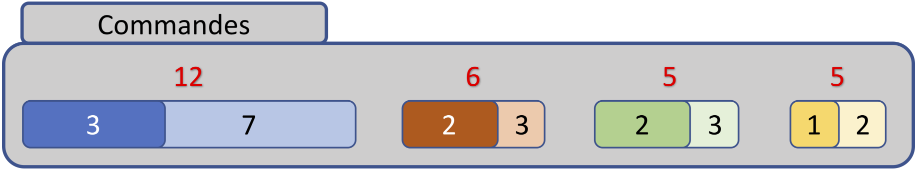
- Les paramètres peuvent varier dans un intervalle.
- Parmi tous les paramètres incertains, on suppose que Γ ou moins vont dévier.
- On cherche la solution de meilleur coût qui est faisable pour tout cet ensemble de déviations.

Reformulation du modèle de Programmation mathématique

$$\sum_j a_{ij}(\xi)x_j \leq b_i(\xi) \quad \xi \in \Xi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_j a_{ij}^0 x_j + g_r \pi_{ir} \leq b_i^0 \\ \sum_{r \in R} f_r^\ell \pi_{ir} \geq \sum_j a_{ij}^\ell x_j - b_i^\ell, \forall \ell = 1, \ldots, L \end{cases}$$

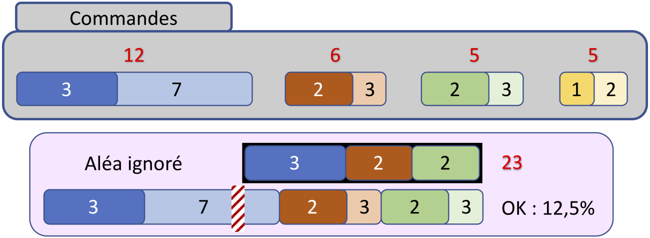
Exemple : sac-à-dos robuste



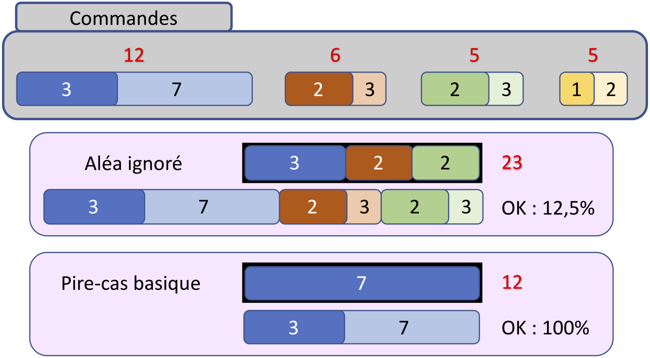
Temps disponible : **7**

- Choisir l'ensemble de commandes rapportant le plus et étant faisable dans le temps disponible.
- Le traitement peut être plus long que prévu (1 chance sur 2).
- On considère que ne pas honorer une commande acceptée est gravissime.

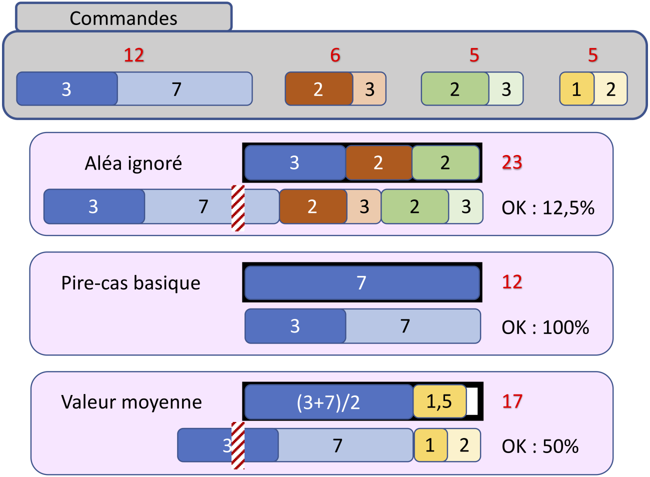
Exemple : sac-à-dos robuste



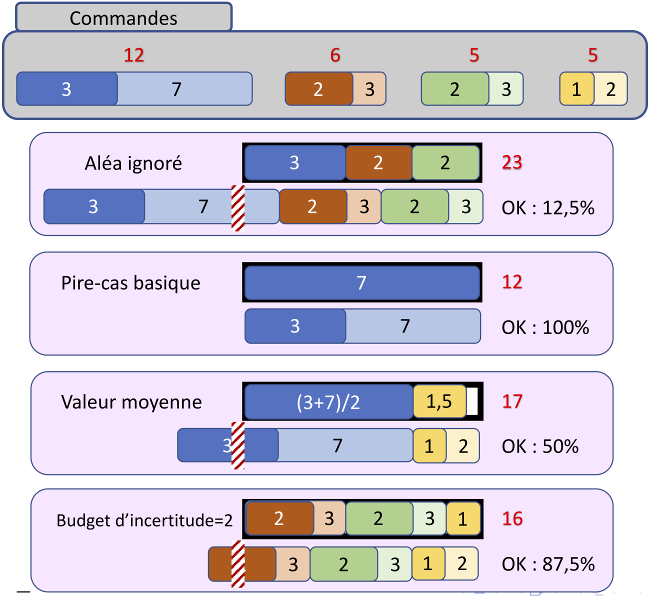
Exemple : sac-à-dos robuste



Exemple : sac-à-dos robuste



Exemple : sac-à-dos robuste



Critique des modèles sans recours

Avantages

Dans de nombreux cas, le problème reste de la même classe de complexité. Les mêmes algorithmes peuvent parfois être utilisés pour le problème déterministe et sa variante robuste.

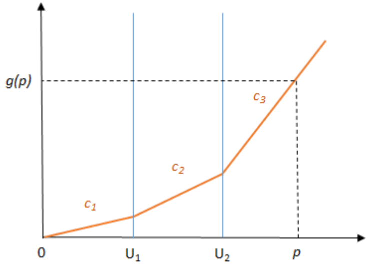
Inconvénients

- Comment déterminer l'ensemble d'incertitude ?
  (en général plus facile que déterminer des lois de probabilité)
- Peut être délicat à modéliser.
  Dans les modèles robustes sans recours, l'incertitude, même couplée, s'applique indépendamment sur chaque contrainte.

Modélisation délicate : production d'électricité

Problème : planification de maintenances de centrales

- Demande d'électricité connue à chaque période de temps
- Production gratuite par les centrales considérées
- Coût de production super-additif pour compléter la demande



- Minimiser le pire coût en cas de prolongation d'arrêt
- Hypothèse : pas plus d'une prolongation d'arrêt par période

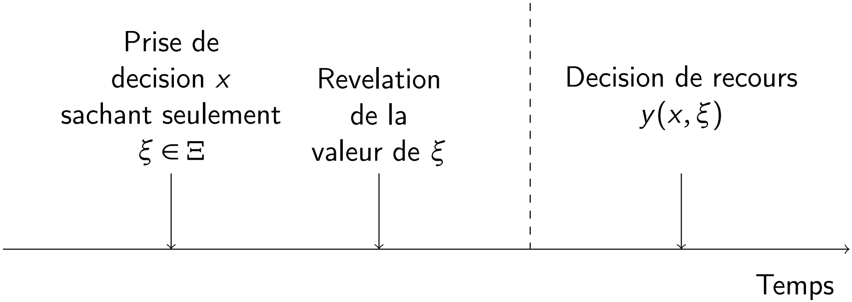
Dans une bonne solution, les redémarrages sont étalés dans le temps.

Modélisation délicate : production d'électricité

$\Gamma_t = 1$ - Solution optimale du modèle d'optimisation

Synchroniser les redémarrages ne fait apparaître qu'une unique panne. En réalité, les centrales n'ont pas moins moins de risque de tomber en panne lorsqu'elles redémarrent ensemble...

Modèles à deux niveaux (avec recours)



Définition formelle

Modèle PL(NE)

$$
\begin{aligned}
(CR): min \quad & cx + t & \\
& Ax \leq b & \\
& x \in X & \\
& t \geq q(\xi)y(\xi) & \forall \xi \\
& T(\xi)x + W(\xi)y(\xi) \leq h(\xi) & \forall \xi \\
& y(\xi) \in Y & \forall \xi
\end{aligned}
$$

- x : décisions de planification
- t : coût de recours
- $y(\xi)$: décision de recours
- $q(\xi), T(\xi), W(\xi), h(\xi)$: aléa révélé après la planification

Complexité

En général Σ_2^P-difficile, mais certains cas restent faciles.

Règles de décision

Objectif

Trouver un compromis entre :

- Modèles statiques, trop contraignants
- Modèles avec recours, trop difficiles à résoudre

Principe

Restreindre l'ensemble des solutions de second niveau possibles :

- Var. second niveau = fonction de l'incertitude et des variables de premier niveau
- Peut se reformuler comme un problème sans recours

K-adaptability [Hanasusanto et al., 2016]

Objectif

Trouver un compromis entre :

- Modèles statiques, trop contraignants
- Modèles avec recours, trop difficiles à résoudre

Principe

Restreindre l'ensemble des solutions de second niveau possibles :

- Décider de K solutions de recours possibles au premier niveau
- Recours : choisir la meilleure solution pré-établie

Light robustness [Fischetti et Monaci, 2009]

Objectif

Trouver un compromis entre :

- Modèles statiques, trop contraignants
- Modèles avec recours, trop difficiles à résoudre

Principe

Vision bi-objectif :

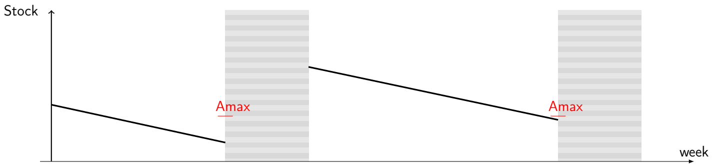
- Modéliser des contraintes robustes statiques *soft*
- Minimiser leur violation sous contrainte économique

Light robustness

Application à la planification des maintenances de centrales électriques [Griset 2018]

- Quand recharger les centrales ?
- Le stock de combustible doit être suffisamment bas pour stopper.
- Des événements imprévus diminuent la consommation de combustible.
- La quantité de combustible ajoutée et les dates d'arrêt sont décidés très en amont.

Eviter d'enchaîner des cycles où des surplus pourraient s'accumuler jusqu'à dépasser la limite.

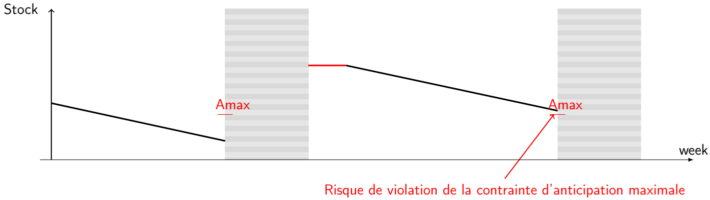


Light robustness

Application à la planification des maintenances de centrales électriques [Griset 2018]

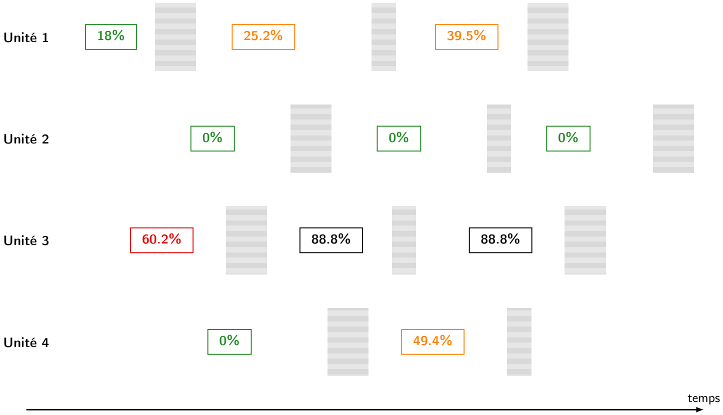
- Quand recharger les centrales ?
- Le stock de combustible doit être suffisamment bas pour stopper.
- Des événements imprévus diminuent la consommation de combustible.
- La quantité de combustible ajoutée et les dates d'arrêt sont décidés très en amont.

Eviter d'enchaîner des cycles où des surplus pourraient s'accumuler jusqu'à dépasser la limite.



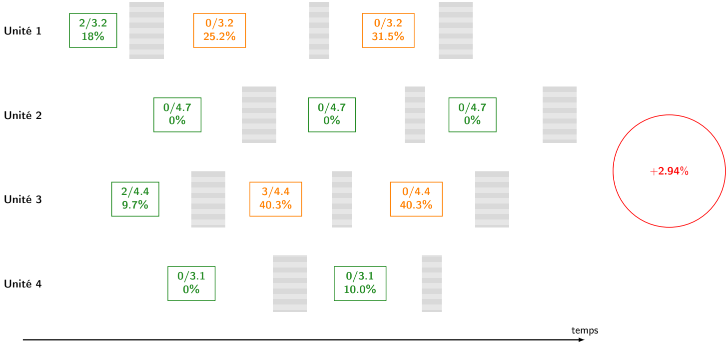
Light robustness

Planning nominal (optimum économique)



Light robustness

Planning maximisant la robustesse sous contrainte budgétaire



Conclusion

Approches statiques :

- Peuvent permettre une gestion de l'aléa sans trop complexifier le problème
- Plus délicat à modéliser et mettre en oeuvre que les approches déterministes
- Approche pragmatique : Light Robustness [Fischetti et Monaci, 2009]

Domaine de recherche très actif :

- Ensembles d'incertitude variés
- Modèles avec recours (difficultés numériques ++)
- Modèles multi-niveaux (difficultés numériques ++++++++++++)
- Robustesse en distribution

Approches alternatives pour la gestion du risque :

- Contraintes probabilistes (difficultés numériques ++)
- Mesures de risques (CVaR, VaR...)

Exemple : horaires sur une ligne de train

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "10'"'] & 2 \arrow[r, "10'"'] & 3 \arrow[r, "10'"'] & 4 \arrow[r, "10'"'] & 5
\end{tikzcd}
$$

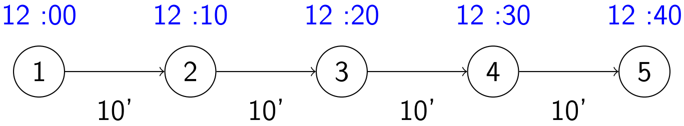
Problème

Déterminer une heure de départ à chaque arrêt

- arriver au plus tôt au dernier arrêt
- ne jamais partir en retard ni en avance

$$
\begin{aligned}
\min \quad & t_5 - t_1 \\
s.c. \quad & t_2 - t_1 \geq 10 \\
& t_3 - t_2 \geq 10 \\
& t_4 - t_3 \geq 10 \\
& t_5 - t_4 \geq 10 \\
& t \geq 0
\end{aligned}
$$

Exemple : horaires sur une ligne de train



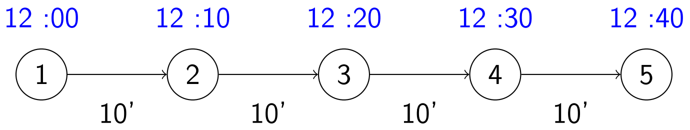
Problème

Déterminer une heure de départ à chaque arrêt

- arriver au plus tôt au dernier arrêt
- ne jamais partir en retard ni en avance

$$
\begin{array}{ll}
\min & t_5 - t_1 \\
s.c. & t_2 - t_1 \geq 10 \\
 & t_3 - t_2 \geq 10 \\
 & t_4 - t_3 \geq 10 \\
 & t_5 - t_4 \geq 10 \\
 & t \geq 0
\end{array}
$$

Exemple : horaires sur une ligne de train



Problème

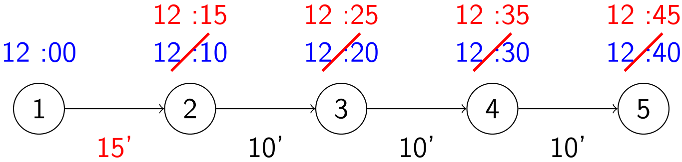
Déterminer une heure de départ à chaque arrêt

- arriver au plus tôt au dernier arrêt
- ne jamais partir en retard ni en avance

On veut se protéger contre un délai total de 5'.

$$\left.\begin{array}{ll} \min & t_5 - t_1 \\ s.c. & t_2 - t_1 \geq 10 + \xi_1 \\ & t_3 - t_2 \geq 10 + \xi_2 \\ & t_4 - t_3 \geq 10 + \xi_3 \\ & t_5 - t_4 \geq 10 + \xi_4 \\ & t \geq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall \xi \geq 0 : \\ \sum_{i=1}^{4} \xi_i \leq 5 \end{array}$$

Exemple : horaires sur une ligne de train



Problème

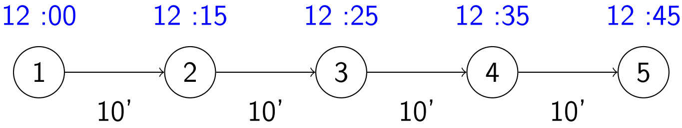
Déterminer une heure de départ à chaque arrêt

- arriver au plus tôt au dernier arrêt
- ne jamais partir en retard ni en avance

On veut se protéger contre un délai total de 5'.

$$\left.\begin{array}{ll} \min & t_5 - t_1 \\ s.c. & t_2 - t_1 \geq 10 + \xi_1 \\ & t_3 - t_2 \geq 10 + \xi_2 \\ & t_4 - t_3 \geq 10 + \xi_3 \\ & t_5 - t_4 \geq 10 + \xi_4 \\ & t \geq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall \xi \geq 0 : \\ \sum_{i=1}^{4} \xi_i \leq 5 \end{array}$$

Exemple : horaires sur une ligne de train



Problème

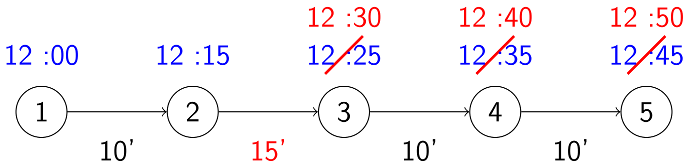
Déterminer une heure de départ à chaque arrêt

- arriver au plus tôt au dernier arrêt
- ne jamais partir en retard ni en avance

On veut se protéger contre un délai total de 5'.

$$\left.\begin{array}{ll} \min & t_5 - t_1 \\ s.c. & t_2 - t_1 \geq 10 + \xi_1 \\ & t_3 - t_2 \geq 10 + \xi_2 \\ & t_4 - t_3 \geq 10 + \xi_3 \\ & t_5 - t_4 \geq 10 + \xi_4 \\ & t \geq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall \xi \geq 0 : \\ \sum_{i=1}^{4} \xi_i \leq 5 \end{array}$$

Exemple : horaires sur une ligne de train



Problème

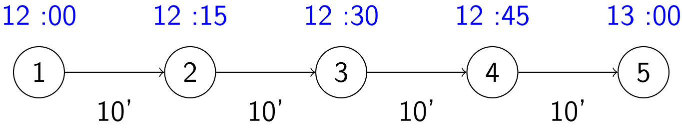
Déterminer une heure de départ à chaque arrêt

- arriver au plus tôt au dernier arrêt
- ne jamais partir en retard ni en avance

On veut se protéger contre un délai total de 5'.

$$\left.\begin{array}{lll} \min & t_5 - t_1 & \\ s.c. & t_2 - t_1 \geq 10 + \xi_1 \\ & t_3 - t_2 \geq 10 + \xi_2 \\ & t_4 - t_3 \geq 10 + \xi_3 \\ & t_5 - t_4 \geq 10 + \xi_4 \\ & t \geq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall \xi \geq 0 : \\ \sum_{i=1}^{4} \xi_i \leq 5 \end{array}$$

Exemple : horaires sur une ligne de train



Problème

Déterminer une heure de départ à chaque arrêt

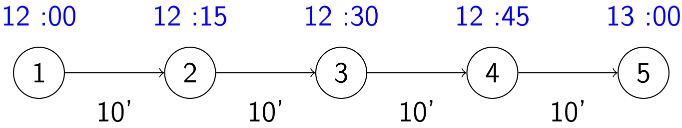
- arriver au plus tôt au dernier arrêt
- ne jamais partir en retard ni en avance

On veut se protéger contre un délai total de 5'.

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\min & t_5 - t_1 \\
s.c. & t_2 - t_1 \geq 10 + \xi_1 \\
 & t_3 - t_2 \geq 10 + \xi_2 \\
 & t_4 - t_3 \geq 10 + \xi_3 \\
 & t_5 - t_4 \geq 10 + \xi_4 \\
 & t \geq 0
\end{array}
\right\} \begin{array}{l} \forall \xi \geq 0 : \\ \sum_{i=1}^{4} \xi_i \leq 5 \end{array}
$$

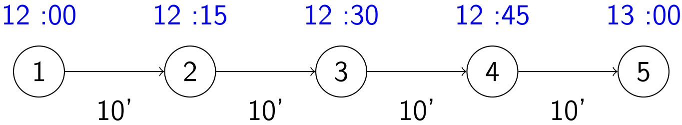
$\Rightarrow$ Décalage au dernier arrêt de 20 minutes

Exemple : horaires sur une ligne de train



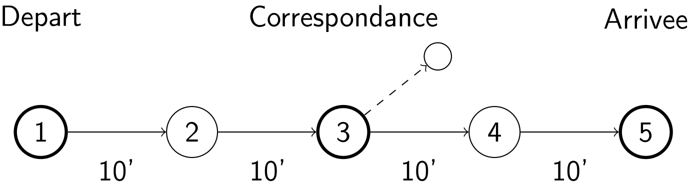
$$
\begin{array}{lll}
\min & t_5 - t_1 & \\
s.c. & t_2 - t_1 \geq 10 + \xi_1 & \forall \xi \geq 0 : \sum_{i=1}^{4} \xi_i \leq 5 \\
 & t_3 - t_2 \geq 10 + \xi_2 & \forall \xi \geq 0 : \sum_{i=1}^{4} \xi_i \leq 5 \\
 & t_4 - t_3 \geq 10 + \xi_3 & \forall \xi \geq 0 : \sum_{i=1}^{4} \xi_i \leq 5 \\
 & t_5 - t_4 \geq 10 + \xi_4 & \forall \xi \geq 0 : \sum_{i=1}^{4} \xi_i \leq 5 \\
 & t \geq 0 &
\end{array}
$$

Exemple : horaires sur une ligne de train



$$
\begin{aligned}
\min \quad & t_5 - t_1 \\
s.c. \quad & t_2 - t_1 \geq 15 \\
& t_3 - t_2 \geq 15 \\
& t_4 - t_3 \geq 15 \\
& t_5 - t_4 \geq 15 \\
& t \geq 0
\end{aligned}
$$

Exemple : horaires sur une ligne de train



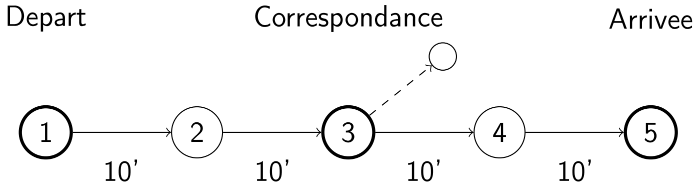
Problème

- Fixer une heure de départ sauf en gare desserte
- Ajuster les heures de départ en desserte
- Arriver au plus tôt au dernier arrêt

Protection délai total de 5'.

$$\left.\begin{array}{ll} \min & t_5 - t_1 \\ s.c. & t_2(\xi) - t_1 \geq 10 + \xi_1 \\ & t_3 - t_2(\xi) \geq 10 + \xi_2 \\ & t_4(\xi) - t_3 \geq 10 + \xi_3 \\ & t_5 - t_4(\xi) \geq 10 + \xi_4 \\ & t \geq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall \xi \geq 0 : \\ \sum_{i=1}^{4} \xi_i \leq 5 \end{array}$$

Exemple : horaires sur une ligne de train



Problème

- Fixer une heure de départ sauf en gare desserte
- Ajuster les heures de départ en desserte
- arriver au plus tôt au dernier arrêt

Protection délai total de 5'.

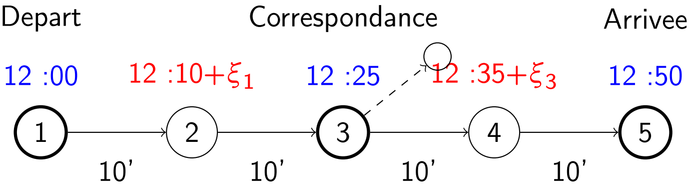
$$\left.\begin{array}{ll} \min & t_5 - t_1 \\ s.c. & t_2(\xi) - t_1 \geq 10 + \xi_1 \\ & t_3 - t_2(\xi) \geq 10 + \xi_2 \\ & t_4(\xi) - t_3 \geq 10 + \xi_3 \\ & t_5 - t_4(\xi) \geq 10 + \xi_4 \\ & t \geq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall \xi \geq 0 : \\ \sum_{i=1}^{4} \xi_i \leq 5 \end{array}$$

$$t_2(\xi) = t_2^0 + t_2^1 \xi_1$$

$$t_4(\xi) = t_4^0 + t_4^1 \xi_1 + t_4^2 \xi_2 + t_4^3 \xi_3$$

$\Rightarrow$ Modèle robuste statique

Exemple : horaires sur une ligne de train



Problème

- Fixer une heure de départ sauf en gare desserte
- Ajuster les heures de départ en desserte
- arriver au plus tôt au dernier arrêt

Protection délai total de 5'.

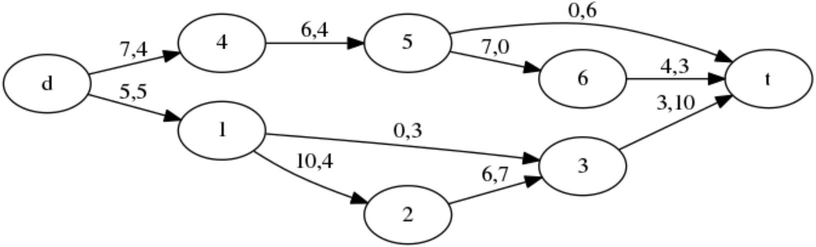
$$
\left.\begin{array}{ll}
\min & t_5 - t_1 \\
s.c. & t_2(\xi) - t_1 \geq 10 + \xi_1 \\
& t_3 - t_2(\xi) \geq 10 + \xi_2 \\
& t_4(\xi) - t_3 \geq 10 + \xi_3 \\
& t_5 - t_4(\xi) \geq 10 + \xi_4 \\
& t \geq 0
\end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall \xi \geq 0 : \\ \sum_{i=1}^4 \xi_i \leq 5 \end{array}
$$

$$t_2(\xi) = t_2^0 + t_2^1 \xi_1$$

$$t_4(\xi) = t_4^0 + t_4^1 \xi_1 + t_4^2 \xi_2 + t_4^3 \xi_3$$

$\Rightarrow$ Modèle robuste statique

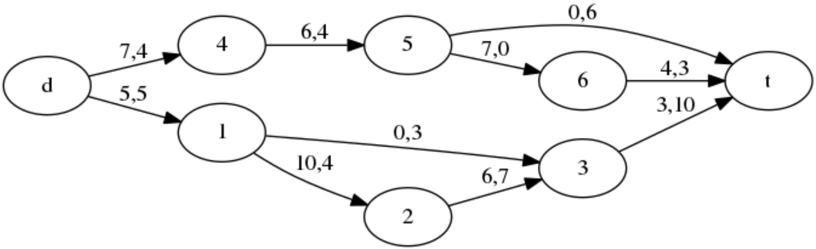
Exemple : plus court chemin avec coûts incertains



Modélisation de l'incertitude

- Ensemble S de scénarios
- Chaque scénario $s \in S$ définit un coût $c^s_{i,j}$ pour chaque arc (i,j)
- Coût d'un chemin μ dans le scénario s : $z^s(\mu) = \sum_{(i,j)\in\mu} c^s_{i,j}$
- Coût robuste de μ : $z(\mu) = \max_{s\in S} z^s(\mu)$

Exemple : plus court chemin avec coûts incertains

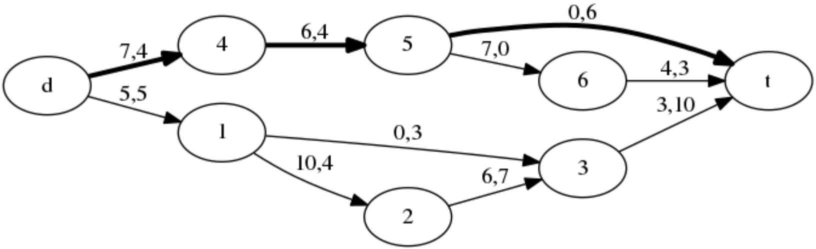


Problème robuste

Trouver un chemin μ^* de d à t tel que $z(\mu^*) = \min_\mu z(\mu)$

NP-difficile même pour deux scénarios et un graphe acyclique [Yu et Yang, 1998]

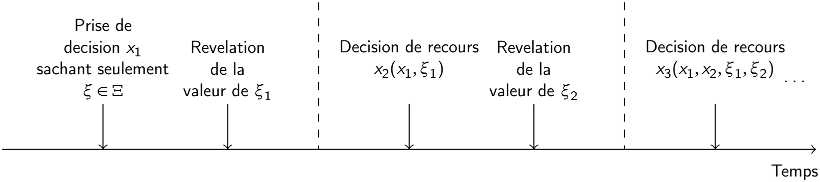
Exemple : plus court chemin avec coûts incertains



Problème robuste

Trouver un chemin μ^* de d à t tel que $z(\mu^*) = \min_\mu z(\mu)$
NP-difficile même pour deux scénarios et un graphe acyclique [Yu et Yang, 1998]

Modèles multi-niveaux



Problèmes typiques

- Planification sur un horizon temporel avec adaptation des décisions
- Jeu à deux joueurs
- ...

Une solution est une politique : étant donné l'état courant du système, quelle est la meilleure décision ?

Optmisation robuste multi-niveaux

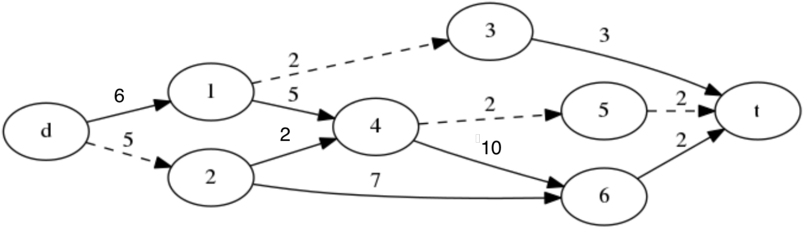
Niveau	Informations disponibles			Décision
	Décisions antérieures	Aléa observé	Incertitude résiduelle	
1	-	-	$(\xi_1, \ldots, \xi_K)$	x_1
2	x_1	ξ_1	$(\xi_2, \ldots, \xi_K \mid \xi_1)$	x_2
3	x_1, x_2	ξ_1, ξ_2	$(\xi_3, \ldots, \xi_K \mid \xi_1, \xi_2)$	x_3
...				
K	$x_1, \ldots, x_{K-1}$	$\xi_1, \ldots, \xi_{K-1}$	$(\xi_K \mid \xi_1, \ldots, \xi_{K-1})$	x_K
K+1	$x_1, \ldots, x_K$	$\xi_1, \ldots, \xi_K$	-	x_{K+1}

Optimisation robuste multi-niveaux

$$
\begin{array}{rcl}
\min z = c^1x^1 + \max_{\xi^1}[\min c^2(\omega)x^2(\omega^2) + & \cdots & \\
+ \max_{\xi^K}[& \min & c^K(\omega)x^K(\omega^K)]\cdots] \\
s.t. \qquad W^1x^1 & = & h^1 \\
T^1(\omega)x^1 + W^2x^2(\omega^2) & = & h^2(\omega) \\
\cdots & \vdots & \\
T^{K-1}(\omega)x^{K-1}(\omega^{K-1}) + W^Kx^K(\omega^K) & = & h^K(\omega) \\
T^K(\omega)x^K + W^{K+1}x^{K+1}(\omega^K) & = & h^{K+1}(\omega) \\
x^1 \geq 0, x^K(\omega^K) \geq 0 & & k = 2, \ldots, K+1
\end{array}
$$

- ω : scénario défini sur $\{1, \ldots, K\}$
- ω^k : scénario restreint à $\{1, \ldots, k\}$

Exemple : plus court chemin robuste avec pannes



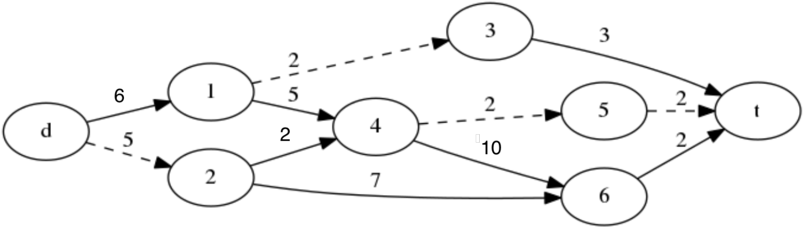
Données

- Graghe $G = (V, A, c)$
- Arcs fragiles $F \subseteq A$; Γ arcs de F peuvent casser
- On découvre si un arc est cassé sur son sommet initial

Objectif

Déterminer une politique qui donnera, dans le pire des cas, le chemin le plus court : sachant γ pannes restantes, quel prochain sommet choisir ?

Exemple : plus court chemin robuste avec pannes



Résolution par programmation dynamique (simpl. pour exposé)

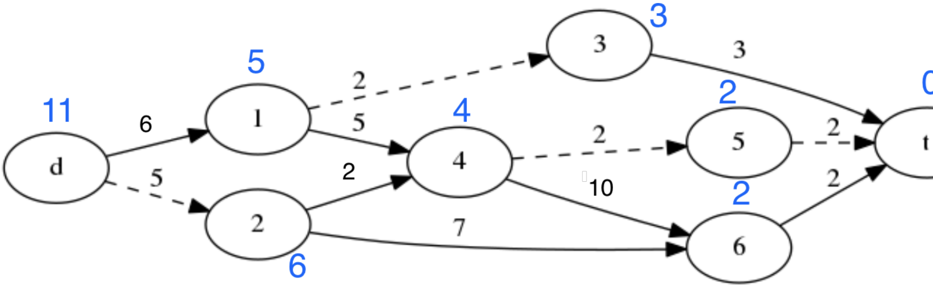
Coût optimal de u à t avec au plus l pannes :

$$d_u^l = \begin{cases} \min\{d_{uv}^l | (u,v) \in E\} & \text{if } u \neq t \\ 0 & \text{if } u = t \end{cases}$$

Coût optimal de u à t avec au plus l pannes en planifiant (u,v) :

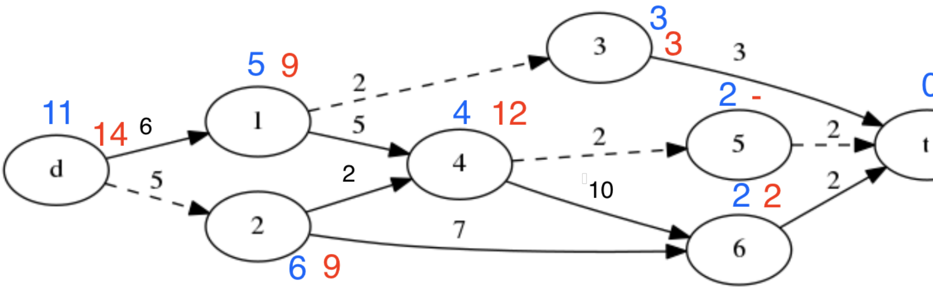
$$d_{uv}^l = \begin{cases} d_v^l + c_{uv} & \text{if } (u,v) \notin F \\ \max\left\{d_v^l + c_{uv}, \min\{d_w^{l-1} + c_{uw} | (u,w) \in E, w \neq v\}\right\} & \text{if } (u,v) \in F \end{cases}$$

Exemple : plus court chemin robuste avec pannes



Distances au puits sans panne

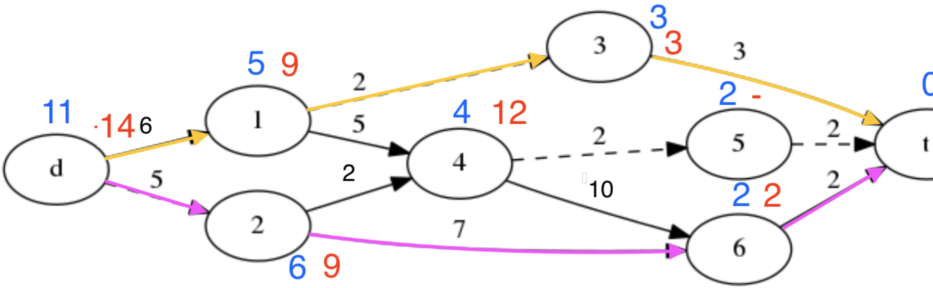
Exemple : plus court chemin robuste avec pannes



Distances au puits sans panne

Distances au puits avec une panne (avec recours)

Exemple : plus court chemin robuste avec pannes



Distances au puits sans panne

Distances au puits avec une panne (avec recours)

Fuschia : Chemin de planification

Orange : Chemin de recours