

Bridgeland 安定性条件と代数多様体への応用

@sachiiiimath

2024 年 2 月 4 日

概要

T.Bridgeland の論文 [1] によって構成された三角圏の安定性条件とその代数多様体への応用について、自分用に作成した大雑把なまとめです。もしお気づきの事柄がありましたらどんなに些細なことでも構いませんので教えていただければ幸いです。(X アカウント: @sachiiiimath)

- ・専門家の査読を受けている訳ではありませんので、間違いが多分に含まれる可能性があります。
- ・2024 年 2 月時点で更新中のステータスであり、十分な校閲が出来ておりません。気を付けているつもりですが、記号の間違いなど軽微なミスが沢山あるかと思います。ご了承頂ければ幸いです。

1 導入

Bridgeland 安定性条件は、超弦理論における Douglas-II 安定性の数学的定式化のために T.Bridgeland [Br1] により導入された概念であるが、現在では様々な分野で応用がある。ここでは特に代数多様体上の安定性条件に関する事柄、とりわけ安定空間の wall crossing について述べる。分野の大雑把なサーベイを、理論の細部には踏み込まず、基本的に証明抜きで紹介するというのが本資料の目的である。この資料で扱う三角圏や Abel 圏は本質的に小さい圏と仮定する。

2 Bridgeland 安定性条件

まずは一般の三角圏に対して Bridgeland 安定性条件を定義する。詳細は [1] を参照。

2.1 安定関数

まずは安定関数の定義から行う。 \mathcal{A} を Abel 圏とする。 $K(\mathcal{A})$ を \mathcal{A} の K 群とする。

定義 2.1.1

\mathcal{A} 上の安定関数 (stability function) とは、群準同型 $Z: K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ であって、

$$Z(K(\mathcal{A}) \setminus \{0\}) \subset \mathbb{H} := \{r \cdot \exp(\sqrt{-1}\pi\phi(E)) \mid r \in \mathbb{R}_{>0}, \phi(E) \in (0, 1]\}.$$

を満たすものをいう。 $\phi(E)$ を E の phase という。 E の任意の真部分対象 $0 \neq F \subset E$ に対し、

$$\phi(F) < (\text{resp. } \leq) \phi(E)$$

が成立するとき、 E は Z -安定 (resp. Z -半安定) (Z -stable (resp. Z -semistable)) という。

安定関数 Z は以下の条件を満たすとき、Harder-Narasimhan 条件 (Harder-Narasimhan condition) を満たすという: 任意の $E \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ に対し有限なフィルトレーション

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = E$$

であって, 任意の $i \in \{1, \dots, n\}$ に対し $F_i := E_i/E_{i-1}$ は Z -半安定であり,

$$\phi(E_1) > \dots > \phi(E_n)$$

を満たすようなものが存在する.

2.2 t-構造

次に三角圏の t -構造とその核を定義する.

定義 2.2.1

三角圏 \mathcal{T} 上の **t-構造 (t-structure)** とは, 充滿部分圏 $\mathcal{T}^{\leq 0} \subset \mathcal{T}$ であって以下の条件を満たすものをいう:

- (i) $\mathcal{T}^{\leq 0}[1] \subset \mathcal{T}^{\leq 0}$.
- (ii) $\mathcal{T}^{\geq 1} := \{F \in \mathcal{T} \mid \forall G \in \mathcal{T}^{\leq 0}, \text{Hom}_{\mathcal{T}}(G, F) = 0\}$ と定義する. このとき, 任意の $E \in \mathcal{T}$ に対し, $G \in \mathcal{T}^{\leq 0}$ および $F \in \mathcal{T}^{\geq 1}$ であって

$$G \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G[1]$$

が完全三角形となるようなものが存在する.

t -構造 $\mathcal{T}^{\leq 0} \subset \mathcal{T}$ の核 (**core, heart**) とは, 部分圏

$$\mathcal{T}_H := \mathcal{T}^{\leq 0} \cap \mathcal{T}^{\geq 1}[1] \subset \mathcal{T}$$

をいう.

t -構造の核は Abel 圏となることが知られている (cf.[10]). 上の定義と同じ状況を考える.

$$\mathcal{T} = \bigcup_{i,j \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}^{\leq 0}[i] \cap \mathcal{T}^{\geq 1}[j]$$

が成立するとき, t -構造 $\mathcal{T}^{\leq 0}$ は**有界**であるという. t -構造の核 $\mathcal{T}_H \subset \mathcal{T}$ に対して K -group の同型

$$K(\mathcal{T}_H) \cong K(\mathcal{T})$$

が成立する. 以上の準備を以って, 三角圏上の安定性条件を定義する.

定義 2.2.2

三角圏 \mathcal{T} 上の**安定性条件 (stability condition)** とは, \mathcal{T} の t -構造 $\mathcal{T}^{\leq 0}$ における核 \mathcal{T}_H および Harder-Narasimhan 条件を満たす \mathcal{T}_H 上の安定関数 Z の組 (Z, \mathcal{T}_H) をいう. このとき Z を**中心電荷 (central charge)** という.

\mathcal{T} 上の安定性条件 (Z, \mathcal{T}_H) および $n \in \mathbb{Z}$ と $\phi' \in (0, 1]$ に対し, \mathcal{T} の部分圏

$$\mathcal{P}(n + \phi') := \{E \in \mathcal{T} \mid E[-n] \in \mathcal{T}_H \text{ は } Z\text{-半安定 かつ } \phi(E[-n]) = \phi'\}$$

を考える.

補題 2.2.3

三角圏 \mathcal{T} に安定性条件を与えることと, 以下の条件を満たす組 $(Z, \{\mathcal{P}(\phi)_{\phi \in \mathcal{R}}\})$ を与えることは同値:

- (i) 各 $\mathcal{P}(\phi)$ は \mathcal{T} の部分圏であって, $\mathcal{P}(\phi + 1) = \mathcal{P}(\phi)[1]$ となる.

- (ii) ϕ_1, ϕ_2 を $\phi_1 > \phi_2$ を満たす任意の実数とする. このとき任意の $E_1 \in \mathcal{P}(\phi_1)$, $E_2 \in \mathcal{P}(\phi_2)$ に対し $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(E_1, E_2) = 0$.
- (iii) Z は群準同型写像 $Z: K(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{C}$ で, 任意の $E \in \mathcal{P}(\phi) \setminus \{0\}$ に対して $Z(E) \in \mathbb{R}_{>0} \exp(\sqrt{-1}\pi\phi)$.
- (iv) 任意の $E \in \mathcal{T}$ に対し, $l \in \mathbb{N}$ と実数列 $\phi_1 > \phi_2 > \dots > \phi_l$ および完全三角形の列

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 = E_0 & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & \dots \longrightarrow E_{l-1} & \longrightarrow & E_l = E \\
 & & \searrow & & \searrow & & & & \searrow \\
 & & A_1 & & A_2 & & & & A_l
 \end{array}$$

が存在し, 各 $i \in \{1, \dots, l\}$ について $A_i \in \mathcal{P}(\phi_i)$.

証明: [1] Proposition 5.3 参照. ■

上記の \mathcal{T} の部分圏の族 $\{\mathcal{P}(\phi)\}_{\phi \in \mathbb{R}}$ を三角圏 \mathcal{T} のスライシング (slicing) と呼ぶ.

補題 2.2.4 ([1] Lemma 5.2)

$\sigma := (Z, \{\mathcal{P}(\phi)\}_{\phi \in \mathbb{R}})$ を三角圏 \mathcal{T} 上の安定性条件とする. このとき, 任意の $\phi \in \mathbb{R}$ に対して $\mathcal{P}(\phi)$ は Abel 圏である.

以降, しばしば $\sigma := (Z, \{\mathcal{P}(\phi)\}_{\phi \in \mathbb{R}})$ と略記する. $\mathcal{P}(\phi)$ に属する対象は σ の位相 ϕ における半安定対象と呼ばれ, 特にそれが $\mathcal{P}(\phi)$ の単純対象であるとき安定対象という.

2.3 安定空間と複素構造

三角圏 \mathcal{T} 上の安定性条件全体には複素多様体の構造が入る, というのが [1] における基本的な定理の一つである. \mathcal{T} 上のスライシングの集合を $S(\mathcal{T})$ と表す. また安定性条件 $(Z, \{\mathcal{P}(\phi)\}_{\phi \in \mathbb{R}})$ を (Z, \mathcal{P}) と略記する. (Z, \mathcal{P}) に対し,

$$\phi_{\mathcal{P}}^+ := \phi_1, \quad \phi_{\mathcal{P}}^- := \phi_l$$

と定義する. ここで, ϕ_1, ϕ_l は補題 2.2.3(iv) で与えた実数列の要素である.

命題 2.3.1

$\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in S(\mathcal{T})$ に対して

$$d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) := \sup\{|\phi_{\mathcal{P}}^+ - \phi_{\mathcal{Q}}^+|, |\phi_{\mathcal{P}}^- - \phi_{\mathcal{Q}}^-|\}$$

と定める. このとき, $d(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ は距離空間の公理を満たし $S(\mathcal{T})$ は位相空間となる.

ここで, 有限生成 Abel 群 \mathcal{N} と, $\mathcal{N}_{\mathbb{R}} := \mathcal{N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ および $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}$ 上のノルム $\|\cdot\|_{\mathbb{R}}$, 群準同型写像 $cl: K(\mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{N}$ をそれぞれ固定する. 記号の濫用ではあるが, 群準同型写像 $Z: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して $Z \circ cl$ も Z で表すこととする.

定義 2.3.2

部分集合,

$$\text{Stab}_{\mathcal{N}}(\mathcal{T}) \subset \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{N}, \mathbb{C}) \times S(\mathcal{T})$$

を安定性条件 (Z, \mathcal{P}) であって, 以下の台条件 (support property) を満たすものの全体とする.

$$\sup \left\{ \frac{\|cl(E)\|}{|Z(cl(E))|} \mid 0 \neq E \in \bigcup_{\phi \in \mathbb{R}} \mathcal{P}(\phi) \right\} < \infty.$$

台条件は [1] 以降, Kontsevich-Soibelman によって与えられた条件である. 安定性条件 (Z, \mathcal{P}) がこの条件を満たすことと, \mathcal{N} 上の 2 次形式 Q であって,

- (i) 任意の $\phi \in \mathbb{R}$ と $E \in \mathcal{P}(\phi)$ に対して $Q(\text{cl}(E)) \geq 0$.
- (ii) Q の $\text{Ker} Z$ への制限は負定値.

を満たすものが存在することは同値である (cf.xx.xx). 具体的には, 台条件を満たす (Z, \mathcal{P}) についてある定数 C が存在し, 任意の $E \in \mathcal{P}(\phi)$ について $\|\text{cl}(E)\| \leq C|Z(E)|$ となることに注意すると, Q は

$$Q(v) = C|Z(v)|^2 - \|v\|^2$$

と定めることによって与えられる.

ここで, $0 < \epsilon < \frac{1}{8}$ に対し

$$B_\epsilon((Z, \mathcal{P})) := \{\tau = (W, \mathcal{Q}) \mid \|W - Z\|\}$$

$\text{Stab}_{\mathcal{N}}(\mathcal{T})$ に, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{N}, \mathbb{C})$ および $S(\mathcal{T})$ からの誘導位相を入れ位相空間とみなす. 次の定理は $\text{Stab}(\mathcal{T})$ が複素多様体の構造を持つことを主張する.

定理 2.3.3 ([6] 定理 11.17)

忘却写像,

$$\text{Stab}_{\mathcal{N}}(\mathcal{T}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{N}, \mathbb{C}), \quad (Z, \mathcal{P}) \mapsto Z$$

は局所位相同型写像である. 特に $\text{Stab}_{\mathcal{N}}(\mathcal{T})$ には, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{N}, \mathbb{C})$ の標準的な複素構造に関して上の写像が正則写像となるような複素構造が一意に入る.

3 代数多様体上の安定性条件

ここでは代数多様体が 1 次元, 2 次元の場合の安定性条件について, それぞれどのような研究が行われているかを紹介する.

3.1 連接層の導来圏からの準備

準備として, 一般の代数多様体 X およびその連接層の導来圏 $D^b(X) := D^b(\text{Coh}(X))$ に対して成り立つことをいくつか挙げておく.

定義 3.1.1

- (i) $D^b(X)$ の対象 E, F に対し, 以下で定まる式を **Euler 形式 (Euler form)** という:

$$\chi(E, F) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{D^b(X)}(E, F[i]).$$

- (ii) $K(X)$ の部分群 $K(X)^\perp := \{[E] \in K(X) \mid \forall [F] \in K(X), \chi([E][F]) = 0\}$ による商,

$$\mathcal{N}(X) := K(X)/K(X)^\perp$$

を X の**数値的 K 群 (numerical K-group)** と呼ぶ.

次の定理は Hilzebruch-Riemann-Roch の定理として知られている.

定理 3.1.2

$\alpha \in K(X)$ に対し,

$$\chi(\alpha) = \int_X \text{ch}(\alpha) \cdot \text{td}(X)$$

が成立する. ここで $\text{ch}(\alpha)$ は α の Chern 指標, $\text{td}(X)$ は X の Todd 類である.

3.2 安定空間

滑らかな射影代数多様体 X について, 定理 2.3.3 の $\text{Stab}_{\mathcal{N}}(X)$ を構成することを考える. 一般に代数多様体 X の接続層の導来圏 $D^b(X)$ に対し, その K 群は有限階数にならないことが多い. そのため $\mathcal{N} = K(X)$ とすることは出来ないことが殆どである. そこで,

$$\mathcal{N} = \text{Im}(\text{ch} : K(X) \longrightarrow H^{2*}(X, \mathbb{Q}))$$

とおき, $cl = \text{ch}$ とおく.

定義 3.2.1

滑らかな射影代数多様体 X に対し,

$$\text{Stab}(X) := \text{Stab}_{\mathcal{N}}(X)$$

を, X 上の安定空間 (stable space) という.

3.3 安定空間への群作用

前節にて定義した安定空間 $\text{Stab}(X)$ への $\widetilde{GL^+(n, \mathbb{R})}$ による自然な群作用について記述する. この群作用による $\text{Stab}(X)$ の商を考えることで $\text{Stab}(X)$ の解析を行うことができる. 特に, 後述する代数曲線の安定空間は完全に決定することが可能である.

\mathbb{R} 上の一般線形群 $GL(n, \mathbb{R})$ の部分群,

$$GL^+(n, \mathbb{R}) = \{T \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det T > 0\}$$

を考え, その普遍被覆を $\widetilde{GL^+(n, \mathbb{R})}$ とする. $\widetilde{GL^+(n, \mathbb{R})}$ は $T \in GL(n, \mathbb{R})$ および, 以下を満たす単調増加関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で以下を満たすものの組 (T, f) 全体とすることができる:

(i) 全ての $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x+1) = f(x) + 1$.

(ii) 同一視 $S^1 = \mathbb{R}/2\mathbb{Z} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}/\mathbb{R}_{>0}$ によって, f と T が S^1 に誘導する写像は等しい.

(cf. xx.xx).

ここで $\sigma := (Z_\sigma, \mathcal{P}_\sigma) \in \text{Stab}(X)$ および $g := (T, f) \in \widetilde{GL^+(n, \mathbb{R})}$ に対して, $Z_{\sigma g} = T^{-1} \circ Z_\sigma$, $\mathcal{P}_{\sigma g} = \mathcal{P}_\sigma(f(\phi))$ と定める. また, \mathbb{C} を実 2 次元の空間と同一視することで T^{-1} を作用させる.

命題 3.3.1

$\sigma g = (Z_{\sigma g}, \mathcal{P}_{\sigma g})$ は命題 2.2.3 を満たす. すなわち $\sigma g \in \text{Stab}(X)$.

証明:

したがって, 位相空間 $\text{Stab}(X)$ への $\widetilde{GL^+(n, \mathbb{R})}$ の右作用:

$$\text{Stab}(X) \times \widetilde{GL^+(n, \mathbb{R})} \longrightarrow \text{Stab}(X)$$

が定まる. この作用を用いて $\text{Stab}(X)$ の GIT によるモジュライ空間を構成したい. そこで, この作用の軌道によ

る同値関係を定義する.

定義 3.3.2

$\sigma, \sigma' \in \text{Stab}(X)$ が $\widetilde{GL^+(n, \mathbb{R})}$ -equivalence とは, σ および σ' が同じ単一の $\widetilde{GL^+(n, \mathbb{R})}$ -軌道に含まれることをいう.

ここで, $T \in GL^+(n, \mathbb{R})$ に対し $T \mapsto \text{id}_{\mathcal{N}(X)} \otimes T^{-1}$ と定めることで, $GL^+(n, \mathbb{R})$ から $\mathcal{N}(X) \otimes \mathbb{C}$ への作用を定めておく. したがって, 被覆写像を経由して $\widetilde{GL^+(n, \mathbb{R})}$ は $\mathcal{N}(X) \otimes \mathbb{C}$ へ作用する. 写像 $\pi : \text{Stab}(X) \rightarrow \mathcal{N}(X) \otimes \mathbb{C}$ はこの写像と一致する.

4 代数曲線上の安定性条件

この節では滑らかな射影曲線上の安定性条件を構成したのち, Emanuel Macri による種数 1 以上のものに対する安定空間の結果について述べる. 詳細は [3] を参照. 蛇足だが, [3] には \mathbb{C} 線形な三角圏上の例外対象およびその変異を用いた t 構造の核の構成方法が示されており, それを用いて射影直線上の安定性条件の空間 $\text{Stab}(D^b(\mathbb{P}^1))$ が単連結であることが導かれている. 折を見てその内容にも触れたい.

C を滑らかな射影曲線とする. $D^b(C) = D^b(\text{Coh}(C))$ を C 上の連接層の有界な導来圏とする. $K(C) := K(D^b(C))$ で $D^b(C)$ の K 群を表す.

4.1 安定性条件の構成

定理 2.3.3 で構成した安定空間 $\text{Stab}(-)$ を, 滑らかな射影曲線 C 上で考えよう. $[E] \in K(C)$ に対してその Chern 指標は,

$$\text{ch}([E]) = (\text{rank} E, \deg E) \in H^0(C, E) \oplus H^2(C, E) \cong \mathbb{Z}^{\oplus 2}$$

によって与えられるのだった. また $E \in \text{Coh}(C)$ 対して,

$$Z(E) = -\deg E + i \text{rank} E.$$

と定めると, 任意の E に対して $Z(E) \in \mathbb{R}_{>0} \exp(i\pi\phi)$, $(0 < \phi \leq 1)$ が満たされる. また,

(HN 条件について言及する)

このことから, $\text{Coh}(X)$ が t 構造の核であれば, 安定性条件 $(Z, \text{Coh}(X))$ が定義できることになる.

命題 4.1.1

滑らかな射影曲線 C に対し, $\text{Coh}(C)$ は t 構造の核である.

証明: 証明のスケッチを与える. $D^b(C)$ の部分圏を,

$$D^{\leq 0} := \{E \in D^b(C) \mid \mathcal{H}(E)^i = 0, i > 0\}$$

$$D^{\geq 1} := \{E \in D^b(C) \mid \mathcal{H}(E)^i = 0, i \leq 0\}$$

ととる. 明らかに $D^{\leq 0} \cap D^{\geq 1}[1]$ は t 構造の核である. このとき $E \mapsto E^\bullet = (\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow E^0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \cdots)$ によって関手

$$\text{Coh}(C) \longrightarrow D^{\leq 0} \cap D^{\geq 0}[1]$$

を定めると, これは圏同値である. ■

したがって,

$$\sigma_0 := (Z, \text{Coh}(X))$$

は C 上の安定性条件を定める.

4.2 種数 1 以上の曲線の安定性条件

以下は, [3] の主結果の一つである.

定理 4.2.1 (*E. Macri*)

C を $g(C) > 0$ の非特異射影曲線とする. このとき, $\widetilde{GL}^+(2, \mathbb{R})$ による $\text{Stab}(C)$ への作用は自由かつ推移的である. したがって,

$$\text{Stab}(C) \cong \widetilde{GL}^+(2, \mathbb{R}) (\cong \mathbb{C} \times \mathbb{H}).$$

ここで \mathbb{H} は複素上半平面である.

この定理の証明を見るために, $\text{Stab}(C)$ を調べるうえで基本的な補題を与える.

補題 4.2.2 ([5] Lemma 7.2)

C を種数 $g > 0$ を満たす非特異射影曲線とする. E を $\text{Coh}(C)$ の対象であって, $\text{Hom}^{\leq 0}(F, G) = 0$ を満たすような三角形

$$F \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow F[1] \quad (1)$$

が存在するものとする. このとき, $F, G \in \text{Coh}(C)$ が成立する. ■

証明 (定理 4.2.1):

4.3 射影直線上の安定性条件

この節は [9] に沿う.

5 代数曲面上の安定性条件

代数多様体 X の次元が 2 以上の場合, 代数曲線上の安定性条件のように標準的な t 構造の核として $\text{Coh}(X)$ を用いることができない. 実際, $\dim X \geq 2$ のとき, $(Z, \mathcal{A}) \in \text{Stab}(X)$ で $\mathcal{A} = \text{Coh}(X)$ となるものは存在しないことが [?] によって示されている. そこで, *Abel* 圏の傾斜を用いることで新たな t 構造の核を構成するという方針をとる. 一方で X 上の安定関数は, X 上の接続層に対するスロープ安定性の類似として, β -振り Chern 指標を用いて構成する.

5.1 代数曲面論からの準備

X を \mathbb{C} 上の非特異射影曲面とする. $[E] \in K(X)$ に対し, その Chern 指標は

$$\text{ch}([E]) := (\text{rank}(E), c_1(E), \text{ch}_2(E)) \in \mathcal{N}(X)$$

によって与えられるのだった. ここで $\mathcal{N}(X) := \mathbb{Z} \oplus \text{NS}(X) \oplus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ である. 以下は Hilzebruch-Riemann-Roch の定理の帰結である. Chern 指標 $\text{ch} : K(X) \hookrightarrow H^{2*}(X, \mathbb{Q})$ は X の数値的 K 群 $K(X)/K(X)^\perp$ から $\mathcal{N}(X)$ への単射を誘導する. 以下で定まる 2 次形式は $\mathcal{N}(X)$ 上の **Mukai ペアリング (Mukai pairing)** という: $E_1, E_2 \in D^b(X)$ に対し

$$\langle \text{ch}(E_1), \text{ch}(E_2) \rangle_M = \langle (r_1, c_1(E_1), s_1), (r_2, c_1(E_2), s_2) \rangle := c_1(E_1) \cdot c_1(E_2) - r_1 s_2 - r_2 s_1.$$

Mukai ペアリングと $\mathcal{N}(X)$ の組 $(\mathcal{N}(X), \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$ は符号数 $(2, \rho)$ の格子であり, **Mukai 格子 (Mukai lattice)** と呼ばれる. ここで $\rho \geq 1$ は X の Picard 数である.

5.2 接続層の μ_ω -安定性

代数多様体上の接続層は, ある種のフィルトレーション条件を満たす時に安定層と呼ばれる. これは接続層に対して構成される概念であり, 直接 Bridgeland 安定性条件を定める訳ではないが構成のヒントになる. ここでは安定層について詳細には踏み込まず, 必要な概念のみの抜粋にとどめる. 詳細は [6] §5 などを参照.

X を非特異射影多様体とする. X 上の非常に豊富な因子 $\omega := \mathcal{O}_X(1)$ と X の組 (X, ω) を**偏極 (polarise)** 射影多様体という.

定義 5.2.1

(i) 偏極射影多様体 (X, ω) および $F \in \text{Coh}(X)$ に対し,

$$\mu_\omega(F) := \frac{c_1(F) \cdot \omega^{d-1}}{\text{rank}(F)}$$

を E の**傾斜 (slope)** という. ただし $\text{rank}(E) = 0$ のとき $\mu_\omega(E) = \infty$ と定義する.

(ii) $F \in \text{Coh}(X)$ が任意の真部分層 $0 \subsetneq E \subsetneq F$ に対して

$$\mu_\omega(E) < (\text{resp. } \leq) \mu_\omega(F/E)$$

を満たすとき, μ_ω 安定 (半安定) であるという.

X 上の振れ層について記述する.

定義 5.2.2

X を Noether スキームとし, $E \in \text{Coh}(X)$ とする.

(i) E の次元を $\dim(E) = \dim \text{Supp}(E) := \{x \in X \mid E_x \neq 0\}$ の次元と定義する.

(ii) $T(E)_i$ を E の部分層であって, 次元が $i = 0, \dots, \dim(E)$ 以下のもので最大のものと定義する. このとき得られるフィルトレーション

$$0 = T(E)_0 \subset T(E)_1 \subset \dots \subset T(E)_{\dim X} = E$$

を **Torsion フィルトレーション** という.

(iii) E が**振れを持たない層 (torsion free sheaf)** とは, $\dim(E) = \dim(X)$ かつ $T(E)_{\dim(X)-1} = 0$ であることをいう. そうでないとき E を**振れ層 (torsion sheaf)** という.

5.3 振れ対と傾斜

冒頭でも説明したように, 代数多様体 X の次元が 2 以上の場合, 標準的な t 構造の核として $\text{Coh}(X)$ を用いることができない. そこで Happel-Reiten-Smalø [12] による Abel 圏の振れ対と傾斜の理論を用いて標準的な t 構造の核を構成するという方針をとる.

定義 5.3.1

\mathcal{A} を Abel 圏とする. \mathcal{A} の部分圏の組 $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ が**振れ対 (torsion pair)** とは, 以下の 2 条件を満たすことをいう:

(i) $\text{Hom}(\mathcal{T}, \mathcal{S}) = 0$.

(ii) 任意の $F \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ に対し, 完全列

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

となるような $E \in \text{Ob}(\mathcal{T}), G \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ が存在する.

例 5.3.2

代数多様体 X 上の振れ層のなす圏 $\mathcal{T} \subset \text{Coh}(X)$, 振れの無い層 $\mathcal{S} \subset \text{Coh}(X)$ の対 $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ は振れ対である.

一般に三角圏 \mathcal{T} に対し, \mathcal{A} とその振れ対が与えられると, そこから**傾斜 (tilting)** と呼ばれる別の Abel 部分圏を作り出すことができる. 具体的には以下のように構成する: $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ でのコホモロジー的関手を \mathcal{H}_A^i と表す. $\tau_{\leq 0}\mathcal{T}$, $\tau_{\geq 1}\mathcal{T}$ を §2 で定義したものとする. $\tau_{\leq 0}(T) \in \tau_{\leq 0}\mathcal{T}$ に対して

$$\tau_{\geq 0}(T) := \tau_{\geq 1}(T[-1])[1]$$

と定めると

$$\mathcal{H}_A^i(T) = \tau_{\leq 0}(\tau_{\geq 0}(T))$$

であることが分かる. 実際,

(複体の遷移のお絵描きを入れる)

である.

命題 5.3.3

三角圏 \mathcal{T} に対してその有界な t 構造の核を $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ とする. \mathcal{A} の振れ対 $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ に対し,

$$\mathcal{A}^\sharp := \{E \in \mathcal{T} \mid \mathcal{H}_A^0(E) \in \mathcal{T}, \mathcal{H}_A^{-1}(E) \in \mathcal{S}, \mathcal{H}_A^i(E) = 0 \ (i \neq 0, -1)\}$$

と定める. このとき \mathcal{A}^\sharp は \mathcal{T} の t 構造の核である. 特に \mathcal{A}^\sharp は Abel 圏である. ■

証明:

命題 5.3.3 における \mathcal{A}^\sharp を \mathcal{A} の**傾斜 (tilting)** という.

5.4 振れ安定性

非特異射影曲面 X 上の連接層に対して定義された μ_ω -(半) 安定性の類似として, β -振り Chern 指標を用いた新たな安定性の指標を定義する.

定義 5.4.1

$B \in \text{NS}(X)_\mathbb{R}, E \in D^b(X)$ に対し,

$$\text{ch}^B(E) := \exp(-B)\text{ch}(E) \in H^{2*}(X, \mathbb{R})$$

を **B-振り Chern 標数 (B-twisted Chern character)** という. $\text{ch}^B(E)$ の $H^i(X, \mathbb{R})$ 部分を $\text{ch}_i^B(E)$ と表す.

これを用いて, 定義 5.2.1 で与えた μ_ω を以下のように修正する: $\beta \in \text{NS}(X)_\mathbb{R}, \omega \in \text{Amp}(X)_\mathbb{R}$ とする. X 上の振れの無い層 $F \in \text{Coh}(X)$ に対して以下のように定める:

$$\mu_{\beta, \omega}(F) := \frac{\text{ch}_1^B(E) \cdot \omega^{d-1}}{\text{rank}(E)}.$$

命題 5.4.2

$$\mu_{\beta, \omega}(E) = \mu_\omega - B\omega^{d-1}.$$

証明: 補題 5.4.3 と式 (5.4) より,

$$\mu_{\beta,\omega}(F) = \frac{\text{ch}_1(F)\omega^{d-1} - \text{ch}_0(F)B\omega^{d-1}}{\text{rank}(F)}.$$

したがって, $\text{ch}_0(F) = \text{rank}(F)$ であることに注意すれば,

$$\begin{aligned} \mu(F) - B\omega^{d-1} &= \frac{\text{ch}_1(F)\omega^{d-1}}{\text{rank}(F)} - \frac{\text{rank}(F)B\omega^{d-1}}{\text{rank}(F)} \\ &= \frac{\text{ch}_1(F)\omega^{d-1} - \text{ch}_0(F)B\omega^{d-1}}{\text{rank}(F)} \\ &= \mu_{\beta,\omega}(F). \end{aligned}$$

■

補題 5.4.3

通常の意味での Chern 指標 ch および定義 5.4.1 の Chern 指標 ch^B に対し, 関係式

$$ch_0^B = ch_0, \quad ch_1^B = ch_1 - Bch_0, \quad ch_2^B = ch_2 - Bch_1 + \frac{B^2}{2}ch_0$$

が成立する.

証明: $ch(-) := \sum_{j=0}^{\infty} ch_j$, $e^{-B} := \sum_{l=0}^{\infty} e_l$ と表しておく. すると Cauchy 積より,

$$ch^B = e^{-B} ch = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k e_i \cdot ch_{k-i}$$

が成り立つ. よって $e^{-B} = 1 - B + \frac{B^2}{2} - (\text{高次の項})$ を踏まえると 2 次までの項の計算は,

$$ch^B = e^{-B} ch(E) = ch_0 + (ch_1 - Bch_0) + (ch_2 - Bch_1 + ch_0 \frac{B^2}{2}).$$

である.

■

これによって, $\mu_{\beta,\omega}$ の意味で (半) 安定であることと μ_{ω} -(半) 安定性が同値となることがわかる.

5.5 代数曲面の安定性条件

Abel 圏の傾斜と $\mu_{\beta,\omega}$ -(半) 安定性を用いて, 非特異射影曲面上の安定性条件を具体的に与える. $\text{Coh}(X)$ の部分圏の組 $(\mathcal{T}_{\beta,\omega}, \mathcal{F}_{\beta,\omega})$ を,

$$\mathcal{T}_{\beta,\omega} := \langle E \in \text{Coh}(X) \mid \mu_{\omega} - \text{半安定かつ} \mu_{\beta,\omega}(E) > 0 \rangle_{ex} \quad (2)$$

$$\mathcal{F}_{\beta,\omega} := \langle E \in \text{Coh}(X) \mid \mu_{\omega} - \text{半安定かつ} \mu_{\beta,\omega}(E) \leq 0 \rangle_{ex} \quad (3)$$

と定める. ここで $\langle \mathcal{A} \rangle_{ex}$ は Abel 圏 \mathcal{A} の拡大閉包である. 定義より $\text{Coh}(X)$ の振れない層は全て $\mathcal{F}_{\beta,\omega}$ に含まれ, 振れ層は全て $\mathcal{T}_{\beta,\omega}$ に含まれる. μ_{ω} -半安定 HN フィルトレーションの存在から, $(\mathcal{T}_{\beta,\omega}, \mathcal{F}_{\beta,\omega})$ は $\text{Coh}(X)$ の振れ対であることがわかる. したがって,

$$\mathcal{A}_{\beta,\omega} := \langle \mathcal{F}_{\beta,\omega}[1] \cap \mathcal{T}_{\beta,\omega} \rangle_{ex}$$

は $D^b(X)$ の t 構造の核である. また Z を Mukai ペアリング (式 5.1) を用いて

$$Z_{\beta,\omega} := \langle \exp(\beta + i\omega), ch(E) \rangle_M.$$

と定義すると, $\mathcal{A}_{\beta,\omega}$ 上の安定関数を与える (証明は [6] §8 を参照). したがって,

系 5.5.1

非特異射影曲面 X に対して,

$$\sigma_{\beta,\omega} := (Z_{\beta,\omega}, \mathcal{A}_{\beta,\omega}) \quad (4)$$

は $D^b(X)$ 上の安定性条件を定める。

6 壁と部屋

この節では、 \mathbb{C} 上の非特異射影曲面上の安定性条件の空間に対して、壁と部屋構造を定義する。参考文献は [6], [4] である。

6.1 壁の定義

[1] §8 によれば一般に三角圏 \mathcal{T} 上の安定空間 $\text{Stab}(\mathcal{T})$ と、各対象 $A \in \mathcal{T}$ に対して

$$m_{(-)}(A) : \text{Stab}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad \sigma \mapsto m_\sigma(A) := \sum |Z(A_i)|$$

という関数が定まる。 S を \mathcal{T} の対象の集合とする。

$$\sup\{m_\sigma(A) \mid A \in S\} < \infty$$

が成立するとき、 S は σ に対して**有界な質量 (bounded mass)** を持つという。

定理 6.1.1

$\text{Stab}_B(\mathcal{T})$ を $\text{Stab}(\mathcal{T})$ の連結なコンパクト部分集合とし、 \mathcal{T} の対象の集合 S は任意の $\sigma \in \text{Stab}_B(\mathcal{T})$ に対して有界な質量を持つと仮定する。このとき、 $\text{Stab}(\mathcal{T})$ の実余次元 1 の部分多様体 $\{W_i\}_{i \in I}$ が存在し、任意の $\text{Stab}_B(X) \setminus (\cup_i W_i)$ における連結成分 C は以下を満たす：

$A \in S$ がある $\sigma_0 \in C$ に対して σ -半安定ならば、 A は全ての $\sigma \in C$ に対して半安定である。さらに、 A が $cl(A)$ が原始的である σ_0 に対して σ -安定ならば、 A は全ての $\sigma \in C$ に対して σ -安定である。

証明： [6] §11 命題 11.46 参照。 ■

この状況における、部分多様体 $\{W_i\}_{i \in I}$ を $\text{Stab}(\mathcal{T})$ の**壁 (wall)**、連結成分 C を**部屋 (chamber)** と呼ぶ。

6.2 代数曲面上の壁

この節の内容は [4] に沿う。非特異射影曲面 X に対し、 $\text{Stab}(X)$ 上の壁を構成しよう。 $\omega \in \text{Amp}(X)_{\mathbb{R}}$ と $\beta \in \text{NS}(X)_{\mathbb{R}}$ を固定する。 $\sigma_{\beta, \omega} := (\mathcal{A}_{\beta, \omega}, Z_{\beta, \omega}) \in \text{Stab}(X)$ を式 (4) で定めた安定性条件とする。 $E \in \mathcal{A}_{\beta, \omega}$ に対して $\text{ch}(E) = (r, D, z) \in \mathcal{N}(X)_{\mathbb{C}}$ と表す。計算により、

$$\begin{aligned} Z_{\beta, \omega}(E) &= \langle \exp(\beta + i\omega), (r, D, z) \rangle_M \\ &= -\text{ch}_2^\beta(E) + \frac{\omega^2}{2} \text{ch}_0^\beta(E) + i\omega \text{ch}_1^\beta(E) \\ &= -z + D\beta - \frac{r}{2}(\beta^2 - \omega^2) + i(D - r\beta)\omega \end{aligned}$$

である。

$\text{Stab}(X)$ には複素多様体の構造が入るのであった。 $\sigma_{\beta, \omega}$ はこの構造における $\text{Stab}(X)$ の点とみなすことができる。 β および ω の係数をパラメータとして、様々な部分多様体を考えることができる。

$$\mathcal{R}_{\beta, \omega} := \{(\mathcal{A}_{\beta, \omega}, Z_{\beta, t\omega}) \mid t \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

は $\text{Stab}(X)$ の半直線をなす ($\mathcal{A}_{\beta,t\omega} = \mathcal{A}_{\beta,\omega}$ であることに注意). 同様にして, 上半平面も

$$\mathcal{P}_{\beta,\omega} := \{(\mathcal{A}_{s\beta,\omega}, Z_{s\beta,t\omega}) \mid t \in \mathbb{R}_{>0}, s \in \mathbb{R}\}$$

として定まる. また, 任意の $\beta \in \text{NS}_{\mathbb{R}}$ は豊富因子 ω とそれに直交する $\gamma \in \text{NS}_{\mathbb{R}}$ (i.e. $\omega \cdot \gamma = 0$ を満たす) の線形結合 $\beta = s\omega + u\gamma$ として表せる事実を用いると,

$$\Omega_{\beta,\omega} := \{(\mathcal{A}_{s\omega+u\gamma,t\omega}, Z_{s\omega+u\gamma,t\omega}) \mid s, u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_{>0}\} \quad (5)$$

が定まり, これは \mathbb{R}^3 の上半部分と同一視することができる. $\Omega_{\beta,\omega}$ において u を 1 つ固定したものを $\Pi_{\beta,\omega,u}$ とすれば,

$$\{\Pi_{\beta,\omega,u}\}_{u \in \mathbb{R}}$$

は $\Omega_{\beta,\omega}$ の平面の族である.

零でない $v = (r_0, \theta, z_0) \in \mathcal{N}(X)$ を一つ固定する. $\sigma_{\beta,\omega} \in \text{Stab}(X)$ および $E \in \mathcal{A}_{\beta,\omega}$ に対してその傾斜関数 (slope) を,

$$\begin{aligned} \mu_{Z_{\beta,\omega}}(E) &:= -\frac{\text{Re}Z_{\beta,\omega}(v(E))}{\text{Im}Z_{\beta,\omega}(v(E))} \\ &= -z_0 + \theta\beta - \frac{r_0}{2}(\beta^2 - \omega^2) + i(\theta - r_0\beta)\omega \end{aligned} \quad (6)$$

と定義する. 壁の定義は定理 6.1.1 で与えたが, [4] では擬似壁という形で定義を行っている. ここではその方針に従うことにする.

定義 6.2.1

- (i) $w \in \mathcal{N}(X) \setminus \langle v \rangle$ (resp. $w \in \mathcal{N}(X)_{\mathbb{R}} \setminus \langle v \rangle$) が \mathbb{Z} -critical (resp. \mathbb{R} -critical) であるとは, $\mu_{Z_{\beta,\omega}}(v) = \mu_{Z_{\beta,\omega}}(w)$ を満たすような $\sigma_{\beta,\omega} \in \text{Stab}(X)$ が存在することをいう. このとき, $\sigma_{\beta,\omega}$ は w を critical にするという.
- (ii) \mathbb{Z} または \mathbb{R} -critical な w に対して, $\text{Stab}(X)$ の部分集合,

$$W_w^v := \{\sigma \in \text{Stab}(X) \mid w \text{ を } \text{critical} \text{ にする}\}$$

を擬似壁 (pseudo-wall) という.

また [4] においては, 以下で述べる Bogomolov 類に対象を制限する形で, 扱う対象を μ_{ω} -半安定な対象または振れ層に制限をしている. 具体的には, $E \in \mathcal{T}_{\beta,\omega}$ に対しては, Bogomolov の不等式 $c_1(v(E))^2 \geq 2r(v(E))\text{ch}_2(v(E))$ が成立する. このため, 予めこの条件を満たす Chern 類を Bogomolov 類として定義しておくという方針をとる. 定義として述べておく.

定義 6.2.2

$v \in \mathcal{N}(X)_M$, ($M = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) が **Bogomolov 類 (Bogomolov class)** であるとは不等式,

$$c_1(v)^2 \geq 2r(v)\text{ch}_2(v)$$

を満たすことをいう.

以降, Bogomolov 類 v を固定しておき, $v = v(E)$ を満たす対象 $E \in \text{Coh}(X)$ に対象を制限することが多い. また, 分解 $\beta = s\omega + u\gamma$ を用いれば,

$$E \text{ が Bogomolov の不等式を満たす} \iff E \in T_{\beta,\omega} \iff E \in T_{s\omega+u\gamma,\omega}$$

であり, $\text{rank}(E) = 0$ または $\mu_\omega(E) \geq s\omega^2$ であることにも注意しておく.

さて, Bogomolov 類 v を一つ固定しよう. 次の定理は $\text{Stab}(X)$ の擬似壁 W_w^v が $\Pi_{\beta,\omega,u}$ 中の半円であることを主張する.

定理 6.2.3

Bogomolov 類を $v = (r_0, \theta, z_0)$ とする. このとき, $\mu_\omega(v) \neq \mu_\omega(w)$ を満たす w についての $\text{Stab}(X)$ の擬似壁 W_w^v は式 (5) で定義した $\Pi_{\beta,\omega,u}$ 中のある方程式で定義される半円である.

証明: まず, 擬似壁 W_w^v を求めよう. 定義より,

$$W_w^v = \{\sigma_{\beta,\omega} \in \text{Stab}(X) \mid \mu_{Z_{\beta,\omega}}(w) = \mu_{Z_{\beta,\omega}}(v), w \in \mathcal{N}(X) \setminus \langle v \rangle\}$$

である. したがって W_w^v を求めるには傾斜関数 $\mu_Z(v) = \mu_Z(w)$ を満たす w の条件を求めればよい.

以前の議論より ω と直交する $\gamma \in \text{NS}_{\mathbb{R}}$ を用いて $\beta = s\omega + u\gamma$, $(s, u \in \mathbb{R})$ と表示することができる. よって $Z_{\beta,\omega} = Z_{s\omega+u\gamma,t\omega}$, $(s, u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_{>0})$ と仮定してよい. 同様に $\theta = b_1\omega + b_2\gamma + \alpha$, $(\alpha \in \langle \omega, \gamma \rangle^\perp)$ と表示する. 定義より $\omega\gamma, \omega\alpha, \omega\alpha', \gamma\alpha, \gamma\alpha'$ はすべて 0 である. また, $\omega^2 = g$, $\gamma^2 = -d$ と表記する.

したがって傾斜関数 $\mu_Z(-) := \mu_{Z_{s\omega+u\gamma,t\omega}}(-)$ は,

$$\begin{aligned} \mu_Z(v) &= -\frac{\text{Re}(Z(v))}{\text{Im}(Z(v))} \\ &= \frac{z_0 - sb_1g + ub_2d - \frac{r_0}{2}(s^2g - u^2d - t^2g)}{(b_1 - r_0s)gt} \end{aligned}$$

と表せる. $w = (r, e_1\omega + e_2\gamma + \alpha', z) \in \mathcal{N} \setminus \langle v \rangle$ を任意にとる. このとき $\mu_Z(v) = \mu_Z(w)$ となる条件は,

$$\begin{aligned} \mu_Z(w) - \mu_Z(v) &= \frac{(b_1 - r_0s)(z - se_1g + ue_2g + \frac{r}{2}(s^2g - u^2d - t^2g)) - (e_1 - rs)(z_0 - sb_1g + ub_2d + \frac{r_0}{2}(s^2g - u^2d - t^2g))}{(e_1 - rs)(b_1 - r_0s)gt} \\ &= 0 \end{aligned}$$

である. s, t について整理することで, 分子は

$$\begin{aligned} &g(r_0e_1 - b_1r)s^2 - 2(zr_0 - rz_0 + e_2udr_0 - b_2udr)s \\ &+ g(r_0e_1 - b_1r)t^2 - 2z_0e_1 + 2e_2udb_1 + r_0u^2de_1 - 2b_2ude_1 + 2zb_1 - ru^2db_1 \end{aligned} \quad (7)$$

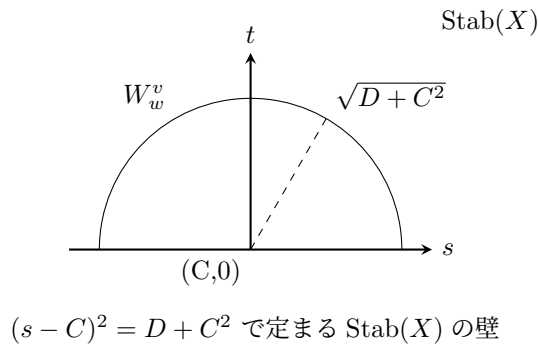
である. 仮定より $\mu_\omega(v) = \frac{(b_1\omega + b_2\gamma + \alpha)\omega}{r_0} \neq \frac{(e_1\omega + e_2\gamma + \alpha')\omega}{r} = \mu_\omega(w)$ (つまり $r_0e_1 - rb_1 \neq 0$) である.

$$\begin{aligned} C &= \frac{r_0z - rz_0 + ud(r_0e_2 - rb_2)}{g(r_0e_1 - rb_1)}, \\ D &= \frac{2z_0e_1 - 2e_2udb_1 - r_0u^2de_1 + 2b_2ude_1 - 2zb_1 + ru^2db_1}{g(r_0e_1 - rb_1)} \end{aligned}$$

とおき, 式 (7) を s, t についてそれぞれ平方完成することで,

$$\mu_Z(w) - \mu_Z(v) = g(r_0e_1 - rb_1)((s - C)^2 + t^2 - D - C^2) = 0 \quad (8)$$

を得る. 右辺は明らかに (s, t) をパラメータとする平面 $\Pi_{\gamma,\omega,u}$ において中心が $(C, 0)$, 半径が $\sqrt{D + C^2}$ である半円の定義式である. ■



上述の定理の証明において, $\mu_\omega(v) = \mu_\omega(w)$ と仮定すると (すなわち $r_0 e_1 - r b_1 = 0$ と仮定すると), 式 (7) における s^2, t^2 の項は消える. さらに $s = \frac{b_1}{r_0}$ とおくと, この式は 0 である. したがって式 (7) は $\text{Stab}(X)$ の直線を定めていることが分かる. 半径が ∞ の半円と考えることで $(s - C)^2 = D + C^2$ を満たす半円という見方も可能である.

$x \neq 0$ のとき,

$$D = \frac{ud(2e_2 - ur_0) + 2z_0}{gr_0} - \frac{2e_1}{r_0}C$$

が, $x = 0$ かつ $e_1 > 0$ のとき

$$C = \frac{z_0 + due_2}{ge_1}$$

が計算によって分かる. したがって

$$\sqrt{D + C^2} = \sqrt{(C - \frac{e_1}{r_0})^2 - F}$$

$$F = \frac{d}{g}(u - \frac{e_2}{r_0})^2 + \frac{1}{r_0^2 g}(e_1^2 g - e_2^2 d - 2rz_0)$$

が成り立つ. F の式の後半 ($e_1^2 g - e_2^2 d - 2rz_0$) は $E \in D^b(X)$ の判別式 $\Delta(E)$ を用いた

$$\Delta(E) - \text{ch}_2$$

と対応していることが分かる.

6.2.1 壁とモジュライ

(未)

7 種数ごとの安定空間における研究

前節で, 代数曲線・代数曲面の場合に関する安定性条件の構成と壁の計算を紹介した. ここでは, さらに個々の代数多様体における安定性条件の研究について紹介する.

7.1 楕円曲線上の安定性条件

前節の E. Macri の結果によって, 種数 1 以上の曲線上の安定空間は完全に決定できることが分かったが, それより以前に [1] では楕円曲線に対して個別に前節と同様の位相同型が示されていた. この節ではそれに触れたい. 主な参考文献は [1] および [6] §11.4.

\mathbb{C} 上の楕円曲線 C を考える. C の K -群 $K(C)$ に対し, その Chern 指標 $\text{ch} : K(C) \rightarrow H^{2*}(C, \mathbb{Q})$ が $[E] \mapsto (\text{rank } E, \deg E)$ によって与えられ, 従って $\text{Im } \text{ch} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ である. これらのペア $(\text{Im } \text{ch}, \text{ch})$ を考える. ここで,

$$Z_0((r, d)) = -d + \sqrt{-1}r$$

と定義する. すると $\sigma_0 := (Z_0, \text{Coh}(C))$ は C 上の安定性条件である (cf.).

定理 7.1.1 (Bridgeland)

$\widetilde{GL}^+(2, \mathbb{R})$ による右作用 $g := (T, f) \mapsto \sigma_0 g$ は位相同型

$$\widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R}) \cong \text{Stab}(C)$$

を与える.

証明:

7.2 線織曲面の安定性条件

線織曲面とは、非特異射影曲線 C 上の階数 2 の局所自由層 E による \mathbb{P}^1 -束 $\mathbb{P}(E) \rightarrow C$ をいう。 C のことを底曲線という。線織曲面のうち有理的なもの (\mathbb{P}^2 と双有理なもの) を有理線織曲面といい、そうでないものを非有理線織曲面という。非有理な線織曲面は底曲線 C の種数が $g(C) \geq 1$ の時に与えられることが知られている。

7.2.1 線織曲面の諸性質

準備として線織曲面の性質について述べる。参考文献は主に [2].

補題 7.2.1

$\pi : X := \mathbb{P}(E) \rightarrow C$ を非有理な線織曲面とする。このとき、

$$c_1(X)^2 = 8(1 - g(C)).$$

ここで $c_1(X)$ は直線束 $\mathcal{O}_X(1)$ の第 1Chern 類, $g(C)$ は C の種数である。

証明: Noether の公式 (xx.xx), および $K_X^2 = 8(1 - g)$ を用いると、

$$1 - g = \frac{1}{2}(8(1 - g) - c_2)$$

したがって、

■

7.2.2 線織曲面上の安定性条件

線織曲面 $\pi : S \rightarrow C$ に対する安定性条件の研究は, [13] がある。

7.2.3 線織曲面上の壁

7.2.4 今後について (?)

種数が 1 以上の底曲線を持つ線織曲面に対しては, [13] の内容によって安定性条件が判明したこととなる。種数 0 の底曲線について、

7.3 Abel 曲面の安定性条件

X を Abel 曲面とする (代数群であるような射影多様体 Abel 曲面といった)。ここでは Abel 曲面の安定性条件を求める。この節の内容は [11] および [6] §11.7 の内容に準ずる。

7.4 K3 曲面の安定性条件

8 補足

参考文献

- [1] T. Bridgeland, *Stability conditions on triangulated categories*, Ann. of Math. (2), 166 (2007), no. 2, 317–345, also arXiv:math/0212237.
- [2] R. Hartshorne *Algebraic Geometry*, Springer (1977)
- [3] Emanuele Macrì, *Stability conditions on curves* Math. Res. Lett., 14(4):657–672, 2007. arXiv:0705.3794.
- [4] A. Maciocia, *Computing the walls associated to Bridgeland stability conditions on projective surfaces*, Asian J. Math. 18:2 (2014), 263–279. MR 3217637 Zbl 1307.14022
- [5] A.L. Gorodentsev, S.A. Kuleshov and A.N. Rudakov, *t-stabilities and t-structures on triangulated categories* (Russian) Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 68 (2004), no. 4, 117–150; translation in Izv. Math. 68 (2004), no. 4, 749–781, also math.AG/0312442.
- [6]
- [7] 上野健爾, 「代数幾何 1,2,3」, 岩波講座現代数学の基礎シリーズ, 岩波書店 (2001)
- [8] Ryo Ohkawa *Moduli of Bridgeland semistable objects on \mathbb{P}^2* , <https://arxiv.org/abs/0812.1470v3>
- [9] So Okada *STABILITY MANIFOLD OF \mathbb{P}^1* , arXiv:math/0411220
- [10] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, *Faisceaux Pervers*, Asterisque 100, Soc. Math de France (1983).
- [11] S. Yanagida, K. Yoshioka, *Bridgeland’s stabilities on abelian surfaces*, Math. Z., 276 (2014), Issue 1-2, 571–610
- [12] D. Happel, I. Reiten and S. O. Smalø, *Tilting in abelian categories and quasitilted algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. 120 (1996), no. 575.
- [13] Takayuki UCHIBA, *ON GLUING STABILITY CONDITIONS ON RULED SURFACES OF POSITIVE GENUS*, Osaka J. Math. 58 (2021), 647–660