# 連接層の導来圏と半直交分解

Sachi Y

2023年2月14日

# 目次

# 1 導来圏の半直交分解

## 1.1 三角圏の生成元

$\mathcal{D}$ を三角圏, $\mathcal{C}$ をその充満部分加法圏とする. $\mathcal{Q} = \{Q_i\}_{i \in I}$ を $\mathcal{D}$ の対象の集合, または部分圏とする.

**定義 1.1.1.** $\mathcal{C}$ の $\mathcal{D}$ における**右直交部分圏 (right orthogonal subcategory)** $\mathcal{C}^{\perp}$**, 左直交部分圏 (left orthogonal subcategory)** ${}^{\perp}\mathcal{C}$ とは, 充満部分圏で,

$$\mathcal{C}^{\perp} := \{D \in \mathcal{D} |\ \text{全ての}\ C \in \mathcal{C}\ \text{に対し}\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(C, D) = 0\}$$
$${}^{\perp}\mathcal{C} := \{D \in \mathcal{D} |\ \text{全ての}\ C \in \mathcal{C}\ \text{に対し}\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, C) = 0\}$$

を満たすものをいう.

**定義 1.1.2.** $\mathcal{C}$ が $\mathcal{D}$ の**狭義充満部分圏 (strictly full subcategory)** であるとは,

$$\forall D \in \mathcal{D},\ \exists C \in \mathcal{C}\ s.t.\ C \cong D \quad \Longrightarrow \quad D \in \mathcal{C}$$

を満たすこという.

**定義 1.1.3.** $\mathcal{D}$ の充満部分加法圏 $\mathcal{B}$ が, $\mathcal{C}$ の $\mathcal{D}$ における **thick 閉包 (thick closure)** であるとは,

(i) $\mathcal{C} \subset \mathcal{Q}$
(ii) 全ての $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$ に対し, $Q_1 \oplus Q_2 \in \mathcal{Q}$

最小の狭義充満部分圏であることをいう. 特に, $\mathcal{Q}$ を含む thick 閉包を $\langle \mathcal{Q} \rangle$ と書く.

**定義 1.1.4.** $\mathcal{Q}$ が $\mathcal{D}$ を**古典的に生成する (clasically generated)** とは, $\langle \mathcal{Q} \rangle^{\perp} = \mathcal{D}$ を満たすことをいう.

**定義 1.1.5.** $\mathcal{Q}$ が $\mathcal{D}$ を**生成する** とは, $\langle \mathcal{Q} \rangle^{\perp} = 0$ であることをいう.

「古典的に生成する」ことの確認より, 「生成する」ことを確認するほうが容易であることのほうが多いようです. 例外生成列の章で例示します.

**定義 1.1.6.** 三角圏 $\mathcal{D}$ が**半直交分解可能**であるとは, 充満部分三角圏 $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j$ で $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{C}_j^{\perp} \cap^{\perp} \mathcal{C}_j \quad (\Longleftrightarrow \mathcal{C}_j \subset \mathcal{C}_i^{\perp} \cap^{\perp} \mathcal{C}_i)$ であり, 任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して, ある $C_i \in \mathcal{C}_i$ が存在し, $D \cong C_i \oplus C_j$ を満たすことをいう. $\mathcal{D}$ が半直交分解可能でないとき, **直規約 (indecomposable)** であるという.

## 1.2 半直交分解

**定義 1.2.1.** (半直交分解) 三角圏 $\mathcal{D}$ の**半直交分解 (semi-orthogonal decomposition)** とは, $\mathcal{D}$ の strictly full subcategolly$\mathcal{D}_1, ..., \mathcal{D}_n$ で, $j > i$ ならば $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{D}_j^{\perp}$ が成立し, ーーーーーーこのとき, $\mathcal{D}$ は $\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_n$ の対象で古典的に生成されているので,

## 1.3 例外生成列

ここでは, $\mathbb{C}$**-linear な三角圏** $\mathcal{D}$ **を考えます.**

**定義 1.3.1.** (例外対象) $\mathcal{E} \in \mathcal{D}$ が $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, E) \cong \mathbb{C}$ を満たす, つまり,

$$\mathrm{Hom}^i_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = \begin{cases} \mathbb{C}, & (i = 0) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

を満たすとき, $\mathcal{E}$ を**例外対象 (exceptional object)** という.

**命題 1.3.2.** $\mathbb{C}$ 上滑らかな射影的代数多様体 $X$ が $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0,\ (\forall i > 0)$ を満たすとき, $X$ 上の全ての直線束は例外対象である.

**証明.** □

**定義 1.3.3.** $\mathcal{D}$ が**有限型 (of finite type)** であるとは, 任意の対象 $E, F \in \mathcal{D}$ に対して $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(E, F[i]) < \infty$ であることをいう. これは, 任意の $E, F \in \mathcal{D}$ に対して, $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F)$ が $D^b(Spec\ \mathbb{C})$ の対象であることと同値である.

**命題 1.3.4.** $\mathcal{D}$ が有限型であるとする. このとき $E$ が $\mathcal{D}$ の例外対象ならば, $\langle E \rangle$ は $\mathcal{D}$ の許容部分三角圏である.

**証明.** □

**定義 1.3.5.** $E_1, ..., E_n$ を $\mathcal{D}$ の例外対象とする.

(i) $(E_1, ..., E_n)$ が**例外列 (exceptional collection)** とは, 任意の $i < j \in \mathbb{Z}$ に対し, $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(E_j, E_i) = 0$ であることをいう.

(ii) 例外列 $(E_1, ..., E_n)$ が $\mathcal{D}$ を古典的に生成するとき, $(E_1, ..., E_n)$ を**例外生成列 (full exceptional collection)** という.

(iii) 例外列 $(E_1, ..., E_n)$ が**強例外列 (strictly exceptional collection)** とは, 任意の $i < j \in \mathbb{Z}$ と任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して, $\mathbf{R}\mathrm{Hom}^k_{\mathcal{D}}(E_j, E_i) = 0$ を満たすことをいう.

特に, 滑らかな射影多様体や代数スタック $X$ に対し, その導来圏 $D^b(X)$ が例外生成列を持つとき $X$ **は例外生成列を持つ**といいます.

例外生成列から, 半直交分解の定義の図式がどう得られるかを観察しましょう.

**例 1.3.6.** $(E_1, ..., E_n)$ が例外生成列とする. このとき, $D$ の半直交分解

$$\mathcal{D} = (\langle E_1 \rangle, ..., \langle E_n \rangle)$$

を得る. ($\because$ $(E_1, ..., E_n)$ は例外生成列だから, $\forall i, j$ に対し, $i > j \ \Rightarrow\ \mathbf{R}\mathrm{Hom}(E_j, E_i) = 0$. 一方, $\langle E_j \rangle^{\perp} = \{F \in \mathcal{D} \mid \forall E_j \in \langle E_j \rangle,\ \mathbf{R}\mathrm{Hom}(E_j, F) = 0\}$. よって $\langle E_i \rangle \subset \langle E_j \rangle^{\perp}$ である. これに補題 1.3.7 を持ちいればよい.)

命題 1.3.4 の証明のように, 任意の $F_1 \in cD$ に対して, $F_2 \in^{\perp} \langle E_1 \rangle$ および $G_1 \in \langle E_1 \rangle$ があり, 完全三角形,

$$F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow G_1 \longrightarrow F_2[1]$$

が存在する．上記の $F_2$ に対して同様に, $F_3 \in \langle E_2 \rangle$ および $G_2 \in \langle E_2 \rangle$ があり, 完全三角形,

$$F_3 \longrightarrow F_2 \longrightarrow G_2 \longrightarrow F_3[1]$$

が存在する．$F_2, G_2 \in \langle E_1 \rangle$ なので, $F_3 \in^{\perp} \langle E_1 \rangle$ である．($\because$ 命題 1.3.4 と同様に関手 $- \otimes E_1$ を完全三角形に適用すればよい.)

この操作を繰り返すことで, $k < m$ に対して $F_{k+1} \in \cap_{i_1}^{k} \langle E_i \rangle$ かつ $G_k \in \langle E_k \rangle$ が存在し, 完全三角形,

$$F_{k+1} \longrightarrow F_k \longrightarrow G_k \longrightarrow F_{k+1}[1]$$

を得る．また, $(E_1, ..., E_n)$ が $\mathcal{D}$ の例外生成列であることから,

$$\cap_{i=1}^{m} {}^{\perp}\langle E_i \rangle \;=\; \{0\}$$

であり, よって $F_{m+1} = 0$ であることがわかる．このようにして半直交分解の図式,

図式

を得ることができる．

**補題 1.3.7.** $\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_n$ を三角圏 $\mathcal{D}$ の狭義充満部分三角圏とする．さらに, $\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_n$ は $j > i$ ならば $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{C}_j^{\perp}$ であるとする．このとき, 以下は同値である．

(i) $\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_n$ は $\mathcal{D}$ の半直交分解を定める．
(ii) $\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_n$ は $\mathcal{D}$ を古典的に生成する．

**注意 1.3.8.** $\mathcal{D}$ の例外列 $(E_1, ..., E_n)$ が与えられると, $\mathcal{C} = \langle E_1, ..., E_n \rangle$ とおけば,

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}^{\perp} E_1, ..., E_n \rangle$$

であることがわかり, $\mathcal{C}^{\perp} = 0$ と $\mathcal{D} = \mathcal{C}$ であることがわかる．したがって例外列 $(E_1, ..., E_n)$ が生成列かどうか, という問題は $\mathcal{C}$ が $\mathcal{D}$ を (古典的にではなく) 生成するかを見ればよいことがわかる．こちらの条件の方が確認が容易である場合が多い．

例外生成列と K-Group との関係も見ておきましょう．

**補題 1.3.9.** 半直交分解 $\mathcal{D} = \langle E_1, ..., E_n \rangle$ が存在するとき, K-group の群準同型,

$$K(\mathcal{D}) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} K(E_i) \qquad , \; [F] \mapsto ([p_1(E_1)], ..., [p_n(E_n)])$$

が定まり, さらにこれは同型となる．ここで, $p_i$ は半直交分解の射影関手 (cf. p73) である．

**証明.** $\square$

この補題によって $\mathcal{D}$ が例外生成列 $(E_1, ..., E_n)$ を持つとき,

$$K(\mathcal{D}) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} K(E_i)$$

であり, $K(\mathcal{D})$ は同値類 $[E_i]$ たちによって自由生成されることがわかります．これは $\mathcal{D}$ が例外生成列を持つことの必要条件となっています．

**例 1.3.10.** 滑らかな射影代数曲線 $X$ の K-group に対して,

$$K(X) \cong Pic\ X \oplus \mathbb{Z}$$

が成立する．よって, $X$ が有理的 (i.e.$\mathbb{P}^1$ と同型) ならば $X$ は例外生成列を持ち, 有理的でなければ $X$ は例外生成列を持たない.

**例 1.3.11.** $X$ を滑らかで射影的な Toric 多様体とする．$X$ の K-group $K(X)$ は有限生成自由 Abel 群であることが知られているおり, 実際 $X$ は例外生成列を持つ.(cf. [6])

**補題 1.3.12.** $K(X)$ が非自明な捩れ元を持たないならば, $Pic\ X$ もそうである.

**証明**. □

**系 1.3.13.** $D^b(X)$ が例外生成列を持つならば, $Pic\ X$ は非自明な捩れ元を持たない.

**例 1.3.14.** $X$ を Enriques 曲面とする．即ち $\omega_X^2 \cong \mathcal{O}_X$, $q(X) := \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \omega_X) = 0$ が成立するとする．
$X$ 上の直線束は例外対象であるが, 系 1.3.13 により例外生成列は持ちえない.

次に, 代数多様体の連接層の導来圏が例外生成列を持つための十分条件を考察します．命題 4.31 によれば, $D^b(X)$ の許容部分三角圏 $\mathcal{C}$ が存在することと, 半直交分解

$$D^b(X) = \langle \mathcal{C}^{\perp}, \mathcal{C} \rangle$$

が存在することは同値です．また, この半直交分解の存在より, 射影関手

$$\Psi : D^b(X) \longrightarrow \mathcal{C}$$

が存在することも分かり, さらに以下の事実を示すことができます.

**補題 1.3.15.** (Kuznetsov) 上の半直交分解と射影関手を仮定する． このとき, $\Psi \cong \Phi_{\mathcal{P}}$ を満たす $\mathcal{P} \in D^b(X \times X)$ がただ一つ存在する.

この状況で $\mathcal{C}$ の **Hochschild cohomology** および **Hochschild homology** を以下のように定義します.

**定義 1.3.16.** $\mathcal{C} \subset D^b(X)$ を許容部分三角圏とする.

$$\mathrm{HH}^k(\mathcal{C}) := \mathrm{Hom}^k_{X \times X}(\mathcal{P}, \mathcal{P}) \tag{1}$$

$$\mathrm{HH}_k(\mathcal{C}) := \mathrm{Hom}^k_{X \times X}(\mathcal{P}, \mathcal{P} \otimes^{\mathbf{L}} p_2^* \omega_X[\dim\ X]) \tag{2}$$

をそれぞれ $\mathcal{C}$ の $k$ 次 **Hochschild cohomology** および **Hochschild homology** という.

**定理 1.3.17.** (Kuznetsov) $X$ を滑らかな射影的代数多様体とする.

(i) 半直交分解,

$$D^b(X) = \langle \mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_n \rangle$$

が存在すると仮定する．このとき, Hochschild homology および K-group の同型,

$$\mathrm{HH}_k(X) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{HH}_k(\mathcal{C}_i) \quad , \quad K(X) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} K(\mathcal{C}_i)$$

が存在する.

(ii) $\mathcal{C}$ を $D^b(X)$ の許容部分三角圏とする．さらに半直交分解 $\mathcal{C} = \langle \mathcal{C}_1 \mathcal{C}_2 \rangle$ を持つとする．このとき, 各 $\mathcal{C}_i$ も $D^b(X)$ の許容部分三角圏である．

(iii) さらに射影関手 $Psi : D^b(X) \longrightarrow \mathcal{C}_i$ の核を $\mathcal{P}_i$ と書く．このとき長完全列,

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{HH}^k(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{HH}^k(\mathcal{C}) \oplus \mathrm{HH}^k(\mathcal{C}_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{k+1}_{X\times X}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) \longrightarrow \mathrm{HH}^{k+1}(\mathcal{C}) \longrightarrow \cdots$$

が存在する．

# 参考文献


[1] D.Huybrechts *Fourier-Mukai transform in Algebraic Geometry* Oxford Mathmetical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford (2006)

[2] 上原北斗／戸田幸伸,「連接層の導来圏と代数幾何学, シュプリンガー現代数学シリーズ, 丸善出版 (2020)

[3] R.Hartshorne *Algebraic Geometry*, Springer (1977)

[4] 上野健爾,「代数幾何 1,2,3」, 岩波講座現代数学の基礎シリーズ, 岩波書店 (2001)

[5] 安藤哲哉,「代数曲線・代数曲面入門 新装版ー複素代数幾何の源流」, 数学書房 (2011)

[6] aaa