

ホモロジー的射影双対 (上原／戸田本)

Sachi Y

2023 年 3 月 12 日

目次

1	導来圏の半直交分解	3
1.1	準備	3
1.2	半直交分解	3
1.3	例外生成列	3
2	ホモロジー的射影双対理論	8
2.1	Lefschetz 分解	8
2.2	普遍超平面	9

1 導来圏の半直交分解

1.1 準備

\mathcal{D} を三角圏, \mathcal{C} をその充満部分加法圏とする. $\mathcal{Q} = \{Q_i\}_{i \in I}$ を \mathcal{D} の対象の集合, または部分圏とする.

定義 1.1.1. \mathcal{C} の \mathcal{D} における右直交部分圏 (right orthogonal subcategory) \mathcal{C}^\perp , 左直交部分圏 (left orthogonal subcategory) ${}^\perp\mathcal{C}$ とは, 充満部分圏で,

$$\mathcal{C}^\perp := \{D \in \mathcal{D} \mid \text{全ての } C \in \mathcal{C} \text{ に対し } \text{Hom}_{\mathcal{D}}(C, D) = 0\}$$

$${}^\perp\mathcal{C} := \{D \in \mathcal{D} \mid \text{全ての } C \in \mathcal{C} \text{ に対し } \text{Hom}_{\mathcal{D}}(D, C) = 0\}$$

を満たすものをいう.

定義 1.1.2. \mathcal{C} が \mathcal{D} の狭義充満部分圏 (strictly full subcategory) であるとは,

$$\forall D \in \mathcal{D}, \exists C \in \mathcal{C} \text{ s.t. } C \cong D \implies D \in \mathcal{C}$$

を満たすこという.

定義 1.1.3. \mathcal{D} の充満部分加法圏 \mathcal{B} が, \mathcal{C} の \mathcal{D} における thick 閉包 (thick closure) であるとは,

- (i) $\mathcal{C} \subset \mathcal{Q}$
- (ii) 全ての $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$ に対し, $Q_1 \oplus Q_2 \in \mathcal{Q}$

を満たす最小の狭義充満部分圏であることをいう. 特に, \mathcal{Q} を含む thick 閉包を $\langle \mathcal{Q} \rangle$ と書く.

定義 1.1.4. \mathcal{Q} が \mathcal{D} を古典的に生成する (classically generated) とは, $\langle \mathcal{Q} \rangle^\perp = \mathcal{D}$ を満たすことをいう.

定義 1.1.5. \mathcal{Q} が \mathcal{D} を生成する とは, $\langle \mathcal{Q} \rangle^\perp = 0$ であることをいう.

定義 1.1.6. 三角圏 \mathcal{D} が半直交分解可能であるとは, 充満部分三角圏 $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j$ で $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{C}_j^\perp \cap {}^\perp\mathcal{C}_j$ ($\iff \mathcal{C}_j \subset \mathcal{C}_i^\perp \cap {}^\perp\mathcal{C}_i$) であり, 任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して, ある $C_i \in \mathcal{C}_i$ が存在し, $D \cong C_i \oplus C_j$ を満たすことをいう. \mathcal{D} が半直交分解可能でないとき, 直規約 (indecomposable) であるという.

1.2 半直交分解

定義 1.2.1. (半直交分解) 三角圏 \mathcal{D} の半直交分解 (semi-orthogonal decomposition) とは, \mathcal{D} の strictly full subcategory $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$ で, $j > i$ ならば $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{D}_j^\perp$ が成立し, ————このとき, \mathcal{D} は $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ の対象で古典的に生成されているので,

1.3 例外生成列

ここでは, \mathbb{C} -線型 な三角圏 \mathcal{D} を考えます.

定義 1.3.1. (例外対象) $\mathcal{E} \in \mathcal{D}$ が $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, E) \cong \mathbb{C}$ を満たす, つまり,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}^i(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = \begin{cases} \mathbb{C}, & (i = 0) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

を満たすとき, \mathcal{E} を**例外対象 (exceptional object)** という.

命題 1.3.2. \mathbb{C} 上滑らかな射影的代数多様体 X が $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$, $(\forall i > 0)$ を満たすとき, X 上の全ての直線束は例外対象である.

証明. □

定義 1.3.3. \mathcal{D} が**有限型 (of finite type)** であるとは, 任意の対象 $E, F \in \mathcal{D}$ に対して

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(E, F[i]) < \infty$$

であることをいう. これは, 任意の $E, F \in \mathcal{D}$ に対して, $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F)$ が $D^b(\mathrm{Spec} \mathbb{C})$ の対象であることと同値である.

命題 1.3.4. \mathcal{D} が有限型であるとする. このとき E が \mathcal{D} の例外対象ならば, $\langle E \rangle$ は \mathcal{D} の許容部分三角圏である.

証明. □

定義 1.3.5. E_1, \dots, E_n を \mathcal{D} の例外対象とする.

- (i) (E_1, \dots, E_n) が**例外列 (exceptional collection)** とは, 任意の $i < j \in \mathbb{Z}$ に対し, $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(E_j, E_i) = 0$ であることをいう.
- (ii) 例外列 (E_1, \dots, E_n) が \mathcal{D} を古典的に生成するとき, (E_1, \dots, E_n) を**例外生成列 (full exceptional collection)** という.
- (iii) 例外列 (E_1, \dots, E_n) が**強例外列 (strictly exceptional collection)** とは, 任意の $i < j \in \mathbb{Z}$ と任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して, $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}^k(E_j, E_i) = 0$ を満たすことをいう.

特に, 滑らかな射影多様体や代数スタック X に対し, その導来圏 $D^b(X)$ が例外生成列を持つとき X は**例外生成列を持つ**といいます.

例外生成列から, 半直交分解の定義の図式がどう得られるかを観察しましょう.

例 1.3.6. (E_1, \dots, E_n) が例外生成列とする. このとき, \mathcal{D} の半直交分解

$$\mathcal{D} = (\langle E_1 \rangle, \dots, \langle E_n \rangle)$$

を得る. ($\because (E_1, \dots, E_n)$ は例外生成列だから, $\forall i, j$ に対し, $i > j \Rightarrow \mathbf{R}\mathrm{Hom}(E_j, E_i) = 0$. 一方, $\langle E_j \rangle^\perp = \{F \in \mathcal{D} \mid \forall E_j \in \langle E_j \rangle, \mathbf{R}\mathrm{Hom}(E_j, F) = 0\}$. よって $\langle E_i \rangle \subset \langle E_j \rangle^\perp$ である. これに補題 1.3.7 を持ちいれればよい.)

命題 1.3.4 の証明のように, 任意の $F_1 \in {}^c\mathcal{D}$ に対して, $F_2 \in {}^\perp \langle E_1 \rangle$ および $G_1 \in \langle E_1 \rangle$ があり, 完全三角形,

$$F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow G_1 \longrightarrow F_2[1]$$

が存在する. 上記の F_2 に対して同様に, $F_3 \in \langle E_2 \rangle$ および $G_2 \in \langle E_2 \rangle$ があり, 完全三角形,

$$F_3 \longrightarrow F_2 \longrightarrow G_2 \longrightarrow F_3[1]$$

が存在する. $F_2, G_2 \in \langle E_1 \rangle$ なので, $F_3 \in {}^\perp \langle E_1 \rangle$ である. (\because 命題 1.3.4 と同様に関手 $- \otimes E_1$ を完全三角形に適用すればよい.)

この操作を繰り返すことで, $k < m$ に対して $F_{k+1} \in \cap_{i=1}^k \langle E_i \rangle$ かつ $G_k \in \langle E_k \rangle$ が存在し, 完全三角形,

$$F_{k+1} \longrightarrow F_k \longrightarrow G_k \longrightarrow F_{k+1}[1]$$

を得る. また, (E_1, \dots, E_n) が \mathcal{D} の例外生成列であることから,

$$\cap_{i=1}^m {}^\perp \langle E_i \rangle = \{0\}$$

であり, よって $F_{m+1} = 0$ であることがわかる. このようにして半直交分解の図式,

図式

を得ることができる.

補題 1.3.7. $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ を三角圏 \mathcal{D} の狭義充満部分三角圏とする. さらに, $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ は $j > i$ ならば $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{C}_j^\perp$ であるとする. このとき, 以下は同値である.

- (i) $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ は \mathcal{D} の半直交分解を定める.
- (ii) $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ は \mathcal{D} を古典的に生成する.

注意 1.3.8. \mathcal{D} の例外列 (E_1, \dots, E_n) が与えられると, $\mathcal{C} = \langle E_1, \dots, E_n \rangle$ とおけば,

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}^\perp E_1, \dots, E_n \rangle$$

であることがわかり, $\mathcal{C}^\perp = 0$ と $\mathcal{D} = \mathcal{C}$ であることがわかる. したがって例外列 (E_1, \dots, E_n) が生成列かどうか, という問題は \mathcal{C} が \mathcal{D} を (古典的にではなく) 生成するかを見ればよいことがわかる. こちらの条件の方が確認が容易である場合が多い.

例外生成列と K-Group との関係も見ておきましょう.

補題 1.3.9. 半直交分解 $\mathcal{D} = \langle E_1, \dots, E_n \rangle$ が存在するとき, K-group の群準同型,

$$K(\mathcal{D}) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n K(E_i) \quad , \quad [F] \mapsto ([p_1(E_1)], \dots, [p_n(E_n)])$$

が定まり, さらにこれは同型となる. ここで, p_i は半直交分解の射影関手 (cf. p73) である.

証明.

□

この補題によって \mathcal{D} が例外生成列 (E_1, \dots, E_n) を持つとき,

$$K(\mathcal{D}) \cong \bigoplus_{i=1}^n K(E_i)$$

であり, $K(\mathcal{D})$ は同値類 $[E_i]$ たちによって自由生成されることがわかります. これは \mathcal{D} が例外生成列を持つことの必要条件となっています.

例 1.3.10. 滑らかな射影代数曲線 X の K-group に対して,

$$K(X) \cong \text{Pic } X \oplus \mathbb{Z}$$

が成立する. よって, X が有理的 (i.e. \mathbb{P}^1 と同型) ならば X は例外生成列を持ち, 有理的でなければ X は例外生成列を持たない.

例 1.3.11. X を滑らかで射影的な Toric 多様体とする. X の K-group $K(X)$ は有限生成自由 Abel 群であることが知られているおり, 実際 X は例外生成列を持つ.(cf. [?])

補題 1.3.12. $K(X)$ が非自明な捩れ元を持たないならば, $\text{Pic } X$ もそうである.

証明. □

系 1.3.13. $D^b(X)$ が例外生成列を持つならば, $\text{Pic } X$ は非自明な捩れ元を持たない.

例 1.3.14. X を Enriques 曲面とする. 即ち $\omega_X^2 \cong \mathcal{O}_X$, $q(X) := \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \omega_X) = 0$ が成立するとする.

X 上の直線束は例外対象であるが, 系 1.3.13 により例外生成列は持たない.

次に, 代数多様体の接続層の導来圏が例外生成列を持つための十分条件を考察します. 命題 4.31 によれば, $D^b(X)$ の許容部分三角圏 \mathcal{C} が存在することと, 半直交分解

$$D^b(X) = \langle \mathcal{C}^\perp, \mathcal{C} \rangle$$

が存在することは同値です. また, この半直交分解の存在より, 射影関手

$$\Psi : D^b(X) \longrightarrow \mathcal{C}$$

が存在することも分かり, さらに以下の事実を示すことができます.

補題 1.3.15 (Kuznetsov). 上の半直交分解と射影関手を仮定する. このとき, $\Psi \cong \Phi_{\mathcal{P}}$ を満たす $\mathcal{P} \in D^b(X \times X)$ がただ一つ存在する.

この状況で \mathcal{C} の **Hochschild cohomology** および **Hochschild homology** を以下のように定義します.

定義 1.3.16. $\mathcal{C} \subset D^b(X)$ を許容部分三角圏とする.

$$\text{HH}^k(\mathcal{C}) := \text{Hom}_{X \times X}^k(\mathcal{P}, \mathcal{P}) \quad (1)$$

$$\text{HH}_k(\mathcal{C}) := \text{Hom}_{X \times X}^k(\mathcal{P}, \mathcal{P} \otimes^{\mathbb{L}} p_2^* \omega_X[\dim X]) \quad (2)$$

をそれぞれ \mathcal{C} の k 次 **Hochschild cohomology** および **Hochschild homology** という.

定理 1.3.17. (Kuznetsov) X を滑らかな射影的代数多様体とする.

(i) 半直交分解,

$$D^b(X) = \langle \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n \rangle$$

が存在すると仮定する. このとき, Hochschild homology および K-group の同型,

$$\text{HH}_k(X) \cong \bigoplus_{i=1}^n \text{HH}_k(\mathcal{C}_i) \quad , \quad K(X) \cong \bigoplus_{i=1}^n K(\mathcal{C}_i)$$

が存在する.

- (ii) \mathcal{C} を $D^b(X)$ の許容部分三角圏とする. さらに半直交分解 $\mathcal{C} = \langle \mathcal{C}_1 \mathcal{C}_2 \rangle$ を持つとする. このとき, 各 \mathcal{C}_i も $D^b(X)$ の許容部分三角圏である.
- (iii) さらに射影関手 $Psi : D^b(X) \rightarrow \mathcal{C}_i$ の核を \mathcal{P}_i と書く. このとき長完全列,

$$\cdots \rightarrow \mathrm{HH}^k(\mathcal{C}) \rightarrow \mathrm{HH}^k(\mathcal{C}) \oplus \mathrm{HH}^k(\mathcal{C}_2) \rightarrow \mathrm{Hom}_{X \times X}^{k+1}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) \rightarrow \mathrm{HH}^{k+1}(\mathcal{C}) \rightarrow \cdots$$

が存在する.

2 ホモロジー的射影双対理論

2.1 Lefschetz 分解

S を \mathbb{C} 上の滑らかな射影代数多様体, $\mathcal{O}_S(1)$ を豊富とは限らない直線束とする. $V \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S(1))$ を部分ベクトル空間とし, $\mathcal{O}_S(1)$ は V の大域切断で生成されているとする. このとき, V は (閉とは限らない) 埋め込み,

$$\phi : S \rightarrow \mathbb{P}(V)$$

を定め, さらに $\phi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \cong \mathcal{O}_S(1)$ となる (\because [3] Theorem 7.1).

定義 2.1.1 (Lefschetz 分解). $D^b(S)$ の **Lefschetz 分解 (Lefschetz decomposition)** とは, 半直交分解

$$D^b(S) = \langle \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1(1), \dots, \mathcal{C}_{n-1}(n-1) \rangle$$

であり, $0 \subset \mathcal{C}_{n-1}(n-1) \subset \dots \subset \mathcal{C}_1(1) \subset \mathcal{C}_0$ を満たすものをいう. ここで $\mathcal{C}(i) := \mathcal{C} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S(i)$ である.

注意 2.1.2. (i) 上の定義の半直交分解は, $D^b(S) = \langle \langle \mathcal{C}_0 \rangle, \langle \mathcal{C}_1(1) \rangle, \dots, \langle \mathcal{C}_{n-1}(n-1) \rangle \rangle$ の略記であることに注意する.(cf. p.82)

(ii) 系 4.33 より各 $\langle \mathcal{C}(i) \rangle$ は許容部分三角圏である.

例 2.1.3. V を n 次元ベクトル空間, $S = \mathbb{P}(V)$, $\phi = \text{id}_S : S \rightarrow \mathbb{P}(V)$ のとき, Beilinson の結果 (cf. —) によって,

$$D^b(S) = \langle \mathcal{O}_S, \mathcal{O}_S(1), \dots, \mathcal{O}_S(n-1) \rangle$$

が成立する. よって, $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_1 = \dots = \mathcal{C}_n = \langle \mathcal{O}_S \rangle$ とおけば, $D^b(S)$ の Lefschetz 分解を与える.

例 2.1.4. 例 2.1.3 の一般化として, S を滑らかな射影代数多様体, \mathcal{E} を大域切断で生成される階数 r の局所自由層とする. W を S 上の射影束 $\mathbb{P}_S(\mathcal{E})$, $V = H^0(S, \mathcal{E})$ とおくと, 全射

$$V \otimes \mathcal{O}_S \twoheadrightarrow \mathcal{E}$$

に誘導される埋め込み $W \rightarrow \mathbb{P}(V)$ が存在する. 定理 2.1.6 より半直交分解,

$$D^b(S) = \langle D^b(S), D^b(S) \otimes \mathcal{O}_W(1), \dots, D^b(S) \otimes \mathcal{O}_W(n-1) \rangle$$

を得る. したがって, $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_1 = \dots = \mathcal{C}_n = \langle D^b(S) \rangle$ とおけば Lefschetz 分解である.

例 2.1.5. 例 2.1.3 の S を Veronese embedding を用いて $\mathbb{P}(\text{Sym}^2(V))$ へ埋め込む. これを $f : S \rightarrow \mathbb{P}(\text{Sym}^2(V))$ とおく. このとき, $f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\text{Sym}^2(V))}(1) \cong \mathcal{O}_S(2)$ である. $n := \dim V$ の偶奇に応じ,

$$\begin{cases} \mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_1 = \dots = \mathcal{C}_{\frac{n}{2}-1} = \langle \mathcal{O}_S, \mathcal{O}_S(1) \rangle & , (n \text{ が偶数}) \\ \mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_1 = \dots = \mathcal{C}_{\frac{n+1}{2}-2} = \langle \mathcal{O}_S, \mathcal{O}_S(1) \rangle, \mathcal{C}_{\frac{n+1}{2}-1} = \langle \mathcal{O}_S \rangle & , (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

と定めると, これは $D^b(S)$ の $\mathcal{O}_S(2)$ に関する Lefschetz 分解を与える.

例 2.1.5 で用いた, Orlov による結果を与えておきます.

定理 2.1.6 (Orlov). X を滑らかな準射影代数多様体, \mathcal{E} を X 上の階数 r の局所自由層, $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow X$ を射影束とする. $k \in \mathbb{Z}$ に対して, 関手 Φ_k を,

$$\Phi_k : D^b(X) \longrightarrow D^b(\mathbb{P}(\mathcal{E})) \quad , \Phi_k(-) := \pi^*(-) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(k)$$

と定める. このとき, 以下が成立する.

- (i) f^* および全ての k に対する Φ_k は充満忠実である
- (ii) $D^b(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ の半直交分解,

$$\langle \Phi_{-r+1}(D^b(X)), \dots, \Phi_{-1}(D^b(X)), f^*D^b(X) \rangle$$

が存在する.

証明.

□

2.2 普遍超平面

S を滑らかな射影代数多様体, $D^b(S)$ は Lefschetz 分解を持つと仮定する. $V \subset \Gamma(S, \mathcal{O}_S(1))$ を部分ベクトル空間とする.

定義 2.2.1 (普遍超平面). $\mathcal{X} \subset S \times \mathbb{P}(V^\vee)$ を,

$$\mathcal{X} := \{(x, H) \in S \times \mathbb{P}(V^\vee) \mid x \in \phi^{-1}(H)\}$$

と定める. これを **普遍超平面 (tautological hyperplane)** という.

注意 2.2.2. 集合論的には, $\mathbb{P}(V^\vee)$ は $\mathbb{P}(V)$ の超平面全体の集合と思える. 定義の表記は超平面 H を $\mathbb{P}(V^\vee)$ の”点”と見ている. 詳細は, 「射影空間の双対原理」などで調べると分かりやすいかもしれない.

注意 2.2.3. スキーム論を用いての定式化は以下のとおりである: $S \times \mathbb{P}(V^\vee)$ 上の直線束, $\mathcal{O}_S(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(1)$ の大域切断を,

$$s = id_V \in V \otimes V^\vee \subset H^0(S, \mathcal{O}_S(1)) \otimes H^0(\mathbb{P}(V^\vee), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(1))$$

とおくと, s の零点から定まる因子 $\text{div}(s)$ は \mathcal{X} を定める.

$i : \mathcal{X} \hookrightarrow S \times \mathbb{P}(V^\vee)$ を閉埋め込みとします. $S \times \mathbb{P}(V^\vee)$ のそれぞれの成分への自然な射影と i の合成を, $g : \mathcal{X} \hookrightarrow S \times \mathbb{P}(V^\vee) \rightarrow S$, $h : \mathcal{X} \hookrightarrow S \times \mathbb{P}(V^\vee) \rightarrow \mathbb{P}(V^\vee)$ とおきます. $D^b(\mathcal{X})$ の半直交分解について調べましょう.

補題 2.2.4 (Kuznetsov). 上記仮定のもと, 半直交分解

$$D^b(S \times \mathbb{P}(V^\vee)) = \langle \mathcal{C}_0 \boxtimes D^b(\mathbb{P}(V^\vee)), \mathcal{C}_1(1) \boxtimes D^b(\mathbb{P}(V^\vee)), \dots, \mathcal{C}_{n-1} \boxtimes D^b(\mathbb{P}(V^\vee)) \rangle$$

が存在する.

証明. 任意の $E_1, E_2 \in D^b(S)$ と任意の $G_1, G_2 \in D^b(\mathbb{P}(V^\vee))$ について, 補題 2.2.5 より,

$$\mathbf{R}\text{Hom}_{S \times \mathbb{P}(V^\vee)}(E_1 \boxtimes G_1, E_2 \boxtimes G_2) \cong \mathbf{R}\text{Hom}_S(E_1, E_2) \otimes \mathbf{R}\text{Hom}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(G_1, G_2)$$

が成立する. したがって, □

定理の証明のための準備をします.

補題 2.2.5 (Kuneth Formula). X, Y を体 k 上のスキームで準コンパクトかつ準分離的であると仮定する. また, \mathcal{F}, \mathcal{G} をそれぞれ準連接 \mathcal{O}_X -加群, 準連接 \mathcal{O}_Y -加群とする. このとき, 自然な同型

$$H^n(X \times_{\mathrm{Spec}(k)} Y, \mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^p(X, \mathcal{F}) \otimes_k H^q(Y, \mathcal{G})$$

が存在する.

証明. [?] Lemma33.29.2 参照. □

参考文献

- [1] D.Huybrechts *Fourier-Mukai transform in Algebraic Geometry* Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford (2006)
- [2] 上原北斗／戸田幸伸, 「連接層の導来圏と代数幾何学, シュプリンガー現代数学シリーズ, 丸善出版 (2020)
- [3] R.Hartshorne *Algebraic Geometry*, Springer (1977)
- [4] 上野健爾, 「代数幾何 1,2,3」, 岩波講座現代数学の基礎シリーズ, 岩波書店 (2001)
- [5] 安藤哲哉, 「代数曲線・代数曲面入門 新装版ー複素代数幾何の源流」, 数学書房 (2011)