Fourier-Mukai Transform についてのノート

Sachi Y

2023 年 2 月 14 日

概要

D.HUYBRECHTS 著「*Fourier-Mukai Transform in Algebraic Geometry*」のノートです．未完で抜けが多いです．

目次

1 表記

2 三角圏および三角関手

2.1 半直交分解と例外列

定義 2.1.1 (exceptional sequence)**.** $\mathcal{D}$ を k-線形な三角圏とする．$E \in Ob(\mathcal{D})$ が**例外対象** (*exceptional collection*) であるとは,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, E[l]) = \begin{cases} k & ,(l=0) \\ 0 & ,(otherwise) \end{cases}$$

を満たすことをいう．$\mathcal{D}$ の**例外列** (*exceptional sequence*) とは, 例外対象の列 $\{E_1, ..., E_n\}$ で, 全ての $i > j, (i, j \in \mathbb{Z})$ と全ての $l \in \mathbb{Z}$ に対し, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E_i, E_j[l]) = 0$ が成立するものをいう．例外列 $\{E_i\}_{i \in I}$ が **full** であるとは, それが $\mathcal{D}$ を**生成する (generated by)** ことをいう．すなわち, 任意の部分三角圏 $\mathcal{D}_S \subset \mathcal{D}$ で $\{E_i\}_{i \in I}$ を含むものは $\mathcal{D}$ と圏同値であることをいう．

補題 2.1.2. $\mathcal{D}$ を k-線型な三角圏で, 任意の $A, B \in \mathcal{D}$ に対し,

$$\dim \bigoplus_i \mathrm{Hom}(A, B[i]) < \infty$$

であるとする．このとき, $E \in \mathcal{D}$ が例外対象ならば $\langle \mathcal{E} \rangle$ は $\mathcal{D}$ の許容部分三角圏である．

証明. $\langle E \rangle$ が三角圏であることを示す．E が

$\langle E \rangle$ が admissible であることを示す．

□

3 複体の圏と導来圏

3.1 導入

定義 3.1.1. $\mathcal{A}$ をアーベル圏とする．$A^\bullet \in \mathcal{A}$ が**複体 (complex)** であるとは, $\mathcal{A}$ の対象 A^i 及び微分作用素と呼ばれる射 $d^i : A^i \to A^{i+1}$ からなる系列,

$$\cdots \longrightarrow A^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} A^i \xrightarrow{d^i} A^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

で, 任意の i に対し $d^i \circ d^{i-1} = 0$ を満たすものをいう．これを $\{A^i, d^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ と表す.

定義 3.1.2. $\mathcal{A}$ の複体 $\{A^i, d_A^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$,$\{B^i, d_B^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ を考える．全ての $i \in \mathbb{Z}$ に対し, 射

$$F^i : A^i \to B^i$$

が与えられ, 全ての $i \in \mathbb{Z}$ に対して $F^{i+1} \circ d_A^i = d_B^i \circ F^i$ が成立するとき, $F^\bullet := \{F^i : A^i \to B^i\}$ を**複体の射 (chain map)** という.

定義 3.1.3. アーベル圏 $\mathcal{A}$ に対し, 加法圏 $Kom(\mathcal{A})$ を以下のように定義する.

(i) $Ob(Kom(\mathcal{A}))$ は $\mathcal{A}$ における複体.
(ii) $A, B \in Ob(\mathcal{A})$ に対して, $Hom_{Kom\mathcal{A}}(A, B)$ は A から B への複体の射の集合でアーベル群の構造をもつ.
(iii) $Hom_{Kom\mathcal{A}}(A, B) \times Hom_{Kom\mathcal{A}}(B, C) \longrightarrow Hom_{Kom\mathcal{A}}(A, C)$ は複体の射の合成.

$Kom(\mathcal{A})$ を**複体の圏 (Complex Category)** という.

命題 3.1.4. 加法圏 $Kom(\mathcal{A})$ はアーベル圏である.

証明. (Ker , Coker の存在) : (前提) より $\mathcal{A}$ がアーベル圏であることと,$F^\bullet := \{F^i : A^i \to B^i\}$ であることから, 各 $i \in \mathbb{Z}$ に対して $KerF^i$, $CokerF^i$ が定義できる．$KerF := \{KerF^i\}_{i\in\mathbb{Z}}, CokerF := \{CokerF^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ と定義する．これが複体をなすことを言えばよい．Kernel の普遍性から, 各 $i \in \mathbb{Z}$ に対して射 $\tilde{d^i} : KerF^i \to KerF^{i+1}$ が定まる．すなわち図式,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & KerF^{i-1} \arrow[r, "d^{\tilde{i-1}}"] \arrow[d, "F^{\tilde{i-1}}"'] & KerF^i \arrow[r, "\tilde{d^i}"] \arrow[d, "\tilde{F^i}"'] & KerF^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "F^{\tilde{i+1}}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A^{i-1} \arrow[r, "d_A^{i-1}"] \arrow[d, "F^{i-1}"'] & A^i \arrow[r, "d_A^i"] \arrow[d, "F^i"'] & A^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "F^{i+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{i-1} \arrow[r, "d_B^{i-1}"] & B^i \arrow[r, "d_B^i"] & B^{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

を得る．真ん中と下の行は F を通して可換であり, また $F^{i-1} \circ F^{\tilde{i-1}} = 0$ である．したがって $F^i \circ d_A^{i-1} \circ F^{\tilde{i-1}} = d_B^{i-1} \circ F^{i-1} \circ F^{\tilde{i-1}} = 0$ を得る．この射を $\alpha : KerF^{i-1} \to B^i$ と置こう．すると α に対する Kernel の普遍性より...... (途中) □

注意 3.1.5. $Kom(\mathcal{A})$ は以下のようにして $\mathcal{A}$ の充満部分圏だと思うことが出来る: $A^\bullet \in Kom(\mathcal{A})$ を, $A^0 = A$ かつ $i \neq 0$ に対し $A^i = 0$ という複体とする.

定義 3.1.6. 複体 $A^\bullet \in Kom(\mathcal{A})$ に対し $A^\bullet[1]$ を, 各 $i \in \mathbb{Z}$ に対し $(A^i[1]) := A^{i+1}$, 微分作用素 $d_{A^i[1]} := -d_A^{i+1}$ と定める. また, 複体の射 $f : A^\bullet \to B^\bullet$ に対し $f^i[1] := f^{i+1}$ と定める. これにより定まる関手 $T : Kom(\mathcal{A}) \to Kom(\mathcal{A}), A^\bullet \mapsto A^\bullet[1]$ を**シフト関手 (Shift functor)** という.

命題 3.1.7. シフト関手 $T : Kom(\mathcal{A}) \to Kom(\mathcal{A})$ はアーベル圏の圏同値を与える.

証明. .... □

4　導来関手

4.1　導入

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ をアーベル圏とし, ホモトピー圏 $K(\mathcal{A}), K(\mathcal{B})$ の間の三角関手,

$$F : K(\mathcal{A}) \longrightarrow K(\mathcal{B})$$

を考える. アーベル圏の間の加法関手 $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ と $\mathcal{A}$ の複体 $\mathcal{E}^\bullet$ に対して, 対応 $\mathcal{E}^\bullet \to F(\mathcal{E}^\bullet)$ は以下のように $K(\mathcal{B})$ の複体を与える.

$$F(\mathcal{E}^\bullet) = \quad \cdots \longrightarrow G(E^{i-1}) \longrightarrow G(E^i) \longrightarrow G(E^{i+1}) \longrightarrow \cdots$$

すなわち, 可換図式,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "G"] \arrow[d] & \mathcal{B} \arrow[d] \\ K(\mathcal{A}) \arrow[r, "F"] & K(\mathcal{B}) \end{tikzcd}$$

を誘導する. 一方で, 全ての三角関手 F がこのようにして得られる訳ではない. F が完全関手でないとき,F は導来圏の間の関手 $D^b(\mathcal{A}) \to D^b(\mathcal{B})$ を誘導するとは限らない. これは擬同型の対象の F による像が擬同型になるとは限らないためである. そのような F に近い形の導来圏の間の関手 $D^b(\mathcal{A}) \to D^b(\mathcal{B})$ を構成しようとすることは自然であり, それを調べることにより F が完全でない理由を調べられる可能性がある. このような関手を**導来関手 (derived functor)** と呼ぶ.

4.2　定義、性質、例

前節の状況で, 右導来関手を構成しよう. これは以下のように普遍性によって特徴づけることが出来る.

定義 4.2.1. $* \in \{+, -, b, \emptyset\}$, $F : K(\mathcal{A})^* \to K(\mathcal{B})^*$ をホモトピー圏の三角関手とする. F の**右導来関手 (right derived functor) $\mathbf{R}F$** とは, 三角関手,

$$\mathbf{R}F : D^*(\mathcal{A}) \longrightarrow D^*(\mathcal{B})$$

および自然変換,

$$\phi : Q_{\mathcal{B}} \circ F \to \mathbf{R}F \circ Q_{\mathcal{A}}$$

であって, 次の普遍性 (U1) をもつものをいう．ここで, $Q_{\mathcal{A}}, Q_{\mathcal{B}}$ はそれぞれのホモトピー圏から導来圏への自然な (完全) 三角関手である (——参照).

(U1)

5　射影的代数多様体と連接層 及び 種々の関手

6 Fourier-向井変換

6.1 導入

滑らかな射影的代数多様体の連接層の導来圏の間に, Fourier 変換の類似物である関手 Fourier-向井変換を構成します. よく FMT と略記されるのを見かけるので, このメモでも用います.

6.2 表記

この章全体を通して, 特に断りのない限り X,Y を滑らかな射影的代数多様体, $\pi_1 : X \times Y \to X$ および $\pi_2 : X \times Y \to Y$ を自然な射影とする. また, X に対し, $Coh(X)$ で X 上の連接層のなす圏, $D^b(X)$ で $Coh(X)$ の有界な導来圏を表す. 関手 ϕ が誘導する右導来関手を $\mathbf{R}\phi$, 左導来関手を $\mathbf{L}\phi$, 導来テンソル積を $\otimes^{\mathbf{L}}$ で表す.

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

6.3 定義、例、性質

定義 6.3.1. $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$ とする. $\mathcal{P}$ が誘導する **Fourier-向井変換 (Fourier-Mukai transform)** とは, 三角関手,

$$\Phi_{\mathcal{P}} : D^b(X) \longrightarrow D^b(Y) \quad , \quad \mathcal{E}^{\bullet} \mapsto \mathbf{R}\pi_{Y*}(\mathcal{P} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{L}\pi_X{}^*(\mathcal{E}^{\bullet}))$$

のことをいう. $\mathcal{P}$ を **Fourier-向井核 (Fourier-Mukai kernel)** という.

$$\begin{tikzcd} & D^b(X \times Y) \arrow[r, "\mathcal{P}\otimes^{\mathbf{L}}()"] & D^b(X \times Y) \arrow[dr, "\mathbf{R}\pi_{2*}"] & \\ D^b(X) \arrow[ur, "\mathbf{L}\pi_1^*"] & & & D^b(Y) \end{tikzcd}$$

注意 6.3.2. π_1 は平坦なので, $\mathbf{L}\pi_1^*$ は通常の層の引き戻し π_1^* と同一視することができる. ($\because$ $X \times Y$ は代数閉体 k 上非特異かつ π_1 は全射有限型であり, したがって平坦 ([3]3.9 Exercise 9,3(a)).) また, $\mathcal{P}$ が局所自由層からなる複体であるとき, 導来テンソル $\mathcal{P} \otimes^{\mathbf{L}} ()$ は通常の層のテンソル積 $\mathcal{P} \otimes ()$ と同一視することができる (Chapter 3.3 参照).

$\Phi_{\mathcal{P}}$ が圏同値であるとき, X と Y は **Fourier-向井パートナー (Fourier-Mukai partnars)**,(FM partnars と略記) と呼ばれる. $\Phi_{\mathcal{P}}$ が圏同値でないとき, $\mathcal{P}$ が誘導する逆向きの FMT $\Phi_{\mathcal{P}} : D^b(Y) \longrightarrow D^b(X)$ との混乱を避けるため, $\Phi_{\mathcal{P}}^{X \to Y}$ などと方向を明示することもある. FMT は 3 つの完全関手, $\mathbf{L}\pi_X^*$, $\mathbf{R}\pi_{Y*}$, $\mathcal{P} \otimes^{\mathbf{L}} (-)$ の合成であり, FMT それ自体も完全関手となる.

FMT の例を述べる前に, **射影公式 (projection formula)** について述べておく.

補題 6.3.3 (projection formula)**.** $f : X \to Y$ を射影的代数多様体の固有射とする. このとき, $\mathcal{E}^\bullet \in D^b(X)$ および $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(Y)$ に対して,

$$\mathbf{R}f_*(\mathcal{E}^\bullet) \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{F}^\bullet \cong \mathbf{R}f_*(\mathcal{E}^\bullet \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{L}f^*(\mathcal{F}^\bullet)) \tag{1}$$

が成立する.

証明. (Section3.3 Compatibilities) 参照. □

注意 6.3.4. 上述の射影公式は通常の層の射影公式の導来関手版となっている. すなわち, 環付き空間の射 $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ と $\mathcal{O}_X$-加群層 $\mathcal{E}$ および Y 上の局所自由層 $\mathcal{F}$ に対し, $f_*\mathcal{F} \otimes \mathcal{E} \cong f_*(\mathcal{F} \otimes f^*(\mathcal{E}))$ が成立する, という結果の拡張である. ([3]2.5 Exercise 5.1(d))

注意 6.3.5. 射影的射は特に固有射である ([3] Ch2.4 Theorem4.8). したがって, ここで主に考察する射影的代数多様体の間の射については, 補題 6.3.3 の仮定を満たす.

Fourier-Mukai transform の例を考察する. 本書の記述に合わせ, 記号が煩雑になることを避ける目的で, 以降は $\mathbf{R}$,$\mathbf{L}$ は略記し, $\otimes^{\mathbf{L}}$ については $\otimes$ の表記を用いる.

例 6.3.6. 恒等関手,

$$id : D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(X)$$

は, 対角成分 $\Delta \subset X \times X$ の構造層 $\mathcal{O}_\Delta$ を核とした FMT: $\Phi_{\mathcal{O}_\Delta}$ と同型. 実際, 自然な同型 $X \cong \Delta$ による埋め込みを $\iota : X \xrightarrow{\sim} \Delta \subset X \times X$, $\pi_1, \pi_2 : X \times X \to X$ をそれぞれ第一, 第二成分への自然な射影とするとき,

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{O}_\Delta}(\mathcal{F}^\bullet) &= \pi_{1*}(\mathcal{O}_\Delta \otimes \pi_2^*(\mathcal{F}^\bullet)) \\
&\cong \pi_{1*}(\iota_*\mathcal{O}_X \otimes \pi_2^*(\mathcal{F}^\bullet)) && ,(\iota_*\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_\Delta) \\
&\cong \pi_{1*}(\iota_*(\mathcal{O}_X \otimes \iota^*\pi_2^*(\mathcal{F}^\bullet)) && ,(\text{projection formula}) \\
&\cong (\pi_1 \circ \iota)_*(\pi_2 \circ \iota)^*(\mathcal{F}^\bullet) \\
&\cong \mathcal{F}^\bullet && ,(\pi_1 \circ \iota = \pi_2 \circ \iota = id).
\end{aligned}$$

が成立する.

例 6.3.7. 射 $f : X \to Y$ に対するグラフ射 $\Gamma : X \to \Gamma_f \subset X \times Y$ は,$\mathcal{O}_\Gamma$ を核とする $\Phi_{\mathcal{O}_\Gamma}$ を誘導する.

例 6.3.8. 再び対角埋め込み $\iota : X \xrightarrow{\sim} \Delta \subset X \times X$ を考える. $\mathcal{L}$ を X 上の直線束とする. 対応 $\mathcal{F}^\bullet \mapsto \mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{L}$ による自己同値 $D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(X)$ は, $\iota_*\mathcal{L}$ を核とする $\Phi_{\iota_*L} : D^b(X) \to D^b(X)$ と同型.

例 6.3.9. 対角埋め込み $\iota : X \xrightarrow{\sim} \Delta \subset X \times X$ を考える．シフト関手 $T : D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(X)$ は $\mathcal{O}_\Delta[1]$ を核にもつ Fourier-Mukai transform $\Phi_{\mathcal{O}_\Delta[1]}$ と同型.

X の標準層 ω_X に対する Fourier-Mukai transorm の例を考察する前に, 連接層の導来圏における Serre 関手について思い出しておく.(Definition1.28 および Definition 3.11)

定義 6.3.10 (Serre functor)**.** X を滑らかな n 次元射影的代数多様体とする．**Serre 関手 (Serre functor)** とは, 関手の合成,

$$D^*(X) \xrightarrow{\omega_X \otimes (-)} D^*(X) \xrightarrow{[n]} D^*(X)$$

のことをいい, S_X と表す．ここで, $* = +, -, b$, 右辺の $[n]$ はシフト関手である.

注意 6.3.11. シフト関手は三角圏の圏同値を与える関手であり, 特に完全関手である (Chapter1)．また上記の状況では, ω_X は局所自由層であり, $\omega_X \otimes (-)$ も三角圏の完全関手．したがって, その合成 S_X は完全関手となる.

例 6.3.12. ω_X^l を標準層 ω_X の l 回テンソルとする．対角埋め込み $\iota : X \xrightarrow{\sim} \Delta \subset X \times X$ に対し,

$$\Phi_{\iota_* \omega_X^l} \cong S_X^l[-nl]$$

が成立する．ここで, S_X^l は Serre 関手 S_X の l 回合成である．実際, 例 6.3.6 と同様にして,

$$\begin{array}{rcll}
\Phi_{\iota_* \omega_X^l}(\mathcal{E}^\bullet) & = & \pi_{1*}(\iota_* \omega_X^l \otimes \pi_2^*(\mathcal{E}^\bullet)) & \\
& \cong & \pi_{1*}(\iota_*(\omega_X^l \otimes \iota^* \pi_2^*(\mathcal{E}^\bullet)) & ,(\text{projection formula}) \\
& \cong & (\pi_1 \circ \iota)_* (\pi_2 \circ \iota)^* (\omega_X^l \otimes \mathcal{E}^\bullet) & ,(\pi_1 \circ \iota = id = \pi_2 \circ \iota) \\
& \cong & \omega_X^l \otimes \mathcal{E}^\bullet & \\
& \cong & S_X^l[-nl](\mathcal{E}^\bullet) & .
\end{array}$$

が分かる.

例 6.3.13. $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$ を X 上平坦と仮定する (i.e. 任意の $p \in X \times Y$ に対し stalk $\mathcal{P}_p$ が平坦 $\mathcal{O}_{X,\pi_1(p)}$-加群層)．$x \in X$ を閉点で, $k(x) \cong k$ が成立するものとする．このとき,

$$\Phi_{\mathcal{P}}(k(x)) \cong \mathcal{P}_x$$

が成立する．ここで, $\mathcal{P}_x := \mathcal{P}|_{\{x\} \times Y}$ であり, 自然な射影 π_2 の制限 $\pi_2|_{\{x\} \times Y} : \{x\} \times Y \to Y$ により Y 上の層とみなす.

注意 6.3.14. $\mathcal{F} \in Coh(X)$ が X 上平坦であることと, $\mathcal{F}$ は局所自由層であることは同値である ([3]Ch3.9 Prop9.2(e))．$\mathcal{P}$ の作り方から, 各 i に対し $\mathcal{P}^i$ は連接層であり, $\mathcal{P}$ は X 上平坦という仮定から, $\mathcal{P}$ は局所自由層からなる複体ということがわかる.

次の例は, 小平スペンサー写像との可換性です. 小平スペンサー写像については, [3]Chapter3.9 例 9.8.3 および章末の纏めを参照.

例 6.3.15. $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$ を X 上平坦と仮定する. ([3] Chapter3.9) の議論によって, 各 $\mathcal{P}_x$ は**付随点 (associated point)** $x_0 \in X$ での stalk $\mathcal{P}_{x_0}$ の**変形 (deformation)** と思うことができる. 簡単のため, $k(x_0) \cong k$ が成立するとする. x_0 での接ベクトルを v は, x_0 に集中する長さ 2 の閉部分スキーム Z_v によって定まる (章末参照). 完全列,

$$0 \longrightarrow k(x_0) \longrightarrow \mathcal{O}_{Z_v} \longrightarrow k(x_0) \longrightarrow 0$$

を π_1 で引き戻し, $\mathcal{P}$ をテンソルすることで完全列,

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}_{x_0} \longrightarrow \mathcal{P}|_{Z_v \times Y} \longrightarrow \mathcal{P}_{x_0} \longrightarrow 0$$

を得る ($\mathcal{P}$ は X 上平坦であったので, テンソル操作で完全列を保つ). これを Y 上の完全列と見る (i.e. π_{2*} で押し出す) ことで $\mathrm{Ext}^1_Y(\mathcal{P}_{x_0}, \mathcal{P}_{x_0})$ を得る. したがって,

$$\kappa(x_0) : T_{X,x_0} \cong \mathrm{Ext}^1_X(k(x), k(x)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_Y(\mathcal{P}_{x_0}, \mathcal{P}_{x_0})$$

を得る. これを小平スペンサー写像という. 補題 6.3.16 より以下の可換図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
T_{X,x_0} \cong \mathrm{Ext}^1_X(k(x), k(x)) \arrow[r, "\kappa(x_0)"] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1_Y(\mathcal{P}_{x_0}, \mathcal{P}_{x_0}) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{D^b(X)}(k(x), k(x)[1]) \arrow[r, "\Phi_{\mathcal{P}}"'] & \mathrm{Hom}_{D^b(Y)}(\mathcal{P}_{x_0}, \mathcal{P}_{x_0}[1]).
\end{tikzcd}$$

補題 6.3.16. $\mathcal{A}$ を十分単射的対象を持つ Abel 圏, $A, B \in \mathcal{A}$ とする. このとき自然な同型,

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(A, B) \cong \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(A, B[i])$$

が存在する. ここで A, B を, 次数 0 の位置に A, B, それ以外は 0 の複体として自然と $D^b(\mathcal{A})$ の対象とみなす.

証明. □

注意 6.3.17. 一般に, Fourier-Mukai trasnform と serre 関手の可換性 (Lemma 1.30) は必ずしも成立しない. 実際, ———

注意 6.3.18. 滑らかな代数多様体 X と $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(X)$ に対し, 導来双対 $\mathcal{F}^{\bullet\vee}$ を $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{O}_X)$ と定める. X が滑らかであるとき, (Chapter3.3) より任意の $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(X)$ に対し $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{O}_X)$ は $D^b(X)$ の対象となる. また, $\mathcal{F}^\bullet$ が局所自由層からなる複体の場合, 通常の $\mathcal{H}om$ 層の鎖,

$$\cdots \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}^{i-1}, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}^{i}, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}^{i+1}, \mathcal{O}_X) \to \cdots$$

と一致する.

定義 6.3.19. 任意の対象 $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$ に対して,

$$\mathcal{P}_R := \mathcal{P}^\vee \otimes^{\mathbf{L}} p^*\omega_Y[\dim Y]\ ,\quad \mathcal{P}_L := \mathcal{P}^\vee \otimes^{\mathbf{L}} q^*\omega_X[\dim X]$$

と定義する．ここで, $\mathcal{P}^\vee$ は $\mathcal{P}$ の導来双対である (Section 3.3 参照).

命題 6.3.20 (Mukai)**.** $F := \Phi_{\mathcal{P}} : D^b(X) \to D^b(Y)$ を, $\mathcal{P}$ を *Fourier-Mukai kernel* とした *Fourier-Mukai transform* とする．このとき,

$$G := \Phi_{\mathcal{P}_L} : D^b(Y) \longrightarrow D^b(X)\ ,\quad H := \Phi_{\mathcal{P}_R} : D^b(Y) \longrightarrow D^b(X)$$

はそれぞれ $\Phi_{\mathcal{P}}$ の左随伴, 右随伴を与える.

証明. $\mathcal{E}^\bullet \in D^b(X), \mathcal{F}^\bullet \in D^b(Y)$ とする．すると,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{D^b(X)}(G(\mathcal{F}^\bullet), \mathcal{E}^\bullet) &= \mathrm{Hom}_{D^b(X)}(q_*(\mathcal{P}_L \otimes p^*\mathcal{F}^\bullet), \mathcal{E}^\bullet)) \\
&= \mathrm{Hom}_{D^b(X\times Y)}(\mathcal{P}_L \otimes p^*\mathcal{F}^\bullet, q^*\mathcal{E}^\bullet \otimes p^*\omega_Y[\dim\, Y])) && ,(\text{定理 } 6.3.21) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{D^b(X\times Y)}(\mathcal{P}^\vee \otimes p^*\mathcal{F}^\bullet, q^*\mathcal{E}^\bullet) && ,() \\
&\cong \mathrm{Hom}_{D^b(X\times Y)}(p^*\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{P} \otimes q^*\mathcal{E}^\bullet) && ,(\text{補題 } 6.3.22(2)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{D^b(Y)}(\mathcal{F}^\bullet, p_*(\mathcal{P} \otimes q^*\mathcal{E}^\bullet)) && ,(p^* \dashv p_*) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{D^b(Y)}(\mathcal{F}^\bullet, F(\mathcal{E}^\bullet)).
\end{aligned}$$

が成立する．H については同様に,

とちゅう

が成立する. □

定理 6.3.21 (Grothendieck-Verdier duality)**.** $f : X \to Y$ を滑らかな準射影的代数多様体の間の射影的射とする．このとき $\mathcal{E}^\bullet \in D^b(X)$ および $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(Y)$ に対し次の同型が存在する:

$$\mathbf{R}f_*\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}^\bullet, \mathbf{L}f^*\mathcal{F}^\bullet \otimes \omega_f[\dim(f)]) \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathbf{R}f_*\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet)$$

ここで, $\omega_f := \omega_X \otimes f^*\omega_Y^{-1}$, $\dim(f) := \dim\, X - \dim Y$ である.

証明. ——参照. □

補題 6.3.22. X を滑らかな射影的代数多様体とする．このとき, $\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet \in D^b(X)$ に対して以下が成立する.

(i) $\mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathcal{E}^\bullet \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathcal{E}^\bullet, \mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet))$
(ii) $\mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{G}^\bullet) \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet), \mathcal{G}^\bullet)$
(iii) $\mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet) \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{G}^\bullet \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{G}^\bullet)$

証明. ((Chapter3.3 Compatibilities) 参照. □

7 コホモロジー的 Fourier-向井変換

7.1 導入

7.2 表記

この節では, $\mathbb{C}$ 上の代数多様体を考える. Serre の GAGA によって (*Complex Manifold* の意味での) 複素多様体と同一視できることは断りなく用いる (GAGA の詳細は——-参照). 代数多様体 X に対して $Coh(X)$ で連接層のなす圏, $D^b(X)$ で連接層の導来圏を表す. また, 層の順像 f_* が誘導する右導来関手 $\mathbf{R}f_*$ および逆像 f^* が誘導する左導来関手 $\mathbf{L}f^*$ については, 対象が局所自由層の場合, 通常の f_* および f^* と同一視可能であるため, 断りのない限り $\mathbf{R}, \mathbf{L}$ を省略する.

7.3 Grothendieck 群

定義 7.3.1. $\mathcal{F}^\bullet$ を X 上の連接層がなす複体とする. X の Grothendieck 群 $K(X)$ を以下のとおり構成する:

(i) 各 $\mathcal{F}^i$ の同型類を $[\mathcal{F}^i]$ とし, $[\mathcal{F}^\bullet] := \sum_i (-1)^i [\mathcal{F}^i]$ と定める.

(ii) (上原＼戸田でのていぎをかくにん！！！)

注意 7.3.2. $K(X)$ の定義より, 任意の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^0 \longrightarrow \mathcal{E}^1 \longrightarrow \mathcal{E}^2 \longrightarrow 0$$

に対し, $[\mathcal{E}^1] = [\mathcal{E}^0] + [\mathcal{E}^2]$ が成立する. X を滑らかな多様体とするとき, その上の任意の連接層 $\mathcal{F} \in Coh(X)$ は有限の局所自由分解を持つ. したがって, $K(X)$ では

$$[\mathcal{F}^\bullet] = \sum_i (-1)^i [\mathcal{E}^i]$$

と表すことができる.

命題 7.3.3. X を滑らかな代数多様体とする. このとき, $K(X)$ は以下の積によって環構造をもつ.

$$[\mathcal{E}_1] \cdot [\mathcal{E}_2] = [\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2].$$

ここで, 乗法単位元は自明な可逆層 $\mathcal{O}_X$ である.

証明. 群構造, および乗法単位元については上で触れたとおりなので, 分配法則のみを確認する. 局所自由層のテンソルおよび直和の公式より,

$$\begin{aligned}[\mathcal{E}_1] \cdot ([\mathcal{E}_2] + [\mathcal{E}_3]) &= [\mathcal{E}_1] \otimes ([\mathcal{E}_2] \oplus [\mathcal{E}_3]) \\ &\cong ([\mathcal{E}_1] \otimes [\mathcal{E}_2]) \oplus ([\mathcal{E}_1] \otimes [\mathcal{E}_3])\end{aligned}$$

が成立するのでよい. □

7.4 連接層の導来圏との対応

X 上の連接層の導来圏 $D^b(X)$ と Grothendieck 群 $K(X)$ を対応付ける事を考える．前節で定めたように $D^b(X)$ から $K(X)$ への射を,

$$[\ ] : D^b(X) \longrightarrow K(X) \quad , \qquad \mathcal{F}^\bullet \ \mapsto \ [\mathcal{F}^\bullet] = \sum_i (-1)^i [\mathcal{F}^i]$$

と定義する．

命題 7.4.1. $D^b(X)$ のシフト関手を $[k]$ とするとき,

$$[\mathcal{F}^\bullet[k]] = (-1)^k [\mathcal{F}^\bullet]$$

が成立する．

証明. 以下の計算による．

$$[\mathcal{F}^\bullet[k]] = (-1)^{i+k} [\mathcal{F}^{i+k}] = (-1)^k [\mathcal{F}^\bullet]$$

□

命題 7.4.2. $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(X)$ に対して, $[\mathcal{F}^\bullet] \in K(X)$ を考える．このとき,

$$[\mathcal{F}^\bullet] \cong \sum_i (-1)^i (\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet)))$$

が成立する．

証明.

□

$f : X \to Y$ を代数多様体の射とする．$\mathcal{F} \in Coh(Y)$ に対し逆像を対応させる対応 $\mathcal{F} \mapsto f^*\mathcal{F}$ を, Grothendieck 群の中で $f^*[\mathcal{F}^\bullet] \ := \ [f^*\mathcal{F}^\bullet] = \sum (-1)^i [f^*\mathcal{F}^i]$ と定めることで, それぞれの Grothendieck 群の間の準同型写像 $f^* : K(Y) \to K(X)$ が定まる．また, $\mathcal{F} \in Coh(X)$ に対し,

$$f_![\mathcal{F}] \ := \ \sum_i (-1)^i [R^i f_*(\mathcal{F})]$$

と定義する．(高次順像によって $\mathcal{F}$ の連接性を失わないために, f には固有射という条件を課す必要がある．f が射影的射であれば f は固有である．) これにより準同型写像 $f_! : K(X) \to K(Y)$ が定まる．

命題 7.4.3. 以下の 2 図式は可換である．

$$\begin{array}{ccc} D^b(Y) & \xrightarrow{f^*} & D^b(X) \\ {\scriptstyle [\ ]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [\ ]} \\ K(Y) & \xrightarrow{f^*} & K(X) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} D^b(X) & \xrightarrow{f_*} & D^b(Y) \\ {\scriptstyle [\ ]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [\ ]} \\ K(X) & \xrightarrow{f_!} & K(Y) \end{array}$$

証明. 左側の図式は上で説明した通り,$f^* : K(Y) \to K(X)$ の定め方より明らか. 右側の可換性を示す. $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(X)$ とし $[Rf^*\mathcal{F}^\bullet] = f_![\mathcal{F}^\bullet]$ であることを確認する. 定義より,

$$[Rf^*\mathcal{F}^\bullet] = \sum(-1)^i[R^i f_*\mathcal{F}^\bullet]$$

および,

$$f_![\mathcal{F}^\bullet] = f_![\sum(-1)^j\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet)] = \sum_i(-1)^i\sum_j(-1)^j[R^j f_*\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet)]$$

である. Leray Spectral Sequence,

$$E_2^{p,q} = R^p f_*\mathcal{H}^q(\mathcal{F}^\bullet) \Rightarrow E^{p+q} = R^{p+q}f_*\mathcal{F}^\bullet$$

を用いることで, 任意の $r \geq 2$ に対し,

$$\sum_i(-1)^i[E_r^{p+ir,q-ir+r}] = \sum_i(-1)^i[E_{r+1}^{p+ir,q-ir+r}]$$

を得る. したがって,

$$\sum_p\sum_q(-1)^{p+q}[E_r^{p+q}] = \sum_p\sum_q(-1)^{p+q}[E_{r+1}^{p+q}]$$

を得る.
(........ 途中)

$\square$

この可換図式を用いて, Fourier-Mukai Transform $\Phi_{\mathcal{P}} : D^b(X) \to D^b(Y)$ を可換にするような $K(X), K(Y)$ 間の対応を構成できるかどうかを考えたい. これは以下のように構成が可能である:

射影的代数多様体の直積 $X \times Y$ に対応する Grothendieck 群 $K(X \times Y)$ を考え, 適当な $e \in K(X \times Y)$ をとり,

$$\Phi_e : K(X) \longrightarrow K(Y)\ , \qquad [\mathcal{F}^\bullet] \mapsto p_!(e \otimes q^*[\mathcal{F}^\bullet])$$

と定義すればよい. 実際, 上の可換図式を用いることで,

$$\begin{array}{ccc}
D^b(X) & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{P}}} & D^b(Y) \\
{\scriptstyle [\ ]}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle [\ ]} \\
K(X) & \xrightarrow{\Phi_{[\mathcal{P}]}} & K(Y)
\end{array}$$

が可換となる.

注意 7.4.4. 上の FMT の可換性については, e に対応する Fourier-Mukai kernel $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$ の存在性を必要としない. 実際, 完全関手 $F : D^b(X) \longrightarrow D^b(Y)$ が誘導する群準同型 $F_G : K(X) \longrightarrow K(Y)$ は射影 $[\ ] : D^b \longrightarrow K$ と可換である.

問題 7.4.5. 上の主張を確認せよ.

7.5　コホモロジー的 Fourier-向井変換

後に例を述べるように, 多くの場合 Fourier-Mukai Transform $\Phi_{\mathcal{P}} : D^b(X) \to D^b(Y)$ はコホモロジーの次数を保たない．この状況の解決策として, 前節で定義した Grothendieck 群に対する *K-theoretic* な Fourier-Mukai Transform $\Phi_e : K(X) \to K(Y)$ をさらに降下させ, 有理係数コホモロジー上の Fourier-Mukai Transform : $H^*(X,\mathbb{Q}) \to H^*(Y,\mathbb{Q})$ を考えようというものがある．すなわち図式,

$$\begin{array}{ccc} D^b(X) & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{P}}} & D^b(Y) \\ {\scriptstyle [\,]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [\,]} \\ K(X) & \xrightarrow{\Phi_{[\mathcal{P}]}} & K(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(X,\mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^*(Y,\mathbb{Q}) \end{array}$$

を可換とするような下段のカルテジアンを構成するのである．有理係数コホモロジー $H^*(X,\mathbb{Q})$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間であり, さらに自然な環構造も備えていたのであった．$\alpha,\beta \in H^*(X,\mathbb{Q})$ に対し, 積を $\alpha\beta$ で表す．また $f : X \to Y$ に誘導される環準同型,

$$f^* : H^*(Y,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(X,\mathbb{Q})$$

が定まる．冒頭にも述べたがここでの代数多様体は $\mathbb{C}$ 上で定義されたものであり, Serre の GAGA により *Complex Manifold* と同一視できるということを再掲しておく．

補題 7.5.1 (Poicare Duality)**.** X を連結かつコンパクトな多様体と仮定する．このとき任意の i に対し以下の同型が存在する．

$$H^i(X,\mathbb{Q}) \cong H^{2dimX-i}(X,\mathbb{Q})^\vee$$

注意 7.5.2. 補題 7.5.1 によって $H^i(X,\mathbb{Q}) \cong H^{2dim(X)-i}(X,\mathbb{Q})^\vee$, $H^i(Y,\mathbb{Q}) \cong H^{2dim(X)-i}(Y,\mathbb{Q})^\vee$ をそれぞれ得る．これによりコホモロジー環の環準同型写像 f^* の双対写像,

$$f_* : H^*(X,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^{*+2\dim(Y)-2\dim(X)}(Y,\mathbb{Q})$$

が定まる．この定義より, projection formula $f_*(f^*\alpha\beta) = \alpha.f_*(\beta)$ が定まる．したがって $\alpha \in H^*(X \times Y,\mathbb{Q})$ は関手,

$$\Phi^H_\alpha : H^*(X,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(Y,\mathbb{Q}), \quad \beta \longmapsto p_*(\alpha.q^*\beta)$$

を誘導する．

次に K-group との対応を考える．そのためにまず Chern 指標を定義する．詳細については ([3] 付録 A) を参照のこと．

定義 7.5.3 (Chern Class)**.** 非特異代数多様体 X 上の階数 r の局所自由層 $\mathcal{E}$ および, 射影束 $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to X$ を考える．また $A(X)$ を X の Chow-ring とする．$\mathcal{E}$ の**第 i-Chern 類 (ith Chern Class)** とは, 各 $i \in 1,...,r$ に対し $c_i(\mathcal{E}) \subset A^i(X)$ であって,

(i) $c_0(\mathcal{E}) = 0$
(ii) $c_i(\mathcal{E}) = \{f_i \in A^i(X) \mid \sum_{i=0}^{r}(-1)^r\ (\pi^* f_i).\zeta^{r-i} = 0\}$

を満たすものをいう．ここで $1, \zeta, ..., \zeta^{r-1}$ は $A(\mathbb{P}(\mathcal{E})$ の自由 $A(X)$ 加群としての生成元である．

定義 7.5.4 (Chern Polynomial)**.** 非特異代数多様体 X 上の階数 r の局所自由層 $\mathcal{E}$ に対し，**Chern 多項式 (Chern Polynomial)** を，

$$c_t(\mathcal{E}) = c_0(\mathcal{E}) + c_2(\mathcal{E})t + ... + c_r(\mathcal{E})t^r$$

と定義する．ここで各 $c_i(\mathcal{E})$ は $\mathcal{E}$ の第 iChern 類を表す．

命題 7.5.5 (splitting principle)**.** 非特異代数多様体 X の任意の階数 r の局所自由層 $\mathcal{E}$ に対し，次を満たすような射 $f : X' \to X$ が存在する．

(i) $f^* : A(X) \longrightarrow A(X')$ が単射
(ii) $\mathcal{E}' := f^*\mathcal{E}$ が分裂する，すなわち局所自由層の降鎖

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}'_0 \supseteq \mathcal{E}'_1 ... \supseteq \mathcal{E}'_r = 0$$

であって，各商 $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i+1}$ が可逆層であるようなものが存在する．

証明. □

系 7.5.6. 分裂する $\mathcal{E}$ に対し，

$$c_t(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^{r} c_t(\mathcal{L}_i)$$

が成立する．ここで $\mathcal{L}_i$ を $\mathcal{E}$ の降鎖 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \supseteq \mathcal{E}_1 ... \supseteq \mathcal{E}_r = 0$ に対する i 番目の商 $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i+1}$ とおいた．

Chern 指標は一般的な局所自由層について定義も可能ですが，ここでは簡単のため本書の文脈に従って直線束についてのみ定義することとします．

定義 7.5.7 (Chern 指標)**.** X を n 次元非特異代数多様体，$\mathcal{L}$ を直線束とする．$\mathcal{L}$ の **Chern 指標 (Chern Character)** とは，

$$\mathrm{ch}(\mathcal{L}) = \exp(c_1(\mathcal{L})) = \sum_j \frac{c_1(\mathcal{L})^j}{j!}$$

をいう．ここで $c_1(\mathcal{L})$ は $\mathcal{L}$ の第 1Chern 類である．これにより特に，

$$\mathrm{ch} : K(X) \longrightarrow H^*(X, \mathbb{Q})$$

が定まる．

注意 7.5.8. 指数層系列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow 0$$

からコホモロジー長完全列を得ることができる．一方，$H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) \cong Pic(X)$ であることが示せる (例えば [4] 演習 6.3)．このとき，第 1Chern 類 c_1 は boundary map$H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$ の像と見ることができる．

上で定めた Chern 指標による K-gourp から有理数係数コホモロジーへの射では, K-theoretic な FMT と Cohomological な FMT は可換にはならない. しかし, 以下に示す Todd Class および Grothendieck-Riemann-Roch の定理を用いることでそれは可能となる.

定義 7.5.9 (Todd Class)**.** 直線束 $L \in Pic(X)$ に対し, **Todd 類 (Todd Class)** を,

$$\mathrm{td}(L) := \frac{c_1(L)}{1 - \exp(-c_1(L))}$$

と定める. 特に X が滑らかな代数多様体であるとき, tangent bundle $\mathcal{T}_X$ に対して $\mathrm{td}(X) := \mathrm{td}(\mathcal{T}_X)$ と書く.

定理 7.5.10 (Grothendieck-Riemann-Roch)**.** $f : X \to Y$ を射影的代数多様体の間の射影的射とする. このとき任意の $e \in K(X)$ に対して,

$$\mathrm{ch}(f_!(e)).\mathrm{td}(Y) = f_*(\mathrm{ch}(e).\mathrm{td}(X))$$

が成立する.

証明. □

定義 7.5.11 (Mukai Vector)**.** $e \in K(X)$ または $\mathcal{E}^\bullet \in D^b(X)$ に対する**向井ベクトル (Mukai Vector)** とは,

$$\nu(e) := \mathrm{ch}(e).\sqrt{\mathrm{td}(X)}, \quad \text{および} \quad \nu(\mathcal{E}^\bullet) := \mathrm{ch}(\mathcal{E}^\bullet).\sqrt{\mathrm{td}(X)}$$

をいう.

注意 7.5.12. $\sqrt{\mathrm{td}(X)}$ は $\mathrm{td}(X)$ の平方根のコホモロジー類であり, その存在は, $\sqrt{\mathrm{td}(X)}$ の次数 0 の部分は, $1 \in H^0(X, \mathbb{Q})$ に対応するという事実を使いベキ級数を計算することによって示すことができる. また定義より,

$$\nu : K(X) \longrightarrow H^*(X, \mathbb{Q})$$

は加法的である. 実際,

$$\begin{aligned} \nu(e+f) &= \mathrm{ch}(e+f).\sqrt{\mathrm{td}(X)} \\ &= \mathrm{ch}(e).\sqrt{\mathrm{td}(X)} + \mathrm{ch}(f).\sqrt{\mathrm{td}(X)} \qquad ,(\text{ベキ級数の分配律}) \\ &= \nu(e) + \nu(f) \end{aligned}$$

である.

系 7.5.13. $e \in K(X \times Y)$ とする. このとき, 任意の $f \in K(X)$ に対して,

$$\Phi^H_{\nu(e)}(\mathrm{ch}(f).\sqrt{\mathrm{td}(X)}) = \mathrm{ch}(\Phi^K_e(f)).\sqrt{\mathrm{td}(Y)}$$

が成立する. すなわち可換図式,

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \xrightarrow{\Phi^K_e} & K(Y) \\ {\scriptstyle\nu}\downarrow & & {\scriptstyle\nu}\downarrow \\ H^*(X,\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\Phi^H_{\nu(e)}} & H^*(Y,\mathbb{Q}) \end{array}$$

が存在する.

証明. 以下の図式が可換であることを示せばよい.

$$\begin{array}{ccccccc}
K(X) & \xrightarrow{q^*} & K(X\times Y) & \xrightarrow{.e} & K(X\times Y) & \xrightarrow{p_!} & K(Y) \\
\downarrow{\scriptstyle \nu} & & \downarrow{\scriptstyle \nu\sqrt{\mathrm{td}(Y)}^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \nu\sqrt{\mathrm{td}(X)}} & & \downarrow{\scriptstyle \nu} \\
H^*(X,\mathbb{Q}) & \xrightarrow{q^*} & H^*(X\times Y,\mathbb{Q}) & \xrightarrow{.\nu(e)} & H^*(X\times Y,\mathbb{Q}) & \xrightarrow{p_*} & H^*(Y,\mathbb{Q})
\end{array}.$$

右側の図式の可換性は, 定理 7.5.10 より従う. 左側の可換性については, ch と q^* の可換性 ([3] 付録 A 参照) と Projection　Formula を使うことによって示せる (TODO).

$$\begin{aligned}
\nu\sqrt{\mathrm{td}(Y)}^{-1}(q^*(f)) &= \mathrm{ch}(q^*(f)).\sqrt{\mathrm{td}(X\times Y)}.\sqrt{\mathrm{td}(Y)}^{-1} \\
&= ....
\end{aligned}$$

□

定義 7.5.14 (Cohomological Fourier-Mukai transform)**.** $\mathcal{P}\in D^b(X\times Y)$ とする.

$$\Phi^H_{\mathcal{P}}: H^*(X,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(Y,\mathbb{Q}), \qquad \alpha \longmapsto p_*(\nu(\mathcal{P}).q^*\alpha)$$

を, cohomological Fourier-Mukai transform という.

注意 7.5.15. ch,td が偶数ならば (???), $\Phi^H_{\mathcal{P}}$ はコホモロジーの次数の偶奇を保つ. すなわち,

$$\Phi^H_{\mathcal{P}}(H^{even}(X,\mathbb{Q}))\subset H^{even}(Y,\mathbb{Q}), \qquad \Phi^H_{\mathcal{P}}(H^{odd}(X,\mathbb{Q}))\subset H^{odd}(Y,\mathbb{Q})$$

が成り立つ.

補題 7.5.16. Fourier-Mukai transform $\Phi_{\mathcal{P}}: D^b(X)\longrightarrow D^b(Y)$, $\Phi_{\mathcal{Q}}: D^b(Y)\longrightarrow D^b(Z)$ およびその合成 $\Phi_{\mathcal{R}}: D^b(X)\longrightarrow D^b(Z)$ に誘導される Cohomological Fourier-Mukai transform $\Phi^H_{\mathcal{P}},\Phi^H_{\mathcal{Q}},\Phi^H_{\mathcal{R}}$ について,

$$\Phi^H_{\mathcal{R}} = \Phi^H_{\mathcal{Q}}\circ\Phi^H_{\mathcal{P}}$$

が成立する.

証明. □

注意 7.5.17. Mukai Vector $\nu: K(-)\longrightarrow H^*(-)$ については, 特殊な代数多様体を除き全射とはならない. その像は $H^*(-)$ に比べて非常に小さいことがほとんどだからである.

命題 7.5.18. 圏同値 $\Phi_{\mathcal{P}}: D^b(X)\xrightarrow{\sim} D^b(Y)$ に誘導される $\Phi^H_{\mathcal{P}}: H^*(X,\mathbb{Q})\longrightarrow H^*(Y,\mathbb{Q})$ は $\mathbb{Q}$-vector space の全単射である.

証明. $\Phi_{\mathcal{P}}$ は右随伴 $\Phi_{\mathcal{P}_R} := \Phi_{\mathcal{P}^\vee\otimes^{\mathbf{L}} p^*\omega_Y[\dim Y]}$ を持っていたことを思い出そう (命題 6.3.20). よって証明すべきことは, $\Phi_{\mathcal{P}_R}$ に誘導される $\Phi^H_{\mathcal{P}_R}$ が, $\Phi^H_{\mathcal{P}}\circ\Phi^H_{\mathcal{P}_R} = \Phi^H_{\mathcal{P}_R}\circ\Phi^H_{\mathcal{P}} = id$ を満たすことである.

仮定より以下が成立する.

$$\Phi_{\mathcal{P}}\circ\Phi_{\mathcal{P}_R} = id \cong \Phi_{\mathcal{O}_\Delta}, \qquad \Phi_{\mathcal{P}_R}\circ\Phi_{\mathcal{P}} = id\cong\Phi_{\mathcal{O}_\Delta},$$

ここで $\mathcal{O}_\Delta$ は恒等関手の FM kernel である (例 6.3.6). したがって補題 7.5.16 より,

$$\Phi^H_{\mathcal{P}}\circ\Phi^H_{\mathcal{P}_R}\cong\Phi^H_{\mathcal{O}_\Delta}, \qquad \Phi^H_{\mathcal{P}_R}\circ\Phi^H_{\mathcal{P}}\cong\Phi^H_{\mathcal{O}_\Delta}$$

が成立する．これより $\Phi^H_{\mathcal{O}_\Delta} \cong id$ を示せばよい．$\iota : X \xrightarrow{\sim} \Delta \subset X \times X$ を対角埋め込みとする．定理 7.5.10 を ι に用いると,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(\mathcal{O}_\Delta).\mathrm{td}(X \times X) &\cong \mathrm{ch}(\iota_*\mathcal{O}_X).\mathrm{td}(X \times X) && ,(\iota_*\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_\Delta) \\
&\cong \iota_*(\mathrm{ch}(\mathcal{O}_X).\mathrm{td}(X)) && ,(\text{Grothendieck-Riemann-Roch}) \\
&\cong \iota_*\mathrm{td}(X) && ,(\mathrm{ch}(\mathcal{O}_X) = 1)
\end{aligned}$$

を得る．この式を $\sqrt{\mathrm{td}(X \times X)}$ で割る (つまり $\sqrt{\mathrm{td}(X \times X)}^{-1}$ を掛ける) ことにより,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(\mathcal{O}_\Delta).\sqrt{\mathrm{td}(X \times X)} &\cong \iota_*\mathrm{td}(X).\sqrt{\mathrm{td}(X \times X)}^{-1} && ,() \\
&\cong \iota_*(\mathrm{td}(X).\iota^*\sqrt{\mathrm{td}(X \times X)}^{-1}) && ,(\text{projection formula}) \\
&\cong \iota_*(\mathrm{td}(X).\mathrm{td}(X)^{-1}) && ,(\iota^*\sqrt{\mathrm{td}(X \times X)} \cong \mathrm{td}(X)) \\
&= \iota_*(1)
\end{aligned}$$

を得る．したがって,

$$\begin{aligned}
\Phi^H_{\mathcal{O}_\Delta}(\beta) &= p_*(q^*(\beta).\mathrm{ch}(\mathcal{O}_\Delta).\sqrt{\mathrm{td}(X \times X)}) \\
&\cong p_*(q^*(\beta).\iota_*(1)) \\
&\cong p_*(\iota_*(\iota^*q^*(\beta))) && ,(\text{projection formula}) \\
&\cong (p \circ \iota)_*(q \circ \iota)^*(\beta) \ = \ \beta && ,(p \circ \iota = id = q \circ \iota)
\end{aligned}$$

が成立し，$\Phi^H_{\mathcal{O}_\Delta} \cong id$ が示された． □

問題 7.5.19. $\nu(\mathcal{O}_\Delta) \cong [\mathcal{O}_\Delta]$ を示せ．

8　例外対象と球面対象

8.1　球面対象

この節では, k は標数 0 とは限らない一般の体とし, その上の射影的代数多様体 X を考察する. $p, q : X \times X \to X$ をそれぞれの成分への自然な射影とする.

定義 8.1.1. $\mathcal{E}^\bullet \in D^b(X)$ が球面対象であるとは, 以下の 2 条件を満たすことをいう.

(i) $\mathcal{E}^\bullet \otimes \omega_X \cong \mathcal{E}^\bullet$

(ii) $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet[i]) = \begin{cases} k, & (i = 0 \text{ or } \dim(X)) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases}$

注意 8.1.2. 球面対象という名前の由来は, 2 つ目の条件である $\mathrm{Hom}_{D^b(X)}(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet[*])$ が以下の表示をもつことによる:

$$\mathrm{Hom}_{D^b(X)}(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet[*]) \cong \mathrm{Ext}^*(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet) \cong H^*(S^n, k)$$

ここに, S^n は $n := \dim(X)$ 次元の実球面である.

注意 8.1.3. Serre 双対と一つ目の条件によって, $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet \otimes \omega_X[\dim(X)])^\vee \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet[\dim(X)])^\vee$ を得る.

問題 8.1.4. 球面対象 $\mathcal{E}^\bullet \in D^b(X)$ に対し, その導来双対 $\mathcal{E}^{\bullet\vee}$, シフト $\mathcal{E}^\bullet[i]$ $(i \in \mathbb{Z})$, 直線束とのテンソル $\mathcal{E}^\bullet \otimes \mathcal{L}$ $(\mathcal{L} \in \mathrm{Pic(X)})$ は再び球面対象となることを示せ.

証明. (i)

(ii)

(iii)

□

球面対象に対する FMT を定義する準備として, 局所自由層のトレースとその導来圏版の操作について思い出しておく.

注意 8.1.5. $\mathcal{E}$ を X 上の有限階数の局所自由層, U を $x \in X$ での $\mathcal{E}$ の局所自明化に対応する開集合とする (もちろん x によって開集合は異なるが U と表記する). このとき, $\mathcal{E}$ の局所自明化 $\mathcal{E}|_U \cong \mathcal{O}_X(U)^n := \mathcal{O}_X(U)^{\oplus n}, n < \infty$ に対して, その自己準同型写像の表現行列のトレースを取る写像,

$$tr|_U : \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{E})|_U \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{O}_X(U)^n, \mathcal{O}_X(U)^n) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U), \quad A_n \mapsto \sum_{i=1}^n a_{ii}, \ \ (a_{ii} \in A_n)$$

が定まる．ここで A_n は $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{O}_X(U)^n, \mathcal{O}_X(U)^n)$ に対する表現行列, $a_{ii} \in A_n$, $(i = 1, ..., n)$ はその対角成分である．

このことを踏まえ, 局所自由層のトレースを以下のように定義する．

定義 8.1.6. X 上の有限階数の局所自由層 $\mathcal{E}$ の**トレース (trace map)** とは, $\mathcal{E}$ の局所自明化に対して行列のトレースが定まっているような層の準同型写像,

$$tr : \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

をいう．

補題 8.1.7 ([3]**Ch2.5 Exercise5.1(b)).** $(X, \mathcal{O}_X)$ を環付き空間, $\mathcal{E}$ を有限階数の局所自由層とする．このとき, 任意の $\mathcal{O}_X$-加群層 $\mathcal{F}$ に対して,

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{E}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$$

が成立する．ここで, $\mathcal{E}^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$ である．

証明. (怪しいです) 示すべきは, (1): 層の準同型写像 $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が存在すること, (2):(1) が同型であることである．(1) を示す．写像 $\phi : \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を, $e^\vee \otimes f \mapsto \{e \mapsto e^\vee(e) f\}$ と定義する．$e^\vee \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$ は層の準同型写像であり制限写像 ρ と可換である．また, テンソル積の可換性がある (—参照). したがって, 任意の開集合 $V \subset U \subset X$ に対して,

$$\begin{aligned}
\rho(\phi_U(e_U \otimes f_U)) &= \rho(\{e_U \mapsto e_U^\vee(e_U) f_U\}) \\
&= \{e_V \mapsto e_V^\vee(e_V) f_V\} \\
&= \phi_V(e_V \otimes f_V) \\
&= \phi_V(\rho(e_U \otimes f_U))
\end{aligned}$$

が成り立ち, 前層の可換図式,

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{E}(U), \mathcal{O}_X(U)) \otimes \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{E}(U), \mathcal{F}(U)) \\
{\scriptstyle \rho}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho} \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(V)}(\mathcal{E}(V), \mathcal{O}_X(V)) \otimes \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\phi_V} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(V)}(\mathcal{E}(V), \mathcal{F}(V))
\end{array}$$

を得る．この層化をとることで層の準同型写像 ϕ を得る．

次に (2) 示す．$U \subset X$ を $\mathcal{E}$ の局所自明化に対応する開集合とする．すると,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{O}_X(U)^n, \mathcal{O}_X(U)) \otimes \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\phi_U} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{O}_X(U)^n, \mathcal{F}(U))$$

と書ける．左辺は,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{O}_X(U)^n, \mathcal{O}_X(U)) \otimes \mathcal{F}(U) &\cong \bigoplus_n (\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X(U))) \otimes \mathcal{F}(U) \\
&\cong \mathcal{O}_X(U)^n \otimes \mathcal{F}(U) \\
&\cong \mathcal{F}(U)^n
\end{aligned}$$

である．右辺も同様にして，

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{O}_X(U)^n, \mathcal{F}(U)) &\cong \bigoplus_n \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{F}(U)) \\ &\cong \mathcal{F}(U)^n\end{aligned}$$

と書ける．$\mathcal{E}$ は局所自由層だから定義より任意の $x \in X$ に対してこのような開集合を取ることができる ([3] Ch2.7 ———-)．したがって ϕ は層の同型写像である． □

系 8.1.8. $\mathcal{E}$ を X の局所自由層とする．このとき，

$$\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \cong \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}$$

が成立する．

これらを踏まえて, 導来圏の複体に $\mathcal{E}^\bullet \in D^b(X)$ に対してトレースを定義する．

定義 8.1.9. X を滑らかな射影的代数多様体とする．$\mathcal{E}^\bullet \in D^b(X)$ に対し, 射,

$$tr_{\mathcal{E}^\bullet} : \mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet) \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

を**トレース (trace map)** と呼ぶ．

補題 8.1.10. X が滑らかな代数多様体かつ $\mathcal{E}^\bullet$ が局所自由層からなる複体ならば,

$$tr_{\mathcal{E}^\bullet} \cong \bigoplus_i (-1)^i tr_{\mathcal{E}^i}$$

が成り立つ．

証明. $\mathcal{E}^\bullet$ が局所自由層からなる複体であることから, $\mathbf{R}\mathcal{H}om^0(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet) \cong \bigoplus_i \mathcal{H}om(\mathcal{E}^i, \mathcal{E}^i)$ である． □

注意 8.1.11. ホモトピー圏の**写像錐 (mapping cone)** を, 複体の射 $f^\bullet : \mathcal{E}^\bullet \to \mathcal{F}^\bullet$ に対して,

$$\mathrm{Cone(f^\bullet)} := F^{i+1} \oplus E^i$$

$$d^i_{\mathrm{Cone(f^\bullet)}} := \begin{pmatrix} d^i_F & 0 \\ f^{i+1} & -d^{i+1}_E \end{pmatrix}$$

と定めたのであった．

注意 8.1.12. $D^b(X)$ の球面対象 $\mathcal{E}$ を考える．自然な射影 p, q による引き戻しにより $\mathcal{E} \boxtimes \mathcal{E} := p^*\mathcal{E} \otimes q^*\mathcal{E} \in D^b(X \times X)$ と準同型写像 $f : \mathcal{E}^\vee \boxtimes \mathcal{E} \to \mathcal{O}_\Delta$ が定まる．ただし, $\mathcal{O}_\Delta$ は対角成分 $\Delta \subset X \times X$ の構造層を指す．ここで,

$$\mathcal{P}_\mathcal{E} := \mathrm{Cone}(f)$$

と定義する．対角埋め込み $\iota : X \cong \Delta \subset X \times X$ による同一視 $\iota_*\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_\Delta$ によって, 合成写像,

$$\mathcal{E}^\vee \boxtimes \mathcal{E} \longrightarrow \iota_*\iota^*(\mathcal{E}^\vee \boxtimes \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \iota_*(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}) \xrightarrow{tr} \mathcal{O}_X$$

が定まる．ここで tr はトレース写像である．言い換えれば, 完全三角形,

$$p^*\mathcal{E}^{\bullet\vee} \otimes q^*\mathcal{E}^\bullet \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta \longrightarrow \mathcal{P}_\mathcal{E} \longrightarrow p^*\mathcal{E}^{\bullet\vee} \otimes q^*\mathcal{E}^\bullet[1]$$

が存在する．ただし, 三角公理 (TR3) で注意したように, Cone(f) の存在は一意的ではない．

定義 8.1.13. $\mathcal{E} \in D^b(X)$ による**球面捻り (spherical twisted)** とは, $\mathcal{P}_\mathcal{E}$ を核とした Fourier-Mukai transform

$$\Phi_{\mathcal{P}_\mathcal{E}} : D^b(X) \longrightarrow D^b(X)$$

のことをいう．

注意 8.1.14. 注意 8.1.12 で補足したように, $\Phi_{\mathcal{P}_\mathcal{E}}$ が同型を与えても, その核 $\mathcal{P}_\mathcal{E}$ の存在は一意的ではない．

問題 8.1.15. $\Phi_{\mathcal{P}_\mathcal{E}} \cong \Phi_{\mathcal{P}_\mathcal{E}}[1]$ を示せ．

証明. □

問題 8.1.16. $\mathcal{E}$ を球面対象とする．このとき, 以下を示せ．

(i) 任意の $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(X)$ に対し, 同型,

$$\Phi_{\mathcal{P}_\mathcal{E}}(F) \cong \mathrm{Cone}(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}[*]) \otimes \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F})$$

が存在する．特に, 上式のトレースを計算することで,

$$\Phi_{\mathcal{P}_\mathcal{E}}(F) \cong \mathrm{Cone}(\bigoplus_i \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}[i]) \otimes \mathcal{E}[-i] \longrightarrow \mathcal{F})$$

が成立することを示せ．

(ii) 上で示したことより, 球面対象 $\mathcal{E}$ と, $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}[i]) = 0$, $(\forall i \in \mathbb{Z})$ であるような $\mathcal{F} \in D^b(X)$ に対し

$$\Phi_{\mathcal{P}_\mathcal{E}}(\mathcal{E}) \cong \mathcal{E}[1 - \dim X], \quad \text{および} \quad \Phi_{\mathcal{P}_\mathcal{E}}(\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}$$

が成立する．

証明. □

定理 8.1.17 (Seidel-Thomas)**.** X を滑らかな射影的代数多様体, $\mathcal{E} \in D^b(X)$ を球面対象とする．このとき, 球面捻り,

$$\Phi_{\mathcal{P}_\mathcal{E}} : D^b(X) \longrightarrow D^b(X)$$

は自己同値を与える．

証明. (i) ($\Phi_{\mathcal{P}_\mathcal{E}}$ が fully-faithfull であること) 命題 8.1.19 を満たすような Spanning Class を構成したい．そのために,

$$\Omega := \mathcal{E} \cup \mathcal{E}^\perp$$

を考える．ここで $\mathcal{E}^\perp = \{\mathcal{F}^\bullet \in D^b(X) \mid \forall i \in \mathbb{Z},\ \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}^\bullet[i]) = 0\}$ である．

Ω が $\mathcal{D}$ を Span することを示そう．$\mathcal{F}^\bullet \in D^b(X)$ $s.t.$ $\forall \mathcal{G} \in \Omega, \forall i \in \mathbb{Z},\ \mathrm{Hom}_\Omega(\mathcal{G}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet[i]) = 0$ をとる．すると $\forall i \in \mathbb{Z}, \mathrm{Hom}_\Omega(\mathcal{E}, \mathcal{F}^\bullet[i]) = 0$ であり, 特に $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{E}^\perp \subset \Omega$ である．従って, 直交補集合の定義より

$\mathrm{Hom}_{\Omega}(\mathcal{F}^{\bullet},\mathcal{F}^{\bullet})=0$. よって $\mathcal{F}^{\bullet}\cong 0$ である. $\mathcal{F}^{\bullet}\in D^b(X)$ $s.t.$ $\forall\mathcal{G}\in\Omega,\forall i\in\mathbb{Z},\ \mathrm{Hom}_{\Omega}(\mathcal{F}^{\bullet},\mathcal{G}^{\bullet}[i])=0$ をとる. Serre Duality より $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}^{\bullet},\mathcal{G}^{\bullet}[i])\cong\mathrm{Hom}(\mathcal{G}^{\bullet},\mathcal{F}^{\bullet}\otimes\omega_X[i])=0$ である. よって, 上で示したことより $\mathcal{F}^{\bullet}\otimes\omega_X\cong 0$ であり $\mathcal{F}^{\bullet}\cong 0$ である. したがって定義より Ω は $\mathcal{D}$ の Spanning Class である.
次に,

$$\forall\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2\in\Omega,\forall i\in\mathbb{Z},\ \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2[i])\cong\mathrm{Hom}(\Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}}}(\mathcal{G}_1),\Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}}}(\mathcal{G}_2[i]) \tag{2}$$

を示す. $\Omega:=\{\mathcal{E}\}\cup\mathcal{E}^{\perp}$ であったから,

(a) $\mathcal{G}_1\in\mathcal{E}^{\perp}$ かつ $\mathcal{G}_2=\mathcal{E}$

(b) $\mathcal{G}_2\in\mathcal{E}^{\perp}$ かつ $\mathcal{G}_1=\mathcal{E}$,

(c) $\mathcal{G}_1=\mathcal{G}_2=\mathcal{E}$

(d) $\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2\in\mathcal{E}^{\perp}$

の場合を示せば十分である. まず (a) を示す.

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2[i]) &= \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_1,\mathcal{E}[i]) \\ &\cong \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_1,\mathcal{E}\otimes\omega_X[i]) && ,(\mathcal{E}\otimes\omega_X\cong\mathcal{E}) \\ &\cong \mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{G}_1[i]) && ,(\text{Serre duality}) \\ &= 0 && ,(\mathcal{G}_1\in\mathcal{E}^{\perp})\end{aligned}$$

が成立する. 一方, 演習 8.1.16(2) より $\Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}}}(\mathcal{G}_1)\cong\mathcal{G}_1\subset\mathcal{E}^{\perp}$ である. よって同様に,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(\Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}}}(\mathcal{G}_1),\Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}}}(\mathcal{G}_2[i])) &= \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_1,\mathcal{E}[i+1-\dim(X)]) && ,(\text{演習 } 8.1.16) \\ &\cong \mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{G}_1\otimes\omega_X[i+1-\dim(X)]) && ,(\text{Serre Duality}) \\ &= 0 && ,(\mathcal{G}_1\in\mathcal{E}^{\perp})\end{aligned}$$

が成立する. よって $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2[i])\cong\mathrm{Hom}(\Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}}}(\mathcal{G}_1),\Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}}}(\mathcal{G}_2[i])$ である. (b) も同様である.
次に (c) を示す. 演習 8.1.16 より $\mathrm{Hom}(\Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}}}(\mathcal{E}),\Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}}}(\mathcal{E}[i]))\cong\mathrm{Hom}(\mathcal{E}[1-\dim(X)],\mathcal{E}[i+1-\dim(X)])$ である. また $\mathrm{id}\in\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ の $\Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}}}$ での像は $\mathrm{id}\in\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}[1-\dim(X)],\mathcal{E}[i+1-\dim(X)])$ に対応する. よって両辺とも $i=0$ ならば id, $i\neq 0$ ならば 0 である. 最後に (d) については 演習 8.1.16 より $\Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}}}(\mathcal{G}_j)\cong\mathcal{G}_j$ $j=1,2$ だから, $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2)\cong\mathrm{Hom}(\Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}}}(\mathcal{G}_1),\Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}}}(\mathcal{G}_2))$ である. よって式 (2) は全単射である. また $\Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}}}$ は FMT であるから, 右・左随伴をもつ. したがって命題 8.1.19 より $\Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}}}$ は充満忠実であることが分かった.

(ii) ($\Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}}}$ が equivalence であること) 上で示したことおよび, $\mathcal{E}\otimes\omega\cong\mathcal{E}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\mathcal{E}}\otimes p^*\omega_X &\cong \mathrm{Cone}(q^*(\mathcal{E}^{\vee}\otimes\omega_X)\otimes p^*\omega_Y\longrightarrow\mathcal{O}_{\Delta}\otimes q^*\otimes\omega_X) \\ &\cong \mathrm{Cone}(q^*\mathcal{E}^{\vee}\otimes p^*\omega_Y\longrightarrow\mathcal{O}_{\Delta}\otimes q^*\otimes\omega_X) \\ &\cong \mathcal{P}_{\mathcal{E}}\otimes p^*\omega_Y\end{aligned}$$

から, 定理 8.1.18 より従う.

□

定理 8.1.18. $\Phi_{\mathcal{P}}: D^b(X)\longrightarrow D^b(Y)$ を滑らかな射影的代数多様体の間の充満忠実な Fourier-Mukai transform とする. このとき, $\Phi_{\mathcal{P}}$ が圏同値であるのは,

$$\dim(X)=\dim(Y)\quad and\quad q^*\omega_X\ \cong\ p^*\omega_Y$$

であるとき, またそのときに限る.

命題 8.1.19. $F : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ を三角圏の完全関手で, 右・左随伴 $G \vdash F \vdash H$ を持つものとする. さらに Ω を $\mathcal{D}$ の Spanning Class で, 任意の $A, B \in \Omega$ と $i \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B[i]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}'}(F(A), F(B[i]))$$

が全単射であるようなものとする. このとき F は充満忠実である.

証明. [1]Proposition1.49 参照. □

問題 8.1.20. Calabi-Yau 多様体 X 上の導来圏 $D^b(X)$ は非自明な半直交分解を持たないことを示せ. (9 節を参照のこと)

証明. □

例 8.1.21. C を滑らかな射影曲線、$x \in C$ を閉点とする. このとき $\kappa(x)$ は球面対象である. 実際 $\kappa(x)$ は 0 次のみ $\kappa(x) \in Coh(C)$, その他は 0 の複体だから,

$$\mathrm{Hom}_{D^b(X)}(\kappa(x), \kappa(x)[i]) = \begin{cases} \kappa(x), & (i = 0) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である. また, ω_C は C の直線束であることに注意して $\kappa(x) \otimes \omega_C|_{\{x\}} \ \cong\ \kappa(x) \otimes \mathcal{O}_{C,x} \ \cong\ \kappa(x)$ が成立する. $\kappa(x)$ が定める球面捻り $\Phi_{\mathcal{P}_\mathcal{E}}$ と, $x \in C$ に関連する直線束 $\mathcal{O}(x)$ による $\mathcal{O}(x) \otimes (-)$ には関手的同型が存在することがわかる. これを見るためには, ――――――――――――――――――――――――

例 8.1.22. X が **Calabi-Yau 多様体 (Calabi-Yau manifold)** とは, $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$ かつ $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$, $(\forall 0 < i < \dim(X))$ であることをいう. このとき, X 上の全ての直線束は球面対象である. $L \cong \mathcal{O}_X$ のとき, 球面捻り Φ_L の核は対角成分 $\Delta \subset X \times X$ のイデアル層 $\mathcal{I}_\Delta$ である.

例 8.1.23. X を滑らかな射影曲面, $C \subset X$ を自己交点数が -2 である滑らかで既約な有理曲線 (すなわち, $C \cong \mathbb{P}^1$) とする. このとき, $\mathcal{O}_C$ は球面対象である. より一般に, $\pi : C \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$ での $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$, $(m \in \mathbb{Z})$ の引き戻し $\mathcal{O}_C(m)$ は球面対象である. 特に X が *K3 Surface* の場合, X 上の滑らかで既約な有理曲線は $C^2 = -2$ を満たす.

以下の例の詳細については, K3 Suface の章を参照のこと.

例 8.1.24. 3 次元 *Calabi-Yau manifold* X に含まれる滑らかで既約な有理曲線 C を考える. C 上の法束 $\mathcal{N}_{C/X}$ について $\mathcal{N}_{C/X} \cong \mathcal{O}_C(-1) \otimes \mathcal{O}_C(-1)$ が成立すると仮定する. このとき, $\mathcal{O}_C$ は球面対象である. 実際,

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C[3]) \ \cong\ \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C)^\vee \ \cong\ k$$

かつ,

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C[2]) \ \cong\ \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C[1])^\vee \ \cong\ \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C)^\vee$$

が成立するが, $H^0(C, \mathcal{N}_{C/X}) = 0$ という過程のもとでは後者は 0 となる.

例 8.1.25. 上述の例の拡張として, 次元が $2n+1$ である *Calabi-Yau manifold* X とその滑らかな部分多様体 $Z \subset X$ を考える.

$$Z \cong \mathbb{P}^n \quad and \quad \mathcal{N}_{Z/X} \cong \mathcal{O}_Z(-1)^{\oplus n+1}$$

と仮定する. $\mathcal{E}xt^q(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z) \cong \bigwedge^q \mathcal{N}_{Z/X}$ (K3 Surface の章参照) を用いれば, スペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{O}_Z, \mathcal{E}xt_X^q(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z)) \to \mathrm{Ext}_X^{p+q}(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z)$$

から,

$$E_2^{p,q} = H^p(Z, \bigwedge^q \mathcal{N}_{Z/X}) \to \mathrm{Ext}_X^{p+q}(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z)$$

を得る. (代数トポロジーの概念？？) Bott-Formula によると,

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} k & ,((p,q) = (0,0) \text{ or } (n, n+1)) \\ 0 & ,(\text{otherwise}) \end{cases}$$

であり, これにより $\mathrm{Ext}^*(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z) \cong H^*(S^{2n+1}, k)$ であることと, X は自明な標準束を持つことから $\mathcal{O}_Z \in D^b(X)$ は球面対象であることが分かる.

8.2 Beilinson Spectral Sequence

$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ の対角成分の構造層 $\mathcal{O}_\Delta$ は, Beilinson Resolution という特殊な局所自由分解を持っていた. 一方, $\mathcal{O}_\Delta$ は Fourier-Mukai transform $\Phi_{\mathcal{O}_\Delta} : D^b(\mathbb{P}^n) \longrightarrow D^b(\mathbb{P}^n)$ の核であり, これは恒等関手である. ここでは, この二つの概念がどのような関係性を持っているかを見る.

補題 8.2.1. $\mathcal{O}_\Delta$ は以下の局所自由分解を持つ.

$$0 \longrightarrow \bigwedge^n (\mathcal{O}(-1) \boxtimes \Omega(1)) \longrightarrow ... \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \boxtimes \Omega(1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta \longrightarrow 0$$

証明.
b

□

この局所自由分解を,

$$L^\bullet := \{0 \longrightarrow \bigwedge^n (\mathcal{O}(-1) \boxtimes \Omega(1)) \longrightarrow ... \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \boxtimes \Omega(1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n}\} \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta \longrightarrow 0$$

と表す. $D^b(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n)$ の中では, $L^\bullet \cong \mathcal{O}_\Delta$ である ($\because L^\bullet, \mathcal{O}_\Delta$ ともに acyclic である).

定理 8.2.2 (Beilinson)**.** 任意の $\mathcal{F} \in \mathbb{P}^n$ に対し, 以下の自然なスペクトル系列が存在する.

$$E_1^{r,s} := H^s(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(r)) \otimes \Omega^{-r}(-r) \Rightarrow E^{r+s} = \begin{cases} \mathcal{F} & ,(r+s=0) \\ 0 & ,(otherwise) \end{cases}, \tag{3}$$

$$E_1^{r,s} := H^s(\mathbb{P}^n, \mathcal{F} \otimes \Omega^{-r}(-r)) \otimes \mathcal{O}(r) \Rightarrow E^{r+s} = \begin{cases} \mathcal{F} & ,(r+s=0) \\ 0 & ,(otherwise) \end{cases}. \tag{4}$$

証明. 任意の $A^\bullet \in D^b(\mathcal{A})$ と任意の light exact functor F に対し, Spectle Sequence $E_1^{r,s} := \mathbf{R}^s F(A^r) \Rightarrow \mathbf{R}^{r+s} F(A)$ が存在する. ここで, A^r は $A^\bullet$ の r 番目の要素, $\mathbf{R}F$ は F の right derived functor である (Remark 2.67 参照).

主張を示すには $\mathcal{A}$ として $Coh(\mathbb{P}^n)$ を考え, $A^\bullet := q^*\mathcal{F} \otimes L^\bullet$, $F := p_*(-)$ とおけばよい (ここで, $L^\bullet$ は locally free sheaf の鎖であるから, 通常の層のテンソル積を考えている). 外積とテンソルの計算によって, $A^r = q^*\mathcal{F} \otimes \bigwedge^r(\mathcal{O}(1) \boxtimes \Omega(-1)) \cong q^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(r) \otimes p^*\Omega^{-r}(-r)) \cong \mathcal{F}(r) \boxtimes \Omega^{-r}(-r))$ を得る. したがって,

$$\mathbf{R}^s F(A^r) \cong H^s(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(r) \boxtimes \Omega^{-r}(-r)) \cong H^s(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(r)) \otimes \Omega^{-r}(-r))$$

を得る ($\because$ projection formula. 実際, $\mathbf{R}^s p_* \cong H^s(\mathbb{P}^n, -)$ に注意すると, $\mathbf{R}^s p_*(q^*\mathcal{F}(r) \otimes p^*\Omega^{-r}(-r)) \cong \mathbf{R}^s p_*(q^*\mathcal{F}(r)) \otimes \Omega^{-r}(-r) \cong H^s(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(r)) \otimes \Omega^{-r}(-r)$ を得る).

一方, $D^b(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n)$ の中では $L^\bullet \cong \mathcal{O}_\Delta$ である. したがって, $\iota : \mathbb{P}^n \to \Delta$ を diagonal embedding とするとき, $A^\bullet = q^*\mathcal{F} \otimes L^\bullet \cong q^*\mathcal{F} \otimes \iota_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \cong \iota_*(\iota^* q^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \cong \iota_*\mathcal{F}$ が成立する. よって $p_*(A^\bullet) \cong p_*(\iota_*\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ は 0 次のみ $\mathcal{F}$ でその他は 0 の複体であるから, $\mathbf{R}^{r+s}p_*(\mathcal{F})$ は $r+s=0$ のとき $\mathcal{F}$, その他は 0 である.

二つ目の式については p, q の役割を入れ替えればよい. □

注意 8.2.3. $\Omega^{-r}(-r)$ は $r \in \{-n, ..., 0\}$ を除き trivial である. よって, $\mathcal{F}$ の取り方によらず $E_1^{r,s}$ は $r < -n, r > 0$ で trivial である. 一方で $H^s(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(r))$ は $s < 0, s > n$ では trivial である ($\because$ 射影空間のコホモロジーの性質. 例えば [4] 命題 6.19). よって, $E_1^{r,s}$ は第二象限に集中している.

この Spectral Sequence による系を述べる前に, **直交補集合 (orthogonal complement)** および**例外列 (exceptional sequence)** の概念と, 補題を導入しておく.

定義 8.2.4 (exceptional sequence)**.** $\mathcal{D}$ を $\mathbb{C}$-線形な三角圏とする. $E \in Ob(\mathcal{D})$ が**例外対象** (*exceptional collection*) であるとは,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, E[l]) = \begin{cases} k & ,(l=0) \\ 0 & ,(otherwise) \end{cases}$$

を満たすことをいう. $\mathcal{D}$ の**例外列** (*exceptional sequence*) とは, 例外対象の列 $\{E_1, ..., E_n\}$ で, 全ての $i > j, (i, j \in \mathbb{Z})$ と全ての $l \in \mathbb{Z}$ に対し, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E_i, E_j[l]) = 0$ が成立するものをいう. 例外列 $\{E_i\}_{i\in I}$ が **full** であるとは, それが $\mathcal{D}$ を**生成する (generated by)** ことをいう. すなわち, 任意の部分三角圏 $\mathcal{D}_S \subset \mathcal{D}$ で $\{E_i\}_{i\in I}$ を含むものは $\mathcal{D}$ と圏同値であることをいう.

定義 8.2.5. $\mathcal{D}$ を三角圏とする. 充満部分三角圏 $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ の**直交補集合** (*orthogonal complement*) $\mathcal{D}'\perp$ とは,

$$\mathcal{D}^\perp := \{C \in \mathcal{D} \mid \forall B \in \mathcal{D}', \mathrm{Hom}(B, C) = 0\}$$

をいう.

系 8.2.6. 任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対し, $\mathbb{P}^n$ の直線束の列

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m+1), .., \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m+n)$$

は $D^b(\mathbb{P}^n)$ の full exceptional sequence を定める.

証明. 示すべきは,

(i) 全ての $m \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$ が $D^b(\mathbb{P}^n)$ の exceptional obkect であること
(ii) $\{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m+1), ..., \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m+n)\}$ が $D^b(\mathbb{P}^n)$ の exceptional sequence を定めること
(iii) $\{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m+1), ..., \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m+n)\}$ が $D^b(\mathbb{P}^n)$ を生成すること

である. まず (i) を示す. 任意の $m, l \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathbb{P}^n)}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)[l])) \cong \mathrm{Ext}^l_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) \cong H^l(\mathcal{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = \begin{cases} k & ,(l=0) \\ 0 & ,(otherwise) \end{cases}$$

である ($\because$ 最初の同型は命題 6.3.16, 2 つ目の同型は [3]Section 3.7, 最後は射影空間のコホモロジーの性質 ([3]Section 3.5)). よって $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$ は $D^b(\mathbb{P}^n)$ の exceptional object を定める.

次に (ii) を示す. 任意の $m \leq j < i \leq m+n$ と任意の $l \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathbb{P}^n)}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(i), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(j)[l]) \cong H^l(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(j-i)) = 0$$

である. 特に $m = -n$ のとき, $-n \leq j-i < 0$ に対して成立する. したがって, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m+1), .., \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m+n)$ は $D^b(\mathbb{P}^n)$ の exceptional sequence を定める.

最後に (iii) を示す. まず, 以下の主張を確認しよう.

主張 8.2.7. $\{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m+1), ..., \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m+n)\}$ が $D^b(\mathbb{P}^n)$ を生成する十分条件は, 任意の $\mathcal{F} \in \langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m+1), ..., \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m+n)\rangle^{\perp}$ が trivial であることである.

証明. $\mathcal{F} \cong 0$ ならば, Hom() □

$\mathcal{F}(-m) \in L, m \in \mathbb{Z}$ とする. 式 (3) より,

$$E_1^{r,s} := H^s(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(-m)(r)) \otimes \Omega^{-r}(-r) \cong \mathrm{Hom}_{D^b(\mathbb{P}^n)}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(i), \mathcal{F}[s]) \otimes \Omega^{-r}(-r)$$

が成立する. ここで $i = m - r$. 一方 $\Omega^{-r}(-r)$ が non-trivial なのは $-n < i < 0$ の範囲であり, したがって $E_1^{r,s}$ も同様である. 仮定より $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathbb{P}^n)}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(i), \mathcal{F}[s]) = 0, (\forall s \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{m, ..., m+n\})$ だから, 特に $E_1^{r,s} = 0, (\forall s \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{m, ..., m+n\})$ であり, よって $E_1^{r,s} = E^{r+s}$. すなわち $\mathcal{F}(-m)$ は trivial である. 従って $\mathcal{F} \cong 0$.

一般の場合を示そう. 局所自由分解 $L^{\bullet} \to \mathcal{O}_{\Delta}$ を短完全列に分解する.

$$0 \longrightarrow \bigwedge^n (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \boxtimes \Omega(1)) \longrightarrow \bigwedge^n -1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \boxtimes \Omega(1)) \longrightarrow M_n \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M_i \longrightarrow \bigwedge^i (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \boxtimes \Omega(1)) \longrightarrow M_n \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{O}_{\Delta} \longrightarrow 0$$

これらは $D^b(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n)$ では完全三角形だから, Tensor 関手 $(-) \otimes^{\mathbf{L}} p^*\mathcal{F}$ と p_* の合成によって,

$$\Phi_{M_{i+1}}(\mathcal{F}) \longrightarrow \Phi_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-i) \boxtimes \Omega^i(i))}(\mathcal{F}) \longrightarrow \Phi_{M_i}(\mathcal{F}) \longrightarrow \Phi_{M_{i+1}}(\mathcal{F})[1]$$

を得る. 式 (4) より $\Phi_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-i) \boxtimes \Omega^i(i))}(\mathcal{F}) \cong H^i(\mathbb{P}^n, \Omega^i(i)) \otimes \mathcal{O}(-i)$ であるから, $\langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-i) \rangle$ に含まれる. n に関する帰納法より, $\Phi_{M_i}(\mathcal{F}) \in \langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n), ..., \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-i) \rangle$ であり, したがって $\Phi_{\mathcal{O}_{\Delta}}(\mathcal{F}) \in \langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n), ..., \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rangle$(Remark1.43(ii) も参照).

したがって, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n), ..., \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ は $D^b(\mathbb{P}^n)$ の full exceptional sequence であることがわかった. 任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対し関手 $(-) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) : D^b(\mathbb{P}^n) \longrightarrow D^b(\mathbb{P}^n)$ は圏同値であり, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n), ..., \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ の像は full exceptional sequence である. □

9 導来圏の半直交分解

9.1 三角圏の生成元

$\mathcal{D}$ を三角圏, $\mathcal{C}$ をその充満部分加法圏とする. $\mathcal{Q} = \{Q_i\}_{i\in I}$ を $\mathcal{D}$ の対象の集合, または部分圏とする.

定義 9.1.1. $\mathcal{C}$ の $\mathcal{D}$ における**右直交部分圏 (right orthogonal subcategory)** $\mathcal{C}^{\perp}$**, 左直交部分圏 (left orthogonal subcategory)** ${}^{\perp}\mathcal{C}$ とは, 充満部分圏で,

$$\mathcal{C}^{\perp} := \{D \in \mathcal{D} |\ \text{全ての}\ C \in \mathcal{C}\ \text{に対し}\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(C, D) = 0\}$$

$${}^{\perp}\mathcal{C} := \{D \in \mathcal{D} |\ \text{全ての}\ C \in \mathcal{C}\ \text{に対し}\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, C) = 0\}$$

を満たすものをいう.

定義 9.1.2. $\mathcal{C}$ が $\mathcal{D}$ の**狭義充満部分圏 (strictly full subcategory)** であるとは,

$$\forall D \in \mathcal{D},\ \exists C \in \mathcal{C}\ s.t.\ C \cong D \quad \Longrightarrow \quad D \in \mathcal{C}$$

を満たすこという.

定義 9.1.3. $\mathcal{D}$ の充満部分加法圏 $\mathcal{B}$ が, $\mathcal{C}$ の $\mathcal{D}$ における **thick 閉包 (thick closure)** であるとは,

(i) $\mathcal{C} \subset \mathcal{Q}$
(ii) 全ての $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$ に対し, $Q_1 \oplus Q_2 \in \mathcal{Q}$

最小の狭義充満部分圏であることをいう. 特に, $\mathcal{Q}$ を含む thick 閉包を $\langle \mathcal{Q} \rangle$ と書く.

定義 9.1.4. $\mathcal{Q}$ が $\mathcal{D}$ を**古典的に生成する (clasically generated)** とは, $\langle \mathcal{Q} \rangle^{\perp} = \mathcal{D}$ を満たすことをいう.

定義 9.1.5. $\mathcal{Q}$ が $\mathcal{D}$ を**生成する** とは, $\langle \mathcal{Q} \rangle^{\perp} = 0$ であることをいう.

定義 9.1.6. 三角圏 $\mathcal{D}$ が**半直交分解可能**であるとは, 充満部分三角圏 $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j$ で $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{C}_j^{\perp} \cap^{\perp} \mathcal{C}_j$ $(\Longleftrightarrow \mathcal{C}_j \subset \mathcal{C}_i^{\perp} \cap^{\perp} \mathcal{C}_i)$ であり, 任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して, ある $C_i \in \mathcal{C}_i$ が存在し, $D \cong C_i \oplus C_j$ を満たすことをいう. $\mathcal{D}$ が半直交分解可能でないとき, **直規約 (indecomposable)** であるという.

9.2 半直交分解

定義 9.2.1. (半直交分解) 三角圏 $\mathcal{D}$ の**半直交分解 (semi-orthogonal decomposition)** とは, $\mathcal{D}$ の strictly full subcategolly$\mathcal{D}_1, ..., \mathcal{D}_n$ で, $j > i$ ならば $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{D}_j^{\perp}$ が成立し, ーーーーーーこのとき, $\mathcal{D}$ は $\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_n$ の対象で古典的に生成されているので,

9.3 例外生成列

ここでは, $\mathbb{C}$-linear な三角圏 $\mathcal{D}$ を考える.

定義 9.3.1. (例外対象) $\mathcal{E} \in \mathcal{D}$ が $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, E) \cong \mathbb{C}$ を満たす, つまり,

$$\mathrm{Hom}^i_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = \begin{cases} \mathbb{C}, & (i = 0) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

を満たすとき, $\mathcal{E}$ を**例外対象 (exceptional object)** という.

命題 9.3.2. $\mathbb{C}$ 上滑らかな射影的代数多様体 X が $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0,\ (\forall i > 0)$ を満たすとき, X 上の全ての直線束は例外対象である.

証明. □

10　K3 曲面

$K3$ 曲面 S とは 2 次元のコンパクトなケーラー多様体で, 自明な標準束を持ち, 不正則数が 0 であるようなものをいう. $K3$ 曲面の多くは代数多様体ではないが, 非特異射影多様体はコンパクトケーラー多様体の一つの例である. よって, $K3$ 曲面のもつ複素構造を代数多様体の調査に輸入するという視点に立つこともできる.

10.1　K3 曲面の定義および諸性質

この節の参考文献は, [5] を主に参考にしています. ケーラー多様体についての基礎事項は付録にまとめます.

定義 10.1.1 (K3 曲面)**. K3 曲面 (K3 Surface)**S とは, 自明な標準束 $\omega_S \cong \mathcal{O}_S$ を持ち, 不正則数 $q(S) := \dim\ H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$ である 2 次元コンパクトケーラー多様体をいう. 特に, 非特異射影代数多様体はコンパクトケーラー多様体であるので, そのような $K3$ 曲面を, **代数的 K3 曲面**という.

例 10.1.2. S を $X^4 + Y^4 + Z^4 + W^4$ で定義される $\mathbb{P}^3$ 内の超曲面とする. これは **Fermat 曲面 (Fermat surface)** と呼ばれる曲面である. Fermat 曲面は $K3$ 曲面である. 実際, $\omega_S \cong \omega_{\mathbb{P}^3} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(S) \otimes \mathcal{O}_S \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4) \otimes \mathcal{O}_S \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \otimes \mathcal{O}_S \cong \mathcal{O}_S$ である. また, 層の完全列,

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow 0$$

に誘導される long cohomology sequence,

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow & H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) \longrightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S) \longrightarrow \\ & H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S) \longrightarrow \\ & H^2(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) \longrightarrow H^2(S, \mathcal{O}_S) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

の計算により, $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)) = H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) = H^2(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)) = H^2(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) = 0$ であることが分かる ([4] 定理 6.19 (ii)). 従って $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$ であることが分かる.

例 10.1.3. 一般に, $\mathbb{P}^3$ 内の非特異 4 次超曲面は上の例と同様の論法を適用することにより $K3$ 曲面であることがわかる.

定義 10.1.4. (導来同値) X, Y を k 上のスキームとする. X と Y が**導来同値 (D-equivalent)** とは, k-線形な圏同値 $D^b(X) \cong D^b(Y)$ が存在することをいう.

系 10.1.5. K3 曲面 X と導来同値な滑らかな射影的代数多様体は K3 曲面である.

証明. □

11 Hodge 構造

Kahler Manifold および Hodge 構造に関する諸定義, 性質をまとめておく.

定義 11.0.1 (Hermitian Manifold)**.** X を n 次元複素多様体, $U : (z_1, .., z_n) \subset X$ を Local chart とする.

定義 11.0.2 (Hodge Resolution)**.**

参考文献

[1] D.Huybrechts *Fourier-Mukai transform in Algebraic Geometry* Oxford Mathmetical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford (2006)

[2] 上原北斗／戸田幸伸,「連接層の導来圏と代数幾何学, シュプリンガー現代数学シリーズ, 丸善出版 (2020)

[3] R.Hartshorne *Algebraic Geometry*, Springer (1977)

[4] 上野健爾,「代数幾何 1,2,3」, 岩波講座現代数学の基礎シリーズ, 岩波書店 (2001)

[5] 安藤哲哉,「代数曲線・代数曲面入門 新装版ー複素代数幾何の源流」, 数学書房 (2011)