「代数曲線束の地誌学」 ノート

@sachiiiimath

2023 年 3 月 12 日

目次

1 射影代数多様体

1.1 射影多様体

1.1.1 正則点

この節では一貫して X : proj.var / $\mathbb{C}$ とする. i.e. $X := \mathrm{Proj}\ \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$.

定義 1.1.1. $p \in X$ に対し, $\mathcal{O}_{X,p}$ が正則局所環であるとき, p を**正則点 (regular point)** という. すべての閉点が正則であるような X を**非特異 (non-singular)** という. 正則点でない点を**特異点 (singular point)** といい, X の特異点全体を $\mathrm{Sing}(X)$ と書く.

注意 1.1.2. 局所環 (R, m) が正則局所環であるとは, $\mathfrak{m}$ の生成系 $(x_1, ..., x_n)$ で, $\mathbb{C}$-代数 $\mathrm{Gr}_{\mathfrak{m}_p} R := \oplus_{i=0}^{\infty} \mathfrak{m}_p^i / \mathfrak{m}_p^{i+1}$ が $\{x_1, ..., x_n\}$ を変数とする多項式環 $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ と同型であるようなものが存在することをいう.

注意 1.1.3. 上の $(x_1, ..., x_n)$ は p の周りでの局所座標と思うことができる.

命題 1.1.4. $X_{\mathrm{reg}} := X \backslash \mathrm{Sing}(X)$ とおく. このとき, X_{reg} は Zariski 開集合である.

証明. $\mathrm{Sing}(X)$ は定義より Zariski 閉集合である. よって従う. □

命題 1.1.5. X_{reg} における局所座標 $(x_1, ..., x_n)$ は, $p \in X_{\mathrm{reg}}$ の選び方によらず定まる.

証明. X は既約であるから, □

1.1.2 連接層

定義 1.1.6. スキーム X が**既約 (irreducible)** であるとは, X の閉集合 Z_1, Z_2 を用いて $X = Z_1 \sup Z_2$ と書けるならば, $Z_1 = X$ または $Z_2 = X$ が成立することをいう.

注意 1.1.7. $\mathcal{F}$ を X 上の連接層とすると, X の既約性から

定義 1.1.8. $\mathcal{F}$ を X の連接層とする. $\mathcal{F}$ が**捩れを持たない (torsion free)** とは, $\mathrm{Supp}(\mathcal{G}) \neq X$ であるような非零な $\mathcal{F}$ の連接部分層を持たないことをいう.

(めも) $\mathrm{Supp}(\mathcal{G}) := \{x \in X \mid \mathcal{G}_x \neq 0\}$ なので, torsion free の定義から任意の部分層と任意の点に対し, stalk が 0 にならない. このことから"捩れなし".

命題 1.1.9. $\mathcal{F}$ が捩れを持たない連接層ならば, $\mathcal{F}$ は余次元 1 で局所自由. すなわち, $U := X \backslash \{Z \subset X | \mathrm{Codim}(Z, X) \geq 2\}$ とおくとき, $\exists r \in \mathbb{Z}$ s.t. $\mathcal{F}|_U \cong \mathcal{O}_X|_U^{\oplus} r$.

証明. □

定義 1.1.10 (反射層, 飽和部分層)**.** $\mathcal{F}$ を捩れのない連接層とする.

(i) 双対層 $\mathcal{F}^{\vee} := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ と表す. $\mathcal{F}^{\vee\vee} \cong \mathcal{F}$ が成り立つとき, $\mathcal{F}$ を**反射層 (reflexiv sheaf)** という.

(ii) $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を $\mathcal{O}_X$-加群とする．商層 $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ が捩れを持たないとき, $\mathcal{G}$ を**飽和部分層 (saturated subsheaf)** という．

命題 1.1.11. 反射層は余次元 2 で局所自由.

証明. [6]Lemma 31.12.12 参照. (Outline) : Lemma28.10.3 より Y が X の既約閉集合とすると, Codim(Y,X) $= \dim(\mathcal{O}_{X,\zeta})$,(ζ は Y の生成点). 一方, Lemma31.12.12 の (1) を仮定すると,$\mathcal{F}$ は局所自由かつ $\mathrm{depth}(\mathcal{O}_{X,x}) \geq 2$. よって余次元 2 で $\mathcal{F}$ は局所自由. □

1.2　正規化と Stein 分解

$\mathbb{C}$ 上の非特異とは限らない射影多様体を考察する．

定義 1.2.1. (有理写像) X, Y を射影多様体, $f : U \subset X \to Y$ を $U \neq \infty$ であるような Zariski 開集合からの射とし, 組 (U, f) を考える．2 つの組 (U, f),(W, g) が同値であることを, $\exists V \in U \cup W$ s.t. $f|_V = g|_W$ と定める．これらは同値関係を満たす．この同値類 $[(U, f)]$ を X から Y への**有理写像 (rational map)** といい, (U, f) が代表する有理写像を $f : X- \to Y$ と書く．有理写像 f の像が稠密であるとき, f を**支配的 (dominant)** であるという．有理写像 $f^{-1} : Y- \to X$ で, $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ を満たすとき, f を**双有理写像 (birational map)** という．

定義 1.2.2. $p \in X$ の stalk $\mathcal{O}_{X,p}$ が正規環 (Noether な整閉整域) であるとき, X を点 p で**正規 (normal)** であるという．すべての点で正規であるとき, X を**正規多様体 (normal variety)** という．

定義 1.2.3. 正規多様体 X' と, 双有理写像 $f : X'- \to X$ の組 (X', f) を X の**正規化 (normalization)** という．

命題 1.2.4. 射影多様体 X に対し, 正規化 (X', f) が存在し X' も射影的.

証明. □

補題 1.2.5 (▲). $f : X \to Y$ を射影多様体の射で, 自然な層の準同型 $f^s : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ は同型写像であると仮定する．このとき f のファイバーは空ではない連結集合である．

証明. $y \in Y$ 上のファイバーを $X_y := f^{-1}(y)$ とおく．$X_y = \emptyset$ のとき, $(f_*\mathcal{O}_X)_y = 0$ である．よって, f^s の y への制限 $\mathcal{O}_{Y,y} \to (f_*\mathcal{O}_X)_y$ は単射ではなく, したがって f^s は同型ではない．したがって $X_y \neq \emptyset$ と仮定してよい．X_y が非連結と仮定する．すると, $X_y = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ であるような $U,V \in X_y$ を取ることができる．f は固有射だから, y の近傍 V を $f^{-1}(V)$ が連結出ないように取れる．実際, X_y を連結成分 A とそれと交わらないような B で表示すると, (f が固有射であることより)A も B もコンパクトだから, X_y の近傍 $W \subset U \cup U'$ を, $A \subset U$, $B \subset U'$ かつ $U \cap U' = \emptyset$ となるように取ることができる．よって, V が十分小さいとき $f^{-1}(V) \subset W$ としてよく, $f^{-1}(V)$ は連結でない．しかし, このとき $\mathcal{O}_{Y,y} \to (f_*\mathcal{O}_X)_y$ は全射とはなり得ない． □

定理 1.2.6 (Zariski の主定理)**.** $f : X \to Y$ を射影多様体の双有理正則写像とする．このとき, Y が正規ならば f のファイバーは連結.

証明. $f_*\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_Y$ を示せば, 補題 1.2.5 より直ちに従う. 問題は局所的だから Y を Affine と仮定してよい. $R(Y)$ を Y の座標環とする. f は固有射だから, 固有写像定理 (cf. —) より, $f_*\mathcal{O}_X$ は連接層. したがって, $A := \Gamma(Y, f_*\mathcal{O}_X)$ は有限生成 $R(Y)$-加群. $A, R(Y)$ は, 同じ商体を持つ整域であり, 仮定より $R(Y)$ は正規環なので, $A = R(Y)$ でないとならない. すなわち, $f_*\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_Y$ である. □

$f : X \to Y$ を射影多様体の間の有理写像, $\Gamma_f \subset X \times Y$ をグラフ (の閉包) とする. $p_1 : \Gamma_f \to X$ および $p_2 : \Gamma_f \to Y$ を自然な射影とする.

系 1.2.7. 上記の仮定で X が正規ならば, 各点 $x \in X$ に対し, $f(x) := p_2(p_1^{-1}(x))$ は連結集合.

証明. p_1 は双有理写像なので, 定理 1.2.6 より, p_1 のファイバーは連結. したがって, 連続写像 f での像も連結である. □

系 1.2.8. $f : X \to Y$ を射影多様体の射とする. また, (X', g) , (Y', h) をそれぞれの正規化とする. このとき, 以下の図式を可換にする射 $f' : X' \to Y'$ が存在する.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g"'] & Y' \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

証明. $f' = h^{-1} \circ f \circ g$ と定義する. h は有限な正則写像なので, 任意の点 $x \in X'$ に対し $h^{-1}(f \circ g)(x)$ は有限集合. よって, $f'(x)$ は (その部分集合として) 有限個の点からなる. 一方, 系 1.2.7 によると f' は連結であるから, 結局 $f'(x)$ は 1 点でなければならない. ($\because$ $f'(x)$ が連結 $\Leftrightarrow$ $F \cup H = f'(x)$ かつ $F \cap H \neq \emptyset$ を満たす閉集合 $F, H \subset f'(x)$ は存在しない.) したがって, f' は任意の $x \in X$ で定義され, 代数多様体の射である. □

定理 1.2.9. $f : X \to Y$ を全射な射影多様体の射とする. このとき, 射影多様体 Y' と有限な全射 $g : Y' \to Y$ および, 連結なファイバーを持つ $f' : X' \to Y'$ が存在し, $f = f' \circ g$ を満たす. さらに, X が正規ならば Y' も正規となる.

証明. f の全射性より, 誘導される関数体の準同型 $f^* : \mathbb{C}(Y) \to \mathbb{C}(X)$ は埋め込みである. 従って $\mathbb{C}(X)$ は $\mathbb{C}(Y)$ の拡大体である. 定理 1.4 の証明と同様にして, $\mathbb{C}(Y)$ の代数閉包を関数体とするような射影多様体 Y' と有限な射 $g : Y' \to Y$ を構成できる. また, 自然な射 $f' : X \to Y'$ は $f = f' \circ g$ を満たす (▲). $\mathcal{O}_{Y'} \cong f'_*\mathcal{O}_X$ となるから (▲), 補題 1.2.5 より f' のファイバーは連結である. X を正規と仮定すると, f' は Y' の正規化 Y'' までリフトされる (▲). しかし, f' のファイバーは連結であり, $Y'' \to Y$ は有限な射なので ($\because$ $Y'' \to Y'$ が有限な射であり, その合成も有限) $Y'' \cong Y'$ でなければならない (▲). □

定義 1.2.10. (stein 分解) 定理 1.2.9 の分解を, **Stein 分解 (Stein factorization)** という.

注意 1.2.11. Stein 分解を定義するまでの議論のスキームへの一般化として, Hartshorne 3.11,3.12 にコホモロジーを用いたものが載っている (ハズ).

系 1.2.12. 全射な射影多様体の射 $f : X \to Y$ で, Y が正規であり, f の一般ファイバーが連結と仮定する. このとき, f の任意のファイバーは連結である.

▲. f の Stein 分解, $X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g} Y$ を考える. 仮定より $\deg g = 1$ でなければならず ($\because$ g が正規化射であ

ることから, 体の拡大次数 $\mathbb{C}(Y) \subset \mathbb{C}(X)$ は 1 ▲), g は双有理かつ有限である. 定理 1.2.6 によると g のどのファイバーも 1 点なので, g は同型である. □

1.3　交点数, 数値的同値

$c_1 : \mathrm{Pic}\ X \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^2(X, \mathbb{Z})$ の, 直線束 $\mathcal{L}$ の像を $\mathcal{L}$ の**第 1Chern 類 (1th-Chern class)** と呼んだ. また, $\mathrm{Im}\ c_1$ を NS(X) と書き, X の **Neron-Severi 群 (Neron-Severi group)** と呼んだ. $NS(X)$ は有限生成アーベル群であり, その階数 $\rho(X)$ を **Picard(数)** と呼ぶ.

定義 1.3.1. 直線束 $\mathcal{L}_1, ..., \mathcal{L}_k$ および k 次元既約閉部分多様体 V に対し, それらの**交点数 (intersection number)** $(\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_k, V)$ を,

$$c_1(\mathcal{L}_1) \cdots c_1(\mathcal{L}_k)[V]$$

によって定める. すなわち, カップ積 $c_1(\mathcal{L}_1) \cdots c_1(\mathcal{L}_k) \in H^{2k}(X, \mathbb{Z})$ を, V のホモロジー類 $[V] \in H_{2k}(X, \mathbb{Z})$ で値を取ったもの (キャップ積) である.(▲) これは, $c_1(\mathcal{L}_1), ..., c_1(\mathcal{L}_k)$ についての多重線形形式である. $V = X$ のとき, $\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_k$ と略記する.

定義 1.3.2 (Cartier 因子の交点数)**.** X の Cartier 因子 $D_1, ..., D_n \in \mathrm{Div}(X)$ に対し, その交点数を

$$(D_1 \cdots D_k, V) \ := \ (\mathcal{O}_X(D_1) \cdots \mathcal{O}_X(D_k) \cdot V)$$

と定める. これは双一次形式, $\mathrm{Div}(X) \times Z_1(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ を定める. ここで, $Z_1(X)$ は X の 1 次元既約閉部分多様体のなすサイクルである.

定義 1.3.3. Cartier 因子 $D \in \mathrm{Div}(X)$ が**数値的に自明 (numerically trivial)** であるとは, 任意の 1 サイクル $C \in Z_1(X)$ に対し, $(D \cdot C) = 0$ を満たすことをいう. また, 1 サイクル $C \in Z_1(X)$ は, 任意の $D \in \mathrm{Div}(X)$ に対して $(D \cdot C) = 0$ を満たすとき数値的に自明であるという. 2 つの Cartier 因子 D_1, D_2 または 1 サイクル C_1, C_2 が**数値的に同値 (numerically equivalent)** であるとは, $D_1 - D_2$ (resp. $C_1 - C_2$) が数値的に自明であることをいい, $D_1 \equiv D_2$ (resp. $C_1 \equiv C_2$) と書く.

$N^1_{\mathbb{Z}}(X) := \mathrm{Div}(X)/\equiv$, $N_1^{\mathbb{Z}}(X) := Z_1(X)/\equiv$ とおく. すると, 交点数は非退化な双一次形式

$$N^1_{\mathbb{Z}}(X) \times N_1^{\mathbb{Z}}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

を定める. 特に $N^1_{\mathbb{Z}}(X)$ は自由加群である (▲) が, 実は $N^1_{\mathbb{Z}}(X) \cong NS(X)/tor$ であることを示すことができる (▲).

$N^1(X) := \mathbb{R} \otimes N^1_{\mathbb{Z}}(X)$, $N_1(X) := \mathbb{R} \otimes N_1^{\mathbb{Z}}(X)$ とおく. $C \in \mathbb{R} \otimes Z_1(X)$ は既約曲線 C_i の実数係数和 $\sum a_i C_i$ の形をしている. すべての a_i が 0 以上であるとき, C を**有効 1 サイクル (effective 1-cycle)** という.

定義 1.3.4. $C \in \mathbb{R} \otimes Z_1(X)$ を有効 1 サイクルとする. このとき, $[C] \in N_1(X)$ が**有効 (effective)** とは, その数値的同値類が有効 1 サイクルを含むことをいう. 有効 1 サイクルの全体 $NE(X) \subset N_1(X)$ を, **有効錐 (effective cone)** という. $\overline{NE}(X)$ を $NE(X)$ の閉包とする. $\overline{NE}(X)$ に属する有効 1 サイクルを**擬有効 (pseudo-effective)** という. $N^1(X)$ についても同様の方法で構成したものを, 有効錐 $\mathrm{Eff}(X)$ および擬有効錐 $\mathrm{PE}(X)$ と呼ぶ.

注意 1.3.5. 「$NE(X)$ の閉包」という言葉が出てきたが, $NE(X)$ は実際に凸錐であり, その閉包を考えている.(!! ▲)

定義 1.3.6 (超平面束)**.** $X = \mathbb{P}^n$, $H \subset X$ を方程式 $h = a_0x_0 + ... + a_nx_n$ で定義される超平面とする. また, X の標準被覆 { U_i } , i={0,...,n} に対して定まる H の Cartier 因子を $\{h_i, U_i\}_i$ とおく. このとき, 局所方程式 $\{h_i\}_i$ に対する変換関数系 $\{h_{ij}\}$ を, **超平面束 (hyperplane bundle)** という.

例 1.3.7 (Cartier 因子の線形同値)**.** $H, H' \subset X = \mathbb{P}W$ を n 次元射影空間の 2 つの超平面とする. H, H' のそれぞれを定義する方程式を h, h' とすれば, $\frac{h}{h'}$ は X 上の有理関数である. $h' = \frac{h}{h'}h$ であるから $H' \equiv H - (\frac{h}{h'})$. よって $H \equiv H'$ であり, $\mathcal{O}_X(H) \cong \mathcal{O}_X(H')$ が成立する.

1.4 線形系, 豊富因子

X を非特異射影代数多様体とする.

定義 1.4.1. $\mathcal{L}$ を X の可逆層とする. $0 \neq V \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ に対し, $|V| := \mathbb{P}(v^*)$ とおく. これを V の**線形系 (linear system)** という. 特に, $V = H^0(X, \mathcal{L})$ のとき $|V|$ を**完備線形系 (complete linear system)** という. Cartier 因子 D に対して, $|D| := |\mathcal{O}_X(D)|$ とおく. これは D と線形同値な有効因子全体と同一視できる.

定義 1.4.2. $s \in H^0(X, \mathcal{L})$ は, 層の準同型 $s : \mathcal{O}_X \to \mathcal{L}$ と同一視することができるので, 線形部分空間 $V \subset H^0(X, \mathcal{L})$ に対して評価写像,

$$ev : V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{L} \qquad , \ (s \otimes t \mapsto s(t))$$

が自然に定まる. 誘導される準同型写像 $V \otimes \mathcal{L}^{-1} \to \mathcal{O}_X$ (i.e. $\mathcal{L}^{-1}$ を両辺にテンソルしたもの) の像を $\mathfrak{b}(|V|)$ と書き, **基点イデアル (base ideal)** という. $\mathfrak{b}(|V|)$ の定める部分スキームを $|V|$ の**基点スキーム**といい, その台を $B_S|V|$ と書く. これを**基点集合 (base locus)** という. 基点スキーム $\mathfrak{B}$ の純 $n-1$ 次元部分 $\mathfrak{B}_0$ を**固定成分 (fixed part)** という. V の零でない元が定める有効因子 D に対して $D - \mathfrak{B}_0$ は有効因子である. 固定成分は, この性質を持つ有効因子のうち, (... に関して) 最大の有効因子である (▲). $|V| - \mathfrak{B}_0 := \{D - \mathfrak{B}_0 \mid D \in |V|\}$ を, $|V|$ の**可動部分 (movable part , variable part)** という. $B_S|V| = \emptyset$ のとき, $|V|$ は**基点を持たない**, あるいは**自由 (free)** という. 特に $B_S|\mathcal{L}| = \emptyset$ であるとき, $\mathcal{L}$ を**大域切断で生成される (globaly generated)** という.

注意 1.4.3.

(i) $\dim_{\mathbb{C}} V = N + 1 \geq 2$ と仮定する. このとき, $|V|$ は代数多様体の射,

$$\phi_{|V|} : X - B_S|V| \longrightarrow \mathbb{P}V \qquad , \ (p \mapsto (s_0(p) : ... : s_N(p)))$$

を定める. ここで $s_0, ..., s_N$ は V の基底である. $|V|$ が自由ならば, $\phi_{|V|}$ は X から $\mathbb{P}V$ への射となる ($\because$ 定義より $B_S|V| = \emptyset$ であるため)

(ii) 逆に, 代数多様体の射 $\phi : X \to \mathbb{P}V$ で, $\phi(X)$ がどんな超平面にも含まれないものが与えられたとする. このとき $\mathcal{L} = f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}V}(1)$ とおけば, ϕ による引き戻しで $V = H^0(\mathbb{P}V, \mathcal{O}_{\mathbb{P}V}(1)) \subset H^0(X, \mathcal{L})$ と見做すことができ, よって ϕ を自由な $|V|$ が定める $\phi_{|V|}$ と同一視することができる.

$|V|$ の一般の元については, 以下の有名な事実が知られている.

定理 1.4.4 (Bertini の定理)**.** $|V|$ を非特異射影多様体 X の基点を持たない線形系で, $\dim |V| = r \geq 1$ とする. このとき次が成り立つ:

(i) $\dim \phi_{|V|}(X) \geq 2 \Rightarrow$ 任意の $D \in |V|$ は既約な素因子.
(ii) $\dim \phi_{|V|}(X) = 1 \Rightarrow$ 任意の $D \in |V|$ は $d \geq r$ 個の素因子の和.
(iii) 任意の $D \in |V|$ に対し, $\mathrm{Sing}(D) \subset B_S|V|$.

命題 1.4.5. 非特異射影多様体 X 上の可逆層 $\mathcal{L}$ が定める有理写像 $\phi_{|\mathcal{L}|}$ に対し次が成立する:

(i) $H^1(X, \mathfrak{m}_x \cdot \mathcal{L}) = 0 \Rightarrow x \notin B_S|V|$ であり, $\phi_{|\mathcal{L}|}$ は x で定義される.
(ii) $H^1(X, \mathfrak{m}_x\mathfrak{m}_y \cdot \mathcal{L}) = 0 \Rightarrow 2$ 点 x, y は $\phi_{|\mathcal{L}|}$ によって異なる点に写る.
(iii) $H^1(X, \mathfrak{m}_x^2 \cdot \mathcal{L}) = 0 \Rightarrow \phi_|\mathcal{L}|$ の微分は x において単射.

証明. (1) 完全列,

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}_x \cdot \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow L_x \longrightarrow 0$$

を考える. ここで L_x は x 上のファイバーを表す. $x \notin B_S|\mathcal{L}|$ であるための必要十分条件は, 制限写像 $H^0(X, \mathcal{L}) \to L_x$ が非零であることである.(▲) 一方, 上の完全列よりコホモロジー長完全列,

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow & H^0(X, \mathfrak{m}_x \cdot \mathcal{L}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{L}) \longrightarrow H^0(X, L_x) \longrightarrow \\ & H^1(X, \mathfrak{m}_x \cdot \mathcal{L}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{L}) \longrightarrow H^1(X, L_x) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

を得る. 仮定より $H^1(X, \mathfrak{m}_x \cdot \mathcal{L}) = 0$ だから大域切断の完全列,

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathfrak{m}_x \cdot \mathcal{L}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{L}) \longrightarrow L_x \longrightarrow 0$$

を得る. よって $H^0(X, \mathcal{L}) \to L_x$ は零ではなく, したがって $x \notin B_S|\mathcal{L}|$.

(2) 2 点 $x, y \in X$ をとる. $\phi_{|\mathcal{L}|}(x) \neq \phi_{|\mathcal{L}|}(y)$ であるためには切断 $s, s' \in H^0(X, \mathcal{L})$ で, $s(x) = 0$ かつ $s'(x) \neq 0$ および $s(y) \neq 0$ かつ $s'(y) = 0$ を満たすものが存在しなければならない. そのための条件は完全列,

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}_x\mathfrak{m}_y \cdot \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow L_x \oplus L_y \longrightarrow 0$$

である (▲). したがって $H^1(X, \mathfrak{m}_x\mathfrak{m}_y \cdot \mathcal{L}) = 0$ が十分条件である.

(3)(▲) $\phi_{|\mathcal{L}|}$ の微分が $x \in X$ で単射であるためには, ... (ここは意味が読み取れていないので書くのをやめておく)

□

この命題の (1)(2)(3) がすべての $x, y \in X$ で成立するとき, $\phi_{|\mathcal{L}|}$ は X から射影空間への閉埋め込みを与える.

定義 1.4.6. 直線束 $\mathcal{L}$ は大域切断で生成されていて, かつ $\phi_{|\mathcal{L}|}$ が閉埋め込みを与えるとき, **非常に豊富 (very ample)** であるという. また, ある $m \in \mathbb{Z}$ が存在し, $\mathcal{O}_X(mD)$ が非常に豊富であるとき, これを**豊富な可逆層 (ample invertible sheaf)** といい, D を**アンプル因子 (ample divisor)** という.

注意 1.4.7. 特に, アンプル因子 D は $D^{\dim X} > 0$ を満たす.(▲ $D^{\dim X}$ とは？)

定理 1.4.8. X 上の直線束 $\mathcal{L}$ に対して次は同値:

(i) $\mathcal{L}$ は豊富.
(ii) 任意の連接層 $\mathcal{F}$ に対しある $m_1 \in \mathbb{Z}$ が存在し, 任意の $i > 0$ と任意の $m \geq m_1$ に対して $H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}) = 0$.
(iii) 任意の連接層 $\mathcal{F}$ に対しある $m_2 \in bZ$ が存在し, 任意の $m \geq m_2$ で $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}$ が大域切断で生成される.
(iv) ある $m_3 \in \mathbb{Z}$ があり, 任意の $m \geq m_3$ で $\mathcal{L}^{\otimes m}$ が非常に豊富となる.

定義 1.4.9. $\mathbb{R}$ 因子 $D \in \mathbb{R} \otimes \mathrm{Div}(X)$ が豊富とは, D が豊富因子の $\mathbb{R}$ 係数一次結合で書けることをいう. 豊富な因子全体を**アンプル錐 (ample cone)** といい, $Amp(X)$ と書く. また, $Nef(X) := \overline{Amp(X)}$ とおく. $Nef(X)$ に属する因子を**ネフ因子 (nef divisor)** という.

定理 1.4.10. $Amp(X)$ は $N^1(X)$ の開集合であり, $Nef(X)$ の内点全体である. また, $\overline{NE(X)}$ と $Nef(X)$ は次の意味で双対の関係にある:

$$Nef(X) \;=\; \{D \in N^1(X) \mid \forall C \in \overline{NE(X)},\ (D \cdot C) \geq 0\}$$
$$\overline{NE(X)} \;=\; \{C \in N_1(X) \mid \forall D \in Nef(X),\ (D \cdot C) \geq 0\}$$

証明. [7] 参照. □

注意 1.4.11. D がネフ因子ならば, 任意の豊富因子 A および正数 ϵ に対し, $D + \epsilon A$ は豊富である. よって注意 1.4.7 より $(D + \epsilon A)^{\dim X} > 0$ であり, $\epsilon \downarrow 0$ として $D^{\dim X} > 0$ を得る.

1.5 Chern 類, Riemann-roch の定理

X を n 次元非特異射影多様体, $\mathcal{E}$ を階数 r の局所自由層とする. $Sym^i(\mathcal{E})$ を i 次対称積とし, $Sym(\mathcal{E}) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} Sym^i(\mathcal{E})$ とする.

定義 1.5.1. $\mathbb{V}(\mathcal{E}^*) := \mathrm{Spec}_{\mathcal{O}_X}(Sym(\mathcal{E}))$ を**アフィン束 (Affine bundle)** という. また, $\mathbb{P}(\mathcal{E}) := \mathrm{Proj}_{\mathcal{O}_X}(Sym(\mathcal{E}))$ を**射影束 (Projective bundle)** という.

注意 1.5.2.

(i) $\mathcal{E}$ の階数が r の時, 射影束 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ は自然な射影 $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to X$ により $\mathbb{P}^{r-1}$ 束となる.
(ii) より幾何的な構成方法として,
$$\mathbb{P}(\mathcal{E}) \;=\; (\mathbb{V}(\mathcal{E}^*)/\mathbb{C}^*)$$
がある. $\mathbb{C}^*$ は各ファイバー $\pi^{-1}(x)$ ごとにスカラー倍として作用する.

定義 1.5.3. $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ の**普遍可逆層 (tautological line bundle)** とは, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ をいう. これは, $\pi^*\mathcal{E}$ の商層であり, 可逆層である. また, $\pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \cong \mathcal{E}$ を満たす.

π のファイバー $\pi^{-1}(x)$ は $r-1$ 次元射影空間 $\mathbb{P}^{r-1}$ と同型であり, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$ のファイバーへの制限は超平面束だから (▲), 任意の $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して,

$$\pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(m) \;\cong\; Sym^m(\mathcal{E}), \qquad \mathbf{R}^i\pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(m) = 0\ , (\forall i > 0)$$

が成立する．よって Leray Spectral Sequence を用いれば, X 上の局所自由層 $\mathcal{V}$ に対して,

$$H^p(\mathbb{P}(\mathcal{E}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \otimes \pi^*\mathcal{V}) \ \cong\ H^p(X, Sym^m(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{V})$$

が成立する ($\because$ 順像と逆像の随伴性による)．また $\Omega^1_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/X}$ に対して完全列,

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/X} \longrightarrow \pi^*\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \longrightarrow 0$$

が存在し (補題 1.12), したがって外積の計算も合わせて行うことにより, $\pi^* \bigwedge^r \mathcal{E} \ \cong\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(r) \otimes \bigwedge^{r-1} \Omega^1_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/X}$ を得る．これと, 完全列

$$0 \longrightarrow \pi^*\Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/X} \longrightarrow 0$$

(▲ 補題 1.12 と同様にして得るのか？？) より得られる同型 $K_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \cong \pi^* K_X \otimes \bigwedge^{r-1} \Omega^1_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/X}$ により, 以下を得る．

補題 1.5.4. $K_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(-r) \otimes \pi^*(K_X \otimes \bigwedge^r \mathcal{E})$

1.6 Albanese 写像

X を非特異射影多様体とする．特に X はコンパクトケーラー多様体でもある．よって, $H^1(X, \mathbb{C})$ は Hodge decomposition

$$H^1(X, \mathbb{C}) \ \cong\ H^0(X, \Omega^1_X) \bigoplus \overline{H^0(X, \Omega^1_X)}$$

を持つ．ここで, $\overline{H^0(X, \Omega^1_X)}$ は $H^0(X, \Omega^1_X)$ の複素共役を表す．よって $q = q(X) = \mathrm{dim} H^0(X, \Omega^1_X)$ とおくと, 第 1Betti 数は $b_1(X) = \mathrm{dim}_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathbb{C}) = 2q$ となる．$H^0(X, \Omega^1_X)$ および $H^1(X, \mathbb{Z})/tor$ の基底を $\{\omega_1, ..., \omega_q\}$, $\{\gamma_1, ..., \gamma_{2q}\}$ とする．

定義 1.6.1. 上の状況で $2q \times 2$ 行列,

$$PM := \begin{pmatrix} \int_{\gamma_1} \omega_1 & \dots & \int_{\gamma_1} \omega_q \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\gamma_{2q}} \omega_1 & \dots & \int_{\gamma_{2q}} \omega_q \end{pmatrix}$$

を, 正則 1 形式に関する**周期行列 (period matrix)** という．

注意 1.6.2. PM の $2q$ 個の行ベクトルは $\mathbb{R}$ 上一次独立である．実際,

$$\sum_{i=1}^{2q} a_i (\int_{\gamma_i} \omega_1, ..., \int_{\gamma_i} \omega_q) = 0\ ,\ a_i \in \mathbb{R}$$

を満たすと仮定する．このとき, 任意の正則 1 形式 ω に対して $\sum_i a_i \int_{\gamma_i} \omega = 0$ が成立する (▲) から, 特に $\sum_i a_i \int_{\gamma_i} \overline{\omega} = 0$ である．したがって,$H^1(X, \mathbb{C})$ の Hodge decomposition より, $H^1(X, \mathbb{C})$ 上の線型汎函数 $\sum_i a_i \int_{\gamma_i}$ は零であることがわかる．ホモロジーとコホモロジーの双対性 (Kronecker pairing) より, これは $\sum_i a_i \gamma_i = 0$ を意味し (▲), したがって $a_i = 0$ が $i = 1, ..., 2q$ に対して成立することがわかる．

周期行列の $2q$ 個の行ベクトルは $\mathbb{C}^q$ の格子を生成する (▲ $\gamma_i \in H^1(X, \mathbb{Z})$ であり, γ_i は $\mathbb{Z}$ 係数の一次結合でかけるため) から, 商をとると q 次元複素トーラスとなる．

定義 1.6.3. 上記の状況において, q 次元複素トーラス

$$Alb(X) \ := \ H^0(X, \Omega_X^1)/\mathrm{Im}\ H_1(X, \mathbb{Z})$$

を X の**アルバネーゼ多様体 (Albanese Manifold)** という. ここで Im $H_1(X, \mathbb{Z})$ は, $\gamma \in H_1(X, \mathbb{Z})$ に対して γ に沿った積分が定める $H^0(X, \Omega_X^1)$ 上の線型汎函数を対応させる写像 $H_1(X, \mathbb{Z}) \to H^0(X, \Omega_X^1)^\vee$ の像である.

定義 1.6.4 (アルバネーゼ写像)**.**

補題 1.6.5. **証明**. □

2 代数曲面の双有理幾何学

2.1 交点数と算術種数

X を既約な非特異射影曲面とする．被約かつ既約な曲線を既約曲線と呼ぶ．

注意 2.1.1. Hilzeburuch-Riemann-roch の定理より，X 上の可逆層 $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ に対し，

$$\begin{aligned}\chi(-\mathcal{L}-\mathcal{M}) &= \frac{1}{2}c_1(\mathcal{L}+\mathcal{M})(K_X + c_1(\mathcal{L}_+\mathcal{M}) + \chi(\mathcal{O}_X) \\ &= \frac{1}{2}c_1(\mathcal{L})(K_X + c_1(\mathcal{L})) + \frac{1}{2}c_1(\mathcal{M})(K_X + c_1(\mathcal{M})) \\ &\qquad + c_1(\mathcal{L})c_1(\mathcal{M}) + \chi(\mathcal{O}_X)\end{aligned}$$

が成立する．したがって，

$$c_1(\mathcal{L})c_1(\mathcal{M}) = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(-\mathcal{L}) - \chi(-\mathcal{M}) + \chi(-\mathcal{L}-\mathcal{M})$$

がわかる．既約な 2 曲線 C_1, C_2 に対してその交点数は $C_1C_2 = c_1(\mathcal{O}_X(C_1))c_1(\mathcal{O}_X(C_2))$ で定義されるので，

$$C_1C_2 = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{O}_X(-C_1)) - \chi(\mathcal{O}_X(-C_2)) + \chi(\mathcal{O}_X(-C_1-C_2))$$

を得る．

C_1, C_2 の大域切断 $s_1 \in H^0(X, \mathcal{O}_X(C_1)), s_2 \in H^0(X, \mathcal{O}_X(C_2))$ を考える． このとき，$\mathcal{O}_{C_1 \cap C_2} \cong \mathcal{O}_X/(\mathcal{O}_X(-C_1) + \mathcal{O}_X(-C_2))$ の Koszul 分解で得られる完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-C_1-C_2) \xrightarrow{(s_2,-s_1)} \mathcal{O}_X(-C_1) \bigoplus \mathcal{O}_X(-C_2) \xrightarrow{(s_1,s_2)} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{C_1\cap C_2} \longrightarrow 0$$

より，$\chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{O}_X(-C_1)) - \chi(\mathcal{O}_X(-C_2)) + \chi(\mathcal{O}_X(-C_1-C_2)) = \mathrm{dim}H^0(C_1 \cap\ C_2, \mathcal{O}_{C_1\cap C_2})$ であることがわかる．つまり，$C_1C_2 = \mathrm{dim}H^0(C_1 \cap\ C_2, \mathcal{O}_{C_1\cap C_2})$ である．
(同型 $\mathcal{O}_{C_1\cap C_2} \cong \mathcal{O}_X/(\mathcal{O}_X(-C_1) + \mathcal{O}_X(-C_2))$ は，$\mathcal{O}_X(-C_1), \mathcal{O}_X(-C_2)$ が C_1, C_2 のイデアル層と同型であることより従う.)

定義 2.1.2. C_1, C_2 と $p \in X$ に対して，C_1, C_2 の p での**局所交点数 (local intersection number)** とは，

$$I(C_1 \cap C_2, p) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,p}/(s_1, s_2) \qquad ,(s_i \in H^0(\{p\}, \mathcal{O}_X(-C_i)_p) \quad ?????\blacktriangle)$$

のことをいう．

命題 2.1.3.

$$C_1C_2 = \sum_{p\in X} I(C_1 \cap C_2, p)$$

定義 2.1.4. $I(C \cap C', p) = 1$ となることを点 $p \in X$ で**正規交叉 (normal crossing)** するという．

任意の因子 D_1, D_2 の交点数は，それらが含む既約曲線の交点数を計算することで得ることができる．具体的には次のように行う:

非常に豊富な因子 H を取れば, 注意 1.4.7 により—$D_i + H$—は自由であり, かつ $(D_i + H)^2 > 0$ が成立する. 従って定理 1.4.4 より任意の $A_i \in |D_i + H|$ は非特異既約曲線であることがわかる. A_1, A_2 は各点で横断的に交わるとしてよい. H は非常に豊富であることより, $B_1, B_2 \in |H|$ は横断的に交わるように取れる. さらに A_1, B_2 および A_2, B_1 は横断的に交わるとしてよい. ($\because$ 全て非特異既約曲線であるため)

このとき, D_i と $A_i - B_i$ は線形同値 ([3] Chapter4.3 参照) なので, D_1 と D_2 の交点数は,

$$D_1D_2 = (A_1 - B_1)(A_2 - B_2) = A_1A_2 - A_1B_2 - A_2B_1 + B_1B_2$$

のように計算される. 特に, $D^2 := DD$ を, D の**自己交点数 (self intersection number)** という. 同様の考え方で次が分かる:

補題 2.1.5. 既約曲線 C と可逆層 $\mathcal{L}$ に対し,

$$C\dot{\mathcal{L}} = \deg(\mathcal{L}|_C)$$

が成立する. ここで, $\deg(\mathcal{L}|_C)$ は正規化 $\nu : C' \to C$ で $\mathcal{L}$ を引き戻した可逆層 $\nu^*\mathcal{L}$ の次数である.

証明. 非常に豊富な因子 H をとり, $A \in|\mathcal{L}+H|$ および $B \in |H|$ を, A と C, B と C が C の非特異点で横断的に交わるようにとる. また $A \cap B \cap C = \emptyset$ としてもよい. このとき $C \cdot \mathcal{L} = C(A - B)$ である ($\because A - B \in |\mathcal{L}|$ より). 一方, $A - B$ が C 上に定める因子は, $\mathcal{L}|_C$ の有理切断が定める因子とみなすことが出来る. (より詳しく, $A - B \in |\mathcal{L}|$ であるので, 切断 $s \in \mathcal{O}_X(A - B)$ は $s \in \mathcal{L}$. $\mathcal{O}_X(A - B)$ は X の有理関数体が定める定数層の部分層であるから, s は有理関数である. 一方「C 上に定める」というのは (X 上の) 可逆層 $\mathcal{L}$ の $C \subset X$ への制限のことであり, よって s の C への制限 $s|_C$ も有理関数である. つまり「$A - B$ が C 上に定める因子」とは, $s|_C$ が定める C 上の因子のことである.) この解釈によると, AC は零点の位数の総和, BC は極の位数の総和である. 従って, その差 $C(A - B)$ は $\deg\mathcal{L}|_C$ と等しい. □

(めも) : 2 章冒頭の記述によれば $\mathcal{L} \cdot \mathcal{M} := c_1(\mathcal{L})c_1(\mathcal{M})$ だから, $C \cdot \mathcal{L} := C \cdot c_1(\mathcal{L})$.

補題 2.1.6.

(i) 既約曲線 C_1, C_2 の交点数 C_1C_2 は非負.
(ii) $C_1C_2 = 0 \Longleftrightarrow C_1 \cap C_2 = \emptyset$

注意 2.1.7. $D = \sum_i^n C_i$,(C_i は素因子) を X 上の因子とする. X の Affine 被覆 $\{U_a\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる. U_λ における, C_i の局所方程式を $f_{i,\lambda}$ とおく. $f_\lambda := \prod_{i=1}^n f_{i,\lambda}^{m_i}$ とおけば, $\{f_\lambda \cdot \mathcal{O}_X(U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ は $\mathcal{O}_X$ イデアル層 $\mathcal{I}_D$ を定義する. $\mathcal{I}_D \cong \mathcal{O}_X(-D)$ である (e.g. [3] Chapter2.6) から, D は $\mathcal{I}_D$ が定める X の 1 次元部分スキームと思うことが出来る.

定義 2.1.8. $D := \sum_{i=1}^n C_i$,(C_i は素因子) を有効因子とする. Supp $(D) := \bigcup_i^n C_i$ を D の**台 (Support)** という. 零でない有効因子 D を単に**曲線**とよぶ. また, $C := \sum_{i=1}^n k_iC_i$,($k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, k_i \leq m_i$) を D の**部分曲線**とよぶ. すべての k_i が 1 であるような部分曲線を D_red と書く. これは D に付随する被約スキームに他ならない.

補題 2.1.9. 曲線 D および既約曲線 C に対し, $CD < 0$ ならば C は D の部分曲線である. また, 曲線 D_1, D_2 に対し $D_1D_2 = 0$ のとき, 次のどちらかが成立する:

(i) $\mathrm{Supp}(D_1) \cap \mathrm{Supp}(D_2) = \emptyset$.

(ii) D_1 と D_2 は共通成分を持つ.

証明. 前半を示す. C が D の部分曲線でないと仮定する. すると, 任意の D の既約成分 C_i に対し $C \neq C_i$ であることより $CC_i \geq 0$. D は曲線でありしたがって有効因子だから, $CD \geq 0$ が成立する. 後半を示す. $\mathrm{Supp}(D_1) \cap \mathrm{Supp}(D_2) \neq \emptyset$ と仮定する. D_1, D_2 共に有効因子だから, 前半同様に $D_1 D_2 \geq 0$ を得る. しかし, $\mathrm{Supp}(D_1) \cap \mathrm{Supp}(D_2) = \emptyset$ であるから, $C_i D_2 > 0$ となるような D_1 の素因子が必ず存在する. よって $D_1 D_2 > 0$ でなければならない. D_1, D_2 の立場を入れ替えても同様である. よって証明終. □

D 上の直線束 $K_D \cong (K_X + [D])|_D$ は D の標準束, $\omega_D := \mathcal{O}_D(K_D)$ は双対化層である. D は非特異射影代数多様体であるので K_D と ω_D は同一視可能である.(e.g. [3]3 章 系 7.12) 完全列,

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-D) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0$$

から $\chi(\mathcal{O}_D) = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{O}_X(-D))$ が分かる. また, Riemann-roch の定理より,

$$\chi(\mathcal{O}_X(-D)) \;=\; \frac{1}{2}D(K_X + D) + \chi(\mathcal{O}_X)$$

が成立する. よって,

$$\chi(\mathcal{O}_D) \;=\; -\frac{1}{2}D(K_X + D)$$

が分かる. 左辺は (コホモロジーの次元なので) 整数であるから, 右辺も整数でなければならない. つまり $D(K_X + D)$ は**常に偶数である**.

定義 2.1.10. X の曲線 D に対し,

$$p_a(D) = \frac{1}{2}D(K_X + D) + 1$$

を D の**算術種数 (arithmetic genus)** または**仮想種数 (virtual genus)** という.

これより, ただちに $\chi(\mathcal{O}_D) = 1 - p_a(D)$ が分かる. また, 次が成り立つ.

命題 2.1.11. $\deg K_D = 2p_a(D) - 2$

証明. (Hartshorne(5 章の adjunction formula あたりの議論のはず....) をみて書く)

□

補題 2.1.12. X 上の素因子 D に対して, $h^0(D, \mathcal{O}_D) \;:=\; \dim_{\mathbb{C}} H^0(D, \mathcal{O}_D) = 1$

証明. 詳細は [4]6 章を参照. ここではスケッチのみを与える. 仮定より D は射影曲線である. よって D を $\mathbb{P}^2$ の d 次超曲面とみてよい. すると完全列,

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0$$

を得る. これより等式,

$$\chi(\mathcal{O}_D) = \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) - \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d)) = 1 - \binom{d-1}{2}$$

を得る... □

系 2.1.13. $p_a(D) = h^1(D, \mathcal{O}_D)$

証明. 上の解説より $\chi(\mathcal{O}_D) = 1 - p_a(D)$ である．一方, 補題 2.1.12 より $\chi(\mathcal{O}_D) = h^0(D, \mathcal{O}_D) - h^1(D, \mathcal{O}_D) = 1 - h^1(D, \mathcal{O}_D)$ を得る．したがって, $p_a(D) = 1 - \chi(\mathcal{O}_D) = -1 - (1 - h^1(D, \mathcal{O}_D)) = h^1(D, \mathcal{O}_D)$ を得る． □

2.2　可約曲線

定義 2.2.1. 曲線 D が素因子でないとき, 部分曲線の和 $D = D_1 + D_2$ に分解できる．これを D の**有効分解 (effective)** という．

命題 2.2.2. D の有効分解 $D = D_1 + D_2$ に対し,

$$p_a(D) = p_a(D_1) + p_a(D_2) - 1 + D_1 D_2$$

証明. 交点数の双線型性より $D(K_X + D) = D_1(K_X + D_1) + D_2(K_X + D_2) + 2D_1D_2$ である．よって,

$$\begin{aligned} p_a(D) &= \frac{1}{2}(D_1(K_X + D_1) + D_2(K_X + D_2) + 2D_1D_2) + 1 \\ &= p_a(D_1) - 1 + p_a(D_2) - 1 + 1 + D_1D_2 \\ &= p_a(D_1) + p_a(D_2) - 1 + D_1D_2 \end{aligned}$$

□

命題 2.2.3. 曲線 D の真部分曲線 C に対し, 制限写像 $\phi : \mathcal{O}_D \twoheadrightarrow \mathcal{O}_C$ は以下の完全列を誘導する．

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{D-C}(-C) \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0$$

証明. 以下の図式を考える:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & 0 & & \\ & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & ker\phi & \longrightarrow & \mathcal{O}_D & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{O}_C & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & & & \mathcal{O}_X & = & \mathcal{O}_X & & \\ & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_D & \longrightarrow & \mathcal{I}_C & \longrightarrow & \mathcal{I}_C/\mathcal{I}_D & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

これより $ker\phi \cong \mathcal{I}_C/\mathcal{I}_D \cong \mathcal{O}_{D-C}(-C)$ が分かる.(らしい....... まだ追えてない) □

上記の完全列を**分解列 (decomposition sequence)** とよぶ.

定理 2.2.4 (可約曲線の Riemann-roch の定理)**.** 曲線 $D := \sum m_i C_i$ 上の直線束 L に対し,

$$h^0(D, L) - h^1(D, L) = \deg L + 1 - p_a(D)$$

が成立する．ただし $\deg L = \sum m_i L|_{C_i}$ である．

証明. D の既約成分の数に関する帰納法を用いる．まず D が素因子のときは, 通常の Riemann-roch の定理である．D の既約成分 C を一つとる．$D-C$ で Riemann-roch の定理が成立すると仮定したとき, D でも Riemann-roch が成立することを示そう．D の分解列,

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{D-C}(L-C) \longrightarrow \mathcal{O}_D(L) \longrightarrow \mathcal{O}_C(L) \longrightarrow 0$$

から,

$$\chi(\mathcal{O}_D(L)) = \chi(\mathcal{O}_{D-C}(L-C)) + \chi(\mathcal{O}_C(L))$$

が成立する．一方で, (C は素因子であるから)C にも Riemann-roch の定理が成立することに注意すると,

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{O}_{D-C}(L-C)) &= \deg(L-C) + 1 - p_a(D-C) \\ &= \deg L|_{D-C} - C(D-C) + 1 - p_a(D-C) \\ \chi(\mathcal{O}_C(L)) &= \deg L|_C + 1 - p_a(C)\end{aligned}$$

がわかる ($\because$ 上の式が▲)．よって, $\chi(\mathcal{O}_D(L)) = \deg L|_{D-C} + \deg L|_C + 2 - C(D-C) - p_a(D-C) - p_a(C)$ が成立する．ここで, $\deg L = \deg L|_{D-C} + \deg L|_C (\because$ ▲$)$, $p_a(D) = p_a(D-C) + p_a(C) - 1 + C(D-C)$ だから, $\chi(D,L) = \deg L + 1 - p_a(D)$ である． □

補題 2.2.5. 曲線 D 上の任意の直線束 L と部分曲線 C に対し, $h^1(C,L) \leq h^1(D,L)$ が成り立つ．特に, $h^1(C,\mathcal{O}_C) \leq h^1(D,\mathcal{O}_D)$ である．

証明. 分解列に L をテンソルし, コホモロジー長完全列を得る．$D-C$ の次元は 1 だから, $H^i(D-C,L) = 0$,$(i \geq 2)$ である．よって $H^1(D,L) \to H^1(C,L)$ は全射であり, $H^1(C,L)$ の次元は $H^1(D,L)$ より高くはなり得ない． □

注意 2.2.6. 可約な曲線上の直線束 L に対して, その大域正則切断の零点は必ずしも 0 次元 (i.e. 点) とは限らない．どんな大域切断をとっても, ある既約成分で恒等的に零になる可能性もある．

定義 2.2.7 (可約曲線のネフ性)**.** 曲線 $D = \sum m_i C_i$ がネフとは, 任意の既約成分 C_i に対し $\deg L|_{C_i} \geq 0$ となることをいう．$\deg L|_{C_i} > 0$ ならば L は豊富であるという．$-L$ がネフであるとき, L を**反ネフ (anti-nef)** という．2 つの D 上の直線束 L, M が**数値的同値 (numerically equivalent)** とは, 任意の既約成分 C_i に対して, $\deg L|_{C_i} = \deg M|_{C_i}$ となることをいい, $L \equiv M$ と書く．

定理 2.2.8. L を曲線 D 上の直線束, $s \in H^0(D,\mathcal{L})$ を零でない切断とする．

(i) s が D のどの既約成分でも恒等的に零ではない (i.e. $\forall C_i$,$s|_{C_i} \neq 0$ であるとき), L はネフである．さらに $\deg L = 0$ ならば $\mathcal{O}_D(L) \cong \mathcal{O}_D$.

(ii) s が D のある既約成分で恒等的に零になるとする．s がその上で恒等的に零になるような D の部分曲線のうちで最大のものを $Z = Z_s$ とすると, $\mathcal{O}_{D-Z}(L-Z)$ はネフである．特に,

$$\deg L|_{D-Z} \geq Z(D-Z)$$

が成立し, 等号が成立すれば $\mathcal{O}_{D-Z}(L-Z) \cong \mathcal{O}_{D-Z}$ が成立する．

証明. (1) C を D の既約成分とする．すると, 仮定より $s|_C \neq 0$. よって $\mathrm{deg}L \geq 0$ だから L はネフ．また, $\mathrm{deg}L = 0$ ならば $\mathcal{O}_D \otimes L \cong \mathcal{O}_D$.
(2) 分解列に L をテンソルして得られる完全列,

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{D-Z}(L-Z) \longrightarrow \mathcal{O}_D(L) \longrightarrow \mathcal{O}_Z(L) \longrightarrow 0$$

に対し, 大域切断をとる関手を施すことで,

$$0 \longrightarrow H^0(D-Z, \mathcal{O}_{D-Z}(L-Z)) \xrightarrow{f} H^0(D,L) \xrightarrow{g} H^0(Z,L)$$

を得る．このとき, 仮定より $s \in$Ker f だから, 零でない元 $s' \in H^0(D-Z, (L-Z)|_{D-Z})$ で $s = s'\zeta$ となるものが存在する (▲)．ここで $\zeta \in H^0(X, [Z])$ は主因子 (ζ) が Z となるような切断である (また, $[Z]$ は Z から定まる直線束である▲)．Z の取り方より, s' は $D-Z$ のどの既約成分でも恒等的に零になることはない．よって (1) より $L-Z$ は $D-Z$ 上ネフである．特に $0 \leq \mathrm{deg}(L-Z)|_{D-Z} = \mathrm{deg}L|_{D-Z} - Z(D-Z)$ が成立する．もし, 等号が成立すれば再び (1) より $\mathcal{O}_{D-Z}(L-Z) \cong \mathcal{O}_{D-Z}$ が成立する． □

系 2.2.9. 曲線 D とその上の直線束 L に対し, $H^1(D,L) \neq 0$ ならば D の部分曲線 Δ で $\mathcal{O}_\Delta(K_\Delta - L)$ がネフであるようなものが存在する．このとき特に L が Δ 上ネフならば, K_Δ もネフであって, $p_a(\Delta) \geq 0$.

証明. $H^1(D,L) \neq 0$ だから, Serre 双対によって $H^0(D, K_D - L) \neq 0$($\because$ Serre 双対で $\mathbb{C}$ ベクトル空間としての同型 $H^1(D,L) \cong H^0(D, K_D - L)^\vee$ が存在する．よって, $H^0(D, K_D - L) \neq 0$)．非零元 $s \in H^0(D, K_D - L)$ をとる．s がその上で恒等的に零になるような最大の部分曲線 Z_s をとり, $D - Z_s$ とおく．($Z_s = 0$ の場合もあり得る) このとき $\mathcal{O}_\Delta(K_D - L - Z_s) \cong \mathcal{O}_\Delta(K_\Delta - L)$ なので, 定理 2.2.8 より $\mathcal{O}_\Delta(K_\Delta - L)$ はネフであり前半の主張を得る．さらに, このとき L がネフであるとすると K_Δ もネフであり (▲), 特に $0 \leq \mathrm{deg}K_\Delta = 2p_a(\Delta) - 2$ が成立する (▲). □

系 2.2.10. 曲線 D に対し, 次は同値：

(i) $H^1(D, \mathcal{O}_D) = 0$.
(ii) D 自身を含めた任意の部分曲線 Δ に対し, $p_a(\Delta) \leq 0$.

さらに上記を満たす D を取るとき, 任意の直線束 L に対して $H^1(D,L) = 0$ であり, $h^0(D,L) = \mathrm{deg}L + h^0(D, \mathcal{O}_D)$ が成り立つ.

証明. (1)⇒(2)：補題 2.2.5 を用いると, $p_a(\Delta) \leq h^1(\mathcal{O}_\Delta) \leq h^1(\mathcal{O}_D))$ が成り立つ (注意 2.2.11 参照)．仮定より $h^1(\mathcal{O}_D) = 0$ なので主張を得る．(2)⇒(1)：$L = \mathcal{O}_D$ と仮定して系 2.2.9 を適用すればよい．具体的には (2) が系 2.2.9 の対偶の仮定を満たすので, $H^1(D, \mathcal{O}_D) = 0$ を得る．後半の主張は, $H^i(D,L) \cong H^i(D, L \otimes \mathcal{O}_D) \cong H^i(D, \mathcal{O}_D) \otimes L$(▲▲右側の式変形うろ覚え.... 要出典確認) より従う． □

注意 2.2.11. D が素因子でない一般の曲線のとき, 算術種数は負になりえる．すなわち, D が素因子のときに成立していた等式 $p_a(D) = 1 - \chi(\mathcal{O}_D) = h^1(D, \mathcal{O}_D)$ は不等式,

$$p_a(D) \leq 1 - \chi(\mathcal{O}_D) = h^1(D, \mathcal{O}_D)$$

となるので注意が必要.

定義 2.2.12. $H^1(D, \mathcal{O}_D) = 0$ であるような曲線 D を, **有理曲線 (rational curve)** という．このとき, D のどんな部分曲線も有理的であり, 特に既約成分は $\mathbb{P}^1$ である．

補題 2.2.13. L を曲線 D 上の直線束, D の既約成分 A をとる．また A を含む D の部分曲線 Δ を, $H^0(D,L) \to H^0(\Delta,L)$ が全射であるようなもののうち極小なものとする．このとき, 次のどちらかが成立する：

(i) $K_\Delta - L$ は Δ 上ネフである.

(ii) A は Δ の重複度 1 の成分で, $K_\Delta - L$ は $\Delta - A$ 上ネフであり, $\deg(L-(\Delta-A))|_A > K_A$ が成立する．さらに, 制限写像 $H^0(D,L) \to H^0(A,L)$ の像は自然な単射 $H^0(A, L-(\Delta-A)) \to H^0(A,L)$ の像を含む.

3 安定性と Bogomolov の定理

3.1 代数曲線上の局所自由層

X を $\mathbb{C}$ 上定義された既約な非特異射影曲線とする.

定義 3.1.1. X 上の連接層 $\mathcal{F}$ に対し, その捩れ層全体 $\mathcal{F}_{tor}$ は部分層となる. これを**部分捩れ層**という. $\mathcal{F}_{tor}$ が零層のとき, $\mathcal{F}$ を**捩れのない層 (torsion free sheaf)** という.

補題 3.1.2. 非特異代数曲線上の捩れのない層は局所自由層である.

証明. $\mathcal{E}$ を捩れのない層とする. 任意の (閉？？) 点 $x \in X$ に対し, $\mathcal{E}_x$ は有限生成 $\mathcal{O}_{X,x}$ 加群である. $\mathcal{O}_{X,x}$ は単項イデアル整域だから, 単項イデアル整域上の有限生成加群の構造定理 (cf.–) によって, $\mathcal{E}_x$ は自由部分と捩れ部分の直和となる. 一方, 仮定より $\mathcal{E}$ は捩れを持たない層だから, $\mathcal{E}_x$ は自由 $\mathcal{O}_{X,x}$ 加群である. □

注意 3.1.3. (TODO) 上の補題の条件, 非特異代数曲線を高次の代数多様体にすると何が障害になる？

系 3.1.4. 非特異代数曲線上の局所自由層の部分層は局所自由層である.

証明. 捩れを持たない層の部分層も捩れを持たない. よって上の補題より従う. □

補題 3.1.5. 非特異射影曲線上の連接層は局所自由層と捩れ層の直和.

証明. 連接層 $\mathcal{F}$ の捩れ部分層を $\mathcal{E}$ とし, $\mathcal{G} = \mathcal{F}/\mathcal{E}$ とおく. また, 商写像 $p : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ とおく. 作り方より $\mathcal{G}$ は捩れのない連接層だから, 補題 3.1.2 より $\mathcal{G}$ は局所自由層である. 完全列,

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

に左完全関手, $\mathcal{H}om(\mathcal{G}, -)$ を施すと完全列,

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{G},\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{G},\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{G},\mathcal{G}) \longrightarrow 0$$

を得, コホモロジー長完全列

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{H}om(\mathcal{G},\mathcal{F})) \longrightarrow H^0(\mathcal{H}om(\mathcal{G},\mathcal{G})) \longrightarrow H^1(\mathcal{G},\mathcal{E})0 >>> 0$$

を得ることができる. $\mathcal{H}om(\mathcal{G},\mathcal{E})$ は台が高々有限個の点集合なので, $H^1(\mathcal{H}om(\mathcal{G},\mathcal{E})) = 0$ である ($\because$ $\mathcal{H}om(\mathcal{E},\mathcal{G})$ は摩天楼層 $\Leftrightarrow$ 脆弱 $\Leftrightarrow$ $H^i(\mathcal{H}om(\mathcal{E},\mathcal{G})) = 0$,$(\forall i > 0)$. したがって $p \circ s = \mathrm{id}$ となる $s \in \mathcal{H}om(\mathcal{G},\mathcal{F})$ が存在する (▲). よって一番上の完全列は分裂し, $\mathcal{F} \cong \mathcal{G} \bigoplus \mathcal{E}$ である. □

1 章において捩れのない層の部分層について, それが捩れを持たないとき飽和部分層 (saturated subsheaf) であると定義した. 局所自由層の商層が必ずしも局所自由ではない例を見る.

例 3.1.6. $\mathcal{O}_X$ 局所自由層 $\mathcal{F}$ で, 非零な大域切断 $s \in H^0(X,\mathcal{F})$ を持つものを考える. すると, s の積による単射 $\mathcal{O}_X \xrightarrow{s} \mathcal{F}$ がある.(斉次元 s の積による振りを考えている) このとき, 商層 $\mathcal{F}/\mathcal{O}_X$(▲ $\mathcal{F}/s.\mathcal{O}_X$ の間違い？) の台は s の零点集合なので, これは捩れを持つ.

同じように, 局所自由層 $\mathcal{F}$ の部分層 $\mathcal{G}$ による商 $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ が局所自由層であるとき, $\mathcal{G}$ を飽和部分層という. 飽和部分層に対しては以下を確かめることができる. 飽和という性質は推移的である. すなわち, $\mathcal{G}_1$ が $\mathcal{F}$ の飽和

部分層であり $\mathcal{G}_2$ が $\mathcal{G}_1$ の飽和部分層ならば, $\mathcal{G}_2$ は $\mathcal{F}$ の飽和部分層である. 実際, $(\mathcal{F}/\mathcal{G}_1)/(\mathcal{G}_1/\mathcal{G}_2) \cong \mathcal{F}/\mathcal{G}_2$(▲要出典) だが, 仮定より捩れのない層同士の商なので, 捩れを持たない.

さて, 連接層の階数を定義する.

定義 3.1.7. 連接層 $\mathcal{F}$ の自由部分の階数を $\mathcal{F}$ の**階数 (rank)** という. 階数は以下の加法性を持つ: $\mathcal{F}$ の自由部分を $\mathcal{E}$ とおくとき,

$$\mathrm{rank}(\mathcal{F}) = \mathrm{rank}(\mathcal{E}) + \mathrm{rank}(\mathcal{F}/\mathcal{E})$$

補題 3.1.8. $\mathcal{G}$ を局所自由層 $\mathcal{F}$ の部分層とする. このとき, $\mathcal{G}$ を含む $\mathcal{F}$ の飽和部分層 $\tilde{(}\mathcal{G})$ で $\mathrm{rank}(\mathcal{G}) = \mathrm{rank}(\tilde{(}\mathcal{G}))$ を満たすものが唯一存在する.

証明. GoodNote メモへ記載. □

上のような $\tilde{(}\mathcal{G})$ を**飽和化 (saturation)** という. これは $\mathcal{G}$ の二重双対 $\mathcal{G}^{**}$ に他ならない.

次に, X 上の局所自由層の行列式束の定義を与える.

定義 3.1.9. X 上の階数 r の局所自由層 $\mathcal{F}$ の**行列式束 (determinant bundle)** とは,

$$\det(\mathcal{F}) \ := \ \bigwedge^r \mathcal{F}$$

をいう.

$\det(\mathcal{F})$ は X 上の可逆層となる. $\det(\mathcal{F})$ の次数を局所自由層としての次数と定義し, $\mathrm{degdet}(\mathcal{F})$ と書く.

補題 3.1.10. X 上の局所自由層の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0$$

に対し, $\deg(\mathcal{F}_2) = \deg(\mathcal{F}_1) + \deg(\mathcal{F}_3)$ が成立する.

証明. 省略. 例えば [3] などを参照. □

定義 3.1.11 (局所自由層の傾き)**.** X 上の局所自由層 $\mathcal{F}$ に対し,

$$\mu(\mathcal{F}) \ := \ \frac{\deg(\mathcal{F})}{\mathrm{rank}(\mathcal{F})}$$

を, $\mathcal{F}$ の**傾き (slope)** という.

定義 3.1.12. 局所自由層 $\mathcal{F}$ の**フィルトレーション (filtlation)** とは, 飽和部分層の列 $\mathcal{F}_0, ..., \mathcal{F}_n$ であり,

$$0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$$

を満たすものをいう. 特に $\mathrm{rank}(\mathcal{F}_i) = i$ が全ての $i = 0, ..., n$ で成り立つようなフィルトレーションを**トータルフィルトレーション**という.

命題 3.1.13. 任意の局所自由層はトータルフィルトレーションを持つ.

証明. (飽和部分層を持つこと) $\mathcal{E}$ を局所自由層とする. 次数が十分に大きな可逆層 $\mathcal{L}$ をとり, $H^0(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}) \neq 0$ とできる. このとき $s \in H^0(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L})$ を掛けることで, 単射 $\mathcal{L}^* \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ を得る. この像の飽和化 $\mathcal{E}_1$ を取ればそれが求める可逆層である.

(トータルフィルトレーションを持つこと) $\mathcal{E}$ の階数 i の帰納法で示す．階数 1 なら示すべきことは何もない ($\because 0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}$ だから確かに $\mathrm{rank}\mathcal{E}_i = i$ である)．次に $\mathrm{rank}\mathcal{E}' < r = \mathrm{rank}\mathcal{E}$ なる局所自由層が全てトータルフィルトレーションを持つと仮定する．上で存在を示した飽和可逆部分層 $\mathcal{E}_1$ をで $\mathcal{E}$ を割ると $\mathrm{rank}\mathcal{E}/\mathcal{E}_1 = r-1$．よって, 帰納法の仮定より $\mathcal{E}/\mathcal{E}_1$ はトータルフィルトレーションを持つ．これを $\tilde{\mathcal{E}_2} \subset \tilde{\mathcal{E}_3} \subset ... \subset \tilde{\mathcal{E}_r}$ とおく．これを商写像 $\mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{E}_1$ で引き戻すと, 商の取り方から $\tilde{\mathcal{E}_2} \subset \tilde{\mathcal{E}_3} \subset ... \subset \tilde{\mathcal{E}_r}$ の引き戻しは $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}_3 \subset ... \subset \mathcal{E}_r$ に対応することがわかる (▲ 逆像の取り方によらないことを示さないといけなそう？ $\mathcal{E}_1$ での商だから明らかではあるが)．この系列に $\mathcal{E}_1$ を加えたものが $\mathcal{E}$ のトータルフィルトレーションである． □

補題 3.1.14. *X を種数 g の非特異射影曲線とする．2 つの可逆層 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ に対し*

$$\mathrm{deg}\mathcal{L}_2 < \mathrm{deg}\mathcal{L}_1 - 2g + 2 \tag{1}$$

であるとき, 完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{L}_2 \longrightarrow 0$$

は分裂する．

証明. 完全列に対して $\mathcal{H}om(\mathcal{L}_2, -)$ を施し, コホモロジー長完全列

$$H^0(\mathcal{H}om(\mathcal{L}_2, \mathcal{E})) \to H^0(\mathcal{H}om(\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_2)) \to H^1(\mathcal{H}om(\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1))$$

を得る．ここで $\mathcal{H}om(\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1) \cong \mathcal{L}_2^\vee \otimes \mathcal{L}_1$ であり, $\mathrm{deg}\mathcal{L}_2^\vee \otimes \mathcal{L}_1 = \mathrm{deg}\mathcal{L}_1 - \mathrm{deg}\mathcal{L}_2$ なので, 仮定 (1) よりこれは $2g-2$ より真に大きいことがわかる．よって $H^1(\mathcal{H}om(\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1)) = 0$ が成立する (▲ TODO : Riemann-roch を使えば計算できそう？)．よって $\alpha : \mathcal{E} \to \mathcal{L}_2$ に対し, $\beta \in H^0(\mathcal{H}om(\mathcal{L}_2, \mathcal{E}))$ が存在して $\alpha \circ \beta = id_{\mathcal{L}_2}$ となる．よって, 式 (1) は分裂する． □

定理 3.1.15. *射影直線 $\mathbb{P}^1$ 上の局所自由層は可逆層の直和である．*

証明. GoodNote 参照. 要点のみ記す: (1)$\mathcal{E}$ の次数の操作は可逆層を掛けることによって行う． □

3.2 安定性

局所自由層の安定性と正値性には密接な関係がある．この節ではそれを見る．X を引き続き非特異射影曲線とする．X 上の局所自由層 $\mathcal{E}$ に対して, その次数を行列式束の次数, すなわち $\mathrm{deg}\mathcal{E} = \mathrm{deg}(\bigwedge^r \mathcal{E})$ によって定めたのだった．

補題 3.2.1 (slope の有界性)**.** *X の種数を g とする．X 上の局所自由層に対し, その部分層の slope は上に有界である．すなわち, 任意の $\mathcal{E}$ の部分層 $\mathcal{F}$ に対し $\mu(\mathcal{F}) \geq N$ を満たすような $\mathcal{E}$ と g のみに依存する定数 N が存在する．*

証明. □

定義 3.2.2 (安定, 半安定層)**.** $\mathcal{E}$ を局所自由層とする．任意の部分層 $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ に対し, $\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{E})$ が成立するとき $\mathcal{E}$ を**安定 (stable)** であるという．また等号を含む条件 $\mu(\mathcal{F}) \geq \mu(\mathcal{E})$ のとき**半安定 (semi stable)** という．半安定でない $\mathcal{E}$ を**不安定 (unstable)** という．

補題 3.2.3 (双対層の半安定性)**.** $\mathcal{E}$ が半安定ならば $\mathcal{E}^\vee$ も半安定.

証明. □

補題 3.2.4 (半安定層間の slope の関係)**.** X 上の半安定層 $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ の間に非零な準同型写像 $s : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ が存在すれば, $\mu(\mathcal{E}_1) \geq \mu(\mathcal{E}_2)$.

定義 3.2.5 (Harder-Narashimhan filtration)**.**
局所自由層 $\mathcal{E}$ のフィルトレーション

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_n = \mathcal{E}$$

は, 以下の 2 条件を満たすとき **Harder-Narashimhan フィルトレーション (Harder-Narashimhan filtration)** という:

(i) 任意の i に対し, $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ は半安定.
(ii) 各 $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ についてスロープは単調減少, すなわち各 $i \in \{2, ..., n\}$ に対して不等式

$$\mu(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}) < \mu(\mathcal{E}_{i-1}/\mathcal{E}_{i-2})$$

を満たす.

定義 3.2.6. 局所自由層 $\mathcal{E}$ が不安定であるとき, フィルトレーションの $\mathcal{E}_1$ を**極大不安定化部分層 (maximal distabilizing subsheaf)** という.

以下, Harder-Narachimhan filtration を HNF と略記する.

補題 3.2.7. $\mathcal{E}$ の HNF に対して,

$$0 = (\mathcal{E}/\mathcal{E}_n)^\vee \subset (\mathcal{E}/\mathcal{E}_{n-1})^\vee \subset \cdots \subset \mathcal{E}$$

は $\mathcal{E}^\vee$ の HNF である.

証明. □

補題 3.2.8. $\mathcal{E}$ が HNF を持つとき, 任意の部分層 $\mathcal{F}$ に対して $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E}_1)$ が成立する.

証明. □

定理 3.2.9. 非特異射影曲線上の任意の局所自由層 $\mathcal{E}$ に対し, その HNF が唯一つ存在する.

証明. □

局所自由層 $\mathcal{E}$ の Harder-Narashimhan filtration

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \mathcal{E}_n = \mathcal{E}$$

に対し, $\mu_{\max}(\mathcal{E}) := \mu(\mathcal{E}_1)$,$\mu_{\min}(\mathcal{E}) := \mu(\mathcal{E}/\mathcal{E}_{n-1})$ とおく. $\mathcal{E}$ が半安定の場合は $\mu_{\max}(\mathcal{E}) = \mu_{\min}(\mathcal{E}) = \mu(\mathcal{E})$ であると了解する (▲).

定義 3.2.10. $\mu_{\min}(\mathcal{E}) > 0$ のとき $\mathcal{E}$ を**アンプル (ample)** という. $\mu_{\min} \geq 0$ のとき $\mathcal{E}$ を**ネフ (nef)** という.

$\mathcal{E}$ が ($\mu_{\min}(\mathcal{E}) > 0$ の意味での) アンプルであることは, 任意の $\mathcal{E}$ の商層の slope が正であることを意味する. また $\mathcal{E}$ に付随する射影束 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ の普遍可逆層 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ がアンプルであるという解釈も成立する.

参考文献

[1] D.Huybrechts *Fourier-Mukai transform in Algebraic Geometry* Oxford Mathmetical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford (2006)

[2] 上原北斗／戸田幸伸,「連接層の導来圏と代数幾何学, シュプリンガー現代数学シリーズ, 丸善出版 (2020)

[3] R.Hartshorne *Algebraic Geometry*, Springer (1977)

[4] 上野健爾,「代数幾何 1,2,3」, 岩波講座現代数学の基礎シリーズ, 岩波書店 (2001)

[5] 安藤哲哉,「代数曲線・代数曲面入門 新装版ー複素代数幾何の源流」, 数学書房 (2011)

[6] aaa

[7] aaa