Bridgeland 安定性条件と代数多様体への応用

@sachiiiimath

2024 年 2 月 11 日

概要

T.Bridgeland の論文 [Br07] によって構成された三角圏の安定性条件とその代数多様体への応用について, 自分用に作成したまとめです. 大雑把な情報収集を目的としているため, 各定理の証明は幾つかを除き, 基本的に原論文への案内に留めるか, 細部に踏み込まずにスケッチとして与えています. もしお気づきの事柄がありましたらどんなに些細なことでも構いませんので教えていただけれると幸いです. (X アカウント : @sachiiiimath)

・専門家の査読を受けている訳ではありませんので, **誤りが含まれる可能性があります**.

・2024 年 2 月時点で**作成中**のステータスであり, 十分な校閲が出来ておりません. 誤字や表記のブレなどミスが沢山あるかと思います. ご容赦頂ければ幸いです.

目次

1 導入

三角圏上の安定性条件は, 超弦理論における Douglas-Π 安定性の数学的定式化のために T.Bridgeland により [Br07] で導入された概念であるが, 現在では様々な分野で応用がある. ここでは特に代数多様体上の安定性条件に関する事柄, とりわけ安定空間の壁越えについて述べる. この資料で扱う三角圏や Abel 圏は本質的に小さい圏と仮定する.

2 Bridgeland 安定性条件

初めに [Br07] で導入された一般の三角圏上の安定性条件について定義し, 種々の性質を見る. 三角圏, Abel 圏および K 群に関する必要事項は補足にまとめる.

2.1 安定関数

まずは安定関数の定義から行う. $\mathcal{A}$ を Abel 圏とする. $K(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ の K 群とする.

定義 2.1.1

$\mathcal{A}$ 上の**安定関数 (stability function)** とは, 群準同型 $Z : K(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ であって,

$$Z(K(\mathcal{A}) \setminus \{0\}) \subset \mathbb{H} := \{r \cdot exp(\sqrt{-1}\pi\phi) \mid r \in \mathbb{R}_{>0}, \phi \in (0,1]\}.$$

を満たすものをいう. E の任意の真部分対象 $0 \neq F \subsetneq E$ に対し,

$$\arg(Z(F)) < (resp. \leq)\ \arg(Z(E))$$

が成立するとき, E は Z**-安定 (resp. Z-半安定) (Z-stable (resp. Z-semistable))** という.

安定関数 Z は以下の条件を満たすとき, **Harder-Narasimhan 条件 (Harder-Narasimhan condition)** を満たすという: 任意の $E \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ に対し有限なフィルトレーション

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = E$$

であって, 任意の $i \in \{1, ..., n\}$ に対し $F_i := E_i/E_{i-1}$ は Z-半安定であり,

$$\arg(Z(F_1)) > \cdots > \arg(Z(F_n))$$

を満たすようなものが存在する.

2.2 t-構造

次に三角圏の t-構造とその核を定義する.

定義 2.2.1

三角圏 $\mathcal{T}$ 上の **t-構造 (t-structure)** とは, 充満部分圏 $\mathcal{T}^{\leq 0} \subset \mathcal{T}$ であって以下の条件を満たすもののことをいう:

(i) $\mathcal{T}^{\leq 0}[1] \subset \mathcal{T}^{\leq 0}$.

(ii) $\mathcal{T}^{\geq 1} := \{F \in \mathcal{T} \mid \forall G \in \mathcal{T}^{\leq 0}, Hom_{\mathcal{T}}(G, F) = 0\}$ と定義する. このとき, 任意の $E \in \mathcal{T}$ に対し, $G \in \mathcal{T}^{\leq 0}$ および $F \in \mathcal{T}^{\geq 1}$ であって

$$G \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G[1]$$

が完全三角形となるようなものが存在する.

t-構造 $\mathcal{T}^{\leq 0} \subset \mathcal{T}$ の**核 (core, heart)** とは, 部分圏

$$\mathcal{T}_H := \mathcal{T}^{\leq 0} \cap \mathcal{T}^{\geq 1}[1] \subset \mathcal{T}$$

をいう.

t-構造の核は Abel 圏となることが知られている (cf.[BBD]). 上の定義と同じ状況を考える.

$$\mathcal{T} = \bigcup_{i,j \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}^{\leq 0}[i] \cap \mathcal{T}^{\geq 1}[j]$$

が成立するとき, t-構造 $\mathcal{T}^{\leq 0}$ は**有界**であるという. t-構造の核 $\mathcal{T}_H \subset \mathcal{T}$ に対して K-group の同型

$$K(\mathcal{T}_H) \cong K(\mathcal{T})$$

が成立する. 以上の準備を以って, 三角圏上の安定性条件を定義する.

定義 2.2.2

三角圏 $\mathcal{T}$ 上の**安定性条件 (stability condition)** とは, $\mathcal{T}$ の t-構造 $\mathcal{T}^{\leq 0}$ における核 $\mathcal{T}_H$ および *Harder-Narasimhan* 条件を満たす $\mathcal{T}_H$ 上の安定関数 Z の組 $(Z, \mathcal{T}_H)$ をいう. このとき Z を**中心電荷 (central charge)** という.

$\mathcal{T}$ 上の安定性条件 $(Z, \mathcal{T}_H)$ および $n \in \mathbb{Z}$ と $\phi' \in (0, 1]$ に対し, $\mathcal{T}$ の部分圏

$$\mathcal{P}(n + \phi') := \{E \in \mathcal{T} \mid E[-n] \in \mathcal{T}_H \text{は } Z-\text{半安定 かつ } \phi(E[-n]) = \phi'\}$$

を考える.

補題 2.2.3

三角圏 $\mathcal{T}$ に安定性条件を与えることと, 以下の条件を満たす組 $(Z, \{\mathcal{P}(\phi)_{\phi\in\mathcal{R}}\})$ を与えることは同値:

(i) 各 $\mathcal{P}(\phi)$ は $\mathcal{T}$ の部分圏であって, $\mathcal{P}(\phi+1) = \mathcal{P}(\phi)[1]$ となる.

(ii) ϕ_1, ϕ_2 を $\phi_1 > \phi_2$ を満たす任意の実数とする. このとき任意の $E_1 \in \mathcal{P}(\phi_1)$, $E_2 \in \mathcal{P}(\phi_2)$ に対し $Hom_{\mathcal{T}}(E_1, E_2) = 0$.

(iii) Z は群準同型写像 $Z : K(\mathcal{T}) \to \mathbb{C}$ で, 任意の $E \in \mathcal{P}(\phi) \setminus \{0\}$ に対して $Z(E) \in \mathbb{R}_{>0} exp(\sqrt{-1}\pi\phi)$.

(iv) 任意の $E \in \mathcal{T}$ に対し, $l \in \mathbb{N}$ と実数列 $\phi_1 > \phi_2 > \cdots > \phi_l$ および以下の完全三角形の列が存在し, 各 $i \in \{1, ..., l\}$ について $A_i \in \mathcal{P}(\phi_i)$.

$$\begin{tikzcd}
0 = E_0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dr] & & E_2 \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] & E_{l-1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & E_l = E \arrow[dl] \\
& A_1 \arrow[ul] & & A_2 & & & & A_l &
\end{tikzcd}$$

証明： [Br07] proposition 5.3 参照. ■

補題の (vi) における実数列 $\{\phi_j\}_{j=1,...,l}$ を E の**位相 (phase)**, $\mathcal{T}$ の部分圏の族 $\{\mathcal{P}(\phi)\}_{\phi\in\mathbb{R}}$ を三角圏 $\mathcal{T}$ の**スライシング (slicing)** と呼ぶ.

補題 2.2.4 ([Br07] Lemma5.2)

$\sigma := (Z, \{\mathcal{P}(\phi)_{\phi\in\mathcal{R}}\})$ を三角圏 $\mathcal{T}$ 上の安定性条件とする. このとき, 任意の $\phi \in \mathbb{R}$ に対して $\mathcal{P}(\phi)$ は *Abel* 圏である.

以降, しばしば $(Z, \mathcal{P}) := (Z, \{\mathcal{P}(\phi)_{\phi\in\mathcal{R}}\})$ と略記する. $\mathcal{P}(\phi)$ に属する対象は σ **の位相** ϕ **における半安定対象**と呼ばれ, 特にそれが $\mathcal{P}(\phi)$ の単純対象であるとき**安定対象**という.

最後に, 局所有限の定義を与えておく.

定義 2.2.5

三角圏 $\mathcal{T}$ 上の安定性条件 σ が**局所有限 (locally finite)** とは, 任意の $\phi \in \mathbb{R}$ に対しある $\epsilon \in \mathbb{R}$ があり, $\mathcal{P}((\phi-\epsilon, \phi+\epsilon))$ が有限の長さを持つことをいう.

2.3　安定性条件と複素構造

三角圏 $\mathcal{T}$ 上の安定性条件の集合には複素多様体の構造が入る, というのが [Br07] における基本的な定理の一つである. $\mathcal{T}$ 上のスライシングの集合を $S(\mathcal{T})$ と表す. また安定性条件 $(Z, \{\mathcal{P}(\phi)\}_{\phi\in\mathbb{R}})$ を $(Z, \mathcal{P})$ と略記する. $(Z, \mathcal{P})$ に対し,

$$\phi^+_{\mathcal{P}} := \phi_1, \quad \phi^-_{\mathcal{P}} := \phi_l$$

と定義する. ここで, ϕ_1, ϕ_l は補題 2.2.3(iv) で与えた実数列の要素である.

命題 2.3.1

$\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in S(\mathcal{T})$ に対して

$$d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) := \sup\{|\phi^+_{\mathcal{P}} - \phi^+_{\mathcal{Q}}|, |\phi^-_{\mathcal{P}} - \phi^-_{\mathcal{Q}}|\}$$

と定める．このとき,$d(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ は距離空間の公理を満たし $S(\mathcal{T})$ は位相空間となる．

ここで, 有限生成 Abel 群 $\mathcal{N}$ と, $\mathcal{N}_{\mathbb{R}} := \mathcal{N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ および $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}$ 上のノルム $\|\|_{\mathbb{R}}$, 群準同型写像 $cl : K(\mathcal{T}) \to \mathcal{N}$ をそれぞれ固定する．以降, 記号の濫用ではあるが群準同型写像 $Z : \mathcal{N} \to \mathbb{C}$ に対して $Z \circ cl$ を Z で表すこととする．

定義 2.3.2

部分集合,

$$Stab_{\mathcal{N}}(\mathcal{T}) \subset Hom_{\mathbb{Z}}(\mathcal{N}, \mathbb{C}) \times S(\mathcal{T})$$

を安定性条件 $(Z, \mathcal{P})$ であって, 以下の**台条件 (support property)** を満たすものの全体とする．

$$\sup\left\{ \frac{\|cl(E)\|}{|Z(E)|} \,\middle|\, 0 \neq E \in \bigcup_{\phi \in \mathbb{R}} \mathcal{P}(\phi) \right\} < \infty.$$

台条件は [Br07] 以降, [KS] によって与えられた条件である．[Br07] では Hom$\mathbb{Z}(K(\mathcal{T}), \mathbb{C})$ のある有限次元線形空間に対してのみ, 後に述べる定理 2.3.3 が示されているが, この台条件はその仮定の一般化である．安定性条件 $(Z, \mathcal{P})$ が台条件を満たすことと, $\mathcal{N}$ 上の 2 次形式 Q であって,

(i) 任意の $\phi \in \mathbb{R}$ と $E \in \mathcal{P}(\phi)$ に対して $Q(cl(E)) \geq 0$.
(ii) Q の Ker$Z$ への制限は負定値.

を満たすものが存在することは同値である ([KS] §2.1)．具体的には, 台条件を満たす $(Z, \mathcal{P})$ についてある定数 C が存在し, 任意の $E \in \mathcal{P}(\phi)$ について $\|cl(E)\| \leq C|Z(E)|$ となることに注意すると, Q は

$$Q(v) = C|Z(v)|^2 - \|v\|^2$$

と定めることによって与えられる．

Stab$_{\mathcal{N}}(\mathcal{T})$ に, Hom$_{\mathbb{Z}}(\mathcal{N}, \mathbb{C})$ が持つ標準的な複素構造および命題 6.1.1 で定めた $S(\mathcal{T})$ の位相から誘導される位相を入れる．$0 < \epsilon < \frac{1}{8}$ に対し,

$$B_\epsilon((Z, \mathcal{P})) := \{\tau = (W, \mathcal{Q}) \mid \|W - Z\| < \sin(\pi\epsilon), d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) < \epsilon\}$$

と定めると, この位相の開基となる ([Br07] Lemma 6.2).

次の定理は Stab$_{\mathcal{N}}(\mathcal{T})$ が複素多様体の構造を持つことを主張する．証明は次の節で行う．

定理 2.3.3 ([上戸 20] 定理 11.17)

忘却写像,

$$\Phi : Stab_{\mathcal{N}}(\mathcal{T}) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(\mathcal{N}, \mathbb{C}), \quad (Z, \mathcal{P}) \mapsto Z$$

は局所同相写像である．特に $Stab_{\mathcal{N}}(\mathcal{T})$ には $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathcal{N}, \mathbb{C})$ の標準的な複素構造に関して Φ が正則写

像となるような複素構造が一意に入る.

2.4　定理 2.3.3 の証明

以下では, 定理 2.3.3 の証明を与える. 記号は前節と同様のものを用いる. この節は主に [Br07] §6, §7 の内容に沿う.

補題 2.4.1

$\sigma := (Z, \mathcal{P}), \tau := (Z, \mathcal{Q}) \in Stab_{\mathcal{N}}(\mathcal{T})$ とする. このとき,

$$d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) < 1 \implies \sigma = \tau.$$

証明: $\sigma \neq \tau$ と仮定して矛盾を導く. このとき, ある $\phi \in \mathbb{R}$ とある $0 \neq E \in \mathcal{P}(\phi)$ であって, $E \in \mathcal{Q}(\phi)$ となるものが存在する. $E \in \mathcal{Q}([\phi, \phi+\epsilon)), (\epsilon > 0)$ にはならない. 実際, もしそうだとすると仮定より $d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) < 1$ だから $E \in \mathcal{Q}([\phi, \phi+1))$ である. これは σ と τ が同じ中心電荷をもつことに反する. 同様の論法で $E \in \mathcal{Q}((\phi-\epsilon, \phi)), (\epsilon > 0)$ とはならないことがわかる. したがって, 完全三角形

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "g"] & & E \arrow[dl] \\
& A \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

であって $F \in \mathcal{Q}((\phi, \phi+1), A \in \mathcal{Q}((\phi-1, \phi])$ であるものが存在する. このとき, $F \in \mathcal{P}((\phi-\epsilon, \phi]), (\epsilon > 0)$ とはならない. 実際, そのように仮定すると σ と τ が同じ中心電荷をもつことに矛盾する. よって $\psi > \phi$ を満たす $\psi \in \mathbb{R}$ と, $G \in \mathcal{P}(\psi)$ および 0 でない射 $f : G \to F$ が存在する. f と g との合成は $\mathcal{P}(\psi)$ から $\mathcal{P}(\phi)$ への射だから補題 2.2.3(ii) より 0 射である. したがって, f は $G \to A[-1] \to F$ と分解する. ところがこの状況では $A[-1] \in \mathcal{P}(< \phi)$ なので, G から $A[-1]$ への 0 でない射は存在しえない. よってこれは矛盾であり, $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$ でなければならない. ■

補題 2.4.2

$\sigma := (Z, \mathcal{P})$ を三角圏 $\mathcal{T}$ 上の局所有限な安定性条件とする. このとき, ある実数 ϵ_0 で以下の条件を満たすものが存在する: 任意の $0 < \epsilon < \epsilon_0$ および任意の群準同型写像 $W : K(\mathcal{T}) \to \mathbb{C}$ で *(cond1)* を満たすものに対し, $\mathcal{T}$ 上の安定性条件 $(W, \mathcal{Q})$ で $d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) < \epsilon$ を満たすものが存在する.

(cond1)　任意の σ 半安定な $E \in \mathcal{T}$ に対し, $|W(E) - Z(E)| < 2\pi\epsilon|Z(E)|$ を満たす.

■

証明:

補題 2.4.3

■

証明:

2.5　貼り合わせ安定性条件

この節では, [CP] において定義された *gluing stability condition* について解説する. 三角圏 $\mathcal{T}$ が半直交分解,

$$\mathcal{T} = \langle \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \rangle$$

を持つと仮定する．このとき, 左随伴関手 $\lambda_1 : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}$ および右随伴関手 $\lambda_2 : \mathcal{T}_2 \to \mathcal{T}$ が存在する．

3 代数多様体上の安定性条件

ここでは代数多様体が 1 次元, 2 次元の場合の安定性条件について, それぞれどのような研究が行われているかを紹介する．ここでの代数多様体はすべて $\mathbb{C}$ 上定義されているものとする．代数多様体および導来圏に関する必要事項は補足にまとめる．

3.1 連接層の導来圏からの準備

準備として, 一般の代数多様体 X およびその連接層の導来圏 $D^b(X) := D^b(\mathrm{Coh}(X))$ に対して成り立つことをいくつか挙げておく．

定義 3.1.1

(i) $D^b(X)$ の対象 E, F に対し, 以下で定まる式を **Euler 形式 (Euler form)** という:

$$\chi(E, F) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} Hom_{D^b(X)}(E, F[i]).$$

(ii) $K(X)$ の部分群 $K(X)^{\perp} := \{[E] \in K(X) \mid \forall [F] \in K(X), \chi([E][F]) = 0\}$ による商,

$$\mathcal{N}(X) := K(X)/K(X)^{\perp}$$

を X の**数値的 K 群 (numerical K-group)** と呼ぶ.

次の定理は Hilzebruch-Riemann-Roch の定理として知られている．

定理 3.1.2

$\alpha \in K(X)$ に対し,

$$\chi(\alpha) = \int_X ch(\alpha).td(X)$$

が成立する．ここで $ch(\alpha)$ は α の *Chern* 指標, $td(X)$ は X の *Todd* 類である．

3.2 安定空間

滑らかな射影代数多様体 X について, 定理 2.3.3 の $\mathrm{Stab}_{\mathcal{N}}(X)$ を構成することを考える．一般に代数多様体 X の連接層の導来圏 $D^b(X)$ に対し, その K 群は有限階数にならないことが多い．そのため $\mathcal{N} = K(X)$ とすることは出来ないことが殆どである．そこで,

$$\mathcal{N} = \mathrm{Im}(\mathrm{ch} : K(X) \longrightarrow H^{2*}(X, \mathbb{Q}))$$

とおき, $cl = \mathrm{ch}$ とおく．

定義 3.2.1

滑らかな射影代数多様体 X に対し,

$$Stab(X) := Stab_{\mathcal{N}}(X)$$

を, X 上の**安定空間 (stable space)** という.

3.3 安定空間への群作用

前節にて定義した安定空間 $\mathrm{Stab}(X)$ への $\widetilde{GL^+(n,\mathbb{R})}$ による自然な群作用について記述する. この群作用による $\mathrm{Stab}(X)$ の商を考えることで $\mathrm{Stab}(X)$ を解析しやすくなる場合がある. 特に, 後述する代数曲線上の安定空間はこの作用によって完全に決定することが可能である.

$\mathbb{R}$ 上の一般線形群 $GL(n,\mathbb{R})$ の部分群,

$$GL^+(n,\mathbb{R}) = \{T \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \mathrm{det}T > 0\}$$

を考え, その普遍被覆を $\widetilde{GL^+(n,\mathbb{R})}$ とする. $\widetilde{GL^+(n,\mathbb{R})}$ は $T \in GL(n,\mathbb{R})$ および, 以下を満たす単調増加関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で以下を満たすものの組 (T, f) 全体と思うことができる:

(i) 全ての $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x+1) = f(x) + 1$.

(ii) 同一視 $S^1 = \mathbb{R}/2\mathbb{Z} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}/\mathbb{R}_{>0}$ によって, f と T が S^1 に誘導する写像は等しい.

(cf. xx.xx).

ここで $\sigma := (Z_\sigma, \mathcal{P}_\sigma) \in \mathrm{Stab}(X)$ および $g := (T, f) \in \widetilde{GL^+(n,\mathbb{R})}$ に対して, $Z_{\sigma g} = T^{-1} \circ Z_\sigma$, $\mathcal{P}_{\sigma g} = \mathcal{P}_\sigma(f(\phi))$ と定める. また, $\mathbb{C}$ を実 2 次元の空間と同一視することで T^{-1} を作用させる.

命題 3.3.1

$\sigma g = (Z_\sigma g, \mathcal{P}_\sigma g)$ は命題 *2.2.3* を満たす. すなわち $\sigma g \in Stab(X)$.

■

証明 :

したがって, 位相空間 $\mathrm{Stab}(X)$ への $\widetilde{GL^+(n,\mathbb{R})}$ の右作用:

$$\mathrm{Stab}(X) \times \widetilde{GL^+(n,\mathbb{R})} \longrightarrow \mathrm{Stab}(X)$$

が定まる. この作用を用いて $\mathrm{Stab}(X)$ の商空間を構成したい. そこでこの作用の軌道による同値関係を以下のように定義する.

定義 3.3.2

$\sigma, \sigma' \in Stab(X)$ が $\widetilde{GL^+(n,\mathbb{R})} - equivalence$ とは, σ および σ' が同じ単一の $\widetilde{GL^+(n,\mathbb{R})}$-軌道に含まれることをいう.

ここで, $T \in GL^+(n,\mathbb{R})$ に対し $T \mapsto \mathrm{id}_{\mathcal{N}(X)} \otimes T^{-1}$ と定めることで, $GL^+(n,\mathbb{R})$ から $\mathcal{N}(X) \otimes \mathbb{C}$ への作用を定めておく. したがって, 被覆写像を経由して $\widetilde{GL^+(n,\mathbb{R})}$ は $\mathcal{N}(X) \otimes \mathbb{C}$ へ作用する. 写像 $\pi : \mathrm{Stab}(X) \to \mathcal{N}(X) \otimes \mathbb{C}$ はこの写像と一致する.

4　代数曲線上の安定性条件

この節では滑らかな射影曲線上の安定性条件を構成したのち, Emanuel Macri による種数 1 以上のものに対する安定空間の結果ついて述べる. 詳細は [Macr07] を参照. 蛇足だが, [Macr07] には $\mathbb{C}$ 線形な三角圏上の例外対象およびその変異を用いた t 構造の核の構成方法が示されており, それを用いて射影直線上の安定性条件の空間 $\mathrm{Stab}(D^b(\mathbb{P}^1))$ が単連結であることが導かれている. 折を見てその内容にも触れたい.

C を滑らかな射影曲線とする. $D^b(C) = D^b(\mathrm{Coh}(C))$ を C 上の連接層の有界な導来圏とする. $K(C) := K(D^b(C))$ で $D^b(C)$ の K 群を表す.

4.1　安定性条件の構成

定理 2.3.3 で構成した安定空間 $\mathrm{Stab}(-)$ を, 滑らかな射影曲線 C 上で考えよう. $[E] \in K(C)$ に対してその Chern 指標は,

$$\mathrm{ch}([E]) = (\mathrm{rank}E, \deg E) \in H^0(C, E) \oplus H^2(C, E) \cong \mathbb{Z}^{\oplus 2}$$

によって与えられるのだった. また $E \in \mathrm{Coh}(C)$ 対して,

$$Z(E) = -\deg E + i\ \mathrm{rank}E.$$

と定めると, 任意の E に対して $Z(E) \in \mathbb{R}_{>0}\exp(i\pi\phi)$, $(0 < \phi \leq 1)$ が満たされる. また,

(HN 条件について言及する)

このことから, $\mathrm{Coh}(X)$ が t 構造の核であれば, 安定性条件 $(Z, \mathrm{Coh}(X))$ が定義できることになる.

命題 4.1.1

滑らかな射影曲線 C に対し, $Coh(C)$ は t 構造の核である.

証明： 証明のスケッチを与える. $D^b(C)$ の部分圏を,

$$D^{\leq 0} := \{E \in D^b(C) \mid \mathcal{H}(E)^i = 0, i > 0\}$$
$$D^{\geq 1} := \{E \in D^b(C) \mid \mathcal{H}(E)^i = 0, i \leq 0\}$$

ととる. 明らかに $\mathcal{D}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}^{\geq 1}[1]$ は t 構造の核である. このとき $E \mapsto E^\bullet = (\cdots \to 0 \to 0 \to E^0 \to 0 \to 0 \cdots)$ によって関手

$$\mathrm{Coh}(C) \longrightarrow \mathcal{D}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}^{\geq 0}[1]$$

を定めると, これは圏同値を与える. ■

したがって,

$$\sigma_0 := (Z, \mathrm{Coh}(X))$$

は C 上の安定性条件を定める.

4.2 種数 1 以上の曲線の安定性条件

以下は, [Macr07] の主結果の一つである.

定理 4.2.1 (*E.Macri*)

C を $g(C)>0$ の滑らかな射影曲線とする. このとき, $\widetilde{GL^+}(2,\mathbb{R})$ による $Stab(C)$ への作用は自由かつ推移的である. したがって,

$$Stab(C) \cong \widetilde{GL^+}(2,\mathbb{R}) (\cong \mathbb{C}\times\mathbb{H}).$$

ここで $\mathbb{H}$ は複素上半平面である.

この定理の証明を見るために, $\mathrm{Stab}(C)$ を調べるうえで基本的な補題を与える.

補題 4.2.2 (*[ASA] Lemma7.2*)

C を種数 $g>0$ を満たす滑らかな射影曲線とする. E を $Coh(C)$ の対象であって, $Hom^{\leq 0}(F,G)=0$ を満たすような三角形

$$F \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow F[1] \tag{1}$$

が存在するものとする. このとき, $F, G \in Coh(C)$ が成立する.

■

証明 (定理 4.2.1) :

4.3 射影直線上の安定性条件

この節は [Oka] に沿う.

5 代数曲面上の安定性条件

代数多様体 X の次元が 2 以上の場合, 代数曲線上の安定性条件のように標準的な t 構造の核として $\mathrm{Coh}(X)$ を用いることができない. 実際, $\dim X \geq 2$ のとき, $(Z,\mathcal{A})\in \mathrm{Stab}(X)$ で $\mathcal{A}=\mathrm{Coh}(X)$ となるものは存在しないことが [**?**] によって示されている. そこで, *Abel* 圏の傾斜を用いることで新たな t 構造の核を構成するという方針をとる. 一方で X 上の安定関数は, X 上の連接層に対するスロープ安定性の類似として, β-捩り Chern 指標を用いて構成する.

5.1 代数曲面論からの準備

X を $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影曲面とする. $[E]\in K(X)$ に対し, その Chern 指標は

$$\mathrm{ch}([E]) := (\mathrm{rank}(E), c_1(E), \mathrm{ch}_2(E)) \in \mathcal{N}(X)$$

によって与えられるのだった. ここで $\mathcal{N}(X) := \mathbb{Z}\oplus \mathrm{NS}(X)\oplus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ である. 以下は Hilzebruch-Riemann-Roch の定理の帰結である. Chern 指標 $\mathrm{ch}: K(X)\hookrightarrow H^{2*}(H,\mathbb{Q})$ は X の数値的 K 群 $K(X)/K(X)^{\perp}$ から $\mathcal{N}(X)$ への単射を誘導する. 以下で定まる 2 次形式は $\mathcal{N}(X)$ 上の **Mukai ペアリング (Mukai**

pairing) という: $E_1, E_2 \in D^b(X)$ に対し

$$\langle \mathrm{ch}(E_1), \mathrm{ch}(E_2)\rangle_M = \langle (r_1, c_1(E_1), s_1), (r_2, c_1(E_2), s_2)\rangle := c_1(E_1).c_1(E_2) - r_1 s_2 - r_2 s_1.$$

Mukai ペアリングと $\mathcal{N}(X)$ の組 $(\mathcal{N}(X), \langle,\rangle_M)$ は符号数 $(2,\rho)$ の格子であり, **Mukai 格子 (Mukai lattice)** と呼ばれる. ここで $\rho \geq 1$ は X の Picard 数である.

5.2 連接層の μ_ω-安定性

代数多様体上の連接層は, ある種のフィルトレーション条件を満たす時に安定層と呼ばれる. これは連接層に対して構成される概念であり, 直接 Bridgeland 安定性条件を定める訳ではないが構成のヒントになる. ここでは安定層について詳細には踏み込まず, 必要な概念のみの抜粋にとどめる. 詳細は [上戸 20] §5 などを参照.

X を滑らかな射影多様体とする. X 上の非常に豊富な因子 $\omega := \mathcal{O}_X(1)$ と X の組 (X,ω) を**偏極 (polarise)** 射影多様体という.

定義 5.2.1

(i) 偏極射影多様体 (X,ω) および $F \in Coh(X)$ に対し,

$$\mu_\omega(F) := \frac{c_1(F)\cdot \omega^{d-1}}{rank(F)}$$

を E の**傾斜 (slope)** という. ただし $rank(E) = 0$ のとき $\mu_\omega(E) = \infty$ と定義する.

(ii) $F \in Coh(X)$ が任意の真部分層 $0 \subsetneq E \subsetneq F$ に対して

$$\mu_\omega(E) < (resp.\ \leq)\mu_\omega(F/E)$$

を満たすとき, μ_ω 安定 *(*半安定*)* であるという.

X 上の捩れ層について記述する.

定義 5.2.2

X を *Noether* スキームとし, $E \in Coh(X)$ とする.

(i) E の次元を $\dim(E) = \dim Supp(E) := \{x \in X \mid E_x \neq 0\}$ の次元と定義する.

(ii) $T(E)_i$ を E の部分層であって, 次元が $i = 0, ..., \dim(E)$ 以下のもので最大のものと定義する. このとき得られるフィルトレーション

$$0 = T(E)_0 \subset T(E)_1 \subset \cdots \subset T(E)_{\mathrm{dim}X} = E$$

を **Torsion フィルトレーション**という.

(iii) E が**捩れを持たない層 (torsion free sheaf)** とは, $\dim(E) = \dim(X)$ かつ $T(E)_{\dim(X)-1} = 0$ であることをいう. そうでないとき E を**捩れ層 (torsion sheaf)** という.

5.3 捩れ対と傾斜

冒頭でも説明したように, 代数多様体 X の次元が 2 以上の場合, 標準的な t 構造の核として $\mathrm{Coh}(X)$ を用いることができない. そこで Happel-Reiten-Smalø [HRS] による Abel 圏の捩れ対と傾斜の理論を用いて標準的な t 構造の核を構成するという方針をとる.

定義 5.3.1

$\mathcal{A}$ を Abel 圏とする. $\mathcal{A}$ の部分圏の組 $(\mathcal{T},\mathcal{S})$ が **捩れ対 (torsion pair)** *とは, 以下の 2 条件を満たすことをいう:*

(i) $Hom(\mathcal{T},\mathcal{S})=0$.

(ii) 任意の $F\in Ob(\mathcal{A})$ に対し, 完全列

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

となるような $E\in Ob(\mathcal{T})$, $G\in Ob(\mathcal{S})$ が存在する.

例 5.3.2

代数多様体 X 上の捩れ層のなす圏 $\mathcal{T}\subset Coh(X)$, 捩れの無い層 $\mathcal{S}\subset Coh(X)$ の対 $(\mathcal{T},\mathcal{S})$ は捩れ対である.

一般に三角圏 $\mathcal{T}$ に対し, $\mathcal{A}$ とその捩れ対が与えられると, そこから**傾斜 (tilting)** と呼ばれる別の Abel 部分圏を作り出すことができる. 具体的には以下のように構成する: $\mathcal{A}\subset\mathcal{T}$ でのコホモロジー的関手を $\mathcal{H}^i_A$ と表す. $\tau_{\leq 0}\mathcal{T}$, $\tau_{\geq 1}\mathcal{T}$ を §2 で定義したものとする. $\tau_{\leq 0}(T)\in\tau_{\leq 0}\mathcal{T}$ に対して

$$\tau_{\geq 0}(T):=\tau_{\geq 1}(T[-1])[1]$$

と定めると

$$\mathcal{H}^i_A(T)=\tau_{\leq 0}(\tau_{\geq 0}(T))$$

であることが分かる. 実際,

(複体の遷移のお絵描きを入れる)

である.

命題 5.3.3

三角圏 $\mathcal{T}$ に対してその有界な t 構造の核を $\mathcal{A}\subset\mathcal{T}$ とする. $\mathcal{A}$ の捩れ対 $(\mathcal{T},\mathcal{S})$ に対し,

$$\mathcal{A}^\sharp:=\left\{E\in\mathcal{T}\ \middle|\ \mathcal{H}^0_A(E)\in\mathcal{T},\ \mathcal{H}^{-1}_A(E)\in\mathcal{S},\ \mathcal{H}^i_A(E)=0\ (i\neq 0,-1)\right\}$$

と定める. このとき $\mathcal{A}^\sharp$ は $\mathcal{T}$ の t 構造の核である. 特に $\mathcal{A}^\sharp$ は *Abel* 圏である.

■

証明:

命題 5.3.3 における $\mathcal{A}^\sharp$ を $\mathcal{A}$ の**傾斜 (tilting)** という.

5.4　捩れ安定性

滑らかな射影曲面 X 上の連接層に対して定義された μ_ω-(半) 安定性の類似として, β-捩り Chern 指標を用いた新たな安定性の指標を定義する.

定義 5.4.1

$B \in NS(X)_{\mathbb{R}}, E \in D^b(X)$ に対し,

$$ch^B(E) := exp(-B)ch(E) \in H^{2*}(X, \mathbb{R})$$

を **B-捩り Chern 標数 (B-twisted Chern character)** という. $ch^B(E)$ の $H^i(X, \mathbb{R})$ 部分を $ch_i^b(E)$ と表す.

これを用いて, 定義 5.2.1 で与えた μ_ω を以下のように修正する: $\beta \in \mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}}$, $\omega \in \mathrm{Amp}(X)_{\mathbb{R}}$ とする. X 上の捩れのない層 $F \in \mathrm{Coh}(X)$ に対して以下のように定める:

$$\mu_{\beta,\omega}(F) := \frac{\mathrm{ch}_1^B(E) \cdot \omega^{d-1}}{\mathrm{rank}(E)}.$$

命題 5.4.2

$$\mu_{\beta,\omega}(E) = \mu_\omega - B\omega^{d-1}.$$

証明： 補題 5.4.3 と式 (5.4) より,

$$\mu_{\beta,\omega}(F) = \frac{\mathrm{ch}_1(F)\omega^{d-1} - \mathrm{ch}_0(F)B\omega^{d-1}}{\mathrm{rank}(F)}.$$

したがって, $\mathrm{ch}_0(F) = \mathrm{rank}(F)$ であることに注意すれば,

$$\begin{aligned}
\mu(F) - B\omega^{d-1} &= \frac{\mathrm{ch}_1(F)\omega^{d-1}}{\mathrm{rank}(F)} - \frac{\mathrm{rank}(F)B\omega^{d-1}}{\mathrm{rank}(F)} \\
&= \frac{\mathrm{ch}_1(F)\omega^{d-1} - \mathrm{ch}_0(F)B\omega^{d-1}}{\mathrm{rank}(F)} \\
&= \mu_{\beta,\omega}(F).
\end{aligned}$$

■

補題 5.4.3

通常の意味での Chern 指標 ch および定義 5.4.1 の Chern 指標 ch^B に対し, 関係式

$$ch_0^B = ch_0,\ ch_1^B = ch_1 - Bch_0,\ ch_2^B = ch_2 - Bch_1 + \frac{B^2}{2}ch_0$$

が成立する.

証明： $\mathrm{ch}(-) := \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{ch}_j$, $e^{-B} := \sum_{l=0}^{\infty} e_l$ と表しておく. すると Cauchy 積より,

$$\mathrm{ch}^B = e^{-B}\mathrm{ch} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k} e_i \cdot \mathrm{ch}_{k-i}$$

が成り立つ. よって $e^{-B} = 1 - B + \frac{B^2}{2} - $ (高次の項) を踏まえると 2 次までの項の計算は,

$$\mathrm{ch}^B = e^{-B}\mathrm{ch}(E) = \mathrm{ch}_0 + (\mathrm{ch}_1 - B\mathrm{ch}_0) + (\mathrm{ch}_2 - B\mathrm{ch}_1 + \mathrm{ch}_0\frac{B^2}{2}).$$

である. ■

これによって, $\mu_{\beta,\omega}$ の意味で (半) 安定であることと μ_ω-(半) 安定性が同値となることがわかる.

5.5 代数曲面の安定性条件

Abel 圏の傾斜と $\mu_{\beta,\omega}$-(半) 安定性を用いて, 滑らかな射影曲面上の安定性条件を具体的に与える. $\mathrm{Coh}(X)$ の部分圏の組 $(\mathcal{T}_{\beta,\omega}, \mathcal{F}_{\beta,\omega})$ を,

$$\mathcal{T}_{\beta,\omega} := \langle E \in \mathrm{Coh}(X) \mid \mu_\omega - \text{半安定かつ} \mu_{\beta,\omega}(E) > 0 \rangle_{ex} \tag{2}$$

$$\mathcal{F}_{\beta,\omega} := \langle E \in \mathrm{Coh}(X) \mid \mu_\omega - \text{半安定かつ} \mu_{\beta,\omega}(E) \leq 0 \rangle_{ex} \tag{3}$$

と定める. ここで $\langle \mathcal{A} \rangle_{ex}$ は Abel 圏 $\mathcal{A}$ の拡大閉包である. 定義より $\mathrm{Coh}(X)$ の捩れのない層は全て $\mathcal{F}_{\beta,\omega}$ に含まれ, 捩れ層は全て $\mathcal{T}_{\beta,\omega}$ に含まれる. μ_ω-半安定 HN フィルトレーションの存在から, $(\mathcal{T}_{\beta,\omega}, \mathcal{F}_{\beta,\omega})$ は $\mathrm{Coh}(X)$ の捩れ対であることがわかる. したがって,

$$\mathcal{A}_{\beta,\omega} := \langle \mathcal{F}_{\beta,\omega}[1] \cap \mathcal{T}_{\beta,\omega} \rangle_{ex}$$

は $D^b(X)$ の t 構造の核である. また Z を Mukai ペアリング (式 5.1) を用いて

$$Z_{\beta,\omega} := \langle \exp(\beta + i\omega), \mathrm{ch}(E) \rangle_M.$$

と定義すると, $\mathcal{A}_{\beta,\omega}$ 上の安定関数を与える (証明は [上戸 20] §8 を参照). したがって,

系 5.5.1

滑らかな射影曲面 X に対して,

$$\sigma_{\beta,\omega} := (Z_{\beta,\omega}, \mathcal{A}_{\beta,\omega}) \tag{4}$$

は $D^b(X)$ 上の安定性条件を定める.

6 壁と部屋

この節では, $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影曲面上の安定性条件の空間に対して, 壁と部屋構造を定義する. 参考文献は [上戸 20], [Maci14] である.

6.1 壁の定義

[Br07] §8 によれば一般に三角圏 $\mathcal{T}$ 上の安定空間 $\mathrm{Stab}(\mathcal{T}) := \mathrm{Stab}_{\mathcal{N}}(\mathcal{T})$ と, 各対象 $A \in \mathcal{T}$ に対して

$$m_{(-)}(A) : \mathrm{Stab}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad \sigma \mapsto m_\sigma(A) := \sum |Z(A_i)|$$

という関数が定まる. S を $\mathcal{T}$ の対象の集合とする.

$$\sup\{m_\sigma(A) | A \in S\} < \infty$$

が成立するとき, S は σ に対して**有界な質量 (bounded mass)** を持つという.

定理 6.1.1

$Stab(\mathcal{T})^\sharp$ を $Stab(\mathcal{T})$ の連結なコンパクト部分集合とし, $\mathcal{T}$ の対象の集合 S は任意の $\sigma \in Stab(\mathcal{T})^\sharp$ に対して有界な質量を持つと仮定する. このとき, $Stab(\mathcal{T})$ の実余次元 1 の部分多様体 $\{W_i\}_{i\in I}$ が存在し, 任意の $Stab(X)^\sharp \setminus (\cup_i W_i)$ における連結成分 C は以下を満たす:

$A \in S$ がある $\sigma_0 \in C$ に対して σ-半安定ならば, A は全ての $\sigma \in C$ に対して半安定である. さらに, A が $cl(A)$ が原始的である σ_0 に対して σ-安定ならば, A は全ての $\sigma \in C$ に対して σ-安定である.

証明: [上戸 20] §11 命題 11.46 参照. ■

証明の中で与えられる部分多様体 $\{W_i\}_{i\in I}$ の構成は以下の通りである: $\mathcal{T}$ の部分集合を,

$$T = \{E \in \mathcal{T} \mid \exists\sigma \in \mathrm{Stab}(\mathcal{T})^\sharp, \exists A \in S, m_\sigma(E) \le m_\sigma(A)\}\ cong$$

とおくと T は有界な質量を持つことがわかる. これにより $\mathcal{N}$ の部分集合 $\{v_i | i \in J\} = \{cl(E) | E \in \mathcal{T}\}$ は $\mathcal{N}$ の有限集合であることが示せる. I を v_i, v_j が $\mathcal{N} \otimes \mathbb{R}$ 上で一次独立となる $J^{\oplus}2$ の組の全体とし,

$$W_{i,j} := \{(Z, \mathcal{P}) \in \mathrm{Stab}_c N(\mathcal{T}) \mid \frac{Z(v_i)}{Z(v_j)} \in \mathbb{R}_{>0}\} \tag{5}$$

と定めると, $W_{i,j}$ は求める条件を満たすことが分かる. これらの全体が求める部分多様体 $\{W_i\}_{i\in I}$ である.

部分多様体 $\{W_i\}_{i\in I}$ を $\mathrm{Stab}(\mathcal{T})$ の**壁 (wall)**, 連結成分 C を**部屋 (chamber)** と呼ぶ.

6.2 代数曲面上の壁

この節の内容は [Maci14] に沿う. 滑らかな射影曲面 X に対し, $\mathrm{Stab}(X)$ 上の壁を構成しよう. $\omega \in \mathrm{Amp}(X)_\mathbb{R}$ と $\beta \in \mathrm{NS}(X)_\mathbb{R}$ を固定する. $\sigma_{\beta,\omega} := (\mathcal{A}_{\beta,\omega}, Z_{\beta,\omega}) \in \mathrm{Stab}(X)$ を式 (4) で定めた安定性条件とする. $E \in \mathcal{A}_{\beta,\omega}$ に対して $\mathrm{ch}(E) = (r, D, z) \in \mathcal{N}(X)_\mathbb{C}$ と表す. 計算により,

$$\begin{aligned} Z_{\beta,\omega}(E) &= \langle \exp(\beta + i\omega), (r, D, z)\rangle_M \\ &= -\mathrm{ch}_2^\beta(E) + \frac{\omega^2}{2}\mathrm{ch}_0^\beta(E) + i\omega\mathrm{ch}_1^\beta(E) \\ &= -z + D\beta - \frac{r}{2}(\beta^2 - \omega^2) + i(D - r\beta)\omega \end{aligned}$$

である.

$\mathrm{Stab}(X)$ には複素多様体の構造が入るのであった. $\sigma_{\beta,\omega}$ はこの構造における $\mathrm{Stab}(X)$ の点とみなすことができる. β および ω の係数をパラメータとして, 様々な部分多様体を考えることができる.

$$\mathcal{R}_{\beta,\omega} := \{(\mathcal{A}_{\beta,\omega}, Z_{\beta,t\omega}) \mid t \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

は $\mathrm{Stab}(X)$ の半直線をなす ($\mathcal{A}_{\beta,t\omega} = \mathcal{A}_{\beta,\omega}$ であることに注意). 同様にして, 上半平面も

$$\mathcal{P}_{\beta,\omega} := \{(\mathcal{A}_{s\beta,\omega}, Z_{s\beta,t\omega}) \mid t \in \mathbb{R}_{>0}, s \in \mathbb{R}\}$$

として定まる. また, 任意の $\beta \in \mathrm{NS}_\mathbb{R}$ は豊富因子 ω とそれに直交する $\gamma \in \mathrm{NS}_\mathbb{R}$(i.e. $\omega \cdot \gamma = 0$ を満たす)

の線形結合 $\beta = s\omega + u\gamma$ として表せる事実を用いると,

$$\Omega_{\beta,\omega} := \{(\mathcal{A}_{s\omega+u\gamma,t\omega}, Z_{s\omega+u\gamma,t\omega}) \mid s,u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_{>0}\} \tag{6}$$

が定まり, これは $\mathbb{R}^3$ の上半部分と同一視することができることがわかる. $\Omega_{\beta,\omega}$ において u を 1 つ固定したものを $\Pi_{\beta,\omega,u}$ とすれば,

$$\{\Pi_{\beta,\omega,u}\}_{u\in\mathbb{R}}$$

は $\Omega_{\beta,\omega}$ の平面の族である.

零でない $v = (r_0, \theta, z_0) \in \mathcal{N}(X)$ を一つ固定する. $\sigma_{\beta,\omega} \in \mathrm{Stab}(X)$ および $E \in \mathcal{A}_{\beta,\omega}$ に対してその**傾斜関数 (slope)** を,

$$\begin{aligned}\mu_{Z_{\beta,\omega}}(E) &:= -\frac{\mathrm{Re}Z_{\beta,\omega}(v(E))}{\mathrm{Im}Z_{\beta,\omega}(v(E))} \\ &= -z_0 + \theta\beta - \frac{r_0}{2}(\beta^2 - \omega^2) + i(\theta - r_0\beta)\omega \end{aligned} \tag{7}$$

と定義する. 壁の定義は定理 6.1.1 で与えたが, [Maci14] では擬似壁という形で定義を行っている. ここではその方針に従うことにする.

定義 6.2.1

(i) $w \in \mathcal{N}(X) \setminus \langle v \rangle$*(resp.* $w \in \mathcal{N}(X)_{\mathbb{R}} \setminus \langle v \rangle$*)* が **$\mathbb{Z}$-critical***(resp.* $\mathbb{R}$-critical) であるとは, $\mu_{Z_{\beta,\omega}}(v) = \mu_{Z_{\beta,\omega}}(w)$ を満たすような $\sigma_{\beta,\omega} \in Stab(X)$ が存在することをいう. このとき, $\sigma_{\beta,\omega}$ は w を *critical* にするという.

(ii) $\mathbb{Z}$ または $\mathbb{R}$-*critical* な w に対して, *Stab*(X) の部分集合,

$$W^v_w := \{\sigma \in Stab(X) \mid w \text{ を } critical \text{ にする }\}$$

を**擬似壁 (pseudo-wall)** という.

また [Maci14] においては, 以下で述べる Bogomolov 類に対象を制限する形で, 扱う対象を μ_ω-半安定な対象または捩れ層に制限をしている. 具体的には, $E \in \mathcal{T}_{\beta,\omega}$ に対しては, Bogomolov の不等式 $c_1(v(E))^2 \geq 2r(v(E))\mathrm{ch}_2(v(E))$ が成立する. このため, 予めこの条件を満たす Chern 類を Bogomolov 類として定義しておくという方針をとる. 定義として述べておく.

定義 6.2.2

$v \in \mathcal{N}(X)_M$, $(M = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$ が **Bogomolov 類 (Bogomolov class)** であるとは不等式,

$$c_1(v)^2 \geq 2r(v)ch_2(v)$$

を満たすことをいう.

以降, Bogomolov 類 v を固定しておき, $v = v(E)$ を満たす対象 $E \in \mathrm{Coh}(X)$ に対象を制限することが多い. また, 分解 $\beta = s\omega + u\gamma$ を用いれば,

$$E \text{ が Bogomolov の不等式を満たす} \iff E \in T_{\beta,\omega} \iff E \in T_{s\omega+u\gamma,\omega}$$

であり, $\mathrm{rank}(E) = 0$ または $\mu_\omega(E) \geq s\omega^2$ であることにも注意しておく.

さて, Bogomolov 類 v を一つ固定しよう．次の定理は $\mathrm{Stab}(X)$ の擬似壁 W_w^v が $\Pi_{\beta,\omega,u}$ の中の半円であることを主張する．

定理 6.2.3

Bogomolov 類を $v=(r_0,\theta,z_0)$ とする．このとき, $\mu_\omega(v)\neq\mu_\omega(w)$ を満たす w についての $\mathrm{Stab}(X)$ の擬似壁 W_w^v は式 (6) で定義した $\Pi_{\beta,\omega,u}$ の中のある方程式で定義される半円である．

証明： まず, 疑似壁 W_w^v を求めよう．定義より,

$$W_v^w=\{\sigma_{\beta,\omega}\in\mathrm{Stab}(X)\mid \mu_{Z_{\beta},\omega}(w)=\mu_{Z_{\beta},\omega}(v),\ w\in\mathcal{N}(X)\setminus\langle v\rangle\}$$

である．したがって W_v^w を求めるには傾斜関数 $\mu_Z(v)=\mu_Z(w)$ を満たす w の条件を求めればよい．

以前の議論より ω と直交する $\gamma\in\mathrm{NS}_{\mathbb{R}}$ を用いて $\beta=s\omega+u\gamma$, $(s,u\in\mathbb{R})$ と表示することができる．よって $Z_{\beta,\omega}=Z_{s\omega+u\gamma,t\omega}$, $(s,u\in\mathbb{R},t\in\mathbb{R}_{>0})$ と仮定してよい．同様に $\theta=b_1\omega+b_2\gamma+\alpha$, $(\alpha\in\langle\omega,\gamma\rangle^{\perp})$ と表示する．定義より $\omega\gamma$, $\omega\alpha$, $\omega\alpha'$, $\gamma\alpha$, $\gamma\alpha'$ はすべて 0 である．また, $\omega^2=g$, $\gamma^2=-d$ と表記する．

したがって傾斜関数 $\mu_Z(-):=\mu_{Z_{s\omega+u\gamma,t\omega}}(-)$ は,

$$\begin{aligned}\mu_Z(v)&=-\frac{\mathrm{Re}(Z(v))}{\mathrm{Im}(Z(v))}\\&=\frac{z_0-sb_1g+ub_2d-\frac{r_0}{2}(s^2g-u^2d-t^2g)}{(b_1-r_0s)gt}\end{aligned}$$

と表せる．$w=(r,e_1\omega+e_2\gamma+\alpha',z)\in\mathcal{N}\setminus\langle v\rangle$ を任意にとる．このとき $\mu_Z(v)=\mu_Z(w)$ となる条件は,

$$\begin{aligned}&\mu_Z(w)-\mu_Z(v)=\\&\frac{(b_1-r_0s)(z-se_1g+ue_2g+\frac{r}{2}(s^2g-u^2d-t^2g))-(e_1-rs)(z_0-sb_1g+ub_2d+\frac{r_0}{2}(s^2g-u^2d-t^2g))}{(e_1-rs)(b_1-r_0s)gt}\\&=\ 0\end{aligned}$$

である．s,t について整理することで, 分子は

$$\begin{aligned}&g(r_0e_1-b_1r)s^2-2(zr_0-rz_0+e_2udr_0-b_2udr)s\\&\quad+g(r_0e_1-b_1r)t^2-2z_0e_1+2e_2udb_1+r_0u^2de_1-2b_2ude_1+2zb_1-ru^2db_1\end{aligned}\tag{8}$$

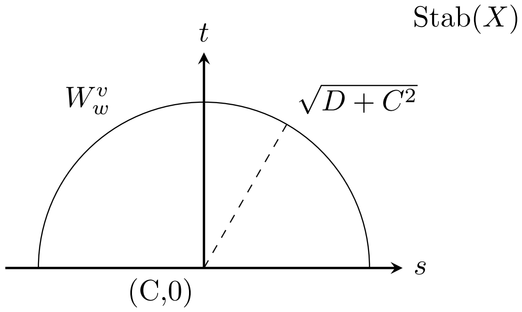
である．仮定より $\mu_\omega(v)=\frac{(b_1\omega+b_2\gamma+\alpha)\omega}{r_0}\neq\frac{(e_1\omega+e_2\gamma+\alpha')\omega}{r}=\mu_\omega(w)$(つまり $r_0e_1-rb_1\neq0$) である．

$$\begin{aligned}C&=\frac{r_0z-rz_0+ud(r_0e_2-rb_2)}{g(r_0e_1-rb_1)},\\D&=\frac{2z_0e_1-2e_2udb_1-r_0u^2de_1+2b_2ude_1-2zb_1+ru^2db_1}{g(r_0e_1-rb_1)}\end{aligned}$$

とおき, 式 (8) を s,t についてそれぞれ平方完成することで,

$$\mu_Z(w)-\mu_Z(v)=g(r_0e_1-rb_1)((s-C)^2+t^2-D-C^2)=0\tag{9}$$

を得る．右辺は明らかに (s,t) をパラメータとする平面 $\Pi_{\gamma,\omega,u}$ において中心が $(C,0)$, 半径が $\sqrt{D+C^2}$ である半円の定義式である．■



$(s-C)^2=D+C^2$ で定まる $\mathrm{Stab}(X)$ の壁

上述の定理の証明において, $\mu_\omega(v)=\mu_\omega(w)$ と仮定すると (すなわち $r_0e_1-rb_1=0$ と仮定すると), 式 (8) における s^2,t^2 の項は消える．さらに $s=\frac{b_1}{r_0}$ とおくと, この式は 0 である．したがって式 (8) は $\mathrm{Stab}(X)$ の直線を定めていることが分かる．半径が ∞ の半円と考えることで $(s-C)^2=D+C^2$ を満たす半円という見方も可能である．

$x\neq 0$ のとき,

$$D=\frac{ud(2e_2-ur_0)+2z_0}{gr_0}-\frac{2e_1}{r_0}C$$

が, $x=0$ かつ $e_1>0$ のとき

$$C=\frac{z_0+due_2}{ge_1}$$

が計算によって分かる．したがって

$$\sqrt{D+C^2}=\sqrt{(C-\frac{e_1}{r_0})^2-F}$$

$$F=\frac{d}{g}(u-\frac{e_2}{r_0})^2+\frac{1}{r_0^2g}(e_1^2g-e_2^2d-2rz_0)$$

が成り立つ．F の式の後半 $(e_1^2g-e_2^2d-2rz_0)$ は $E\in D^b(X)$ の判別式 $\Delta(E)$ を用いた

$$\Delta(E)-\mathrm{ch}_2$$

と対応していることが分かる．

6.3 壁とモジュライ

定理 6.1.1 から分かるように, ある chamber C 上で安定である対象が別の chamber C' に移ったときにその安定性が崩れる可能性がある．そこで, このように不安定化する対象はどれくらいあるかという疑問が沸く．

定義 6.3.1

三角圏 $\mathcal{T}$ および安定空間 $Stab_{\mathcal{N}}(\mathcal{T})$ を考え, $v\in\mathcal{N}$ を一つ固定する．$\sigma:=(Z,\mathcal{A})\in Stab(\mathcal{T})$ に対して,

$$M_\sigma(v):=\{E\in\mathcal{A}\mid E\text{ は }Z\text{ 半安定, }cl(E)=v\}$$

と定める．

この定義を滑らかな射影曲面 X の場合に考えれば, $v\in H^{2*}(X,\mathcal{Q})$ を固定し, $\sigma\in\mathrm{Stab}(X)$ に対し,

$$M_\sigma(v):=\{E\in\mathcal{A}_{\beta,\omega}\mid\mu_{\beta,\omega}(E)\geq 0,\mathrm{ch}(E)=v\}\tag{10}$$

である．これを $\mathrm{Stab}(X)$ の v についての壁と呼ぶ．

7 個々の代数多様体における安定性条件

前節で, 代数曲線・代数曲面の場合に関する安定性条件の構成と壁の計算を行った．ここでは, さらに個々の代数多様体における安定性条件の研究について述べる．

7.1　楕円曲線上の安定性条件

前節の E.Macri の結果によって, 種数 1 以上の曲線上の安定空間は完全に決定できることが分かったが, それより以前に [Br07] では楕円曲線に対して個別に前節と同様の位相同型が示されていた. この節ではそれに触れたい. 主な参考文献は [Br07] および [上戸 20] §11.4.

$\mathbb{C}$ 上の楕円曲線 C を考える. C の K-群 $K(C)$ に対し, その Chern 指標 $\mathrm{ch} : K(C) \to H^{2*}(C, \mathbb{Q})$ が $[E] \mapsto (\mathrm{rank}E, \deg E)$ によって与えられ, 従って $\mathrm{Im\ ch} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ である. これらのペア $(\mathrm{Im\ ch}, \mathrm{ch})$ を考える. ここで,

$$Z_0((r,d)) = -d + \sqrt{-1}r$$

と定義する. すると $\sigma_0 := (Z_0, \mathrm{Coh}(C))$ は C 上の安定性条件である (cf.).

定理 7.1.1 (*Bridgeland*)

$\widetilde{GL^+(2,\mathbb{R})}$ による右作用 $g := (T, f) \mapsto \sigma_0 g$ は位相同型

$$\widetilde{GL^+}(n, \mathbb{R}) \cong Stab(C)$$

を与える.

■

証明 :

7.2　線織曲面の安定性条件

線織曲面とは, 非特異射影曲線 C 上の階数 2 の局所自由層 E による $\mathbb{P}^1$-束 $p : S := \mathbb{P}(E) \to C$ をいう. このとき C を底曲線という. 線織曲面のうち有理的なもの ($\mathbb{P}^2$ と双有理なもの) を有理線織曲面といい, そうでないものを非有理線織曲面という. 非有理な線織曲面は底曲線 C の種数が $g(C) \geq 1$ の時に与えられることが知られている.

7.2.1　線織曲面の諸性質

初めに線織曲面の性質について述べる. 参考文献は主に [HA]. 単に線織曲面 S と言った場合, 射影束としての構造 $p : S \to C$ も含めて考える.

補題 7.2.1

$\pi : X := \mathbb{P}(E) \to C$ を非有理な線織曲面とする. このとき,

$$c_1(X)^2 = 8(1 - g(C)).$$

ここで $c_1(X)$ は直線束 $\mathcal{O}_X(1)$ の第 1*Chern* 類, $g(C)$ は C の種数である.

証明 : Noether の公式 (xx.xx), および $K_X^2 = 8(1-g)$ を用いると,

$$1 - g = \frac{1}{2}(8(1-g) - c_2)$$

したがって,

■

後に用いられる, [Orl] による射影束の半直交分解に関する結果を述べる. Z を滑らかな射影多様体, $\mathcal{E}$ を Z 上の階数 r の局所自由層とし, Z 上の射影束

$$p : S := \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow Z$$

を考える. このとき $m \in \mathbb{Z}$ として関手 $\Phi_m : D^b(Z) \to D^b(S)$ を,

$$\Phi_m(F) = p^* F \otimes \mathcal{O}_S(m)$$

と定める. p は平坦射なので $\mathrm{Coh}(S)$ における層の引き戻し p^* と, その左導来関手 $\mathbf{L}p^*(-)$ は一致することに注意する.

定理 7.2.2 ([Orl])

各 m に対し, Φ_m は充満忠実関手である. さらに $D^b(S)$ の半直交分解

$$D^b(S) = \langle \Phi_{-r+1}(D^b(Z)), \cdots, \Phi_{-1}(D^b(Z)), p^* D^b(Z) \rangle$$

が存在する.

線織曲面 S は C 上の階数 2 の局所自由層 $\mathcal{E}$ を用いて $S = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ と書けるのであった ([HA] §5.2 prop2.6). $\mathcal{O}_S(-1) \cong \mathcal{O}_S(-C_0)$ に注意すれば ([HA] §5.2 prop2.8), 定理 7.2.2 により半直行分解,

$$D^b(S) = \langle \Phi_{-1}(D^b(C)), p^* D^b(C) \rangle = \langle p^* D^b(C) \otimes \mathcal{O}_S(-C_0), p^* D^b(C) \rangle$$

を得る.

7.2.2 線織曲面上の安定性条件

線織曲面 $\pi : S \to C$ に対する安定性条件の研究は, [Uch] がある.

7.2.3 線織曲面上の壁

7.2.4 今後について (?)

種数が 1 以上の底曲線を持つ線織曲面に対しては, [Uch] によって安定性条件が決定したこととなる. 種数 0 の底曲線について,

7.3 Abel 曲面の安定性条件

X を Abel 曲面とする (代数群であるような射影多様体を Abel 曲面といった). ここでは Abel 曲面の安定性条件を求める. この節の内容は [YY14] および [上戸 20] §11.7 の内容に準ずる.

7.4 K3 曲面の安定性条件

8 双有理幾何学との関わり

この節の内容は [BE13], [Tod] に沿う. §2 では滑らかな射影曲面 X とその安定空間 $\mathrm{Stab}(X)$ に対してその壁を考えた. $E \in D^b(X)$ であって,

9 補足

9.1 スキームに関する必要事項

スキームの性質に関して必要な事項についてまとめる.

定義 9.1.1

(i) スキーム S が**整 (integral)** とは, S が既約かつ被約なスキームであることをいう.

(ii) スキームの射 $f : S \to T$ が**局所有限型 (locally finite type)** とは, 任意の $s \in S$ に対し, その *Affine* 開近傍 $U = \mathrm{Spec}A \subset S$ と, $f^{-1}(U) \subset V$ を満たす T の *Affine* 開集合 $V = \mathrm{Spec}B$ が存在して, A が有限生成 B 代数となることをいう. f が**有限系 (finite type)** とは, f が局所有限型かつ準コンパクトであることをいう.

(iii) 構造射 $S \to \mathrm{Spec}k$ が有限型のとき, S を k 上有限型という.

定義 9.1.2 (底変換, 分離性)

(i) $f : S \to T$ をスキームの射とする. 任意のスキームの射 $g : X \to T$ に対する, f の底変換 *(base change)* とはファイバー積が誘導する射 $\overline{f} : S \times_T X \to S$ のことをいう.

(ii) スキーム S が分離的であるとは, 対角埋め込み $\Delta : S \to S \times_{\mathrm{Spec}k} S$ の像が閉集合であることをいう. *(*位相空間における, *Hausdorff* 性のスキーム論的類似*)*

(iii) スキームの射 $f : S \to T$ が**絶対閉 (universally closed)** とは, 任意のスキームの射 $g : X \to T$ に対し, f の底変換 $\overline{f}$ が閉写像であることをいう.

定義 9.1.3

スキーム S が**代数多様体 (variety)** であるとは, S が k 上分離的かつ有限型な整スキームであることをいう.

定義 9.1.4

スキームの射 $f : S \to T$ が**固有射 (proper morphism)** とは, f が絶対閉かつ分離的であることをいう. 体 k 上のスキーム S が k 上**固有**とは, 構造射 $S \to \mathrm{Spec}k$ が固有射であることをいう.

定義 9.1.5

スキーム S が**完備 (complete)** とは, k 上固有であることをいう.

定義 9.1.6 (非特異代数多様体)

(i) 局所環 $(R, \mathfrak{m})$ が**正則局所環 (regular local ring)** とは,

$$\dim_{\kappa} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \mathrm{Krull.dim}R$$

が成立することをいう.

(ii) スキーム S が**正則 (regular)** であるとは, 任意の $s \in S$ に対し, $\mathcal{O}_{S,s}$ が正則局所環であることをいう.

(iii) 正則スキーム S が代数多様体であるとき, S を**非特異代数多様体 (non-singular variety)** という.

定義 9.1.7

X を代数多様体, $\Delta : X \to X \times_k X$ を対角埋め込みとし, 閉部分多様体 $\Delta(X)$ の定義イデアルを $\mathcal{I}$ とおく. このとき,

$$\Omega_X^1 := \Delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$$

を, k-**微分 1 形式の層 (sheaf of differential 1-form over k)** という.

定義 9.1.8 (標準因子)

X を非特異代数多様体, Ω_X^1 を X の k-微分 *1* 形式のなす層とする. このとき,

$$\omega_X := \bigwedge^{\dim X} \Omega_X^1$$

を X の**標準層 (canonical sheaf)** という.

注意 9.1.9

X が非特異代数多様体ならば, 次のことが成り立つ :

(i) 標準層 ω_X は X 上の可逆層. *([HA] §2.8* 定理 *7.84)*

(ii) X の *Cartier* 因子全体を線形同値で割った群と, *Picard* 群の同型

$$DivX/\sim \;\cong\; PicX$$

が, 対応 $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ によって与えられる. *([HA] §2.6* 定理 *6.17)*

したがって, 可逆層 ω_X に対し, $\omega_X = \mathcal{O}_X(D)$ を満たすような X 上の *Cartier* 因子 D が存在する. そのような D を**標準因子 (canonical divisor)** といい, K_X と書く.

定義 9.1.10 (幾何種数)

非特異代数多様体 X とその標準層 ω_X に対し,

$$p_g(X) := \dim_k \Gamma(X, \omega_X)$$

を, **幾何種数 (geometric genus)** という.

定義 9.1.11 (Euler-Poincare 標数)

X を非特異射影射影多様体, $\mathcal{F}$ を X 上の連接層とする. このとき,

$$\chi(\mathcal{F}) := \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \dim_k H^p(X, \mathcal{F})$$

を **Euler-Poinare 標数 (Euler-Poincare characteristic)** という.

定義 9.1.12 (算術種数)

n 次元非特異射影多様体 X に対し,

$$p_a(X) := (-1)^n(\chi(\mathcal{O}_X) - 1)$$

を**算術種数 (arithmetic genus)** という.

定理 9.1.13 (*Serre duality*)

X を n 次元非特異射影代数多様体とする．このとき, 任意の X 上の局所自由層 $\mathcal{E}$ に対し,

$$H^p(X, \mathcal{E}) \cong H^{n-p}(X, \mathcal{E}^\vee \otimes \omega_X)^\vee \qquad (0 \le p \le n)$$

が成立する．ここで, $\mathcal{F}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$ である.

証明： [HA] §3.7 系 7.7 参照. ■

定理 9.1.14

$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を任意のスキームの射とする．このとき,

$$f^*\Omega_{Y/Z} \longrightarrow \Omega_{X/Z} \longrightarrow \Omega_{X/Y} \longrightarrow 0$$

は層の完全列である.

証明： [HA] §2.8 命題 8.11 参照. ■

定理 9.1.15

X を代数閉体 k 上有限型, 分離的で既約なスキームとする．このとき,

$$\Omega_{X/k}\text{が階数 }\dim X\text{ の局所自由層} \iff X\text{ が非特異代数多様体}$$

証明： [HA] §2.8 定理 8.15 参照. ■

定理 9.1.16

X を k 上の非特異多様体とする．$Y \subset X$ をイデアル層 $\mathcal{J}$ によって定義される X の既約な閉部分多様体とする．このとき Y が非特異であることと, 以下が成立することは同値:

(i) $\Omega_{Y/k}$ が局所自由層.

(ii) 以下の完全列が存在する:

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \longrightarrow \Omega_{X/k} \otimes \mathcal{O}_Y \longrightarrow \Omega_{Y/k} \longrightarrow 0$$

> さらに, $\mathcal{J}$ は局所的に $r = \mathrm{codim}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ 個の生成元を持ち, $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ は階数 r の局所自由層である.

証明： [HA] §2.8 定理 8.17 参照. ■

9.2 Abel 圏, 三角圏, 導来圏

9.3 K 群

9.4 豊富錐と Neron-Severi 群

参考文献

[ASA] A.L. Gorodentsev, S.A. Kuleshov and A.N. Rudakov, *t-stabilities and t-structures on triangulated categories* (Russian) Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 68 (2004), no. 4, 117–150; translation in Izv. Math. 68 (2004), no. 4, 749–781, also math.AG/0312442.

[BBD] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, *Faisceaux Pervers*, Asterisque 100, Soc. Math de France (1983).

[BE13] A. Bayer and E. Macr'ı. Projectivity and birational geometry of Bridgeland moduli spaces. J.Amer. Math. Soc., 27(3):707–752, 2014.

[Br07] T. Bridgeland, *Stability conditions on triangulated categories*, Ann. of Math. (2), 166 (2007), no. 2, 317-345, also arXiv:math/0212237.

[CP] J. Collins and A. Polishchuk, *Gluing stability conditions*, Adv. Theor. Math. Phys. 14 (2010), 563–608.

[HA] R.Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer (1977)

[HRS] D. Happel, I. Reiten and S. O. Smalø, *Tilting in abelian categories and quasitilted algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. 120 (1996), no. 575.

[KS] Kontsevich, M. and Soibelman, Y. *Stability structures, motivic Donaldson–Thomas invariants and cluster transformations* (2008). arXiv:0811.2435.

[Macr07] Emanuele Macr'ı, *Stability conditions on curves* Math. Res. Lett., 14(4):657–672, 2007. arXiv:0705.3794.

[Maci14] A. Maciocia, *Computing the walls associated to Bridgeland stability conditions on projective surfaces*, Asian J. Math. 18:2 (2014), 263–279. MR 3217637 Zbl 1307.14022

[Oh] Ryo Ohkawa, *Moduli of Bridgeland semistable objects on* $\mathbb{P}^2$, https://arxiv.org/abs/0812.1470v3

[Oka] So Okada, *Stability mainfold of* $\mathbb{P}^1$, arXiv:math/0411220

[Orl] D. Orlov, *Projective bundles, monoidal transforms and derived categories of coherent sheaves*, Izv. Ross. Akad. Nauk. Soc. Mat. 56 852-862 (1991).

[Tod] Y. Toda. Stability conditions and birational geometry of projective surfaces. Compos. Math., 150(10):1755–1788, 2014.

[Uch] Takayuki Uchiba, *On gluing stability conditions on ruld surfaces of positive genus*, Osaka J. Math.58 (2021), 647–660

[YY14] S. Yanagida, K. Yoshioka, *Bridgeland' s stabilities on abelian surfaces*, Math. Z., 276 (2014), Issue 1-2, 571–610

[上戸 20] 上原北斗／戸田幸伸 「連接層の導来圏と代数幾何学」, 丸善出版 (2020)

[上野 01] 上野健爾,「代数幾何 1,2,3」, 岩波講座現代数学の基礎シリーズ, 岩波書店 (2001)