Bridgeland 安定性条件と代数多様体への応用

@sachiiiimath

2024 年 1 月 15 日

概要

T.Bridgeland の論文 [1] によって構成された三角圏の Bridgeland 安定性条件と, 代数多様体上の具体的な安定性条件の計算例についてのまとめです. 未完成です.

1 導入

Bridgeland 安定性条件は, 超弦理論における Douglas-Π 安定性の数学的定式化のために T.Bridgeland [Br1] により導入された概念であるが, 現在では様々な分野で応用がある. ここでは特に代数多様体上の安定性条件に関する研究をサーベイする.

2 Bridgeland 安定性条件

Bridgeland による三角圏上の安定性条件を定義する. 詳細は [1] を参照.

2.1 安定関数

まずは安定関数の定義から行う. $\mathcal{A}$ を Abel 圏とする. $K(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ の K 群とする.

定義 2.1.1

$\mathcal{A}$ 上の**安定関数 (stability function)** とは, 群準同型 $Z : K(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ であって,

$$Z(K(\mathcal{A}) \setminus \{0\}) \subset \mathbb{H} := \{r \cdot exp(\sqrt{-1}\pi\phi(E)) \mid r \in \mathbb{R}_{>0}, \phi(E) \in (0, 1]\}.$$

を満たすものをいう. $\phi(E)$ を E の *phase* という. E の任意の真部分対象 $0 \neq F \subset E$ に対し,

$$\phi(F) < (resp. \leq)\ \phi(E)$$

が成立するとき, E は **Z-安定 (resp. Z-半安定) (Z-stable (resp. Z-semistable))** という.

安定関数 Z は以下の条件を満たすとき, **Harder-Narasimhan 条件 (Harder-Narasimhan condition)** を満たすという: 任意の $E \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ に対し有限なフィルトレーション

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = E$$

であって, 任意の $i \in \{1, ..., n\}$ に対し $F_i := E_i/E_{i-1}$ は Z-半安定であり,

$$\phi(E_1) > \cdots > \phi(E_n)$$

を満たすようなものが存在する.

2.2 t-構造

次に三角圏の t-構造とその核を定義する. $\mathcal{T}$ で三角圏を表す.

定義 2.2.1

$\mathcal{T}$ 上の **t-構造 (t-structure)** とは, 充満部分圏 $\mathcal{T}^{\leq 0} \subset \mathcal{T}$ であって以下の条件を満たすもののことをいう:

(i) $\mathcal{T}^{\leq 0}[1] \subset \mathcal{T}^{\leq 0}$.

(ii) $\mathcal{T}^{\geq 1} := \{F \in \mathcal{T} \mid \forall G \in \mathcal{T}^{\leq 0}, Hom_{\mathcal{T}}(G, F) = 0\}$ と定義する. このとき, 任意の $E \in \mathcal{T}$ に対し, $G \in \mathcal{T}^{\leq 0}$ および $F \in \mathcal{T}^{\geq 1}$ であって

$$G \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G[1]$$

が完全三角形となるようなものが存在する.

t-構造 $\mathcal{T}^{\leq 0} \subset \mathcal{T}$ の**核 (core, heart)** とは, 部分圏

$$\mathcal{T}_H := \mathcal{T}^{\leq 0} \cap \mathcal{T}^{\geq 1}[1] \subset \mathcal{T}$$

をいう.

t-構造の核は Abel 圏となることが知られている (cf.[7]). 上の定義と同じ状況を考える.

$$\mathcal{T} = \bigcup_{i,j \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}^{\leq 0}[i] \cap \mathcal{T}^{\geq 1}[j]$$

が成立するとき, t-構造 $\mathcal{T}^{\leq 0}$ は**有界**であるという. t-構造の核 $\mathcal{T}_H \subset \mathcal{T}$ に対して K-group の同型

$$K(\mathcal{T}_H) \cong K(\mathcal{T})$$

が成立する. 以上の準備を以って, 三角圏の安定性条件を定義することが可能となる.

定義 2.2.2 (三角圏の安定性条件)

三角圏 $\mathcal{T}$ 上の**安定性条件 (stability condition)** とは, $\mathcal{T}$ の t-構造 $\mathcal{T}^{\leq 0}$ における核 $\mathcal{T}_H$ および *Harder-Narasimhan* 条件を満たす $\mathcal{T}_H$ 上の安定関数 Z の組 $(Z, \mathcal{T}_H)$ をいう. このとき Z を**中心電荷 (central charge)** という.

$\mathcal{T}$ 上の安定性条件 $(Z, \mathcal{T}_H)$ および $n \in \mathbb{Z}$ と $\phi' \in (0, 1]$ に対し, $\mathcal{T}$ の部分圏

$$\mathcal{P}(n + \phi') := \{E \in \mathcal{T} \mid E[-n] \in \mathcal{T}_H \text{は } Z - \text{半安定 かつ } \phi(E[-n]) = \phi'\}$$

を考える.

補題 2.2.3

三角圏 $\mathcal{T}$ に安定性条件を与えることと, 以下の条件を満たす組 $(Z, \{\mathcal{P}(\phi)_{\phi \in \mathcal{R}}\})$ を与えることは同値:

(i) 各 $\mathcal{P}(\phi)$ は $\mathcal{T}$ の部分圏であって, $\mathcal{P}(\phi + 1) = \mathcal{P}(\phi)[1]$ となる.

(ii) ϕ_1, ϕ_2 を $\phi_1 > \phi_2$ を満たす任意の実数とする. このとき任意の $E_1 \in \mathcal{P}(\phi_1)$, $E_2 \in \mathcal{P}(\phi_2)$ に対し $Hom_{\mathcal{T}}(E_1, E_2) = 0$.

(iii) Z は群準同型写像 $Z : K(\mathcal{T}) \to \mathbb{C}$ で, 任意の $E \in \mathcal{P}(\phi) \setminus \{0\}$ に対して $Z(E) \in \mathbb{R}_{>0} exp(\sqrt{-1}\pi\phi)$.

(iv) 任意の $E \in \mathcal{T}$ に対し, $l \in \mathbb{N}$ と実数列 $\phi_1 > \phi_2 > \cdots > \phi_l$ および完全三角形

が存在し, 各 $i \in \{1, ..., l\}$ について $A_i \in \mathcal{P}(\phi_i)$ が成り立つ.

証明： [1] Proposition 5.3 参照. ■

上述の族 $\{\mathcal{P}(\phi)\}_{\phi\in\mathbb{R}}$ を三角圏 $\mathcal{T}$ の**スライシング (slicing)** と呼ぶ.

2.3 安定空間と複素構造

$\mathcal{D}$ を三角圏とする.

3 非特異射影曲面の安定性条件

ここでは $\mathbb{C}$ 上の非特異射影曲面 X の導来圏に対する安定性条件を考える.

3.1 一般論

準備として, 一般の代数多様体 X およびその連接層の導来圏 $\mathcal{D}$ に対して成り立つことをいくつか挙げておく. 一般に K 群 $K(\mathcal{D})$ は多くの場合有限生成にならないため, 技術的な構成を介する必要がある.

一般の三角圏 $\mathcal{T}$ に対し, 有限生成 Abel 群 Γ と, $\Gamma_{\mathbb{R}} := \Gamma\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ および $\Gamma_{\mathbb{R}}$ 上のノルム $\|\|_{\mathbb{R}}$, 群準同型写像 $cl : K(\mathcal{T})\to\Gamma$ をそれぞれ一つ固定する. 以降 $Z:\Gamma\to\mathbb{C}$ は cl との合成と解釈する. X および $\mathcal{D}$ に対しては, Chern 指標 $\mathrm{ch} : K(X)\to H^{2*}(X,\mathbb{Q})$ を用いて $\Gamma := \mathrm{Im}\ \mathrm{ch}$, Im(ch), $cl = \mathrm{ch}$ とおけば上の状況と整合する (cf. xx/.xx).

定義 3.1.1

(i) $D^b(X)$ の対象 E, F に対し, 以下で定まる式を **Euler 形式 (Euler form)** という:

$$\chi(E,F) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} Hom_{D^b(X)}(E, F[i]).$$

(ii) $K(X)$ の部分群 $K(X)^{\perp} := \{[E]\in K(X) \mid \forall [F]\in K(X), \chi([E][F]) = 0\}$ による商,

$$K(X)/K(X)^{\perp}$$

を X の**数値的 K 群 (numerical K-group)** と呼ぶ.

後に使う定理を与えておく.

定理 3.1.2 (*Hilzeburch-Riemann-Roch* の定理)

$\alpha\in K(X)$ に対し,

$$\chi(\alpha) = \int_X ch(\alpha).td(X)$$

が成立する. ここで $ch(\alpha)$ は α の *Chern* 指標, $td(X)$ は X の *Todd* 類である.

3.2 非特異射影曲面の安定性条件

以降, 断りのない限り X を $\mathbb{C}$ 上の非特異射影曲面とする. $[E]\in K(X)$ に対し, その Chern 指標は

$$\mathrm{ch}([E]) := (\mathrm{rank}([E]), c_1([E]), \mathrm{ch}_2([E])) \in \mathcal{N}(X)$$

によって与えられるのだった. ここで $\mathcal{N}(X) := \mathbb{Z}\oplus\mathrm{NS}(X)\oplus\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ である. 以下は Hilzebruch-Riemann-Roch の定理の帰結である. Chern 指標 $\mathrm{ch} : K(X)\hookrightarrow H^{2*}(H,\mathbb{Q})$ は X の数値的 K 群 $K(X)/K(X)^{\perp}$ から $\mathcal{N}(X)$ への単

射を誘導する．以下で定まる閉 2 形式は $\mathcal{N}(X)$ 上の**向井内積 (Mukai inner product)** という：$E_1, E_2 \in D^b(X)$ に対し

$$\langle \mathrm{ch}(E_1), \mathrm{ch}(E_2) \rangle_M = \langle (r_1, c_1([E_1]), s_1), (r_2, c_1([E_2]), s_2) \rangle := c_1(E_1).c_1(E_2) - r_1 s_2 - r_2 s_1.$$

この双線形形式と $\mathcal{N}(X)$ の組 $(\mathcal{N}(X), \langle , \rangle_M)$ は符号数 $(2, \rho)$ の格子であり，**向井格子 (Mukai lattice)** と呼ぶ．ここで $\rho \geq 1$ は X のピカール数である．

定義 3.2.1

三角圏 $\mathcal{T}$ 上の安定性条件 $\sigma := (Z, \mathcal{T}_H)$ に対し，

(i) σ が**数値的 (numerical)** とは，中心電荷 Z が以下を満たすことをいう：ベクトル $\pi(\sigma) \in \mathcal{N}(X) \otimes \mathbb{C}$ が存在し，任意の $[E] \in K(X)$ に対し

$$Z(E) = \langle \pi(\sigma), ch(E) \rangle_M$$

と書ける．

(ii) σ が**局所有限 (locally finite)** とは，〜〜〜を満たすことをいう．

$D^b(X)$ 上の数値的で局所有限な安定性条件の全体を $\mathrm{Stab}(X)$ とおき，**安定空間 (stable space)** という．よく知られているように，$\mathrm{Stab}(X)$ には複素多様体の構造が入る．定義 3.2.1(i) の写像 $\pi : \mathrm{Stab}(X) \to \mathcal{N}(X) \otimes \mathbb{C}$ は複素多様体としての正則写像である．$D^b(X)$ の有界な t-構造の核 $\mathcal{T}_H$ を固定し，

$$\mathrm{Stab}(\mathcal{T}_H) := \{\sigma' = (Z', \mathcal{T}_{H'}) \in \mathrm{Stab}(X) \mid \mathcal{T}_{H'} = \mathcal{T}_H\}$$

と定義する．

3.3　安定空間への群作用

非特異射影多様体 X に関する安定性条件の具体的な計算の前に，$\mathrm{Stab}(X)$ への自然な群作用について記述する．$\mathbb{R}$ 上の一般線形群 $GL(n, \mathbb{R})$ の部分群，

$$GL^+(n, \mathbb{R}) = \{T \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det T > 0\}$$

を考え，その普遍被覆を $\widetilde{GL^+(n, \mathbb{R})}$ とする．$\widetilde{GL^+(n, \mathbb{R})}$ は $T \in GL(n, \mathbb{R})$ および，以下を満たす単調増加関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で以下を満たすものの組 (T, f) 全体と思うことができる：

(i) 全ての $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x+1) = f(x) + 1$.

(ii) 同一視 $S^1 = \mathbb{R}/2\mathbb{Z} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}/\mathbb{R}_{>0}$ によって，f と T が S^1 に誘導する写像は等しい．

(cf. xx.xx).

ここで $\sigma := (Z_\sigma, \mathcal{P}_\sigma) \in \mathrm{Stab}(X)$ および $g := (T, f) \in \widetilde{GL^+(n, \mathbb{R})}$ に対して，$Z_{\sigma g} = T^{-1} \circ Z_\sigma$, $\mathcal{P}_{\sigma g} = \mathcal{P}_\sigma(f(\phi))$ と定める．また，$\mathbb{C}$ を実 2 次元の空間と同一視することで T^{-1} を作用させる．

命題 3.3.1

$\sigma g = (Z_\sigma g, \mathcal{P}_\sigma g)$ は命題 2.2.3 を満たす．すなわち $\sigma g \in Stab(X)$.

■

証明：

したがって，位相空間 $\mathrm{Stab}(X)$ への $\widetilde{GL^+(n, \mathbb{R})}$ の右作用：

$$\mathrm{Stab}(X) \times \widetilde{GL^+(n, \mathbb{R})} \longrightarrow \mathrm{Stab}(X)$$

が定まる．この作用を用いて $\mathrm{Stab}(X)$ の GIT によるモジュライ空間を構成したい．そこで，この作用の軌道による同値関係を定義する．

定義 3.3.2

$\sigma, \sigma' \in Stab(X)$ が $\widetilde{GL^+(n,\mathbb{R})} - equivalence$ とは，σ および σ' が同じ単一の $\widetilde{GL^+(n,\mathbb{R})}$-軌道に含まれることをいう．

ここで，$T \in GL^+(n,\mathbb{R})$ に対し $T \mapsto \mathrm{id}_{\mathcal{N}(X)} \otimes T^{-1}$ と定めることで，$GL^+(n,\mathbb{R})$ から $\mathcal{N}(X) \otimes \mathbb{C}$ への作用を定めておく．したがって，被覆写像を経由して $\widetilde{GL^+(n,\mathbb{R})}$ は $\mathcal{N}(X) \otimes \mathbb{C}$ へ作用する．写像 $\pi : \mathrm{Stab}(X) \to \mathcal{N}(X) \otimes \mathbb{C}$ はこの写像と一致する．

4　代数多様体上の安定性条件

4.1　楕円曲線上の安定性条件

ここでは, $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線 C を考える. C 上の安定性条件の空間は完全に決定できることが [[2]] によって知られている. C の K-群 $K(C)$ に対し, その Chern 指標 $\mathrm{ch} : K(C) \to H^{2*}(C, \mathbb{Q})$ が $[E] \mapsto (\mathrm{rank}E, \mathrm{deg}E)$ によって与えられ, 従って $\mathrm{Im\ ch} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ である. これらのペア $(\mathrm{Im\ ch}, \mathrm{ch})$ を考える. ここで,

$$Z_0((r, d)) = -d + \sqrt{-1}r$$

と定義する. すると $\sigma_0 := (Z_0, \mathrm{Coh}(C))$ は C 上の安定性条件である (cf.).

定理 4.1.1 (*Bridgeland*)

$\widetilde{GL^+(2, \mathbb{R})}$ による右作用 $g := (T, f) \mapsto \sigma_0 g$ は位相同型

$$\widetilde{GL^+}(n, \mathbb{R}) \cong Stab(C)$$

を与える.

■

証明：

4.2　線織曲面の安定性条件

線織曲面とは, 滑らかな曲線 C 上の階数 2 の局所自由層 $\mathcal{E}$ による $\mathbb{P}^1$-束 $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \to C$ をいう. このうち有理的なもの ($\mathbb{P}^2$ と双有理なもの) を有理線織曲面といい, そうでないものを非有理線織曲面という. 非有理な線織曲面は C の種数 $g_C \geq 1$ の時に与えられることが知られている. Chern 指標の計算に有用な補題を与えておく.

補題 4.2.1

$\pi : X := \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to C$ を非有理な線織曲面とする. このとき,

$$c_1(X)^2 = 8(1 - g_C).$$

ここで $c_1(X)$ は直線束 $\mathcal{O}_X(1)$ の第 1*Chern* 類, $c_1(X)^2$ はその自己交点数, $g_C := \dim_{\mathbb{C}} H^1(C, \mathcal{O}_C)$ は C の幾何種数である.

証明： Noether の公式 (xx.xx), および $K_X^2 = 8(1 - g)$ を用いると,

$$1 - g = \frac{1}{2}(8(1 - g) - c_2)$$

したがって,

■

$\pi^*\mathcal{E} = \mathcal{O}_X(1)$ である. よって $\mathrm{ch}(\pi^*\mathcal{E}) = 1 + c_1(X) + \frac{1}{2}(c_1(X)^2) = 1 + c_1(X) + \frac{8(1-g_C)}{2} = 1 + c_1(X) + 4 - 4g_C$. $\mathrm{ch}(pi^*\mathcal{E}) = (1, c_1(X), 4(1 - g_C))$.

4.3　K3 曲面の安定性条件

5　補足

参考文献

[1] T. Bridgeland, Stability conditions on triangulated categories, Ann. of Math. (2), 166 (2007), no. 2, 317-345, also arXiv:math/0212237.

[2] T. Bridgeland, Stability conditions on triangulated categories, Ann. of Math. (2), 166 (2007), no. 2, 317-345, also arXiv:math/0212237.

[3] R.Hartshorne *Algebraic Geometry*, Springer (1977)

[4] Emanuele Macr'ı. Stability conditions on curves. Math. Res. Lett., 14(4):657–672, 2007. arXiv:0705.3794.

[5] 上野健爾,「代数幾何 1,2,3」, 岩波講座現代数学の基礎シリーズ, 岩波書店 (2001)

[6] Ryo Ohkawa *Moduli of Bridgeland semistable objects on* $\mathbb{P}^2$, https://arxiv.org/abs/0812.1470v3

[7] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, Faisceaux Pervers, Asterisque 100, Soc. Math de France (1983).