射影多様体のコホモロジー次元の計算例など (試作中)

@sachiiiimath

2023 年 3 月 9 日

概要

射影多様体のコホモロジーやその次元の計算例をまとめています (試作中). 誤りがありましたら是非お知らせください. 参考図書は主に [1]R.Hartshorne「代数幾何学 1,2,3」, [2] 上野健爾「代数幾何 1,2,3」です.

1 準備

解りやすさのため, ここでは標数 0 の代数閉体 k 上定義された代数多様体を扱う. 代数多様体とは, k 上分離的かつ有限系な整スキームのことをいう.

1.1 Serre の捩れ層

...

1.2 標準層と多重種数

定義 1.2.1. X を滑らかな n 次元代数多様体, $\Omega_X^1 := \Omega_{X/k}^1$ を k-微分 1 形式のなす層とする. X 上の**標準層 (canonical sheaf)** とは, Ω_X^1 の n 次外冪,

$$\omega_X := \bigwedge^n \Omega_X^1$$

をいう. また, ω_X に付随する Cartier 因子 K_X を, **標準因子 (canonical divisor)** という.

定義 1.2.2. $l \geq 0$ に対し, ω_X を l 回テンソルしたものを ω_X^l と表記する. X の**多重種数 (plurigenus)** P_l とは, ω_X^l の大域切断の次元, すなわち,

$$P_l := \dim_k H^0(X, \omega_X^l).$$

のことをいう.

以下, 議論の対象を n 次元射影空間 X とその閉部分多様体 Y に制限する. X 上には Serre の捩れ層 $\mathcal{O}(m)$ という特殊な可逆層が存在した (cf. [1]2.5 章). $\mathcal{O}(m)$ は自身と同型な可逆層とのテンソル積に対し, その次数が加法的である. すなわち, $\mathcal{O}(m) \otimes \mathcal{O}(n) \cong \mathcal{O}(m+n)$ が成立することから扱いやすい層である. これを用いて射影空間上の標準層 ω_X の特徴付けを以下のように行うことができたのだった.

補題 1.2.3. $X = \mathbb{P}^n$ を n 次元射影空間とする. このとき,

$$\omega_X \;\cong\; \mathcal{O}_X(-n-1)$$

が成立する.

証明. [1] 定理 8.13 , 命題 8.20 および 例 8.20.1 参照. □

また, Y が X の d 次超曲面であるとき, その標準層 ω_Y も具体的に求めることができたのだった.

補題 1.2.4. Y を n 次元射影空間 X の非特異 d 次超曲面とする. このとき,

$$\omega_Y \;\cong\; \mathcal{O}_Y(d-n-1)$$

証明. 仮定より Y は X で余次元 1 である. したがって (付録) 命題 2.1.3 より $\omega_Y \cong \omega_X \otimes \mathcal{O}_X(Y) \otimes \mathcal{O}_Y$ が成立する. また, 補題 1.2.3 より $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(-n-1)$, 補題 2.1.4 より $\mathcal{O}_X(Y) \cong \mathcal{O}_X(d)$ が成立する. したがって,

$$\omega_Y \;\cong\; \mathcal{O}_X(-n-1) \otimes \mathcal{O}_X(d) \otimes \mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_Y(d-n-1)$$

である. □

蛇足だが, 上記の補題は Y が X の余次元 1 の非特異閉部分多様体であれば成立する. 一方, 射影空間上の Serre の捩れ層のコホモロジーに対しては以下が成立する.

定理 1.2.5. X を体 k 上の n 次元射影空間とする. このとき $\mathcal{O}_X(m)$ に対して $H^i(X, \mathcal{O}(m)) \neq 0$ であるのは, $i = 0$ かつ $m \geq 0$, または $i = n$ かつ $m \leq -n-1$ のときに限る. またこのとき,

$$\dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X(m)) = \binom{m+n}{n} \qquad , (m \geq 0)$$

$$\dim_k H^n(X, \mathcal{O}_X(-m-n-1)) = \binom{m+n}{n} \qquad , (m \geq 0)$$

が成立する.

証明. [2] 系 6.20 参照. □

2　コホモロジーの計算

前節での道具を元に射影多様体のコホモロジー計算をして多重種数を求める.

例 2.0.1. X を射影平面 $\mathbb{P}_k^2$ とする. 補題 1.2.3 より $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(-3)$ である. よって定理 1.2.5 より, $P_1 := \dim_k\ H^0(X, \omega_X) = \dim_k\ H^0(X, \mathcal{O}_X(-3)) = 0$ がわかる. また $l \geq 1$ に対しては $\omega_X^l \cong \mathcal{O}_X(-3)^{\otimes l} \cong \mathcal{O}_X(-3l)$ だから, 定理 1.2.5 より $P_l = \dim_k H^0(X, \omega_X^l) = \dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X(-3l)) = 0$ が成立する.

例 2.0.2. $X = \mathbb{P}_k^2$ の 2 次超曲面 Y を考える. $l \geq 1$ に対し, Y の多重種数 P_l を求める. Y は X で余次元 1 だから補題 2.1.3 より $\mathcal{O}_X(Y) \cong \mathcal{O}_X(2)$ であり, したがって補題 1.2.4 より,

$$\omega_Y \ \cong \mathcal{O}_Y(2-2-1) = \mathcal{O}_Y(-1)$$

が分かる. 特に $l \geq 1$ に対し, $\omega_Y^l \cong \mathcal{O}_Y(-1)^{\otimes l} \cong \mathcal{O}_Y(-l)$ である. ここで, Y を定義するイデアル層を $\mathcal{I}_Y$ とする. このとき補題 2.1.4 より $\mathcal{I}_Y \cong \mathcal{O}_X(-2)$ と書けることに注意すると, 完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-2) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0 \tag{1}$$

を得る. これに $\mathcal{O}_X(-l)$ をテンソルすることで, 完全列,

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-2-l) \longrightarrow \mathcal{O}_X(-l) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-l) \cong \omega_Y^l \longrightarrow 0$$

を得る. これよりコホモロジー長完全列,

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{O}_X(-2-l)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(-l)) \longrightarrow H^0(Y, \omega_Y^l) \longrightarrow \\ & H^1(X, \mathcal{O}_X(-2-l)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(-l)) \longrightarrow H^1(Y, \omega_Y^l) \longrightarrow \\ & H^2(X, \mathcal{O}_X(-2-l)) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X(-l)) \longrightarrow H^2(Y, \omega_Y^l) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

を得るが, 定理 1.2.5 によれば $H^1(X, \mathcal{O}_X(-2-l)) = 0$ である. 従って, 大域切断の短完全列,

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(-2-l)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(-l)) \longrightarrow H^0(Y, \omega_Y^l) \longrightarrow 0$$

を得る．これは有限次元 k-ベクトル空間の完全列だから, 次元定理を用いると,

$$
\begin{aligned}
\dim_{\mathrm{k}} H^0(Y, \omega_Y^l) &= \dim_{\mathrm{k}} H^0(X, \mathcal{O}_X(-l)) - \dim_{\mathrm{k}} H^0(X, \mathcal{O}_X(-2-l)) \\
&= \binom{n-l}{n} - \binom{n-2l}{n} && ,(\text{定理 } 1.2.5) \\
&= 0 && ,(l \geq 1)
\end{aligned}
$$

上述の例では大域切断の次元 $\dim_k H^0(X, -)$ を求めた．その際, $H^1(X, \mathcal{O}_X(-2-l))$ が消える (i.e. 0 になる) ことから, 他の項に触れることなく大域切断の完全列を得ることができた．更に, 定理 1.2.5 によれば上記のコホモロジー長完全列のうち, 1 次コホモロジーは全て 0 である．ただし 2 次のコホモロジーについては判然としない．詳しく調べてみよう．

その前に計算するうえで有用な定理を導入する．

定理 2.0.3 (Serre duality)**．証明**. □

例 2.0.4. 例 2.0.2 の設定とする．

...

2.1　付録

法層および因子から定まる可逆層に関する性質をまとめておく.

定理 2.1.1. Y を非特異代数多様体 X の閉部分非特異多様体とする. このとき, Y のイデアル層を $\mathcal{I}$ とおくと, 完全列,

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow \Omega^1_{X/k} \otimes \mathcal{O}_Y \longrightarrow \Omega^1_{Y/k} \longrightarrow 0$$

が存在する. 特に Y の X での余次元を r とするとき, $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ は Y 上階数 r の局所自由層である.

証明. [2] 定理 7.84 参照. □

定義 2.1.2. 定理 2.1.1 における $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ を, Y の X での**余法層 (co-normal sheaf)** とよぶ. また, $\mathcal{H}om(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, \mathcal{O}_Y)$ を Y の X での**法層 (normal sheaf)** とよび, $\mathcal{N}_{Y/X}$ と書く.

定理 2.1.3. Y を非特異代数多様体 X 上の余次元 r の非特異閉部分多様体とする. このとき,

$$\omega_Y \;\cong\; \omega_X \otimes \bigwedge^r \mathcal{N}_{Y/X}$$

が成立する. 特に $r = 1$ ならば $\omega_Y \cong \omega_X \otimes \mathcal{O}_X(Y) \otimes \mathcal{O}_Y$ が成立する. ここで, $\mathcal{O}_X(Y)$ は Y を X 上の因子と見たときの Y に付随する可逆層である.

証明. [1] 命題 8.20 参照. □

補題 2.1.4. Y を n 次元射影空間 $X = \mathbb{P}^n$ 上の非特異 d 次超曲面とする. このとき,

$$\mathcal{O}_X(Y) \;\cong\; \mathcal{O}_X(d)$$

が成立する. ただし, $\mathcal{O}_X(Y)$ は Y を X の因子と見たときの Y に付随する可逆層である. また, Y を定義するイデアル層 $\mathcal{I}_Y$ に対して,

$$\mathcal{I}_Y \;\cong\; \mathcal{O}_X(-d)$$

が成立する.

証明. [1] 命題 6.18 参照. □

定理 2.1.5. 体 k 上の n 次元射影空間 $X = \mathbb{P}^n_k$ に対し, 完全列

$$0 \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow \mathcal{O}_X(-1)^{\oplus n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

が存在する.

証明. 詳細は [1] 例 8.20.1 や [2] 例題 7.86 を参照. □

系 2.1.6. X 上の完全列,

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X(1)^{\oplus n+1} \longrightarrow \mathcal{T}_X \longrightarrow 0$$

が存在する.

証明. 定理 2.1.5 の完全列の双対を取ればよい. 詳細は [1] 例 8.20.1 や [2] 例題 7.86 を参照. □

...

参考文献

[1] R.Hartshorne *Algebraic Geometry*, Springer (1977)

[2] 上野健爾,「代数幾何 1,2,3」, 岩波講座現代数学の基礎シリーズ, 岩波書店 (2001)