Bridgeland 安定性条件と代数多様体への応用

@sachiiiimath

2024 年 1 月 29 日

概要

T.Bridgeland の論文 [1] によって構成された三角圏の安定性条件と, その代数多様体への応用についての大雑把なまとめです. もしお気づきの事柄がありましたらどんなに些細なことでも構いませんので教えていただけれると幸いです. (X アカウント : @sachiiiimath まで DM をお願いします)

・専門家の査読を受けている訳ではありませんので, **間違いが多分に含まれる可能性があります**.

・2024 年 1 月時点で**更新中**のステータスであり, 十分な校閲が出来ておりません. 気を付けているつもりですが, 記号の間違いなど軽微なミスが沢山あるかと思います. ご了承頂ければ幸いです.

1 導入

Bridgeland 安定性条件は, 超弦理論における Douglas-Π 安定性の数学的定式化のために T.Bridgeland [Br1] により導入された概念であるが, 現在では様々な分野で応用がある. ここでは特に代数多様体上の安定性条件に関する事柄, とりわけ安定空間の wall crossing について述べる.

2 Bridgeland 安定性条件

Bridgeland による三角圏上の安定性条件を定義する. 詳細は [1] を参照.

2.1 安定関数

まずは安定関数の定義から行う. $\mathcal{A}$ を Abel 圏とする. $K(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ の K 群とする.

定義 2.1.1

$\mathcal{A}$ 上の**安定関数 (stability function)** とは, 群準同型 $Z : K(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ であって,

$$Z(K(\mathcal{A}) \setminus \{0\}) \subset \mathbb{H} := \{r \cdot exp(\sqrt{-1}\pi\phi(E)) \mid r \in \mathbb{R}_{>0}, \phi(E) \in (0, 1]\}.$$

を満たすものをいう. $\phi(E)$ を E の *phase* という. E の任意の真部分対象 $0 \neq F \subset E$ に対し,

$$\phi(F) < (resp. \leq)\ \phi(E)$$

が成立するとき, E は **Z-安定 (resp. Z-半安定) (Z-stable (resp. Z-semistable))** という.

安定関数 Z は以下の条件を満たすとき, **Harder-Narasimhan 条件 (Harder-Narasimhan condition)** を満たすという: 任意の $E \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ に対し有限なフィルトレーション

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = E$$

であって, 任意の $i \in \{1, ..., n\}$ に対し $F_i := E_i/E_{i-1}$ は Z-半安定であり,

$$\phi(E_1) > \cdots > \phi(E_n)$$

を満たすようなものが存在する.

2.2　t-構造

次に三角圏の t-構造とその核を定義する. $\mathcal{T}$ で三角圏を表す.

定義 2.2.1

$\mathcal{T}$ 上の **t-構造 (t-structure)** とは, 充満部分圏 $\mathcal{T}^{\leq 0} \subset \mathcal{T}$ であって以下の条件を満たすもののことをいう:

(i) $\mathcal{T}^{\leq 0}[1] \subset \mathcal{T}^{\leq 0}$.

(ii) $\mathcal{T}^{\geq 1} := \{F \in \mathcal{T} \mid \forall G \in \mathcal{T}^{\leq 0}, Hom_{\mathcal{T}}(G,F) = 0\}$ と定義する. このとき, 任意の $E \in \mathcal{T}$ に対し, $G \in \mathcal{T}^{\leq 0}$ および $F \in \mathcal{T}^{\geq 1}$ であって

$$G \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G[1]$$

が完全三角形となるようなものが存在する.

t-構造 $\mathcal{T}^{\leq 0} \subset \mathcal{T}$ の**核 (core, heart)** とは, 部分圏

$$\mathcal{T}_H := \mathcal{T}^{\leq 0} \cap \mathcal{T}^{\geq 1}[1] \subset \mathcal{T}$$

をいう.

t-構造の核は Abel 圏となることが知られている (cf.[9]). 上の定義と同じ状況を考える.

$$\mathcal{T} = \bigcup_{i,j \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}^{\leq 0}[i] \cap \mathcal{T}^{\geq 1}[j]$$

が成立するとき, t-構造 $\mathcal{T}^{\leq 0}$ は**有界**であるという. t-構造の核 $\mathcal{T}_H \subset \mathcal{T}$ に対して K-group の同型

$$K(\mathcal{T}_H) \cong K(\mathcal{T})$$

が成立する. 以上の準備を以って, 三角圏の安定性条件を定義することが可能となる.

定義 2.2.2 (三角圏の安定性条件)

三角圏 $\mathcal{T}$ 上の**安定性条件 (stability condition)** とは, $\mathcal{T}$ の t-構造 $\mathcal{T}^{\leq 0}$ における核 $\mathcal{T}_H$ および *Harder-Narasimhan* 条件を満たす $\mathcal{T}_H$ 上の安定関数 Z の組 $(Z, \mathcal{T}_H)$ をいう. このとき Z を**中心電荷 (central charge)** という.

$\mathcal{T}$ 上の安定性条件 $(Z, \mathcal{T}_H)$ および $n \in \mathbb{Z}$ と $\phi' \in (0,1]$ に対し, $\mathcal{T}$ の部分圏

$$\mathcal{P}(n+\phi') := \{E \in \mathcal{T} \mid E[-n] \in \mathcal{T}_H \text{は } Z-\text{半安定 かつ } \phi(E[-n]) = \phi'\}$$

を考える.

補題 2.2.3

三角圏 $\mathcal{T}$ に安定性条件を与えることと, 以下の条件を満たす組 $(Z, \{\mathcal{P}(\phi)_{\phi \in \mathcal{R}}\})$ を与えることは同値:

(i) 各 $\mathcal{P}(\phi)$ は $\mathcal{T}$ の部分圏であって, $\mathcal{P}(\phi+1) = \mathcal{P}(\phi)[1]$ となる.

(ii) ϕ_1, ϕ_2 を $\phi_1 > \phi_2$ を満たす任意の実数とする. このとき任意の $E_1 \in \mathcal{P}(\phi_1)$, $E_2 \in \mathcal{P}(\phi_2)$ に対し $Hom_{\mathcal{T}}(E_1, E_2) = 0$.

(iii) Z は群準同型写像 $Z : K(\mathcal{T}) \to \mathbb{C}$ で, 任意の $E \in \mathcal{P}(\phi) \setminus \{0\}$ に対して $Z(E) \in \mathbb{R}_{>0} exp(\sqrt{-1}\pi\phi)$.

(iv) 任意の $E \in \mathcal{T}$ に対し, $l \in \mathbb{N}$ と実数列 $\phi_1 > \phi_2 > \cdots > \phi_l$ および完全三角形
が存在し, 各 $i \in \{1, ..., l\}$ について $A_i \in \mathcal{P}(\phi_i)$ が成り立つ.

証明： [1] Proposition 5.3 参照. ■

$\mathcal{T}$ の部分圏の族 $\{\mathcal{P}(\phi)\}_{\phi\in\mathbb{R}}$ を三角圏 $\mathcal{T}$ の**スライシング (slicing)** と呼ぶ.

補題 2.2.4 (*[1] Lemma5.2*)

$\sigma := (Z, \{\mathcal{P}(\phi)_{\phi\in\mathcal{R}}\})$ を三角圏 $\mathcal{T}$ 上の安定性条件とする．このとき, 任意の $\phi \in \mathbb{R}$ に対して $\mathcal{P}(\phi)$ は *Abel* 圏である.

以降, しばしば $\sigma := (Z, \{\mathcal{P}(\phi)_{\phi\in\mathcal{R}}\})$ と略記する．$\mathcal{P}(\phi)$ に属する対象は σ **の位相** ϕ **における半安定対象**と呼ばれ, 特にそれが $\mathcal{P}(\phi)$ の単純対象であるとき**安定対象**という.

2.3 安定空間と複素構造

$\mathcal{D}$ を三角圏とする.

3 代数多様体上の安定性条件

ここでは代数曲線, 代数曲面, および 3 次元の代数多様体の場合にそれぞれ安定性条件の研究がどのように行われているかを概観する.

3.1 一般論

準備として, 一般の代数多様体 X およびその連接層の導来圏 $D^b(X) := D^b(\mathrm{Coh}(X))$ に対して成り立つことをいくつか挙げておく．一般に $D^b(X)$ の K 群 $K(X) := K(D^b(X))$ は多くの場合有限生成にならないため, 技術的な構成を介する必要がある.

一般の三角圏 $\mathcal{T}$ に対し, 有限生成 Abel 群 Γ と, $\Gamma_{\mathbb{R}} := \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ および $\Gamma_{\mathbb{R}}$ 上のノルム $\|\|_{\mathbb{R}}$, 群準同型写像 $cl : K(\mathcal{T}) \to \Gamma$ をそれぞれ一つ固定する．以降 $Z : \Gamma \to \mathbb{C}$ は cl との合成と解釈する.

定義 3.1.1

(i) $D^b(X)$ の対象 E, F に対し, 以下で定まる式を **Euler 形式 (Euler form)** という:

$$\chi(E,F) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} Hom_{D^b(X)}(E, F[i]).$$

(ii) $K(X)$ の部分群 $K(X)^{\perp} := \{[E] \in K(X) \mid \forall [F] \in K(X), \chi([E][F]) = 0\}$ による商,

$$K(X)/K(X)^{\perp}$$

を X の**数値的** K **群 (numerical K-group)** と呼ぶ.

後に使う定理を与えておく.

定理 3.1.2 (*Hilzeburch-Riemann-Roch* の定理)

$\alpha \in K(X)$ に対し,

$$\chi(\alpha) = \int_X ch(\alpha).td(X)$$

が成立する．ここで $ch(\alpha)$ は α の *Chern* 指標, $td(X)$ は X の *Todd* 類である.

定義 3.1.3

三角圏 $\mathcal{T}$ 上の安定性条件 $\sigma := (Z, \mathcal{T}_H)$ に対し,

(i) σ が**数値的 (numerical)** とは, 中心電荷 Z が以下を満たすことをいう: ベクトル $\pi(\sigma) \in \mathcal{N}(X) \otimes \mathbb{C}$ が存在し, 任意の $[E] \in K(X)$ に対し

$$Z(E) = \langle \pi(\sigma), ch(E) \rangle_M$$

と書ける.

(ii) σ が**局所有限 (locally finite)** とは, 任意の $\phi \in \mathbb{R}$ に対しある $\epsilon \in \mathbb{R}$ があり, $\mathcal{P}(\phi - \epsilon, \phi + \epsilon)$ が有限の長さを持つことをいう.

二つ目の条件である局所有限の意味は, 多くの場合安定性条件の空間は無限次元となってしまうため, 有限なものへと制限するための条件である.

$D^b(X)$ 上の数値的で局所有限な安定性条件の全体を $\mathrm{Stab}(X)$ とおき, **安定空間 (stable space)** という. よく知られているように, $\mathrm{Stab}(X)$ には複素多様体の構造が入る. 定義 3.1.3(i) の写像 $\pi : \mathrm{Stab}(X) \to \mathcal{N}(X) \otimes \mathbb{C}$ は複素多様体としての正則写像である. $D^b(X)$ の有界な t-構造の核 $\mathcal{T}_H$ を固定し,

$$\mathrm{Stab}(\mathcal{T}_H) := \{\sigma' = (Z', \mathcal{T}_{H'}) \in \mathrm{Stab}(X) \mid \mathcal{T}_{H'} = \mathcal{T}_H\}$$

と定義する.

3.2　安定空間への群作用

前節にて定義した安定空間 $\mathrm{Stab}(X)$ への $\widetilde{GL^+(n, \mathbb{R})}$ による自然な群作用について記述する. この群作用による $\mathrm{Stab}(X)$ の商を考えることで $\mathrm{Stab}(X)$ の解析を行うことができる. 特に, 後述する代数曲線の安定空間は完全に決定することが可能である.

$\mathbb{R}$ 上の一般線形群 $GL(n, \mathbb{R})$ の部分群,

$$GL^+(n, \mathbb{R}) = \{T \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \mathrm{det}T > 0\}$$

を考え, その普遍被覆を $\widetilde{GL^+(n, \mathbb{R})}$ とする. $\widetilde{GL^+(n, \mathbb{R})}$ は $T \in GL(n, \mathbb{R})$ および, 以下を満たす単調増加関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で以下を満たすものの組 (T, f) 全体と思うことができる:

(i) 全ての $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x + 1) = f(x) + 1$.

(ii) 同一視 $S^1 = \mathbb{R}/2\mathbb{Z} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}/\mathbb{R}_{>0}$ によって, f と T が S^1 に誘導する写像は等しい.

(cf. xx.xx).

ここで $\sigma := (Z_\sigma, \mathcal{P}_\sigma) \in \mathrm{Stab}(X)$ および $g := (T, f) \in \widetilde{GL^+(n, \mathbb{R})}$ に対して, $Z_{\sigma g} = T^{-1} \circ Z_\sigma$, $\mathcal{P}_{\sigma g} = \mathcal{P}_\sigma(f(\phi))$ と定める. また, $\mathbb{C}$ を実 2 次元の空間と同一視することで T^{-1} を作用させる.

命題 3.2.1

$\sigma g = (Z_\sigma g, \mathcal{P}_\sigma g)$ は命題 2.2.3 を満たす. すなわち $\sigma g \in Stab(X)$.

■

証明 :

したがって, 位相空間 $\mathrm{Stab}(X)$ への $\widetilde{GL^+(n, \mathbb{R})}$ の右作用:

$$\mathrm{Stab}(X) \times \widetilde{GL^+(n, \mathbb{R})} \longrightarrow \mathrm{Stab}(X)$$

が定まる. この作用を用いて $\mathrm{Stab}(X)$ の GIT によるモジュライ空間を構成したい. そこで, この作用の軌道による同値関係を定義する.

定義 3.2.2

$\sigma, \sigma' \in Stab(X)$ が $\widetilde{GL^+(n, \mathbb{R})} - equivalence$ とは, σ および σ' が同じ単一の $\widetilde{GL^+(n, \mathbb{R})}$-軌道に含まれること

をいう.

ここで, $T \in GL^+(n,\mathbb{R})$ に対し $T \mapsto \mathrm{id}_{\mathcal{N}(X)} \otimes T^{-1}$ と定めることで, $GL^+(n,\mathbb{R})$ から $\mathcal{N}(X)\otimes\mathbb{C}$ への作用を定めておく. したがって, 被覆写像を経由して $\widetilde{GL^+(n,\mathbb{R})}$ は $\mathcal{N}(X)\otimes\mathbb{C}$ へ作用する. 写像 $\pi : \mathrm{Stab}(X) \to \mathcal{N}(X)\otimes\mathbb{C}$ はこの写像と一致する.

3.3 代数曲線上の安定性条件

この節では Emanuel Macri による種数 1 以上の非特異射影曲線上の安定空間に対する結果ついて述べる. 詳細は [3] を参照. C の連接層の導来圏 $D^b(C)$ の K 群 $K(C)$ は有限階数にならず, したがって前節で述べたようにその安定性条件 $\mathrm{Stab}(D^b(C))$ は無限次元である. そこで, 定義 3.1.3(ii) で定義した局所有限性を課す必要がある. よって以下では局所有限な $\mathrm{Stab}(D^b(C))$ の部分多様体 $\mathrm{Stab}(C)$ を議論の対象とする.

蛇足だが, [3] には $\mathbb{C}$ 線形な三角圏上の例外対象およびその変異を用いた t 構造の核の構成方法が示されており, それを用いて射影直線上の安定性条件の空間 $\mathrm{Stab}(D^b(\mathbb{P}^1))$ が単連結であることが導かれている. 折を見てその内容にも触れたい.

以下は, [3] の主結果の一つである.

定理 3.3.1 (*E.Macri*)

C を $g(C) > 0$ の非特異射影曲線とする. このとき, $\widetilde{GL^+}(2,\mathbb{R})$ による $Stab(C)$ への作用は自由かつ推移的である. したがって,

$$Stab(C) \cong \widetilde{GL^+}(2,\mathbb{R}) (\cong \mathbb{C}\times\mathcal{H}).$$

ここで $\mathcal{H}$ は複素上半平面である.

この定理の証明を見るために, $\mathrm{Stab}(C)$ を調べるうえで基本的な補題を与える.

補題 3.3.2 (*[5] Lemma7.2*)

C を種数 $g > 0$ を満たす非特異射影曲線とする. E を $Coh(C)$ の対象であって, $Hom^{\leq 0}(F,G) = 0$ を満たすような三角形

$$F \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow F[1] \tag{1}$$

が存在するものとする. このとき, $F, G \in Coh(C)$ が成立する.

■

証明 (定理 3.3.1) :

3.4 代数曲面上の安定性条件

代数多様体 X の次元が 2 以上の場合, その安定空間 $\mathrm{Stab}(X)$ は単純ではない. 具体的には, 曲線の時のように標準的な t 構造の核として $\mathrm{Coh}(X)$ をとることが出来ない. そこで, *Abel* 圏の「傾斜」を用いることで新たな t 構造の核を構成するという方針をとる.

3.4.1 代数曲面の性質

X を $\mathbb{C}$ 上の非特異射影曲面とする. $[E] \in K(X)$ に対し, その Chern 指標は

$$\mathrm{ch}(E) := (\mathrm{rank}(E), c_1(E), \mathrm{ch}_2(E)) \in \mathcal{N}(X)$$

によって与えられるのだった. ここで $\mathcal{N}(X) := \mathbb{Z}\oplus\mathrm{NS}(X)\oplus\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ である. 以下は Hilzebruch-Riemann-Roch の定理の帰結である. Chern 指標 $\mathrm{ch} : K(X) \hookrightarrow H^{2*}(H,\mathbb{Q})$ は X の数値的 K 群 $K(X)/K(X)^{\perp}$ から $\mathcal{N}(X)$ への単射を誘導する. 以下で定まる 2 次形式は $\mathcal{N}(X)$ 上の **Mukai ペアリング (Mukai pairing)** という: $E_1, E_2 \in D^b(X)$

に対し

$$\langle \mathrm{ch}(E_1), \mathrm{ch}(E_2)\rangle_M = \langle (r_1, c_1([E_1]), s_1), (r_2, c_1([E_2]), s_2\rangle := c_1(E_1).c_1(E_2) - r_1 s_2 - r_2 s_1.$$

この双線形形式と $\mathcal{N}(X)$ の組 $(\mathcal{N}(X), \langle , \rangle_M)$ は符号数 $(2, \rho)$ の格子であり, **Mukai 格子 (Mukai lattice)** と呼ぶ. ここで $\rho \geq 1$ は X のピカール数である.

前節で述べたように $K(D^b(X))$ が有限生成とならないことを避けるために, Chern 指標 ch : $K(X) \to H^{2*}(X, \mathbb{Q})$ を用いて $\Gamma := \mathrm{Im\ ch}, \mathrm{Im(ch)}, cl = \mathrm{ch}$ とおく.

3.4.2　μ-安定性と Bridgeland 安定性条件

代数多様体上の連接層は, ある種のフィルトレーション条件を満たす時に安定層と呼ばれ, 安定層のモジュライ空間を研究する分野がある. これは連接層に対して構成される概念であり, 直接 Bridgeland 安定性条件を定める訳ではないが構成のヒントになる. ここでは安定層のモジュライについて詳細には踏み込まず, 必要な概念のみの抜粋にとどめる. 詳細は [6] §5 などを参照.

X を非特異射影多様体とする. X 上の非常に豊富な因子 $\omega := \mathcal{O}_X(1)$ と X の組 (X, ω) を**偏極 (polarise)** 射影多様体という.

定義 3.4.1

(i) 偏極射影多様体 (X, ω) および $\mathcal{F} \in \mathit{Coh}(X)$ に対し,

$$\mu_\omega(\mathcal{F}) := \frac{c_1(\mathcal{F}) \cdot \omega^{d-1}}{\mathit{rank}(\mathcal{F})}$$

を $\mathcal{E}$ の**傾斜 (slope)** という. ただし $\mathit{rank}(\mathcal{E}) = 0$ のとき $\mu_\omega(\mathcal{E}) = \infty$ と定義する.

(ii) $\mathcal{F} \in \mathit{Coh}(X)$ が任意の真部分層 $0 \subsetneq \mathcal{E} \subsetneq \mathcal{F}$ に対して

$$\mu_\omega(\mathcal{E}) < (\mathit{resp.}\ \leq) \mu_\omega(\mathcal{F}/\mathcal{E})$$

を満たすとき, μ_ω 安定 *(*半安定*)* であるという.

X 上の捩れ層について記述する.

定義 3.4.2

X を *Noether* スキームとし, $\mathcal{E} \in \mathit{Coh}(X)$ とする.

(i) $\mathcal{E}$ の次元を $\dim(\mathcal{E}) = \dim \mathit{Supp}(\mathcal{E}) := \{x \in X \mid \mathcal{E}_x \neq 0\}$ の次元と定義する.

(ii) $T(\mathcal{E})_i$ を $\mathcal{E}$ の部分層であって, 次元が $i = 0, ..., \dim(\mathcal{E})$ 以下のもので最大のものと定義する. このとき得られるフィルトレーション

$$0 = T(\mathcal{E})_0 \subset T(\mathcal{E})_1 \subset \cdots \subset T(\mathcal{E})_{\dim X} = \mathcal{E}$$

を **Torsion フィルトレーション**という.

(iii) $\mathcal{E}$ が**捩れを持たない層 (torsion free sheaf)** とは, $\dim(\mathcal{E}) = \dim(X)$ かつ $T(\mathcal{E})_{\dim(X)-1} = 0$ であることをいう. そうでないとき $\mathcal{E}$ を**捩れ層 (torsion sheaf)** という.

3.4.3　捩れ対と傾斜

一般に代数多様体 X の次元が 2 以上の場合, 標準的な t 構造の核 $\mathrm{Coh}(X)$ を用いて安定性条件を構成することが出来ない. そこで Abel 圏の**捩れ対 (torsion pair)** と傾斜 (tilting) という概念を用いて t 構造の核を構成する

方針をとる.

定義 3.4.3

$\mathcal{A}$ を *Abel* 圏とする. $\mathcal{A}$ の部分圏の組 $(\mathcal{T},\mathcal{S})$ が**捩れ対 (torsion pair)** とは, 以下の *2* 条件を満たすことをいう:

(i) $Hom(\mathcal{T},\mathcal{S})=0$.

(ii) 任意の $F\in Ob(\mathcal{A})$ に対し, 完全列

$$0\longrightarrow E\longrightarrow F\longrightarrow G\longrightarrow 0$$

となるような $E\in Ob(\mathcal{T})$, $G\in Ob(\mathcal{S})$ が存在する.

例 3.4.4

代数多様体 X 上の捩れ層のなす圏 $\mathcal{T}\subset Coh(X)$, 捩れの無い層 $\mathcal{S}\subset Coh(X)$ の対 $(\mathcal{T},\mathcal{S})$ は捩れ対である.

一般に三角圏 $\mathcal{D}$ に対し, t 構造の核 $\mathcal{A}$ とその捩れ対が与えられると, そこから**傾斜 (tilting)** と呼ばれる別の Abel 部分圏を作り出すことができる. 具体的には以下のように構成する (詳しくは, Happel-Reiten-Smalo. [11] を参照): $\mathcal{A}\subset\mathcal{D}$ でのコホモロジー的関手を $\mathcal{H}^i_A$ と表す. $\tau_{\le 0}\mathcal{D}$, $\tau_{\ge 1}\mathcal{D}$ を §2 で定義したものとする. $\tau_{\le 0}(T)\in\tau_{\le 0}\mathcal{D}$ に対して

$$\tau_{\ge 0}(T):=\tau_{\ge 1}(T[-1])[1]$$

と定めると

$$\mathcal{H}^i_A(T)=\tau_{\le 0}(\tau_{\ge 0}(T))$$

であることが分かる. 実際,

(複体の遷移のお絵描きを入れる)

である.

命題 3.4.5

三角圏 $\mathcal{D}$ に対してその有界な t 構造の核を $\mathcal{A}\subset\mathcal{D}$ とする. $\mathcal{A}$ の捩れ対 $(\mathcal{T},\mathcal{S})$ に対し,

$$\mathcal{A}^\sharp:=\left\{E\in Ob(D)\middle|\mathcal{H}^0_A(E)\in\mathcal{T},\mathcal{H}^{-1}_A(E)\in\mathcal{S},\mathcal{H}^i_A(E)=0,(i\ne 0,-1)\right\}$$

と定める. このとき $\mathcal{A}^\sharp$ は $\mathcal{D}$ の t 構造の核である. 特に $\mathcal{A}^\sharp$ は *Abel* 圏である.

■

証明 :

定義 3.4.6

命題 *3.4.5* における $\mathcal{A}^\sharp$ を $\mathcal{A}$ の**傾斜 (tilting)** という.

3.4.4　捩れ安定性

非特異射影曲面の考察に戻ろう. Abel 圏の傾斜を用いて具多的に $D^b(X)$ の t 構造の核を構成する. また安定関数も具体的に与え, 安定性条件が定まることを見る.

$\mathrm{Amp}(X)$ で X の ample cone を表し, $\mathrm{Amp}(X)_{\mathbb{R}}:=\mathrm{Amp}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ とする. 同様に $\mathrm{NS}(X)$ で X の Neron-Severi 群を表し, $\mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}}:=\mathrm{NS}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ とする.

$$\mathcal{A}(X)_{\mathbb{C}}:=\{B+\sqrt{-1}\omega\in\mathrm{NS}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}|B,\omega\in rns_{\mathbb{R}},\ \omega\text{は豊富因子}\ \}$$

と定める.

定義 3.4.7 (*B-twisted Chern characer*)

$B\in NS(X)_{\mathbb{R}},\mathcal{E}\in D^b(X)$ に対し,

$$ch^B(\mathcal{E}):=exp(-B)ch(E)\in H^{2*}(X,\mathbb{R})$$

を **B-捩り Chern 標数 (B-twisted Chern character)** という．$ch^B(\mathcal{E})$ の $H^i(X,\mathbb{R})$ 部分を $ch_i^b(\mathcal{E})$ と表す．

これを用いて，μ_ω を以下のように少し修正する：$\beta \in \mathrm{NS}(X)_\mathbb{R}$, $\omega \in \mathrm{Amp}(X)_\mathbb{R}$ とする．X 上の捩れのない層 $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$ に対して以下のように定める：

$$\mu_{\beta,\omega}(\mathcal{F}) := \frac{\mathrm{ch}_1^B(\mathcal{E})\cdot\omega^{d-1}}{\mathrm{rank}(\mathcal{E})}.$$

命題 3.4.8

$$\mu_{\beta,\omega}(\mathcal{E}) = \mu_\omega - B\omega^{d-1}.$$

証明： 補題 3.4.9 と式 (3.4.4) より，

$$\mu_{\beta,\omega}(\mathcal{F}) = \frac{\mathrm{ch}_1(\mathcal{F})\omega^{d-1} - \mathrm{ch}_0(\mathcal{F})B\omega^{d-1}}{\mathrm{rank}(\mathcal{F})}.$$

したがって，$\mathrm{ch}_0(\mathcal{F}) = \mathrm{rank}(\mathcal{F})$ であることに注意すれば，

$$\begin{aligned}\mu(\mathcal{F}) - B\omega^{d-1} &= \frac{\mathrm{ch}_1(\mathcal{F})\omega^{d-1}}{\mathrm{rank}(\mathcal{F})} - \frac{\mathrm{rank}(\mathcal{F})B\omega^{d-1}}{\mathrm{rank}(\mathcal{F})}\\ &= \frac{\mathrm{ch}_1(\mathcal{F})\omega^{d-1} - \mathrm{ch}_0(\mathcal{F})B\omega^{d-1}}{\mathrm{rank}(\mathcal{F})}\\ &= \mu_{\beta,\omega}(\mathcal{F}).\end{aligned}$$

■

補題 3.4.9

通常の意味での *Chern* 指標 ch および定義 *3.4.7* の *Chern* 指標 ch^B に対し，関係式

$$ch_0^B = ch_0,\ ch_1^B = ch_1 - Bch_0,\ ch_2^B = ch_2 - Bch_1 + \frac{B^2}{2}ch_0$$

が成立する．

証明： $\mathrm{ch}(-) := \sum_{j=0}^\infty \mathrm{ch}_j$, $e^{-B} := \sum_{l=0}^\infty e_l$ と表しておく．すると Cauchy 積より，

$$\mathrm{ch}^B = e^{-B}\mathrm{ch} = \sum_{k=0}^\infty\sum_{i=0}^k e_i\cdot\mathrm{ch}_{k-i}$$

が成り立つ．よって $e^{-B} = 1 - B + \frac{B^2}{2} - (\text{高次の項})$ を踏まえると 2 次までの項の計算は，

$$\mathrm{ch}^B = e^{-B}\mathrm{ch}(\mathcal{E}) = \mathrm{ch}_0 + (\mathrm{ch}_1 - B\mathrm{ch}_0) + (\mathrm{ch}_2 - B\mathrm{ch}_1 + \mathrm{ch}_0\frac{B^2}{2}).$$

である．■

これによって，$\mu_{\beta,\omega}$ の意味で (半) 安定であることと μ_ω-(半) 安定性が同値となることがわかる．$\mathrm{Coh}(X)$ の部分圏の組 $(\mathcal{T}_{\beta,\omega},\mathcal{S}_{\beta,\omega})$ を，

$$\mathcal{T}_{\beta,\omega} := \langle \mathcal{E}\in\mathrm{Coh}(X) \mid \mu_\omega - \text{半安定かつ}\mu_{\beta,\omega}(\mathcal{E}) > 0\rangle_{ex} \quad (2)$$
$$\mathcal{S}_{\beta,\omega} := \langle \mathcal{E}\in\mathrm{Coh}(X) \mid \mu_\omega - \text{半安定かつ}\mu_{\beta,\omega}(\mathcal{E}) \le 0\rangle_{ex} \quad (3)$$

と定める．ここで $\langle\mathcal{A}\rangle_{ex}$ は Abel 圏 $\mathcal{A}$ の拡大閉包である．定義より $\mathrm{Coh}(X)$ の捩れのない層は全て $\mathcal{S}_{\beta,\omega}$ に含まれ，捩れ層は全て $\mathcal{T}_{\beta,\omega}$ に含まれる．μ_ω-半安定 HN フィルトレーションの存在から，$(\mathcal{T}_{\beta,\omega},\mathcal{S}_{\beta,\omega})$ は $\mathrm{Coh}(X)$ の捩れ対であることがわかる．したがって，

$$\mathcal{A}_{\beta,\omega} := \langle\mathcal{S}_{\beta,\omega}[1]\cap\mathcal{T}_{\beta,\omega}\rangle_e x$$

は $D^b(X)$ の t 構造の核である．また向井ペアリング (式 3.4.1) を用いた以下の式

$$Z_{\beta,\omega} := \langle\exp(\beta+i\omega),\mathrm{ch}(E)\rangle_M.$$

は $\mathcal{A}_{\beta,\omega}$ 上の安定関数を与える (証明は [6] §8 を参照). したがって,

$$\sigma_{\beta,\omega} := (Z_{\beta,\omega}, \mathcal{A}_{\beta,\omega}) \tag{4}$$

は $D^b(X)$ 上の安定性条件を定める.

3.5　壁と部屋

この節では, $\mathbb{C}$ 上の非特異射影曲面上の安定性条件の空間に対して, 壁と部屋構造を定義する. 参考文献は [6], [4] である.

3.5.1　壁の定義

[?] §8 によれば一般に三角圏 $\mathcal{T}$ 上の安定空間 $\mathrm{Stab}(\mathcal{T})$ と, 各対象 $A \in \mathcal{T}$ に対して

$$m_{(-)}(A) : \mathrm{Stab}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad \sigma \mapsto m_\sigma(A) := \sum |Z(A_i)|$$

という関数が定まる. S を $\mathcal{T}$ の対象の集合とする.

$$\sup\{m_\sigma(A) | A \in S\} < \infty$$

が成立するとき, S は σ に対して**有界な質量 (bounded mass)** を持つという.

定理 3.5.1

$Stab_B(\mathcal{T})$ を $Stab(\mathcal{T})$ の連結なコンパクト部分集合とし, $\mathcal{T}$ の対象の集合 S は任意の $\sigma \in Stab_B(\mathcal{T})$ に対して有界な質量を持つと仮定する. このとき, $Stab(\mathcal{T})$ の実余次元 1 の部分多様体 $\{W_i\}_{i\in I}$ が存在し, 任意の $Stab_B(X) \setminus (\cup_i W_i)$ における連結成分 C は以下を満たす:

$A \in S$ がある $\sigma_0 \in C$ に対して σ-半安定ならば, A は全ての $\sigma \in C$ に対して半安定である. さらに, A が $cl(A)$ が原始的である σ_0 に対して σ-安定ならば, A は全ての $\sigma \in C$ に対して σ-安定である.

証明: [6] §11 命題 11.46 参照. ■

この状況における, 部分多様体 $\{W_i\}_{i\in I}$ を $\mathrm{Stab}(\mathcal{T})$ の**壁 (wall)**, 連結成分 C を**部屋 (chamber)** と呼ぶ.

3.5.2　代数曲面上の壁

$\mathrm{Stab}(X)$ 上の壁を考えよう. $\omega \in \mathrm{Amp}(X)_\mathbb{R}$ と $\alpha \in \mathrm{NS}(X)_\mathbb{R}$ を固定する. $\sigma_{\beta,\omega} := (\mathcal{A}_{\beta,\omega}, Z_{\beta,\omega}) \in \mathrm{Stab}(X)$ を式 (4) で定めた安定性条件とする. $E \in \mathcal{A}_{\beta,\omega}$ に対して $\mathrm{ch}(E) = (r, D, s) \in \mathcal{N}(X)_\mathbb{C}$ と表す. 計算により,

$$\begin{aligned} Z_{\beta,\omega}(\mathcal{E}) &= \langle \exp(\beta + i\omega), (r, D, c) \rangle_M \\ &= -\mathrm{ch}_2^\beta(\mathcal{E}) + \frac{\omega^2}{2}\mathrm{ch}_0^\beta(\mathcal{E}) + i\omega \mathrm{ch}_1^\beta(E) \\ &= -s + D\beta - \frac{r}{2}(\beta^2 - \omega^2) + i(D - r\beta)\omega \end{aligned}$$

である.

$\mathrm{Stab}(X)$ には複素多様体の構造が入るのであった. $\sigma_{\beta,\omega}$ はこの構造における $\mathrm{Stab}(X)$ の点とみなすことができる. β および ω の係数をパラメータとして, 様々な部分多様体を考えることができる.

$$\mathcal{R}_{\beta,\omega} := \{(\mathcal{A}_{\beta,\omega}, Z_{\beta,t\omega}) \mid t \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

は Stab(X) の半直線をなす ($\mathcal{A}_{\beta,t\omega} = \mathcal{A}_{\beta,\omega}$ であることに注意). 同様にして, 上半平面も

$$\mathcal{P}_{\beta,\omega} := \{(\mathcal{A}_{s\beta,\omega}, Z_{s\beta,t\omega}) \mid t \in \mathbb{R}_{>0}, s \in \mathbb{R}\}$$

として定まる．また, 任意の $\beta \in \mathrm{NS}_{\mathbb{R}}$ は豊富因子 ω とそれに直交する $\gamma \in \mathrm{NS}_{\mathbb{R}}$(i.e. $\omega \cdot \gamma = 0$ を満たす) の線形結合 $\beta = s\omega + u\gamma$ として表せる事実を用いると,

$$\Omega_{\beta,\omega} := \{(\mathcal{A}_{s\omega+u\gamma,t\omega}, Z_{s\omega+u\gamma,t\omega}) \mid s, u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_{>0}\} \tag{5}$$

が定まり, これは $\mathbb{R}^3$ の上半部分と同一視することができることがわかる．$\Omega_{\beta,\omega}$ において u を 1 つ固定したものを $\Pi_{\beta,\omega,u}$ とすれば,

$$\{\Pi_{\beta,\omega,u}\}_{u\in\mathbb{R}}$$

は $\Omega_{\beta,\omega}$ の平面の族である．

零でない $v = (r_0, \theta, z_0) \in \mathcal{N}(X)$ を一つ固定する．$\sigma_{\beta,\omega} \in \mathrm{Stab}(X)$ および $E \in \mathcal{A}_{\beta,\omega}$ に対してその**傾斜関数 (slope)** を,

$$\mu_{Z_{\beta,\omega}}(E) := -\frac{\mathrm{Re}Z_{\beta,\omega}(v(E))}{\mathrm{Im}Z_{\beta,\omega}(v(E))} \tag{6}$$

$$= -z_0 + \theta\beta - \frac{r_0}{2}(\beta^2 - \omega^2) + i(\theta - r_0\beta)\omega \tag{7}$$

と定義する．壁の定義は定理 3.5.1 で与えたとおりであるが, [4] では計算をしやすい擬似壁という形で定義を行っている．ここではその方針に従うことにする．

定義 3.5.2

(i) $w \in \mathcal{N}(X) \setminus \langle v\rangle$*(resp.* $w \in \mathcal{N}(X)_{\mathbb{R}} \setminus \langle v\rangle$*)* が $\mathbb{Z}$**-critical***(resp.* $\mathbb{R}$-critical) であるとは, $\mu_{Z_{\beta,\omega}}(v) = \mu_{Z_{\beta,\omega}}(w)$ を満たすような $\sigma_{\beta,\omega} \in \mathit{Stab}(X)$ が存在することをいう．このとき, $\sigma_{\beta,\omega}$ は w を *critical* にするという．

(ii) $\mathbb{Z}$ または $\mathbb{R}$-*critical* な w に対して, *Stab*(X) の部分集合,

$$W^v_w := \{\sigma \in \mathit{Stab}(X) \mid w \text{ を } \mathit{critical} \text{ にする }\}$$

を**擬似壁 (pseudo-wall)** という．

また [4] においては, μ_ω-半安定な対象または捩れ層を扱う目的で, 議論を $\mathcal{T}_{\beta,\omega}$ (式 (3)) の対象に制限をしている．具体的には, $E \in \mathcal{T}_{\beta,\omega}$ に対しては, Bogomolov の不等式 $c_1(v(E))^2 \geq 2r(v(E))\mathrm{ch}_2(v(E))$ が成立する．このため, 予めこの条件を満たす Chern 類を Bogomolov 類として定義しておく, という方針をとる．

定義 3.5.3

$v \in \mathcal{N}(X)_M$, $(M = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$ が **Bogomolov 類 (Bogomolov class)** であるとは不等式,

$$c_1(v)^2 \geq 2r(v)ch_2(v)$$

を満たすことをいう．

以降, Bogomolov 類 v を固定しておき, $v = v(E)$ を満たす対象 $E \in \mathrm{Coh}(X)$, というように条件に指定することが多い．また, 分解 $\beta = s\omega + u\gamma$ を用いれば,

$$E \text{ が Bogomolov の不等式を満たす} \iff E \in T_{\beta,\omega} \iff E \in T_{s\omega+u\gamma,\omega}$$

であり, $\mathrm{rank}(E) = 0$ または $\mu_\omega(E) \geq s\omega^2$ であることにも注意しておく．

さて, Bogomolov 類 v を一つ固定しよう．次の定理は Stab(X) の擬似壁 W^v_w が $\Pi_{\beta,\omega,u}$ の中の半円であること

を主張する．

定理 3.5.4

Bogomolov 類を $v=(r_0,\theta,z_0)$ とする．このとき，$\mu_\omega(v)\neq\mu_\omega(w)$ を満たす w についての $Stab(X)$ の擬似壁 W^v_w は式 *(5)* で定義した $\Pi_{\beta,\omega,u}$ の中のある方程式で定義される半円である．

証明： まず，疑似壁 W^v_w を求めよう．定義より，

$$W^w_v=\{\sigma_{\beta,\omega}\in\mathrm{Stab}(X)\mid \mu_{Z_\beta,\omega}(w)=\mu_{Z_\beta,\omega}(v),\ w\in\mathcal{N}(X)\setminus\langle v\rangle\}$$

である．したがって W^w_v を求めるには傾斜関数 $\mu_Z(v)=\mu_Z(w)$ を満たす w の条件を求めればよい．

以前の議論より ω と直交する $\gamma\in\mathrm{NS}_{\mathbb{R}}$ を用いて $\beta=s\omega+u\gamma$, $(s,u\in\mathbb{R})$ と表示することができる．よって $Z_{\beta,\omega}=Z_{s\omega+u\gamma,t\omega}$, $(s,u\in\mathbb{R},t\in\mathbb{R}_{>0})$ と仮定してよい．同様に $\theta=b_1\omega+b_2\gamma+\alpha$, $(\alpha\in\langle\omega,\gamma\rangle^\perp)$ と表示する．定義より $\omega\gamma$, $\omega\alpha$, $\omega\alpha'$, $\gamma\alpha$, $\gamma\alpha'$ はすべて 0 である．また，$\omega^2=g$, $\gamma^2=-d$ と表記する．

したがって傾斜関数 $\mu_Z(-):=\mu_{Z_{s\omega+u\gamma,t\omega}}(-)$ は，

$$\begin{aligned}\mu_Z(v)&=-\frac{\mathrm{Re}(Z(v))}{\mathrm{Im}(Z(v))}\\&=\frac{z_0-sb_1g+ub_2d-\frac{r_0}{2}(s^2g-u^2d-t^2g)}{(b_1-r_0s)gt}\end{aligned}$$

と表せる．$w=(r,e_1\omega+e_2\gamma+\alpha',z)\in\mathcal{N}\setminus\langle v\rangle$ を任意にとる．このとき $\mu_Z(v)=\mu_Z(w)$ となる条件は，

$$\begin{aligned}&\mu_Z(w)-\mu_Z(v)=\\&\quad\frac{(b_1-r_0s)(z-se_1g+ue_2g+\frac{r}{2}(s^2g-u^2d-t^2g))-(e_1-rs)(z_0-sb_1g+ub_2d+\frac{r_0}{2}(s^2g-u^2d-t^2g))}{(e_1-rs)(b_1-r_0s)gt}\\&=\ 0\end{aligned}$$

である．s,t について整理することで，分子は

$$\begin{aligned}&g(r_0e_1-b_1r)s^2-2(zr_0-rz_0+e_2udr_0-b_2udr)s\\&\qquad+g(r_0e_1-b_1r)t^2-2z_0e_1+2e_2udb_1+r_0u^2de_1-2b_2ude_1+2zb_1-ru^2db_1\end{aligned}\tag{8}$$

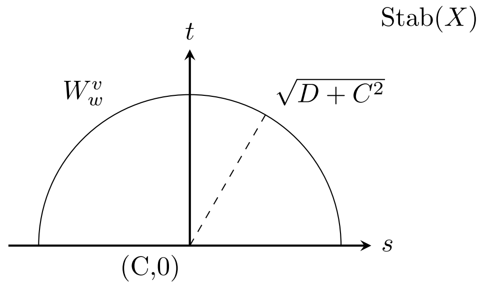
である．仮定より $\mu_\omega(v)=\frac{(b_1\omega+b_2\gamma+\alpha)\omega}{r_0}\neq\frac{(e_1\omega+e_2\gamma+\alpha')\omega}{r}=\mu_\omega(w)$(つまり $r_0e_1-rb_1\neq0$) である．

$$\begin{aligned}C&=\frac{r_0z-rz_0+ud(r_0e_2-rb_2)}{g(r_0e_1-rb_1)},\\D&=\frac{2z_0e_1-2e_2udb_1-r_0u^2de_1+2b_2ude_1-2zb_1+ru^2db_1}{g(r_0e_1-rb_1)}\end{aligned}$$

とおき，式 (8) を s,t についてそれぞれ平方完成することで，

$$\mu_Z(w)-\mu_Z(v)=g(r_0e_1-rb_1)((s-C)^2+t^2-D-C^2)=0\tag{9}$$

を得る．したがって，(s,t) をパラメータとする平面 $\Pi_{\gamma,\omega,u}$ において式 (9) 満たす集合は，中心が $(C,0)$，半径が $\sqrt{D+C^2}$ である半円である．■



$(s-C)^2=D+C^2$ で定まる $\mathrm{Stab}(X)$ の壁

上述の定理の証明において，$\mu_\omega(v)=\mu_\omega(w)$ と仮定すると (すなわち $r_0e_1-rb_1=0$ と仮定すると)，式 (8) における s^2,t^2 の項は消える．さらに $s=\frac{b_1}{r_0}$ とおくと，この式は 0 である．したがって式 (8) は $\mathrm{Stab}(X)$ の直線を定めていることが分かる．半径が ∞ の半円と考えることで $(s-C)^2=D+C^2$ を満たす半円という見方も可能である．

補題 3.5.5

(i)

(ii)

■

証明：

系 3.5.6

[4] における主定理を述べる.

定理 3.5.7

3.5.3　例

[4] では具体例が挙げられている.

4　具体例

4.1　楕円曲線上の安定性条件

前節の E.Macri の結果によって, 種数 1 以上の曲線上の安定空間は完全に決定できることが分かったが, それより以前に [1] では楕円曲線に対して個別に前節と同様の位相同型が示されていた. この節ではそれに触れたい. 主な参考文献は [1] および [6] §11.4.

$\mathbb{C}$ 上の楕円曲線 C を考える. C の K-群 $K(C)$ に対し, その Chern 指標 $\mathrm{ch} : K(C) \to H^{2*}(C, \mathbb{Q})$ が $[E] \mapsto (\mathrm{rank}E, \deg E)$ によって与えられ, 従って $\mathrm{Im\ ch} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ である. これらのペア $(\mathrm{Im\ ch}, \mathrm{ch})$ を考える. ここで,

$$Z_0((r, d)) = -d + \sqrt{-1}r$$

と定義する. すると $\sigma_0 := (Z_0, \mathrm{Coh}(C))$ は C 上の安定性条件である (cf.).

定理 4.1.1 (*Bridgeland*)

$\widetilde{GL^+(2, \mathbb{R})}$ による右作用 $g := (T, f) \mapsto \sigma_0 g$ は位相同型

$$\widetilde{GL^+}(n, \mathbb{R}) \cong Stab(C)$$

を与える.

■

証明：

4.2　線織曲面の安定性条件

線織曲面とは, 滑らかな曲線 C 上の階数 2 の局所自由層 $\mathcal{E}$ による $\mathbb{P}^1$-束 $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \to C$ をいう. このうち有理的なもの ($\mathbb{P}^2$ と双有理なもの) を有理線織曲面といい, そうでないものを非有理線織曲面という. 非有理な線織曲面は C の種数 $g_C \geq 1$ の時に与えられることが知られている. Chern 指標の計算に有用な補題を与えておく.

補題 4.2.1

$\pi : X := \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to C$ を非有理な線織曲面とする. このとき,

$$c_1(X)^2 = 8(1 - g_C).$$

ここで $c_1(X)$ は直線束 $\mathcal{O}_X(1)$ の第 1*Chern* 類, $c_1(X)^2$ はその自己交点数, $g_C := \dim_{\mathbb{C}} H^1(C, \mathcal{O}_C)$ は C の幾何種数である.

証明: Noether の公式 (xx.xx), および $K_X^2 = 8(1-g)$ を用いると,

$$1 - g = \frac{1}{2}(8(1-g) - c_2)$$

したがって, ■

$\pi^*\mathcal{E} = \mathcal{O}_X(1)$ である. よって $\mathrm{ch}(\pi^*\mathcal{E}) = 1 + c_1(X) + \frac{1}{2}(c_1(X)^2) = 1 + c_1(X) + \frac{8(1-g_C)}{2} = 1 + c_1(X) + 4 - 4g_C$. $\mathrm{ch}(pi^*\mathcal{E}) = (1, c_1(X), 4(1-g_C))$.

4.3 Abel 曲面の安定性条件

X を Abel 曲面とする (代数群であるような射影多様体 Abel 曲面といった). ここでは Abel 曲面の安定性条件を求める. この節の内容は [10] および [6] §11.7 の内容に準ずる.

4.4 K3 曲面の安定性条件

5　補足

参考文献

[1] T. Bridgeland, *Stability conditions on triangulated categories*, Ann. of Math. (2), 166 (2007), no. 2, 317-345, also arXiv:math/0212237.

[2] R.Hartshorne *Algebraic Geometry*, Springer (1977)

[3] Emanuele Macr'ı. *Stability conditions on curves* Math. Res. Lett., 14(4):657–672, 2007. arXiv:0705.3794.

[4] A. Maciocia, *Computing the walls associated to Bridgeland stability conditions on projective surfaces*, Asian J. Math. 18:2 (2014), 263–279. MR 3217637 Zbl 1307.14022

[5] A.L. Gorodentsev, S.A. Kuleshov and A.N. Rudakov, *t-stabilities and t-structures on triangulated categories* (Russian) Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 68 (2004), no. 4, 117–150; translation in Izv. Math. 68 (2004), no. 4, 749–781, also math.AG/0312442.

[6]

[7] 上野健爾,「代数幾何 1,2,3」, 岩波講座現代数学の基礎シリーズ, 岩波書店 (2001)

[8] Ryo Ohkawa *Moduli of Bridgeland semistable objects on* $\mathbb{P}^2$, https://arxiv.org/abs/0812.1470v3

[9] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, *Faisceaux Pervers*, Asterisque 100, Soc. Math de France (1983).

[10] S. Yanagida, K. Yoshioka, *Bridgeland' s stabilities on abelian surfaces*, Math. Z., 276 (2014), Issue 1-2, 571–610

[11] D. Happel, I. Reiten and S. O. Smalø, *Tilting in abelian categories and quasitilted algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. 120 (1996), no. 575.