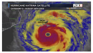
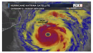


TIPE 2025

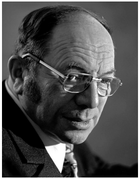
Problème du transport optimal :
Au cœur de l'animation météorologique



Introduction
Le problème en lui-même

- Le problème de Monge-Kantorovich :

(a) Gaspard Monge (1746-1818)



(b) Leonid Kantorovich (1912-1968)

TIPE 2025

Introduction : le cas discret

Le cas continu

Méthode Gloutonne

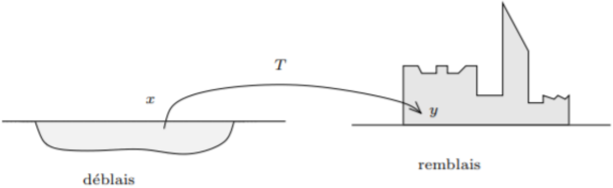
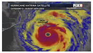
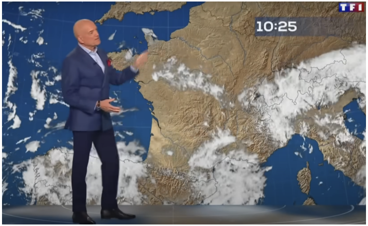


Figure 2: Exemple du déblais/remblais.



Introduction

Mon objectif



(a)

(b)

Figure 3: (TF1)

Introduction
Mon objectif

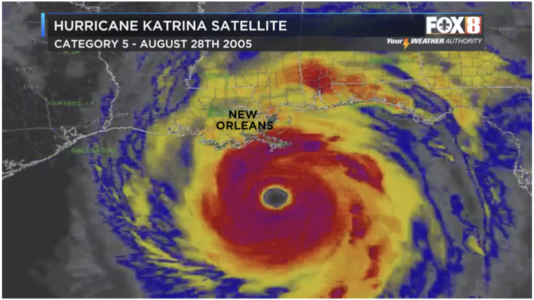
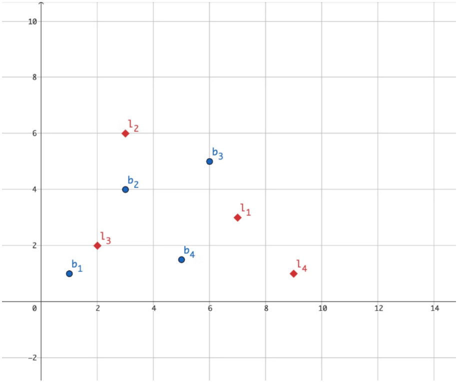
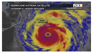


Figure 4: Application à la météorologie. (Fox 8)

Introduction : le cas discret
Le cas continu
Méthode Gloutonne

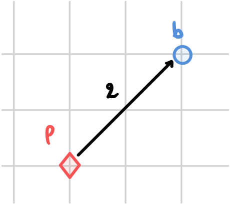
- **Contexte :** n livreurs $\mathcal{L} = \{l_1, \ldots, l_n\}$ et n boulangeries $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ des points fixes dans le plan euclidien $E = \mathbb{R}^2$.
- *Exemple :*

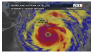




- **Fonction de coût :** On considère une fonction de coût

$$c : E \times E \to \mathbb{R}_+$$





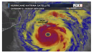
Introduction
Le problème des livreurs/boulangeries

- **Plan de transport :** Un plan de transport est une bijection

$$T : \mathcal{L} \to \mathcal{B}$$

On notera $\mathcal{T}$ l'ensemble des plans de transport.

$$T_{\text{ex}} : \left| \begin{array}{ccc} l_1 & \longmapsto & b_3 \\ l_2 & \longmapsto & b_2 \\ l_3 & \longmapsto & b_1 \\ l_4 & \longmapsto & b_4 \end{array} \right.$$



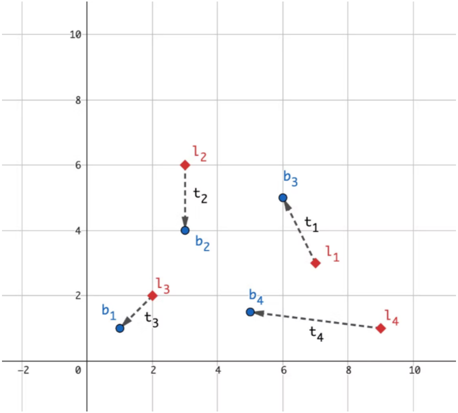
Introduction

Le problème des livreurs/boulangeries

- **Objectif :** on désire trouver le *plan de transport optimal*, i.e le plan qui minimise le coût total :

$$\boxed{T_{\mathsf{min}} = \underset{T \in \mathcal{T}}{\arg\min} \sum_{l \in \mathcal{L}} c\left(l, T(l)\right)}$$

- *Résolution de l'exemple* : on prend c la distance euclidienne usuelle, on a alors la solution suivante :



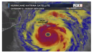
Introduction

L'importance de la fonction de coût : Cas de la dimension 1

Maintenant, $E = \mathbb{R}$,
$\mathcal{L}$ est un ensemble de n livres collés entre eux.
$\mathcal{B} = \{l + 1 \mid l \in \mathcal{L}\}$

Deux solutions *optimales* se présentent :

- n petits déplacements
- 1 grand déplacement



Introduction
L'importance de la fonction de coût : déplacement de livres

Introduction : le cas discret
Le cas continu
Méthode Gloutonne

- Pour c la distance euclidienne,

$$c : (x, y) \mapsto ||x - y||$$

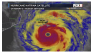
  - Version petits déplacements, $:= T_{\text{petits}}$,

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} c(l, T_{\text{petits}}(l)) = \sum_{l \in \mathcal{L}} 1 = n$$

  - Version grand déplacement, $:= T_{\text{grand}}$,

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} c(l, T_{\text{grand}}(l)) = n + \sum_{l \in \mathcal{L}, l \neq l_1} \underbrace{c(l, T_{\text{grand}}(l))}_{=0} = n$$

$\Rightarrow$ Les deux versions sont bien *optimales*.



Introduction
L'importance de la fonction de coût : déplacement de livres

- Pour c la distance euclidienne au carré,

$$c : (x, y) \mapsto ||x - y||^2$$

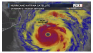
  - Version petits déplacements, $:= T_{\text{petits}}$,

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} c(l, T_{\text{petits}}(l)) = \sum_{l \in \mathcal{L}} 1^2 = n$$

  - Version grand déplacement, $:= T_{\text{grand}}$,

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} c(l, T_{\text{grand}}(l)) = n^2 + \sum_{l \in \mathcal{L}, l \neq l_1} \underbrace{c(l, T_{\text{grand}}(l))}_{=0} = n^2$$

$\Rightarrow$ La version ‘petits déplacements‘ est la seule *optimale*.

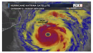


Introduction

L'importance de la fonction de coût : caractère convexe

Utilité de la norme quadratique : Théorie de Brenier

- Unicité de la solution ;
- Régularité de la solution ;
- Usage du gradient ;



Le cas continu
Retour à l'animation météorologique

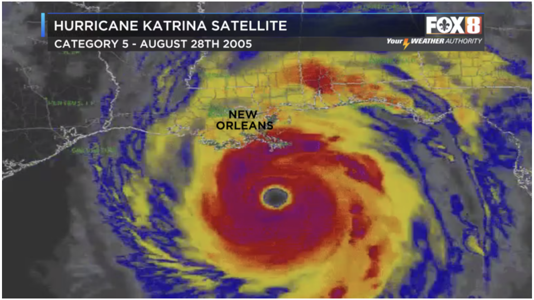


Figure 5: Ouragan Katrina, *Fox 8*

Le cas continu

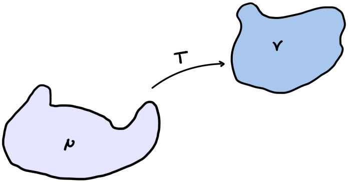
Transport optimal entre deux espaces dans le cas continu

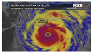
Soient μ, ν deux mesures de probabilité sur $E = \mathbb{R}^2$, de même masse totale.
Soit c une fonction de coût *mesurable*.
On veut trouver une *application de transport* $T : E \to E$ qui :

- **Transfère μ sur ν :**

$$\boxed{T_{\#\mu} = \nu}$$

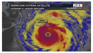
notation *push-forward* : $T_{\#\mu}$ est l'image directe de μ par T.





- **Minimise le coût du transport total :**

$$\boxed{\inf_{\substack{T \in \mathcal{T} \\ T_{\#}\mu = \nu}} \int_E c\,(x, T(x))\, d\mu(x)}$$



TIPE 2025

Introduction : le cas discret

Le cas continu

Méthode Gloutonne

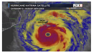
Hypothèses supplémentaires : μ doit être *absolument continue* (par rapport à la mesure de Lebesgue), et c est le coût quadratique :
On prendra ici $c : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}||x-y||^2$

Théorie de Brenier

Il existe une application de transport optimale $T : E \to E$ qui répond au problème de Monge et cette application est de la forme :

$$T(x) = \vec{\nabla}\varphi(x)$$

où $\varphi : E \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe.



Méthode gloutonne

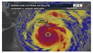
Fonction de coût

Conformément à la théorie de Brenier, on prendra

$$c : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}||x - y||^2 = \frac{1}{2}(x - y)^T(x - y)$$

Proposition 3

c est convexe.



Méthode gloutonne

Trouver le φ convexe : descente de gradient

Proposition 4 - Gradient opposé d'une fonction

Soient $(E, \langle , \rangle)$, $U \subset E$ un ouvert, $a \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction et différentiable en a, alors :

$-\vec{\nabla} f(a)$ donne la direction selon laquelle f décroît le plus rapidement en a.

$\Rightarrow$ Pourrait-on alors simplement s'intéresser au coût quadratique c ?

Prenons l'exemple d'un cercle décrit par P points :

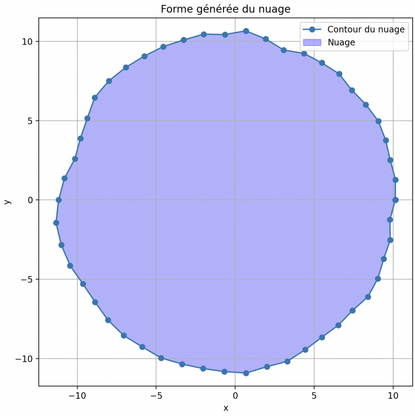
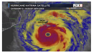


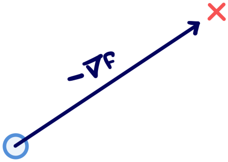
Figure 6: Nuage en python décrit avec une liste de coordonnées (x, y).



Méthode gloutonne

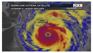
Trouver le φ convexe : exemple du cercle

(a) Point source et point cible.



(b) Transition la moins coûteuse.

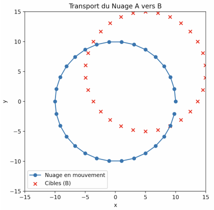
on applique alors la descente de gradient aux P points.

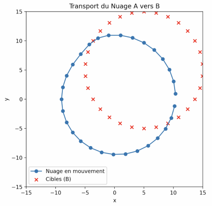


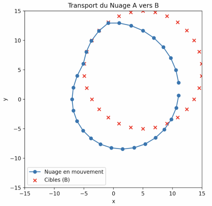
Méthode gloutonne

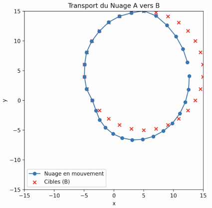
Trouver le φ convexe : exemple du cercle

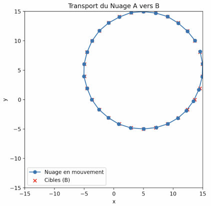
On a alors la transition suivante :

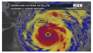










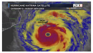


Méthode gloutonne

Trouver le φ convexe : prendre en compte les obstacles

De manière empirique, on peut déduire des zones sur une carte qu'un cumulus pourrait difficilement traverser (zone montagneuse) ou au contraire très facilement (zone de grands vents) :

Figure 10: Nuage accroché au Mont Fuji au Japon.

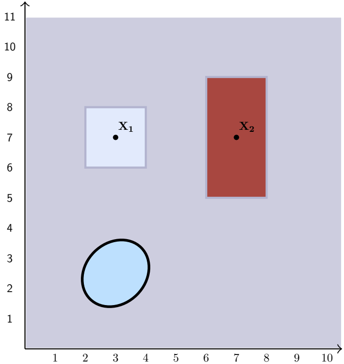


Méthode gloutonne

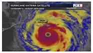
Trouver le φ convexe : prendre en compte les obstacles

Introduction : le cas discret
Le cas continu
Méthode Gloutonne

On va alors simplement cartographier les zone *difficiles/faciles* en modifiant le coût :

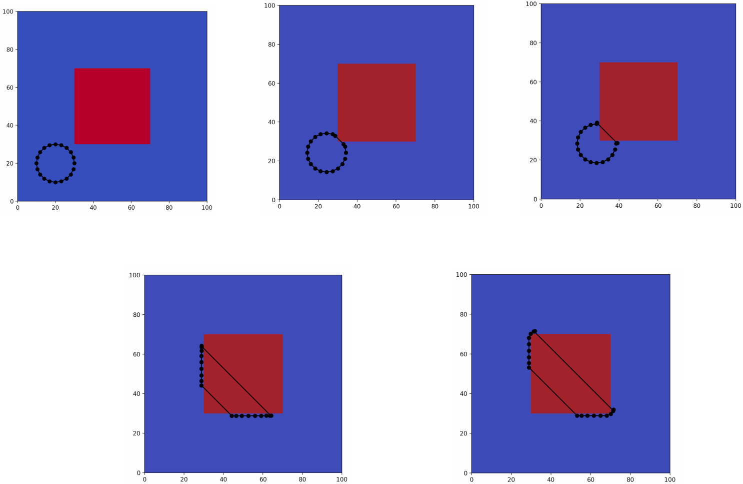


$$c(x,y) = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + \sum_i v_i \|y - X_i\|^2$$



Méthode gloutonne
Premier test : problème de séparation du nuage

On a le premier test suivant :



Correction du problème : calculer l'écart moyen entre chaque points voisins et faire en sorte qu'il n'y ait aucun écart significativement plus grand que la moyenne.

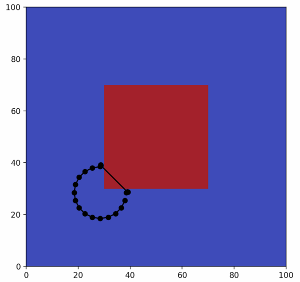
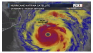


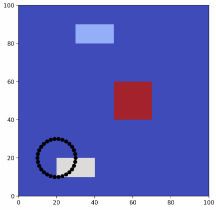
Figure 13: Exemple de situation à éviter.

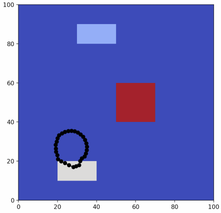


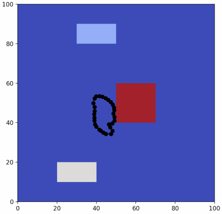
Méthode gloutonne
Deuxième test : problème de densité

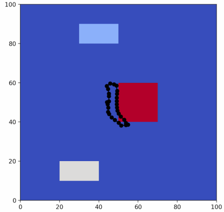
Introduction : le cas discret
Le cas continu
Méthode Gloutonne

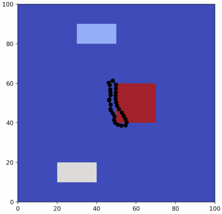
On a le second test suivant :

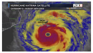










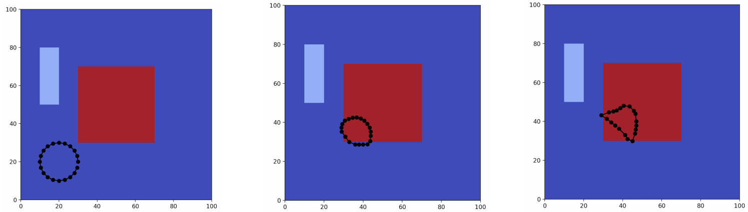


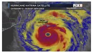
Méthode gloutonne

Deuxième test : problème de densité

Correction du problème : Calculer la densité initiale d_0 et l'écart autorisé $\varepsilon_d > 0$ à cette densité pour qu'à chaque instant de la transition :

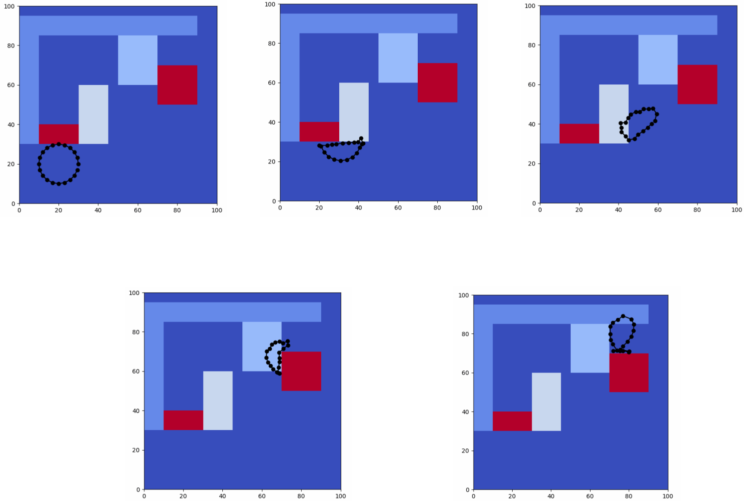
$$d \in [d_0 - \varepsilon_d, d_0 + \varepsilon_d]$$

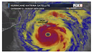




Méthode gloutonne

Troisième test : dans des conditions plus compliquées





Méthode gloutonne
Conservation de la masse

Conservation de la masse entre une forme A et une forme B du nuage :

$$\int_E \mu(x)dx = \boxed{\int_A \mu(x)dx = 1 = \int_B \nu(x)dx} = \int_E \nu(x)dx$$

Hypothèse forte : répartition uniforme de la matière[1],

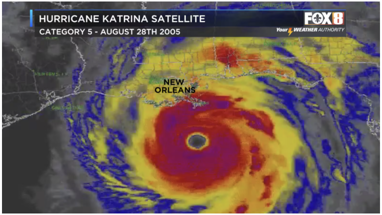
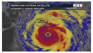


Figure 19: Ouragan Katrina, *Fox 8*

[1] cas d'une sous-surface



Méthode gloutonne
Conservation de la masse

Si $x \in A$,

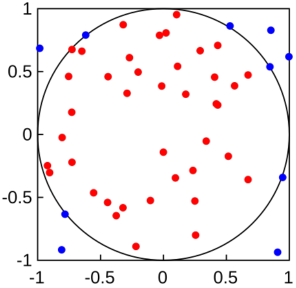
$$\mu(x) = \text{ cte } = \frac{1}{\mathcal{A}(A)}$$

où $\mathcal{A}(A)$ est l'aire décrite par A.

Sinon,

$$\mu(x) = \text{ cte } = 0$$

On utilise pour cela la méthode de *Monte Carlo* :

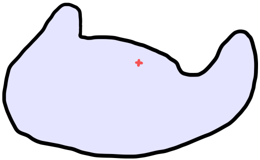


À l'aide d'une loi uniforme, on lance N points sur une surface S comprenant notre nuage, on récupère alors le pourcentage p de points dans le nuage, l'aire du nuage est donc approximativement de $p \times S$.

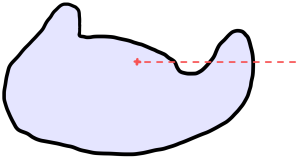
Méthode gloutonne

Calcul de l'aire d'un nuage : méthode de Monte-Carlo

Appartenance au nuage :

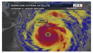


(a) Point dans le nuage.

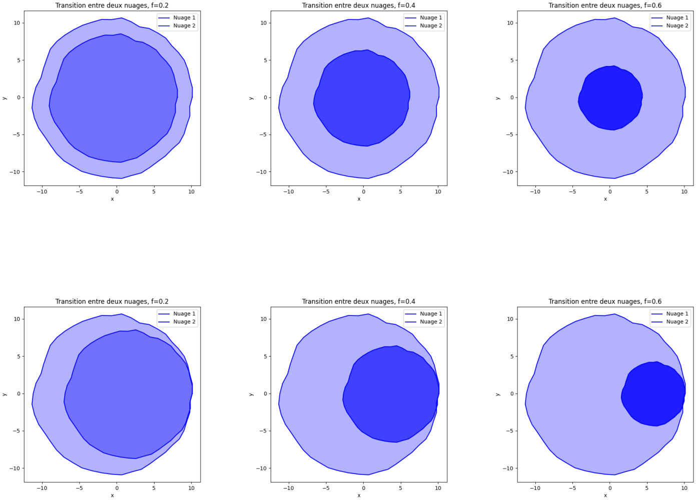


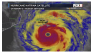
(b) Calcul d'appartenance.

$\Rightarrow$ Calcul en <u>temps constant</u> : $\mathcal{O}(1)$.



Méthode gloutonne
Calcul de l'aire d'un nuage : méthode de Monte-Carlo





Méthode gloutonne

Calcul de l'aire d'un nuage : méthode de Monte-Carlo

Complexité :

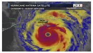
$$\mathcal{O}(N)$$

avec N le nombre de points utilisés.

Pour le nuage de la figure 6, avec 3000 points :

Aire estimée (m^2)	Temps requis (s)
289.06	0.0816
289.58	0.0799
288.61	0.0783
289.35	0.0781
289.22	0.0780

$\Rightarrow$ Moins d'un dixième de seconde pour calculer l'aire.



Méthode gloutonne
Conclusion