МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики

Мегафакультет трансляционных информационных технологий

Факультет информационных технологий и программирования

Лабораторная работа № 1
Алгоритмы одномерной оптимизации нулевого порядка

По дисциплине «Прикладная математика»

Выполнили студенты групп

M32011

Лунев Илья Андреевич

Семенов Георгий Витальевич

M32041

Смирнов Сергей Викторович

Преподаватель:

Москаленко Мария Александровна

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2021

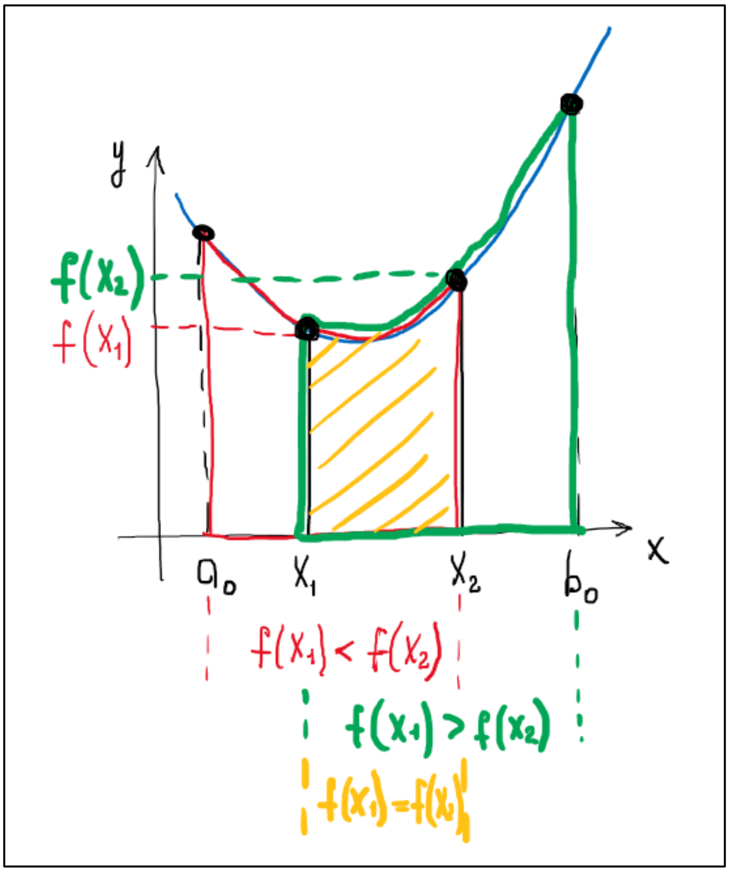
I. Введение

В лабораторной работе рассматривается задача одномерной оптимизации нулевого порядка:

$$\mathrm{f}(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{на } D(f) = [a_0, b_0]$$

$$\text{Найти } \min_{x\in[a_0,b_0]} \{z = f(x)\} \text{ с точностью } \varepsilon$$

Одним из подходов к решению задачи является **метод деления отрезка**. В данном методе на каждой итерации выбираются две точки x_1 и x_2 внутри интервала $[a_0, b_0]$, вычисляются значения функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$ и на основе этих значений сокращается интервал поиска.



Алгоритм прекращает свою работу, когда длина интервала поиска станет меньше погрешности ε.

```
Интервал = [a_0, b_0]
Пока Длина(Интервал) >= ε:
    Выбрать_точки(), что x_1 < x_2 ∈ [a_0, b_0]
    Если f(x_1) < f(x_2):
        Интервал = [a_0, x_2]
```

```
Иначе если f(x_1) > f(x_2):
    Интервал = [x_1, b_0]
Иначе:
    Интервал = [x_1, x_2]
```

На данном подходе основываются следующие методы одномерной оптимизации:

Метод дихотомии

В данном методе точки x_1, x_2 выбираются лежащими в окрестности середины интервала поиска. Фиксируется $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$:

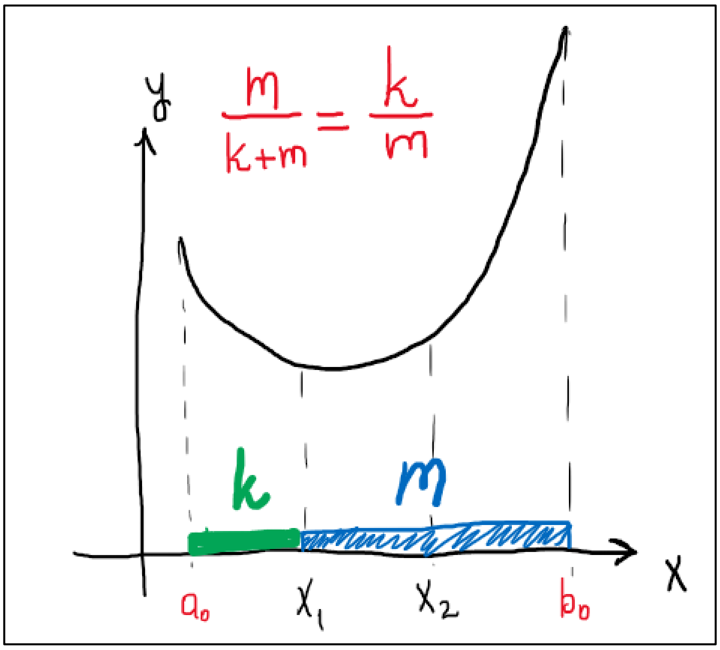
```
Выбрать_точки():
    x_1 = Середина(Интервал) − δ
    x_2 = Середина(Интервал) + δ
```

Для решения задачи требуется около $\frac{\ln\frac{b_0-a_0}{\varepsilon}}{\ln 2}$ операций.

Поскольку в каждой итерации интервал поиска сокращается приблизительно в два раза, метод называется *дихотомии* — последовательного деления на две равные части.

Метод золотого сечения

В данном методе точки x_1, x_2 выбираются лежащими в пропорции золотого сечения:



Следовательно, точки x_1, x_2 могут быть заданы следующей процедурой:

```
Выбрать_точки():
```

$x_1 =$ `ЛеваяГраница(Интервал) +` $\frac{3—\sqrt{5}}{2}$ `Длина(Интервал)`

$x_2 =$ `ПраваяГраница(Интервал) —` $\frac{3—\sqrt{5}}{2}$ `Длина(Интервал)`

Такой подход позволяет сократить количество вычислений функций за счет использования прежде вычисленного значения.

Метод Фибоначчи

В данном методе точки x_1, x_2 на k-ом шаге выбираются в соотношении, заданном числами Фибоначчи:

`n =` $min\, N \in \mathbb{Z}{:}\quad F_N \geq \frac{|b_0—a_0|}{\varepsilon}$

```
Выбрать_точки():
```

$x_1 =$ `ЛеваяГраница(Интервал) +` $\frac{F_{n—k+1}}{F_{n—k+3}}$ `Длина(Интервал)`

$x_2 =$ `ПраваяГраница(Интервал) +` $\frac{F_{n—k+2}}{F_{n—k+3}}$ `Длина(Интервал)`

На каждой итерации интервал поиска сокращается в пропорции, соответствующей

	Число итераций n	$\frac{d_i}{d_{i+1}}$	Вычислений функции
Метод дихотомии	$\frac{\ln\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}}{\ln 2}$	2	2n
Метод золотого сечения	$\frac{\ln\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}}{\ln 1.618\ldots}$	$\frac{3—\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$	2 + n
Метод Фибоначчи	$\min \mathrm{N} \in \mathbb{Z}{:}\quad F_N \geq \frac{|b_0—a_0|}{\varepsilon}$	$\frac{F_{n—k}}{F_{n—k—1}}$	2 + n

Сравнительная таблица методов оптимизации на основе деления отрезка

Другим подходом к оптимизации является *метод полиномиальной аппроксимации*.

Метод парабол = Метод квадратичной аппроксимации = Метод Пауэлла

В данном методе задается начальная точка x_0, шаг δ и точность ε.

```
Пока Правда:
    Выбрать точки (x₁,x₂,x₃), равноудаленные на δ
    u = точка минимума квадратичной аппроксимации на (x₁,x₂,x₃)
    Если (|МинимумСреди(x₁,x₂,x₃) − u| < ε)
            И (|МинимумСреди(f(x₁),f(x₂),f(x₃)) − f(u)| < ε′):
        Вернуть u
    Иначе:
        Если u ∈ [x₁,x₃]:
            x₂ = Лучшая(МинимумСреди(x₁,x₂,x₃), u)
        Иначе:
            x₂ = u
```

Преимуществом данного метода является суперлинейная скорость сходимости, однако результат метода существенно зависит от выбранных параметров x_0 и δ, а сходимость метода не гарантируется в силу того, что начальное приближение может не попасть в окрестность минимума.

Комбинированный метод Брента

В данном методе сочетаются методы золотого сечения и парабол.

```
Интервал = [a₀,b₀]
x = w = v = Середина(Интервал)
Пока Длина(Интервал) >= ε:
    Если точки x,w,v и f(x),f(w),f(v) различны, и метод сходится на (x,w,v):
        u = точка минимума квадратичной аппроксимации на (x,w,v)
        Принять u как минимум
        Пересчитать x, w, v
    Иначе:
```

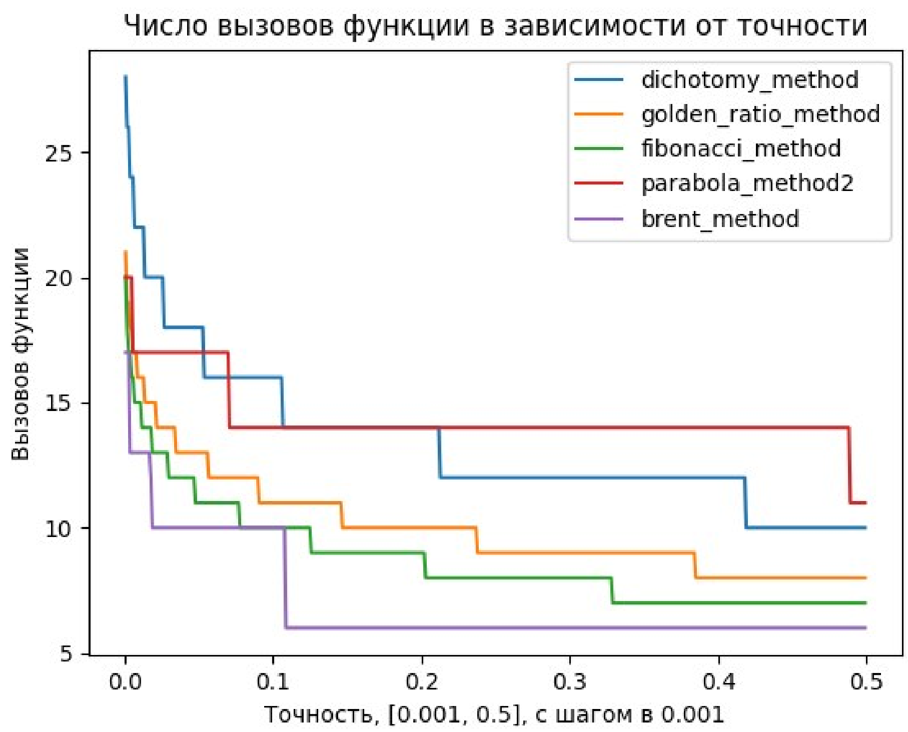
```
Сократить отрезок методом золотого сечения

Пересчитать x, w, v
```

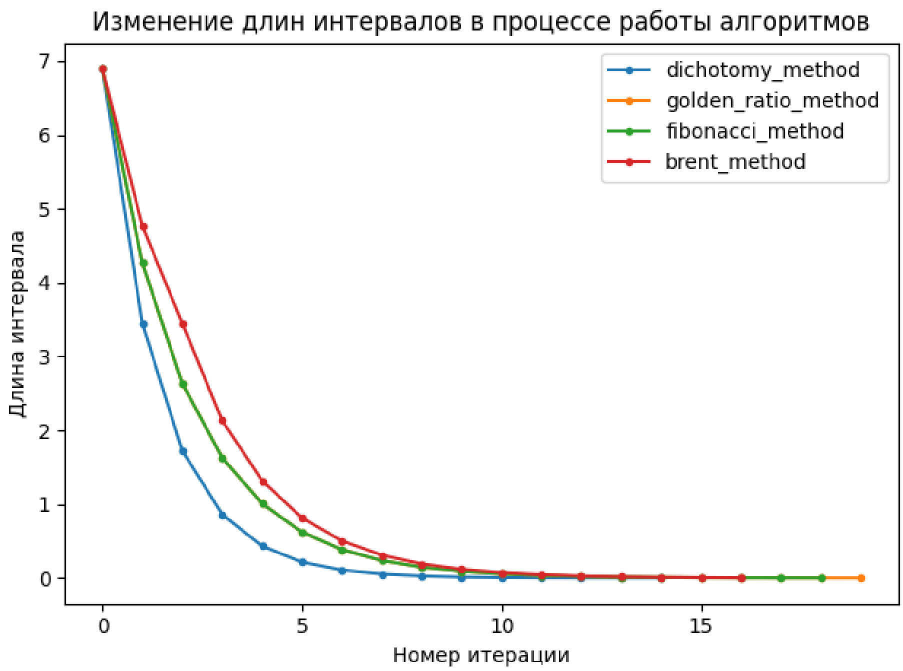
Метод Брента, в отличие от метода парабол, обладает гарантированной сходимостью.

II. Обзор реализаций методов одномерной оптимизации

№ теста	Левая гр.	Правая гр.	Точность	Иссл. функция
1	0.1	7.0	0.001	$sin(x) — log(x^2) — 1$
2	2.15	7.15	0.001	$sin(x)$
3	0.5	2.0	0.001	$x + \frac{1}{x}$
4	-1.0	1.0	0.001	$sin(x — 1)$
5	0.7	6.7	0.001	$sin(x) — log(x^2) — 1$

https://github.com/orgs/is-y23/teams/team-10/repositories





Таблицы изменения интервала сходимости.

Дихотомии

left	right	width	$\frac{d_{i+1}}{d_i}$
0,100	7,000	6,900	1,000
3,550	7,000	3,450	0,500
3,550	5,275	1,725	0,500
4,412	5,275	0,863	0,500
4,843	5,275	0,432	0,500
5,059	5,275	0,216	0,501
5,059	5,167	0,108	0,501
5,113	5,167	0,054	0,502
5,113	5,140	0,027	0,505
5,113	5,127	0,014	0,509
5,113	5,120	0,007	0,518
5,113	5,117	0,004	0,535
5,113	5,115	0,002	0,565
5,114	5,115	0,001	0,614
5,114	5,115	0,001	0,686

Золотого сечения

left	right	width	$\frac{d_{i+1}}{d_i}$

0,100	7,000	6,900	1,000
2,736	7,000	4,264	0,618
4,364	7,000	2,636	0,618
4,364	5,993	1,629	0,618
4,364	5,371	1,007	0,618
4,749	5,371	0,622	0,618
4,987	5,371	0,385	0,618
4,987	5,224	0,238	0,618
5,077	5,224	0,147	0,618
5,077	5,168	0,091	0,618
5,077	5,133	0,056	0,618
5,099	5,133	0,035	0,618
5,099	5,120	0,021	0,618
5,107	5,120	0,013	0,618
5,112	5,120	0,008	0,618
5,112	5,117	0,005	0,618
5,112	5,115	0,003	0,618
5,113	5,115	0,002	0,618
5,113	5,114	0,001	0,618
5,114	5,114	0,001	0,618

Фибоначчи

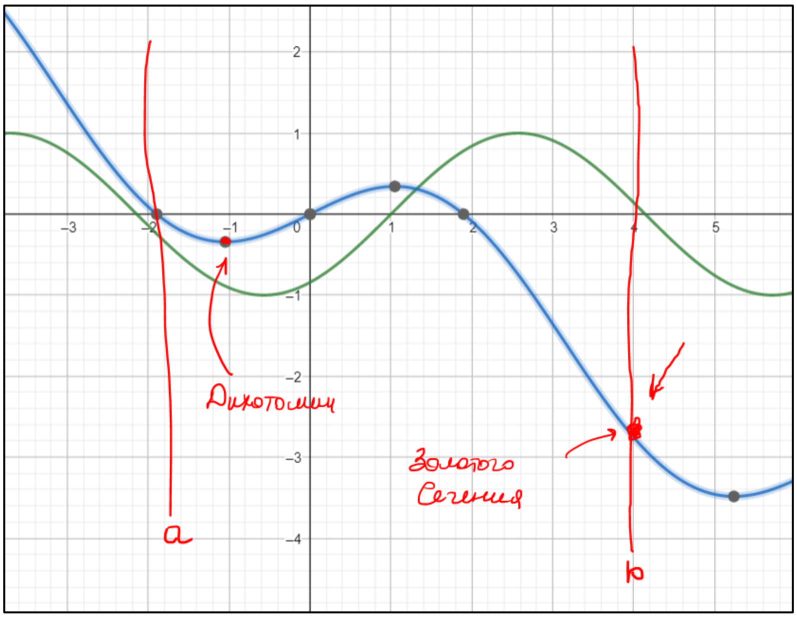
left	right	width	$\frac{d_{i+1}}{d_i}$
0,100	7,000	6,900	1,000
2,736	7,000	4,264	0,618
4,364	7,000	2,636	0,618
4,364	5,993	1,629	0,618
4,364	5,371	1,007	0,618
4,749	5,371	0,622	0,618
4,987	5,371	0,385	0,618
4,987	5,224	0,238	0,618
5,077	5,224	0,147	0,618
5,077	5,168	0,091	0,618
5,077	5,133	0,056	0,618
5,099	5,133	0,035	0,618
5,099	5,120	0,021	0,618
5,107	5,120	0,013	0,618
5,112	5,120	0,008	0,619
5,112	5,117	0,005	0,615
5,112	5,115	0,003	0,625
5,113	5,115	0,002	0,600
5,113	5,115	0,001	0,667

III. Сравнение и анализ методов

3. Протестировать реализованные алгоритмы для задач минимизации многомодальных функций, например, на различных полиномах. Могут ли метод золотого сечения/Брента не найти локальный минимум многомодальной функции?

Метод деления отрезка сходится на любом интервале, поэтому метод золотого сечения найдет локальный минимум или граничное минимальное значение на данном отрезке.

На иллюстрации показано, как для функции $sin(x) - \frac{x}{2}$ на отрезке $[-2; 4]$ методы дихотомии и золотого сечения находят различные значения.



Метод Брента также обладает сходимостью на отрезке и сходится на многомодальных функциях в отличие от метода парабол, который может не сойтись как на унимодальной, так и на многомодальной функции.

IV. Итоги

Таким образом, для быстрого получения предварительных результатов (начальной точки для применения других методов), а также, если требуется надёжная работа алгоритма при неизвестной заранее целевой функции, лучше использовать *методы деления отрезка*.

Если же для функция нам заранее известно, что функция квадратичная или близка к таковой стоит использоваться *метод парабол*. Однако результат метода существенно зависит от выбранных параметров x_0 и δ, а сходимость метода не гарантируется в силу того, что начальное приближение может не попасть в окрестность минимума. Для гарантированной, но более медленной сходимости следует применять *комбинированный метод Брента*.