МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики

Мегафакультет трансляционных информационных технологий

Факультет информационных технологий и программирования

Лабораторная работа № 2
Использование симплекс метода для решения задач Теории Игр

По дисциплине «Прикладная математика»

Выполнили студенты групп
M32011
Лунев Илья Андреевич
Семенов Георгий Витальевич
Смирнов Сергей Викторович

Преподаватель:
Москаленко Мария Александровна

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2021

I. РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

1. Где строить? Две конкурирующие крупные торговые фирмы F_1 и F_2, планируют построить в одном из четырех небольших городов G_1, G_2, G_3, G_4, лежащих вдоль автомагистрали, по одному универсаму. Взаимное расположение городов, расстояние между ними и численность населения показаны на следующей схеме:

140 км	30 км	40 км	50 км	150 км
	G_1	G_2	G_3	G_4
Число покупателей	30 тыс	50 тыс	40 тыс	30 тыс

Доход, получаемый каждой фирмой, определяется численностью населения городов, а также степенью удаленности универсамов от места жительства потенциальных покупателей. Специально проведенное исследование показало, что доход универсамов будет распределяться между фирмами так, как это показано в следующей таблице:

Условие	F_1	F_2
Универсам фирмы F_1 расположен от города ближе универсама фирмы F_2	75%	25%
Универсамы обеих фирм расположены на одинаковом расстоянии от города	60%	40%
Универсам фирмы F_1 расположен от города дальше универсама фирмы F_2	45%	55%

Например, если универсам фирмы F_1 расположен от города G_1 ближе универсама фирмы F_2, то доход фирм от покупок, сделанных жителями данного города, распределится следующим образом: 75% получит F_1, остальное – F_2.

а) Представьте описанную ситуацию, как игру двух лиц;

б) В каких городах фирмам целесообразно построить свои универсамы?

Решение.

Пусть с 10 тыс. покупателей, фирма получает 1 условную единицу прибыли.

Построим матрицу данной игры, где элемент a_{ij} будет отвечать за прибыли первой фирмы (F1), если она построит универсам в городе G_i, а фирма два (F2) в городе G_j. При этом заметим, что в любом случае сумма равна 15, поэтому в матрицу можем записывать значения только для одной фирмы. Пусть это будет *F1*.

F_1/F_2	G_1	G_2	G_3	G_4
G_1	9	7.65	9.15	9.15
G_2	10.35	9	9.15	10.35
G_3	8.85	8.85	9	10.35
G_4	8.85	7.65	7.65	9

Расчёты

В данной задаче применимы стратегии для игр с нулевой суммой. Матрица имеет седловую точку, являющуюся равновесием Нэша.

Нижняя цена игры $\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 9$
Верхняя цена игры $\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 9$

$$i = 2$$
$$j = 2$$

Ответ: Обеим фирмам стоит построить универсамы в городе G2

Рис 1. Джон Форбс Нэш

2. Двум погрузчикам разной мощности за 24 часа нужно погрузить на первой площадке 230 т, на второй - 68 т. Первый погрузчик на 1-ой площадке может погрузить 10 т в час, а на 2-ой - 12 т в час. Второй погрузчик на каждой площадке может погрузить по 13 т в час. Стоимость работ, связанных с погрузкой 1 т первым погрузчиком на первой площадке 8 руб., на второй - 7 руб., вторым погрузчиком на первой площадке - 12 руб., на второй - 13 руб. Нужно найти, какой объем работ должен выполнить каждый погрузчик на каждой площадке, чтобы стоимость всех работ по погрузке была минимальной.

Решение.

Запишем целевую функцию F и уравнения с ограничениями.

Пусть x_{ij} – объем работ в тоннах, которую выполняет i погрузчик на j площадке.

$$F = 8x_{11} + 7x_{12} + 12x_{21} + 13x_{22} \to min$$

$$\begin{cases} \frac{x_{11}}{10} + \frac{x_{12}}{12} \leq 24 \\ \frac{x_{21}}{13} + \frac{x_{22}}{13} \leq 24 \\ x_{11} + x_{21} = 230 \\ x_{12} + x_{22} = 68 \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

Преобразуем систему

$$\begin{cases} 12x_{11} + 10x_{12} \leq 2880 \\ x_{21} + x_{22} \leq 312 \\ x_{11} + x_{21} = 230 \\ x_{12} + x_{22} = 68 \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

И используя написанную в лабораторной программу получим ответ

$$x_{11} = \frac{550}{3}$$
$$x_{12} = 68$$
$$x_{21} = \frac{140}{3}$$
$$x_{22} = 0$$

$$\mathrm{F} = \frac{3424}{3}$$

Ответ: Первый погрузчик на первой площадке должен погрузить $\frac{550}{3}$, на второй 68.

Второй погрузчик на первой площадке должен погрузить $\frac{140}{3}$, на второй 0.

3. При составлении суточного рациона кормления скота используют сено и силос. Рацион должен обладать определенной питательностью и содержать белка не менее 1 кг, кальция не менее 100 г и фосфора не менее 80 г. При этом количество питательного рациона должно быть не менее 60 кг. Содержание питательных компонентов в 1 кг сена и силоса приведено в следующей таблице. В ней указана также стоимость единицы того или иного корма. Требуется определить оптимальный суточный рацион кормления животных, обеспечивающий минимальную стоимость корма.

Название ингредиента	Норма (г)	Содержание ингредиента в 1 кг корма (г/кг)	
		Сено	Силос
Белок	1000	40	10
Кальций	100	1,25	2,5
Фосфор	80	2	1
Стоимость ед. корма (ден. ед.)		12	8

Решение.

Пусть x_1 – кол. кг сена, x_2 – кол. кг силоса.

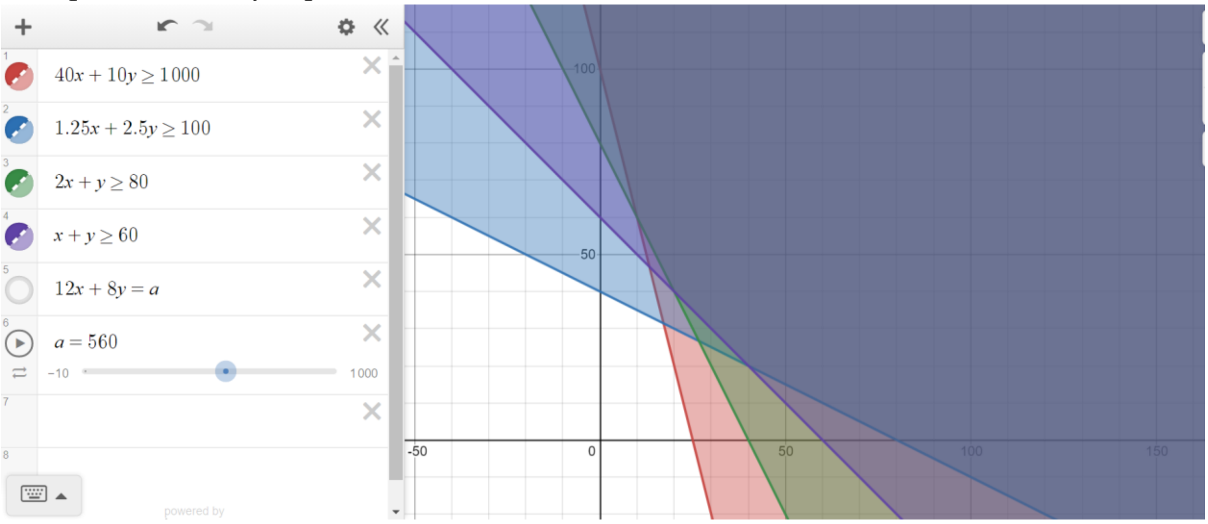
Запишем целевую функцию и систему ограничений.

$$F = 12x_1 + 8x_2 \rightarrow min$$

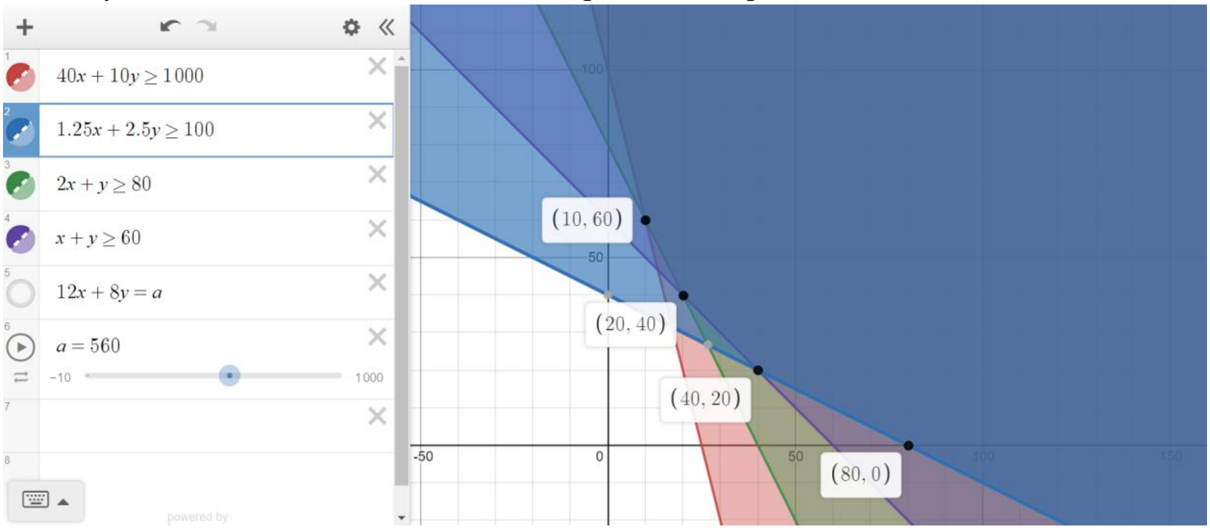
$$\begin{cases} 40x_1 + 10x_2 \geq 1000 \\ 1.25x_1 + 2.5x_2 \geq 100 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \geq 80 \\ x_1 + x_2 \geq 60 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

Решим задачу графически.

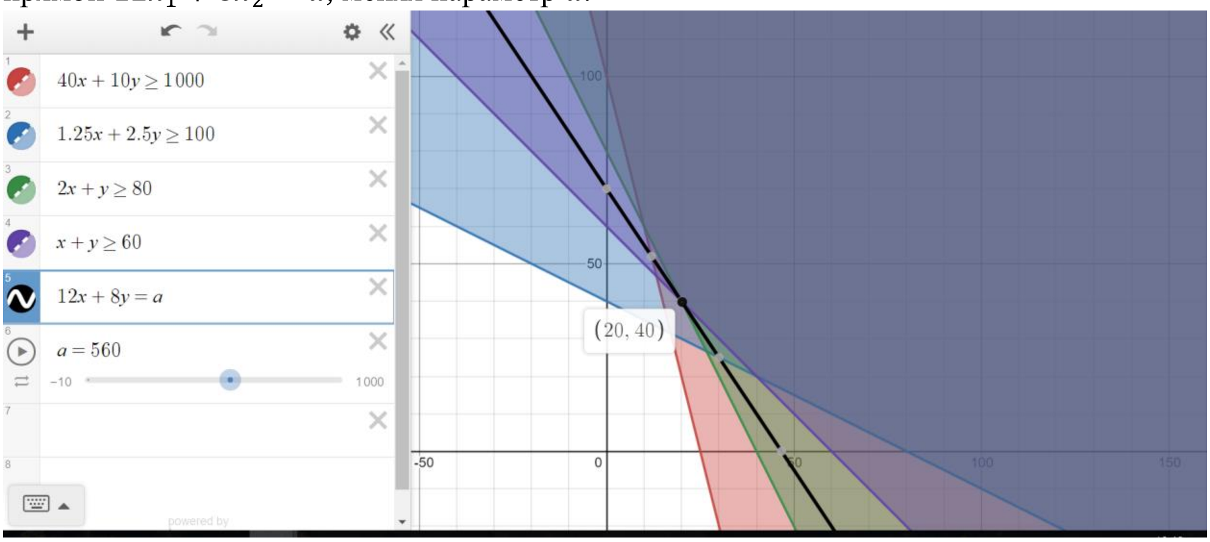
Изобразим систему ограничений



Минимум достигается в одной из точек пересечения прямых



Будем изменять значение целевой функции, что эквивалентно параллельному переносу прямой $12x_1 + 8x_2 = a$, меняя параметр a.



То же самое можно сделать и арифметически разрешив изначальную систему и найдя значения целевой функции. После чего выбрать минимум из найденных значений.

Получаем, что $x_1 = 20$, $x_2 = 40$

Ответ: оптимальный суточный рацион 20 кг сена и 40 кг силоса

4. Пусть матрица проигрышей (в млн руб.) первого игрока имеет вид

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Решить матричную игру, перейдя к задаче линейного программирования. Найти оптимальную смешанную стратегию для первого игрока (использовать симплекс-метод).

Для наглядности составим матрицу выигрыша:

$$\boxed{\text{1 игрок}} \longrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим стратегии первого и второго игрока согласно принципу минимакса (минимизируем проигрыш):

$$min\,\{-4, -2\} = -4, \qquad min\,\{-2, -3\} = -3$$

$$\alpha = max\,\{-4, -3\} = -3$$

$$max\,\{-4, -2\} = -2, \qquad max\,\{-2, -3\} = -2$$

$$\beta = min\,\{-2, -2\} = -2$$

Поскольку нижняя и верхняя границы игры отличаются, седловая точка отсутствует, и, следовательно, решения в чистых стратегиях не существует. Найдем оптимальную смешанную стратегию с помощью симплекс-метода.

```
{
  "type": "loss",
  "matrix": [ [4, 2],
              [2, 3] ],
  "answer_clean": [],
  "answer_simplex": [[0.33, 0.67], [0.33, 0.67]]
}

***********  tasks/game4.json  ***********
Clean strategy solution:
OURS:  []
CORRECT:  []
Mixed strategy solution:
OURS:  [0.33333333 0.66666667] [0.33333333 0.66666667]
CORRECT:  [[0.33, 0.67], [0.33, 0.67]]
PRICE:  2.6666666666666665
EXPECTATION:  2.6666666666666665
```

Следующие задачи решим аналогично, используя программное решение, приводящее игру к задаче линейного программирования.

5. Пусть матрица проигрышей (в млн руб.) первого игрока имеет вид

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Решить матричную игру, перейдя к задаче линейного программирования. Найти оптимальную смешанную стратегию для первого игрока (использовать симплекс-метод).

```
{
  "type": "loss",
  "matrix": [ [8, 4, 6],
              [4, 8, 5] ],
  "answer_clean": [],
  "answer_simplex": [[0.5, 0.5],[0.5, 0.5, 0.0]]
}
***********  tasks/game5.json  ***********
Clean strategy solution:
OURS:  []
CORRECT:  []
Mixed strategy solution:
OURS:  [0.5 0.5] [0.5 0.5 0. ]
CORRECT:  [[0.5, 0.5], [0.5, 0.5, 0.0]]
PRICE:  5.999999999999999
EXPECTATION:  5.999999999999999
```

6. Пусть матрица проигрышей первого игрока имеет вид

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Решить соответствующую матричную игру. Чему равно математическое ожидание проигрыша первого игрока, если и первый игрок, и второй игрок используют свои оптимальные стратегии?

```
{
  "type": "loss",
  "matrix": [ [7, 2, 5, 1],
              [2, 2, 3, 4],
              [5, 3, 4, 4],
              [3, 2, 1, 6]],
  "answer_clean": [],
  "answer_simplex": [[0.2592, 0.6667, 0.0, 0.0740], [0.0740, 0.0, 0.4814, 0.4444]]
}
***********  tasks/game6.json  ***********
Clean strategy solution:
OURS:  []
CORRECT:  []
Mixed strategy solution:
OURS:  [ 0.25925926  0.66666667 -0.          0.07407407] [0.07407407 0.
0.48148148 0.44444444]
CORRECT:  [[0.2592, 0.6667, 0.0, 0.074], [0.074, 0.0, 0.4814, 0.4444]]
PRICE:  3.370370370370371
EXPECTATION:  3.370370370370371
```

7. Платежная матрица в некоторой игре имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Пусть первый игрок придерживается следующей смешанной стратегии: (6/13, 3/13, 4/13), а второй (6/13, 4/13, 3/13). Вычислить математическое ожидание проигрыша первого игрока.

Решение.

Математическое ожидание выигрыша первого игрока равно произведению вектора его смешанной стратегии, платёжной матрицы и вектора смешанной стратегии соперника.

$$\begin{pmatrix} \frac{6}{13} & \frac{3}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{6}{13} \\ \frac{4}{13} \\ \frac{3}{13} \end{pmatrix} = -\frac{1}{13}$$

Так как рассматривается игра с нулевой суммой, математическое ожидание проигрыша первого игрока будет равно математическому ожиданию его выигрыша с противоположным знаком.

Ответ: $\frac{1}{13}$.

8. Перейти от следующей задачи линейного программирования: $L(x) = x_1 + x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ x_1 + 11x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

к матричной игре. Решить Матричную игру любым известным способом.

Решение.

В исходной задаче целевая функция стремится к минимуму, а в ограничениях используется знак ≥. Поэтому сначала перейдём к двойственной задаче.

$$L^*(y) = y_1 + y_2 \to max$$

$$\begin{cases} 7y_1 + y_2 \leq 1 \\ 2y_1 + 11y_2 \leq 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Составим матричную игру.

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Решим методом минимакса.

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 2$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 7$$

$$\alpha \neq \beta$$

Седловая точка не найдена, воспользуемся формулами для решения матричной игры 2x2 в смешанных стратегиях.

$$p_1 = \left(\frac{11-2}{7+11-2-1}; \frac{7-1}{7+11-2-1}\right) = \left(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right)$$

$$p_2 = \left(\frac{11-1}{7+11-2-1}; \frac{7-2}{7+11-2-1}\right) = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

$$v = \frac{7 \cdot 11 - 1 \cdot 2}{7+11-2-1} = 5$$

Ответ: 5.

9. Перейти от следующей задачи линейного программирования: $L(x) = x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 \le 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 \le 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 \le 1, \\ x_1 \ge 0, \ldots, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

к матричной игре. Можно ли упростить матричную игру, используя понятие доминирования стратегий? Решить матричную игру любым известным вам способом.

Решение.

Составим матричную игру и упростим её методом исключения доминируемых стратегий.

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow (i_3 \succ i_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow (j_2 \succ j_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Решим методом минимакса.

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 3$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 3$$

$$\alpha = \beta$$

Ответ: 3.