МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики

Мегафакультет трансляционных информационных технологий

Факультет информационных технологий и программирования

Лабораторная работа № 3
Исследование дискретной цепи Маркова

По дисциплине «Прикладная математика»

Выполнили студенты групп
М*32011*
Лунев Илья Андреевич
Семенов Георгий Витальевич
Смирнов Сергей Викторович

Преподаватель:
Москаленко Мария Александровна

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2021

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Провести аналитическое и численное иследование цепи Маркова.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Пусть дан **моделируемый объект**, обладающий конечным множеством **состояний** $S_1, S_2 \ldots, S_n$. Для каждого состояния S_i заданы вероятности перехода из текущего состояния S_i в каждое из остальных состояний $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{in}$.

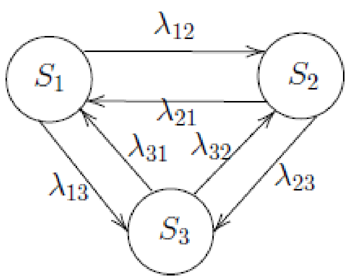
Если эти вероятности для каждого состояния $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{in}$ зависят только от текущего состояния системы и не зависят от пути, по которому система пришла в это состояние, случайный процесс называется **марковским**.

Итак, **марковский процесс** (или процесс без последействия)— случайный процесс, если для каждого момента времени t вероятность любого состояния системы зависит только от ее состояния.

Модели марковского процесса бывают двух видов:

1. Процесс с дискретным временем. Переход происходит с заранее определенным постоянным тактом (P-схема).
2. Процесс с непрерывным временем. Переход происходит в случайные моменты времени, поэтом он характеризуется не постоянным значением вероятности, а плотностью вероятности перехода, т.е. распределением вероятности во времени (q-схема).

В дальнейшем мы будем рассматривать **марковские процессы с дискретным временем**. Такие процессы могут быть представлены с помощью графов переходов.



Тогда такой процесс может быть представлен и с помощью матрицы перехода:

Следующее состояние S_{i+1}

Текущее состояние S_i

$$X_0 = \begin{matrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{matrix}$$

В силу свойства марковости

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n)$$

В цепях выделяют особые типы состояний:

- **Невозвратные (поглощающие).** Это значит, что попав в такое состояние, мы не выйдем из него. Вероятностное распределение перехода из такого состояния в следующие будет иметь вид (0, 0, …, 1, …, 0, 0) или $p_{ii} = 1$, это изолированные вершины, т.е. граф не сильно связный.

Цепи бывают следующих типов:

- **Неразложимая.** Не содержит невозвратных состояний, т.е. это сильно связный граф.
- **Разложимая.** Содержит невозвратные состояния.
- **Периодическая (циклическая).** Цепь, последовательность смены состояний которой сменяется периодически (период является постоянным количеством тактов).

  1 => 2 => 3 => 1 => 2 => 3 => 1 …

- **Эргодическая.** Неразложимая и нециклическая. Для таких систем можно определить **стационарные вероятности**, т.е. вероятности при времени, стремящемуся к бесконечности. Вероятности этих состояний не зависят от вероятностей системы в начальный момент.

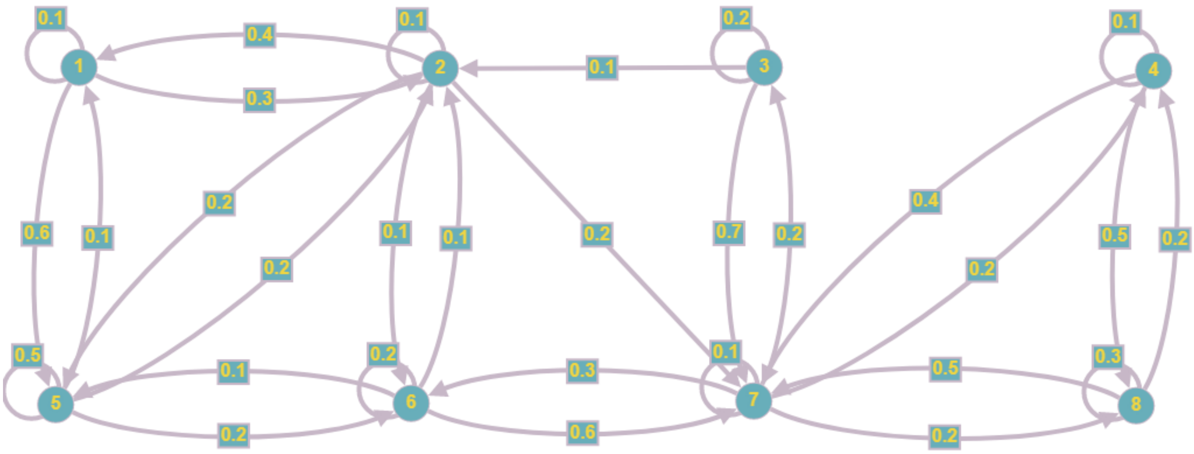
$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} \pi_j^{(n)}$$

  1 => 2 => 3 => … => 1 => 1 => 1 …

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Рассматривается дискретная эргодическая сеть Маркова (P-схема). Необходимо найти стационарные вероятности.

Для иллюстрации алгоритмов выбрана эргодическая марковская цепь, матрица которой представлена ниже:



Ссылка на граф

Матрица перехода:

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.1 & 0 & 0 & 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0 & 0 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Вектора начальных состояний:

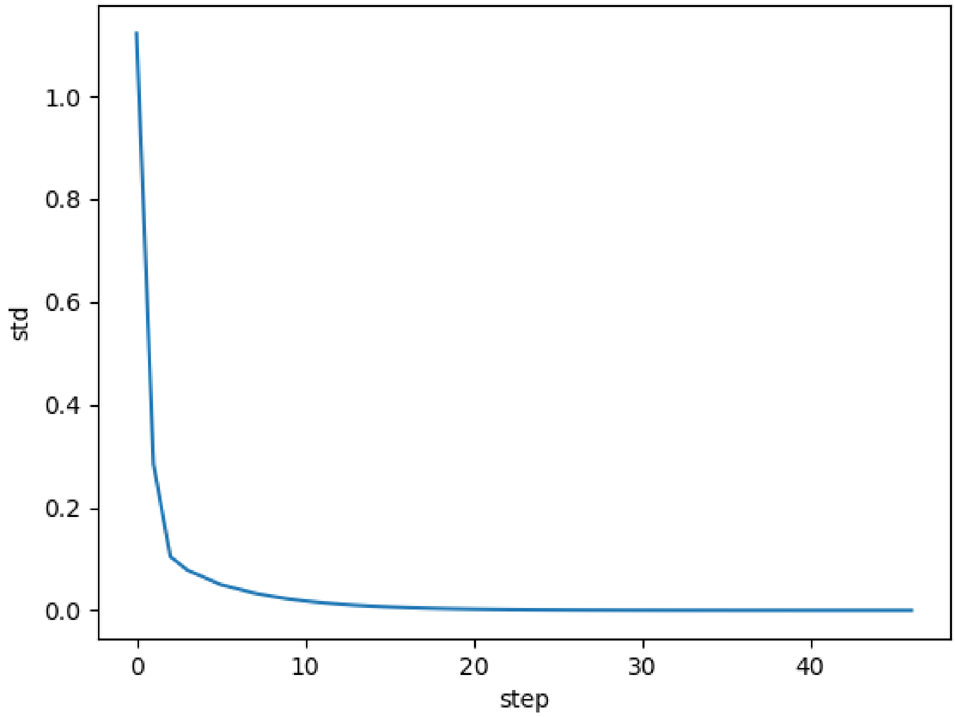
$$p1 = (1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0)$$
$$p2 = (0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0)$$

1. *Численное моделирование распределения по состояниям*

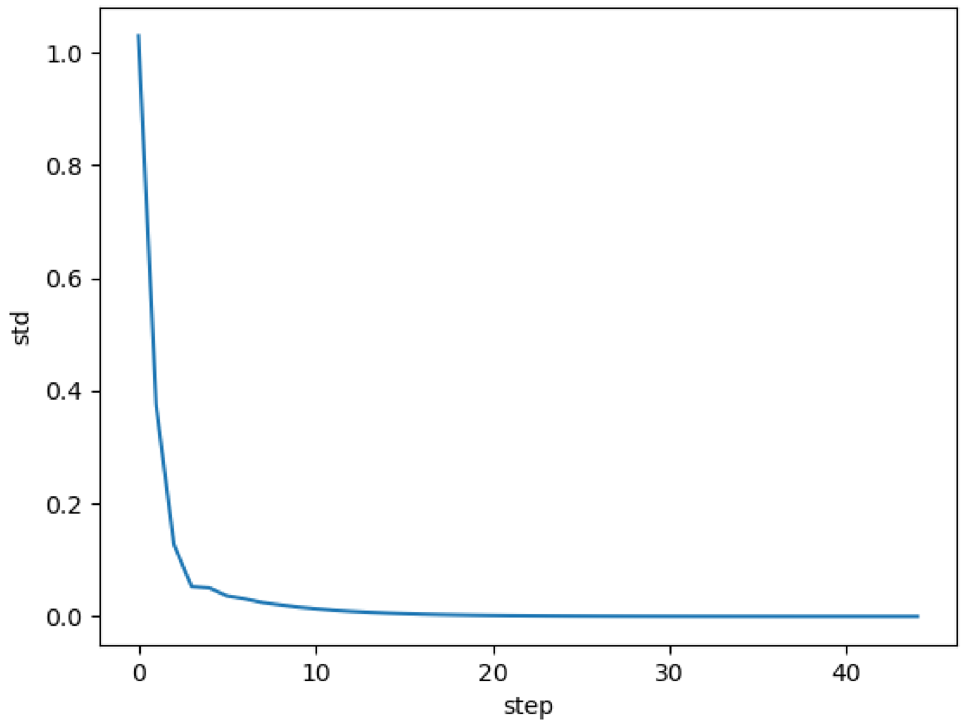
$$\pi^m = X^m \pi^0$$

```python
def numerically_compute_probability_vec(
    p, P, eps=0.0001, steps=10 ** 3, calculate_std=False
):
    step = 0
    stds = []

    while not np.linalg.norm(p @ P - p) < eps and step <= steps:
        step += 1
        if calculate_std:
            stds.append(np.linalg.norm(p @ P - p))

        p = p @ P

    if calculate_std:
        return p / p.sum(), stds

    return p / p.sum()
```

Для первого вектора:
[0.037 0.059 0.078 0.105 0.098 0.148 0.31 0.164]



Для второго вектора:
[0.037 0.059 0.078 0.105 0.098 0.148 0.31 0.164]



2. ***Аналитическое моделирование распределения по состояниям***
   Решение уравнения: $\boldsymbol{\pi} \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\pi}$.

```
def analytically_compute_probability_vec(transition_matrix):
    equations = transition_matrix.transpose()
    equations -= np.identity(equations.shape[0])

    last_equation = np.ones((1, equations.shape[1]))
    equations = np.append(equations, last_equation, axis=0)

    ordinate = np.zeros(equations.shape[0])
    ordinate[-1] = 1

    probability_vec = np.linalg.lstsq(equations, ordinate, rcond=None)[0]

    return probability_vec
```

Ответ:

[0.037 0.059 0.078 0.105 0.098 0.148 0.31 0.164]

Вывод: полученные значения обоих векторов для численного моделирвоания и вектора, полученного аналитически, действительно равны между собой

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Определение случайной величины

   Случайная величина X: $\Omega \to \mathbb{R}$ — величина, принимающая в зависимости от случая определенные вероятности. Удобно записать это как отображение пространства элементарных исходов в пространство действительных чисел.

2. Определение цепи Маркова
   См. выше
3. Классификация цепей Маркова
   См. выше
4. Вероятность перехода
   См. выше
5. **Стохастическая матрица**
   — неотрицательная матрица, в которой сумма элементов любой строки или любого столбца равна единице. Разумеется, матрица переходов марковского процесса в этой лабораторной работе стохастическая.

6. Достаточное условие эргодичности

   Теорема. *Для того чтобы неприводимая непериодическая цепь Маркова с однородным ленточным графом была эргодична, достаточно выполнения следующих условий:*

   1. *Цепь Маркова, отвечающая матрице Q, апериодична и неразложима;*
   2. $\sum_{j=0}^{\infty} j \sum_{k=1}^{K} q_{n,i}(k,j) < \infty$ *при* $i \leqslant i_1, \quad n = \overline{1,K}$;
   3. $\sum_{n=1}^{K} \alpha_n \gamma_n < 0$, *где* γ_n *– стационарное распределение вероятностей цепи Маркова с матрицей вероятностей переходов* Q.

   При этом существует единственное стационарное распределение состояний исходной цепи.

   Доказательство