Геометрические решатели

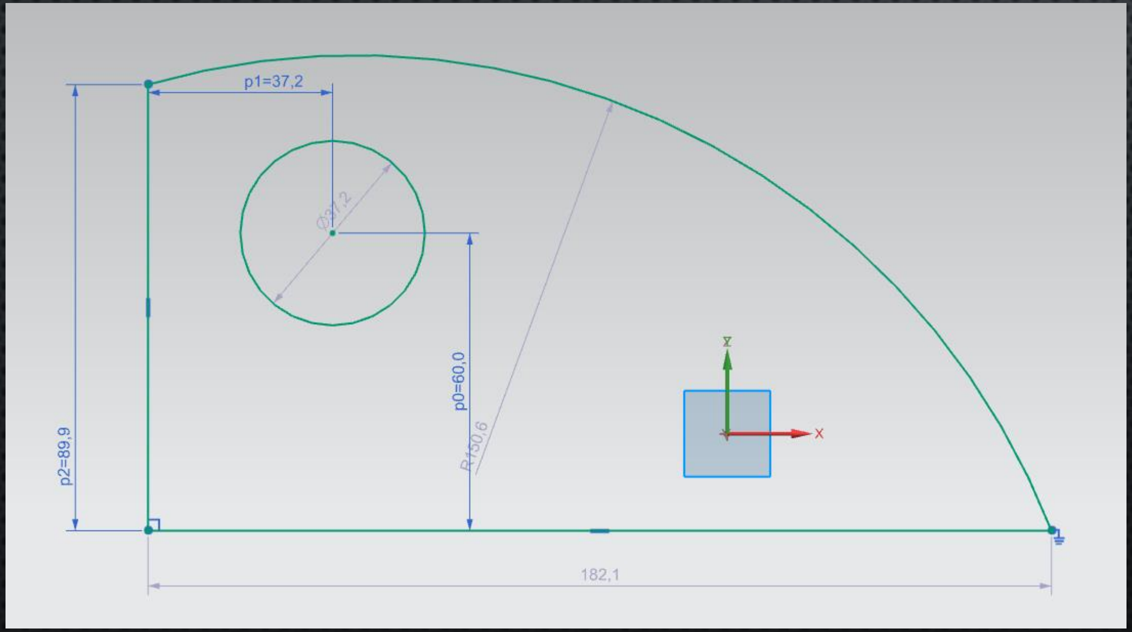
Кафедра РК6
Берчун Юрий Валерьевич
Бурков Павел Викторович

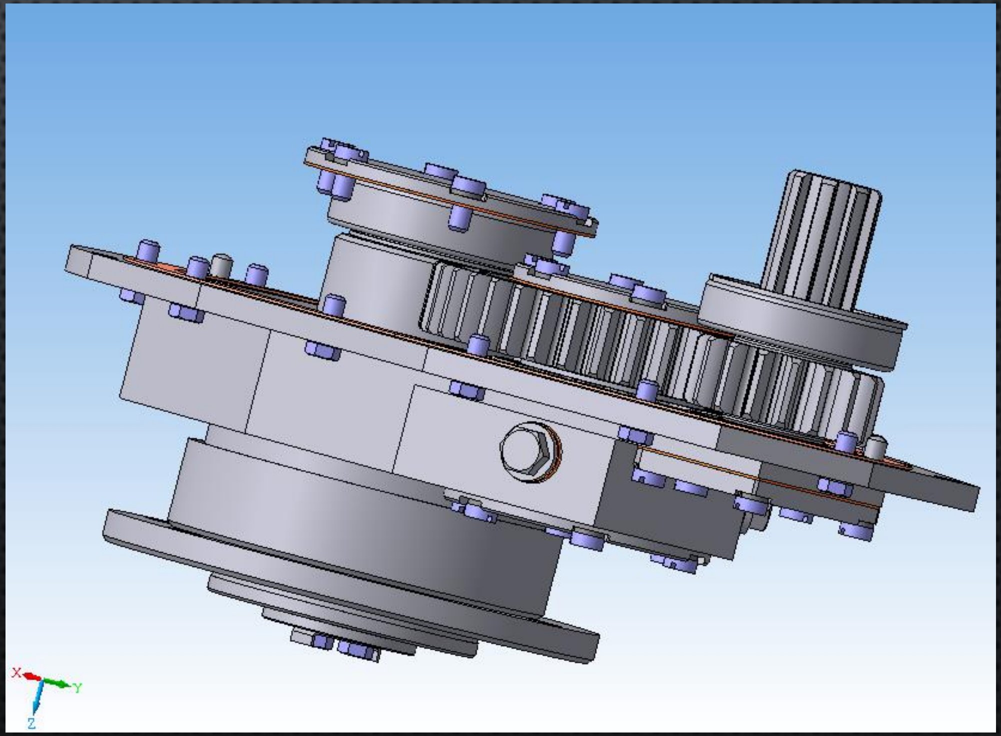
Основные определения

- **Геометрическая модель** – описание формы моделируемого объекта и описание связей элементов модели
- **Параметры геометрической модели** – координаты и размеры её элементов, скаляры и вектора, описывающие элементы модели
- **Геометрическое ограничение (вариационная связь)** – связывание точек, рёбер и граней геометрической модели логическим или параметрическим отношением, выраженным в виде **уравнения**
- **Вариационная модель** – декларативная параметрическая модель с геометрическими ограничениями
- **Геометрический (вариационный) решатель** – программный модуль для решения геометрических задач, возникающих при вариационном моделировании

Сфера применения

- Машиностроительные CAD-системы (+ архитектурные САПР)
  - 2D – параметризация на уровне эскизов
  - 3D – размещение элементов в сборках в стиле проектирования «снизу вверх»





Параметры геометрических моделей

- Виды параметров: координаты характерных точек отрезков, дуг; линейные, радиальные угловые размеры
- Параметры могут быть **независимыми** или **связанными** при помощи алгебраических связей (линейных/нелинейных)
- Параметры с точки зрения геометрических примитивов: **геометрические** (совпадение, касательность и т.д.) и **размерные** (с числовым параметром)
- Связи между параметрами могут быть в 2 состояниях: **выполняются или не выполняются**

Состояния геометрической модели

- **Равновесное** состояние – состояние, при котором все геометрические ограничения выполняются
- **Неравновесное** состояние – состояние, при котором хотя бы одно геометрическое ограничение не выполняется

- **Полностью определенная модель**: число уравнений = число неизвестных
- **Переопределенная модель**: число уравнений $>$ число неизвестных
- **Недоопределенная модель**: число уравнений $<$ число неизвестных

Подходы к решению недоопределенных задач

- **Метод дополнительных ограничений** (требует наличие эвристик; в полном объеме реализован в PTC Creo)
- **Консервативный метод** (в основе принцип наименьших изменений)

Методы кластерной декомпозиции

- Декомпозиция задачи удовлетворения геометрическим ограничениям – разбиение её на несколько подзадач с частичным порядком между ними (последовательностью их решения) и оператором комбинации решений подзадач в единое решение
- Виды методов:
  - Методы рекурсивного деления
  - Методы рекурсивной сборки (методы нахождения структурно жестких подзадач; методы, основанные на шаблонах)
  - Распространение степеней свободы (методы отсечения)

Постановка задачи оптимизации на основе принципа наименьших изменений

- Формирование системы ограничений (всегда уравнения!)
- Консервативный метод:

$$\Psi(\Delta p_1, \Delta p_2, \dots, \Delta p_n) = \frac{1}{2}(\Delta p_1^2 + \Delta p_2^2 + \dots + \Delta p_n^2)$$

- Формирование целевой функции:

$$F(\Delta p_1, \dots, \Delta p_n) = \frac{1}{2}(\Delta p_1^2 + \dots + \Delta p_n^2) + \lambda_1 f_1(p_1 + \Delta p_1, \dots, p_n + \Delta p_n) + \dots + \lambda_m f_m(p_1 + \Delta p_1, \dots, p_n + \Delta p_n)$$

- Решение оптимизационной задачи при ограничениях типа «равенство» – метод неопределенных множителей Лагранжа

Геометрические ограничения для точек и отрезков на плоскости

1. **Совпадение 2 точек:**

$$x_2 + \Delta x_2 - x_1 - \Delta x_1 = 0; y_2 + \Delta y_2 - y_1 - \Delta y_1 = 0$$

2. **Расстояние между 2 точками:**

$$(x_2 + \Delta x_2 - x_1 - \Delta x_1)^2 + (y_2 + \Delta y_2 - y_1 - \Delta y_1)^2 - d^2 = 0$$

3. **Параллельность 2 прямых:**

$$\overrightarrow{v_{12}} \times \overrightarrow{v_{34}} = 0 \Rightarrow$$

$$(x_2 + \Delta x_2 - x_1 - \Delta x_1)(y_4 + \Delta y_4 - y_3 - \Delta y_3) - (x_4 + \Delta x_4 - x_3 - \Delta x_3)(y_2 + \Delta y_2 - y_1 - \Delta y_1) = 0$$

4. **Перпендикулярность 2 прямых:**

$$(\overrightarrow{v_{12}} \cdot \overrightarrow{v_{34}}) = 0 \Rightarrow$$

$$(x_2 + \Delta x_2 - x_1 - \Delta x_1)(x_4 + \Delta x_4 - x_3 - \Delta x_3) + (y_2 + \Delta y_2 - y_1 - \Delta y_1)(y_4 + \Delta y_4 - y_3 - \Delta y_3) = 0$$

Геометрические ограничения для точек и отрезков на плоскости

5. Угол между 2 прямыми:

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) - |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = 0$$

6. Горизонтальность прямой:

$$y_2 + \Delta y_2 - y_1 - \Delta y_1 = 0$$

7. Вертикальность прямой:

$$x_2 + \Delta x_2 - x_1 - \Delta x_1 = 0$$

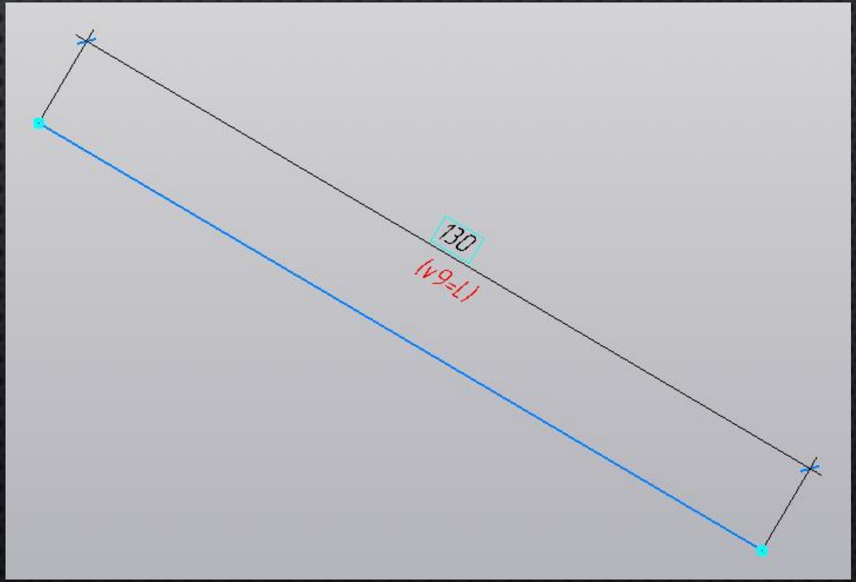
8. Принадлежность точки прямой:

$$\left(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PB}\right) = 0$$

Пример задачи удовлетворения геометрическим ограничениям

$$F(\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta x_2, \Delta y_2) = \frac{1}{2}\left(\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta y_2^2\right) + \lambda\left((x_2 + \Delta x_2 - x_1 - \Delta x_1)^2 + (y_2 + \Delta y_2 - y_1 - \Delta y_1)^2 - d^2\right)$$

$$\begin{cases} (x_2 + \Delta x_2 - x_1 - \Delta x_1)^2 + (y_2 + \Delta y_2 - y_1 - \Delta y_1)^2 - d^2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \Delta x_1} = \Delta x_1 - 2\lambda(x_2 + \Delta x_2 - x_1 - \Delta x_1) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \Delta x_2} = \Delta x_2 + 2\lambda(x_2 + \Delta x_2 - x_1 - \Delta x_1) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \Delta y_1} = \Delta y_1 - 2\lambda(y_2 + \Delta y_2 - y_1 - \Delta y_1) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \Delta y_2} = \Delta y_2 + 2\lambda(y_2 + \Delta y_2 - y_1 - \Delta y_1) = 0 \end{cases}$$



Лабораторная работа №1

- Бригады 3-4 человека
- Задание – граф.редактор с возможностью создания точек, отрезков и наложением геометрических ограничений
- Выбор технологий и инструментов – свободный
- Отчет по ЛР с бригады
  - Теория
  - Особенности программной реализации

Список литературы

1. Н.Н. Голованов. Геометрическое моделирование. Учебное пособие. – М.: КУРС: ИНФРА-М, 2016. – 400 с.
2. Ушаков Д.М. Введение в математические основы САПР: курс лекций.– М.: ДМК Пресс, 2011. – 208 с. : ил.