

滑模控制是非线性控制的一种,属于变结构控制(Variable Structure Control,VSC)的范畴。其主要特点是控制的不连续性和控制结构的可变性,通过动态调整被控对象的状态,使系统状态轨迹按照滑模态运动,因此被称为滑模控制。

对于Yaw角度控制系统: ( $u$  为电机输出电流,  $\theta$  为转角,  $w$  为角速度,  $J$  为惯量)

$$\begin{cases} \dot{\theta} = w \\ \dot{w} = J * u \end{cases}$$

令  $e = \theta - \theta_d$ ,  $\dot{e} = w - \dot{\theta}_d$ , 上式化为:

$$\ddot{e} = J * u - \ddot{\theta}_d$$

在系统状态空间中,以  $e$  为横轴,  $\dot{e}$  为纵轴,存在一个切换面

$$s = ce + \dot{e} = 0, c > 0$$

此切换面将状态空间分为上下两部分,即  $s > 0, s < 0$ 。

$$\text{解微分方程 } ce + \dot{e} = 0, \text{ 得: } ce + \dot{e} = 0 \Rightarrow \begin{cases} e = e(0) * e^{-ct} \\ \dot{e} = -ce(0) * e^{-ct} \end{cases}$$

我们可以得知,系统的状态变量在切换面上都会趋近于0,且是以指数速度趋近,且  $c$  值越大收敛速度越快。 $s$  即被称为滑模面,这种在滑模面上以指数速度趋近于0的运动被称为滑模运动。这保证了在  $s = 0$  平面上系统的收敛性,但是无法确定系统的状态变量能否到达  $s = 0$  这个平面。

$$\text{以 } s = 0 \text{ 为目标,系统状态更改为 } \dot{s} = c\dot{e} + J * u - \ddot{\theta}_d$$

对于平衡点  $s$ , 根据李雅普诺夫稳定性判据,如果存在一个连续函数  $V(s)$  满足:

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} V(s) = \infty \quad (1)$$

$$\dot{V}(s) < 0, s \neq 0 \quad (2)$$

此时系统将在  $s = 0$  处稳定,即  $\lim_{t \rightarrow \infty} s = 0$ 。

设计  $V(s) = \frac{1}{2}s^2$ ,  $\dot{V}(s) = s\dot{s}$  即,显然,式(1)的条件是满足的。接下来,为了使系统满足式(2)的条件,需要对  $\dot{s}$  进行设计,即设计滑模控制的趋近率。

趋近率的设计在式(2)的条件下有多种设计方法。一般为了加快系统的到达速度,我们选择指数趋近率,如下所示。

$$\dot{s} = -\varepsilon \operatorname{sgn}(s) - ks, \varepsilon > 0, k > 0$$

$\operatorname{sgn}(s)$  为符号函数。经验算,当  $s > 0$  时  $\dot{s} < 0$ , 当  $s < 0$  时  $\dot{s} > 0$ , 满足式(2)的条件,系统稳定。

综上，滑模控制器将系统在状态空间的运动分为了两个状态，第一个状态是系统从  $s \neq 0$  运动到  $s = 0$  上，称为到达态。第二个状态是系统在  $s = 0$  上运动至状态空间的原点，即状态变量收敛至 0，称为收敛态。

根据滑模面公式求导联立趋近率得：

$$\dot{s} = c\dot{e} + \ddot{e} = -\varepsilon \operatorname{sgn}(s) - ks$$

移项，代入系统状态方程，得到控制器输出为：

$$u = \frac{1}{J}(\ddot{\theta}_d - \varepsilon \operatorname{sgn}(s) - ks - c(w - \dot{\theta}_d))$$

可以看到，最后计算出的控制器输出自带前馈项  $\ddot{\theta}_d$ ，保证控制器的快速响应。