1

Савин Савек

N1

Сх-ся ли посл-сть функций $f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{3}{n^2}}$ на $\mathbb{R}$. Если да, то равномерно ли?

Исследуем поточечную сх-сть

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2+\frac{3}{n^2}} = \sqrt{x^2} = |x| =: f(x)$$

f_n поточечно сх-ся к $|x|$ на $\mathbb{R}$.

Найдём $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \{|f_n(x) - f(x)|\}$ при $n\to\infty$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\sqrt{x^2+\frac{3}{n^2}} - |x|\right| = \left|\sqrt{x^2+\frac{3}{n^2}} - \sqrt{x^2}\right| =$$

$$= \left|\frac{\left(\sqrt{x^2+\frac{3}{n^2}} - \sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2+\frac{3}{n^2}} + \sqrt{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+\frac{3}{n^2}} + \sqrt{x^2}}\right| = \left|\frac{x^2+\frac{3}{n^2}-x^2}{\sqrt{x^2+\frac{3}{n^2}}+|x|}\right|$$

Исследуем $\left|\frac{\frac{3}{n^2}}{\sqrt{x^2+\frac{3}{n^2}}+|x|}\right|$ тогда $n>0$ выражение в знаменателе полож. можем убрать модуль

$$\frac{\frac{3}{n^2}}{\sqrt{x^2+\frac{3}{n^2}}+|x|}$$

Числитель не зависит от x, значит, что для найти супремум, нужно найти минимальное значение знаменателя.

Оно достигается при $x=0$

$$\frac{\frac{3}{n^2}}{\sqrt{0+\frac{3}{n^2}}+|0|} = \frac{\frac{3}{n^2}}{\frac{\sqrt{3}}{n}} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n^2}}{\frac{\sqrt{3}}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n\sqrt{3}} = 0$$

Так как предел супремума модуля разности равен 0, то сходимость равномерная.

Ответ: Да, сх-ся равномерно

$z^8 = 1 + i$ №2 Савин Семен 2

Воспользуемся формулой, $\exists z^n = a$

Корни $z_k = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos\left(\frac{\arg(a) + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\arg(a) + 2k\pi}{n}\right)\right)$

и $k = 0 : n-1$

$|a| = |1+i| = \sqrt{2}$

$z_k = \sqrt[16]{2} \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{8}\right)\right)$

Ответ

№3

Саакян Семен

3

$x^2+y^2=8x$ и $y^2=\frac{x^3}{2-x}$

$x^2+\frac{x^3}{2-x}=8x$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow (0,0) \text{ точка пересечения} \\ x+\frac{x^2}{2-x}=8 \end{array}\right.$

$\begin{cases} 2x-x^2+x^2=16-8x \\ x\neq 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x=16-8x \\ x\neq 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 10x=16 \\ x\neq 2 \end{cases}$ $x=1{,}6 \quad \left(\frac{8}{5}\right)$

$y^2=\frac{\left(\frac{8}{5}\right)^3}{2-\frac{8}{5}}=\frac{\frac{512}{125}}{\frac{2}{5}}=\frac{256}{25}$

$y=\pm\sqrt{\frac{256}{25}}=\pm\frac{16}{5}$ Точки пересечения $\left(\frac{8}{5},\frac{16}{5}\right)$ $\left(\frac{8}{5},-\frac{16}{5}\right)$

Найдем $\frac{dy}{dx}$

1) $(x^2+y^2=8x)$

$2x+2y\frac{dy}{dx}=8$

$\frac{dy}{dx}=\frac{8-2x}{2y}=\frac{4-x}{y}$

2) $\left(y^2=\frac{x^3}{2-x}\right)$

$2y\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{3x^2(2-x)+x^3}{(2-x)^2}$

$2y\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{6x^2-3x^3+x^3}{(2-x)^2}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{6x^2-2x^3}{2y(2-x)^2}=\frac{3x^2-x^3}{y(2-x)^2}$

I) Точка $(0,0)$ первая касательная вертикальна

Вторая кривая в окрестности $(0,0)$ $\simeq y^2=\frac{x^3}{2}$

Тогда $y=\pm\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$

$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{2}}$

$x\to 0$ $\frac{dy}{dx}\to 0$, касательная горизонтальна.

Получили, что в точке (0,0) касательные перпендикулярны, угол в (0,0) $\frac{\pi}{2}$.

II) $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$

Для первой кривой $\frac{\left(4-\frac{8}{5}\right)}{\frac{16}{5}} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{16}{5}} = \frac{3}{4} = k_1$

Для второй $\frac{3\left(\frac{8}{5}\right)^2 - \left(\frac{8}{5}\right)^3}{\frac{16}{5}\left(2-\frac{8}{5}\right)^2} = \frac{3\frac{64}{25} - \frac{512}{125}}{\frac{16}{5}\cdot\frac{4}{25}} = \frac{\frac{3\cdot 320 - 512}{125}}{\frac{64}{125}} =$

$= \frac{448}{64} = 7 \quad = k_2$

Теперь искомый угол φ найдем по формуле

$$tg\,\varphi = \frac{(k_2 - k_1)}{1 + k_1 k_2}$$

$$tg\,\varphi = \frac{7 - \frac{3}{4}}{1 + 7\cdot\frac{3}{4}} = \frac{\frac{25}{4}}{\frac{25}{4}} = 1$$

$$\varphi = arctg\,(1) = \frac{\pi}{4}$$

В точке $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$ угол $\frac{\pi}{4}$

III) $\left(\frac{8}{5}, -\frac{16}{5}\right)$

Заметим, ~~что в силу симметр~~ что k_1 и k_2 будут такие же по модулю, но противоположного знака

$tg\,\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{-\frac{25}{4}}{\frac{25}{4}} = -1$, угол $\quad arctg\,\varphi = -\frac{\pi}{4}$

Ответ: (0,0) угол $\frac{\pi}{2}$

$\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$ угол $\frac{\pi}{4}$

$\left(\frac{8}{5}, -\frac{16}{5}\right)$ угол $-\frac{\pi}{4}$.

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos x \, dx, \ \alpha > 0$$

№ 4

Савин Семен

5

$$\left| \begin{matrix} f = \cos x, & f' = -\sin x \\ g' = e^{-\alpha x}, & g = -\dfrac{e^{-\alpha x}}{\alpha} \end{matrix} \right|$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos x \, dx = -\frac{e^{-\alpha x}\cos x}{\alpha} - \int \frac{e^{-\alpha x}\sin x}{\alpha} dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} f = -\sin x, & f' = -\cos x \\ g' = -\dfrac{e^{-\alpha x}}{\alpha}, & g = \dfrac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{e^{-\alpha x}\cos x}{\alpha} + \frac{e^{-\alpha x}\sin(x)}{\alpha^2} + \int -\frac{e^{-\alpha x}\cos x}{a^2} dx =$$

$$= -\frac{e^{-\alpha x}\cos x}{\alpha} + \frac{e^{-\alpha x}\sin x}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2}\int e^{-\alpha x}\cos x \, dx$$

Преобразуем:

$$\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\cos x \, dx = -\frac{e^{-\alpha x}\cos x}{\alpha} + \frac{e^{-\alpha x}\sin x}{a^2}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\cos x \, dx = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1}\left(\frac{e^{-\alpha x}\sin x - e^{-\alpha x}\cos x \cdot \alpha}{\alpha^2}\right)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\cos x \, dx = \frac{e^{-\alpha x}(\sin x - \alpha\cos x)}{\alpha^2+1} + C$$

Ответ: $\dfrac{e^{-\alpha x}(\sin x - \alpha\cos x)}{\alpha^2+1} + C$

N5 Савин Семен

$x\frac{du}{dy} - y\frac{du}{dx}$ перейти от декартовых к полярным

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dr} + \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dr}$$

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{d\varphi} + \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{d\varphi}$$

$$\frac{dx}{dr} = \cos\varphi$$

$$\frac{dy}{dr} = \sin\varphi$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = -r\sin\varphi$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = r\cos\varphi$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{du}{dx}\cos\varphi + \frac{du}{dy}\sin\varphi$$

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{du}{dx}r\sin\varphi + \frac{du}{dy}r\cos\varphi = r\left(\frac{du}{dy}\cos\varphi - \sin\varphi\frac{du}{dx}\right)$$

Подставим всё в исходное выражение

$$x\frac{du}{dy} - y\frac{du}{dx} = r\cos\varphi\frac{du}{dy} - r\sin\varphi\frac{du}{dx} = r\left(\cos\varphi\frac{du}{dy} - \sin\varphi\frac{du}{dx}\right)$$

Заметим, что это в точности $\frac{du}{d\varphi}$

Ответ: $\frac{du}{d\varphi}$