

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА  
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

## ОТЧЕТ ПО ЗАДАНИЮ №6

**«Сборка многомодульных программ.  
Вычисление корней уравнений и определенных  
интегралов.»**

**Вариант 11 / 1-4 / 1-3**

Выполнил:  
студент 102 группы  
Такшин А. И.

Преподаватель:  
Гуляев Д. А.

Москва  
2024

# Содержание

Постановка задачи	2
Математическое обоснование	3
Алгоритм нахождения площади криволинейного треугольника . . . . .	3
Формулы оценки погрешностей методов . . . . .	4
Оценка общей погрешности . . . . .	4
Результаты экспериментов	5
Структура программы и спецификация функций	6
Сборка программы (Make-файл)	7
Отладка программы, тестирование функций	8
Программа на Си и на Ассемблере	9
Анализ допущенных ошибок	10
Список цитируемой литературы	11

## Постановка задачи

- Требуется реализовать программу, которая численными методами вычисляет площадь фигуры, ограниченной тремя кривыми заданными в виде формул  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Для вычисления площади реализованы численные методы интегрирования: через формулу прямоугольников, через формулу трапеций и, используемый по умолчанию, через формулу Симпсона.
- Для нахождения вершин криволинейного треугольника реализованы 4 метода нахождения корня функции на заданном отрезке: метод деления отрезка пополам, метод хорд, метод Ньютона и комбинированный метод (метод хорд + метод Ньютона).
- Так как для корректной работы перечисленных методов необходимо, чтобы значения функции на концах имели разные знаки, отрезок для их применения должен быть вычислен заранее аналитически и задан в файле с описанием функций.

# Математическое обоснование

## Алгоритм нахождения площади криволинейного треугольника

Рассмотрим на примере (рис. 1) порядок вычисления площади криволинейного треугольника образованного графиками трёх функций, в предположении, что любые из двух функций  $f_1, f_2, f_3$  пересекаются ровно в одной точке на заданном отрезке.

Упорядочим точки попарных пересечений функций  $\{A, B, C\}$ , тогда для вычисления площади достаточно сложить модули интегралов функций  $g_1(x), g_2(x)$  на отрезках  $[A_x; B_x], [B_x; C_x]$ , где  $g_1(x)$  разность функций, точка пересечения которых является точкой  $A$ , а  $g_2(x)$  разность функций, точка пересечения которых является точкой  $C$ . Так как функции пересекаются в одной точке, знак разности любых двух из них не будет меняться после прохождения точки пересечения, а значит полученная сумма будет корректно определять площадь.

В данном примере, точка  $A$  является точкой пересечения  $f_2(x), f_3(x)$ , поэтому программа изначально вычислит модуль интеграла на отрезке  $[A_x, B_x]$  функции  $g_1(x) = f_2(x) - f_3(x)$ . Точка  $C$  является точкой пересечения  $f_1(x), f_3(x)$ , поэтому вторым слагаемым будет модуль интеграла  $g_2(x) = f_1(x) - f_2(x)$

$$S(\Phi) = \left| \int_{A_x}^{B_x} f_2(x) - f_3(x) dx \right| + \left| \int_{B_x}^{C_x} f_1(x) - f_2(x) dx \right|$$

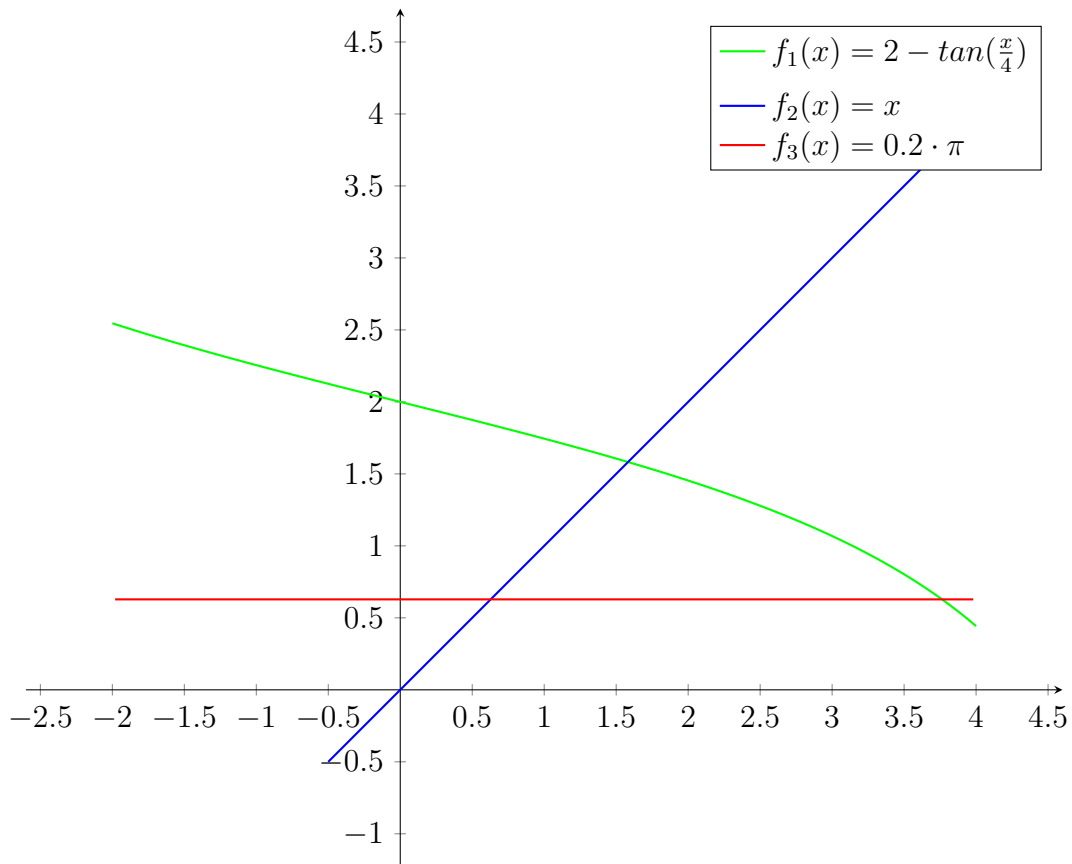


Рис. 1: Пример плоской фигуры, ограниченной графиками заданных уравнений

## Формулы оценки погрешностей методов

Абсолютная погрешность по абсциссе при вычислении точки пересечения  $\varepsilon_1$  задается непосредственно в вычисляющем её методе. Для нахождения значения  $\varepsilon_2$  - абсолютной погрешности при вычислении определенного интеграла использовались известные формулы оценки погрешности [1]:

- $\varepsilon_2 = \frac{f'(\xi)}{2} h^2 (b - a)$ , для формулы прямоугольников
- $\varepsilon_2 = \frac{f''(\xi)}{12} h^2 (b - a)$ , для формулы трапеций
- $\varepsilon_2 = \frac{f^{(4)}(\xi)}{2880} h^4 (b - a)$ , для формулы Симпсона

Учитывая, что  $h = \frac{(b-a)}{n}$  и предполагая  $f^{(n)} \approx 1$ , получаем следующие оценки на число шагов:

- $n = \sqrt[2]{\frac{(b-a)^3}{2\varepsilon_2}}$ , для формулы прямоугольников
- $n = \sqrt[2]{\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon_2}}$ , для формулы трапеций
- $n = \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{2880\varepsilon_2}}$ , для формулы Симпсона

## Оценка общей погрешности

Пусть с помощью описанных выше методом мы получили оценку  $I'$  для интеграла на отрезке  $[a'; b']$ , где  $a' = a + \varepsilon_1$ ,  $b' = b + \varepsilon_1$ , и пусть  $I$  - действительное значение интеграла на отрезке  $[a; b]$ . Тогда из разложения в ряд Тейлора:

$$I' = I + f(a)\varepsilon_1 + f(b)\varepsilon_1 + o(\varepsilon_1)$$

$$I' - I \approx f(a)\varepsilon_1 + f(b)\varepsilon_1$$

Итоговая ошибка вычисления двух интегралов составит:

$$\varepsilon_3 = (f(A_x) + 2f(B_x) + f(C_x))\varepsilon_1$$

Разобьём требуемую наибольшую ошибку  $\varepsilon$  пополам между  $\varepsilon_3$  и  $\varepsilon_2$ . Тогда итоговые оценки для  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  будут такими:

- $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$
- $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2(f(A_x) + 2f(B_x) + f(C_x))}$

## Результаты экспериментов

В результате работы программы для тестового примера (рис. 1) были получены следующие координаты точек пересечения:

Кривые	$x$	$y$
1 и 2	1.5824	1.5824
2 и 3	0.6283	0.6283
1 и 3	3.7634	0.6283

Таблица 1: Координаты точек пересечения

После чего программа корректно нашла искомую площадь криволинейного прямоугольника (рис. 2).

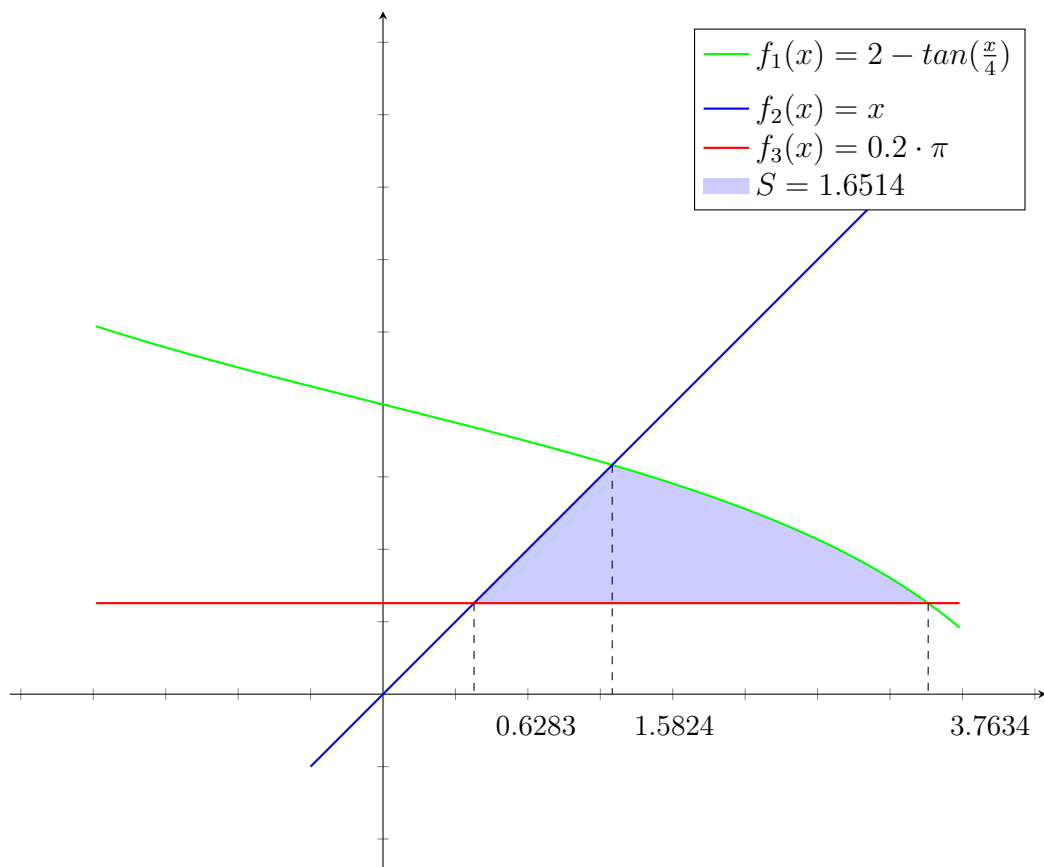


Рис. 2: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

## Структура программы и спецификация функций

В данном разделе необходимо привести полный список модулей и функций, описать их функциональность.

Изобразить графически разбиение программы на компоненты (модули, функции) и связи между этими компонентами.

## Сборка программы (Make-файл)

В данном разделе необходимо описать зависимости между модулями программы и привести текст Make-файла. Зависимости проще всего описать диаграммой.



## Отладка программы, тестирование функций

В данном разделе необходимо изложить, как именно производилось тестирование и отладка численных методов. Тестирование предполагает наличие как минимум трех тестов на каждый из реализованных методов, удовлетворяющих следующим условиям.

1. Для данных тестов должно быть возможно аналитически посчитать ответ,
2. Среди тестов должно быть не более одного «тривиального» теста с точки зрения применяемого метода, то есть такого теста, где порядок кривой совпадает с порядком кривой используемой методом для аппроксимации.

Для каждого теста необходимо привести уравнения кривых и нужных производных, аналитическое вычисление корней и отрезков применения методов, результаты работы численных методов.

## Программа на Си и на Ассемблере

Исходные тексты программ имеются в архиве, который приложен к этому отчету. А ещё исходные тексты программ можно найти на репозитории [github](#).

## Анализ допущенных ошибок

## Список литературы

- [1] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1 — Москва: Наука, 1985.

## Требования к оформлению

В данном разделе приводятся общие требования к оформлению текста отчета. Данный раздел не должен включаться в сдаваемый отчет.

1. Отчет оформляется на листах А4. Поля должны составлять от 2 до 4 сантиметров и быть одинаковыми на всех страницах отчета.
2. Основной текст отчета оформляется пропорциональным шрифтом с засечками, таким как Times New Roman. Размер шрифта может составлять либо 12pt, либо 14pt. Межстрочные интервалы могут быть единичными или полуторными в случае 12-го шрифта и только единичными в случае использования 14-го шрифта.
3. Никаких дополнительных межстрочных интервалов между абзацами не делается. Первая строка абзаца должна иметь небольшой отступ (5-10мм), одинаковый для всех абзацев, включая первый абзац раздела.
4. Заголовки первого уровня должны быть набраны более крупным шрифтом (16pt или 18pt). В заголовках допускается использование как основного шрифта, так и пропорционального шрифта без засечек, такого как Arial. Все заголовки всех уровней должны быть набраны одним шрифтом. Размер шрифта заголовков большего уровня не должен превосходить размер шрифта заголовков меньшего уровня.
5. Фрагменты программ и сценариев сборки должны быть набраны моноширинным шрифтом, таким как Courier. Размер шрифта, используемый в листингах программ может отличаться от размера, использованного при наборе основного текста, но должен быть одинаковым во всех частях отчета и принадлежать интервалу от 10pt до 14pt.
6. Выделение полужирным и/или курсивом допускается для отдельных слов в основном тексте, если это требуется. Заголовки рекомендуется выделять жирным.
7. Основной текст выравнивается по двум сторонам. На титульном листе часть текста выравнивается по центру, часть по правому краю. Список литературы и названия разделов выравниваются по левому краю.
8. Таблицы и рисунки выравниваются по центру. Все таблицы и рисунки должны быть пронумерованы и подписаны. Нумерация сквозная, отдельная для рисунков и таблиц, арабскими цифрами.
9. При использовании растровых изображения для иллюстраций в отчете необходимо обеспечить достаточное разрешение этих изображений. Качество изображения считается достаточным, если все надписи на нем легко читаются. Если на тексте, содержащемся на рисунке, явно заметно размазывание элементов букв, то такое изображение считается слишком низкого качества, и оно не должно быть использовано в отчете.

10. Таблицы должны быть сверстаны как таблицы, а не вставлены как рисунки.
11. Список литературы должен содержать для книг и статей (в соответствующем порядке).
  - Фамилии и инициалы (либо полные имена) всех авторов.
  - Название книги или статьи.
  - Название журнала и номер тома или выпуска для статей.
  - Город и год издания.
12. Список литературы для электронных источников должен содержать
  - Название страницы.
  - Полный адрес страницы.
  - Дата обращения.
13. Ссылки на Википедию и другие электронные ресурсы для оценок численных методов не принимаются. Используйте книги и/или научные статьи в качестве источников данной информации.
14. На все элементы списка литературы должны присутствовать ссылки в тексте отчета. Элементы списка литературы должны идти в том порядке, в котором ссылки на них первый раз встречаются в тексте.
15. Титульный лист оформляется следующим образом.
  - Сверху с выравниванием по центру пишется название ВУЗа и факультета. Данный фрагмент пишется заглавными или малыми заглавными буквами.
  - В центре страницы располагается следующая информация (сверху вниз).
    - Наименование работы («Отчет по заданию №6», без кавычек заглавными или малыми заглавными буквами).
    - Тема работы («Сборка многомодульных ...», в кавычках, жирным шрифтом).
    - Вариант. (Без кавычек жирным шрифтом).
  - Информация о студенте, выполнившем работу и преподавателе выравнивается по правому краю. Данный фрагмент набирается обычным шрифтом.
  - Внизу страницы с выравниванием по центру обычным или немного уменьшенным шрифтом пишется город и год выполнения работы.