FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

# Analysis 1

Melanie Hollstein

**Kapitel 1: Grundlagen**



**Kapitel 2: Konvergenz von Folgen und Reihen**

| |
|---|
| **Kapitel 4: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit** |
| |
| 1. Grenzwerte von Funktionen |
| 1.1 Definition (Konvergenz einer Funktion) |
| 1.2 Beispiele |
| 1.3 Definition (Links- und rechtsseitige Grenzwerte) |
| 1.4 Beispiele von einseitigen Grenzwerten |
| 1.5 Grenzwertregeln für Funktionen |
| 1.6 Bemerkung |
| |
| 2. Stetigkeit |
| 2.1 Definition (Stetige Funktion) |
| 2.2 Beispiele |
| 2.3 Alternative Definition der Stetigkeit ($\varepsilon$ $\delta$-Stetigkeit) |
| 2.4 Beispiel |
| 2.5 Gleichmäßige Stetigkeit |
| |
| 3. Beispiele von stetigen Funktionen |
| 3.1 Stetigkeit von Potenzreihen |
| 3.2 Rechenregeln für stetige Funktionen |
| 3.3 Stetigkeit der Umkehrfunktion |
| 3.4 Stetigkeit von Verkettungen |
| 3.5 Fazit |
| |
| 4. Stetigkeit auf Intervallen |
| 4.1 Satz von der Beschränktheit |
| 4.2 Satz vom Minimum und Maximum (Satz von Weierstraß) |
| 4.3 Zwischenwertsatz |
| 4.4 Nullstellensatz |
| |
| **Kapitel 5: Differentialrechnung** |
| |
| 1. Differenzierbarkeit |
| 1.1Motivation |
| 1.2 Definition (Differenzierbarkeit) |
| 1.3 Schreibweisen für Ableitungen |
| 1.4 Geometrische Deutung der Ableitung |
| 1.5 Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit |
| 1.6 Höhere Ableitung |
| 1.7 Bezeichnungen |
| 1.8 Stetig differenzierbare Funktion |
| |
| 2. Ableitung einiger elementarer Funktionen |
| 2.1 Ableitung der konstanten Funktion |
| 2.2 Ableitung von $f(x)=x^n$ |
| 2.3 Ableitung von $e^x$ |
| 2.4 Ableitung von sin x |
| 2.5 Zusammenfassung |
| |
| 3. Ableitungsregeln |
| 3.1 Grundregeln |
| 3.2 Beispiele |
| 3.3 Kettenregel |
| 3.4 Beispiele zur Kettenregel |
| 3.5 Ableitung der Umkehrfunktion |
| 3.6 Beispiele |
| |
| 4. Taylorreihen |
| 4.1Ableitung einer Potenzreihe |
| 4.2 Beispiel |
| 4.3 Satz von Taylor |
| 4.4 Identitätssatz für Potenzreihen |
| 4.5 Taylorformel |
| 4.6 Beispiel (Taylorpolynome von sin x) |

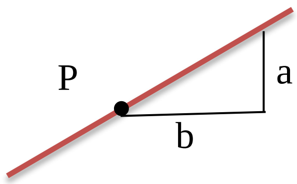
# ANALYSIS 1

## Was ist Analysis?

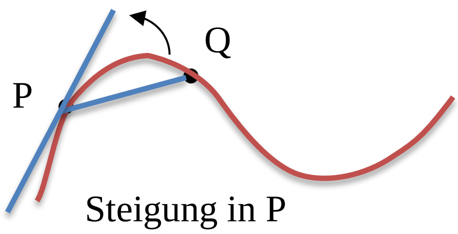
## Leibniz, Newton

Die Analysis wurde von Leibniz und Newton unabhängig voneinander zu Beginn des 18. Jahrhunderts entwickelt. Die Notation, die man heute in der Analysis verwendet, stammt von Leibniz.
Ein zentraler Begriff der Analysis ist die Konvergenz. Unter der Konvergenz versteht man einen Grenzwertprozess. Mithilfe der Konvergenz können Ideen der Elementarmathematik für den allgemeinen Fall erweitert werden. Im Folgenden werden einige Beispiele hierzu angeben. Auf der linken Seite ist jeweils ein Begriff aus der Elementarmathematik dargestellt, auf der rechten Seite sieht man, wie die Analysis diesen Begriff verallgemeinert.

| Elementarmathematik | Analysis |
|---|---|

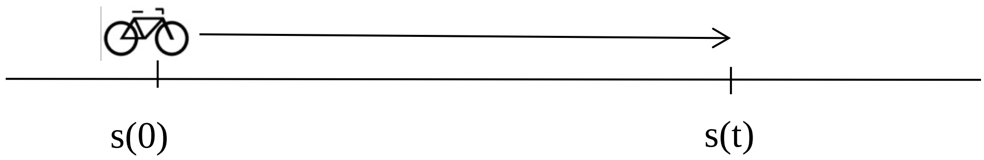



Steigung einer Geraden: $m = \frac{a}{b}$




Steigung in P

Die Steigung einer Geraden ist gegeben durch den Quotienten a/b. Mithilfe der Analysis lässt sich die Steigung in einem Punkt P der Kurve y=f(x) bestimmen, indem man folgenden Grenzwertprozess durchführt: Man betrachte die Sekante von P zu einem benachbarten Kurvenpunkt Q und lässt Q gegen P wandern. Die Steigung der Sekante geht dann über in die Steigung der Tangente bzw. in die Steigung in P.




$$\frac{s(t)-s(0)}{t}\text{=Durchnittsgeschw.} \qquad \frac{s(t)-s(0)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \text{Momentangeschw.}$$

Ein Fahrradfahrer fährt auf einer geraden Strecke von dem Ort s(0) zum Zeitpunkt 0 nach s(t) und benötigt die Zeit t. Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist dann gegeben durch den Quotienten… Die Durchschnittsgeschwindigkeit kann erheblich von der Momentangeschwindigkeit abweichen. Zur Bestimmung der Momentangeschwindigkeit führt man folgenden Grenzwertprozess durch: …

---

Endliche Reihe

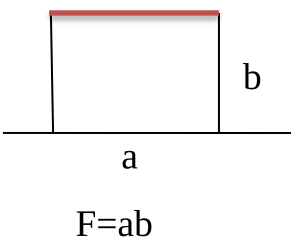
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

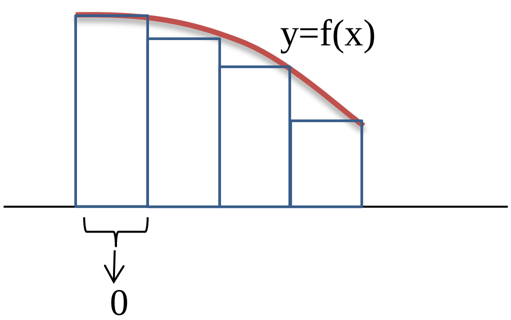
Unendliche Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=?=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

Betrachtet man die folgende endliche Reihe, so kann man mit dieser Formel den Summenwert bestimmen. Möchte man den Summenwert der unendlichen Reihe berechnen, so kann man folgenden Grenzwertprozess anwenden: Man lässt in der linken Formel n gegen unendlich gehen und erhält als Grenzwert 2.

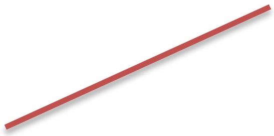
---



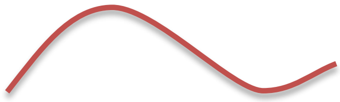




Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist gegeben durch Höhe mal Breite. Möchte man den Flächeninhalt unter der der Kurve y=f(x) bestimmen, so führt man hier folgenden Grenzwertprozess durch: Man zerlegt der Fläche in Rechtecke und addiert die Flächeninhalte auf. Dann lässt man die Anzahl der Rechtecke gegen unendlich gehen, wobei die Rechteckbreite gegen Null gehen muss. Der Grenzwert geht dann gegen den gesuchten Flächeninhalt. Den Grenzwert nennt man dann auch Integral.

Elementarmathematik | Analysis

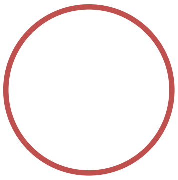


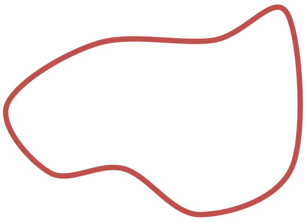
Länge einer Strecke



Länge einer Raumkurve

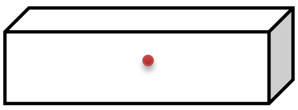
Die Länge einer Strecke lässt sich leicht berechnen. Mit Hilfe analytischer Methoden kann die Länge einer Kurve bestimmt werden.

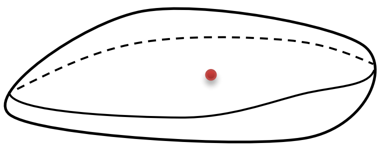




Flächeninhalt einer Fläche, die von einer Kurve berandet ist.

Der Flächeninhalt einer Kreisscheibe lässt sich leicht mit der Formel $\pi r^2$ berechnen. Ist dagegen eine Fläche gegeben, die berandet ist durch eine gegebene geschlossene Kurve, so kann man mit Methoden der Analysis auch diesen Flächeninhalt berechnen.





Volumen, Oberflächeninhalt, geometrischer Mittelpunkt

Das Volumen oder der Oberflächeninhalt eines Quaders lässt sich mit einfachen Formeln der Elementarmathematik bestimmen. Mit Hilfe von Formeln aus der Analysis kann dann auch das Volumen, der Flächeninhalt oder der geometrischen Mittelpunkt eines beliebigen Körpers berechnet werden.

# Kapitel 1: Grundlagen

## 1. Zahlen

### 1.1 Klassifizierung der Zahlen

$\mathbb{N}$ = Menge der natürlichen Zahlen ={ 1, 2, 3,…}

$\mathbb{N}_0$ ={0, 1, 2,…}

$\mathbb{Z}$ = Menge der ganzen Zahlen = $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Q}$ = Menge der rationalen Zahlen = $\{x = \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$

$\mathbb{R}$ =Menge der reellen Zahlen

Die reellen Zahlen können axiomatisch eingeführt werden. Wir betrachten die reellen Zahlen als Punkte der reellen Zahlengeraden.

$\mathbb{C}$ = Menge der komplexen Zahlen = $\{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$

werden später noch eingehender behandelt

$i$ = imaginäre Einheit (Lösung der Gleichung $x^2 = -1$)

Es gilt :

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$$

### 1.2 Notationen

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$

$\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offenes Intervall

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ halboffenes Intervall

$\forall = \textit{für alle}$

$\exists = \textit{existiert}$

# 2. Das Prinzip der vollständigen Induktion

## 2.1 Einführendes Beispiel

Aussage $A_1: 1 = 1^2$

$A_2: 1 + 3 = 4 = 2^2$

$A_3: 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$A_4: 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

$\vdots$

Vermutung: Es gilt $A_n: 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Vermutung ist bewiesen, wenn (*) „$A_n \Longrightarrow A_{n+1}$" $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt , da

$$A_1 \overset{(*)}{\Rightarrow} A_2 \overset{(*)}{\Rightarrow} A_3 \overset{(*)}{\Rightarrow} A_4 \overset{(*)}{\Rightarrow} \ldots$$

Beweis von "$A_n \Longrightarrow A_{n+1}$":

Sei $A_n: 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ richtig

zu zeigen: $A_{n+1}: 1 + 3 + 5 + \cdots + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$

$$\underline{1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1)} = n^2 + 2n + 2 - 1 =$$

$$= n^2 + 2n + 1 = \underline{(n + 1)^2} \Longrightarrow \text{Aussage } A_{n+1} \text{ ist richtig}$$

## 2.2 Vollständige Induktion

Die Behauptung $A_n$ ist für alle $n \geq m$ richtig, wenn gilt

1. Induktionsanfang: $\boxed{A_m \text{ ist richtig}}$

2. Induktionsschritt $\boxed{\text{Aus } A_n \text{ folgt } A_{n+1}}$

Beispiel

## 2.3 Formel von Gauß

Diese Formel hatte Gauß als 7 jähriger in der Schule hergeleitet, als der Lehrer im Unterricht die Aufgabe stellte, die ersten hundert Zahlen aufzuaddieren.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\boxed{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Beweis mit vollständiger Induktion:

1. Induktionsanfang (m=1):

$$A_1 : \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1 \surd$$

2.Induktionschluss $(A_n \Longrightarrow A_{n+1})$

Annahme: $A_n : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ist richtig

$$\underline{1 + 2 + 3 + \cdots + n} + (n+1) = \underline{\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \Longrightarrow$$

$A_{n+1}$ ist richtig.

☺

# 3. Funktionen

## 3.1 Der Funktionsbegriff:

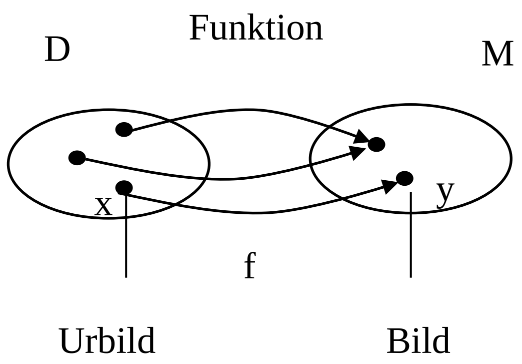
Eine Funktion f ist eine eindeutige Abbildung, die jedem x aus der Menge D genau ein Element y aus der Menge M zuordnet.

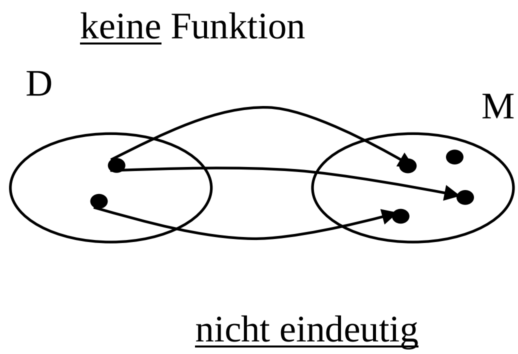
Schreibweise: $\boxed{f: D \to M, x \to y = f(x),}$

D heißt Definitionsbereich

M heißt Bildbereich

$W = \{f(x): x \in D\}$ heißt Wertebereich von f, $W \subseteq M$



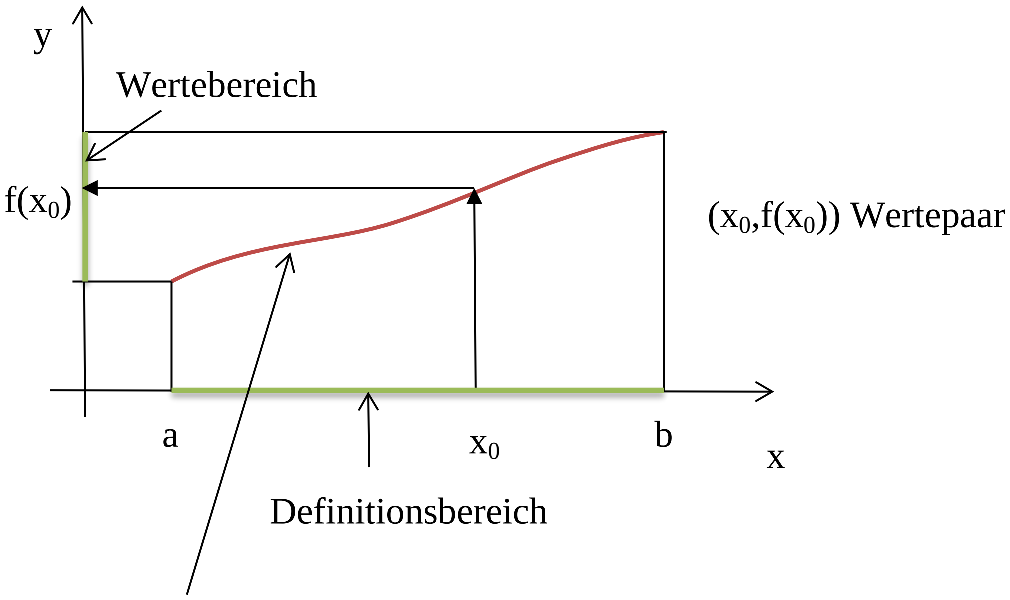




Bsp.: $f: \{1,2,4\} \to \mathbb{R}, x \to y = x^2$, D = {1,2,4}, W={1,4,16} , M = ℝ

## 3.2 Der Graph einer Funktion

Definition: Die Menge $G = \{(x, f(x)): x \in D\}$ einer Funktion $f: D \to M$ heißt Graph von f.

<u>Graphische Darstellung einer Funktion</u> $f: [a, b] \to \mathbb{R}$




$G = \{(x, f(x)): x \in [a, b]\}$ = Graph von f = ebene Kurve

Jedem Punkt $x_0$ aus dem Definitionsbereich [a,b] wird unter f ein Punkt $f(x_0)$ auf der y-Achse zugeordnet. $(x_0,f(x_0))$ nennt man Wertepaar und stellt einen Punkt in der Ebene dar. Lässt man $x_0$ laufen zwischen a und b, so erhält man eine Menge von Punkten, die auf einer Kurve in der Ebene liegen.

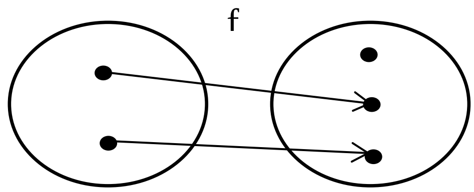
## 3.3 Injektive und surjektive Funktionen

<u>Definition</u>: Eine Funktion $f: D \to M$ heißt

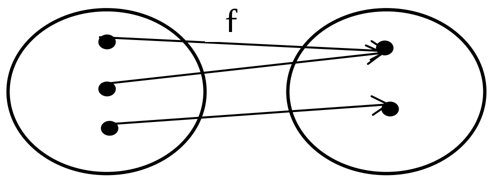
(1) <u>injektiv</u> (<u>umkehrbar</u>, <u>eineindeutig</u>), wenn gilt: $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

(2) <u>surjektiv</u>, wenn gilt: f(D)=Wertebereich von f = M

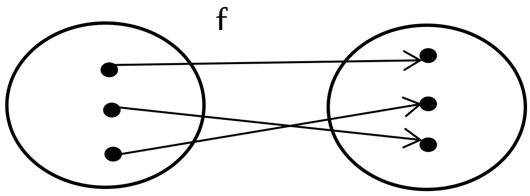
(3) <u>bijektiv</u>, wenn f injektiv und surjektiv ist.




injektiv, aber nicht surjektiv




surjektiv, aber nicht injektiv




bijektiv

<u>Beispiel</u>: Sei $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \to y = \frac{1}{x}$

$f$ ist injektiv: $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow \frac{1}{x_1} \neq \frac{1}{x_2} \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$f$ ist surjektiv: Sei $y \in \mathbb{R}^+$. Für $x = \frac{1}{y}$ gilt : $f(x) = f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y$

$f$ ist demnach bijektiv.

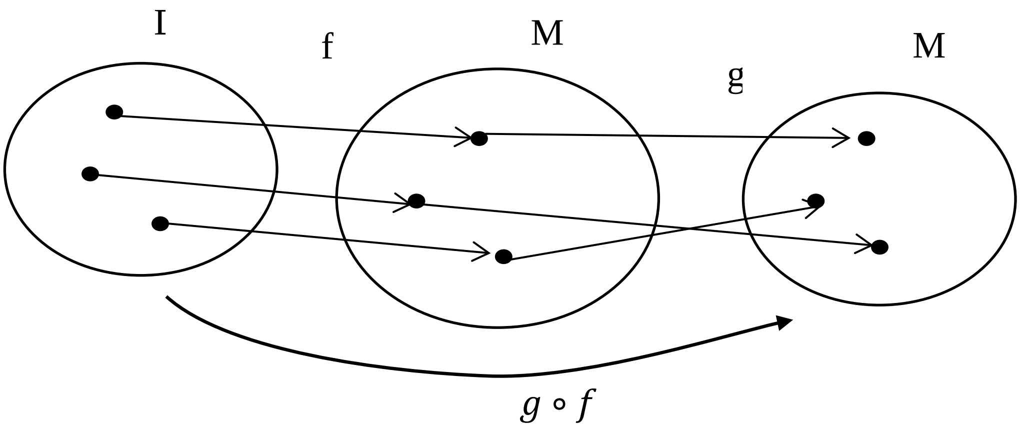
## 3.4 Verkettete Funktionen

Definition: Seien $f: D \to M_1$ und $g: M_1 \to M_2$. Die Funktion

$$g \circ f: D \to M_2, x \to g(f(x))$$

Gesprochen: Kringel

heißt Verkettung (Komposition, Verküpfung) von f und g.




Beispiel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to 2x$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \to y^3$

$g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to (2x)^3 = 8x^3$, $\quad f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \to 2y^3$

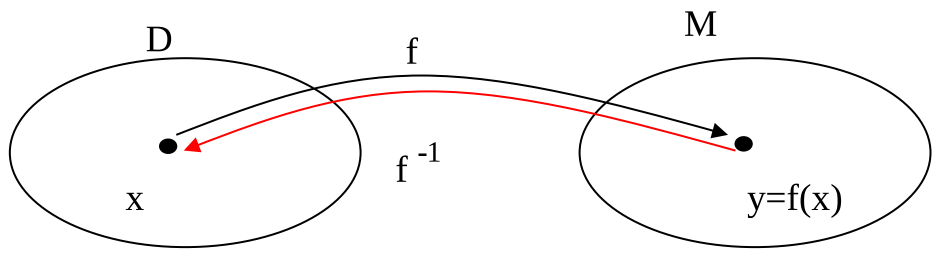
i. Allg. gilt $\boxed{f \circ g \neq g \circ f}$ Verkettung ist demnach nicht kommutativ

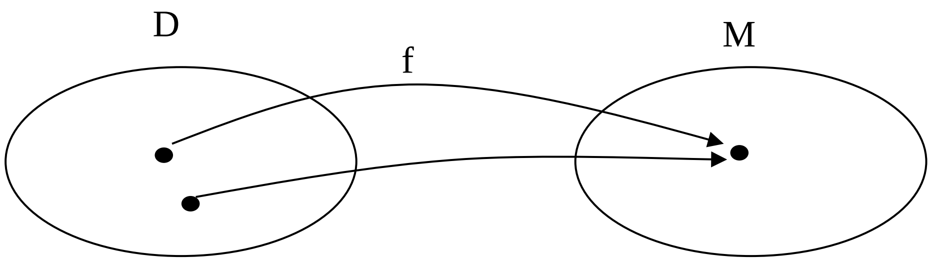
## 3.5 Umkehrfunktionen

Sei $f: D \to M$ injektiv (bzw. umkehrbar) und sei $W = \{f(x): x \in D\}$ der Wertebereich von f. Dann existiert die Umkehrfunktion

$$\boxed{f^{-1}: W \to D, y \to x \; mit \; f(x) = y}$$

Wertebereich von $f$ = Definitionsbereich von $f^{-1}$




nicht umkehrbar

Umkehrfunktion existiert nicht, da die Umkehrabbildung nicht eindeutig ist

Es gilt:

$$\boxed{f^{-1}(f(x)) = x} \qquad \boxed{f(f^{-1}(y)) = y}$$

Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to y = 2x + 1,\ \ f^{-1} = ?$

Lsg.: f injektiv: $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow 2x_1 + 1 \neq 2x_2 + 1 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Auflösen nach y: $y = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2} = f^{-1}(y)$

Umbenennung der Variablen: $y = f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

Probe: $f^{-1}\big(f(3)\big) = f^{-1}(7) = 3 \quad \surd$

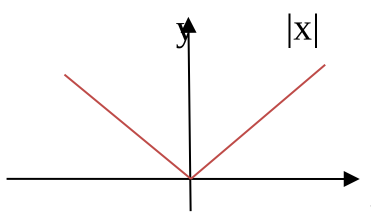
# 4. Betrags(un)gleichungen

## 4.1 Definition (Betrag)

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$|x| = \begin{cases} x \text{ für } x \geq 0 \\ -x \text{ für } x < 0 \end{cases}$$

der Betrag von x.




Bsp: $\left|\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2}, \quad |-3{,}7| = -(-3{,}7) = 3{,}7$

## 4.2 Wichtige Betrags(un)gleichungen

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

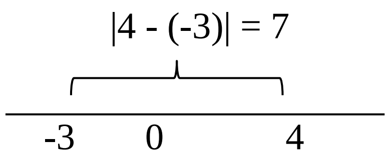
(1) $|x| \geq x \ \ und\ |x| \geq -x$

(2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(3) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}\ \ für\ y \neq 0$

(4) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)

(5) $|x - y| =$ Abstand von x und y



<u>Beweis von (4)</u>:

$$|\mathrm{x}+\mathrm{y}| \leq \left\{\begin{array}{ll} (x+y), & falls\ x+y \geq 0 \\ -(x+y)=(-x)+(-y), & falls\ x+y<0 \end{array}\right\} \leq |x|+|y|$$

Für $x=-3$ und $y=4$ gilt: $|x+y|=1, |x|+|y|=7 \Rightarrow$

$|x+y|<|x|+|y|$ ☺

# 5. Grundlagen über Mengen aus $\mathbb{R}$

Hinweis: Alle Mengen $A$ in diesem Abschnitt sind Teilmengen von $\mathbb{R}$.

## 5.1 Beschränkte Mengen

Definition: Sei $A \subset \mathbb{R}$.

$$A \text{ heißt } \left\{\begin{array}{c} \underline{\text{nach oben beschränkt}} \\ \underline{\text{nach unten beschränkt}} \\ \underline{\text{beschränkt}} \end{array}\right\}, \text{wenn ein K existiert mit}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x \leq K & (\underline{\text{obere Schranke}}) \\ x \geq K & (\underline{\text{untere Schranke}} \\ |x| \leq K & (\underline{\text{Schranke}}) \end{array}\right\} \text{ für alle } x \in A\,.$$

Bsp.: (1) $\mathbb{R}^+$ nach unten beschränkt, K= 0

(2) [-2,1] beschränkt mit K = 2

## 5.2 Supremum und Infimum

Definition: Der Wert

$$K = \min_{K^* \in \mathbb{R}} \{K^* \text{ ist obere Schranke von } A\} =: \sup(A)$$

heißt kleinste obere Schranke von A oder Supremum von A.

Gilt $K \in A$, so heißt K Maximum von A und man schreibt K=max(A).

Definition: Der Wert

$$K = \max_{K^* \in \mathbb{R}} \{K^* \text{ ist untere Schranke von } A\} =: \inf(A)$$

heißt größte untere Schranke von A oder Infimum von A.

Gilt $K \in A$, so heißt K Minimum von A und man schreibt K=min(A).

Vollständigkeitsaxiom ist nicht beweisbar, sondern wird vorausgesetzt. Damit ist eine tragfähige Theorie entwickelbar. Die reellen Zahlen lassen sich ebenfalls axiomatisch einführen (elegantester Weg)

Hinweis: Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert für nach oben (unten) beschränkte Mengen das Supremum (Infimum).

Beispiel: Für $A = \{0 < x \leq 1\}$ gilt:

$\sup(A) = 1 = \max(A)$

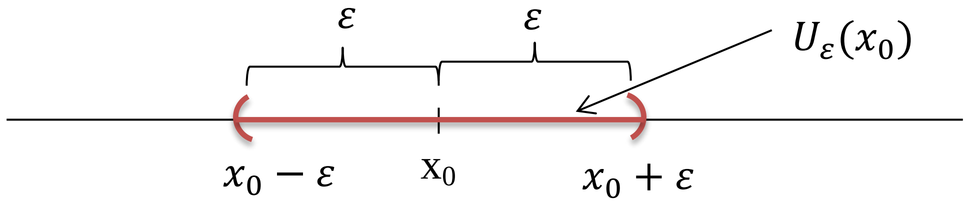
$\inf(A) = 0$ (Minimum existiert nicht)

5.3 <u>$\varepsilon$ –Umgebung</u>

<u>Definition</u>: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ *und* $\varepsilon > 0$. Die Menge

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \mid \underbrace{|x - x_0|}_{Abstand\ von\ x\ und\ x_0} < \varepsilon\}$$

heißt <u>$\varepsilon$ –Umgebung</u> von $x_0$.



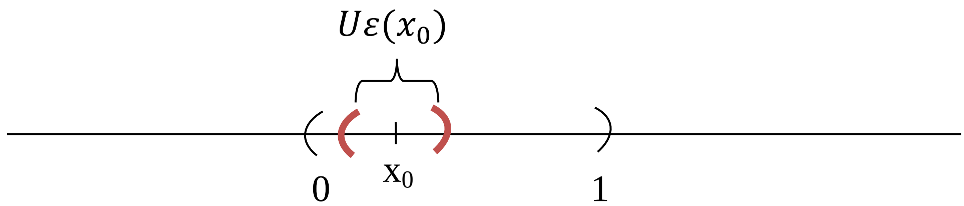

5.4 <u>Offene Menge</u>

<u>Definition</u>:

$x_0 \in A$ heißt <u>innerer Punkt</u> von A, wenn eine $\varepsilon$ – Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ existiert, die ganz in A liegt.

A heißt <u>offen</u>, wenn jeder Punkt von A innerer Punkt ist.

<u>Beispiel</u>: $\{x \in \mathbb{R}: 0 < x < 1\} = (0,1)$ ist offen.



5.5 Häufungspunkt einer Menge

Definition: a heißt Häufungspunkt einer Menge A, wenn in jeder $\varepsilon -$ Umgebung $U_\varepsilon(a)$ ein Punkt $x \in A$ mit $x \neq a$ existiert.

Bemerkungen:

(1) a Häufungspunkt von A ⇒ zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren unendlich viele $x_n \in A$ mit $|x_n - a| < \varepsilon$.

(2) 0 ist Häufungspunkt von $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$, liegt aber nicht in A.

5.6 Abgeschlossene Menge

Definition: A heißt abgeschlossen, wenn jeder Häufungspunkt von A in A liegt.

Bemerkungen:

(1) Jede endliche Menge ist abgeschlossen (wg. Bem. 5.5(1)).

(2) ℕ ist abgeschlossen, da ℕ keinen Häufungspunkt besitzt (wg. Bem. 5.5 (1) für $\varepsilon = \frac{1}{2}$).

(3) [a,b] ist abgeschlossen.

5.7 Limes Superior (Inferior)

Definition:

(1) Der größte Häufungspunkt x von A heißt Limes Superior.

Notation: $x = \limsup A$

(2) Der kleinste Häufungspunkt x von A heißt Limes Inferior.

Notation: $x = \liminf A$

Bemerkung: Es gilt

$\inf A \leq \liminf A \leq \limsup A \leq \sup A$

<u>Beispiel</u>: $A = (0,1) \cup \{2\}$


Es gilt: $\inf A = 0 = \liminf A, \quad \limsup A = 1, \quad \sup A = 2.$

## 6. <u>Endliche Reihen</u>

6.1 <u>Definition</u>: Für reelle Zahlen $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ heißt

$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_n = \sum_{k=m}^{n} a_k$$

Summenindex

<u>die Summe von $a_k$ über k=m bis n</u>

<u>Beispiel</u>:

$$3 + 4 + 5 + \cdots + 20 = \sum_{k=3}^{20} k$$

### 6.2 <u>Arithmetische Reihe</u>

<u>Definition</u>: Die Reihe

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k$$

heißt <u>arithmetische Reihe</u>.

Es gilt $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$ Formel von Gauß (vgl. 2.3)

Aufgabe: $6 + 8 + 10 + \cdots + 30 = ?$

Lsg.:

$$6 + 8 + \cdots + 30 = 2(3 + 4 + \cdots + 15) = 2\sum_{k=3}^{15} k =$$

$$= 2\left(\sum_{k=1}^{15} k - 1 - 2\right) \overset{\textit{Formel von Gauß}}{\widehat{=}} 2\left(\frac{15 \cdot 16}{2} - 3\right) = 234$$

6.3 Geometrische Reihe

Definition: Für $q \in \mathbb{R}$ heißt

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k$$

geometrische Reihe.

Summenwert der geometrischen Reihe:

Der Summenwert der geometrischen Reihe ist gegeben durch

$$\boxed{S(n) := \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

Beweis:

$$(1 - q)S(n) = \sum_{k=0}^{n} q^k - q\sum_{k=0}^{n} q^k =$$

$$= [1 + q + q^2 + \cdots + q^n] - [q + q^2 + \cdots + q^{n+1}] = 1 - q^{n+1}$$

$$\Longrightarrow S(n) = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

☺

Aufgabe: Weizenkornlegende:

Über die Erfindung des Schachspiels gibt es die folgende Weizenkornlegende. Der persische Erfinder des Schachspiels forderte von seinem Herrscher, ihm als Lohn die 64 Felder des Spielbretts mit Weizenkörnern zu füllen, und zwar auf das erste Feld ein Korn zu legen, auf das zweite zwei Körner, auf das dritte vier Körner und bei jedem weiteren Feld doppelt so viele wie auf das vorherige Feld. Der Herrscher wunderte sich über die Bescheidenheit der Bitte. Wie groß wäre insgesamt die Weizenkornmenge?

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{63} = \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} \approx 184 \text{ Billiarden Weizenkörner}$$

Insgesamt wären dies ungefähr 184 Billiarden Weizenkörner gewesen, und sämtliche Welternten seit Beginn des Getreideanbaus hätten hierzu nicht ausgereicht.

# 7. Binomischer Lehrsatz

## 7.1 Fakultät

Definition: Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt der Term

$$\boxed{n! := \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n & n \geq 1 \end{cases}}$$

n-Fakultät.

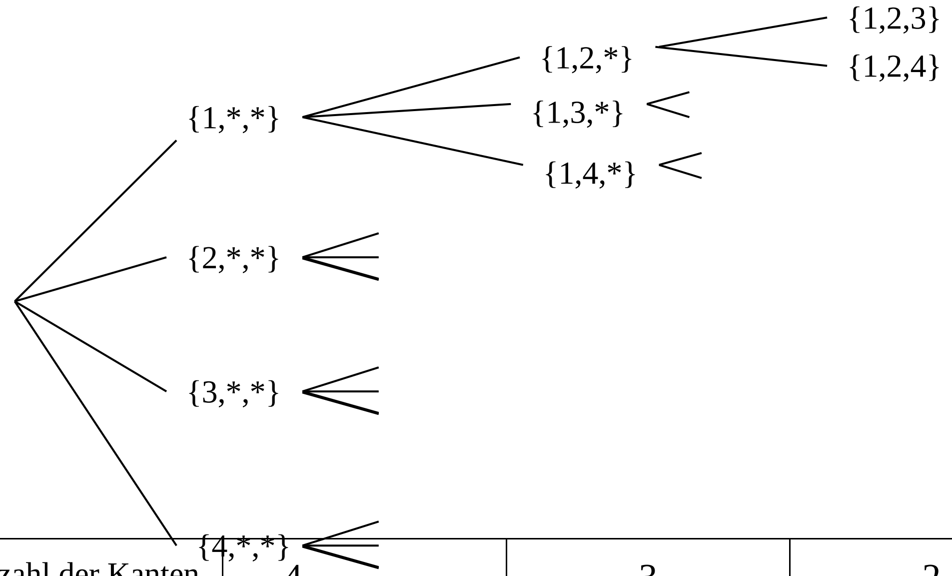
Beispiel: $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$60! = 8{,}321 \cdot 10^{81} >$ Anzahl aller Atome dieser Erde

Fakultät wächst extrem schnell

## 7.2 Problem:

Wie viele verschiedene 3-elementige Teilmengen besitzt die Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$?




| | | | |
|---|---|---|---|
| Anzahl der Kanten pro Knoten | 4 | 3 | 2 |

Lösung

Eine 3-elementige Menge ist als Pfad eines Baumdiagramms darstellbar

Anzahl der Pfade mit Berücksichtigung der Reihenfolge: $4 \cdot 3 \cdot 2$

## 7.3 Allgemein:

> *Satz:* Die Anzahl der möglichen Anordnungen einer $n$ −elementigen Menge $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ist gleich $n!$

*Beweis.*

*durch vollständige Induktion nach $n$.*

*Induktionsanfang $n = 1$:* Eine einelementige Menge besitzt nur eine Anordnung ihrer Elemente. Andererseits ist 1! ebenfalls gleich 1.

*Induktionsschritt.* Der Satz sei für $n$ −elementige Mengen bereits bewiesen. Die möglichen Anordnungen der $(n+1)$ −elementigen Menge $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ zerfallen folgendermaßen in $n+1$ Klassen $K_k, k = 1,2, \ldots, n+1$:

Die Anordnungen der Klasse $K_k$ haben das Element $a_k$ an erster Stelle, bei beliebiger Anordnung der übrigen $n$ Elemente.

Nach Induktionsvoraussetzung besteht jede Klasse $K_k$ aus $n!$ Anordnungen. Die Gesamtzahl aller möglichen Anordnungen von $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ist also gleich $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$

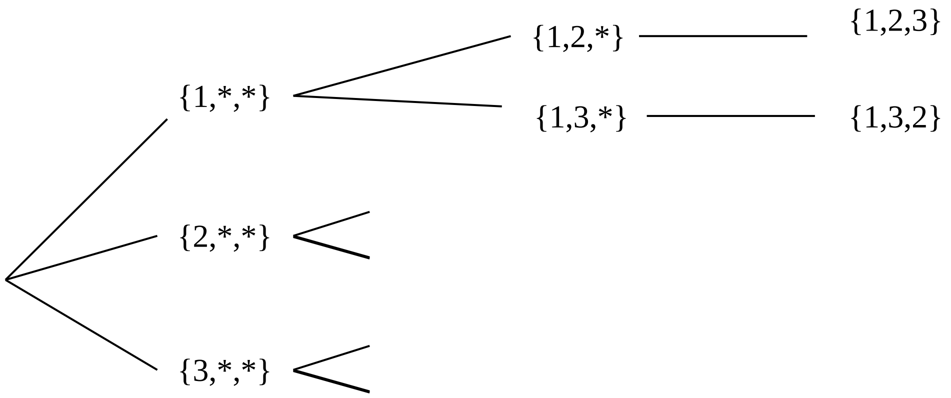
☺

Bemerkung:

Eine Menge ist eine Anordnung, in der die Reihenfolge keine Rolle spielt, d. h. z.B. $\{1,2,3\}=\{2,1,3\}=\{3,1,2\}=\ldots.$

D.h. im obigen Diagramm sind einige mehrfach aufgeführt, wieviele müssen wir streichen?

Gesucht ist die Anzahl der Pfade mit den Elementen 1,2,3:




| | | | |
|---|---|---|---|
| Anzahl der Kanten je Knoten | 3 | 2 | 1 |

Anzahl der Pfade mit den Elementen 1, 2, 3: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$

Anzahl der 3-elementigen Teilmengen aus {1, 2, 3, 4}: $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!}$

## 7.4 Binomialkoeffizient

Man setzt für $n, k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}}$$

Zusatzdefinition: $\binom{n}{0} := 1$

$\binom{n}{k}$ heißt Binomialkoeffizient.

Aus der Definition folgt unmittelbar:

$$\binom{n}{k} = 0 \;\; f\text{ür } k > n$$

und

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \quad \textit{für} \;\; 0 \le k \le n$$

*Hilfssatz:* Rekursive Additionsformel

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}}$$

*Beweis*. Übung!

7.5 <u>Satz</u> (Anzahl von Teilmengen einer Menge)

Die Anzahl der $k$ −elementige Teilmengen einer $n$ −elementigen Menge $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ist gleich

$$\boxed{\frac{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \binom{n}{k}}$$

*Bemerkung*. Dieser Satz zeigt, dass die Zahlen $\binom{n}{k}$ ganz sind, was aus ihrer Definition nicht unmittelbar ersichtlich ist.

*Beweis*. Es sei $C_k^n$ die Anzahl der $k$ −elementigen Teilmengen von $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Wir beweisen $C_k^n = \binom{n}{k}$ durch vollständige Induktion über $n$.

*Induktionsanfang* $n = 1$. Es ist $C_0^1 = C_1^1 = \binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$, da die Menge $\{a_1\}$ nur eine nullelementige Teilmenge, nämlich $\emptyset$, und eine einelementige Teilmengen, nämlich $\{a_1\}$, hat.

(Übrigens gilt der Satz auch für $n = 0$.)

*Induktionsschritt* $n \to n+1$. Es sei $C_k^n = \binom{n}{k}$ schon bewiesen. Da trivialerweise

$C_0^{n+1} = 1 = \binom{n+1}{0}$ und $C_{n+1}^{n+1} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$, brauchen wir nur noch den Fall $1 \leq k \leq n$ zu behandeln. Die $k$ −elementigen Teilmengen von $\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ zerfallen in zwei Klassen $K_0$ und $K_1$, wobei $K_0$ alle Teilmengen umfasse, die $a_{n+1}$ nicht enthalten, und $K_1$ alle Teilmengen, die $a_{n+1}$ enthalten.

Die Anzahl der Mengen in der Klasse $K_0$ ist gleich der Anzahl der $k$ −elementigen Teilmengen von $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, also nach Induktionsvoraussetzung gleich $\binom{n}{k}$.

Da die Mengen der Klasse $K_1$ alle das Element $a_{n+1}$ enthalten und die übrigen $k-1$ Elemente der Menge $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ entnommen sind, besteht $K_1$ nach Induktionsvoraussetzung aus $\binom{n}{k-1}$ Mengen.

Damit ergibt sich unter Benutzung des Hilfssatzes

$$C_k^{n+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

☺

Beispiele: (1) $\binom{10}{3} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$

(bei der praktischen Berechnung rechtzeitig kürzen!)

(2) Wie viele Ziehungsmöglichkeiten gibt es beim Lotto „6 aus 49“?

Lösung: M={1, 2, 3, …,49}, Ziehung = 6-Teilmenge von M

Anzahl der Möglichkeiten: $\binom{49}{6} = \frac{49!}{43!\cdot6!}$=13.983.816

## 7.6 Eigenschaften des Binomialkoeffizienten

Es gilt für alle $k, n \in \mathbb{N}$ $mit$ $0 \leq k \leq n$

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$$

Symmetriegesetz

Folgerung: Anzahl der k-elementigen Teilmengen=Anzahl (n-k) elementigenTeilmengen. Anschaulich klar. Das bilden einer k-elementigen Teilmenge lässt eine (n-k)-elemtige Teilmenge übrig

Beweis:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot\big(n-(n-k)\big)!} = \frac{n!}{\big(n-(n-k)\big)!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

☺

7.7 Binomischer Satz:
Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

Beweis:

$$(a+b)^n = \underbrace{(\mathrm{a}+\mathrm{b})}_{\text{Summe } \mathrm{K}_1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(\mathrm{a}+\mathrm{b})}_{\text{Summe } \mathrm{K}_\mathrm{n}} \overset{\text{Ausmultiplizieren}}{\triangleq}$$

Summe von Produkten der Form $a^k b^{n-k}$

Dieser Term kommt dann vor, wenn man in $k$ Klammern $a$ auswählt und aus den restlichen $n-k$ das $b$.
Bsp. $n = 3\ und\ k = 2:\quad (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) \to a^2 b$

Sei $M = \{K_1, \dots, K_n\}$.

Anzahl der Möglichkeiten, k Klammern von M auszuwählen aus denen man a nimmt =

=Anzahl der k-elementigen Teilmengen von M = $\binom{n}{k}$.

☺

7.8 Beispiele:

(1) $(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^0b^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}a^2b^0 = a^2 + 2ab + b^2$

(2) $\quad 2^{\mathrm{n}} = (1+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Rightarrow$

7.9 Satz:

Die Anzahl aller möglichen Teilmengen einer $n$ −elementigen Menge ist $2^n$.

<u>Beispiel</u>: Menge aller Teilmengen von {a, b, c}:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

$2^3 = 8$ √

Mit Hilfe des sogenannten Pascaleschen Dreiecks können für kleine n sehr leicht die Binomialkoeffizienten berechnet werden.

## 7.10 <u>Das Pascalesche Dreieck</u>

n = 0 $\qquad \binom{0}{0}$

n = 1 $\qquad \binom{1}{0} + \binom{1}{1}$

n = 2 $\qquad \binom{2}{0} + \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$

n = 3 $\qquad \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$

n = 4 $\qquad \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$

Rekursive Additionsformel

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

# Kapitel 2: Konvergenz von Folgen und Reihen

## 1. Folgen

### 1.1 Definition:

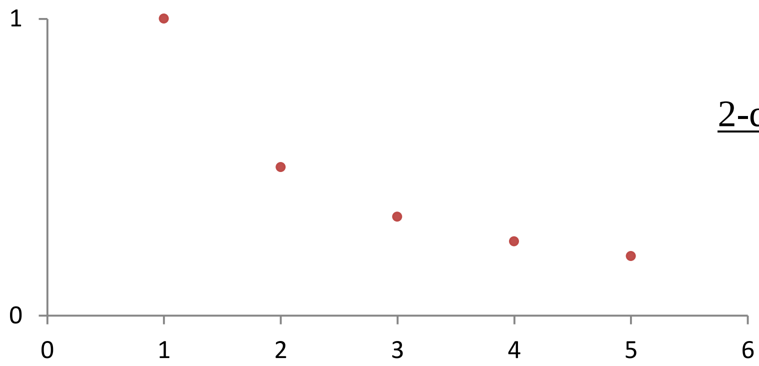
Eine reelle (bzw. komplexe) Folge ist eine Funktion

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}\ (bzw. \mathbb{C})\ oder\ f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}\ (bzw. \mathbb{C})$$

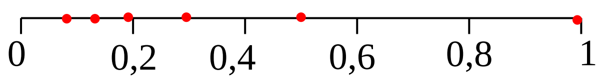
Schreibweisen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\ mit\ f(n) = a_n$ oder $a_1, a_2, \ldots$

Bsp.: $f(n) = \frac{1}{n} = a_n$

Graphische Darstellung von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$




2-dim.Darstellung




1-dim.Darstellung

### 1.2 Beispiele

| $a_n$ | n=1 | n=2 | n=3 | n=4 |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{n^2}$ | 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{16}$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $(-1)^n$ | -1 | 1 | -1 | 1 |
| $i^n$ | $i$ | $-1$ | $-i$ | $1$ |

## 1.3 Arithmetische Folgen

Definition: Sei $a_0$ $und$ $c \in \mathbb{R}$ und sei

$$a_1 = a_0 + c$$

$$a_2 = a_1 + c = a_0 + 2c$$

$$a_3 = a_2 + c = a_0 + 3c$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} + c = a_0 + nc$$

$$\vdots$$

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\boxed{a_n = a_0 + nc\,, \;\; n \in \mathbb{N}}$$ Explizite Darstellung

bzw.

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + c, \;\; n \in \mathbb{N}}$$ Rekursive Darstellung

heißt arithmetische Folge.

Beispiel: Messungen in Bergwerken ergaben:

Temperatur in 25 m Tiefe: 10°C

Temperaturzunahme auf 30 m: 1°C

Aufgabe: Wie hoch beträgt die Temperatur in 1 km Tiefe?

Lösung: $a_n =$ Temperatur in (n+25) Meter Tiefe, $a_0 = 10, c = \frac{1}{30}$,

$$a_{975} = a_0 + 975 \cdot c = 10 + 975 \cdot \frac{1}{30} = 42{,}5$$

Temperatur in 1 km Tiefe: 42,5°C

## 1.4 Geometrische Folgen

Definition: Sei $a_0 \; und \; c \in \mathbb{R}$ und sei

$$a_1 = a_0 \cdot c$$

$$a_2 = a_1 \cdot c = a_0 \cdot c^2$$

$$a_3 = a_2 \cdot c = a_0 \cdot c^3$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot c = a_0 \cdot c^n$$

$$\vdots$$

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\boxed{a_n = a_0 \cdot c^n \, , \;\; n \in \mathbb{N}}$$ Explizite Darstellung

bzw.

$$\boxed{a_n = a_{n-1} \cdot c, \quad n \in \mathbb{N}}$$ Rekursive Darstellung

heißt geometrische Folge.

Beispiel: Ein Blatt Papier der Stärke 0,1 mm wird 20 mal in der Mitte gefaltet.

Aufgabe: Wie dick ist das gefaltete Papier?

Lösung: $a_0 = 0.1, \; c = 2$

$a_{20} = 0.1 \cdot 2^{20} mm = 104857{,}6 \, mm \approx 105 \, m$

## 1.5 Monotone Folgen

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

$$\left\{\begin{array}{c}\text{monoton steigend}\\ \text{streng monoton steigend}\\ \text{monoton fallend}\\ \text{streng monoton fallend}\end{array}\right\}, wenn \left\{\begin{array}{l} a_n \leq a_{n+1}\\ a_n < a_{n+1}\\ a_n \geq a_{n+1}\\ a_n > a_{n+1}\end{array}\right\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beispiele: (1) Die Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ ist streng monoton fallend.

(2) Die konstante Folge 1, 1, 1, 1, … ist monoton steigend und fallend.

(3) Die Folge $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ ist nicht monoton.

## 1.6 Häufungspunkt einer Folge

Definition: a heißt Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn in jeder $\varepsilon -$ Umgebung $U_\varepsilon(a)$ unendlich viele Folgenglieder $a_n$ liegen.

Beispiel: Die Folge 1, -1, 1, -1, … besitzt die Häufungspunkte 1 und -1.

Bemerkung: Man muss unterscheiden zwischen:
Häufungspunkt einer Menge und Häufungspunkt einer Folge (Funktion)

Bsp.: Die konstante Folge 1, 1, 1, … hat den Häufungspunkt 1.
Die Menge $M = \{1\}$ hat keinen Häufungspunkt.

### 1.7 Teilfolgen

Definition: Ist $n_1, n_2, n_3, \dots$ eine streng wachsende Folge natürlicher Zahlen, so heißt

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$$

Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

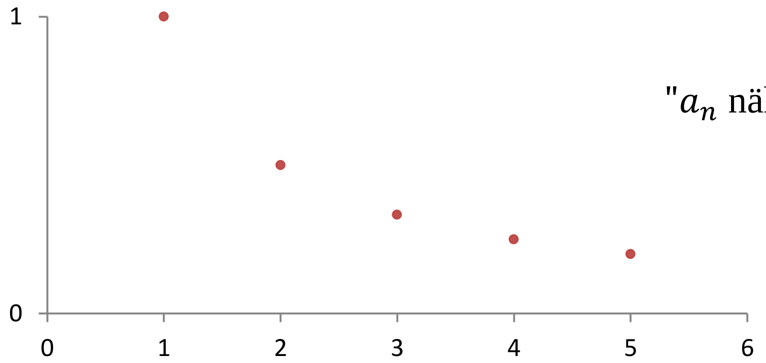
Beispiel: Die Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ besitzt die Teilfolge $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots$ $(n_1 = 2, n_2 = 4, \dots)$

## 2. Konvergenz von Folgen

### 2.1 Einführung: Konvergenz einer Folge

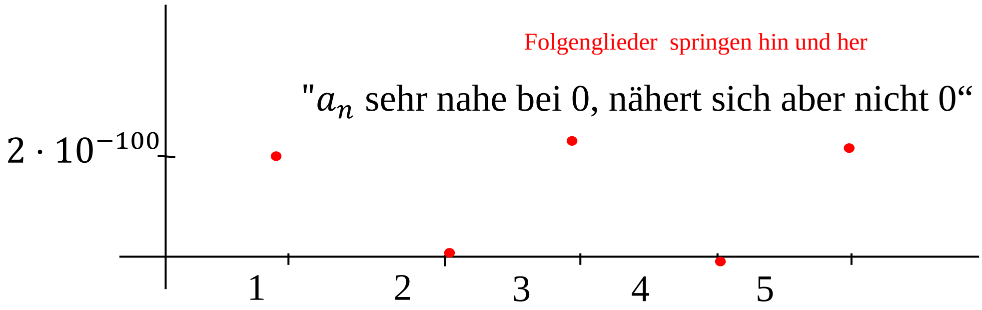
(1) $a_n = \frac{1}{n}$

Folgenglieder werden bei wachsendendem n immer kleiner

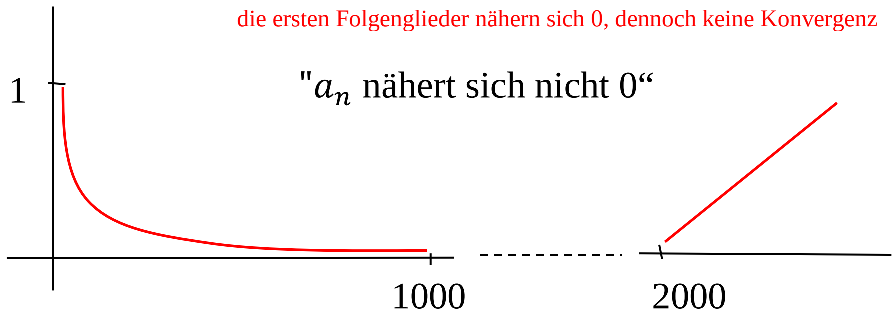



"$a_n$ nähert sich 0“

(2) $a_n = (1 - (-1)^n) \cdot \varepsilon,\ \ \varepsilon$ sehr klein , $z.B.\, \varepsilon = 10^{-100}$

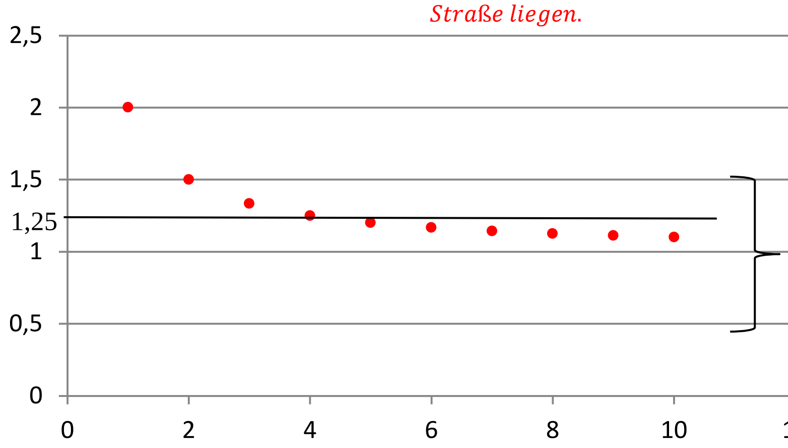



(3) $a_n = \frac{1}{n} + (n^{1,000001} - n)$



(4) $a_n = \frac{1}{n} + 1$

Setzt man $\varepsilon = 0.5$, *so liegen alle Folgenglieder ab* $n = 3$ *in der* $\varepsilon -$ *Straße*, bei $\varepsilon = 0.25$ *ab* $n = 5$ . Zu jedem $\varepsilon$ *gibt es ein Index* $n$, *ab dem alle Folgenglieder in der* $\varepsilon -$ *Straße liegen.*




$|a_n - 1| < 0{,}5$ für alle $n \geq 3$

$|a_n - 1| < 0{,}25 \text{ für alle } n \geq 5$

## 2.2 Definitionen:

(1) Eine Zahl a $\in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert (Limes) einer Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ es eine Zahl $n_0 = n_0(\varepsilon)$ gibt:

$$\boxed{|a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0}$$

Kurz:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \text{ mit } |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0}$$

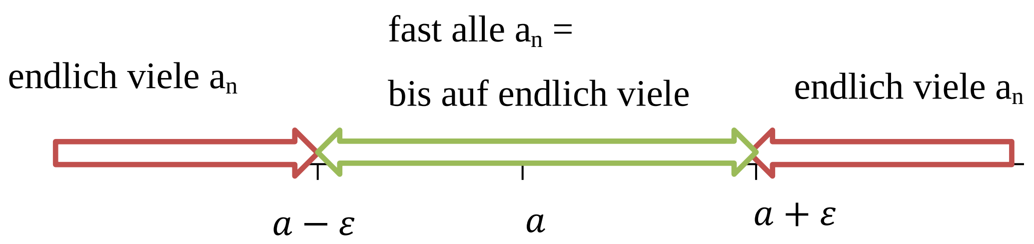
Man sagt dann, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und schreibt

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{oder } a_n \to a \text{ für } n \to \infty}$$

Für a= 0 heißt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge.

(2) Eine nichtkonvergente Folge heißt divergent.

$$Für\ a = \lim_{n\to\infty} a_n \text{ und jedes } \varepsilon > 0\ gilt$$




<u>Satz.</u> *(Eindeutigkeit des Limes)* Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere sowohl gegen $a$ als auch gegen $a'$. Dann gilt $a = a'$.

<u>Bemerkung.</u> Dieser Satz macht die Schreibweise $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ erst sinnvoll.

<u>Beweis.</u> (Widerspruchsbeweis) Angenommen, es wäre $a \neq a'$. Sei $\epsilon := \frac{|a-a'|}{2}$.

Da $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \epsilon$ für $n \geq N_1$.
Da $\lim_{n\to\infty} a_n = a'$, gibt es ein $N_2 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a'| < \epsilon$ für $n \geq N_2$.

Für $n := \max(N_1, N_2)$ gilt dann sowohl $|a_n - a| < \epsilon$ als auch $|a_n - a'| < \epsilon$.

Daraus folgt
$|a - a'| = |(a - a_n) + (a_n - a')| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < 2\epsilon$,
d.h. $|a - a'| < |a - a'|$
Dies ist ein Widerspruch, also muss $a = a'$ sein.

<u>Beispiel:</u>

Man zeige: $\lim_{n\to\infty} a_n = 3\ \ für\ a_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$.

<u>Beweis</u>: Sei $\varepsilon > 0$.

$$|a_n - 3| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

$$|a_n - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Setze $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, wobei $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ die größte ganze Zahl ist, die kleiner als $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ ist. Für alle $n \geq n_0$ gilt $n > \frac{1}{\varepsilon}$ und somit $|a_n - a| < \varepsilon$.

Später werden Konvergenzregeln betrachtet, mit denen man relativ leicht die Konvergenz von Zahlenfolgen nachweisen und die Grenzwerte bestimmen kann.

## 2.3 Wichtige Grenzwerte

Formel 2 und 3 beweisbar mit L'Hospitalescher Regel (Kapitel 4)

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0 \text{ für } a > 0}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \text{ für } a > 0}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$$

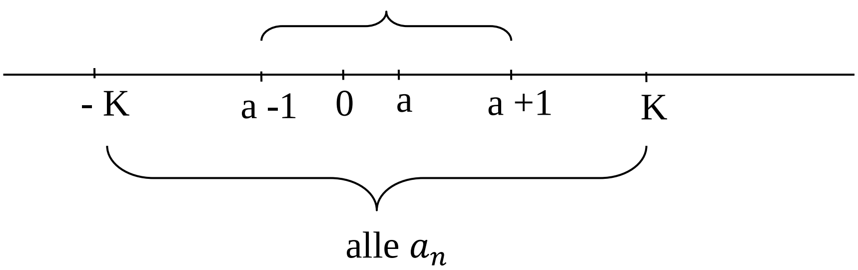
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ für } |q| < 1} \quad (Frage\text{: Für } q = 1, q = -1, |q| > 1?)$$

## 2.4 Beschränktheit von konvergenten Folgen

Satz: Jede konvergente Folge ist beschränkt, d.h. $|a_n| \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Folgerung: Jede nicht beschränkte Folge ist divergent.

Beweisidee: Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a \; und \; \varepsilon = 1$. Außerhalb von $(a-1, a+1)$ liegen nur endlich viele $a_n$. Diese sind beschränkt.




*Beweis.* Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$|a_n - a| < 1 \quad \textit{für alle } n \geq N.$$

Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung

$$|a_n| = |a + a_n - a| \leq |a| + |a_n - a| \leq |a| + 1 \;\; \textit{für alle } n \geq N$$

Sei $M \coloneqq \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a| + 1)$. Damit gilt

$$|a_n| \leq M \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}$$

☺

Beispiele:

(1) 1, 2, 3, 4, … unbeschränkt ⇒ divergent

(2) 1, 1, -1, 1 , … ist beschränkt, aber nicht konvergent.

(d.h. Umkehrung gilt nicht!)

## 2.5 Konvergenz von beschränkten, monotonen Folgen

Satz: Jede beschränkte, monotone Folge ist konvergent.

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ohne Einschränkung monoton steigend und beschränkt mit $a_n \leq S = \sup\{a_n\}$ (nach dem Vollständigkeitsaxiom 1.5.2 existiert das Supremum).

wenn nicht, dann wäre $S - \varepsilon$ Supremum

Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert ein $n_0$ mit $S - \varepsilon < a_{n_0} \leq S$.

Es gilt für alle $n \geq n_0$

$$|S - a_n| =_{S \textit{ ist Supremum}} S - a_n \leq_{\textit{Folge ist monoton steigend}} S - a_{n_0} < \varepsilon$$

☺

# 3. Rechenregeln für Grenzwerte

## 3.1 Satz:

Für $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ , $\lim_{n\to\infty} b_n = b \textit{ und } c \in \mathbb{R} \textit{ gilt}$ :

Summenregel: $\boxed{\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b}$

Faktorregel: $\boxed{\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a}$

Produktregel: $\boxed{\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b}$

<u>Quotientenregel</u> $\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{a}{b},\quad b_n\neq 0, b\neq 0}$

<u>Potenzregel</u>: $\boxed{\lim_{n\to\infty}a_n^k=\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right)^k, k \text{ unabhängig von } n!!}$

<u>Beweis der Summenregel</u>: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann ist auch $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Wegen der Konvergenz der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existieren $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}\ \ f\ddot{u}r\ n\geq N_1 und\ |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}\ \ f\ddot{u}r\ n\geq N_2$$

Dann gilt für alle $n \geq N := \max(N_1, N_2)$

$$\begin{aligned}|(a_n+b_n)-(a+b)| &= |(a_n-a)+(b_n-b)|\\ &\leq |a_n-a|+|b_n-b|\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

☺

3.2 <u>Beispiele:</u>

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{3^n}+\sqrt[n]{n}\right)=?$

<u>Lsg</u>.: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{3^n}+\sqrt[n]{n}\right)=5\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{0}+\underbrace{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}_{1}=1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n+4}{4n^4+3}=?$

$$\underline{Lsg.}: \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+2n+4}{4n^4+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4}(2n^2+2n+4)}{\frac{1}{n^4}(4n^4+3)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n^3}+\frac{4}{n^4}}{4+\frac{3}{n^4}} = \frac{0+0+0}{4+0} = 0$$

Merkregel:

> Methode zur Grenzwertbestimmung für Folgen $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$, wobei P und Q Polynome sind:
> Dividiere durch die höchste Potenz des Nenners.

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n+1}{4n^2+5} = ?$

$$\underline{Lsg.}: \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n+1}{4n^2+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{5}{n^2}} = \frac{3}{4}$$

Satz: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen reeller Zahlen mit $a_n \le b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$.

*Vorsicht! Wenn $a_n < b_n$ für alle $n$, dann ist nicht notwendig $lim_{n\to\infty} a_n < lim_{n\to\infty} b_n$, wie man an dem Beispiel der Folgen $a_n = 0$ und $b_n = \frac{1}{n}$ $(n \ge 1)$ sieht, die beide gegen 0 konvergieren.*

Beweis: O.B.d.A. Sei $a_n = 0$ für fast alle $n$ (falls nicht, betrachte $0 \le b_n - a_n$).

Widerspruchsbeweis.
Wäre $lim_{n\to\infty} b_n = -\epsilon$ mit $\epsilon > 0$, dann folgt mit Hilfe der Definiton der Folgenkonvergenz, dass für $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$|b_n - (-\epsilon)| < \epsilon \ \ f\ddot{u}r\ alle\ n \geq N(\epsilon)$$
$$\Rightarrow b_n < 0 \ \ \text{Widerspruch zur Voraussetzung!}$$

### 3.3 Korollar: Sandwich-Satz

Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$ für $n \geq n_0$ , so gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a$$

Beispiel: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n!}\right) = ?$

Lsg.:

$$\begin{array}{ccccc} 0 \leq & \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n!}} & \leq & \frac{1}{n} & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & n \to \infty \\ 0 & 0 & & 0 & \end{array}$$

## 4. Cauchy-Konvergenz

Bisher hatten wir bei der der Untersuchung der Konvergenz einer Zahlenfolge stets die Kenntnis des Grenzwertes voraussetzen müssen. Die Konvergenz kann jedoch auch sichergestellt werden ohne Kenntnis des Grenzwertes. Dies führt zu dem Begriff der Cauchy-Konvergenz.

### 4.1 Definition (Cauchy-Konvergenz)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-konvergent, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ mit\ |a_n - a_m| < \varepsilon$$
$$\forall n > m \geq n_0$$

Grob gesprochen kann man also sagen:

Eine Folge ist eine Cauchy-Folge, wenn die Folgenglieder untereinander beliebig wenig abweichen, falls nur der Index genügend hoch ist.

Bei konvergenten Folgen ist das der Fall, wie der nächste Satz zeigt.

<u>Beispiel</u>: Die Folge $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ ist Cauchy-konvergent.

<u>Beweis</u>: Sei $\varepsilon > 0\ und\ n > m$. Es gilt

$$|a_n - a_m| = \left|1 - \frac{1}{n} - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\right| = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} < \varepsilon$$

$für\ alle\ \ n > m \geq n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$.

4.2 <u>Satz</u>

Folgende Aussagen in $\mathbb{R}$ sind äquivalent:

(1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(2) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-konvergent.

<u>Beweis</u> von (1) $\Rightarrow$ (2)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\ \ \forall n \geq n_0$.

Es folgt für alle $n, m \geq n_0$

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| <$$

☺

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(2) $\Longrightarrow$ (1) ohne Beweis.

Wir kommen jetzt zu dem für die Theorie äußerst wichtigen *Satz von Bolzano-Weierstraß.*

4.3 Satz (Bolzano-Weierstraß): Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis:

a) Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bechränkt ist, gibt es Zahlen $A, B \in \mathbb{R}$ mit $A \leq a_n \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir betrachten das Intervall $[A, B] \coloneqq \{x \in \mathbb{R}: A \leq x \leq B\}$ und konstruieren durch vollständige Induktion eine Folge von Intervallen $[A_k, B_k], k \in \mathbb{N}$, mit folgenden Eigenschaften:

i) In $[A_k, B_k]$ liegen unendlich viele Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

ii) $[A_k, B_k] \subset [A_{k-1}, B_{k-1}]$

iii) $B_k - A_k = 2^{-k}(B - A)$

Induktionsanfang. Wir setzen $[A_0, B_0] \coloneqq [A, B]$.

Induktionsschritt. Sei das Intervall $[A_k, B_k]$ mit den Eigenschaften i) bis iii) bereits konstruiert. Sei $M \coloneqq \frac{A_k+B_k}{2}$ die Mitte des Intervalls. Da in $[A_k, B_k]$ unendlich viele Glieder der Folge liegen, müssen in mindestens einem der Intervalle $[A_k, M]$ und $[M, B_k]$ unendlich viele Glieder der Folge liegen. Wir setzen

$$[A_{k+1}, B_{k+1}] \coloneqq \begin{Bmatrix} [A_k, M] \;\; falls\ in\ [A_k, M]\ unendlich\ viele\ Folgenglieder\ liegen \\ [M, B_k] \;\; sonst \end{Bmatrix}$$

Offensichtlich hat $[A_{k+1}, B_{k+1}]$ die Eigenschaften i) bis iii).

b) Wir definieren nun induktiv eine Teilfolge $\left(a_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \in [A_k, B_k]$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang. Wir setzen $a_{n_0} := a_0$.

Induktionsschritt. Da in dem Intervall $[A_{k+1}, B_{k+1}]$ unendlich viele Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liegen, kann man ein $a_{n_{k+1}} \in [A_{k+1}, B_{k+1}]$ auswählen mit $n_{k+1} > n_k$.

c) Wir zeigen nun, dass die Teilfolge $\left(a_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dazu genügt es zu zeigen, dass sie eine Cauchy-Folge ist.

Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben und $N$ so groß gewählt, dass $2^{-N}(B-A) < \epsilon$.

Dann gilt für alle $k, j \geq N$:

$a_{n_k} \in [A_k, B_k] \subset [A_N, B_N]$ und $a_{n_j} \in [A_j, B_j] \subset [A_N, B_N]$.

Also ist

$$\left|a_{n_k} - a_{n_j}\right| \leq (Länge\ des\ Intervalls\ [A_N, B_N] = 2^{-N}(B-A) < \epsilon$$

☺

# 5. Die Eulersche Zahl

## 5.1 Satz

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

konvergiert.

Beweisskizze: Es gilt

$$\left.\begin{cases}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} & \text{monton steigend}\\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} & \text{monton fallend}\end{cases}\right\}\ \text{(ohne Beweis)}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \ : 2{,}2.25, 2.37, 2.441, \ldots$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \ : \ 4, 3.375, 3.16, 3.052, \ldots$$

$$0<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} <_{da\,\left(1+\frac{1}{n}\right)>1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq_{fallend} \left(1+\frac{1}{1}\right)^{2}=4$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \ \text{monoton steigend und beschränkt} \overset{2.6}{\Rightarrow}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \ \text{konvergent.}$$

☺

## 5.2 Die Eulersche Zahl e

Der Limes

$$\boxed{e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = 2.7182818\ldots}$$

heißt Eulersche Zahl.

Die Eulersche Zahl spielt ein wichtige Rolle bei Wachstums- und Zerfallsprozessen.
Hierzu ein Beispiel aus der Finanzmathematik:

## 5.3 Anwendungsbeispiel

Endbetrag bei Zinszuschlag am Ende eines Jahres:

$$\boxed{K = K_0(1+p)}$$

$K_0$ = Grundkapital

p = Zins pro Jahr

Bsp.: Einfachheitshalber $K_0$=1, p = 100%

Endbetrag bei Zinszuschlag

- jährlich: $K_1 = 1\cdot(1+1) = (1+1)^1 = 2$

- ½ j. : $K_2 = 1 \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{2}\right)}_{K_0 nach \frac{1}{2} J.} \left(1+\frac{1}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$
- ¼ j.: $K_4 = 1 \cdot \left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right) = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 =$ $2.4414062$
- monatlich: $K_{12} = \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 2.6130353$
- täglich: $K_{365} = \left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = 2.7145675 \approx e$

Allgemein gilt bei stetiger Verzinsung mit Jahreszinssatz $p \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n = e^p$$

Kapital nach t Jahren: $\boxed{K(t) = K_0 \cdot e^{pt}}$

# 6. Konvergenz von unendlichen Reihen

## 6.1 Definitionen

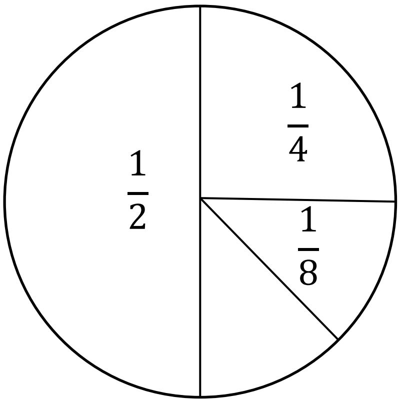
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$ heißt unendliche Reihe.

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$ heißt (n-te) *Teilsumme (Partialsumme)*

## 6.2 Einführendes Beispiel zur Konvergenz

Eine Torte wird stückweise halbiert. Die Summe aller Teilstücke ergibt dann gerade 1.




$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1$$

## 6.3 Definition (Konvergenz einer Reihe)

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt konvergent mit dem Summenwert S, wenn die Folge der Teilsummen $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ gegen S konvergiert; d.h.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S \iff \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k}_{S_n} = S}$$

6.4 Beispiel

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)\cdot k} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots = ?$$

Lsg.: Ansatz der Partialbrüche:

$$\frac{1}{(k-1)\cdot k} = \frac{A}{(k-1)} + \frac{B}{k} = \frac{Ak + B(k-1)}{(k-1)\cdot k} = \frac{Ak + Bk - B}{(k-1)\cdot k}$$

$$= \frac{(A+B)\cdot k - B}{(k-1)\cdot k} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} A + B = 0 \\ B = -1 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{matrix} A = 1 \\ B = -1 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \frac{1}{(k-1)\cdot k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)\cdot k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \Longrightarrow$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)\cdot k} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

6.5 Bemerkungen:

(1) Summen wie

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)\cdot k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

deren Terme sich gegenseitig auslöschen, nennt man Teleskopsummen.

(2) Die Konvergenz einer unendlichen Reihe kann meistens einfach mit Hilfe von Konvergenzkriterien nachgewiesen werden (vgl. nächsten Abschnitt).

Der Summenwert einer unendlichen Reihe kann meistens nur über Umwegen (z.B. über Potenzreihe (nächstes Kapitel) oder Fourierreihen (Analysis 2)) berechnet werden.

Bsp. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Herleitung über Fourierreihen)

Die Glieder einer konvergenten Reihe bilden stets eine Nullfolge.

## 6.6 Satz

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

Folgerung:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent}}$$

Beweis:

Sei $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \xrightarrow{n\to\infty} S - S = 0$$

☺

## 6.7 Geometrische Reihe

Für die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots$$

gilt:

(1) $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ <u>konvergiert</u> $f$ür $|q| < 1$ $mit$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}}$$

(2) $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ <u>divergiert</u> $f$ür $|q| \geq 1$.

<u>Beweis</u>: (1) Sei $|q| < 1$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^k \stackrel{Kap.1,5.4}{\triangleq} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-q}$$

(2) Sei $|q| \geq 1$.

$$\lim_{n\to\infty} q^n \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k \text{ divergent}$$

☺

<u>Beispiel</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = ?$

<u>Lsg</u>.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^0} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{1}{2}$$

## 6.8 <u>Harmonische Reihe</u>

Die <u>harmonische</u> Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

ist <u>divergent</u> !!!

<u>Beweis</u>:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \frac{1}{9} + \cdots >$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \Rightarrow$$

$<S_n>$ unbeschränkt $\Rightarrow S_n$ divergent ☺

<u>Bemerkung</u>:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \quad \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow \end{array} \quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

<u>Bsp</u>.:

Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent, aber $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$.

## 6.9 <u>Rechenregeln für Reihen</u>

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\,, \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (c a_k + d b_k) \text{ konvergent } \forall c, d \in \mathbb{R}$$

Es gilt dann

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} (c a_k + d b_k) = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k + d \sum_{k=1}^{\infty} b_k}$$

<u>Beweis</u>: folgt direkt aus Rechenregeln für Folgen.

Bsp.:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5}{3^k}+\frac{3}{2^k}\right)=5\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k+3\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{5}{1-\frac{1}{3}}+\frac{3}{1-\frac{1}{2}}=\frac{15}{2}+6$$
$$=\frac{27}{2}$$

## 6.10 Absolute Konvergenz

Definition: Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Satz:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}}$$

Beweis: zu zeigen: Die Folge $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ist Cauchy-konvergent.

Sei $\varepsilon > 0$. $T_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ ist Cauchy-konvergent $\Longrightarrow$

es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k| - \sum_{k=1}^{m}|a_k|\right) = \sum_{k=m+1}^{n}|a_k| < \varepsilon \;\; \forall n > m \geq n_0 \Longrightarrow$

$$|S_n - S_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon \;\; \forall n > m \geq n_0 \;\; \Longrightarrow$$

$S_n$ ist Cauchy-konvergent. ☺

Bemerkung:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \; konvergent \;\; \not\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_n \;\; absolut \; konvergent}$$

<u>Beispiel</u>: Die alternierende harmonische Reihe $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$ ist konvergent (Leibniz-Kriterium , vgl. Abschnitt 8.), aber die harmonische Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$ ist divergent.

# 7. Konvergenzkriterien für Reihen

## 7.1 Majoranten- und Minorantenkriterium

Sei $0 \leq a_k \leq b_k \ \forall k \in \mathbb{N}$ fast immer.

(1) <u>Majorantenkriterium</u>

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} b_k \ \mathit{konvergent}\ (\mathit{konvergente\ Majorante}) \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \mathit{konvergent}}$$

(2) <u>Minorantenkriterium</u>

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \mathit{divergent}\ (\mathit{divergente\ Minorante}) \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \ \mathit{divergent}}$$

<u>Beweis von</u> (1).

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k = T \Longrightarrow$$

$$S_n \text{beschränkt und monoton} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent.}$$

(2) $Ann.: \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent $\overset{(1)}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. ↯

Widerspruch zur Voraussetzung

Beispiele:

(1) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)}$ konvergente Majorante (1.4) $\Longrightarrow$

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ konvergent.

(2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ divergente Minorante $\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$ divergent.

Allgemein gilt:

## 7.2 Satz

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^c}\begin{Bmatrix}\text{konvergiert}\\ \text{divergiert}\end{Bmatrix} \; für \; \begin{Bmatrix}c>1\\ c\leq 1\end{Bmatrix}}$$

Bsp.: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}+k}$ konvergent?

Lsg.: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}+k} \geq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+k} = 1/2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ divergente Minorante $\Longrightarrow$

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}+k}$ divergent.

## 7.3 Quotienten- und Wurzelkriterium

Quotientenkrierium

$$\boxed{r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\begin{Bmatrix}<1\\ >1\end{Bmatrix} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n\begin{Bmatrix}\text{konvergiert absolut}\\ \text{divergiert}\end{Bmatrix}}$$

Für r = 1 keine Aussage möglich.

Wurzelkriterium

$$\boxed{r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \begin{Bmatrix} < 1 \\ > 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{Bmatrix} \text{konvergiert absolut} \\ \text{divergiert} \end{Bmatrix}}$$

Für r = 1 keine Aussage möglich.

Beweis des Wurzelkriteriums:

(a) Sei $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$

$Es$ existiert ein $c$ und $n_0$mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1 \; \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow |a_n| \leq c^n \quad \forall n \geq n_0$

Die geometrische Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} c^k$ konvergiert (c<1) $\Rightarrow$

$\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_n| \; bzw. \sum_{k=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert (Majorantenkriterium).

(b) Sei $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$

$\sqrt[n]{|a_n|} \geq c > 1 \; \forall n \geq n_0$ für ein c und $n_0$.

$\Rightarrow |a_n| \geq c^n > 1 \; \forall n \geq n_0$ für ein c und $n_0$.

$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge

$\Rightarrow$ Reihe ist divergent ☺

Beispiele:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n^2}$ konvergent?

$$\underline{Lsg.}: r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{Konvergenz}$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergent?

$$\underline{Lsg.}: r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Longrightarrow \text{Konvergenz}$$

<u>Bemerkung</u>: Für r = 1 versagen Wurzel- und Quotientenkriterium.

$\underline{\text{Bsp.}}: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c}$

$$\underline{r} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^c}} = \left(\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}\right)^c \overset{2.4}{\triangleq} \underline{1}$$

$$\underline{r} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^c}{(n+1)^c} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^c =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^c = \underline{1}$$

$$\text{Es gilt nach 7.2}: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c} \begin{Bmatrix} \text{konvergiert} \\ \text{divergiert} \end{Bmatrix} \textit{für} \begin{Bmatrix} c > 1 \\ c \leq 1 \end{Bmatrix}$$

7.4 <u>Das Cauchy-Kondensationskriterium</u>

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge mit $a_n \geq 0$. Dann gilt die folgenden Äquivalenzaussage:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konvergent} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} \textit{ konvergent}}$$

Beweis:

„⇒“ Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Dann gilt

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \cdots$$

$$\geq 0 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}(2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

Damit ist $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ durch $2a$ beschränkt und die Folge der Partialsummen ist monoton wachsend, da n.V. $a_n \geq 0$. Da jede beschränkte und monotone Folge konvergent ist, folgt also, dass die Folge der Partialsummen konvergiert.

„⇐“

Sei nun $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ konvergent mit dem Wert $b$. Dann gilt

$$b = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots$$

$$\geq a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} a_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_1$$

Durch die Beschränktheit und Monotonie folgt analog zu oben die Konvergenz.

☺

7.5 Beispiel

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$$

divergiert, da

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n \cdot \ln 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{n} \cdot \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergiert (Cauchy-Kondensationsprinzip).

## 8. Alternierende Reihen

8.1 Definition

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

alternierende Reihe.

Bsp.: Alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

8.2 Konvergenzkriterium von Leibniz für alternierende Reihen

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge mit $a_n > 0$. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

konvergent.

Beweis:

Wir setzen $S_k \coloneqq \sum_{n=0}^{k} (-1)^n a_n$.

Da $S_{2k+2} - S_{2k} = -a_{2k+1} + a_{2k+2} \leq 0$ gilt

$$S_0 \geq S_2 \geq S_4 \geq \cdots \geq S_{2k+2} \geq \cdots$$

Entsprechend ist wegen $S_{2k+3} - S_{2k+1} = a_{2k+2} - a_{2k+3} \geq 0$

$$S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq \cdots \leq S_{2k+1} \leq S_{2k+3} \leq \cdots$$

Außerdem gilt wegen $S_{2k+1} - S_{2k} = -a_{2k+1} \leq 0$

$$S_{2k+1} \leq S_{2k} \; für \; alle \; k \in \mathbb{N}$$

Die Folge $(S_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist also monoton fallend und beschränkt, da $S_{2k} \geq S_1$ für alle $k$.

Da jede monotone und beschränkte Folge konvergiert, existiert daher

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k} =: S$$

Analog ist $(S_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt, also existiert

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} =: S'$$

Wir zeigen nun, dass $S = S'$ und dass die gesamte Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$gegen $S$ konvergiert.

$$S - S' = \lim_{k\to\infty}(S_{2k} - S_{2k+1}) = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0$$

Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|S_{2k} - S| < \epsilon \quad für \; alle \; k \geq N_1 \; und \; |S_{2k+1} - S| < \epsilon \quad für \; alle \; k \geq N_2$$

Wir setzen $N := \max(2N_1, 2N_2 + 1)$. Dann gilt

$$|S_n - S| < \epsilon \quad für \; alle \; n \geq N.$$

☺

8.3 <u>Beispiel:</u>

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ konvergent?

<u>Lsg.</u>: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monotone Nullfolge mit $\frac{1}{n} > 0 \Longrightarrow$ konvergent

<u>Bemerkungen</u>:

(1) Beachte: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ divergiert

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ konvergiert

(2) Es gilt: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2$ (Herleitung über Potenzreihen (Kap. 3))

# Kapitel 3: Elementare Funktionen und Potenzreihen

## 1. Klassifizierung der elementaren Funktionen

### 1.1 Übersicht

| Elementare Funktionen | Beispiel |
|---|---|
| Polynome sind die einfachsten Funktionen | $3x^2 + 3x$ |
| Rationale Funktionen Quotienten von Polynomen | $\frac{2x+3}{x^2+1}$ |
| Potenzfunktionen | $x^{\frac{5}{2}}$ |
| Exponentialfunktionen | $e^x$ |
| Logarithmische Funktionen Umkehrfunktionen der Exponentialf. | $\ln x$ |
| Trigonometrische Funktionen | sin x |
| Arcusfunktionen Umkehrfunktionen der trigonom. F. | arccos x |
| Hyperbelfunktionen | sinhx (sinus hyperbolicus) |
| Areafunktionen sind die einfachsten Funktionen | arsinh x (area sinus hyperbolicus) |

### 1.2 Bemerkung

Anwendungen : Funktionen, die sich zusammensetzen aus elementaren Funktionen, z.B.

$$\frac{x + \sin x}{e^x} + x^2$$

### 1.3 Reelle und komplexe Funktionen

Funktionen in diesem Kapitel:

Reelle Funktionen

$$f: D \to \mathbb{R}, x \to f(x) = y \ (D \subset \mathbb{R}) \text{ kurz } y = f(x)$$

Komplexe Funktionen

$f: D \to \mathbb{C}, x \to f(x) = z (D \subset \mathbb{R})$ kurz $z = f(x)$

Warum komplexe Funktionen?

Begründung: Zusammenhang zwischen vielen elementaren Funktionen nur im Komplexen möglich.

# 2. Komplexe Zahlen

## 2.1 Definition (komplexe Zahlen)

Imaginäre Einheit i: $\boxed{i^2 = -1}$ Lösung von $x^2 + 1 = 0$

Imaginäre Zahl: $\boxed{iy}$, $y \in \mathbb{R}$

komplexe Zahl: $\boxed{z = x + iy}$

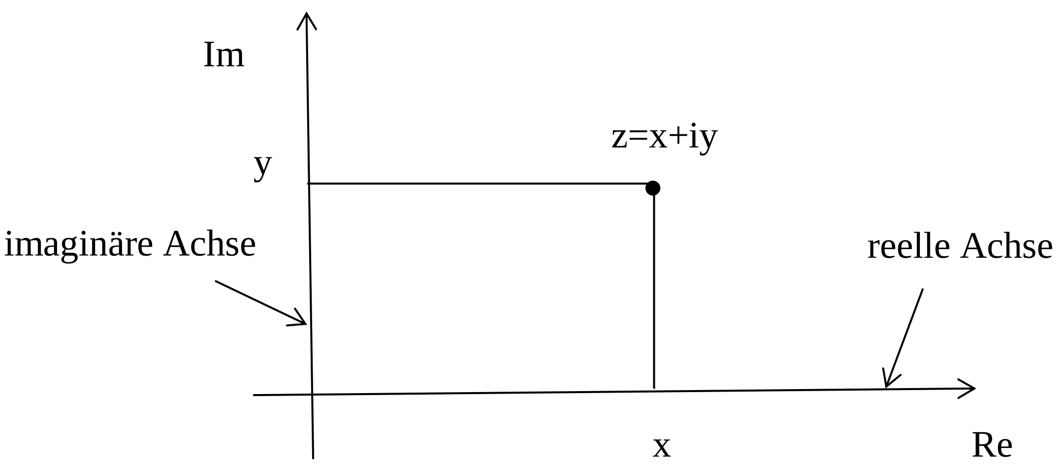
x Realteil von z: $\boxed{x = Re\, z} \in \mathbb{R}$

y Imaginärteil von z: $\boxed{y = Im\, z} \in \mathbb{R}$

$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$

Gaußsche Zahlenebene

komplexe Zahlen können geometrisch in der sogenannten Gaußschen Zahlenebene dargestellt werden

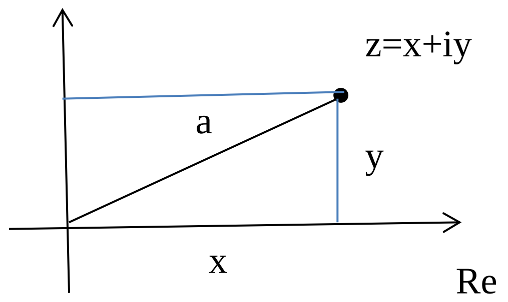


## 2.2 Betrag einer komplexen Zahl

Der Betrag $|z|$von $z = x + iy$ ist definiert durch

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Geometrische Deutung



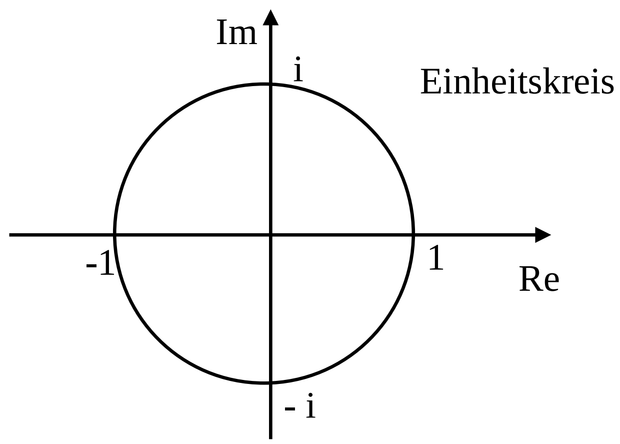

$a = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

$|z|$ = Abstand von 0 bis z

Beispiele:

(1) $|3 - i4| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

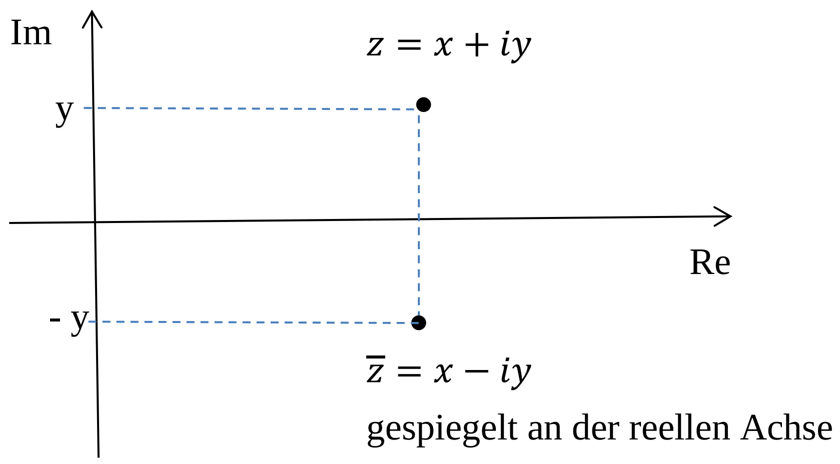
(2) $\{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\} =?$



## 2.3 Konjugiert komplexe Zahl

Die zu z = x+iy konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ ist definiert durch

$$\boxed{\overline{z} = x - iy}$$




## 2.4 Addition und Subtraktion von komplexen Zahlen

Seien $z_1 = x_1 + iy_1$ *und* $z_2 = x_2 + iy_2$

Summe : $\boxed{z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)}$

Realteil und Imaginärteil getrennt addieren bzw. subtrahieren

Differenz : $\boxed{z_1 - z_2 := (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)}$

Bsp.: $(6 - 2i) + (2 + 10i) = 8 + 8i$

## 2.5 Multiplikation von komplexen Zahlen

Seien $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$. Formales Ausmultiplizieren ergibt

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) =$$

$$= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + \underbrace{i^2}_{-1} y_1y_2$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Multiplikation: $\boxed{z_1 \cdot z_2 := (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)}$

Bsp.: $(2-4i)(-3+5i) = -6 + 10i + 12i - 20i^2 = 14 + 22i$

## 2.6 Potenzen von i

$i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = i \cdot i^2 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i \cdot i^4 = i, \ldots$

$i^{4n} = 1, n \in \mathbb{C}$

$i^{38} = (i^2)^{19} = (-1)^{19} = -1$

## 2.7 Rechenregeln für konjugiert komplexe Zahlen

Seien $z = x + iy, z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_1 + iy_2$. Es gilt

(1) $\boxed{z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2}$

(2) $\boxed{\overline{z^n} = \overline{z}^n\ für\ n \in \mathbb{N}}$

(3) $\boxed{\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}}$

(4) $\boxed{\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}}$

Beweis von (1):

$z \cdot \overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$

## 2.8 Kehrwert von z

Kehrwert $z^*$von $z \neq 0$ ist definiert durch: $z \cdot z^* = 1\ , z^* = ?$

Lsg.: $z \cdot z^* = 1 \Longrightarrow_{\cdot\overline{z}} \underbrace{\overline{z} \cdot z}_{x^2+y^2 \neq 0} \cdot z^* = \overline{z} \Longrightarrow z^* = \frac{1}{\underbrace{\overline{z} \cdot z}_{\in\mathbb{R}}} \cdot \overline{z}$

Bezeichnung: $\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{z \cdot \overline{z}} \cdot \overline{z} = \frac{1}{x^2+y^2}(x - iy)}$

Bsp.: $\frac{1}{1+i} = \frac{1}{2}(1-i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

## 2.9 Division von komplexen Zahlen

Seien $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$

Division: $\boxed{\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2 \cdot \overline{z_2}} \cdot \overline{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}}$

Bsp.:

$$\frac{4-8i}{3+4i} = \frac{4-8i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{12-16i-24i+32i^2}{9+16} =$$

$$= \frac{-20-40i}{25} = -\frac{20}{25} - \frac{40}{25}i = -\frac{4}{5} - \frac{8}{5}i$$

## 2.10 Konvergenz einer komplexen Folge

Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen $c_n = a_n + ib_n$.

$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent, wenn die reellen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Der Grenzwert c ist dann definiert durch

$$\boxed{c = \lim_{n\to\infty} c_n := \lim_{n\to\infty} a_n + i \lim_{n\to\infty} b_n}$$

Bsp:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n} + i\,\frac{2n^2+1}{3n^2-n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} + i\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n}} = 1 + \frac{2}{3}i$$

## 2.11 Konvergenz einer komplexen Reihe

Eine komplexe Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, $c_n = a_n + ib_n$, heißt konvergent, wenn die reellen Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ $und$ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergieren. Der Summenwert ist dann definiert durch

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n := \sum_{n=0}^{\infty} a_n + i\sum_{n=0}^{\infty} b_n}$$

Bsp.:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}-\frac{i}{3^n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n}-i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{5}}-i\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{5}{4}-i\frac{3}{2}$$

## 2.12 Absolute Konvergenz einer komplexen Reihe

Eine komplexe Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ heißt absolut konvergent, wenn die reelle Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ konvergiert.

Bem.: Es gilt:

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent $\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent

## 2.13 Realteil und Imaginärteil einer komplexwertigen Funktion

Sei $f: D \to \mathbb{C}, D \subset \mathbb{R}$ eine komplexwertige Funktion.

Dann besitzt f die Darstellung

$$\boxed{f(x) = u(x) + iv(x)}$$

wobei $u: D \to \mathbb{R}$ und $v: D \to \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen sind.

Realteil von f : $Re(f) = u$

Imaginärteil von f : $Im(f) = v$

jedem festen x wird eine komplexe Zahl zugeordnet, die den Realteil u(x) und Imaginärteil v(x) besitzt. Lässt man x laufen, so erhält man die Funktionen u und v

Bsp.:

$$f(x)=\frac{x^2}{1+ix}=\frac{x^2}{(1+ix)}\frac{(1-ix)}{(1-ix)}=\frac{x^2-ix^3}{1+x^2}=\underbrace{\frac{x^2}{1+x^2}}_{u(x)}+i\underbrace{\frac{-x^3}{1+x^2}}_{v(x)}$$

# 3. Eigenschaften reeller Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$

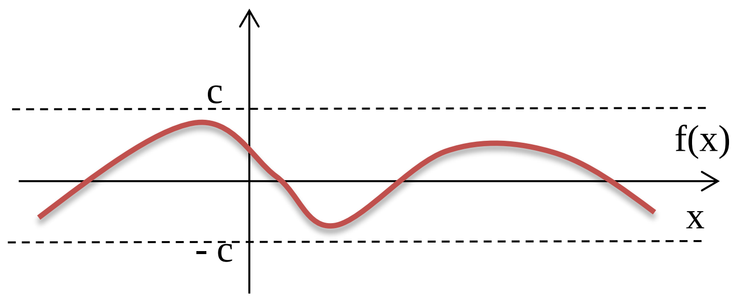
## 3.1 Beschränkte Funktionen

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt in $D \subset \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{c}\underline{\text{nach oben beschränkt}}\\ \underline{\text{nach unten beschränkt}}\\ \underline{\text{beschränkt}}\end{array}\right\}, \text{ wenn ein } c \in \mathbb{R} \text{ existiert mit}$$

$$\left\{\begin{array}{c} f(x) \le c \\ f(x) \ge c \\ |f(x)| \le c \end{array}\right\} \text{ für alle } x \in D.$$

Bsp.: $f(x) = x^2$ nach unten beschränkt, $f(x) = x^3$ unbeschränkt



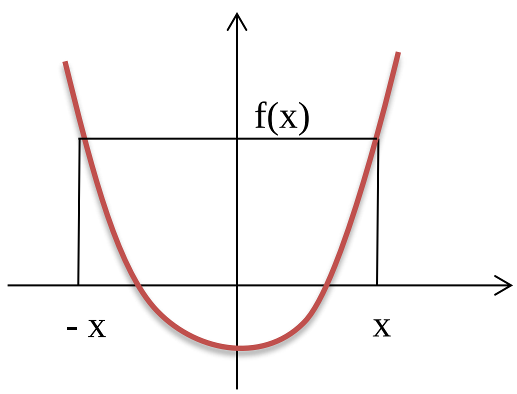

## 3.2 Symmetrische Funktionen

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heiß in D

gerade, wenn $\boxed{f(-x) = f(x)}$ für alle $x \in D$

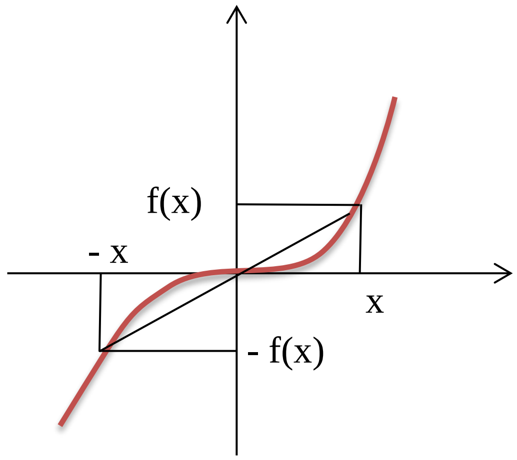
ungerade, wenn $\boxed{f(-x) = -f(x)}$ für alle $x \in D$

Graph einer geraden Funktion f(x)




achsensymmetrisch zur y-Achse

Graph einer ungeraden Funktion f(x)




punktsymmetrisch zu 0

Bsp.: (1) $f(x) = |x|$ gerade: $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$

$(2) f(x) = x|x|$ ungerade: $f(-x) = (-x)|-x| = -x|x| = -f(x)$

$(3) f(x) = |x-1|$ nicht symmetrisch: $f(1) = 0, f(-1) = 2$

## 3.3 Monotone Funktionen

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt in einem Intervall $I \subset D$

$$\left\{\begin{array}{c} \text{monoton steigend} \\ \text{streng monoton steigend} \\ \text{monoton fallend} \\ \text{streng monoton fallend} \end{array}\right\}, \text{wenn } aus\ x_1 < x_2\ folgt \left\{\begin{array}{c} f(x_1) \leq f(x_2) \\ f(x_1) < f(x_2) \\ f(x_1) \geq f(x_2) \\ f(x_1) > f(x_2) \end{array}\right\}$$

## 3.4 Injektivität von streng monotonen Funktionen

Satz: Jede streng monotone Funktion ist injektiv (umkehrbar).

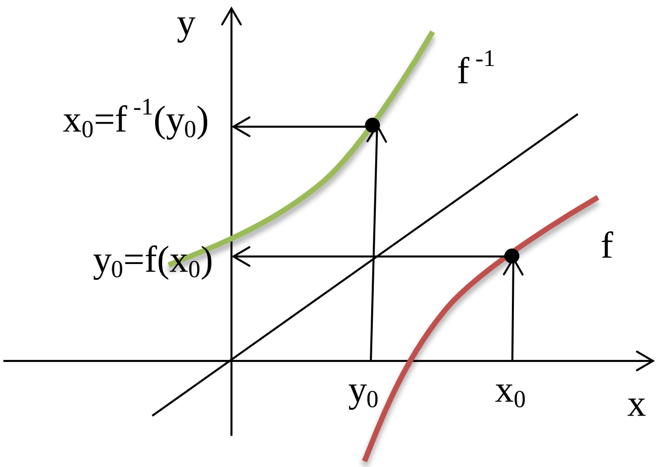
Beweis: Sei $f: D \to \mathbb{R}$ streng monoton und seien $x_1, x_2 \in D$. Sei o.E.

$x_1 < x_2$.

$f(x_1) < f(x_2) \big(\text{bzw.} f(x_1) > f(x_2)\big) \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ☺

## 3.5 Graph der Umkehrfunktion

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ umkehrbar in D.




Graph von $f^{-1}$ =

Spiegelbild von des Graphen von f an der Winkelhalbierenden y = x

# 4. Polynome

## 4.1 Definition (Polynom)

Eine Funktion

$$\boxed{p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0}$$

mit $a_k, x \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) heißt Polynom oder ganzrationale Funktion vom Grad n.

## 4.2 Beispiele von Polynomen

| p(x) = | Grad | Name |
|---|---|---|
| 5 | 0 | konstante Funktion |
| 5x – 3 | 1 | lineare Funktion |
| $-3x^2 + x + 2$ | 2 | quadratische Funktion |
| $x^2 - x^3$ | 3 | kubische Funktion |
| $x^n, \qquad n = 1,2,..$ | n | Potenzfunktion |
| $ix^{17} + (1+i)x$ | 17 | komplexes Polynom |
| $\frac{1}{x} + x^2$ | | kein Polynom<br>rationale Funktion |

Nullstellen von Polynomen spielen in der Mathematik und in vielen Anwendungen eine wichtige Rolle. Bis ins späte Mittelalter verstand man unter Algebra die Bestimmung von Polynom-Nullstellen.

## 4.3 Nullstellen von quadratischen Gleichungen

$\boxed{a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0}$ *quadratische Gleichung*

$\downarrow \qquad : a_2 \quad (a_2 \neq 0, \quad a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$

$\boxed{x^2 + px + q = 0}$ $\underline{\mathit{Normalform\ der\ quadratische\ Gleichung}}$

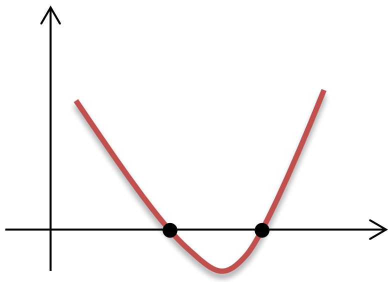
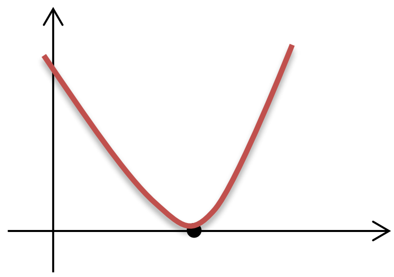
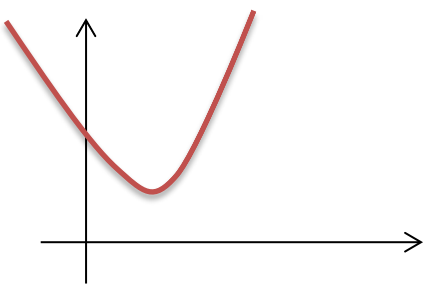
Lösungen von $x^2 + px + q = 0$

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}} \qquad \underline{p, q - Formel}$$

$D := \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ heißt Diskriminante

ohne Beweis (Herleitung mit quadratischer Ergänzung)

Bemerkung: Es können 3 Fälle auftreten

| Fall | Lösungen | Verlauf von $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ |
|---|---|---|
| D > 0 | 2 reelle Löungen |  |
| D = 0 | 1 reelle Lösung |  |
| D < 0 | komplexe Lösungen (keine Lösung in $\mathbb{R}$) |  |

## 4.4 Nullstellensatz für Polynome

Jedes nichtkonstante Polynom hat mindestens eine (komplexe) Nullstelle.

ohne Beweis (sehr aufwändig)

Beispiel: $p(x) = (x-1)^{17}$ Polynom vom Grad 17 mit einziger Nullstelle 1

## 4.5 Division mit Rest

Sei $p_n(x)$ ein Polynom vom Grad n und sei $x_0 \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$. Dann ist folgende Zerlegung möglich

$$\boxed{p_n(x) = \underbrace{p_{n-1}(x)}_{\text{reduziertes Polynom vom Grad n - 1}} \cdot (x - x_0) + r} \qquad \underline{\text{Division mit Rest}}\ r \in \mathbb{C}$$

Herleitung später mit Horner-Schema

Folgerungen

(1) Es gilt $p_n(x_0) = r$.

(2) Sei $x_0$ Nullstelle von $p_n(x)$ (existiert nach dem Nullstellensatz). Dann gilt $r = p_n(x_0) = 0$ und

$$\boxed{p_n(x) = p_{n-1}(x) \cdot (x - x_0)} \qquad \underline{\text{Abspaltung des Linearfaktors}}\ (x - x_0)$$

$p_{n-1}(x_1) = 0 = p_n(x_1)$

$x_0 = x_1$ möglich

$$p_n(x) = p_{n-2}(x) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_0)$$

$$\downarrow$$

$$\dots$$

Nach n-facher Abspaltung von Linearfaktoren ergibt sich

## 4.6 Faktorisierung eines Polynoms

Sind $x_1, \dots, x_m$ die verschiedenen Nullstellen von $p_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, so gilt

$\boxed{p_n(x) = a_n \cdot (x - x_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_m)^{k_m}}$ Faktorisierung von $p_n(x)$

Def.: $k_i$ heißt Vielfachheit von $x_i$.

Es gilt: $\underbrace{k_1 + \cdots + k_m}_{\text{Summe der Vielfachheiten}} = n$

Beispiele:

(1) $p_3(x) = (x-1)^2 \cdot (x-3)$

$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right\}$ Nullstelle mit Vielfachheit $\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}$

(2) Faktorisierung von $p_2(x) = 2x^2 + 7x - 22$ ?

Lsg.: Nullstellen: $x_1 = 2$, $x_2 = -5.5$ ($p, q-$Formel)

Faktorisierung: $p_2(x) = 2(x-2)(x+5.5)$

Aus dem Faktorisierungssatz ergibt sich

## 4.7 <u>Fundamentalsatz der Algebra</u>

Jedes nichtkonstante Polynom vom Grad n hat <u>genau</u> n Nullstellen unter Berücksichtigung der Vielfachheiten (d.h. jede Nullstelle $x_i$ wird $k_i$ – mal gezählt)

<u>Folgerung</u>

Hat ein Polynom p(x) vom Grad n mehr als n Nullstellen, so ist

$$p(x) \equiv 0$$

## 4.8 <u>Satz</u>

Sei $z \in \mathbb{C}, p$ ein Polynom vom Grad n mit <u>reellen</u> Koeffizienten. Gilt p(z)=0, dann ist auch

$$p(\overline{z}) = 0$$

<u>Beweis</u>: Nach den Rechenregeln 2.7 gilt

$$\begin{aligned} 0 = \overline{p(z)} &= \overline{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0} = \\ &= \overline{a_n}\,\overline{z^n} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_0} \\ &= a_n \overline{z^n} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 \\ &= a_n \overline{z}^n + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 \\ &= p(\overline{z}) \end{aligned}$$

☺

<u>Beispiel</u>:

$x^3 - 5x^2 + 8x - 6$ besitzt die Nullstellen 3 und i + 1. Wie lautet die dritte Nullstelle?

Lsg.: $\overline{i + 1} = 1 - i$

## 4.9 Horner-Schema

Einfachheitshalber betrachten wir hier nur zunächst ein Polynom 3. Grades. Sinngemäß lässt sich der Algorithmus leicht auf Polynome beliebigen Grades erweitern

Polynomdivision für $p_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Sei $x_0 \in \mathbb{C}$. Gesucht $p_2(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ und $r \in \mathbb{C}$ mit

$$p_3(x) = p_2(x)(x - x_0) + r$$

bzw.

$$\frac{p_3(x)}{x - x_0} = p_2(x) + \frac{r}{x - x_0}$$

$$\begin{aligned} a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 &= (\overset{?}{b_2}x^2 + \overset{?}{b_1}x + \overset{?}{b_0})(x - x_0) + \overset{?}{r} \\ &= b_2x^3 + b_1x^2 + b_0x - b_2x^2x_0 - b_1xx_0 - b_0x_0 + r \\ &= b_2x^3 + (b_1 - b_2x_0)x^2 + (b_0 - b_1x_0)x + (r - b_0x_0) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\left\{ \begin{aligned} a_3 &= b_2 \\ a_2 &= b_1 - b_2x_0 \\ a_1 &= b_0 - b_1x_0 \\ a_0 &= r - b_0x_0 \end{aligned} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{aligned} b_2 &= a_3 \\ b_1 &= a_2 + b_2x_0 \\ b_0 &= a_1 + b_1x_0 \\ b_{-1} \overset{\text{def}}{=} r &= a_0 + b_0x_0 \end{aligned} \right\}$$

Es gilt somit:

$$\boxed{b_2 = a_3, \qquad b_{i-1} = a_i + b_ix_0, \qquad i = 0,1,2}$$

<u>Hinweis</u>: $p_3(x_0) = p_2(x_0)(x_0 - x_0) + b_{-1} \Longrightarrow b_{-1} = p_3(x_0)$

Algorithmus Horner-Schema

Gegeben: $p_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ und $x_0$

Ergebnis: $p_n(x_0)$ und $\frac{p_n(x_0)}{x-x_0}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $a_n$ | $a_{n-1}$ | .... | $a_0$ |
| $x_0$ | 0 | $b_{n-1}x_0$ | ... | $b_0 x_0$ |
| | $b_{n-1} = a_n$ | $b_{n-2} = a_{n-1} + b_{n-1}x_0$ | ... | $b_{-1} = a_0 + b_0 x_0 = p_n(x_0)$ |

$$\frac{p_n(x)}{x-x_0} = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0 + \frac{b_{-1}}{x-x_0}$$

Beispiele

(1) $\dfrac{2x^3 - 3x^2 + x + 5}{x-2}$ =?

Lsg.:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | -3 | 1 | 5 |
| 2 | 0 | *2 4 | 2 | 6 |
| | 2 | 1 | 3 | $\boxed{11=p_3(2)}$ |

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + x + 5}{x-2} = 2x^2 + x + 3 + \frac{11}{x-2}$$

(2) $p_4(x) = 3x^4 - 3x^2 + x - 1,\ \ p_4(4)$ =?

Mit Hilfe des Horner Schemas können Funktionswerte von Polynomen sehr schnell berechnet werden.

Lsg. :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 0 | -3 | 1 | -1 |
| 4 | 0 | 12 | 48 | 180 | 724 |
| | 3 | 12 | 45 | 181 | $\boxed{723=p_4(4)}$ |

# 5. (Gebrochen) rationale Funktionen

## 5.1 Definition (rationale Funktion)

Seien $p_m(x)$ und $p_n(x)$Polynome vom Grad m bzw. n. Dann heißt

$$\boxed{f(x) = \frac{p_m(x)}{p_n(x)}}$$

(gebrochen) rationale Funktion.

Definitionsbereich von f(x): $\{x \in \mathbb{R}: p_n(x) \neq 0\}$

Die Funktion heißt

$$\left\{ \begin{matrix} \underline{echt} \\ \underline{unecht} \end{matrix} \right\} \underline{gebrochen}, \text{wenn} \left\{ \begin{matrix} m < n \\ m \geq n \end{matrix} \right\}$$

Bsp.:

$\frac{x^2+1}{x^3-1}$ echt gebrochen rational

$\frac{x^3+1}{x^3-1}$ unecht gebrochen rational

Folgende Bemerkung später wichtig bei der Integration von rationalen Funktionen

Bemerkung: Jedes unecht gebrochen rationale Funktion lässt sich darstellen als Summe eines Polynoms (ganzrationale Funktion) und einer echt gebrochen rationalen Funktion.

Beispiel: $f(x) = \frac{x^3 + 2x - 1}{x^2 + 1}$ unecht gebrochen

Polynomdivision:

$$f(x) = (x^3 + 2x - 1) : (x^2 + 1) = x + \frac{x - 1}{x^2 + 1}$$

$$\underline{-(x^3 + x)}$$

$$x - 1$$

# 6. Potenzreihen

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{k} a_n x^n}_{Polynom} \xrightarrow{k\to\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{Potenzreihe}$$

## 6.1 Definition (Potenzreihe):

Sei $x \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), a_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Dann heißt

$$\boxed{p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots}$$

Potenzreihe von x.

Definitionsbereich von p(x) = $\{x \in \mathbb{R}\colon \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert$\}$

Bemerkung

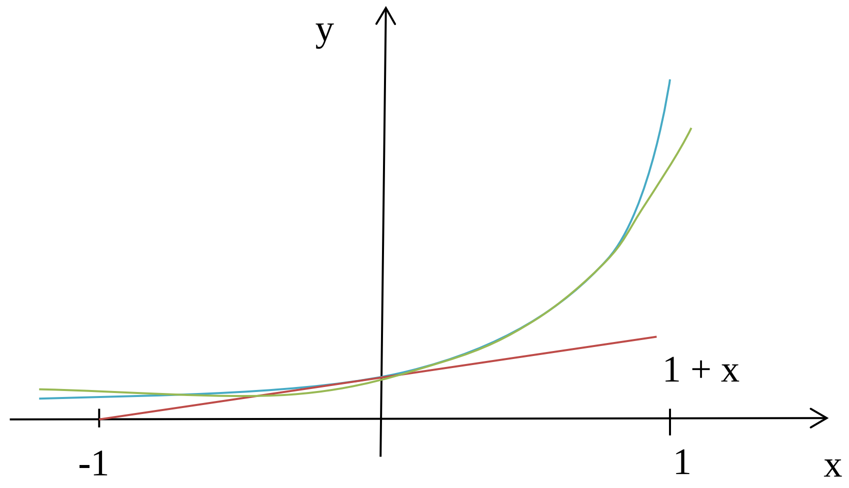
Ein Polynom $\sum_{n=0}^{k} a_n x^n$ ist eine Potenzreihe mit $a_n = 0 \; für \; n > k$.

## 6.2 Potenzreihe für $p(x) = \frac{1}{1-x}$

Es gilt nach Kap. 2, 6.7

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots = \frac{1}{1-x} \quad \text{(geometrische Reihe, x=q)}$$

für $|x| < 1$ $(a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = 1)$




Bem.: $\sum_{n=0}^{k} x^n \approx \frac{1}{1-x}$. Es gilt

(1) Je größer k, umso besser die Näherung.

Man kann hier bereits folgende wichtige Eigenschaft von Potenzreihen erkennen

(2) Je näher x bei 0, umso besser die Näherung.

6.3 Konvergenzgebiet einer Potenzreihe

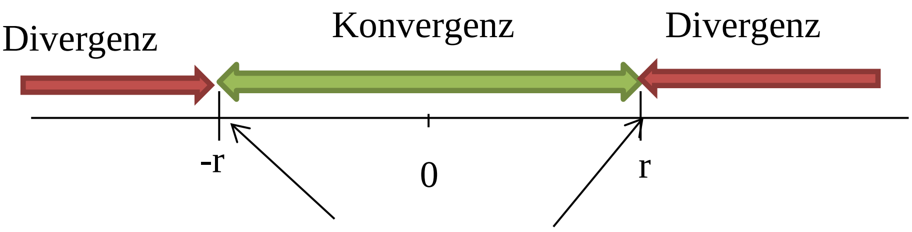
Zu jeder Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gibt es ein eindeutig bestimmtes r ($0 \leq r \leq \infty$) mit

(1) Im Intervall $I = (-r, r)$ konvergiert die Potenzreihe absolut.
(2) Außerhalb von $[-r, r]$ divergiert die Potenzreihe.

r heißt Konvergenzradius

Der Begriff Konvergenzradius findet erst bei komplexen Potenzreihen eine Erklärung. Dort steht anstelle eines Konvergenzintervalls eine Konvergenzkreisscheibe

$$\text{Sonderfall: } \left\{ \begin{array}{l} r = 0 \Longrightarrow I = \{0\} \\ r = \infty \Longrightarrow I = \mathbb{R} \end{array} \right\}$$




Randpunkte müssen gesondert untersucht werden

## 6.4 Bestimmung des Konvergenzradius

Der Konvergenzradius r von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist gegeben durch

(1) $\boxed{r = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}$ $\quad oder$

(2) $\boxed{r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$

Hinweis: Der Konvergenzradius hängt nur von den Koeffizienten $a_n$ ab und nicht von x !!!

Beweis von (1): Sei $r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} < \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|x| = \frac{|x|}{r} \begin{cases} < 1 \; für \; |x| < r \\ > 1 \; für \; |x| > r \end{cases}$$

Für $r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \infty$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|x| = 0 \cdot |x| = 0 < 1 \;\forall\, x \in \mathbb{R}$$

Nach dem Wurzelkriterium folgt

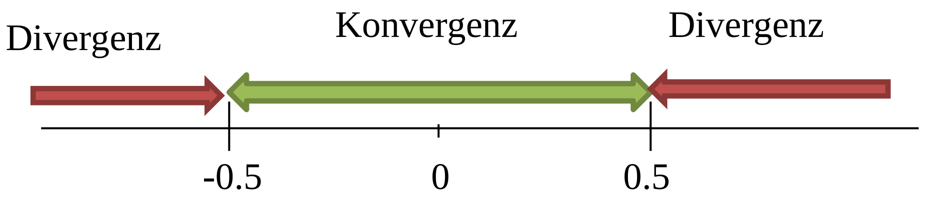
$$\begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergiert absolut für } |x| < r \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ divergiert für } |x| > r \end{cases}$$

## 6.5 Beispiel

Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 2^n x^n \;=\; ?$

Lsg.:

$$\underline{r} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2 2^n}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = \underline{\frac{1}{2}}$$




Betrachtung der Ränder: Übung!

## 6.6 Potenzreihe für $p(x) = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x}$ lässt sich nicht in eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ entwickeln.

Begr.: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 0 = a_0$ , $\frac{1}{x}$ in 0 unbeschränkt.

Es gilt aber

Damit lässt sich 1/x ebenfalls in eine Reihe entwickeln, allerdings verschoben um den Punkt 1. 1 nennt man dann Entwicklungspunkt dieser Reihe

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1-(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$$

für $|1-x| < 1$.

## 6.7 Entwicklungspunkt einer Potenzreihe

Eine Reihe der Form

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n}$$

heißt Potenzreihe mit <u>Entwickungspunkt</u> $x_0$.

6.8 <u>Satz</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \begin{Bmatrix} \text{konvergiert absolut} \\ \text{divergiert} \end{Bmatrix} \text{ für } \begin{Bmatrix} |x - x_0| < r \\ |x - x_0| > r \end{Bmatrix}$$

$$\text{wobei } r = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{bzw.} \, r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

d.h. der Konvergenzradius ist unabhängig vom Entwicklungspunkt $x_0$.

<u>Beweis</u> analog wie für $x_0=0$.

6.9 <u>Beispiel:</u>

Konvergenzgebiet von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x-1)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x+2)^n$ ?

<u>Lsg.</u>:

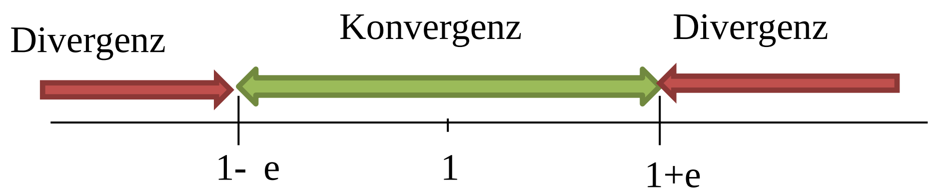
$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n!}{n^n} : \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \right| =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} \frac{(n+1)}{(n+1)}$$

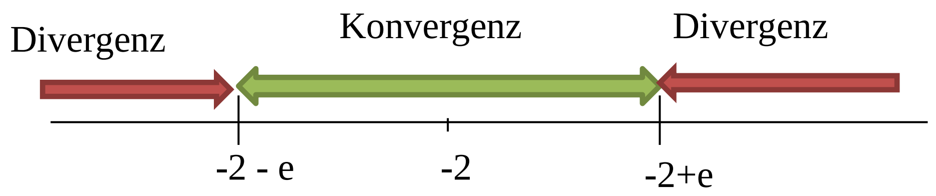
$$= \lim_{n \to \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

Konvergenzgebiet von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x-1)^n$

Entwicklungspunkt immer Mittelpunkt des Konvergenzintervalls




Konvergenzgebiet von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x+2)^n$



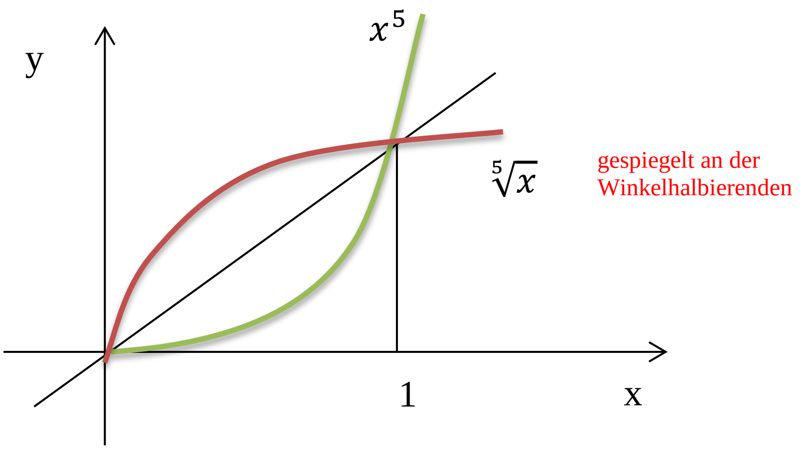
# 7. Potenz- und Exponentialfunktion

## 7.1 Wurzelfunktion

Die Funktion $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ ist in $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton wachsend und damit umkehrbar. Die Umkehrfunktion

$$\boxed{\sqrt[n]{x} := f^{-1}(x)}$$

von $x^n$ heißt Wurzelfunktion.




## 7.2 Potenz $a^q$ für $q \in \mathbb{Q}$

Definition: Sei a > 0

(1) $a^n := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n-faches\ Produkt}, \quad n \in \mathbb{N}$

(2) $a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}, \quad m, n \in \mathbb{N}$

(3) $a^{-\frac{m}{n}} := \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, \quad m, n \in \mathbb{N}$

Damit ist $a^q$ definiert für alle $q \in \mathbb{Q}$.

## 7.3 Potenzfunktion

Die Funktion

$$\boxed{x^q, q \in \mathbb{Q}}$$

heißt Potenzfunktion

Bsp.: $x^{3{,}27}$

Problem: Wie kann $a^r$ definiert werden für $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ? ? ?

z.B. $2^{\sqrt{2}}$ =? ($\sqrt{2}$ irrational )

Lösungsweg: Potenzreihen

Eine wichtige Rolle spielt hierbei die folgende Potenzreihe

## 7.4 Die Potenzreihe $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Die Potenzreihe

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut.

Beweis: $a_n = \frac{1}{n!}$.

$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$ ☺

## 7.5 Additionsformel für exp(x)

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\boxed{\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)}$$

zu zeigen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} \qquad \text{(ohne Beweis)}$$

## 7.6 Identität von exp(x) und $e^x$ auf $\mathbb{Q}$

Es gilt für alle $x \in \mathbb{Q}$

$$\boxed{\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}$$

Beweis:

(1) $\exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1 = e^0$

(2) $\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

zu zeigen: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{e}$ (ohne Beweis)

(3) $\exp(nx) = \exp(x)^n \;\; \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$

Bew.:

$$\exp(nx) = \exp\left(\underbrace{x + \cdots + x}_{n-mal}\right) = \underbrace{\exp(x) \cdot \ldots \cdot \exp(x)}_{n-mal} = \exp(x)^n$$

(4) $\exp(n) = e^n$ $, n \in \mathbb{N}$

Bew.: $\exp(n) = \exp(n \cdot 1) \overset{(3)}{\triangleq} \exp(1)^n \overset{(2)}{\triangleq} e^n$

(5) $\exp\left(\frac{1}{m}\right) = e^{\frac{1}{m}},\; m \in \mathbb{N}$

Bew.: $e = \exp(1) = \exp\left(m \cdot \frac{1}{m}\right) \overset{(3)}{\triangleq} \left(\exp\left(\frac{1}{m}\right)\right)^m \Rightarrow_{m-te\,Wurzel}$

$\exp\left(\frac{1}{m}\right) = \sqrt[m]{e} = e^{\frac{1}{m}}$

(6) $\exp\left(\frac{n}{m}\right) = e^{\frac{n}{m}}$ $, n, m \in \mathbb{N}$

Bew.: $\exp\left(\frac{n}{m}\right) = \exp\left(n \cdot \frac{1}{m}\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{m}\right)\right)^n = \left(e^{\frac{1}{m}}\right)^n = e^{\frac{n}{m}}$

(7) $\exp\left(-\frac{n}{m}\right) = e^{-\frac{n}{m}}$

Bew.:

$$1 = \exp\left(\frac{n}{m} - \frac{n}{m}\right) \overset{7.5}{\triangleq} \exp\left(\frac{n}{m}\right)$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{n}{m}\right) \overset{(6)}{\triangleq} e^{\frac{n}{m}} \cdot \exp\left(-\frac{n}{m}\right) \Longrightarrow_{\cdot e^{-\frac{n}{m}}}$$

$$e^{-\frac{n}{m}} = e^{-\frac{n}{m}} \cdot e^{\frac{n}{m}} \cdot \exp\left(-\frac{n}{m}\right) = \exp\left(-\frac{n}{m}\right)$$

## 7.7 Fortsetzung von $e^x$ auf $\mathbb{R}$

Die Funktion $e^x$ ist auf $\mathbb{R}$ definiert durch

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots}$$

## 7.8 Eigenschaften von $e^x$

Es gilt

(1) $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ $f\text{ür}\ alle\ x, y \in \mathbb{R}$

(2) $e^x > 1\ f\text{ür}\ x > 0$

(3) $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(4) $e^x$ ist streng monoton wachsend.

Beweis:

(1) folgt aus Satz 7.5 (Additionsformel für exp(x))

(2) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + . > 1$

(3) $e^x \neq 0$ wegen $e^x \cdot e^{-x} = 1$

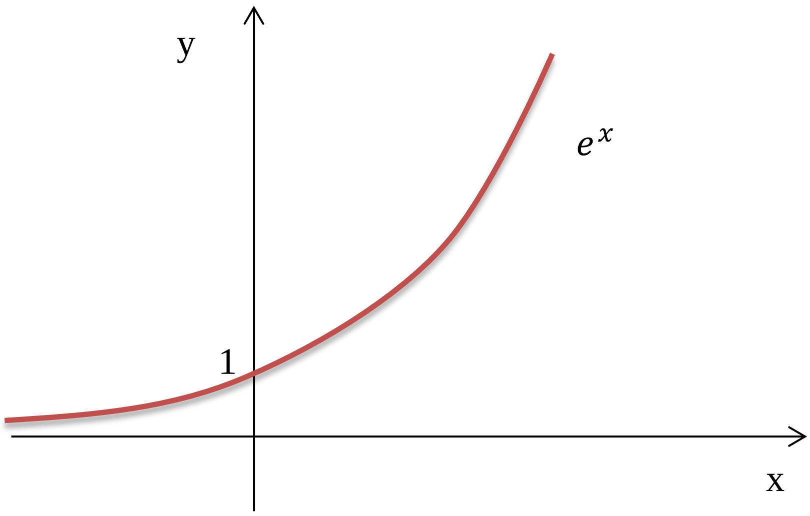
Ann.: $e^a < 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} a < 0\ und - a > 0 \Longrightarrow$

$$1 = e^{a-a} \overset{(1)}{\triangleq} \underbrace{e^a}_{<0} \cdot \underbrace{e^{-a}}_{>0} < 0 \qquad \lightning$$

(4) Sei $x_1 < x_2$

$$e^{x_2} = e^{(x_2-x_1)+x_1} = \underbrace{e^{x_2-x_1}}_{>1} \cdot e^{x_1} > e^{x_1}$$

<u>Graph von $e^x$</u>



# 8. Logarithmus und allgemeine Expontentialfunktion

## 8.1 Natürlicher Logarithmus

Die Funktion $f(x) = e^x$ ist in $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und damit umkehrbar. Die Umkehrfunktion

$$\boxed{\ln x := f^{-1}(x)}$$

von $e^x$ heißt natürlicher Logarithmus.

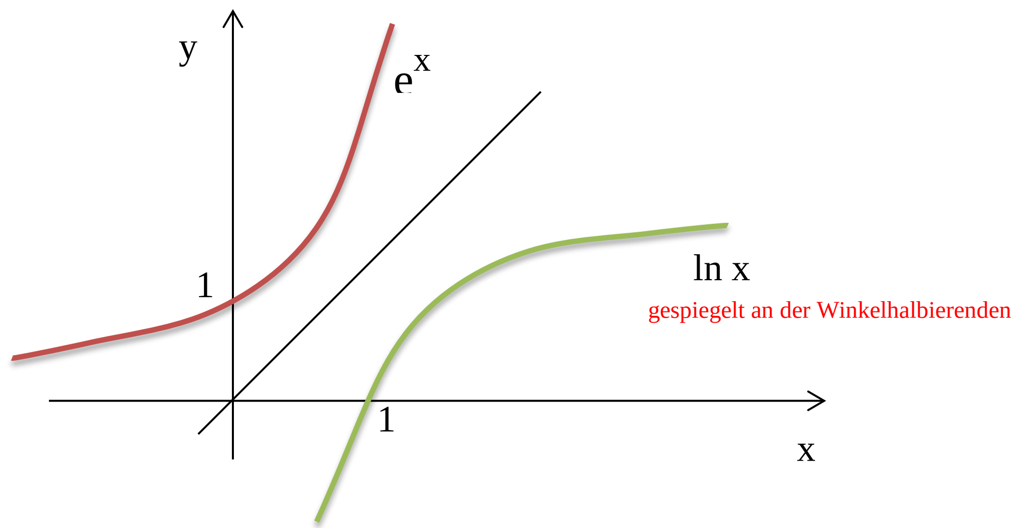
Definitionsbereich von ln x = Wertebereich von $e^x = \mathbb{R}^+$

Wertebereich von ln x = Definitionsbereich von $e^x = \mathbb{R}$

Nach Definition gilt: $\boxed{e^{\ln(y)} = y \text{ und } \ln(e^x) = x}$

Natürlicher Logarithmus und Exponentialfunktion heben sich gegenseitig auf

Graph von ln x




## 8.2 Rechenregeln für ln x

Für $a, b \in \mathbb{R}^+$ gilt

(1) $\boxed{\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)}$

(2) $\boxed{\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)}$

(3) $\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)}$

Beweis von (1)

$e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \cdot e^{\ln b} = a \cdot b = e^{\ln(a \cdot b)} \quad \xRightarrow{e^x \; injektiv}$

$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$

☺

Mit Hilfe des natürlichen Logarithmus ist man jetzt in der Lage, die Potenz einer positiven Zahl für irrationale Exponenten zu definieren

## 8.3 Potenz $a^r$ $für\ r \in \mathbb{R}$

Für $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a^n = \left(e^{\ln(a)}\right)^n = e^{n \cdot \ln(a)}$$

Allgemein kann man definieren:

Für $a > 0$ und $r \in \mathbb{R}$ ist die Potenz $a^r$ definiert durch

$$\boxed{a^r := e^{r \cdot \ln a}}$$

## 8.4 Potenzregeln

Für beliebige reelle Zahlen $a, b > 0$ und beliebige reelle Zahlen r, s gilt

(1) $\boxed{a^r \cdot a^s = a^{r+s}}$

(2) $\boxed{(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r}$

(3) $\boxed{(a^r)^s = a^{r \cdot s}}$

Beweis von (1) Beweis von (2) und (3) analog

$a^r \cdot a^s = e^{r \cdot \ln a} \cdot e^{s \cdot \ln a} = e^{r \cdot \ln a + s \cdot \ln a} = e^{(r+s) \cdot \ln a} = a^{r+s}$ ☺

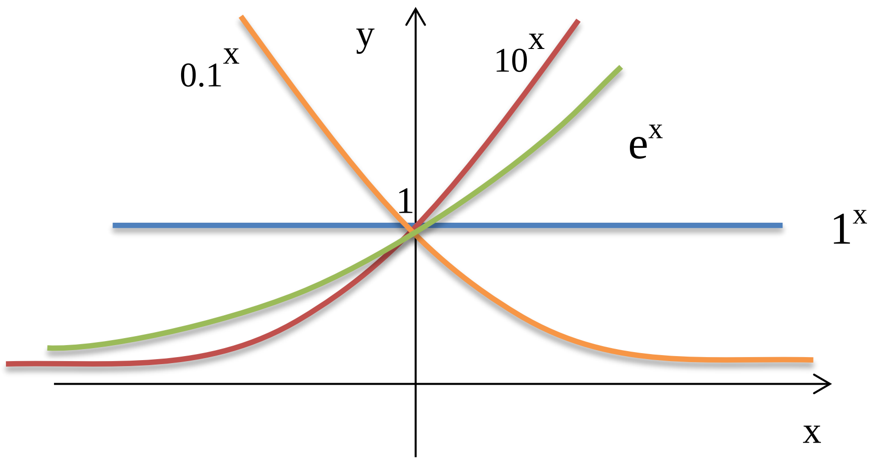
## 8.5 Die allgemeine Exponentialfunktion

Die allgemeine Exponentialfunktion ist für $a > 0$ definiert durch

$$\boxed{a^x := e^{x \cdot \ln a}}$$

Definitionsbereich$= \mathbb{R}$

## 8.6 Graph von $a^x$ für verschiedene a




## 8.7 Monotonie der allgemeinen Exponentialfunktion

$$\boxed{\begin{array}{lll} 0 < a < 1 & \Longrightarrow & a^x \text{ streng monoton fallend} \\ a > 1 & \Longrightarrow & a^x \text{ streng monoton wachsend} \\ a = 1 & \Longrightarrow & a^x \equiv 1 \text{ konstant} \end{array}}$$

Beweis für $0 < a < 1$

Sei $x_1 < x_2$.

$$x_1 \cdot \ln a > x_2 \cdot \underbrace{\ln a}_{<0} \quad \Longrightarrow \quad a^{x_1} = e^{x_1 \cdot \ln a} > e^{x_2 \cdot \ln a} = a^{x_2}$$

($e^x$ streng monoton wachsend) ☺

## 8.8 Allgemeiner Logarithmus

Die Funktion $f(x) = a^x$ , $a > 0, a \neq 1$, ist nach 8.7 in $\mathbb{R}$ streng monoton und damit umkehrbar. Die Umkehrfunktion

$$\boxed{\log_{\mathrm{a}} x := f^{-1}(x)}$$

von $a^x$ heißt allgemeiner Logarithmus zur Basis a

## 8.9 Rechenregeln für $\log_{\mathrm{a}} x$

Für $a, b, s$ und $t \in \mathbb{R}^+, a \neq 1 \neq b$, gilt

(1) $\boxed{\log_{\mathrm{a}}(s \cdot t) = \log_{\mathrm{a}}(s) + \log_{\mathrm{a}}(t)}$

(2) $\boxed{\log_{\mathrm{a}}(s^t) = t \cdot \log_{\mathrm{a}}(s)}$

(3) $\boxed{\log_{\mathrm{a}}\left(\frac{s}{t}\right) = \log_{\mathrm{a}}(s) - \log_{\mathrm{a}}(t)}$

(4) $\boxed{\log_a a = 1 \; und \; \log_a 1 = 0}$

(5) $\boxed{\log_{\mathrm{a}} s = \frac{\log_{\mathrm{b}} s}{\log_{\mathrm{b}} a}}$ Bsp.: $\log_{16} 35 = \frac{\ln 35}{\ln 16}$

Umrechnungsformel für Logarithmen

Beweis von (5)

$$y = \log_a s \Longrightarrow a^y = a^{\log_a s} = s \Longrightarrow_{\log_b}$$

$$\log_b s = \log_b a^y \overset{(2)}{\triangleq} y \cdot \log_b a = \log_a s \cdot \log_b a \Longrightarrow$$

$$\log_{\mathrm{a}} s = \frac{\log_{\mathrm{b}} s}{\log_{\mathrm{b}} a}$$

## 8.10 Spezielle Logarithmen

(1) $\boxed{\log_{10} x = \lg x}$ Zehnerlogarithmus (Briggscher Logarithmus)

(2) $\boxed{\log_e x = \ln x}$ natürlicher Logarithmus

(3) $\boxed{\log_2 x = \mathrm{lb}\, x}$ Zweierlogarithmus (Binärlogarithmus)

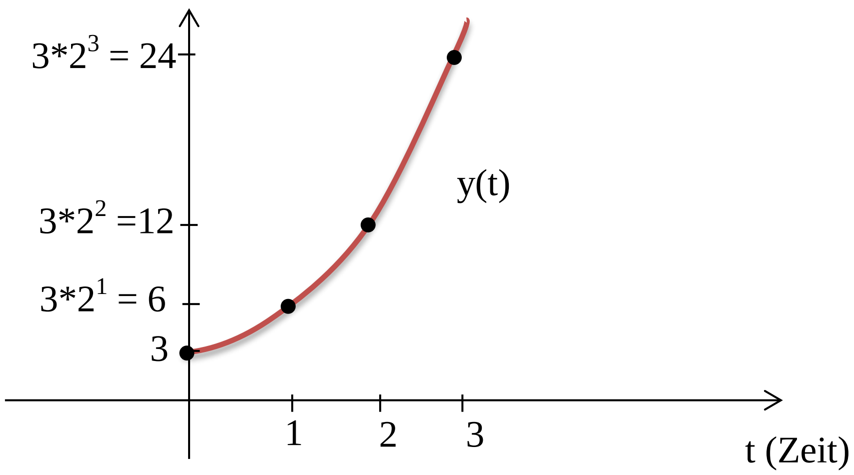
Die Exponentialfunktion und der Logarithmus spielen vor allem bei Wachstums- und Zerfallsprozessen eine Rolle

## 8.11 Wachstums- und Zerfallsprozesse

Bakterien, Fliegen, …

(1) Eine Population von Individuen verdoppele sich pro Zeiteinheit.

Anfangspopulation: $y_0 = 3\ (t = 0)$



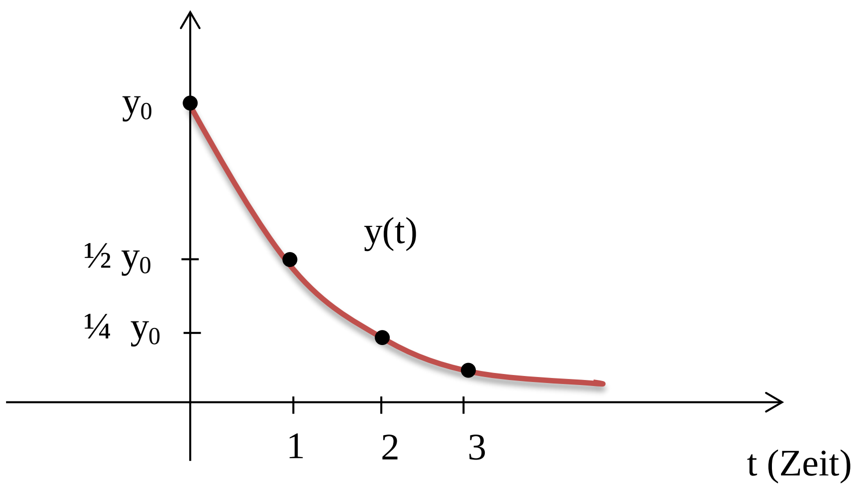

Population zum Zeitpunkt t:

$$y(t) = 3 \cdot 2^t = 3 \cdot e^{(\ln 2)\cdot t} = y_0 \cdot e^{ct}, \quad c = ln2$$

Allgemein: Population vermehre sich um das k-fache pro Zeiteinheit:

$$y(t) = y_0 \cdot k^t = y_0 \cdot e^{(\ln k)\cdot t} = y_0 \cdot e^{ct}, \quad c = \ln k$$

(2) Eine Substanz zerfalle um die Hälfte pro Zeiteinheit



$$y(t) = y_0 \cdot \frac{1}{2^t} = y_0 \cdot \frac{1}{e^{(\ln 2)\cdot t}} = y_0 \cdot e^{(-\ln 2)\cdot t} = y_0 e^{ct}\ ,$$
$$c = -\ln 2 < 0$$

<u>Wachstumsfunktion</u>: $\boxed{y(t) = y_0 e^{ct}}$  $y_0 = Anfangsgröße$, $t = Zeitparameter$

c heißt <u>Wachstumskonstante</u>, wenn c > 0
c heißt <u>Zerfallskonstante</u>, wenn c < 0

Halbwertzeit = Zeit, in der sich der Bestand halbiert

<u>Bsp</u>.: Stetige Verzinsung: $\boxed{K(t) = K_0 e^{pt}}$
p = Zinssatz, K(t) = Kapital nach t Jahren

<u>Aufgabe</u>:

Eine Population der Anfangsgröße $y_0$ = 1.000 habe eine tägliche Wachstumsrate von 10%.

(a) Wachstumsfunktion y(t) = ?
(b) Wie viele Individuen sind nach 10 Tagen vorhanden?
(c) Nach wie vielen Tagen $t_0$ hat sich die Population verdoppelt?

<u>Lösung</u>:

(a) $y(t) = 1.000\ e^{ct},\ \ c = ?$

$$y(1) = 1.000\ e^{c\cdot 1} = 1.100$$

$$e^c = \frac{1.100}{1.000} = 1.1 \Rightarrow c = \ln(e^c) = \ln 1.1 \ \Rightarrow y(t) = 1.000\ e^{(ln\ 1.1)\cdot t}$$

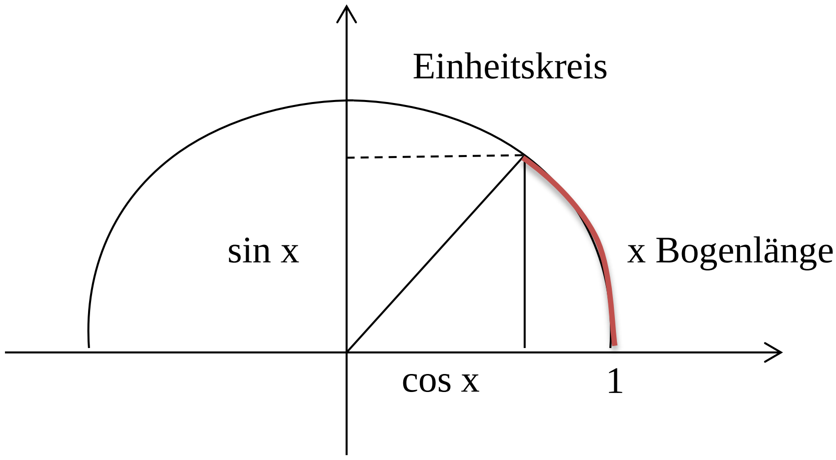
(b) $y(10) = 1.000\ e^{(\ln 1.1)\cdot 10} = 1.000 \cdot 1.1^{10} = 2.594$

(c) $1.000\ e^{ct_0} = 2.000 \Rightarrow e^{(\ln 1.1)\cdot t_0} = 2 = e^{\ln 2} \Rightarrow$

$$(\ln 1.1)\cdot t_0 = \ln 2 \Rightarrow t_0 = \frac{\ln 2}{\ln 1.1} \approx 7\ (Tage)$$

# 9. Trigonometrische Funktionen

## 9.1 Geometrische Definition des Sinus und Cosinus am Einheitskreis




Problem: sin x und cos x nicht numerisch berechenbar (Lineal keine Lösung)

Lösungsweg: Potenzreihe via komplexe Funktion $e^{ix}$.

## 9.2 Die Exponentialfunktion $e^{ix}$

Die komplexe Funktion $e^{ix}$ ist definiert durch

$$\boxed{e^{ix} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}}$$

## 9.3 Eigenschaften von $e^{ix}$

Es gilt

(1) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}$ konvergiert absolut in $\mathbb{R}$.

(2) $\boxed{Re\left(e^{ix}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}$

(3) $\boxed{Im\left(e^{ix}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}$

(4) $\boxed{\left|e^{ix}\right| = 1}$

<u>Beweis</u>:

(1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konvergiert absolut $\Longrightarrow$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{x^k}{k!}\right| = \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{(ix)^k}{k!}\right| \quad \text{konvergiert}$$

$\Longrightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}$ konvergiert absolut.

(2) und (3)

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{x^k}{k!}$$

$$i^k = \begin{cases} 1 \ \ wenn\ k = 4m \\ i \ \ wenn\ k = 4m+1 \\ -1 \ \ wenn\ k = 4m+2 \\ -i\ wenn\ k = 4m+3 \end{cases}, m \in \mathbb{N}$$

Ordnet man Realteil und Imaginärteil, so ergibt sich

$$e^{ix} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{Re(e^{ix})} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{Im(e^{ix})}$$

Im Realteil treten nur die geraden Exponenten auf, im Imaginärteil nur die ungeraden.

(4) $\overline{e^{ix}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} - i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

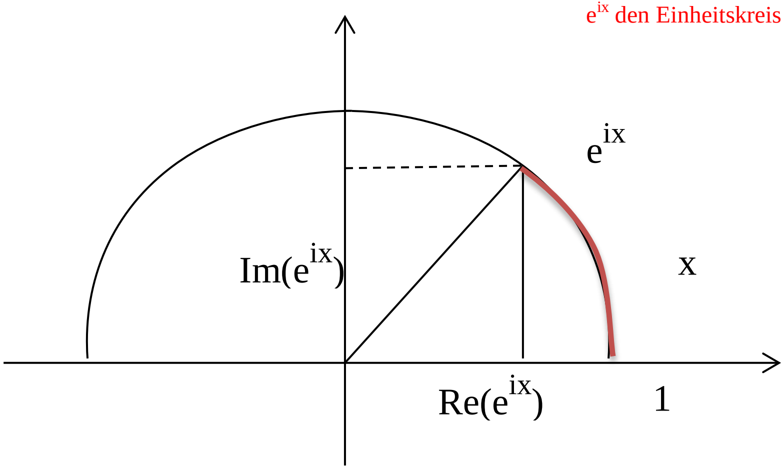
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(-x)^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(-x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^{-ix}$$

$$|e^{ix}|^2 \overset{2.7(1)}{\triangleq} e^{ix} \cdot \overline{e^{ix}} =_{eben\ berechnet} e^{ix} \cdot e^{-ix} = e^{ix-ix} = e^0$$

$$= 1$$

$e^{ix}$ am Einheitskreis

wenn x läuft, so durchlaufen die Punkte von $e^{ix}$ den Einheitskreis




mit Integrationsmethoden

Man kann zeigen: x = Bogenlänge von 1 bis $e^{ix}$ .

Grafik dient als Motivation für folgende Definition.

## 9.4 Analytische Definition von Sinus und Cosinus

Die Funktionen Sinus und Cosinus sind definiert durch

beim cos treten nur die geraden Exponenten, beim sin die ungeraden Exponenten

$$\boxed{\cos x := Re(e^{ix}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots}$$

$$\boxed{\sin x := Im(e^{ix}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}$$

## 9.5 Folgerungen aus der Definition von Sinus und Cosinus

Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

(1) $\boxed{\cos 0 = 1, \sin 0 = 0}$

(2) $\boxed{\begin{array}{ll} \cos(-x) = \cos(x) & (\cos x \text{ ist gerade}) \\ \sin(-x) = -\sin(x) & (\sin x \text{ ist ungerade}) \end{array}}$

(3) $\boxed{e^{ix} = \cos x + i\,sin\,x}$ $\underline{\textit{Eulersche Formel}}$

(4) $\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

(5) $\boxed{\cos x \in [-1,1] \text{ und } \sin x \in [-1,1]}$

Beweis: (1) – (3) folgt direkt aus den Definitionen

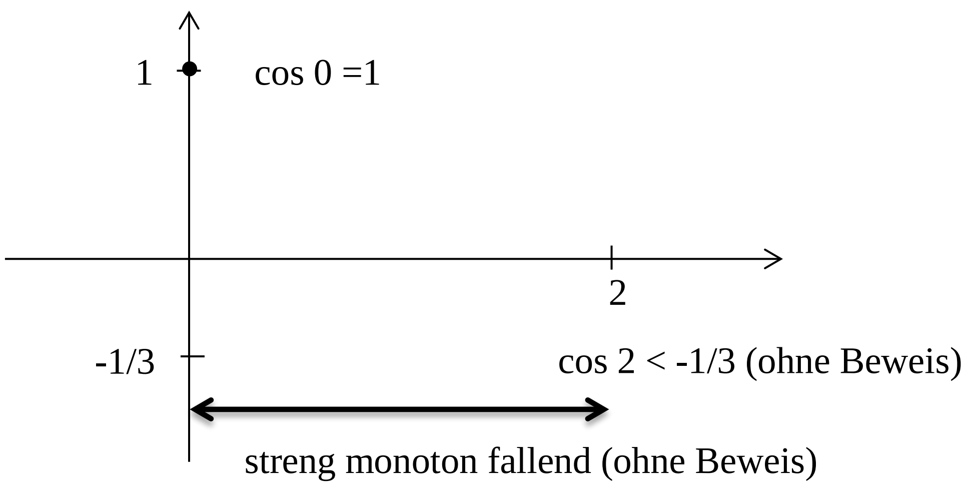
(4) $1 \overset{9.3(4)}{\triangleq} \left|e^{ix}\right|^2 = |\cos x + i \sin x|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$

(5) folgt aus (4)

## 9.6 Kleinste positive Nullstelle von cos x

Satz: Die Funktion cos x besitzt im Intervall (0,2) genau eine Nullstelle.

Beweisskizze:



cos x streng monoton fallend in (0,2) *mit* $\cos 0 > 0$ und $\cos 2 < 0 \Longrightarrow$
nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen (vgl. später Kap. 4)
besitzt cos x in (0,2) genau eine Nullstelle (anschaulich klar)

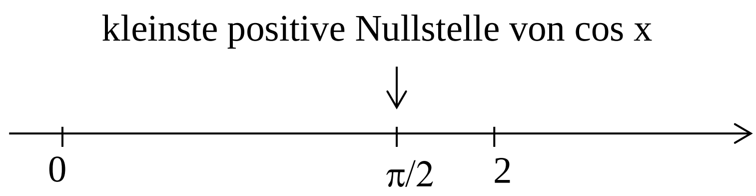
der Graph von cos muss irgendwo im Intervall (0,2) die x-Achse schneiden.

Aus theoretischen Gründen definiert man $\pi$ auf folgende Weise:

## 9.7 Die Zahl $\pi$

Definition:

$$\boxed{\pi := \textit{das Doppelte der kleinsten positiven Nullstelle von } \cos x}$$




## 9.8 Folgerungen aus der Definition von $\pi$

Es gilt

Dies ist einer der schönsten mathematischen Gleichung, da sie die wichtigsten Konstanten e, i, π, 1 und 0 enthält, sowie die Operationen Addition, Multiplikation und Potenzieren in eine Beziehung setzt

(1) $\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$

(2) $\boxed{\cos \pi = -1,\ \sin \pi = 0}$

(3) $\boxed{\begin{matrix} \sin(x + 2\pi) = \sin x \\ \cos(x + 2\pi) = \cos x \end{matrix} \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}}$

Beweis:

(1) $1 \overset{9.5(4)}{=} \cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{2}$

$$e^{i\pi} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 = \left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + i \sin\frac{\pi}{2}\right)^2 = i^2 \underbrace{\sin^2\frac{\pi}{2}}_{1} = -1$$

(2) $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi =_{(1)} -1 \Longrightarrow \; \cos\pi = -1$ und $\sin\pi = 0$

2 komplexe Zahlen sind gleich, wenn Realteile und Imaginärteile übereinstimmen

(3) $\cos(x+2\pi) + i\sin(x+2\pi) = e^{i(x+2\pi)} = e^{ix}\cdot e^{2\pi i} =$

$$= e^{ix}\Big(\underbrace{e^{\pi i}}_{-1}\Big)^2 = e^{ix} = \cos x + i\sin x \Longrightarrow$$

$$\cos(x+2\pi) = \cos x \quad \text{und} \quad \sin(x+2\pi) = \sin x$$

2 komplexe Zahlen sind gleich, wenn Realteile und Imaginärteile übereinstimmen

Funktionen mit dieser Eigenschaft nennt man auch periodisch.

## 9.9 Periodische Funktionen

Eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ heißt periodisch mit der Periode T (kurz T-periodisch), wenn gilt

$$\boxed{f(x+T) = f(x) \;\; für\; alle\; x \in \mathbb{R}}$$

T-periodisch, wenn sich die Werte in Abständen von T wiederholen

Beispiele: sin x und cos x sind $2\pi$ –periodisch.

## 9.10 Additionstheoreme für Sinus und Cosinus

Es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x\sin y\\ \sin(x+y) &= \sin x\cos y + \cos x\sin y\end{aligned}}$$

Beweis für cos x

$$\cos(x+y) = Re\big(e^{i(x+y)}\big) = Re\big(e^{ix}\cdot e^{iy}\big) =$$

$$= Re([\cos x + i\, sin\, x]\cdot[\cos y + i\sin y]) =$$

$$= \cos x\cos y - \sin x\sin y$$

Die Additionstheoreme für sin und cos zählen zu den wichtigsten Formeln der Mathematik. Man nennt sehr wichtige Sätze auch Theoreme. Die Additionstheoreme spielen in vielen Anwendungen eine wichtige Rolle, insbesondere in der Elektrotechnik. Aus den Additionstheoremen lassen sich eine Vielzahl von Formeln herleiten. Es gibt in Formelsammlungen seitenweise Formeln für den sin und cos , die sich mithilfe der Additionstheoreme beweisen lassen. Hier stellvertretend einige Formeln.

## 9.11 Folgerungen der Additionstheoreme (AT)

(1) $\boxed{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x}$ d.h. sin läuft cos um $\pi/2$ voraus

(2) $\boxed{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x}$

(3) $\boxed{\sin(x+\pi) = -\sin x}$

(4) $\boxed{\cos(x+\pi) = -\cos x}$

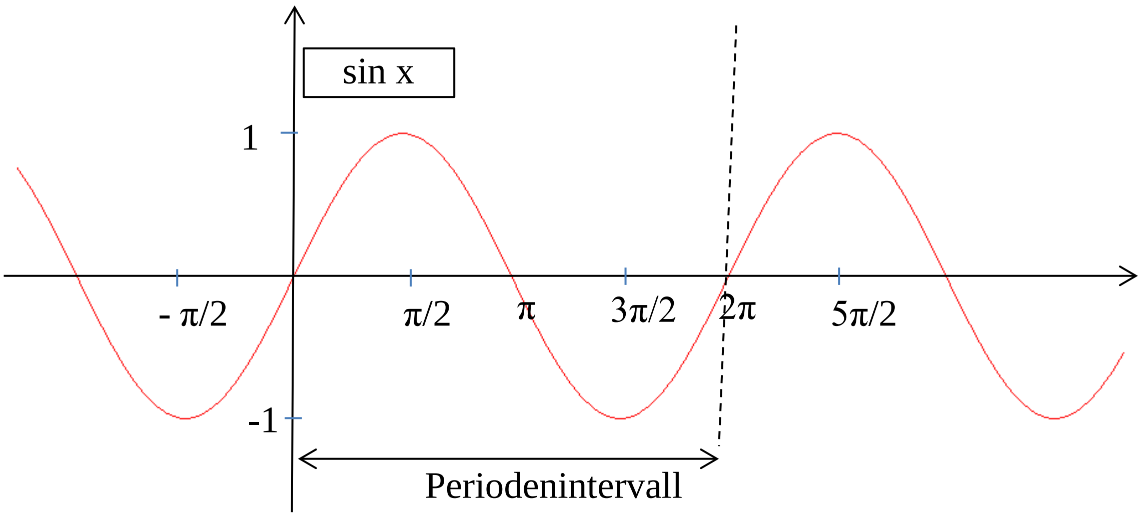
Beweis für sin x

$$(1)\ \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \overset{AT}{\triangleq} \sin x \cdot \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + \cos x \cdot \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} = \cos x$$

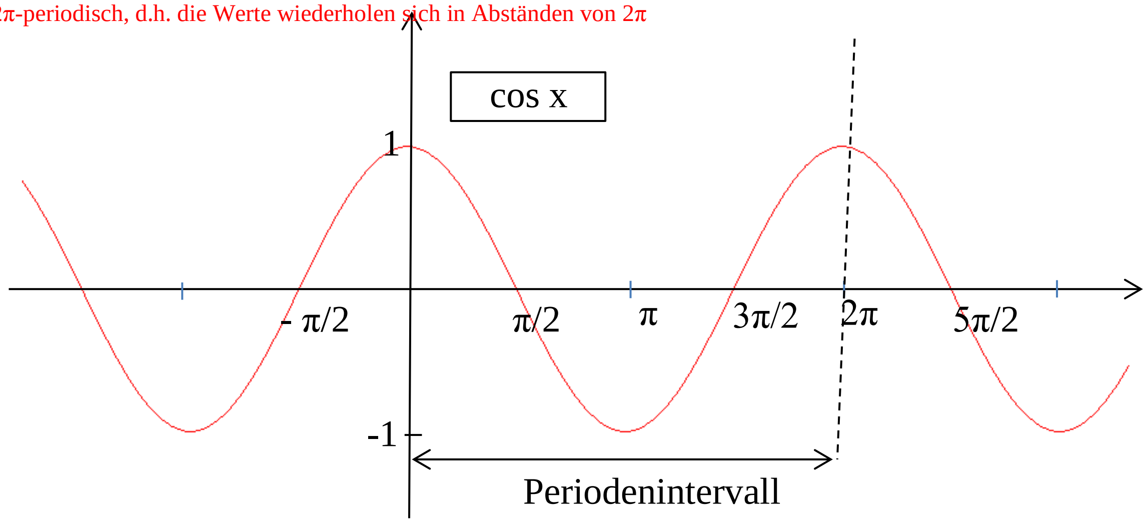
$$(3)\ \sin(x+\pi) \overset{AT}{\triangleq} \sin x \cdot \underbrace{\cos\pi}_{-1} + \cos x \cdot \underbrace{\sin\pi}_{0} = -\sin x$$

## 9.12 Graph von Sinus und Cosinus

sin x ist eine ungerade Funktion, daher ist der Graph punktsymmetrisch zum Nullpunkt sin 0 =0 und sin $\pi$=0. Weiterhin ist sin x $2\pi$-periodisch, d.h. die Werte wiederholen sich in Abständen von $2\pi$



cos x ist eine gerade Funktion, daher ist der Graph spiegelsymmetrisch zur y-Achse. cos 0 =1 ,cos π/2=0, cos π =-1Weiterhin ist cos x 2π-periodisch, d.h. die Werte wiederholen sich in Abständen von 2π




## 9.13 Definition von Tangens und Cotangens

Die Funktionen tan x und cot(x) sind definiert durch

$$\boxed{\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}} \qquad \text{Definitionsbereich: } \mathbb{R} \setminus \underbrace{\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}}_{Nullstellen\ von\ \cos x}$$

$$\boxed{\cot x := \frac{\cos x}{\sin x}} \qquad \text{Definitionsbereich: } \mathbb{R} \setminus \underbrace{\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}}_{Nullstellen\ von\ \sin x}$$

## 9.14 Eigenschaften von tan x und cot x

(1) tan x und cot x sind $\pi$-periodisch.
(2) tan x und cot x sind ungerade.

Beweis für tan x:

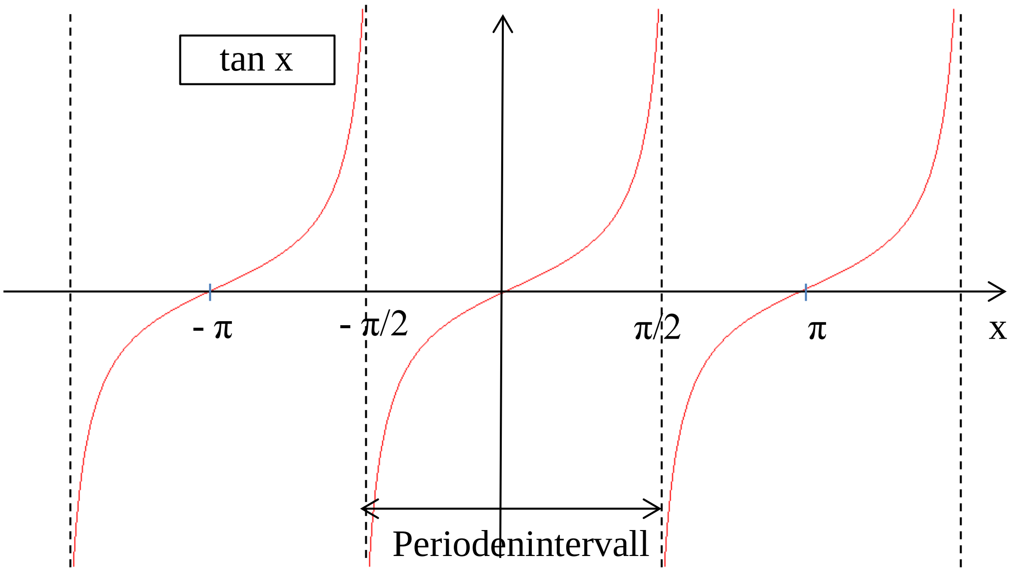
$$(1)\ \tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} \overset{9.11}{\triangleq} \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$$

$$(2)\ \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} \overset{9.5(2)}{\triangleq} \frac{-\sin x}{\cos\ x} = -\tan x$$

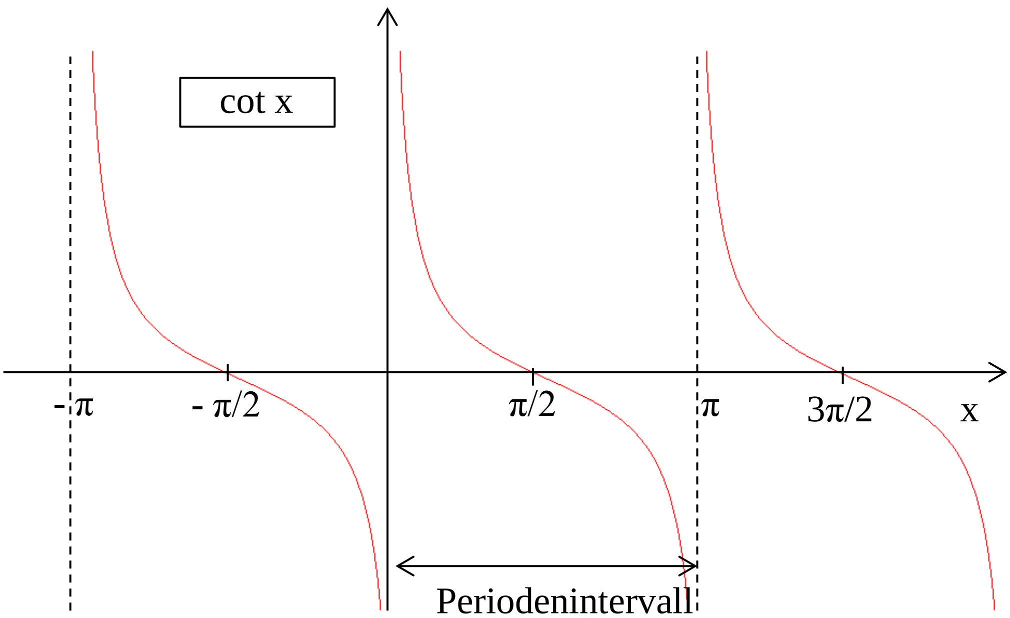
☺

## 9.15 Graph von Tangens und Cotangens

tan x ist eine ungerade Funktion, daher ist der Graph spiegelsymmetrisch zum Nullpunkt. tan 0 =0 , da sin 0 =0. Weiterhin ist tan x π-periodisch, d.h. die Werte wiederholen sich in Abständen von π. In den Nullstellen von cos x geht der Graph gegen + oder - unendlich




cot x ist ebenfalls ungerade, daher ist der Graph spiegelsymmetrisch zum Nullpunkt tan 0 =0 , da sin 0 =0. Weiterhin ist cot x π-periodisch. In den Nullstellen vonsin x geht der Graph gegen + oder - unendlich



# 10. Arcusfunktionen

## 10.1 Definition der Arcusfunktionen

Arcusfunktionen = Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

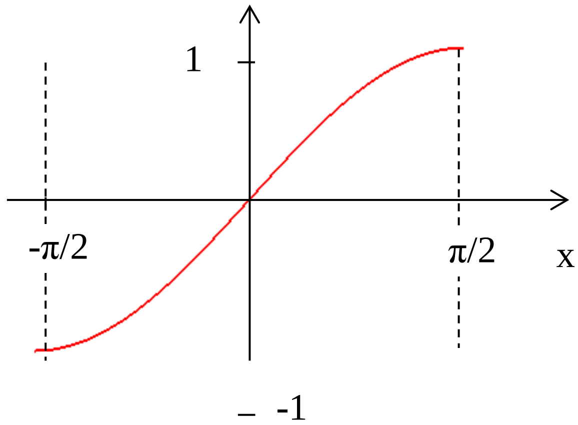
Der Sinus ist auf R nicht umkehrbar. Um die Umkehrfunktion von sin bilden zu können, muss man sin x auf einen möglichst großen Bereich einschränken, in dem sin streng monoton ist. Hier bietet sich das Intervall [-π,π] an.

(1) $\boxed{f(x) = \sin x}$

sin x streng monoton in $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \Longrightarrow$

sin x umkehrbar in $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$D_f = \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ , $W_f = [-1,1]$

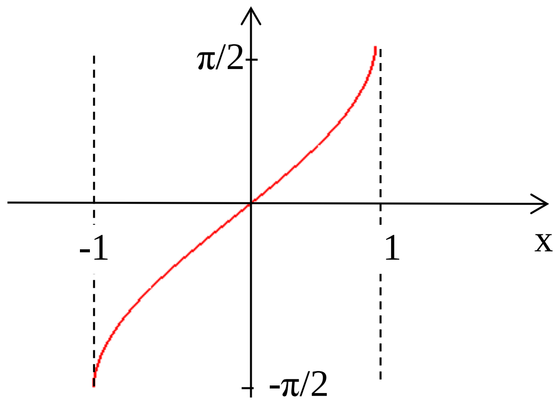



Den Graphen von arcsin x erhält man, indem man den Graphen von sin x an der Winkelhalbierenden spiegelt.

$\boxed{f^{-1}(x) =: \arcsin x}$

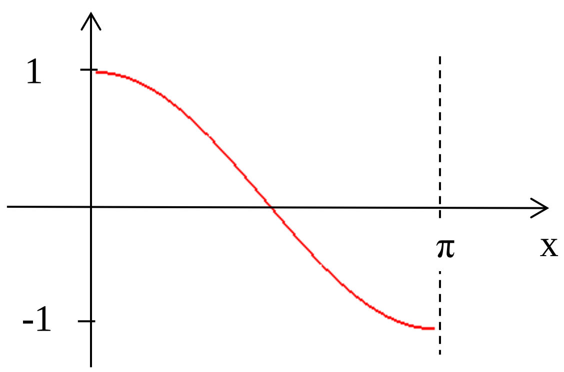
Der Wertebereich von f ist gleich dem Definitionsbereich von $f^{-1}$, umgekehrt ist der Definitionsbereich von f gleich dem Wertebereich von $f^{-1}$.

$D_{f^{-1}} = [-1,1]$ , $W_{f^{-1}} = \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$




---

(2) $\boxed{f(x) = \cos x}$



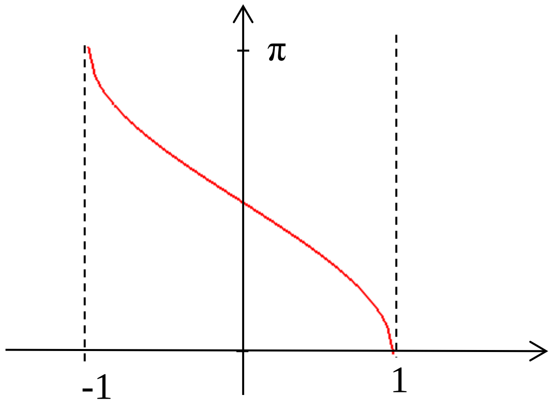

cos x streng monoton in $[0,\pi] \Longrightarrow$

cos x umkehrbar in $[0,\pi]$

$D_f = [0,\pi]$ , $W_f = [-1,1]$

$\boxed{f^{-1}(x) =: \text{ arcos } x}$

$D_{f^{-1}} = [-1,1]$ , $W_{f^{-1}} = [0, \pi]$

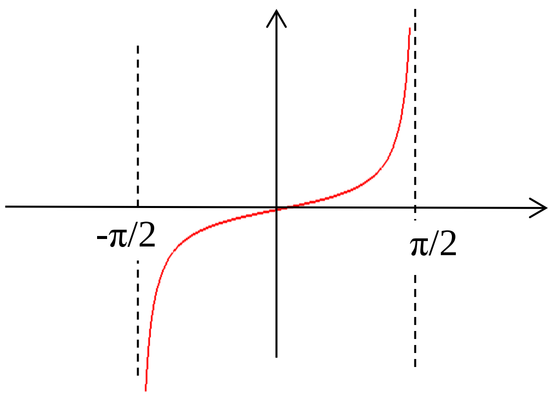



---

(3) $\boxed{f(x) = \tan x}$

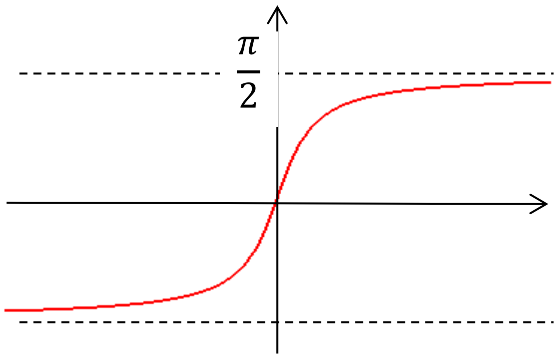
tan x umkehrbar in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$D_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , $W_f = \mathbb{R}$




$\boxed{f^{-1}(x) =: \text{ arctan } x}$

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ , $W_{f^{-1}} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

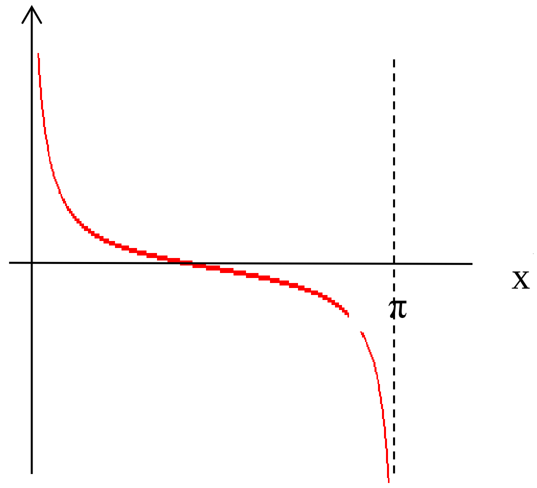



---

(4) $\boxed{f(x) = \cot x}$

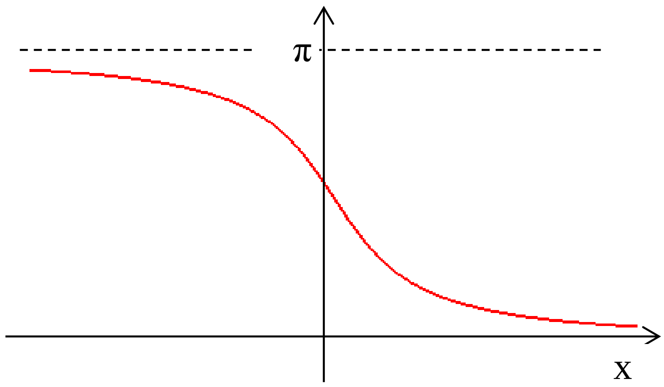
cotan x umkehrbar in $(0, \pi)$

$D_f = (0, \pi)$ , $W_f = \mathbb{R}$




$\boxed{f^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x}$

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ , $W_{f^{-1}} = (0, \pi)$



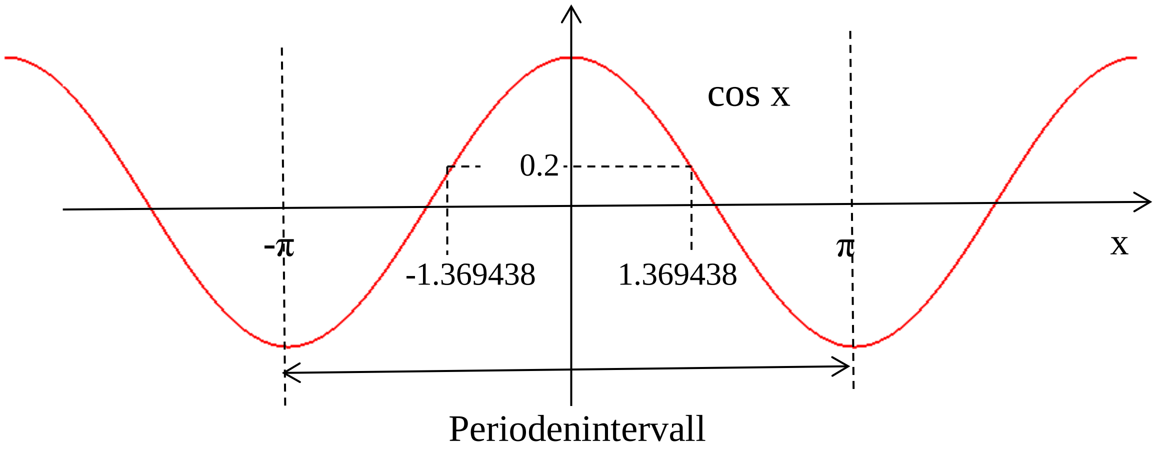

---

10.2 Aufgabe

$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}: \cos x = 0.2\} = ?$

Lösung: Taschenrechner: $\arccos 0.2 = 1.369438 \in [0, \pi]$

$$\cos(\pm 1.369438) = 0.2$$




Vorgehensweise: Man bestimmt alle Lösungen in einem Periodenintervall. Die Gesamtlösung erhält man, indem man zu den Lösungen noch alle ganzzahligen Vielfachen der Periode dazu addiert, da die Werte sich in Abständen von $2\pi$ wiederholen.

$$\mathbb{L} = \{\pm 1.369438 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Von Ricatti und Lambert im 18. Jahrh. eingeführt

# 11. Hyperbelfunktionen und Areafunktionen

## 11.1 Definition der Hyperbelfunktionen

$$\boxed{\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$ Sinus hyperbolicus

$$\boxed{\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$ Cosinus hyperbolicus

$$\boxed{\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}}$$ Tangens hyperbolicus

$$\boxed{\coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x}}$$ Cotangens hyperbolicus

## 11.2 Eigenschaften der Hyperbelfunktionen

Es gilt

Die Potenzreihenentwicklungen von cosh und sinh stimmen bis auf die alternierenden Vorzeichen mit cos bzw. sin überein.

(1) $$\boxed{\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots}$$

$$\boxed{\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots}$$

(2) $$\boxed{\begin{aligned} \cosh(-x) &= \cosh(x) \\ \sinh(-x) &= -\sinh(x) \end{aligned}}$$

cosh ist demnach eine gerade Funktion und sinh eine ungerade Funktion

(3) $$\boxed{\begin{aligned} \cosh(ix) &= \cos(x) \\ \sinh(ix) &= i\sin(x) \end{aligned}}$$

Der Zusammenhang zwischen den Funktionen cos bzw. sin wird in dieser Formel ersichtlich.

(4) $$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$

Beweis:

(1) $$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k + (-1)^k x^k}{k!} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Terme mit ungeraden Exponenten heben sich gegenseitig auf

Beweis für sinh x analog.

(2) folgt direkt aus (1) wegen $(-x)^{2k} = x^{2k}$ und $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$.

(3) $$\cosh(ix) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos x + \mathrm{i}\sin x + \cos(-x) + i\sin(-x))$$

$$= \frac{1}{2}(\cos x + \mathrm{i}\sin x + \cos x - i\sin x)$$

$$= \cos x$$

Beweis für sinh x analog.

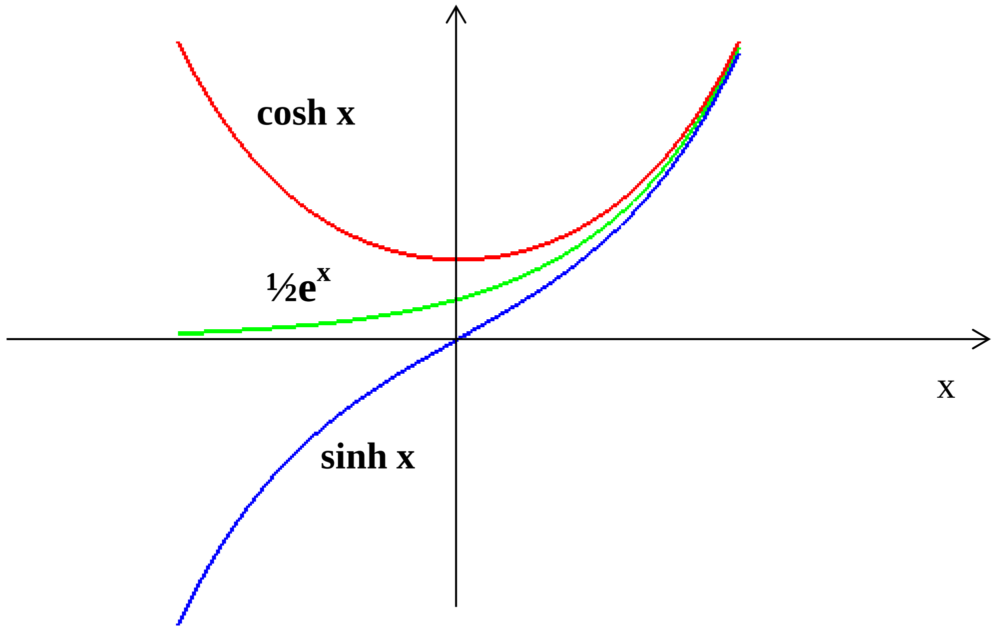
(4) $$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x})\right) =$$

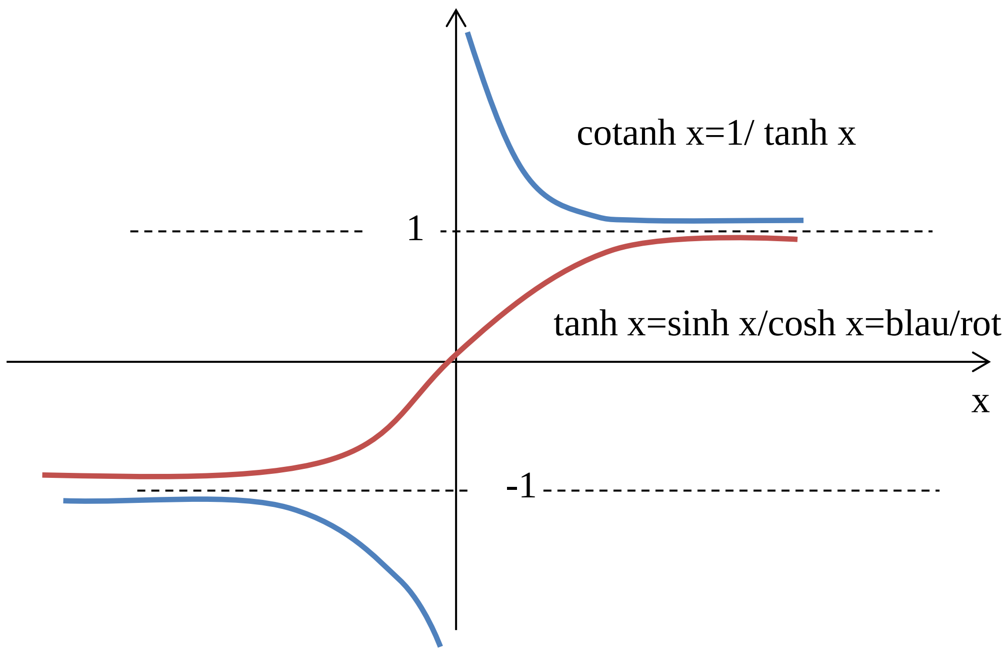
$$= \frac{1}{4}4 = 1$$

☺

## 11.3 Graph der Hyperbelfunktionen



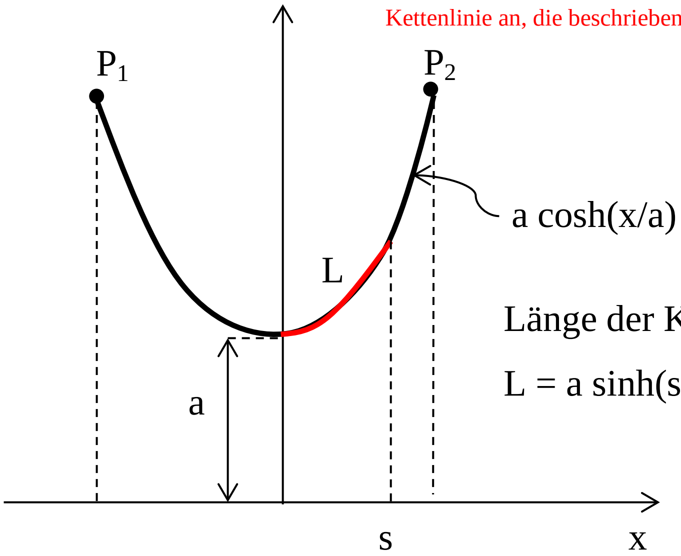

für große x ist $e^{-x}$ vernachlässigbar klein. cosh x und sinh x nähern sich dann asymptotisch ½ $e^{-x}$



## 11.4 Anwendungen der Hyperbelfunktionen

### (1) Kettenlinie

Befestigt man eine freihängende Kette in gleicher Höhe an 2 Punkten $P_1$ und $P_2$, so nimmt sie unter dem Einfluss der Schwerkraft die geometrische Form einer Kettenlinie an, die beschrieben werden kann durch den Graphen von cosh




Länge der Kette:

L = a sinh(s/a)

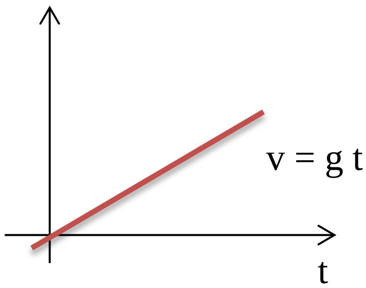
Man kann mit Integrationsethoden zeigen, dass sich die Länge der Kette mittels der Funktion sinh berechnen lässt.

Verändert man den Abstand der Befestigungspunkte, so ändert sich die Form der Kettenlinie. Dabei verändert sich auch das a, bzw. die x-Koordinate verschiebt sich!!

### (2) Freier Fall

ohne Luftwiderstand: $\boxed{v = v(t) = g \cdot t}$

Nach Fallgesetz ist die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers im luftleeren Raum gegeben durch v=g t



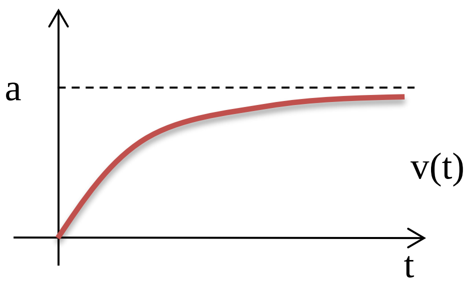

g = Fallbeschleunigung (9,81 m/sec$^2$)

ergibt sich als Lösung einer Dgl

mit Luftwiderstand: $\boxed{v = v(t) = a \tanh\left(\frac{g}{a} \cdot t\right)}$

Beim freien Fall mit Berücksichtigung des Luftwiderstands kommt der tanh ins Spiel

a hängt vom Gewicht und der Geometrie ab




a = Endgeschwindigkeit

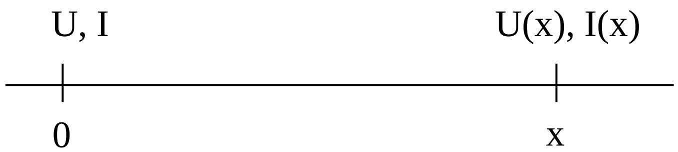
Ein Fallschirmspringer wird die maximale Endgeschwindigkeit nicht überschreiten können

## (3) Leitungsgleichung

Die Hyperbelfunktionen spielen in der Übertragungstechnik eine wichtige Rolle

In einem Leiter werden die elektrischen Signale geschwächt und müssen in gewissen Abständen regeneriert werden.

Signale können sein: analoge Signale wie z.B.Videosignal, Audiosignal oder digitale Signale(eigentlich elektromagnetische Wellen)




U = Spannung

I = Stromstärke

x=Entfernung zum Leitungsanfang

### Leitungsgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} U(x) &= U \cosh \gamma x - z\, I \sinh \gamma x \\ I(x) &= -\frac{U}{z} \sinh \gamma x + I \cosh \gamma x \end{aligned}}$$

γ = Ausbreitungsgeschwindigkeit

z = Wellenwiderstand (Materialkonstante)

Eine Rolle spielen die Hyperbelfunktionen auch in der Theorie der Differentialgleichungen

## (4) Differentialgleichungen (Analysis 2):

cosh x und sinh x sind Lösungen der Dgl. $y'' = y$.

Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung für eine gesuchte Funktion y, in der mindestens eine Ableitung vorkommt.

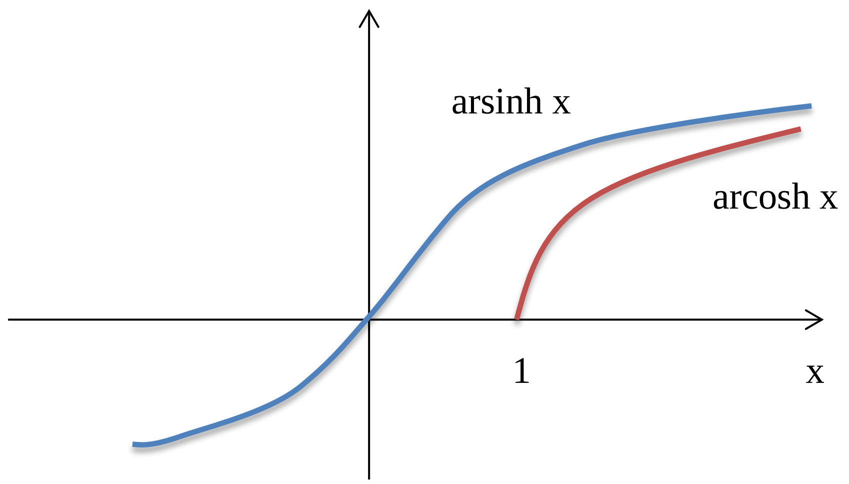
## 11.5 Areafunktionen

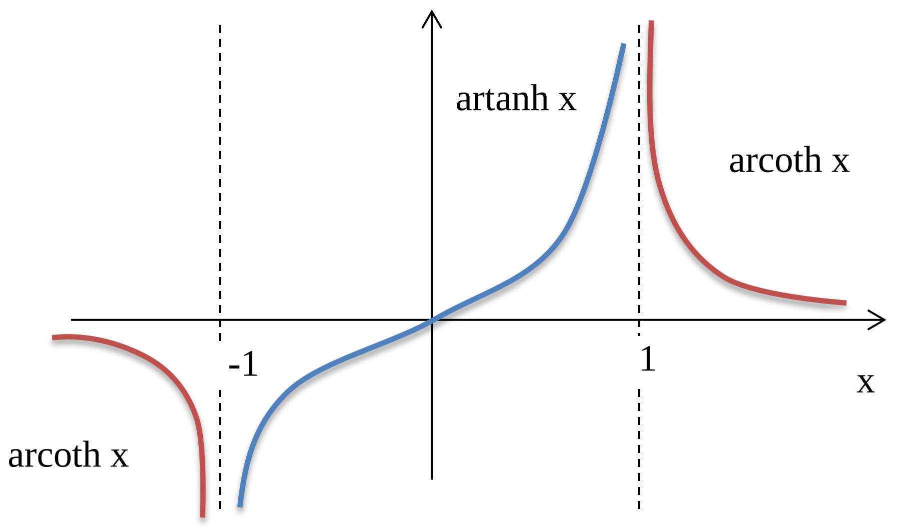
werden später noch bei der Integration benötigt

Areafunktionen = Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen

| | | |
|---|---|---|
| Areasinus hyperbolicus | | : y = arsinh x |
| Areacosinus | - ‘‘ - | : y = arcosh x |
| Areatangens | - ‘‘ - | : y = artanh x |
| Areacotangens | - ‘‘ - | : y = arcoth x |

## 11.6 Graph der Areafunktionen



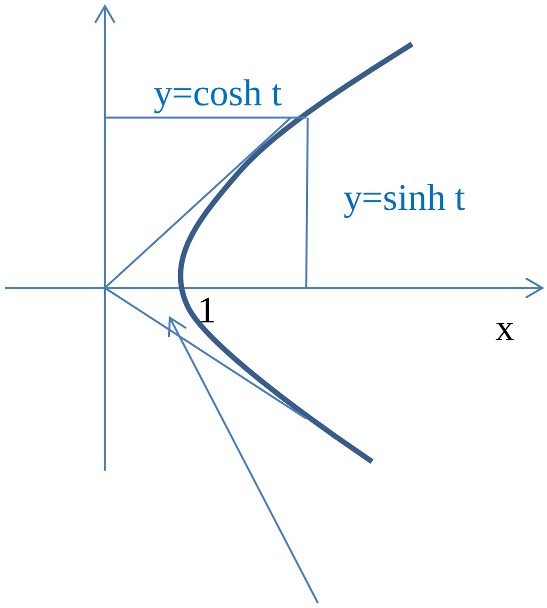




Anwendungen der Areafunktionen:

Integration z.B. $\int \frac{1}{1-x^2} dx = artanh\ x + C$

## Bemerkung: Warum Hyperbelfunktionen?

Die Rolle, die der Einheitskreis bei den trigonometrischen Funktionen spielt, übernimmt bei den Hyperbelfunktionen die Einheitshyperbel.




$y^2$-$x^2$=1

$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

Man kann zeigen: Flächeninhalt des Sektors ist gleich t = arsinh y

Deshalb nennt man die Umkehrfunktionen Areafunktionen. Area (lateinisch) heißt Fläche, gemeint ist hier der Flächeninhalt des Sektors. Bei den trigonometrischen Funktionen ist t der Kreisbogen, daher Arcusfunktionen. Arcus = Bogen

# Kapitel 4: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

Bisher wurden Grenzwerte von Folgen und Reihen betrachtet. Der Konvergenzbegriff soll nun für Funktionen erweitert werden.

## 1. Grenzwerte von Funktionen

### 1.1 Definition (Konvergenz einer Funktion)

Eine Funktion f sei eventuell mit Ausnahme von $x_0$ an jeder Stelle einer $\varepsilon$ −Umgebung von $x_0$ definiert.

f braucht selbst nicht in $x_0$ definiert sein.

$f(x)=x/x$ , $x\neq 0$, ist nicht in 0 definiert, dennoch existiert der Grenzwert für $x \rightarrow 0$. (Definitionslücke)

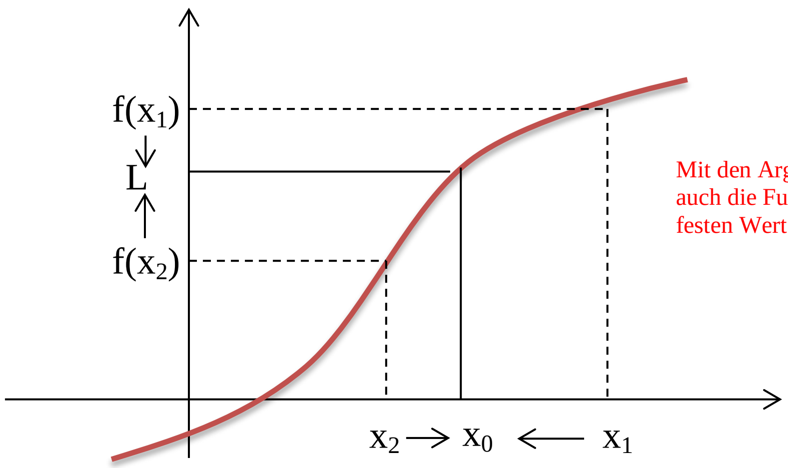
f heißt konvergent für $x \to x_0$ gegen den Grenzwert L, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ folgt

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L}$$

d.h. $x_n \to x_0 \Longrightarrow f(x_n) \to L$ .

Man schreibt dann

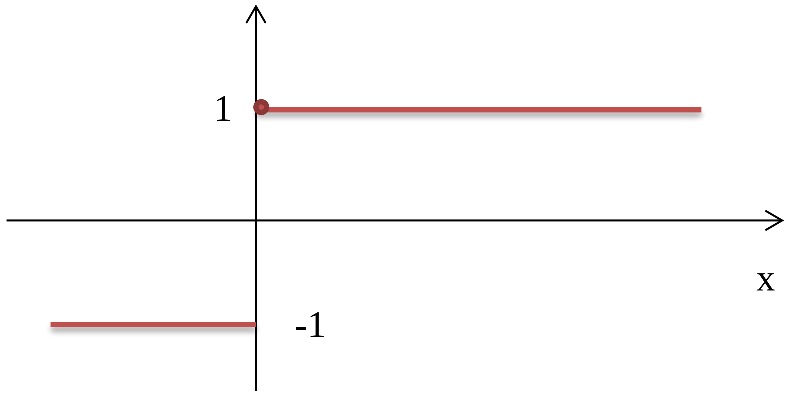
$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) := \lim_{n\to\infty} f(x_n)}$$




Mit den Argumenten $x_n \rightarrow x_0$ konvergieren auch die Funktionswerte gegen einen festen Wert

## 1.2 Beispiele

(1) $f(x) = \begin{cases} 1, & falls\ x \geq 0 \\ -1, & falls\ x < 0 \end{cases}$, existiert $\lim_{x \to 0} f(x)$ ?




Lösung:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\ und\ \lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0\ und\ \lim\limits_{n\to\infty} f\left(-\frac{1}{n}\right) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht

(2) Existiert $\lim_{x \to -1} f(x)$ für $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ ?

Bem.: f in -1 nicht definiert (Definitionslücke)

Lösung: 0/0 ist ein unbestimmter Ausdruck. Er kann jeden Wert annehmen.

$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \left[\frac{0}{0}\right]$ (unbestimmter Ausdruck)

Hier ist 0/0 gleich -2

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} (x-1) = -2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1} f(x) \text{ existiert}$$

Definitionslücke in $x_0$ kann durch nachträgliche Festsetzung

$$f(-1) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = -2$$

behoben werden (Funktionswert =Grenzwert)

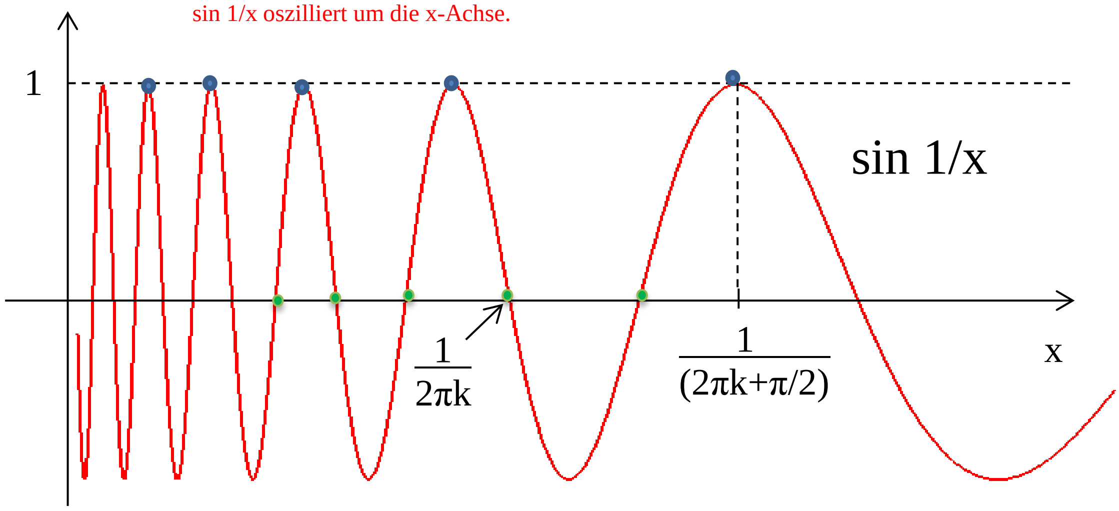
Schwieriger ist folgendes Beispiel. Hier hilft auch die Anschauung nicht weiter .

(3) Sei $f(x) = \sin\frac{1}{x}, x \neq 0$. Existiert $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = ?$

Lösung:

$\sin 2\pi k = 0$ und $\sin\left(2\pi k + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ *für* $k \in \mathbb{N}$

sin 1/x oszilliert um die x-Achse.




Für $x_k = \frac{1}{2\pi k}$ und $y_k = \frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}}$ gilt: $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{k\to\infty} y_k = 0$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} f(x_k) &= \lim_{k\to\infty} \sin\frac{1}{x_k} = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\sin 2\pi k}_{0} = 0 \\ \lim_{k\to\infty} f(y_k) &= \lim_{k\to\infty} \sin\frac{1}{y_k} = \lim_{k\to\infty} \sin\underbrace{\left(2\pi k + \frac{\pi}{2}\right)}_{1} = 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$\lim_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht.

## 1.3 Definition (Links- und rechtsseitige Grenzwerte)

Die Funktion f sei in einer ε-Umgebung von $x_0$ (mit eventueller Ausnahme von $x_0$) definiert.

f hat in $x_0$ den $\left\{\begin{array}{l}\underline{\text{rechtsseitigen Grenzwert } G_r} \\ \underline{\text{linksseitigen Grenzwert } G_l}\end{array}\right\}$, wenn für jede Folge

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\left\{\begin{array}{l}x_n > x_0 \\ x_n < x_0\end{array}\right\}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$

konvergiert mit

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = G_r \\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = G_l\end{array}\right\}$$

Bezeichnung:

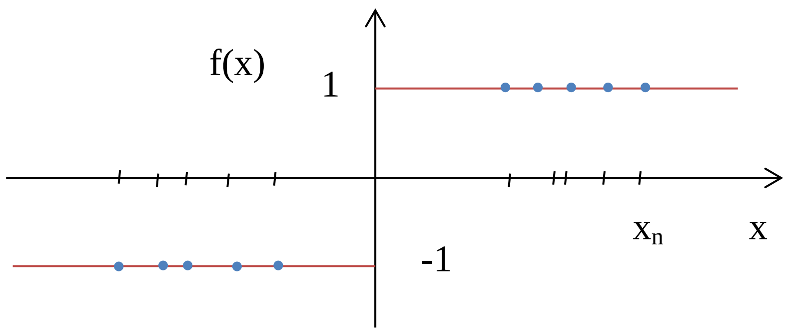
$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = G_r \\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = G_l\end{array}}$$

Bemerkung

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = G \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = G}$$

## 1.4 Beispiele von einseitigen Grenzwerten

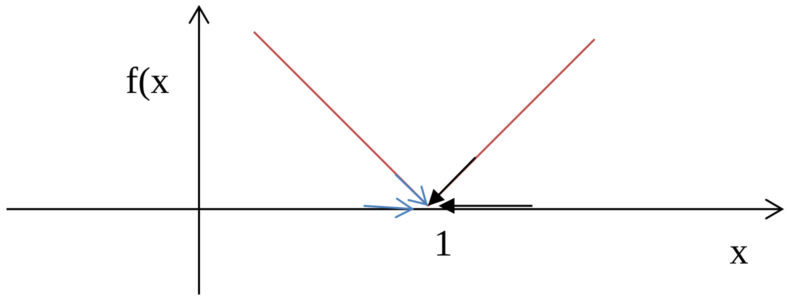
(1) Sei $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{|x|}$




$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{x}{|x|} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{x}{|x|} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{x}{-x} = -1$$

(2): $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x-1|$. Existiert $\lim_{x\to 1} f(x)$ ?
Lösung:




$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} |\underbrace{x-1}_{>0}| = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x-1 = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} |\underbrace{x-1}_{<0}| = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} -(x-1) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 0$$

## 1.5 Grenzwertregeln für Funktionen

Für zwei Funktionen f, g mit $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$ gilt.

Limes und Summation bzw. Subtraktion vertauschbar

(1) $\boxed{\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_1 \pm L_2}$

(2) $\boxed{\lim_{x\to x_0} cf(x) = c\lim_{x\to x_0} f(x) \quad \forall c \in \mathbb{R}}$

(3) $\boxed{\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_1 \cdot L_2}$

(4) $\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \;,\; falls\; L_2 \neq 0}$

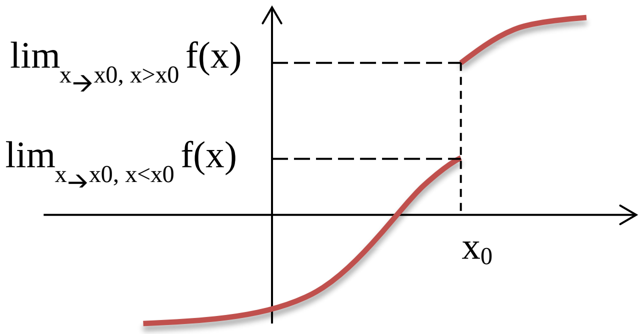
Beweis: (folgt aus den Grenzwertregeln für Folgen)

zu (1) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

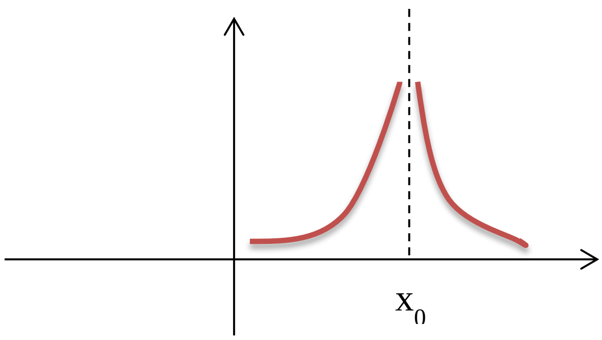
$$\lim_{n\to\infty}\big(f(x_n) \pm g(x_n)\big) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \pm \lim_{n\to\infty} g(x_n) = L_1 \pm L_2$$

## 1.6 Bemerkung

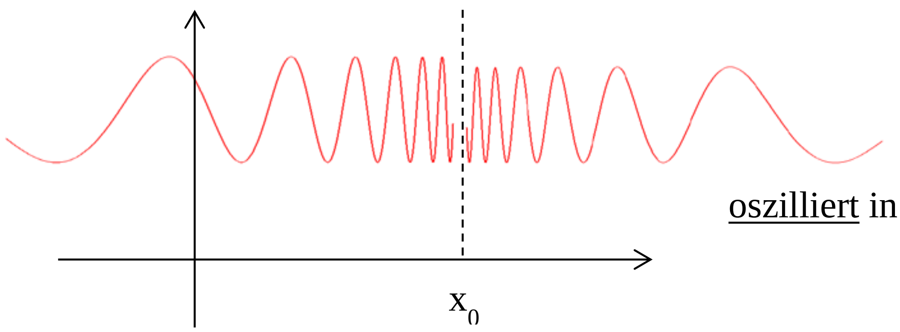
$\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert nicht in folgenden Fällen




Sprungstelle in $x_0$




unbeschränkt in $x_0$




oszilliert in $x_0$

Stetige Funktionen spielen in der Mathematik eine wichtige Rolle, da viele mathematische Sätze nur richtig sind für stetige Funktionen. Dies zeigen auch die Anwendungsbeispiele in Abschnitt 4.

# 2. Stetigkeit

Für die Stetigkeit in $x_0$ müssen 3 Eigenschaften für f erfüllt sein:
1. f muss in $x_0$ definiert sein
2. Limes muss existieren.
3. Der Limes muss mit $f(x_0)$ übereinstimmen

Stetigkeit liegt vor, wenn Funktion und Grenzwert vertauschbar ist.

## 2.1 Definition (Stetige Funktion)

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt

(1) in $x_0 \in D$ stetig, wenn $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)} = f(\lim_{x\to x_0} x)$

(2) in $x_0 \in D$ rechtsseitig stetig, wenn $\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(x_0)}$

(3) in $x_0 \in D$ linksseitig stetig, wenn $\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = f(x_0)}$

(4) in D stetig, wenn f(x) in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

Bemerkung: Es gilt

$$\boxed{f(x) \text{stetig in } x_0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} f \text{ links-und rechtsseitig stetig mit} \\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = f(x_0) \end{matrix}\right\}}$$

Bezeichnung:

$C[a,b] :=$ Menge aller Funktionen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, die stetig im Intervall [a,b] sind. (C steht für continuous (stetig))

## 2.2 Beispiele

(1) $f(x) = \sqrt{x}$ ist stetig für jedes $x_0 > 0$.

Beweis:

Sei $x_n \to x_0$. Zu zeigen: $f(x_n) = \sqrt{x_n} \to \sqrt{x_0} = f(x_0)$.

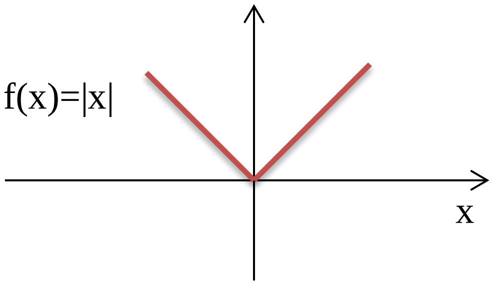
$$\sqrt{x_n} - \sqrt{x_0} \overset{Trick}{\triangleq} \frac{(\sqrt{x_n} - \sqrt{x_0}) \cdot (\sqrt{x_n} + \sqrt{x_0})}{(\sqrt{x_n} + \sqrt{x_0})} =$$

$$= \frac{x_n - x_0}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x_0}} \to 0$$

$$\Longrightarrow \sqrt{x_n} \to \sqrt{x_0}$$

(2) $f(x) = |x|$ stetig in 0 ?

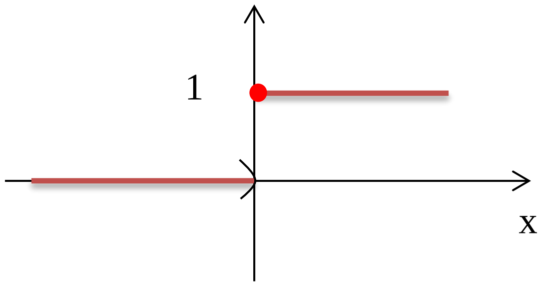
Lösung:




$$0 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = f(0) = 0 \Longrightarrow f \text{ stetig in } 0$$

(3) $f(x) = \begin{Bmatrix} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{Bmatrix}$ stetig in 0 ?

Lösung:




$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1 = f(0) \Longrightarrow f \text{ rechtsseitig stetig in } 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = 0 \neq f(0) \Longrightarrow f \text{ \underline{nicht} linksseitig stetig } in \ 0$$

f damit nicht stetig in 0.

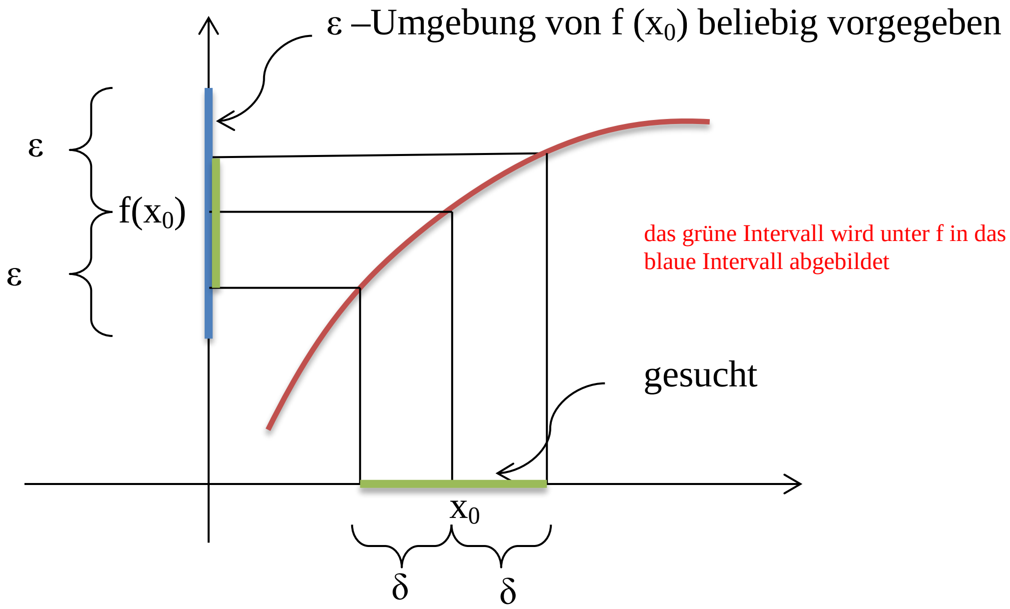
ε δ –Definition ist für die allgemeine Theorie und für Beweise nützlich.
Die Folgenstetigkeit ist für das Verständnis und für die Anwendungen geeigneter.
f ist genau dann stetig in $x_0$ stetig, wenn gilt: Der Funktionswert f(x) weicht beliebig wenig von f($x_0$) ab, falls nur x hinreichend nahe bei $x_0$ liegt.

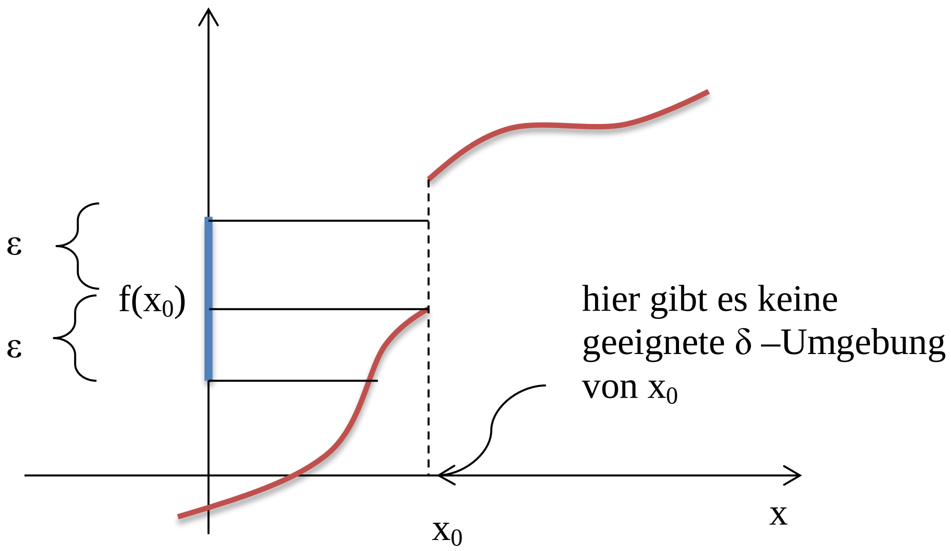
## 2.3 Alternative Definition für die Stetigkeit (ε δ – Definition)

<u>Satz</u>: Folgende Aussagen sind äquivalent

(1) zu jedem ε > 0 existiert ein δ > 0, so dass aus $|x - x_0| < \delta$ folgt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

(2) f(x) ist stetig in $x_0$.



<u>Beweis</u> für "(1) $\Longrightarrow$ (2)"

Sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ . Zu zeigen: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Sei ε > 0. Nach (1) existiert ein δ > 0 mit $(*) |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle x mit $|x - x_0| < \delta$

Es gibt ein $n_0$ mit $|x_n - x_0| < \delta$ für alle $n \geq n_0 \overset{(*)}{\Longrightarrow}$
$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0 \Longrightarrow$
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

"(2) $\Longrightarrow$ (1)" Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gelte $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

*Es ist zu zeigen:*
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass
$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$.

Angenommen, dies sei nicht der Fall. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass kein $\delta > 0$ existiert mit
$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$

Es existiert also zu jedem $\delta > 0$ mindestens ein $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$, aber $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

Insbesondere gibt es dann für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ ein $x_n \in D$ mit

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \ \ und \ |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Folglich ist $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \ und \ |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon \ \ \forall n \geq 1$.

Widerspruch.

☺

2.4 <u>Beispiel</u>

Die Funktion $f(x) = 2x$ ist in jedem Punkt $x_0$ stetig.

<u>Beweis mit ε δ –Stetigkeit</u>

Sei $\varepsilon > 0$.

$|2x - 2x_0| = 2|x - x_0| < \varepsilon$ für alle x mit $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} := \delta$ ☺

<u>Beweis mit Folgenstetigkeit</u>

Sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 2x_n = 2x_0 = f(x_0)$ ☺

> *Korollar*. Sei $f: D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$ und $f(x_0) \neq 0$. Dann ist $f(x) \neq 0$ für alle $x$ in einer Umgebung von $x_0$, d.h. es existiert ein $\delta > 0$, so dass
>
> $f(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$

*Beweis*. Zu $\varepsilon := |f(x_0)| > 0$ existiert nach dem vorangegangenen Satz ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung

$$|f(x)| + |-f(x) + f(x_0)| \geq |f(x) - f(x) + f(x_0)| = |f(x_0)| \Rightarrow$$
$$|f(x)| \geq |f(x_0)| - |-f(x) + f(x_0)| = |f(x_0)| - |f(x) - f(x_0)| > 0$$

☺

## 2.5 <u>Gleichmäßige Stetigkeit</u>

> *Definition*. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt in $D$ *gleichmäßig stetig*, wenn gilt:
>
> Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass
>
> $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ für alle $x, x' \in D$ mit $|x - x'| < \delta$.

*Bemerkung*. Eine gleichmäßig stetige Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig.

Die Umkehrung gilt aber i. Allg. nicht. Betrachten wir

$$f\colon (0,1] \to \mathbb{R}, \qquad x \to \frac{1}{x}$$

Sei $x_0 \in (0,1]$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir setzen

$$\delta \coloneqq \min\left(\frac{x_0}{2}, \frac{x_0^2 \varepsilon}{2}\right)$$

Dann gilt für alle $x$ mit $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right|$$

$$= \left|\frac{x - x_0}{x x_0}\right| \leq_{|x-x_0|<\frac{x_0}{2} \Leftrightarrow \frac{x_0}{2}<x<\frac{3}{2}x_0} \frac{2|x - x_0|}{x_0^2} <_{|x-x_0|<\frac{x_0^2\varepsilon}{2}} \frac{2\delta}{x_0^2}$$

$$\leq \varepsilon$$

Die Funktion $f$ ist also in $x_0$ stetig. Sie ist aber in $(0,1]$ nicht gleichmäßig stetig, da man $\delta$ nicht unabhängig von $x_0$ wählen kann:

Wäre $f$ gleichmaßig stetig, gäbe es insbesondere zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$, sodass

$|f(x) - f(x')| < 1$ für alle $x, x' \in (0,1]$ $mit$ $|x - x'| < \delta$.

Es gibt aber ein $n \geq 1$ mit

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right| < \delta \ und \ \left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right)\right| = n \geq 1$$

*Satz.* Jede auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall stetige Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ist dort gleichmäßig stetig.

*ohne Beweis.* siehe Otto Forster. Analysis 1. Vieweg S.69

# 3. Beispiele von stetigen Funktionen

## 3.1 Stetigkeit von Potenzreihen

*Satz:* Jede Potenzreihe ist im Innern ihres Konvergenzgebietes stetig.

*Beweis.*

Folgt später aus einem Satz aus Kapitel 5:

Jede Potenzreihe ist im Innern ihres Konvergenzgebietes differenzierbar und somit stetig.

Folgerungen:

Folgende Funktionen sind somit stetig in $\mathbb{R}$:

- Polynome
- $e^x$
- $\sin x$
- $\cos x$

## 3.2 Rechenregeln für stetige Funktionen

Seien f(x) und g(x) in $x_0$ stetige Funktionen. Dann ist auch

(1) $\boxed{f(x) \pm g(x) \text{stetig in } x_0}$

(2) $\boxed{\lambda \cdot f(x) \text{ stetig in } x_0 \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}}$

(3) $\boxed{f(x) \cdot g(x) \text{ stetig in } x_0}$

(4) $\boxed{\frac{f(x)}{g(x)} \text{ stetig in } x_0, \text{ falls } g(x_0) \neq 0}$

Beweis: (folgt aus den Grenzwertregeln 1.5 für Funktionen)

zu (1) $\lim_{x \to x_0} \big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) =$

$$= f(x_0) \pm g(x_0)$$

Folgerungen:

Folgende Funktionen sind stetig in ihren Definitonsbereichen:

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$
- $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$

Umkehrfunktionen wie z.B. arccos x oder ln x auch stetig?

## 3.3 Stetigkeit der Umkehrfunktion

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine streng monoton fallende (wachsende), stetige Funktion in einem Intervall I und sei $W_f$ Wertebereich von f.

Dann ist $f^{-1}: W_f \to I$ ebenfalls stetig und streng monoton fallend (wachsend).

ohne Beweis

Folgerungen

Folgende Funktionen sind stetig in ihren Definitonsbereichen:

- $\arcsin x$, $\operatorname{arsinh} x$
- $\arccos x$, $\operatorname{arcosh} x$
- $\arctan x$, $\operatorname{artanh} x$
- $\operatorname{arccot} x$, $\operatorname{arcoth} x$
- $\ln x$ (Umkehrfunktion von $e^x$)
- $\sqrt[n]{x}$ (Umkehrfunktion von $x^n$)

## 3.4 Stetigkeit von Verkettungen

*Satz.* Sind g und h in jedem Punkt der Definitionsmenge stetige Funktionen, so ist auch deren Verkettung
kringel

$$\boxed{f(x) = (h \circ g)(x) = h(g(x))}$$

in jedem Punkt $x_0$ der Definitionsmenge stetig.

*Beweis.*

$$x_n \to x_0 \xRightarrow{g\ stetig} g(x_n) \to g(x_0) \xRightarrow{h\ stetig} h(g(x_n)) \to h(g(x_0))$$

Damit gilt: $\lim_{x \to x_0} h(g(x)) = h(g(x_0))$

Folgerungen:
Folgende Funktionen sind stetig in ihren Definitonsbereichen:

- $a^x = e^{x \cdot \ln a}$
- $\log_a x$ (Umkehrfunktion von $a^x$)
- $\frac{\sqrt{x^2+2\sqrt{x}}}{x^2+1}$

Jede beliebige Zusammensetzung von stetigen Funktionen ist wieder stetig

## 3.5 Fazit

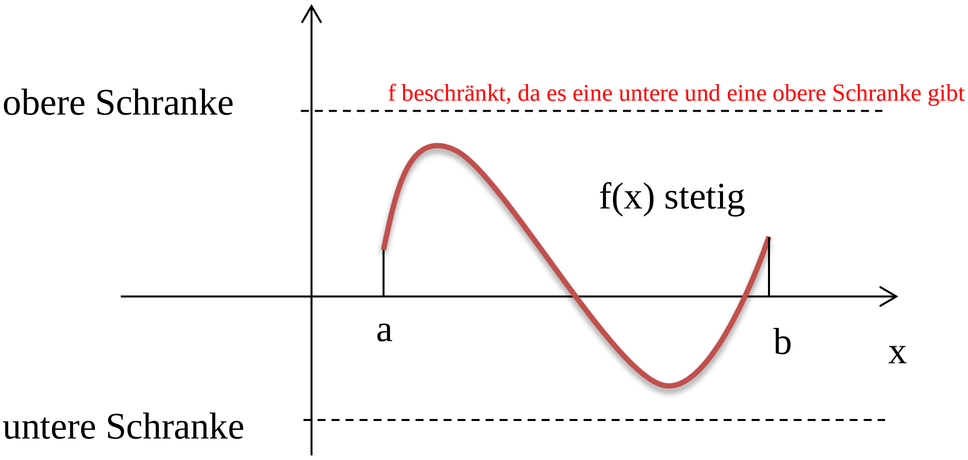
Alle elementaren Funktionen aus Kapitel 3 und ihre Zusammensetzungen bzgl. $+, -, *, \div$ und $\circ$ (Verkettung) sind in ihren Definitionsbereichen stetig.

In diesem Abschnitt werden wir einige wichtige Sätze der Mathematik betrachten , die nur richtig sind für stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen.

# 4. Stetigkeit auf Intervallen

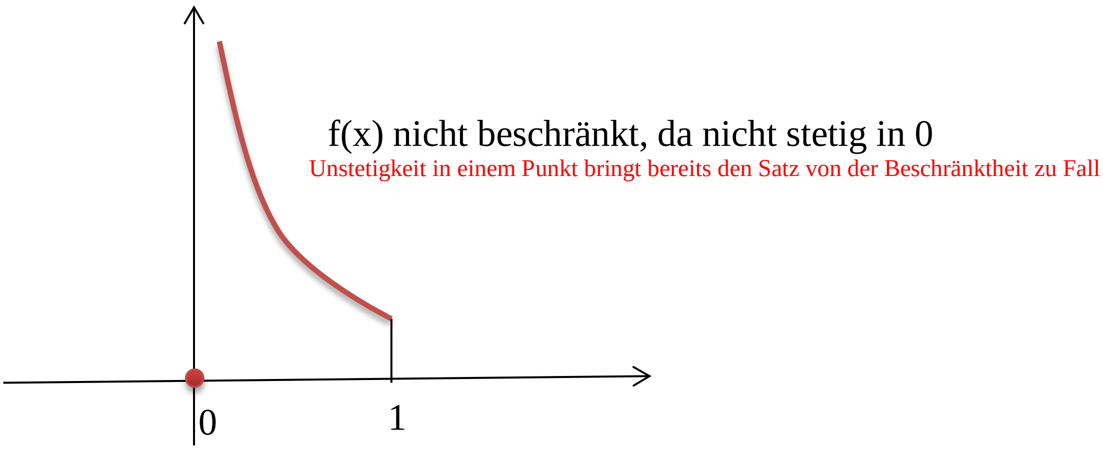
## 4.1 Satz von der Beschränktheit

$$\boxed{f:[a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetig} \Longrightarrow f(x) \text{ beschränkt in } [a,b]}$$




Beispiel:

$$f(x) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{x} & , falls\ 0 < x \leq 1 \\ 0 & , falls\ x = 0 \end{Bmatrix}$$ ist stetig in allen Punkten $0 < x \leq 1$




Folgerung: Stetigkeit auf ganz [a,b] ist eine notwendige Voraussetzung.

Warum kein Widerspruch zum Satz von der Beschränktheit?

$f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig in (0,1], aber nicht beschränkt.

Folgerung:

Satz von der Beschränktheit nur richtig für abgeschlossene Intervalle [a,b].

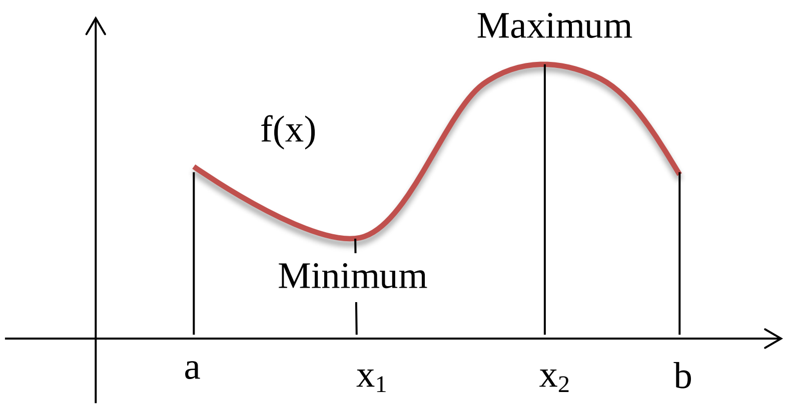
Ein wichtiges Ergebnis aus der Optimierungstheorie ist der folgende Satz

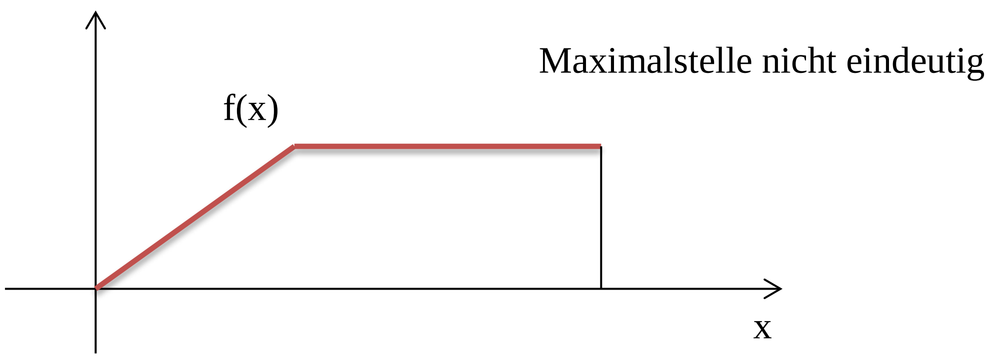
## 4.2 Satz vom Minimum und Maximum (Satz von Weierstraß)

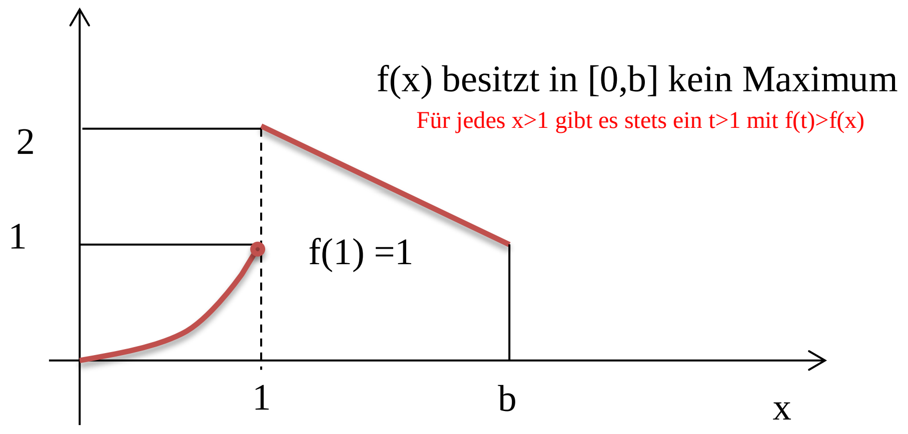
Jede auf [a,b] stetige Funktion f nimmt dort ihr Maximum und Minimum an, d.h. es existieren $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit

$$\boxed{f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a,b]}$$

Der Satz von Weierstraß gibt nur Auskunft darüber, dass eine Extremalstelle existiert. Zur Bestimmung der Extramalstellen gibt es verschiedene Optimierungsverfahren, z.B. kann man Methoden der Differentialrechnung anwenden, die im nächsten Kapitel betrachtet werden.(Andere Methoden: Genetische Algorithmen, Gradientenmethode)






<u>Folgerung</u>: Stetigkeit ist eine notwendige Voraussetzung

$f(x) = x$ ist in (0,1) stetig, besitzt dort aber weder ein Minimum noch ein Maximum.

<u>Folgerung</u>: Abgeschlossenheit des Intervalls ist eine notwendige Voraussetzung.

*Beweis der Sätze 4.1 und 4.2.*

Wir geben nur den Beweis für das Maximum. Der Übergang von $f$ zu $-f$ liefert dann die Behauptung für das Minimum. Sei

$$A := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Es gilt $A = \infty$, falls $f$ nicht nach oben beschränkt ist.

Dann existiert eine Folge $x_n \in [a,b], n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, besitzt sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = p \in [a,b].$$

Aus der Stetigkeit von $f$ folgt

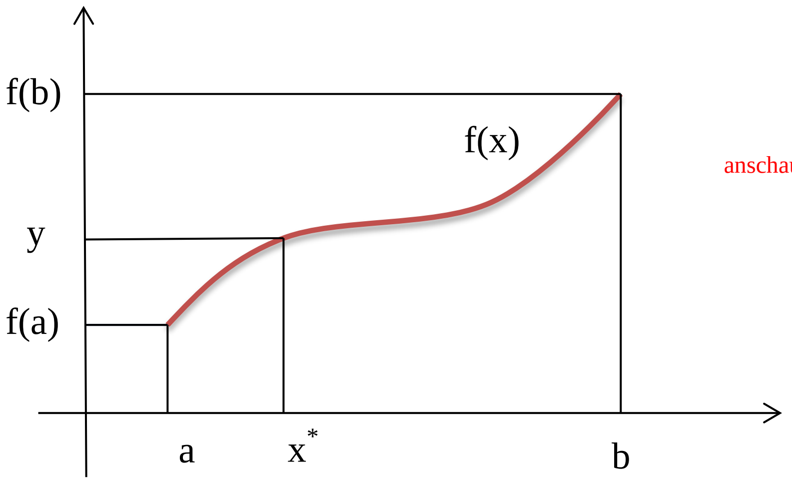
$$f(p) = \lim_{n\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = A$$

insbesondere ist $A \in \mathbb{R}$, also ist $f$ nach oben beschränkt und nimmt in $p$ ihr Maximum an.

☺

## 4.3 Zwischenwertsatz

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf [a,b] und sei y eine Zahl zwischen f(a) und f(b). Dann gibt es mindestens ein $x^* \in [a,b]$ mit $f(x^*) = y$.




anschaulich klar

*Beweis.*

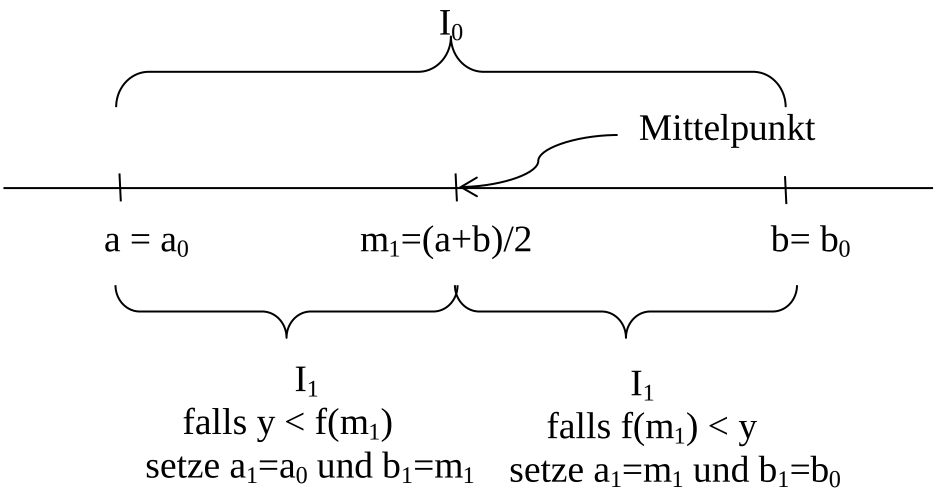
Sei $f(a) < f(b)$.( Beweis für $f(a) > f(b)$ analog)

Man konstruiere durch Intervallhalbierung eine Folge von Intervallen $I_0 = [a_0, b_0] = [a,b],\ I_1 = [a_1, b_1], \ldots$ mit $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$, so dass

$$f(a_n) < y < f(b_n)$$

$I_k$ nennt man auch Intervallschachtelung.

Vorgehensweise:




Es gilt dann

$$a \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b$$

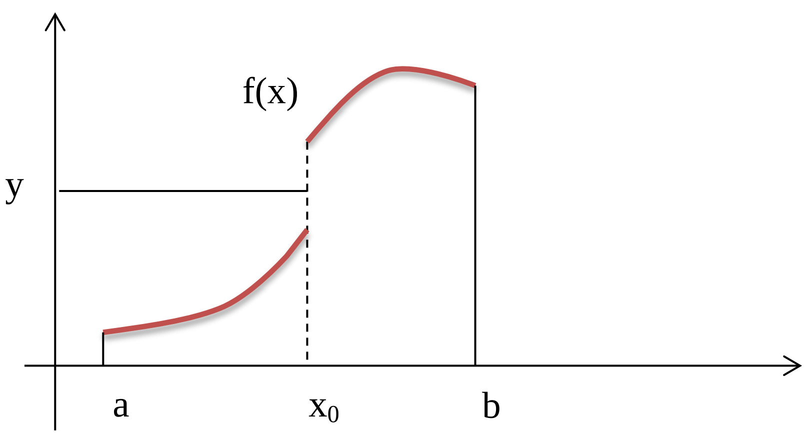
Es folgt

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^{n-1}} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = x^*$$

$$f(a_n) < y < f(b_n) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq y \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) \xRightarrow{f\ stetig}$$

$$f\left(\underbrace{\lim_{n\to\infty} a_n}_{x^*}\right) \leq y \leq f\left(\underbrace{\lim_{n\to\infty} b_n}_{x^*}\right) \Longrightarrow f(x^*) \leq y \leq f(x^*) \Longrightarrow$$

$$f(x^*) = y$$




Hier existiert zu y kein $x^*$ mit $f(x^*) = y$

Folgerung: Stetigkeit ist eine notwendige Voraussetzung.

## 4.4 Nullstellensatz

Sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig in $[a, b]$ mit $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dann existiert mindestens ein $x^* \in (a, b)$ mit

$$\boxed{f(x^*) = 0}$$

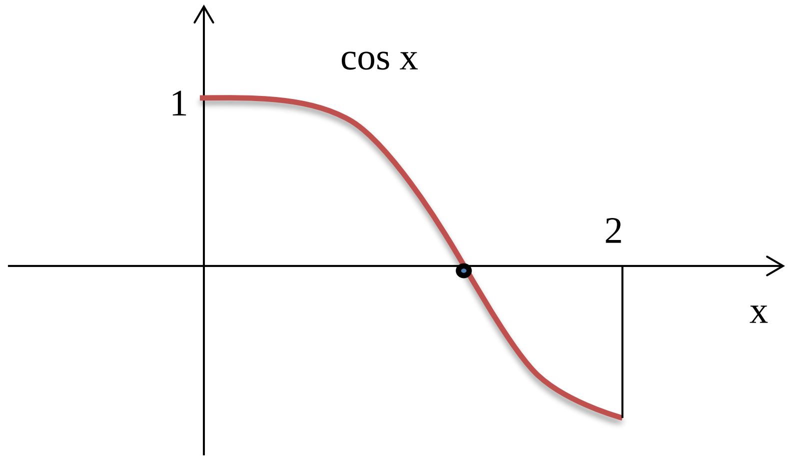
Bem.:

$f(a) \cdot f(b) < 0 \Leftrightarrow$

$f(a)$ und $f(b)$ besitzen unterschiedliche Vorzeichen

Beweis: folgt aus dem Zwischenwertsatz für y = 0

<u>Nachtrag</u>: Nullstelle von cos x in [0,2]




cos x streng monoton fallend und stetig in [0,2] $\xRightarrow{Nullstellensatz}$

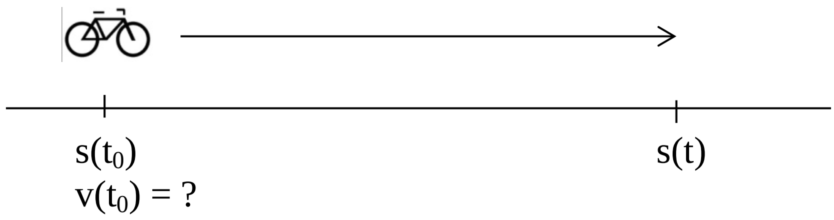
es existiert genau eine Nullstelle in (0,2)     anschaulich natürlich klar

# Kapitel 5: Differentialrechnung

## 1. Differenzierbarkeit

### 1.1 Motivation

Ein Radfahrer fährt längs eines geradlinigen Weges. Es soll die Geschwindigkeit der Fahrradfahrers zum Zeitpunkt $t_0$ an der Stelle $s(t_0)$ bestimmt werden.




Gesucht: Momentangeschwindigkeit $v(t_0)$

$s(t)$ = Ort zum Zeitpunkt t

$$\underline{\text{Durchschnittsgeschwindigkeit}} = \frac{\text{Wegänderung}}{\text{Zeitänderung}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Metermaß und Stoppuhr stehen zur Verfügung.
Der Wert der Durchschnittsgeschwindigkeit hängt von der willkürlichen Wahl des Zeitpunkts t ab. Die Geschwindigkeit könnte sich zwischenzeitlich wesentlich geändert haben.
Je größer die Abweichung zwischen t und $t_0$, um so größer wird i. Allg. die Abweichung zwischen der Momentangeschwindigkeit und der Durchschnittsgeschwindigkeit sein. Durch Verkleinerung des Zeitabstands kommt man der Momentangeschwindigkeit immer näher. Geht man zum Limes $t \to t_0$ über, so erhält man die Momentangeschwindigkeit.

$$\underline{\text{Momentangeschwindigkeit}} : v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

In Analogie zu diesem Beispiel führt man den Begriff der Differenzierbarkeit auf folgende Weise ein

## 1.2 Definition (Differenzierbarkeit)

(1) Eine Funktion y = f(x) heißt in $x_0$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

Für Herleitungen von Formeln ist der zweite Quotient oftmals vorteilhafter

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}\quad (h=x-x_0)$$

existiert.
Der Quotient

$$\boxed{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

heißt Differenzenquotient von f(x) an der Stelle $x_0$.

(2) Ist f(x) in $x_0$ differenzierbar, so heißt der Grenzwert

$$\boxed{f'(x_0):=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

die Ableitung von f(x) an der Stelle $x_0$.

Es ist üblich, differenzierbar durch diff'bar abzukürzen

(3) f(x) heißt in einem Intervall I differenzierbar, wenn f in jedem Punkt $x \in I$ diff'bar ist. Die Funktion

$$\boxed{f': I \to \mathbb{R}, x \to f'(x)}$$

heißt dann die Ableitung von f.

Merke

*Die Ableitung einer Funktion in einem Punkt ist der Limes des Differenzenquotienten.*

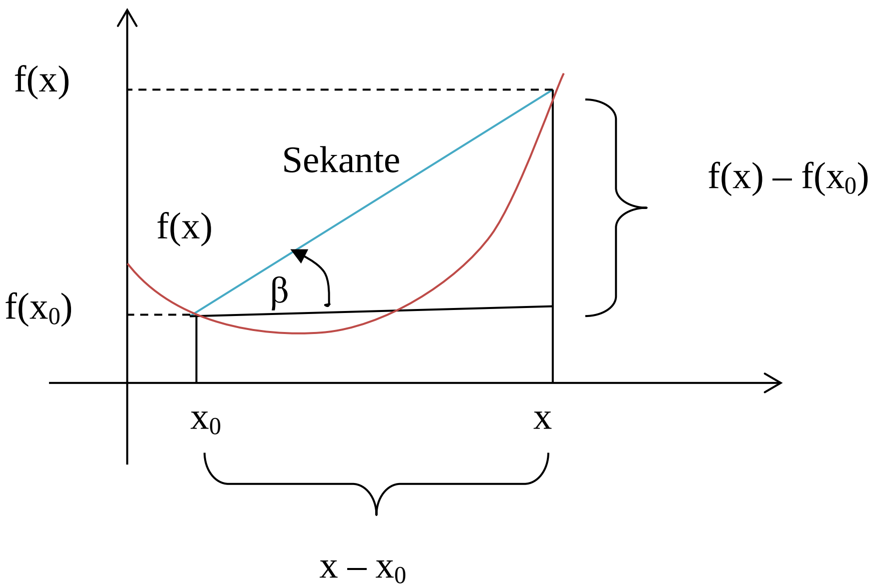
## 1.3 Schreibweisen für Ableitungen von y = f(x)

$$y'(x_0),\qquad f'(x_0),\qquad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0},\qquad \frac{d}{dx}f\Big|_{x=x_0}$$

y' verwendet man hauptsächlich in der Theorie der Differentialgleichungen, dy/dx (dy nach dx ) nennt man Differentialquotient, d/dx ( d nach dx )nennt man Differentialoperator.

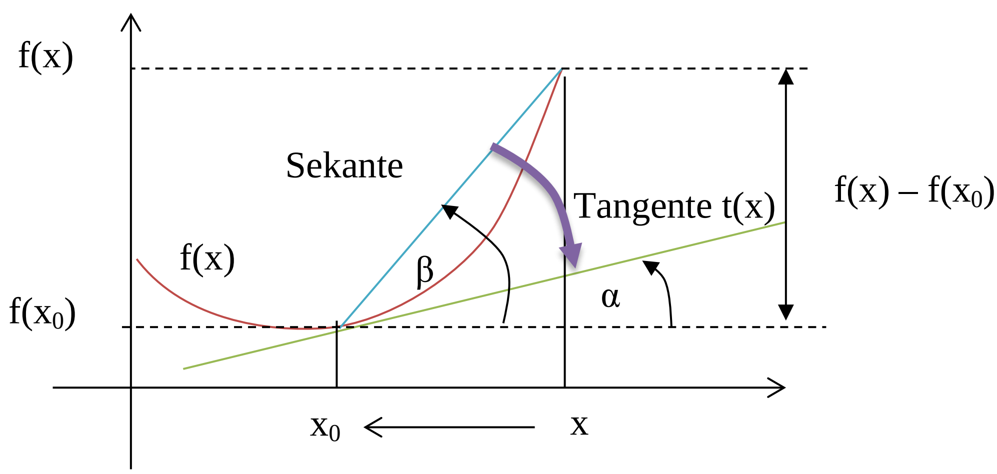
## 1.4 Geometrische Deutung der Ableitung (Tangentengleichung)

### Steigung der Sekante einer Funktion f(x)




Steigung der Sekante: $m_s = \frac{Ordinatenabschnit}{Abszissenabschnitt} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \tan\beta$

### Steigung der Tangente




Geht x gegen $x_0$, so geht die Sekante über in die Tangente und damit die Sekantensteigung in die Steigung der Tangente

Steigung der Tangente in $(x_0, f(x_0))$:

$$\boxed{\underbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\text{Sekantensteigung}} = \boxed{f'(x_0) = \tan\alpha}}$$

$f'(x_0)$ = Steigung der Tangente im Kurvenpunkt ($x_0$,f($x_0$))

Tangentengleichung:

$$\frac{t(x)-t(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \xRightarrow{t(x_0)=f(x_0)} t(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Longrightarrow$$

$$\boxed{t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)} \quad \underline{\text{Tangentengleichung}}$$

Hiermit kann man bei Kenntnis der Ableitung in $x_0$ sofort die Gleichung der Tangente aufstellen. Wie man die Ableitungen einer Funktion bestimmen kann, wird Gegenstand des nächsten Abschnitts sein. Zunächst soll noch der Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differnzierbarkeit untersucht werden.

## 1.5 Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Satz:

$$\boxed{f(x)\text{differenzierbar in } x_0 \Longrightarrow f(x)\text{stetig in } x_0}$$

Beweis:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) =$$

$$\underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0)} \underbrace{\lim_{x\to x_0}(x - x_0)}_{0} = 0 \Longrightarrow$$

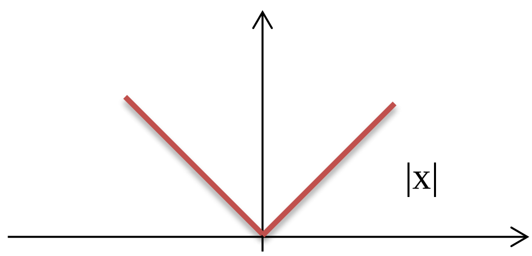
$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Longrightarrow f$ stetig in $x_0$

Bemerkung: Umkehrung gilt i.Allg. nicht

$$\boxed{f(x)\text{stetig } x_0 \not\Rightarrow f(x) \text{ differenzierbar in } x_0}$$

(Standard)Beispiel:

$f(x) = |x|$ ist stetig, aber nicht differenzierbar in 0



Beweis: f(x)=|x| stetig in 0 (vgl. Kap. 4, 2.2)

$$l-\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=l-\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{|h|-|0|}{h}=l-\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{-h}{h}=-1$$

$$r-\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=r-\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{|h|-|0|}{h}=r-\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{h}{h}=1$$

$\Longrightarrow f(x)=|x|$ nicht diff'bar in 0

## 1.6 Höhere Ableitung

Jede Ableitung, die selbst wieder diff'bar ist, kann abermals abgeleitet werden.

1. Ableitung: $f'(x)$ d zwei f nach dx Quadrat
2. Ableitung: $f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\frac{d^2}{dx^2}f(x)$

$\vdots$

d n f nach dx hoch n

n. Ableitung: $f^{(n)}(x)=\frac{d^n}{dx^n}f(x)$

Hinweis: Die Ableitung einer diff'baren Funktion braucht nicht mehr diff'bar sein.

Beispiel: Die Funktion $f(x)=\frac{1}{2}x|x|$ ist diff'bar in $\mathbb{R}$ mit

$$f'(x)=|x|,\qquad x\in\mathbb{R}$$

$f'(x)=|x|$ ist aber nicht in 0 diff'bar (Beweis später).

## 1.7 Bezeichnungen

Sei I ein Intervall.

C(I) Menge der stetigen Funktionen auf I

$C^1(I)$ Menge der diff'baren F.

$C^n(I)$ Menge n-mal diff'baren F.

$C^\infty(I)$ Menge der beliebig oft diff'baren F.

## 1.8 Stetig differenzierbare Funktion

Definition: Eine Funktion f(x) heißt stetig diff'bar, wenn sie diff'bar und die Ableitung $f'(x)$ stetig ist.

Bsp.: $f(x) = \frac{1}{2}x|x|$ ist stetig diff'bar in $\mathbb{R}$, da $f'(x) = |x|$ stetig in $\mathbb{R}$.

stetig diff'bar heißt nicht stetig und diff'bar, was auch keinen Sinn macht, da jede diff'bare von vorne herein stetig ist.

# 2. Ableitung einiger elementarer Funktionen

## 2.1 Ableitung der konstanten Funktion

Die konstante Funktion f(x) = c ist in ℝ diff'bar mit

$$\boxed{f'(x) = 0}$$

Beweis:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = 0$$

☺

## 2.2 Ableitung von $f(x) = x^n$

Die Funktion $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ist in ℝ diff'bar mit

$$\boxed{f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$$

Beweis:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} \overset{Bin.F.}{\cong}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[x_0^n + \binom{n}{1}x_0^{n-1}h + \binom{n}{2}x_0^{n-2}h^2 + \dots + h^n\right] - x_0^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[nx_0^{n-1} + \binom{n}{2}x_0^{n-2}h^1 + \dots + h^{n-1}\right] = n \cdot x_0^{n-1}$$

☺

## 2.3 Ableitung von $e^x$

Die Funktion $f(x) = e^x$ ist in ℝ diff'bar mit

$$\boxed{f'(x) = e^x}$$

Die Ableitung ergibt die gleiche Funktion. Dies ist eine sehr wichtige Eigenschaft.

Beweis:

Es gilt $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ (ohne Beweis)

Dies zeigt man, indem man die Potenzreihenentwicklung von $(e^x-1)/x$ betrachtet

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0}(e^h-1)}{h} = e^{x_0}\lim_{h\to 0}\frac{(e^h-1)}{h} = e^{x_0}$$

☺

## 2.4 Ableitung von f(x) = sin x

Die Funktion $f(x) = \sin x$ ist in ℝ diff'bar mit

$$\boxed{f'(x) = \cos x}$$

Beweis:

Dies zeigt man mit der Potenzreihenentwicklung von sin x und cos x

Es gilt $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} = 0 \; und \; \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (ohne Beweis)

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h} \overset{A.T.}{=}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x_0 (\cos h - 1) + \cos x_0 \sin h}{h} =$$

$$= \sin x_0 \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x_0 \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

$$= \sin x_0 \cdot 0 + \cos x_0 \cdot 1 = \cos x_0$$

☺

## 2.5 Zusammenfassung

Folgende Ableitungen sollte man unbedingt wissen ⚠

| $f(x)$ | $f'(x)$ | |
|---|---|---|
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | 2.2 |
| $e^x$ | $e^x$ | 2.3 |
| $\sin x$ | $\cos x$ | 2.4 |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | ohne Beweis |

Hinweis: Die Ableitungen weiterer elementarer Funktionen können mit Hilfe der Tabelle und Ableitungsregeln hergeleitet werden.

# 3. Ableitungsregeln

## 3.1 Grundregeln

Seien u und v diff'bare Funktionen. Es gilt

Summenregel: $\boxed{\big(u(x)+v(x)\big)' = u'(x)+v'(x)}$

Faktorregel: $\boxed{\big(c\cdot u(x)\big)' = c\cdot u'(x)\,, c \in \mathbb{R}}$

Produktregel: $\boxed{\big(u(x)\cdot v(x)\big)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)}$

Quotientenregel: $\boxed{\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2}, v(x) \neq 0}$

Beweis für Produktregel: Sei $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) \overbrace{-u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h)}^{0} - u(x)v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\big(u(x+h)-u(x)\big)v(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{u(x)(v(x+h)-v(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} v(x+h) + u(x)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

$$= u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

Hieraus folgt auch, dass das Produkt von diff'baren Funktionen wieder diff'bar ist.

## 3.2 Beispiele

(1) $f(x) = 3x^2 + \sin x + 2e^x, \quad f'(x) = ?$

Lsg.: $f'(x) = 6x + \cos x + 2e^x$

(2) $f(x) = 3x \sin x\,, \quad f'(x) = ?$

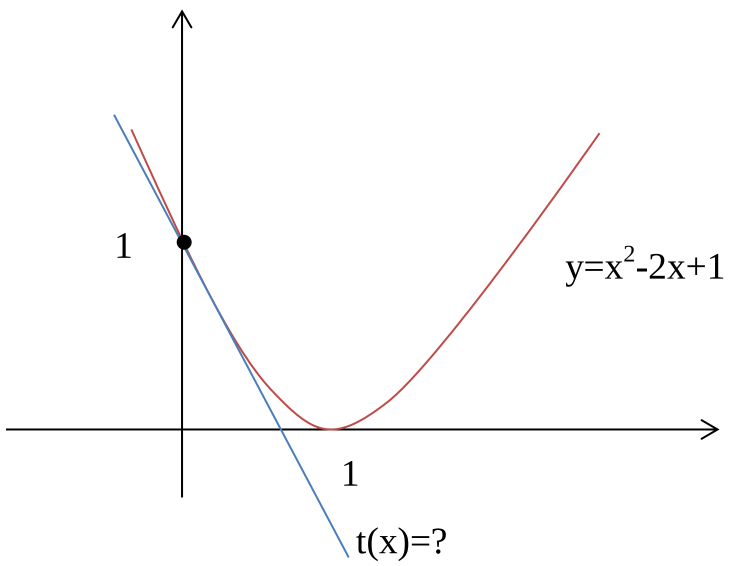
Lsg.: $f'(x) = 3x \cos x + 3 \sin x$

(3) $f(x) = \tan x, \quad f'(x) = ?$

Lsg.: $$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos\ x - \sin\ x\ (\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Somit gilt: $\boxed{(\tan x)' = 1 + \tan^2 x}$

(4) Gesucht die Gleichung der Tangente im Kurvenpunkt P(0,1) der Parabel $y = x^2 - 2x + 1$.




Lsg.: $f'(x) = 2x - 2, \qquad f'(0) = -2$

$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = -2x + 1$

(5) $f(x) = \frac{1}{2}x|x|$ ist in $\mathbb{R}$ diff‘bar mit

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}x|x|\right)' = |x|$$

Beweis:

$x > 0$: $f'(x) = \left(\frac{1}{2}x \cdot x\right)' = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x = |x|$

$x < 0$: $f'(x) = \left(\frac{1}{2}x \cdot (-x)\right)' = \left(-\frac{1}{2}x^2\right)' = -x = |x|$

$x = 0$: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}h|h| - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{2}|h| = 0 = |0|$

## 3.3 Kettenregel

Sei $f(x) = g(v(x))$ (Verkettete Funktion). Dann gilt

$$\boxed{f'(x) = v'(x) \cdot g'\big(v(x)\big)}$$ Innere mal äußere Ableitung

falls $v$ und $g$ diff’bare Funktionen sind.

*ohne Beweis*

## 3.4 Beispiele zur Kettenregel

(1) $f(x) = \sin(x^2)$, $f'(x) = ?$

Lsg.:

$u = v(x) = x^2 \Longrightarrow v'(x) = 2x$

$g(u) = \sin u \Longrightarrow g'(u) = \cos u \Longrightarrow g'\big(v(x)\big) = \cos x^2$

$f'(x) = v'(x) \cdot g'\big(v(x)\big) = 2x \cdot \cos x^2$

(2) $f(x) = a^x$ $(a > 0)$, $f'(x) = ?$

Lsg.:

$f(x) = a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln a}$

$u = v(x) = x \ln a \Longrightarrow v'(x) = \ln a$

$g(u) = e^u \Longrightarrow g'(u) = e^u \Longrightarrow g'\big(v(x)\big) = e^{x \ln a} = a^x$

Es folgt

$$\boxed{(a^x)' = (\ln a) \cdot a^x}$$

<u>Bsp</u>.: $(2^x)' = (\ln 2) \cdot 2^x$

## 3.5 <u>Ableitung der Umkehrfunktion</u>

Ist $y = f(x)$ eine diff'bare umkehrbare Funktion, dann ist die Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ ebenfalls diff'bar und es gilt:

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}} \qquad f\text{ür } f'(x) \neq 0$$

*Beweis.*

$$\underbrace{\left(f\left(f^{-1}(y)\right)\right)'}_{Abl.nach\ y} = (y)' = 1 \ (*)$$

Nach der Kettenregel für $f(f^{-1}(y))$ mit $u = f^{-1}(y)$ und $g(u) = f(u)$ gilt:

$$1 \overset{(*)}{\triangleq} \left(f\left(f^{-1}(y)\right)\right)' = \underbrace{(f^{-1})'(y)}_{innere\ Abl.} \cdot \underbrace{f'\left(f^{-1}(y)\right)}_{\text{äußere } Abl.} \Rightarrow$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

## 3.6 <u>Beispiele</u>

(1) $f(x) = \ln x\, , f'(x) = ?$

<u>Lsg</u>.:

$y = f(x) = e^x\, ,\ x = f^{-1}(y) = \ln y$

$f'(x) = e^x$

$(f^{-1})'(y) = (\ln y)' = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$

Umbenennung der Variablen:

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}} \quad x > 0$$

(2) $f(x) = \arctan(x)\,, f'(x) = ?$

Lsg.:

$y = f(x) = \tan x\,,\ \ x = f^{-1}(y) = \arctan y$

$f'(x) = 1 + \tan^2 x\ \ (3.2(3))$

$$(f^{-1})'(y) = (\arctan\ y)' = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1 + (\tan(\arctan y))^2}$$

$$= \frac{1}{1+y^2}$$

Umbenennung der Variablen:

$$\boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

(3) $f(x) = x^\lambda\ (x > 0\ und\ \boxed{\lambda \in \mathbb{R}}), f'(x) = ?$

für λ aus N wurde bereits die Ableitung bestimmt

Lsg.:

$y = x^\lambda = e^{\ln(x^\lambda)} = e^{\lambda \ln x}$

Kettenregel: $u = v(x) = \lambda \ln x,\ \ v'(x) = \frac{\lambda}{x}$

$g(u) = e^u, g'(u) = e^u \Longrightarrow g'(v(x)) = e^{\lambda \ln x}$

$$\left(x^\lambda\right)' = \frac{\lambda}{x} e^{\lambda \ln x} = \frac{\lambda}{x} x^\lambda$$

Es folgt

$$\boxed{\left(x^\lambda\right)' = \lambda x^{\lambda - 1},\ \ x > 0\ und\ \lambda \in \mathbb{R}}$$

Bsp.: $\left(\sqrt[5]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)' = \frac{1}{5} x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$

(4) $f(x) = (\sin x)^x\,, f'(x) = ?$

Lsg.:

$f(x) = e^{x \ln(\sin x)}$

$u = v(x) = \ x \ln(\sin x)$

$$\Longrightarrow v'(x) \overset{Kettenregel}{\triangleq} \ln(\sin x) + \ x \cdot \underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{innere\ Abl.} \cdot \underbrace{\cos x}_{äußere\ Abl.}$$

$g(u) = e^u, g'(u) = e^u \Longrightarrow g'\big(v(x)\big) = e^{x \ln(\sin x)} = (\sin x)^x$

$$f'(x) = \left(\ln(\sin x) + \frac{x}{\sin x}\cos x\right) \cdot (\sin x)^x$$

# 4. Taylorreihen

## 4.1 Ableitung einer Potenzreihe

Die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ habe den Konvergenzradius r > 0. f(x) ist in $(x_0 - r, x_0 + r)$ diff'bar und es gilt:

$$\boxed{f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(a_n (x - x_0)^n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n \cdot (x - x_0)^{n-1}}$$

die Ableitung darf man die Summe reinziehen

Der Konvergenzradius ist dann ebenfalls r.

(ohne Beweis)

Wendet man den Satz auf die Ableitung f' an, so folgt hieraus, dass auch die 2. Ableitung ebenfalls diff' bar ist. Durch wiederholte Anwendung des Satzes ergibt sich dann:

Folgerung:

f(x) ist in $(x_0 - r, x_0 + r)$ beliebig oft diff'bar.

## 4.2 Beispiel

geometrische Reihe

Es gilt $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , x \in (-1,1)$

Damit erhält man eine Potenzreihenentwicklung für die Funktion 1/(1-x)$^2$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \boxed{\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}} \quad für\ x \in (-1,1)$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \boxed{\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1)\, x^{n-2}} \quad für\ x \in (-1,1)$$

$$\vdots$$

## 4.3 Satz von Taylor

Für eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ mit Konvergenzradius r > 0 gilt:

der Quotient heißt dann Taylorkeffizient

$$\boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}$$ Taylorkoeffizient , $k = 0,1,2, \dots (f^{(0)}(x) = f(x))$

bzw.

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}$$ Taylorreihe

Beweis:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n \cdot (x - x_0)^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{d^k}{dx^k}(x - x_0)^n$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \underbrace{a_n n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{b_n}(x - x_0)^{n-k}$$

$$= b_k + b_{k+1}(x - x_0) + b_{k+2}(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$f^{(k)}(x_0) = b_k = a_k k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-k+1) = a_k \cdot k! \Longrightarrow$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Bezeichnung:

Für $x_0 = 0$ heißt die Taylorreihe

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}$$ McLaurin-Reihe

## 4.4 Identitätssatz für Potenzreihen

Ist $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ mit Konvergenzradius r > 0, so gilt

$$\boxed{a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots}$$

Beweis:

d.h. die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung sind eindeutig bestimmt und stimmen mit den Taylorkoeffizienten überein

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = b_k \quad , k = 0,1,2, \ldots$$

☺

Wir sind bisher immer von einer Potenzreihe ausgegangen. Jetzt soll untersucht werden, wie man zu einer gegebenen Funktion eine Potenzreihenentwicklung bestimmen kann. Diese Potenzreihe muss nach dem Satz von Taylor zwangsläufig die Taylorreihe sein.

## 4.5 Taylorformel

Sei f(x) in [a,b] wenigstens (k+1)-mal stetig diff'bar und seien $x, x_0 \in (a, b)$. Dann heißt

$$\boxed{T_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n} \quad \text{Taylorpolynom vom Grad k}$$

und

$$\boxed{R_k(x) = f(x) - T_k(x)} \quad \text{Restglied}$$

Taylorformel

$$\boxed{f(x) = T_k(x) + R_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(k)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_k(x)}$$

Restgliedformel von Lagrange (ohne Beweis)

$$\boxed{R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\overline{x})}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}} \quad \text{für ein } \overline{x} \text{ zwischen } x_0 \text{ und } x$$

Bem.: $\overline{x} = \overline{x}(k, x, x_0)$ hängt von $k, x$ und $x_0$ ab.

Die Restgliedformel sagt nur aus, dass es ein solches $\overline{x}$ gibt. Es liefert nicht den Wert von $\overline{x}$. Wenn man $\overline{x}$ kennen würde, so wüsste man die genaue Abweichung zwischen dem Taylorpolynom und f(x). Jedoch kann man aus der Restgliedformel eine Abschätzung für die Abweichung zwischen $T_k$ und f(x) herleiten.

Restgliedabschätzung (=Abschätzung der Abweichung zwischen f(x) und $T_k(x)$)

$$\boxed{|R_k(x)| \le \max_{t \in [a,b]} |f^{(k+1)}(t)| \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}}$$

Beweis der Restgliedabschätzung

$$|R_k(x)| = |f^{(k+1)}(\overline{x})| \frac{|x-x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \leq \max_{t\in[a,b]} |f^{(k+1)}(t)| \frac{|x-x_0|^{k+1}}{(k+1)!}$$

Das Maximum wird nach dem Satz von Weierstraß angenommen, da f $^{(k+1)}$ nach Vor. im Intervall [a,b] stetig ist.

## 4.6 Beispiel (Taylorpolynome von sin x)

Betrachten wir zunächst die Taylorpolynome von sin x mit Entwicklungsp. 0

Taylorpolynome von sin x mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$f(x) = \sin x\,, \quad f^{(k)}(x) = \begin{Bmatrix} \pm\sin x \\ \pm\cos x \end{Bmatrix}\,, k = 1, 2, \ldots$$

$$f(x) = \sin x = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(k)}(0)}{n!} x^n + R_k(x), \quad k = 0,1,2,..$$

$$|f^{(k+1)}(x)| \leq 1 für\ alle\ x \in \mathbb{R} \Longrightarrow$$

$$|R_k(x)| \leq \max_{t\in\mathbb{R}} |f^{(k+1)}(t)| \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

$\boxed{k = 2}$ Betrachten wir zunächst das Taylorpolynom vom Grad 2

$$\sin x = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + R_2(x) =$$

$$= \sin 0 + \underbrace{\cos(0)}_{1} \cdot x - \underbrace{\frac{\sin(0)}{2}}_{0} x^2 + R_2(x) \Longrightarrow$$

$$\boxed{\sin x = x + R_2(x)}$$

$$|\sin x - x| = |R_2(x)| \leq \frac{|x|^3}{3!} = \frac{|x|^3}{6}$$

$$\begin{Bmatrix} |x| \leq 1 \Longrightarrow |\sin x - x| \leq \dfrac{1}{6} \\ |x| \leq \dfrac{1}{2} \Longrightarrow |\sin x - x| \leq \dfrac{1}{48} \\ |x| \leq \dfrac{1}{10} \Longrightarrow |\sin x - x| \leq \dfrac{1}{6.000} \end{Bmatrix}$$

Das bedeutet, dass für kleine x sin x durch x ersetzt werden kann. Man kann dies auch mit dem Taschenrechner ausprobieren, z.B. sin 0.1 ≈0.1.

$\boxed{k = 4}$

$$\sin x = \underbrace{\frac{f^{(0)}(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2}_{x}$$

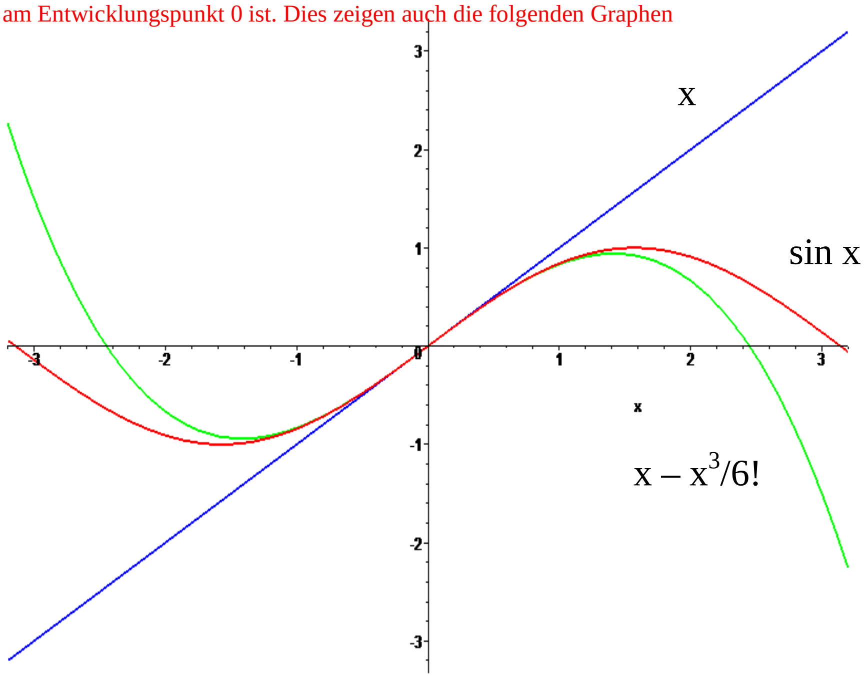
$$+ \underbrace{\frac{f'''(0)}{3!}}_{-\frac{1}{3!}}x^3 + \underbrace{\frac{f^{(4)}(0)}{4!}}_{0}x^4 + R_4(x) \Longrightarrow$$

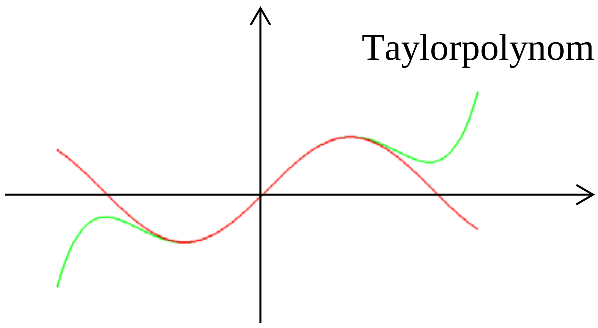
$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_4(x)}$$

$$|\sin x - x + \frac{x^3}{3!}| = |R_4(x)| \le \frac{|x|^5}{5!} = \frac{|x|^5}{120}$$

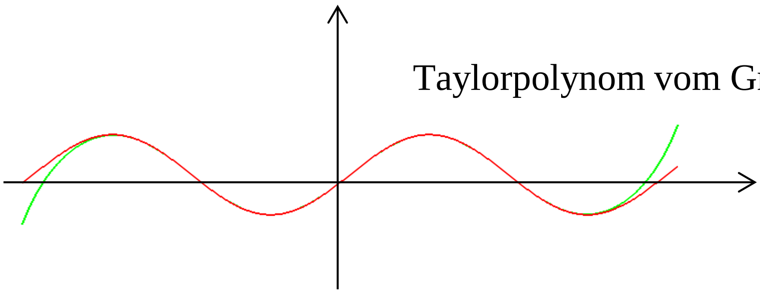
$$|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)| \le \left\{\begin{array}{cc} \frac{1}{120} & falls\ |x| \le 1 \\ \frac{1}{3.840} & falls\ |x| \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12.000.000} & falls\ |x| \le \frac{1}{10} \end{array}\right\}$$

Dies zeigt, dass die Näherung zwischen sin x und seinem Taylorpolynom umso besser ist, je größer k und je näher x am Entwicklungspunkt 0 ist. Dies zeigen auch die folgenden Graphen





Taylorpolynom vom Grad 7



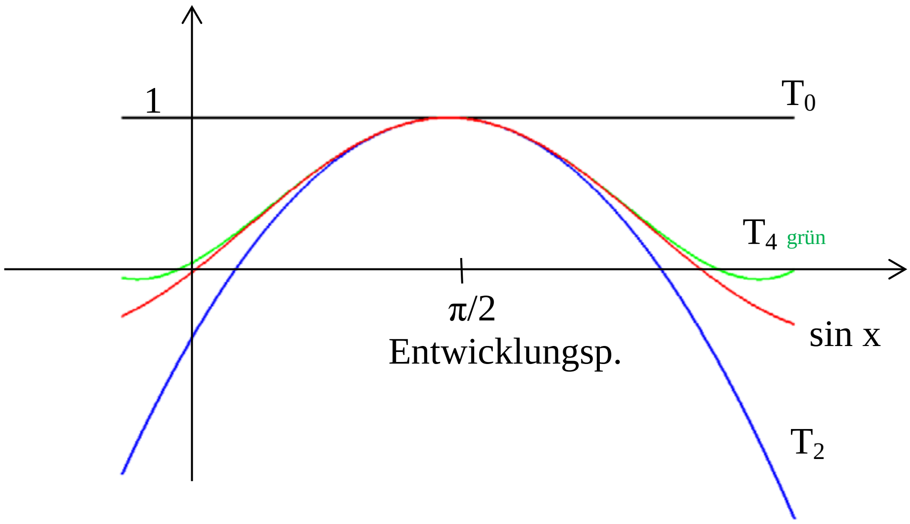
Taylorpolynom vom Grad 15(grün)

<u>Taylorpolynom von sin x mit Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$:</u>

$$\sin x = \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{0!} + \frac{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^1 + \frac{f''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + R_4(x) =$$

$$= \frac{sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{0!} + \frac{cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^1 - \frac{sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + R_4(x) =$$

$$= \underbrace{\underbrace{\underbrace{1}_{T_0(x)} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}_{T_2(x)} + \frac{1}{24}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4}_{T_4(x)} + R_4(x)$$




Man erkennt hier wieder, dass in der Nähe des Entwicklungspunkts π/2 eine sehr gute Näherung zwischen dem Taylorpolynom und f(x) besteht, aber je weiter man sich vom Entwicklungspunkt entfernt, um so größer ist die Abweichung.

Jetzt soll untersucht werden, wie man zu einer gegebenen Funktion eine Potenzreihenentwicklung bestimmen kann. Diese Potenzreihe muss nach dem Satz von Taylor zwangsläufig die Taylorreihe sein. Eine notwendige Voraussetzung ist nach dem Satz von Taylor, dass die Funktion beliebig oft diff'bar ist.
Der folgende Satz gibt Auskunft, wann die Taylorreihe mit f(x) übereinstimmt.

Formal kann man die Taylorreihe unter dieser Voraussetzung aufstellen, aber es ist dann nicht automatisch gewährleistet, dass die Taylorreihe mit der Funktion übereinstimmt.
*Beispiel*: $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, x \neq 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$ ist beliebig oft diff'bar mit $f^{(k)}(0)=0$ für alle k. Die Taylorreihe ist damit die Nullfunktion und stimmt damit nicht mit f(x) überein.

## 4.7 Satz

beliebig oft diff'bar

Sei $f \in C^{\infty}[a,b]$ , $x_0 \in (a,b)$ der Entwicklungspunkt. Die Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

konvergiert dann für Punkte $x \in [a,b]$ innerhalb des Konvergenzradius gegen f(x), wenn

$$\boxed{\lim_{m\to\infty} R_m(x) = 0}$$

zum Nachweis von $R_m \to 0$ kann man dann die Restgliedabschätzung benutzen

Beweis: Sei $x \in [a,b]$ $mit$ $|x-x_0| < r$ (r=Konvergenzradius) genau dann, wenn die Folge der Partialsummen gegen f(x) konvergieren

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \xrightarrow[m\to\infty]{} f(x) \Leftrightarrow$$

$$f(x) - \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = R_m(x) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

## 4.8 Beispiele von Taylorreihen

(1) Nach dem Identitätssatz gilt: Potenzreihe =Taylorreihe, d.h. es gilt z.B.

Taylorreihe von $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

Taylorreihe von $sin\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

Hinweis: Die Taylorreihe ist eine Formel zur Berechnung einer Potenzreihenentwicklung zu einer gegebenen Funktion f(x).

($e^x$ und $sin\, x$ sind via Potenzreihen eingeführt worden.)

ln x kann nicht in eine Taylorreihe um 0 entwickelt werden, da ln x in 0 nicht definiert ist

(2) ln x mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$, Taylorreihe = ?

Hinweis: ln x nicht entwickelbar um 0, da ln x nicht in 0 definiert ist.

Lösung:

Taylorkoeffizient: $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$

| | | |
|---|---|---|
| $f(x) = \ln x$ | $f(1) = 0$ | $a_0 = \frac{\ln 1}{0!} = 0$ |
| $f'(x) = \frac{1}{x}$ | $f'(1) = 1$ | $a_1 = \frac{1}{1} = 1$ |
| $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ | $f''(1) = -1$ | $a_2 = -\frac{1}{2}$ |
| $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$ | $f'''(1) = 2$ | $a_3 = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$ |
| $f^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4}$ | $f^{(4)}(1) = -6$ | $a_4 = \frac{-6}{4!} = -\frac{1}{4}$ |

Allgemein

$$\left\{ \begin{array}{c} a_0 = 0 \\ a_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \quad n > 0 \end{array} \right\}$$

Damit gilt

$$\boxed{\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n} \qquad \underline{\text{Taylorreihe von}}\ \ln x$$

<u>Konvergenzradius</u>: $r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$

Für die Randpunkte x=0 und x=2 gilt:

x=0 : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(-1)^n = -\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}_{harmonische\ R.}$ divergent

Leibnizreihe

x=2 : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergent

Damit gilt:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2}$$

(3) $f(x) = xe^x$, McLaurin-Reihe von $f(x) = ?$

<u>Lösung</u>.:

Berechnung von Taylorkoeffizienten oftmals sehr aufwendig. Es geht hier einfacher:

$$xe^x = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1} = x + \frac{1}{1!}x^2 + \frac{1}{2!}x^3 + \cdots$$

$$= \text{Taylorreihe (Identitätssatz)}$$

Warum kann man x in die Summe reinziehen? Hierzu halte man zunächst x fest. Die Reihe ist dann eine numerische Reihe, d.h. eine Reihe von Zahlen. Nach den Rechenregeln für numerische Reihen darf man die Zahl x in die Reihe reinmultiplizieren. Die Reihe bleibt konvergent. Dies gilt dann für alle Zahlen x, d.h. die Reihe konvergiert in ganz R. Die Reihe stellt dann wieder eine Potenzreihe dar, die nach dem Identitätssatz mit der Taylorreihe übereinstimmt.

Merke

| |
|---|
| Zur Bestimmung einer Taylorentwicklung benutze man, sofern möglich, bekannte Potenzreihenentwicklungen. |

(4) $f(x) = (1+x)^s, s \in \mathbb{R}$, McLaurin-Reihe von f(x) =?

Lsg.:

$f(x) = (1+x)^s$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = s(1+x)^{s-1}$ $\qquad f'(0) = s$

$f''(x) = s(s-1)(1+x)^{s-2}$ $\qquad f''(0) = s(s-1)$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = s(s-1)\dots(s-(n-1))(1+x)^{s-n}, f^{(n)}(0) = s(s-1)\dots(s-n+1)$

$$(1+x)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s(s-1)\dots(s-n+1)}{n!} x^n$$

Man kann die Definition des Binomialkoeffizienten für reelle Zahlen erweitern. Der untere Wert n muss aber eine natürliche Zahl sein.

Binomialkoeffizient für $\boxed{s \in \mathbb{R}}$: $\binom{s}{n} = \frac{s(s-1)\dots(s-n+1)}{n!}$

$$\boxed{(1+x)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n}$$ Binomische Reihe

Konvergenzradius

1. Fall $(s = m \in \mathbb{N})$

für m>n ist im Zähler ein Faktor 0 und damit auch der Binomialkoeffizient; dies gilt nur, wenn m eine natürliche Zahl ist.

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n, da \binom{m}{n} = 0 \text{ für } m > n$$

Konvergenz in $\mathbb{R}$

2. Fall $(s \notin \mathbb{N})$

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{s(s-1)\dots(s-n+1)}{n!}}{\frac{s(s-1)\dots(s-n+1)(s-n)}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{s-n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{s}{n}-1}\right| = 1$$

<u>Beispiel</u> $\left(s = \frac{1}{2}\right)$

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3}x^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{4!}x^4 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots$$

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, wie man mit Hilfe der Differentialrechnung Eigenschaften wie Extremwerte, Wendepunkte, Monotonie und Krümmungsverhalten bestimmen kann.

# 5. Kurvenunteruntersuchungen

*5.1 Definitionen.* Sei $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man sagt, $f$ habe in $x \in (a, b)$ ein *lokales Maximum (Minimum)*, wenn ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass

$f(x) \geq f(\xi)\ \ (bzw. f(x) \leq f(\xi))$ für alle $\xi$ mit $|x - \xi| < \epsilon$.

Trifft in der letzten Zeile das Gleichheitszeichen nur für $\xi = x$ zu, so nennt man $x$ ein *isoliertes Maximum (Minimum)*.

$x \in (a, b)$ heißt *globales Maximum (Minimum)*, wenn für alle $\xi \in (a, b)$ $f(x) \geq f(\xi)\ \ (bzw. f(x) \leq f(\xi))$ gilt.

*Extremum* ist der gemeinsame Oberbegriff für Maximum und Minimum.

## 5.2 Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum:

*Satz.* Die Funktion $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ besitze in $x \in (a, b)$ ein lokales Extremum und sei in $x$ differenzierbar. Dann ist $f'(x) = 0$.

*Beweis.* $f$ besitze in $x$ ein lokales Maximum. Dann existiert ein $\epsilon > 0$, sodass $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq (a, b)$ und

$$f(\xi) \leq f(x)\ \ für\ alle\ \xi \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$$

Daraus folgt

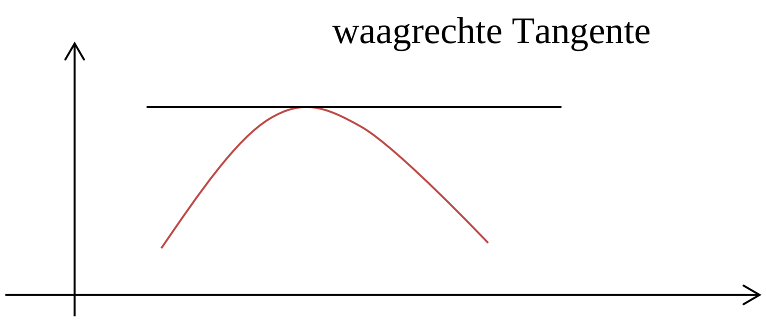
$$f'_{+}(x) = \lim_{\xi \searrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \leq 0$$

$$f'_-(x) = \lim_{\xi \nearrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \geq 0$$

Da $f$ in $x$ differenzierbar ist, gilt $f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x)$; also muss $f'(x) = 0$ sein.

Für ein lokales Minimum ist der Satz analog zu beweisen.

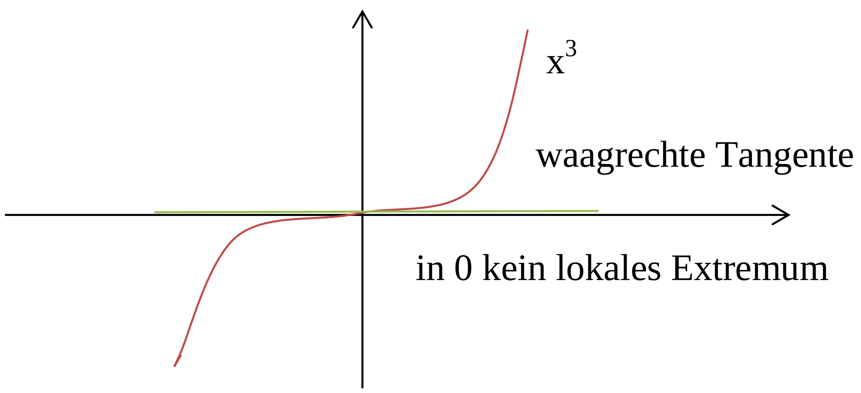
Geometrische Veranschaulichung




*Bemerkungen.*

a) $f'(x) = 0$ ist nur eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum:

<u>Beispiel</u>: $f(x) = x^3,\ f'(x) = 3x^2, f'(0) = 0$




b) Jede in einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt ihr absolutes Maximum und ihr absolutes Minimum an. Liegt ein Extremum jedoch am Rand, so ist dort nicht notwendig $f'(x) = 0$, wie man z.B. an der Funktion

$$f: [0,1] \to \mathbb{R}, x \to x$$

sieht.

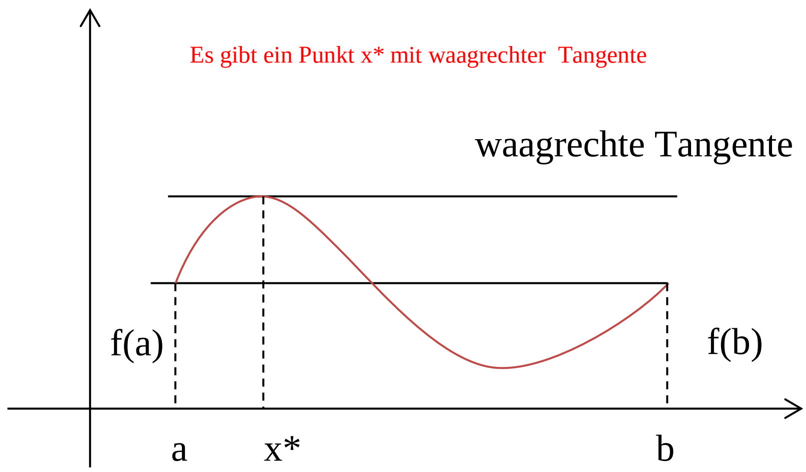
5.3 Satz von Rolle

Sei $f \in C[a, b]$ mit f(a) = f(b) und in (a,b) diff'bar. Dann existiert ein $x^* \in (a, b)$ mit

$$\boxed{f'(x^*) = 0}$$

*Beweis.*

Falls $f$ konstant ist, ist der Satz trivial. Ist $f$ nicht konstant, so gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) > f(a)$ oder $f(x_0) < f(a)$. Dann wird das absolute Maximum (bzw. Minimum) der Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x^* \in (a, b)$ angenommen. Nach dem vorangehenden Satz ist $f'(x^*) = 0$.

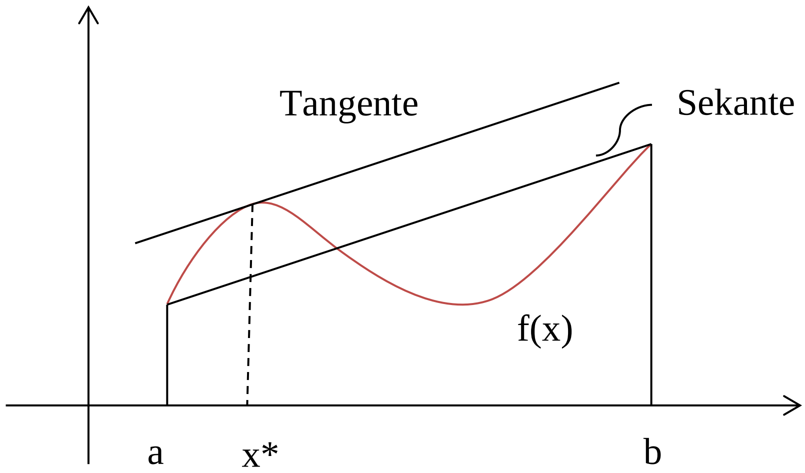


## 5.4 Mittelwertsatz

Sei $f \in C[a,b]$ und in (a,b) diff'bar. Dann existiert ein $x^* \in (a,b)$ mit

$$\boxed{f'(x^*) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Geometrische Veranschaulichung




Steigung der Sekante $=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Steigung der Tangente $=f'(x^*)$

Der Mittelwertsatz sagt aus, dass es ein Punkt x* in (a,b) gibt, in dem die Steigung der Tangente gleich der Steigung der Sekante ist. Anschaulich klar.

*Beweis.* Wir definieren eine Hilsfunktion $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ durch

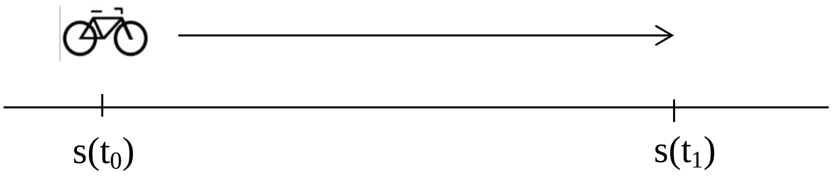
$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$F$ ist stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in $(a,b)$. Da $F(a) = f(a) = F(b)$, existiert nach dem Satz von Rolle ein $\xi \in (a,b)$ mit $F'(\xi) = 0$.

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Anwendungsbeispiel

Ein Fahrradfahrer fährt auf einer geradlinigen Strecke von $s(t_0)$ bis $s(t_1)$




Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $t^* \in (t_0, t_1)$ mit

$$\underbrace{\frac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0}}_{Durchschnittsgeschw.} = s'(t^*) = \underbrace{v(t^*)}_{Momentangeschwindigkeit}$$

es gibt im Zeitintervall $(t_0,t_1)$ somit einen Zeitpunkt $t^*$, in dem die Durchschnittsgeschwindigkeit mit der Momentangeschwindigkeit zusammenfällt.

*5.5 Korollar.* Sei $f \in C[a,b]$ und in (a,b) diff'bar. Gilt $f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b)$, so ist f(x) auf [a,b] konstant.

*Beweis.*

Sei $x \in (a,b]$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \overset{nach\,Vor.}{\widehat{=}} 0 \Longrightarrow f(x) = f(a)$$

Hieraus folgt $f(x) = f(a)\ \forall x \in [a,b]$.

☺

## 5.6 Monotonie

Sei $f \in C[a,b]$ und in (a,b) diff'bar. Gilt $\forall x \in (a,b)$

(1) $f'(x) \geq 0$, so ist f monoton wachsend.
(2) $f'(x) > 0$, so ist f streng monoton wachsend.
(3) $f'(x) \leq 0$, so ist f monoton fallend.
(4) $f'(x) < 0$, so ist f streng monoton fallend.

Beweis von (2)

Sei $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Dann existiert ein $x^* \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x^*) > 0 \overset{x_2>x_1}{\Rightarrow} f(x_2) > f(x_1)$$

☺

## 5.7 Krümmungseigenschaften

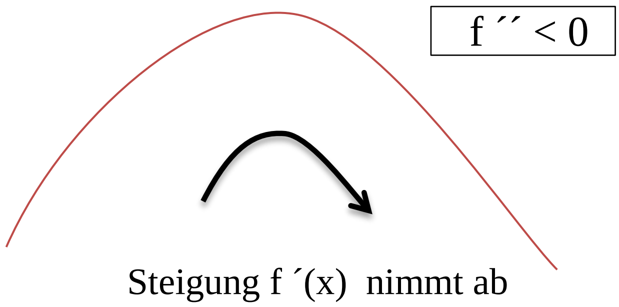
Definition

Sei $f \in C^2(a, b)$. Gilt $\forall x \in (a, b)$

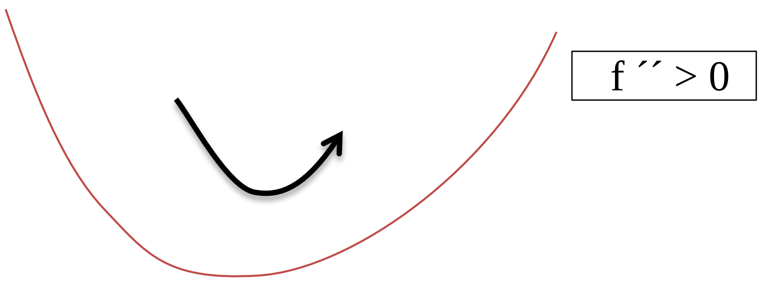
- $f''(x) > 0$, so heißt f(x) konvex oder linksgekrümmt.
- $f''(x) < 0$, so heißt f(x) konkav oder rechtsgekrümmt

Geometrische Veranschaulichung

Rechtskrümmung




Linkskrümmung

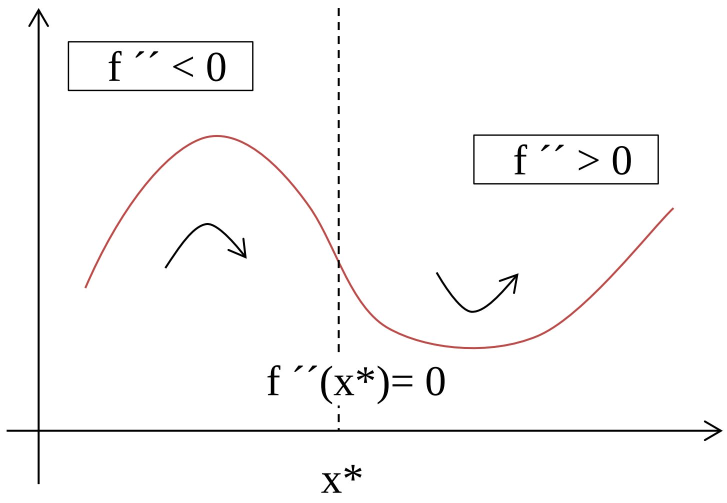



Steigung f´(x) nimmt zu

## 5.8 Wendepunkt

Definition:

Sei $f \in \ C^2(a,b)$. Wechselt f(x) für $x^* \in (a,b)$ von einer links- zu einer rechtsgekrümmten Funktion (oder umgekehrt), so heißt $x^*$ Wendepunkt.




Bemerkungen

(1) Ist $f \in C^2(a,b)$ und ist $x^*$ Wendepunkt von f, so gilt

$$\boxed{f''(x^*) = 0}$$

(2) Es gilt

$$\boxed{x^* \text{ Wendepunkt von } f(x) \Leftrightarrow x^* \text{ Extremalstelle von } f'(x)}$$

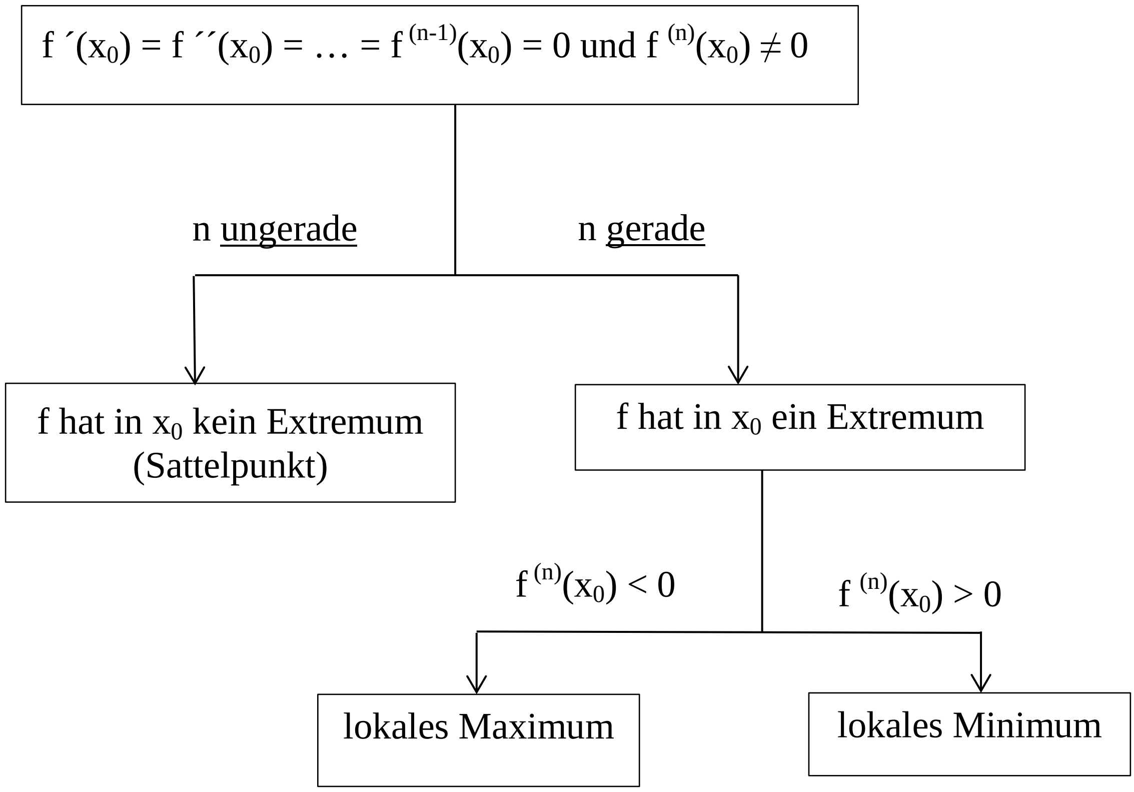
Beweis:

Krümmungswechsel bedeutet: $f'(x)$ ist streng monoton fallend links von $x^*$ und streng monoton steigend rechts von $x^*$ (oder umgekehrt)

(3) Ein Wendepunkt $x^*$ heißt Sattelpunkt, wenn $f'(x^*) = 0$, d.h. wenn die Tangente im Kurvenpunkt $(x_0, f(x_0))$ waagrecht verläuft.

## 5.9 Hinreichende Bedingung für Extremwerte und Sattelpunkte

f(x) sei in einer Umgebung von $x_0$ mindestens n-mal $(n \geq 2)$ diff'bar und $f^{(n)}(x)$ dort stetig.




Beweis:

entweder > 0 oder < 0

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0 \Longrightarrow \begin{Bmatrix} f^{(n)}(x_0) > 0 \\ f^{(n)}(x_0) < 0 \end{Bmatrix} \Longrightarrow_{f^{(n)}\ ist\ stetig} \begin{Bmatrix} f^{(n)}(x) > 0 \\ f^{(n)}(x) < 0 \end{Bmatrix} \forall x \in U_\varepsilon(x_0)$$

für ein ε > 0

Nach der Taylorformel und der Restgliedformel von Lagrange gilt:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{n-1}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}}_{0}$$

$$+ \frac{f^{(n)}(\overline{x})}{n!}(x - x_0)^n$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\overline{x})}{n!}(x - x_0)^n \text{ für ein } \overline{x} \text{ zwischen } x_0 \text{und } x$$

$\boxed{n\ gerade}$ $\quad (x - x_0)^n \geq 0$

Wegen $\overline{x} \in U_\varepsilon(x_0)$ gilt

$$\begin{Bmatrix} f^{(n)}(\overline{x}) > 0 \\ f^{(n)}(\overline{x}) < 0 \end{Bmatrix} \Longrightarrow \frac{f^{(n)}(\overline{x})}{n!}(x - x_0)^n \begin{Bmatrix} \geq 0 \\ \leq 0 \end{Bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} f(x) \geq f(x_0) \\ f(x) \leq f(x_0) \end{Bmatrix} \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \Longrightarrow \begin{Bmatrix} lokales\ Min.\, in\ x_0 \\ lokales\ Max.\, in\ x_0 \end{Bmatrix}$$

$\boxed{n\ ungerade}$

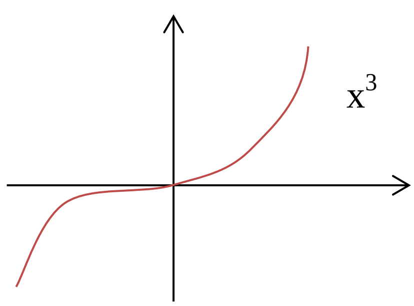
Für $g(x) = f'(x)$ gilt: $g^{(n-1)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \neq 0$ n.V.

$n - 1$ gerade $\Longrightarrow x_0$ Extremalstelle von $g(x) = f'(x) \Longrightarrow$

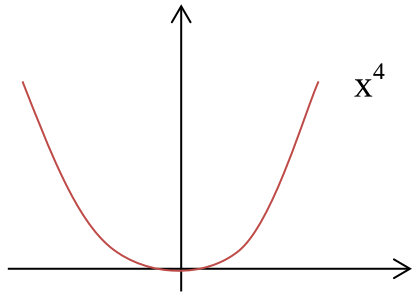
$x_0$ Wendepunkt von $f(x)$ bzw. Sattelpunkt wegen $f'(x_0) = 0$.

<u>Beispiele:</u>

(1) $f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2, f'(0) = 0$
$f''(x) = 6x, f''(0) = 0$
$f'''(x) = 6, f'''(0) \neq 0$
$n = 3$ ungerade $\Longrightarrow$ Wendepunkt in 0



(2) $f(x) = x^4$




$f^{(4)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24, f^{(4)}(0) \neq 0$

$f^{(4)}(0) > 0 \Longrightarrow$ lokales Minimum in 0 stammen nicht von dem französischen Mathematiker L'Hospital , sondern sie sind von Bernoulli entwickelt worden. Die Regeln und die Beweise hat L'Hospital von Bernoulli abgekauft und Ende des 17. Jahrhunderts in dem ersten Buch über Differentialrechnung veröffentlicht. 

# 6. Grenzwertregeln von L'Hospital

## 6.1 Einführende Beispiele

Zähler und Nenner gehen hier gegen 0

(1) Sei $a \in \mathbb{R}$: $\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{ax}{x}}_{a} = \left[\frac{0}{0}\right] = a$ , $\left[\frac{0}{0}\right] =$ unbestimmter Ausdruck

$\left[\frac{0}{0}\right]$ kann somit jede Zahl annehmen.

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] =?$ hier ist nicht sofort der Wert des unbestimmten Ausdrucks erkennbar

(2) $\lim_{x\to\infty} \frac{ax}{1+x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = a$ , da $\frac{ax}{1+x} = \frac{a}{1+\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to\infty]{} a$

$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ist ebenfalls ein unbestimmter Ausdruck

$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =?$ hier ist ebenfalls nicht direkt der Wert des unbestimmten Ausdrucks ersichtlich

$[\infty - \infty]$ ist ebenfalls ein unbestimmter Ausdruck und kann jede Zahl annehmen

(3) $\lim_{x\to\infty} x - (x-a) = [\infty - \infty] = a$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = [\infty - \infty] =?$ hier ist ebenfalls nicht sofort der Wert des unbestimmten Ausdrucks erkennbar

Weitere Formen unbestimmter Ausdrücke

(4) $\lim_{x\to 0} x^x = [0^0] =?$

(5) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = [1^\infty] =?$

## 6.2 Formen unbestimmter Ausdrücke

Unbestimmte Ausdrücke können symbolisch in folgenden Formen auftreten

$$\boxed{\left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [0\cdot\infty], \quad [\infty-\infty], \quad [1^{\infty}], \quad [0^0], \quad [\infty^0]}$$

## 6.3 Regel von L'Hospital

Sei $f, g \in C[a,b]$ und in (a,b) stetig diff'bar mit $f(a) = g(a) = 0$. Weiterhin gelte $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$ und es existiert

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dann existiert auch

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

und es ist

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Hinweis: Der Grenzwertsatz ist auch richtig für $a = -\infty \ und \ b = +\infty$ und gilt auch im Fall $\left[\frac{\infty}{\infty}\right], d.h. f(a) = g(a) = \infty.$

Beweis unter der Voraussetzung, dass $f', g'$ stetig sind in $[a,b]$ und $g'(a) \neq 0$.

wenn g'(a)=0, so ist der Beweis wesentlich aufwendiger (mithilfe des Mittelwertsatzes). Der Fall kann dann auftreten, wenn man die LHospitalsche Regel mehrmals anwenden muss.

wegen der Stetigkeit von f' und g' darf man den Limes in den Quotienten ziehen

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f'(x)}{\lim\limits_{x\to a} g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

f(a)=g(a)=0 nach Vor.

☺

## 6.4 Beispiele zur L'Hospitalschen Regel

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = ?$

Lsg.: Zähler und Nenner getrennt ableiten!! und nicht den Quotienten

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \overset{L'H}{\triangleq} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a^x}{x^b} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] =? \quad (a > 1, b > 0)$

Lsg.:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a^x}{x^b} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{x \cdot \ln a}}{x^b} = \lim_{x \to \infty} \left( \frac{e^{x \cdot \frac{\ln a}{b}}}{x} \right)^b =_{Stetigkeit} \left( \lim_{x \to \infty} \frac{e^{x \cdot \frac{\ln a}{b}}}{x} \right)^b =$$

$$\overset{L'H}{\triangleq} \left( \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\ln a}{b} \cdot e^{x \cdot \frac{\ln a}{b}}}{1} \right)^b = \infty$$

Folgerung

| |
|---|
| Jede Exponentialfunktion $a^x$ ( a > 1) geht schneller gegen unendlich als jede noch so große Potenz von x. |

egal wie klein a und wie groß b ist.

(3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\log_a x}{x^b} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] =? \quad (a > 0, b > 0)$

Lsg.:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log_a x}{x^b} \overset{Kap.3\ 8.9(5)}{\triangleq} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\ln x}{\ln a}}{x^b} = \frac{1}{\ln a} \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^b} \overset{L'H}{\triangleq} \frac{1}{\ln a} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{b x^{b-1}}$$

$$= \frac{1}{\ln a} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{b\, x^b} = 0$$

Folgerung

> Jeder Logarithmus $\log_a x$ geht langsamer gegen unendlich als jede noch so kleine (positive) Potenz von x.

Formal richtig müsste man hier den rechtsseitigen Grenzwert r-lim nehmen, da $x^x$ nur für positive x definiert ist ( $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}}}$ ist nicht definiert). Die L'Hospitalschen Regel bleiben aber auch für einseitige Grenzwerte richtig.

(4) $\lim\limits_{x\to 0} x^x = [0^0] = ?$

Lsg.:

$$x^x = e^{x\cdot\ln x} = e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$$

auch müsste man sich auf x>0 beschränken, da ln x nur für postive x def. ist

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{\cong} \lim_{x\to 0} -\frac{\frac{1}{x}}{x^{-2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0 \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} =_{Stetigkeit} e^0 = 1$$

Folgerung: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1}$

am Anfang der Vorlesung benutzt, können es nun beweisen

Beweis.

für jede Nullfolge geht dieser Term gegen 1, insbesondere für die Nullfolge 1/n

$$\lim_{x\to 0} x^x = 1 \Longrightarrow \lim_{x_n\to 0} x_n^{x_n} = 1 \overset{x_n=\frac{1}{n}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = [\infty - \infty] = ?$

Lsg.:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{\mathrm{x}\cdot\sin x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\cong} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\mathrm{x}\cdot\cos x + \sin x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\cong}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{-\mathrm{x} \cdot \sin x + 2\cos x} = \frac{0}{2} = 0$$

<u>Hinweis</u>: Manchmal ist es erforderlich, die L'Hospitalsche Regel mehrmals anzuwenden.

(6) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{e^x} =?$

Lsg.:

L'Hospitalsche Regel: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{e^x} = 1$ falsch!!!! warum?

<u>Richtig</u>: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x \to 0} x \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{e^x} = 0 \cdot 1 = 0$

<u>Hinweis</u>:

| |
|---|
| L'Hospitalsche Regel nur anwendbar auf unbestimmte Ausdrücke der Form $\left[\frac{0}{0}\right]$ oder $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. |

(7) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =?$

<u>Lsg</u>.:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} \overset{L'H}{\triangleq} \lim_{x \to \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{\triangleq} \lim_{x \to \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad ?$$

<u>Hinweis</u>:

| |
|---|
| L'Hospitalsche Regel führt nicht immer zum Ziel. |

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})} = \lim_{x \to \infty} \frac{(e^x - e^{-x}) \cdot e^{-x}}{(e^x + e^{-x}) \cdot e^{-x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

# Kapitel 6: Integration

## 1. Das unbestimmte Integral

### 1.1 Einführung

Das Grundproblem in der Differentialrechnung besteht in der Bestimmung der Ableitung einer Funktion f(x). Gesucht ist die Änderungsrate von f(x).In den Anwendungen wie z.B. in bei Flächenberechnung stellt sich oft das umgekehrte Problem. Wie kann man aus der bekannten Änderungsrate die Funktion rekonstruieren. Diesen Vorgang nennt man Integration.

$$\boxed{f(x) \xrightarrow{Differentiation} f'(x)}$$

$$\boxed{f(x) \xrightarrow{Integration} F(x)\ mit\ F'(x) = f(x)}$$

Beispiel:

ohne Einheiten

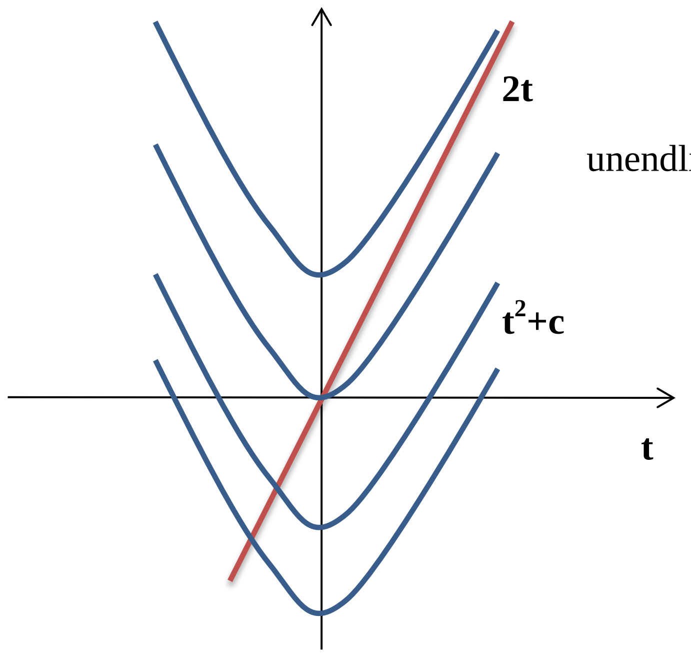
Bekannt: Geschwindigkeit eines Körpers $v(t) = s'(t) = 2t$

Gesucht: die Wegstrecke $s(t)$

Lösung:

Gesucht $s(t)$ mit $s'(t) = 2t$

$(t^2)' = 2t$ , aber auch $(t^2 + C)' = 2t\ \forall C \in \mathbb{R}$




unendlich viele Lösungen

es stellt sich natürlich die Frage, welchen Wert C annimmt.

C = ?

C hängt von Anfangsbedingungen ab:

$s(0) = 0: s(0) = 0 + c = 0 \Longrightarrow C = 0$

$s(0) = 1: s(0) = 0 + c = 1 \Longrightarrow C = 1$

wenn sich der Körper zum Zeitpunkt t=0 am Ort 0 sich befindet, so ist c=0, ist er am Ort 1, so ist c=1

## 1.2 Stammfunktion

Definition:

Sei $f \in C[a,b]$. Eine diff'bare Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = f(x) \forall x \in [a,b]$ heißt Stammfunktion von f(x).

Satz

d.h. 2 Stammfunktionen unterscheiden sich nur um eine additive Konstante

Sind $F, G$ Stammfunktionen von f(x), so ist $F(x) - G(x) = konstant$.

Beweis:

Für $H(x) = F(x) - G(x)$ gilt:

$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$

$\xRightarrow{Kap.5\ ,5.3} H(x) = konstant \Longrightarrow F(x) - G(x) = konstant$

Bezeichnung:

Ist G(x) eine Stammfunktion von f(x), so läßt sich die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f(x) somit in der folgenden Form darstellen:

$$\boxed{F(x) = G(x) + C}$$

## 1.3 Unbestimmtes Integral

Das unbestimmte Integral $\int f(x)dx$ einer stetigen Funktion f(x) ist die Menge aller Stammfunktionen von f.

Ist F(x) eine beliebige Stammfunktion von f(x), so gilt nach 1.2

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C} \quad C = \underline{Integrationskonstante}$$

Es gilt dann

C nennt man dann Integrationskonstante

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \quad \Leftrightarrow F'(x) = f(x)}$$

und

$$\boxed{\int \frac{d}{dx} F(x)dx = F(x) + C} \; und \; \boxed{\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)}$$

Integraloperator und Differentialoperator heben sich gegenseitig auf

## 1.4 Beispiele von unbestimmten Integralen

| $F(x)$ | $f(x) = F'(x)$ | $\int f(x)dx$ |
|---|---|---|
| x | 1 | $\int 1dx = x + C$ |
| $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ | $x^n$ | $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ +C |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\int \cos x \, dx = \sin x + C$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\int e^x dx = e^x + C$ |

$$\int xe^x dx = ?$$

Für die elementaren Funktionen kennt man die Ableitungen, sodass man hieraus die unbestimmten Integrale von elementaren Funktionen sofort erhält. Es stellt sich jetzt die Frage, wie man die unbestimmten Integrale von Funktionen bestimmen kann, die sich zusammensetzen aus elementaren Funktionen, wie z.B. $\int xe^x dx$. Es existieren hierzu verschiedene Integrationsmethoden, die im folgenden Abschnitt betrachtet werden. Die Integration ist dabei schwieriger als die Differentiation. Es gibt sogar einfache Funktionen, zu denen keine Stammfunktionen existieren.

Bemerkung

Funktionen, zu denen keine Stammfunktionen bekannt sind:

$$z.B. \; e^{x^2}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \sin x^2$$

# 2. Integrationsmethoden

## 2.1 Überblick der wichtigsten Integrationsmethoden

- Grundregeln
- Partielle Integration
- Substitutionsregel
- Partialbruchzerlegung für die Integration von rationalen Funktionen

## 2.2 Grundregeln unbestimmter Integrale

(1) $\underline{Faktorregel}$: $\boxed{\int sf(x)dx = s\int f(x)dx}\ \forall s \in \mathbb{R}$

(2) $\underline{Summenregel}$: $\boxed{\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx}$

(3) $\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C}$ $für\ f(x) \neq 0$

Formel (3) ist eine nützliche Formel, die man häufig anwenden kann. Oftmals gelingt, es den Integranten durch Umformungen in einen Quotienten der Form f'(x)/f(x) überzuführen

Beweis:

(2) Seien $F(x), G(x)$ Stammfunktionen von $f(x)\ bzw.\ g(x)$.

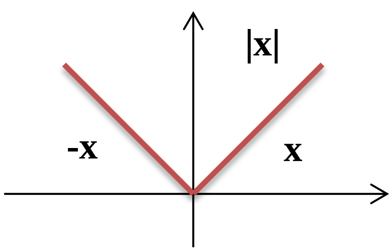
$$\big(F(x) + G(x)\big)' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$

$$\int f(x) + g(x)\,dx = \int \big(F(x) + G(x)\big)'dx = F(x) + G(x) + C =$$

$$= \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

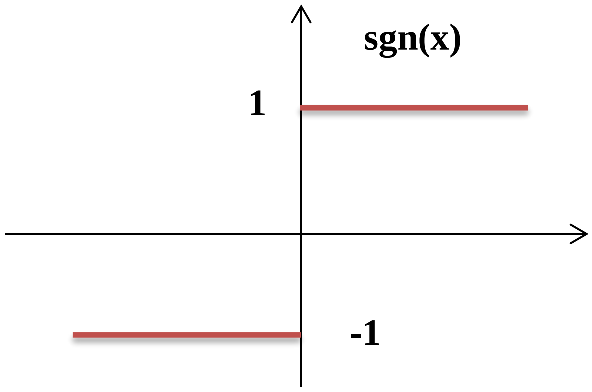
(3) zu zeigen: $(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

(i) Sei $y = |x|$



sgn steht für Signum, die Vorzeichenfunktion, die für positive x den Wert 1, und für negative x den Wert -1 annimmt.

$$y' = (|x|)' = \left\{ \begin{matrix} 1, x > 0 \\ -1\,, x < 0 \end{matrix} \right\} = sgn(x) = \frac{x}{|x|}\;\;,\;\; x \neq 0$$




(ii) Sei $y = |f(x)|\; und\; v = f(x) \neq 0$

$$y' = (|f(x)|)' \overset{Kettenr.}{\triangleq} \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{v}{|v|} \cdot f'(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} \cdot f'(x)$$

(iii) Sei $y = \ln|f(x)|\;\; und\; v = |f(x)| \neq 0$

$$y' = \Big(\ln\underbrace{|x|}_{v}\Big)' = \overset{Kettenr.}{\triangleq} \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} \cdot |f(x)|'$$

$$= \frac{1}{|f(x)|} \cdot \frac{f(x)}{|f(x)|} f'(x) = \frac{f(x)}{\big(f(x)\big)^2} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

☺

## 2.3 Beispiele zu den Grundregeln

(1) $\int (x^2 + 1)^2 dx = ?$

die 1 kann man im Integral auch weglassen

Lsg.:

$$\int (x^2 + 1)^2 dx = \int x^4 + 2x^2 + 1 dx = \int x^4 dx + \; 2\int x^2 dx + \int dx$$

$$= \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{2}{3}x^3 + x + C$$

(2) $\int \tan x \, dx = ?$

Lsg.:

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C$$

(3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad (f(x) = x, f'(x) = 1)$

(4) $\int \frac{1}{x \ln x} dx = ?$

Lsg.:

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \ln|\ln x| + C$$

die partielle Integration ist die Umkehrung der Produktregel bzgl. der Differentiation

## 2.4 Partielle Integration (Umkehrung der Produktregel)

$$\boxed{\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx}$$

Beweis:

$$u(x) \cdot v(x) + C = \int \left(u(x) \cdot v(x)\right)' dx \overset{\text{Produktr.}}{\widehat{=}}$$

$$= \int u'(x) v(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx \implies$$

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

das C kann man weglassen, da es implizit im rechten Integral enthalten ist, es ist aber unschädlich.

☺

## 2.5 Beispiele zur partiellen Integration

(1) $\int x \, e^x dx = ?$

Lsg.:

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x}_{v'} dx = \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{e^x}_{v} dx = xe^x - e^x + C$$

wenn überprüfen möchte, ob man sich verrechnet hat, so kann man folgende Probe machen

Probe: $(xe^x - e^x)' = e^x + xe^x - e^x = xe^x \ \surd$

wenn man die Rolle von u und v' vertauscht, so ergibt sich folgende Rechnung

$$\int \underbrace{x}_{v'} \underbrace{e^x}_{u} dx = \frac{1}{2}x^2\, e^x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot e^x dx = ?$$

hier hat sich das Integral verkompliziert und führt nicht zum Ziel

Bemerkung: Wahl von $u$ *und* $v'$ i. Allg. entscheidend.

(2) $\int x^2 e^x dx = ?$

Lsg.:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx = x^2 e^x - 2\int x\, e^x dx \overset{(1)}{\triangleq}$$
$$= x^2 e^x - 2(xe^x - e^x + C) = e^x(x^2 - 2x + 2) + \tilde{C}$$

(3) $\int \sin^2 x\, dx = ?$

Lsg.:

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \sin x \cdot \sin x\, dx = \sin x \cdot (-\cos x) + \int \cos^2 x\, dx =$$
$$= -\sin x \cdot \cos x + \int 1 - \sin^2 x dx =$$
$$= -\sin x \cdot \cos x + x - \int \sin^2 x dx \Longrightarrow$$
$$2\int \sin^2 x dx = -\sin x \cdot \cos x + x \Longrightarrow$$
$$\int \sin^2 x\, dx = \tfrac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x) + C$$

Die wichtigste und am häufigsten angewandte Integrationsmethode ist die folgende Substitutionsregel.

## 2.6 Substitutionsregel (Umkehrung der Kettenregel)

(1) Sei $f(u)$ stetig und $u = g(x)$ stetig diff'bar. Es gilt

$$\boxed{\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du}$$

$\uparrow$

Rücksubstitution u=g(x)

(2) Sei $f(x)$ stetig und $x = g(u)$ stetig diff'bar. Es gilt

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f\big(g(u)\big) \cdot g'(u)du}$$

$$\uparrow$$

Rücksubstitution $u=g^{-1}(x)$

<u>Beweis</u> von (1):

Sei $F(u)$ Stammfunktion von $f(u)$. Nach der Kettenregel gilt für $u = g(x)$:

$$\Big(F\big(g(x)\big)\Big)' = \underbrace{F'(u)}_{äußere\ Abl.} \cdot \underbrace{g'(x)}_{innere\ Abl.} = f(u) \cdot g'(x) = f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

$$\left.\begin{aligned} F\big(g(x)\big) &= F(u) = \int F'(u)du = \int f(u)du \\ F\big(g(x)\big) &= \int \Big(F\big(g(x)\big)\Big)'dx = \int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)dx \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)dx = \int f(u)du$$

(2) folgt aus (1) durch Vertauschung von x und u.

☺

## 2.7 <u>Beispiele zur Substitutionsregel</u>

(1) $\int 2x \sin(x^2)dx = ?$

<u>Lösung mit Formel 2.6(1)</u>

$$u = g(x) = x^2, g'(x) = 2x$$

$$\int 2x \sin(x^2)dx = \int g'(x) \cdot \sin(g(x))dx = \int \sin u \ du$$

$$= -\cos u + C = -\cos x^2 + C$$

<u>Hinweis</u>: Substitution in Formel 2.6(1) nicht frei wählbar. In Formel 2.6(2) beliebige Substitution $x = g(u)$ möglich (geeignete Substitution nicht immer sofort ersichtlich - „Try and Error“).

<u>Lösung mit Formel 2.6(2)</u>

<u>Ausführlich</u> Zunächst die Lösung ausführlich, um den Formalismus besser zu verstehen.

Setze $u = g^{-1}(x) = x^2$ , $x = g(u)$ (g braucht nicht berechnet werden)

$$\int 2x \sin(x^2)dx = \int \underbrace{2g(u)\sin u}_{f(g(u))} \cdot g'(u)du$$

Nach der Ableitungsformel für Umkehrfunktionen gilt:

$$g'(u) = \frac{1}{(g^{-1})'(g(u))} = \frac{1}{(g^{-1})'(x)} = \frac{1}{2x} \Longrightarrow$$

$$\int 2x \sin(x^2)dx = \int 2x \sin u \cdot \frac{1}{2x}\, du$$

Man darf nur dann bzgl. u integrieren, wenn im Integranten x nicht mehr vorkommt.

$$= \int \sin u\, du = -\cos u + C = -\cos x^2 + C$$

<u>Praktisches Vorgehen</u>: man geht hier formal vor

$$u = x^2, \qquad \frac{du}{dx} = 2x, \qquad dx = \frac{1}{2x}du$$

$$\int 2x \sin(x^2)dx = \int 2x \sin u \cdot \underbrace{\frac{1}{2x}du}_{dx} = \int \sin u\, du = -\cos u + C$$

$$= -\cos x^2 + C$$

(2) $\int (2-3x)^4 dx = ?$

<u>Lsg</u>.: $u = 2 - 3x, \quad \frac{du}{dx} = -3, \quad dx = -\frac{1}{3}du$

$$\int (2-3x)^4 dx = \int u^4 \left(-\frac{1}{3}\right) du = -\frac{1}{3}\int u^4 du = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}u^5 + C$$

$$= -\frac{1}{15}(2-3x)^5 + C$$

(3) $\int \cos x \; e^{\sin x} dx = ?$

<u>Lsg</u>.:

$u = \sin x\,,\ \frac{du}{dx} = \cos x, \quad dx = \frac{1}{\cos x} du$

$\int \cos x \ e^{\sin x} dx = \int \cos x \, e^{u} \frac{1}{\cos x} du = \int e^{u} du = e^{u} + C =$

$= e^{\sin x} + C$

(4) $\int \cos^4 x \cdot \sin x \, dx = ?$

Lsg.:

$u = \cos x,\ \frac{du}{dx} = -\sin x \ , \quad dx = \frac{1}{-\sin x} du$

$\int \cos^4 x \cdot \sin x \, dx = \int u^4 \cdot \sin x \cdot \frac{1}{-\sin x} du = -\int u^4 du =$

$= -\frac{1}{5} u^5 + C = -\frac{1}{5} \cos^5 x + C$

(5) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = ?$

Lsg.:

Trick: $x = \sin u \ , \frac{dx}{du} = \cos u, \quad dx = \cos u \, du$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}} \cos u \, du = \int \frac{1}{\sqrt{\cos^2 u}} \cos u \, du =$$

$$= \int 1 du = u + C = \arcsin x + C$$

Folgerung: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

# 3. Partialbruchzerlegung

Jede rationale Funktion kann mit Hilfe der Partialbruchzerlegung integriert werden. (Oftmals jedoch sehr rechenaufwändig.)

Hinweis: In diesem Abschnitt sind die Funktonen $p(x)$ und $q(x)$ Polynome mit reellen Koeffizienten.

Einige der folgenden Sätze bleiben nur für reelle Koeffizienten richtig (z.B. 3.4)
Im Übrigen werden in diesem Kapitel ohnehin nur Integrale für reellwertige Funktionen betrachtet.

## 3.1 Wiederholung (Kap. 3, 5.1)

Seien $p(x)$ und $q(x)$Polynome. Dann heißt

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

rationale Funktion.

$r(x)$ heißt

$$\left\{ \begin{array}{c} \underline{echt} \\ \underline{unecht} \end{array} \right\} \underline{gebrochen}, \text{ wenn } \left\{ \begin{array}{c} grad(p(x)) < grad(q(x)) \\ grad\big(p(x)\big) \geq grad(q(x)) \end{array} \right\}$$

Bem.: Jede unecht gebrochen rationale Funktion lässt sich darstellen als Summe eines Polynoms und einer echt gebrochen rationalen Funktion. (Polynomdivision)

## 3.2 Einführendes Beispiel

$$\int \frac{3x^5 + 2x^4 + 3x^3}{x^4 - 1} dx = ?$$

Lsg.: Partialbruchzerlegung: Die Bestimmung der Partialbruchzerlegung ist Gegenstand dieses Abschnitts

$$\frac{3x^5 + 2x^4 + 3x^3}{x^4 - 1} = \underbrace{3x + 2}_{Polynom} + \underbrace{\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x^2+1}}_{Partialbrüche}$$

$$\int \frac{3x^5+2x^4+3x^3}{x^4-1} dx = \int 3x + 2dx + 2\int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{2}{x-1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx =$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + 2x + \ln|x+1| + 2\ln|x-1| - arctanx + C$$

## 3.3 Komplexe Produktdarstellung eines Polynoms

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra (Kap. 3, 4.7)lässt sich jedes Polynom $q(x)$ als Produkt von Linearfaktoren darstellen:

$$\boxed{q(x) = a \cdot (x - x_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_m)^{k_m}}$$ Faktorisierung von $q(x)$

$x_i \in \mathbb{C}, i = 1, \ldots, m,$ paarweise verschiedene Nullstellen von $q(x)$

$k_i$ Vielfachheit von $x_i$.

Bsp.: $q(x) = x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$

Da wir nur Integrale von reellwertigen Funktionen betrachten, müssen wir die komplexe Produktdarstellung in ein reelle Produktdarstellung umwandeln

## 3.4 Reelle Produktdarstellung eines Polynoms

Satz (Kap. 3, 4.8): komplexe Nullstellen treten immer paarweise auf. Dies gilt aber nur, wenn das Polynom reelle Koeffizienten besitzt.

$z = a + ib$ Nullstelle von $q(x) \Longrightarrow \bar{z} = a - ib$ Nullstelle von $q(x)$

Es gilt damit

$$(x - z)(x - \bar{z}) = \big(x - (a + ib)\big)\big(x - (a - ib)\big) =$$
$$= \big((x - a) - ib\big)\big((x - a) + ib\big) = (x - a)^2 + b^2 =$$
$$= x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = \underbrace{x^2 + sx + t}_{quadratische\ Funktion}$$

$s = -2a \in \mathbb{R}, t = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$

treten komplexe Nullstellen auf, so ersetzt man das Produkt zweier komplexer Linearfaktoren durch eine quadratische Funktion mit reellen Koeffizienten. Damit erhält man eine reelle Produktdarstellung, bestehend aus Linearfaktoren und quadratischen Funktionen.

reelle Produktdarstellung von $q(x)$

$$\boxed{q(x) = a \cdot \underbrace{(x - x_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{m_k}}_{\text{Linearfaktoren, falls Nullstellen reell}} \cdot \underbrace{(x^2 + s_1 x + t_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + s_r x + t_r)^{n_r}}_{\text{quadratische Funktionen, falls Nullstellen komplex}}}$$

<u>Bsp.</u>:

$$q(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = \underbrace{(x-1)^2(x-i)(x+i)}_{\text{komplexe Produktdarst.}} = \underbrace{(x-1)^2(x^2+1)}_{\text{reelle Produktdarst.}}$$

## 3.5 Ansatz der Partialbrüche mit unbestimmten Koeffizienten

<u>Gegeben</u>: <u>echt</u> gebrochene rationale Funktion $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

① Bilde zu jedem vielfachem Linearfaktor $(x-r)^m$ von $q(x)$ die Summe

$$\boxed{\frac{C_1}{x-r} + \frac{C_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{C_m}{(x-r)^m}}$$

(Linearfaktoren mit aufsteigenden Potenzen!)

② Bilde zu jedem vielfachem quadratischen Faktor $(x^2+cx+d)^n$ von $q(x)$ die Summe

$$\boxed{\frac{A_1x+B_1}{x^2+cx+d} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+cx+d)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(x^2+cx+d)^n}}$$

③ Die Partialbruchzerlegung von $r(x)$ ist gegeben durch die Addition der im Schritt 1 und 2 gebildeten Summe.

<u>Hinweis</u>: Ist $k$ der Grad von $q(x)$, so erhält man mit diesem Ansatz durch Koeffizientenvergleich ein lösbares lineares Gleichungssystem mit $k$ Gleichungen in $k$ unbestimmten Koeffizienten.

## 3.6 Beispiele zu „Ansatz der Partialbrüche“

(1) Ansatz der Partialbrüche von $\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)}$ =?

Lösung:

$$\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2}$$

(2) Ansatz der Partialbrüche von $\frac{3x^4+x^3+4}{(x-3)^2(x+5)(x^2+4)^2}$ =?

Lösung:

$$\frac{3x^4+x^3+4}{(x-3)^2(x+5)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+5} + \frac{Dx+E}{x^2+4} + \frac{Fx+G}{(x^2+4)^2}$$

(3) $r(x) = \frac{p(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)} = \frac{K_1}{x-x_1} + \frac{K_2}{x-x_2} + \cdots + \frac{K_m}{x-x_m}$

falls alle $x_i$ reell und paarweise verschieden.

## 3.7 Praktische Durchführung der Partialbruchzerlegung

1. Falls r(x) unecht gebrochen: Abspaltung des ganzrationalen Anteils (Polynom) durch Polynomdivision.
2. Bestimmung der reellen Produktdarstellung des Nennerpolynoms.
3. Ansatz der Partialbrüche mit unbestimmten Koeffizienten.
4. Bestimmung der Koeffizienten mit der Einsetzmethode. (Koeffizientenvergleichsmethode ebenfalls möglich, aber rechenaufwändiger)

## 3.8 Einsetzmethode (exemplarisch)

Beispiel 1:

$$\frac{x+1}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2)+B}{(x-2)^2} \Longrightarrow$$

$x + 1 = A(x-2) + B$ Diese Gleichung gilt für alle x, insbesondere für spezielle Werte

Einsetzmethode (Einsetzen geeigneter Werte)

$x = 2:\ 3 = B$

$x = 0:\ 1 = -2A + B = -2A + 3 \Longrightarrow A = 1$

$$\frac{x+1}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}$$

Beispiel 2:

$$\frac{x^2-1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)} \Longrightarrow$$

$x^2 - 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+2)$

$x = -2:\ \ 3 = 5A \Longrightarrow A = \frac{3}{5}$

$x = 0:\quad -1 = A + 2C = \frac{3}{5} + 2C \Longrightarrow C = -\frac{4}{5}$

$x = 1:\qquad 0 = 2A + 3(B+C) = \frac{4}{5} + 3\left(B - \frac{4}{5}\right) \Longrightarrow B = \frac{2}{5}$

$$\frac{x^2-1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{3}{5(x+2)} + \frac{\frac{2}{5}x - \frac{4}{5}}{x^2+1}$$

## 3.9 Integration von Partialbrüchen

die folgenden Formeln können durch Ableiten der rechten Seite verifiziert werden.

(1) $\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a| + C,\ \ x \neq a$

(2) $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \frac{1}{-n+1}(x-a)^{-n+1} + C, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2, x \neq a$

(3) $\int \frac{1}{x^2+sx+t} dx = \frac{2}{\sqrt{4t-s^2}} \arctan \frac{2x+s}{\sqrt{4t-s^2}} + C \ (falls\ 4t - s^2 > 0)$

Bem.: $x_{1,2} = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - t} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ (sonst Linearfaktoren) $\Longrightarrow$

$\frac{s^2}{4} - t < 0 \Longrightarrow s^2 - 4t < 0 \Longrightarrow 4t - s^2 > 0$

nur in dem Fall, dass die Nullstellen des Nennerpolynoms komplex sind!

(4) $\int \frac{x}{x^2+sx+t} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2 + sx + t| - \frac{s}{2} \underbrace{\int \frac{1}{x^2+sx+t} dx}_{(3)}$

(5) $\int \frac{1}{(x^2+sx+t)^n} dx =$

$$\frac{2x+s}{(n-1)(4t-s^2)(x^2+sx+t)^{n-1}} + \frac{2(2n-3)}{(n-1)(4t-s^2)} \int \frac{1}{(x^2+sx+t)^{n-1}} dx$$

Lösung durch Rekursion

(6) $\int \frac{x}{(x^2+sx+t)^n} dx =$

$$-\frac{sx+2t}{(n-1)(4t-s^2)(x^2+sx+t)^{n-1}} - \frac{s(2n-3)}{(n-1)(4t-s^2)} \underbrace{\int \frac{1}{(x^2+sx+t)^{n-1}} dx}_{(5)}$$

## 3.10 Beispiele zu „Integration rationaler Funktionen“

(1) $\int \frac{2x^3+x^2}{x^3-1} dx = ?$

Lsg.:

1 Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} \quad (2x^3 + x^2) : (x^3 - 1) = 2 + \dfrac{x^2+2}{x^3-1} \\ \underline{-(2x^3 \qquad - 2)} \\ \qquad\quad x^2 + 2 \end{array}$$

2 Reelle Produktdarstellung des Nenners $x^3 - 1$

$x_1 = 1$ Nullstelle

Die Aufgaben in der Analysis werden immer so gestellt, dass man die Nullstellen von Polynomen mit einem Grad >2 erraten kann. Ist dies nicht möglich, so muss man die Nullstellen numerisch ermitteln. Hierzu gibt es verschiedene Verfahren, wie z.B. Newton-Verfahren oder Banachscher Fixpunktsatz.

Horner Schema

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | -1 |
| | | 1 | 1 | 1 |
| x=1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$

Nullstellen von $x^2+x+1$: $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R} \implies$

$x^2+x+1$ quadratischer Ausdruck ohne reelle Nullstellen.

③ Ansatz der Partialbrüche

$$\frac{x^2+2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

④ Bestimmung der unbestimmten Koeffizienten

$x^2+2 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$

Einsetzmethode

$x=1\colon\ 3 = 3A \implies A = 1$

$x=0\colon\ 2 = 1 + C(-1) \implies C = -1$

$x=-1\colon\ 3 = A + (-B+C)(-2) = 1 + 2B + 2 \implies B = 0$

$$\frac{x^2+2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2+x+1}$$

⑤ Integration

$$\int \frac{2x^3-x^2}{x^3-1}dx = \int 2dx + \int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{1}{x^2+x+1}dx =$$

$$= 2x + \ln|x-1| - \frac{2}{\sqrt{4t-s^2}} \arctan\left(\frac{2x+s}{\sqrt{4t-s^2}}\right) + \mathrm{C}$$

$s = 1, t = 1\colon\ 4t - s^2 = 3$

$$\int \frac{2x^3-x^2}{x^3-1}dx = 2x + \ln|x-1| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

(2) $\int \frac{x^4}{x^5-1} dx = ?$

<u>Lsg</u>.: keine Partialbruchzerlegung, sondern mit

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C$$

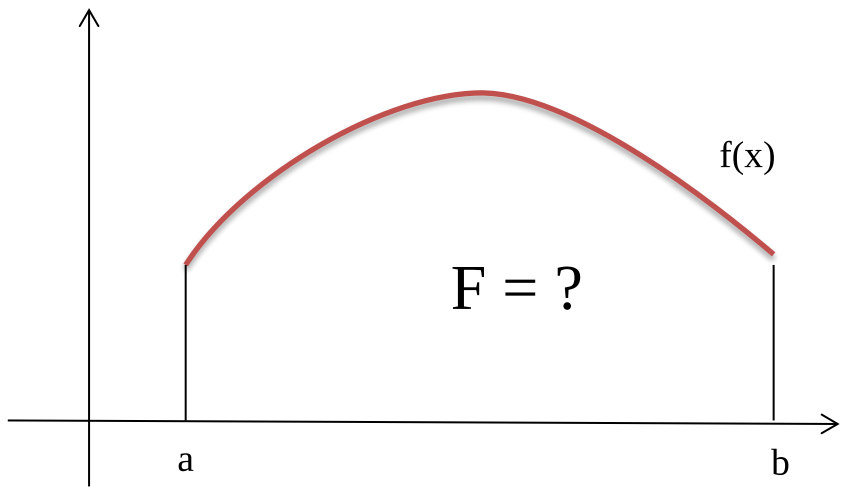
$$\int \frac{x^4}{x^5-1} dx = \frac{1}{5}\int \frac{5x^4}{x^5-1} dx = \frac{1}{5}\ln|x^5-1| + C$$

# 4. Das bestimmte Integral

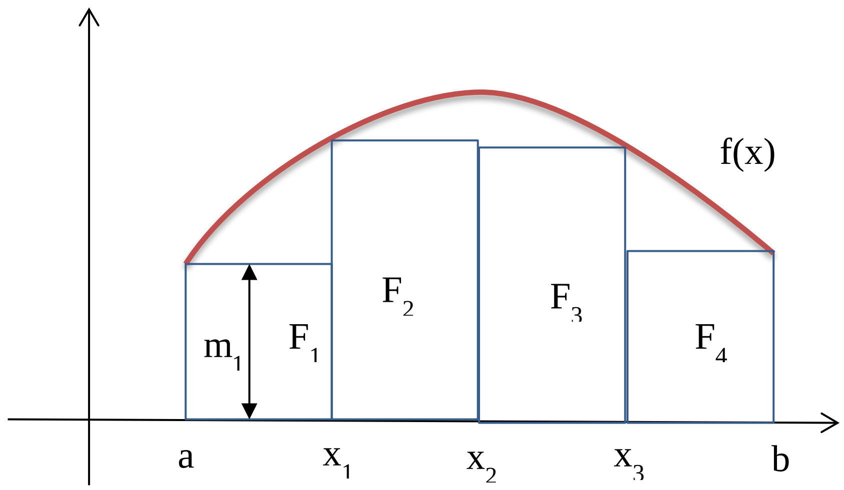
## 4.1 Motivation

Sei f(x) positiv in [a,b]

Gesucht der Flächeninhalt F zwischen der Kurve f(x) und dem Intervall [a,b]




Man kann näherungsweise den Flächeninhalt berechnen, indem man das Intervall [a,b] zerlegt in Teilintervalle und über jedes Teilintervall ein Rechteck errichtet. Als Höhe des Rechtecks kann man z.B. jeweils den minimalen Funktionswert im Teilintervall wählen.




$$m_1 = \min\{f(x) : x \in [a, x_1]\}$$

$$F \approx \sum_{i=1}^{4} F_i$$

Der Flächeninhalt jedes Rechtecks ist gleich Breite mal Höhe. Der gesuchte Flächeninhalt F ist dann näeerungsweise gleich der Summe der Flächeninhalte der Rechtecke. Erhöht man die Anzahl der Teilintervalle, so verbessert sich der Näherungswert. Geht man zum Grenzwert über, so erhält man als Limes den Flächeninhalt F.

## 4.2 Zerlegung eines Intervalls

Sei a < b. Eine Menge von Punkten mit

$$Z: a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$$

heißt eine Zerlegung von [a,b]. Es entstehen dabei n+1 Punkte und n Intervalle.

Eine Zerlegung in gleich lange Intervalle der Länge $\frac{b-a}{n}$ heißt äquidistante Zerlegung.

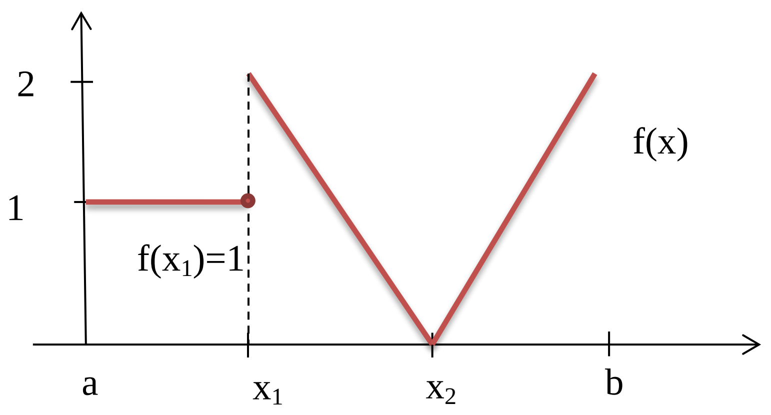
## 4.3 Notationen

- Sei f(x) eine auf [a,b] (nicht notwendig positive) beschränkte Funktion, d.h es existiert eine untere Schranke m und eine obere Schranke M mit
$$m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a, b]$$
- Sei
$$Z: a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$$
eine Zerlegung des Intervalls [a,b].

- $m_k$ und $M_k$ sind definiert durch
$$m_k = \inf\,\{f(x): x \in [x_k, x_{k+1}]\}\ \ (\mathit{größte\ untere\ Schranke})$$
$$M_k = \sup\,\{f(x): x \in [x_k, x_{k+1}]\}\ \ (\mathit{kleinste\ obere\ Schranke})$$

Warum schreiben wir inf / sup und nicht min / max?

Bsp.




$$m_2 = \inf\{f(x): x \in [x_1, x_2]\} = \min\{f(x): x \in [x_1, x_2]\} = 0$$

$M_2 = \sup\{f(x): x \in [x_1, x_2]\} = 2$

(Maximum wird nicht angenommen in $[x_1, x_2], f(x_1) \neq 2$)

Nach dem Satz von Weierstraß nimmt eine stetige Funktion in einem abegeschlossenen Intervall ihr Maximum und Minimum an.

Bem.: f stetig $\Longrightarrow \inf\{\dots\} = \min\{\dots\}\, und \sup\{\dots\} = \max\{\dots\}$

## 4.4 Obersummen und Untersummen

Sei f auf [a,b] beschränkt und

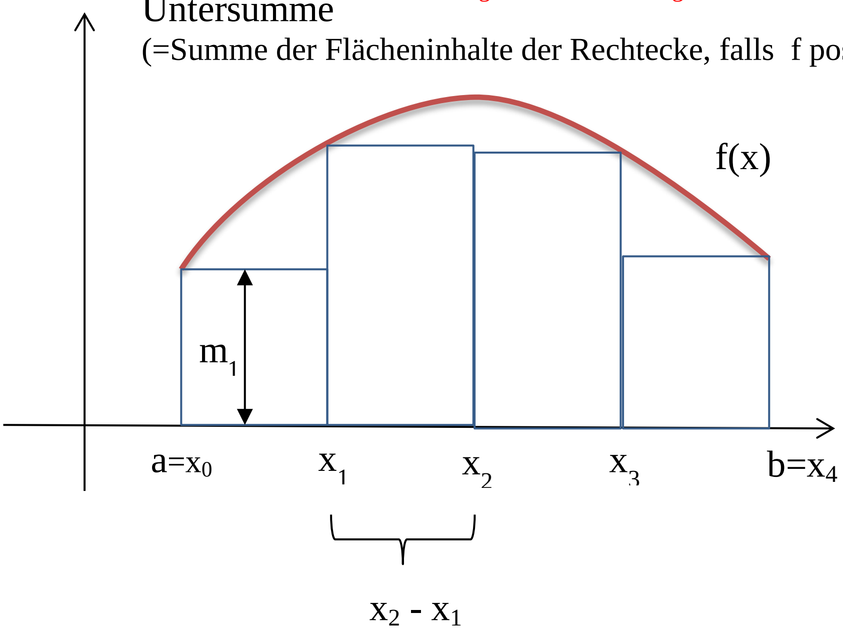
$Z: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b = x_{n+1}$

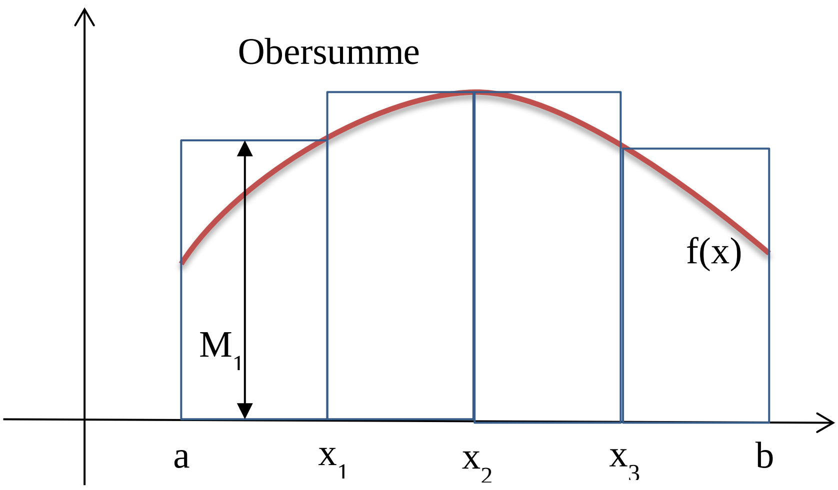
eine Zerlegung von [a,b],. Dann heißt

$$\boxed{U(Z, f) = \sum_{k=1}^{n+1} m_k (x_k - x_{k-1})}$$ Untersumme von $f$ bzgl. $Z$

$$\boxed{O(Z, f) = \sum_{k=1}^{n+1} M_k (x_k - x_{k-1})}$$ Obersumme von $f$ bzgl. $Z$

Untersummen und Obersummen können auch negativ sein wenn f negativ ist






Satz: Für beliebige Zerlegungen $Z$ und $Z'$ gilt

$$\boxed{U(Z,f) \leq O(Z',f)}$$

(ohne Beweis) anschaulich klar, wenn f positiv: die Untersummen liegen unterrhalb, die Obersummen oberhalb von f.

Notation:

$$U := \sup\{U(Z,f) : Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$$

$$O := \inf\{O(Z,f) : Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$$

Bem.:Supremum und Infimum existieren, da nach dem obigen Satz die Menge der Untersummen nach oben beschränkt und die Menge der Obersummen nach unten beschränkt ist.

## 4.5 Integrierbare Funktionen

Definition:

Sei f(x) eine auf [a,b] (nicht notwendig positive) beschränkte Funktion. f heißt integrierbar, wenn

$$\boxed{U = O}$$

Man schreibt

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx := O = U}$$

Später wird der Zusammenhang zwischen
bestimmten und unbestimmten Integral ersichtlich.

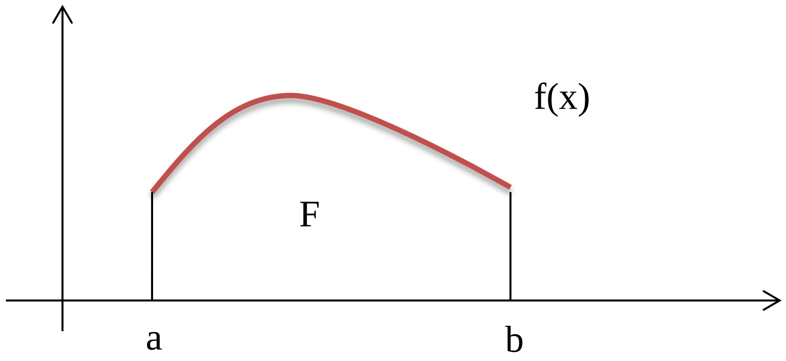
$\int_a^b f(x)dx$ heißt bestimmtes Integral von f über [a,b].

a heißt untere Grenze, b obere Grenze und [a,b] Integrationsintervall.

## 4.6 Flächeninhalt unter der Kurve f(x)

Sei f(x) integrierbar und positiv in [a,b] und sei F der Flächeninhalt unterhalb der Kurve f(x). Dann gilt

$$\boxed{F = \int_a^b f(x)dx}$$




Beweis: Für beliebige Zerlegungen $Z$ und $Z'$ gilt

die Untersummen liegen unterhalb, die Obersummen oberhalb von f

$U(Z,f) \leq F \leq O(Z',f) \Longrightarrow U \leq F \leq O$

f(x) integrierbar $\Longrightarrow U = O = \int_a^b f(x)dx \Longrightarrow F = \int_a^b f(x)dx$

☺

## 4.7 (Standard)Beispiel einer beschränkten, nicht integrierbaren Funktion

Die Dirichlet-Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & für\ x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 0 & für\ x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist auf [0,1] beschränkt (klar), aber nicht integrierbar.

<u>Beweis</u>:

in jedem Intervall gibt es rationale und irrationale Zahlen

Für jede Zerlegung Z von [0,1] gilt

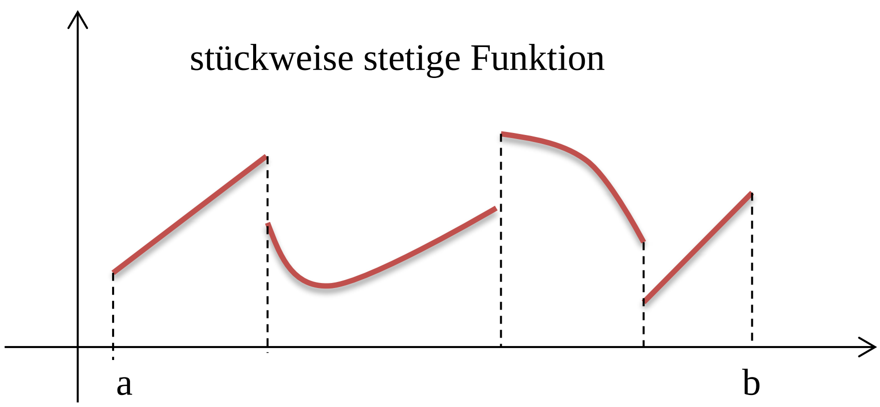
$$\left\{ \begin{aligned} U(Z,f) &= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{m_k}_{0} (x_k - x_{k-1}) = 0 \\ O(Z,f) &= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{M_k}_{1} (x_k - x_{k-1}) = 1 \end{aligned} \right\} \Longrightarrow \begin{Bmatrix} U = 0 \\ O = 1 \end{Bmatrix} \Longrightarrow U \neq O \Longrightarrow$$

f nicht integrierbar in [a,b]. die Summe der Teilintervalle von [0,1] ergibt 1

Es stellt sich die Frage, welche Funktionen integrierbar sind. Stückweise stetige Funktionen sind integrierbar.

## 4.8 <u>Stückweise stetige Funktionen</u>

Eine Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt in [a,b] <u>stückweise stetig</u>, wenn sie sich aus endlich vielen stetigen Funktionen zusammensetzt (d.h. höchstens endlich viele Sprungstellen)



## 4.9 Klassen integrierbarer Funktionen

(1) Jede auf [a,b] beschränkte und monotone Funktion ist integrierbar auf [a,b].

(2) Jede auf [a,b] stückweise stetige Funktion, insbesondere jede stetige Funktion ist integrierbar auf [a,b].

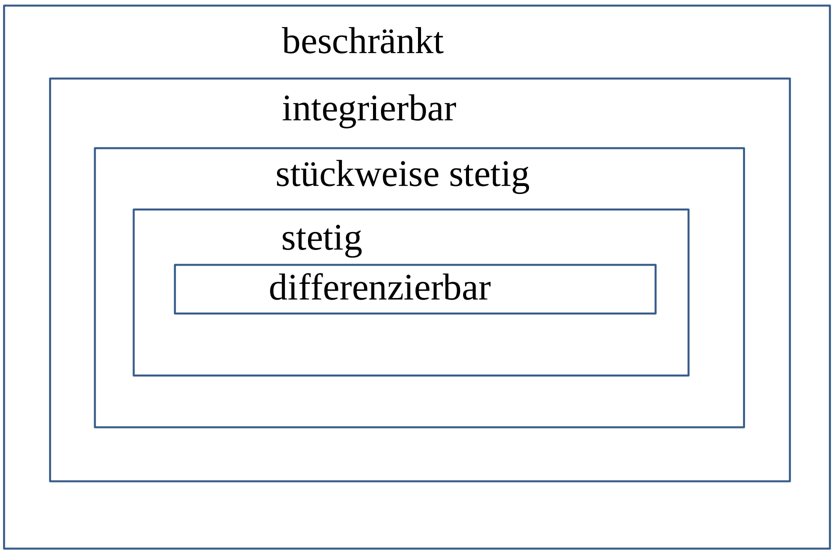
es gibt monotone beschränkte Funktionen, die nicht stückweise stetig sind

(ohne Beweis)

Die Klasse der diff'baren Funktionen ist enthalten in der Klasse der stetigen Funktionen, die Klasse der stetigen Funktionen ist wiederum enthalten in der Klasse der…
Jede intergrierbare Funktion ist nach Voraussetzung beschränkt.
eine monotone Funktion muss nicht stetig sein.

Klassen von Funktionen

als Venn (Fenn)-Diagramm dargestellt




Für die Herleitung von Formeln und Eigenschaften für bestimmte Integrale sind Riemannsche Summen sehr hilfreich.

## 4.10 Riemann-Summen

- Sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

- Sei $Z: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Zerlegung von [a,b].
  Man setzt für k=1,…n

  $$\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$$

  Der Wert

  $$\lambda(Z) := \max\{\Delta x_k : k = 1, \ldots, n\} (maximale\ Intervalllänge)$$

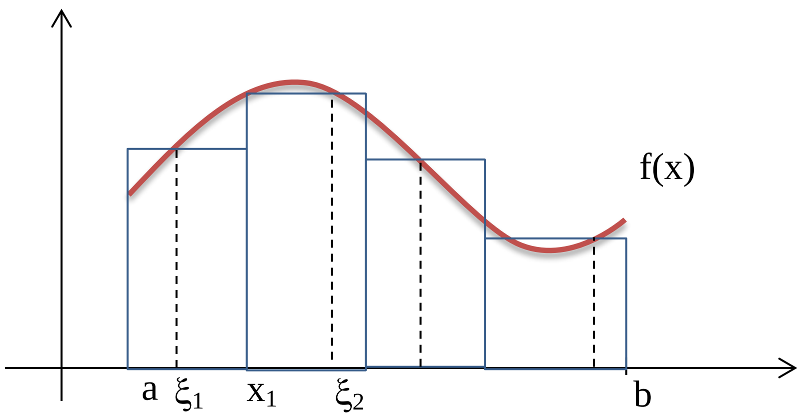
  heißt Feinheit von Z.

- Seien $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ beliebige Zwischenpunkte für $k = 1, \dots, n$.
  $B = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ nennt man Besetzung von Z.

Dann heißt

$$\boxed{R(Z,B,f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})}$$

Riemann-Summe für f bzgl. der Zerlegung Z und der Besetzung B.




Riemann-Summe
(=Summe der Flächeninhalte der Rechtecke, falls f poitiv)

Es gilt

$$\underbrace{U(Z,f)}_{Untersumme} \leq \underbrace{R(Z,B,f)}_{Riemann-S.} \leq \underbrace{O(Z,f)}_{Obersumme}$$

4.11 Das bestimmte Integral als Limes von Riemann-Summen

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar.

Sei $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls [a,b] mit Besetzungen $B_1, B_2, B_3, \dots$, so dass $\lim_{n\to\infty} \lambda(Z_n) = 0$ . Dann gilt

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} R(Z_n, B_n, f) = \lim_{n\to\infty} \left( \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta x_k \right)_{Z_n}}$$

(ohne Beweis)

Folgerung

Sei $Z_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine äquidistante Zerlegung in Teilintervallen der Länge $\frac{b-a}{n}$ mit den Punkten

$x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \dots, x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b$

und $B_n$ eine Besetzung von $Z_n$ mit den Punkten $\xi_k = x_k$ (rechter Randpunkt des Teilintervalls). Es gilt

$$\lambda(Z_n) = \frac{b-a}{n} \to 0 \; für \; n \to \infty$$

und damit nach dem Satz

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\frac{b-a}{n}}$$

Man kann bestimmte Integrale definieren, wenn die untere Grenze größer ist als die obere Grenze.

4.12 Definition

Vertauschung der Integrationsgrenzen bewirkt Vertauschung des Vorzeichens.

(1) Für a > b ist $\int_a^b f(x)dx$ definiert durch

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$$

Bsp.: $\int_5^1 f(x)dx = -\int_1^5 f(x)dx$

(2) Man setzt

$$\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$$

muss gesondert definiert werden, da man bei der Definition des bestimmten Integrals von a < b ausgegangen ist.

4.13 Eigenschaften von bestimmten Integralen

Seien f und g integrierbar über [a,b]. Es gilt

(1) $\boxed{\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx}$

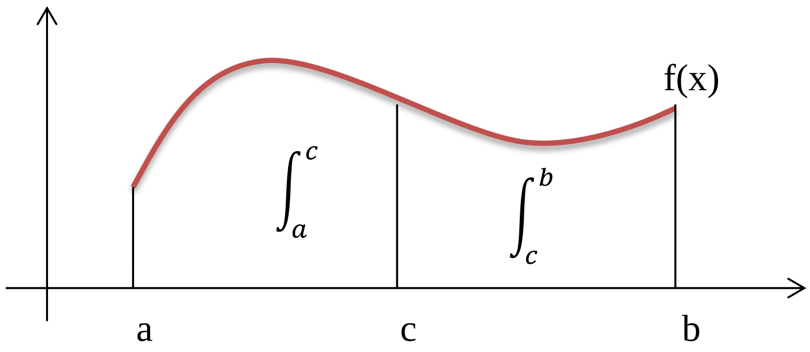
(2) $\boxed{\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad \forall c \in \mathbb{R}}$

(3) Intervalladditivität

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx} \quad (a, b, c\ beliebig)$$

geometrische Deutung für a < c < b

Die Gesamtfläche ergibt dann das Integral über [a,b]



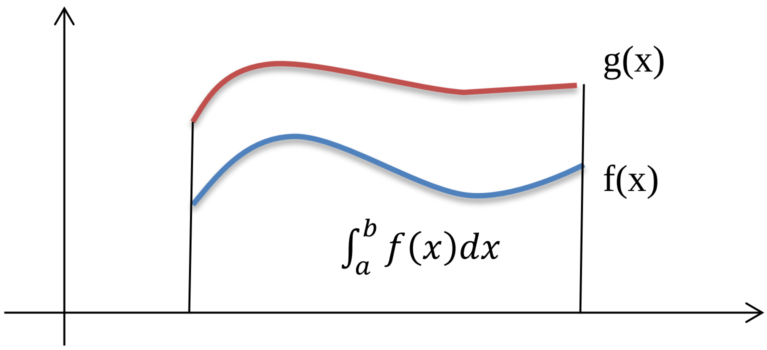

(4) Monotonie des Integrals

Für $f(x) \le g(x)$ auf [a,b] gilt

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx}$$

geometrische Deutung

Der Flächeninhalt unterhalb von f(x) ist kleiner als der Flächeninhalt unterhalb von g(x), daher ist auch das Integral von f(x) kleiner als das Integral von g(x).




Beweis der Summenformel (1)

Nach 4.11 (Folgerung) gilt

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) + g(x_k)\big)\frac{b-a}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\frac{b-a}{n} =$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$ ☺

## 4.14 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f \in C[a,b]$. Es existiert ein $x^* \in [a,b]$ mit

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = f(x^*)(b-a)}$$

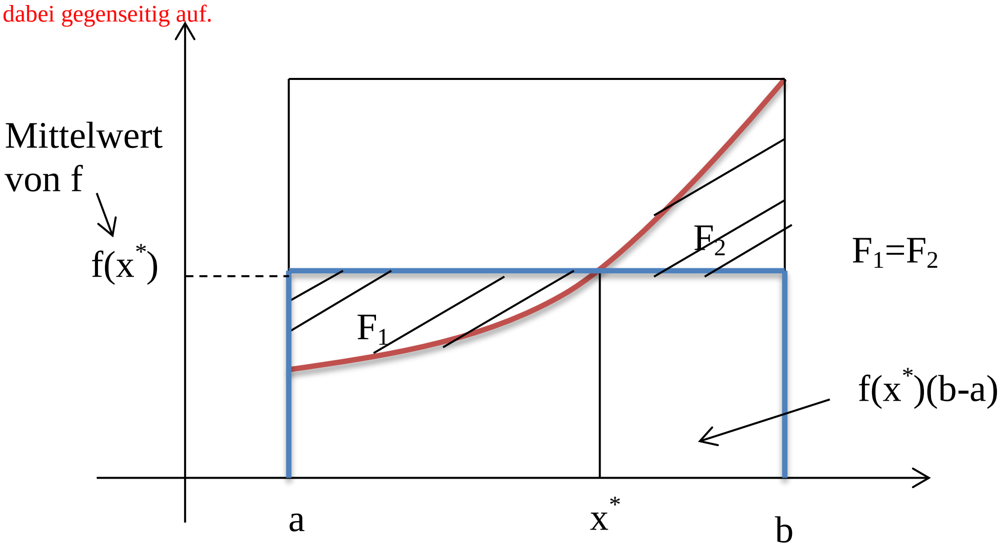
Der Wert

$$\boxed{f(x^*) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$

heißt Mittelwert oder mittlere Ordinate von f in [a,b].

### geometrische Deutung

Der Flächeninhalt unterhalb der f(x) ist dann gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks, wobei die Höhe durch den Mittelwert gegeben ist. Die Flächen $F_1$ und $F_2$ heben sich dabei gegenseitig auf.



<u>Beweis</u>:

Sei $m = \min_{a \le x \le b} f(x)$ *und* $M = \max_{a \le x \le b} f(x)$ (Minimum und Maximum wird angenommen, da stetige Funktion auf abgeschlossenem Intervall). Es gilt

$$m \le f(x) \le M \Longrightarrow \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M\,dx \Longrightarrow$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \Longrightarrow m \le \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}_{k} \le M$$

Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen existiert ein $x^* \in [a,b]$ mit

$$f(x^*) = k = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx = f(x^*)(b-a)$$

☺

Im Folgenden soll untersucht werden, wie man in konkreten Situationen das bestimmte Integral berechnen kann. Eine Rolle hierbei spielt die Flächenfunktion.

## 4.15 <u>Flächenfunktion</u>

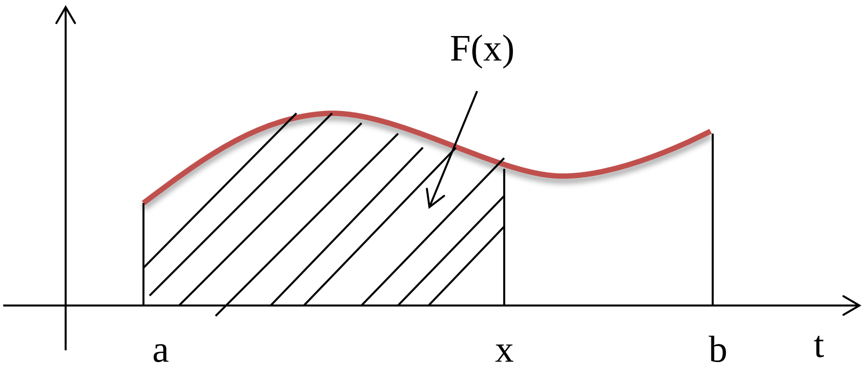
Ist f(x) über [a,b] integrierbar, so heißt die Funktion

$$\boxed{I(x) = \int_a^x f(t)dt}\ , x \in [a,b]$$

<u>Flächenfunktion</u> oder <u>Integralfunktion</u> von f.

t = Integrationsvariable

x = variable obere Grenze




<u>Satz</u>:

Ist $f \in C[a,b]$, so gilt

$$\boxed{I'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)\,, \quad I(a) = 0}\,, dh.$$

$I(x)$ ist Stammfunktion von f(x).

<u>Beweis</u>: $I(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$

$$I(x+h) - I(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$

$$= \int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt \overset{4.13(3)}{\triangleq} \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralr. existiert ein $x^*$ mit

$h > 0{:}\, I(x+h) - I(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = f(x^*)h$

$\quad f\ddot{u}r\ x^* \in [x, x+h]$

$h < 0{:}\, I(x+h) - I(x) = -\int_{x+h}^{x} f(t)dt = -(f(x^*)(-h)) = f(x^*)h$

$\quad f\ddot{u}r\ x^* \in [x+h, x]$

$$I'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{I(x+h) - I(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x^*)\cdot h}{h} = \lim_{h\to 0} f(x^*)$$

$$= f(x)\ (f\ stetig, beachte{:}\ x^*\ h\ddot{a}ngt\ von\ h\ ab!)$$

☺

Der folgende Hauptsatz der D. u. I. stellt eine Verbindung her zwischen dem bestimmten und unbestimmten Integral. Damit können ohne Limesbetrachungen bestimmte Integrale berechnet werden.

## 4.16 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Für jede Stammfunktion F(x) von f(x) gilt

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_{x=a}^b}$$

Beweis:

Sei $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ Flächenfunktion von f. Es gilt

2 Stammfunktionen unterscheiden sich nur um eine Konstante

$$I(x) = F(x) + C \Longrightarrow I(a) = 0 = F(a) + C \Longrightarrow C = -F(a) \Longrightarrow$$

$$I(x) = F(x) - F(a) \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt = I(b) = F(b) - F(a)$$

Variablentausch: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

☺

Beispiel:

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=1}^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

# 5. Rechenregeln für bestimmte Integrale

## 5.1 Partielle Integration für bestimmte Integrale

$$\boxed{\int_a^b u \cdot v' dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v \, dx}$$

Beweis: folgt aus part. Integration für unbestimmte Integrale.

## 5.2 Substitutionsregel für bestimmte Integrale

(1) Sei $u = g(x)$ stetig diff'bar in $[a, b]$ und $f(u)$ stetig in $[g(a), g(b)]$.
Es gilt

$$\boxed{\int_a^b f\big(g(x)\big) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du}$$

(2) Sei $f(x)$ stetig in $[a, b]$ und $x = g(u)$ stetig diff'bar und umkehrbar in $[g^{-1}(a), g^{-1}(b)]$. Es gilt

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f\big(g(u)\big) \cdot g'(u) du}$$

Merke ⚠

| Grenzen mitsubstituieren (häufige Fehlerquelle) |
|---|

Beweis: folgt aus Substitutionsregel für unbestimmte Integrale.

## 5.3 Beispiel

$$\int_0^{100} e^{\sqrt{x}} \, dx = ?$$

<u>Lsg</u>.: $u = \sqrt{x}\,, \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2u}, \quad dx = 2u\,du$

$$\begin{Bmatrix} x = 0 \Longrightarrow u = \sqrt{0} = 0 \\ x = 100 \Longrightarrow u = \sqrt{100} = 10 \end{Bmatrix}$$

$$\int_0^{100} e^{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{10} 2e^u u\,du \overset{5.1}{\cong} [2ue^u]_{u=0}^{10} - 2\int_0^{10} e^u du =$$

$$= 20e^{10} - 0 - 2[e^u]_{u=0}^{10} = 20e^{10} - 2e^{10} + 2 =$$

$$= 18e^{10} + 2$$

Empfehlung:

| |
|---|
| Erst das unbestimmte Integral lösen und dann die Grenzen einsetzen. |

Man muss dann die Grenzen nicht mitschleppen und die Substitution der Grenzen fällt weg.

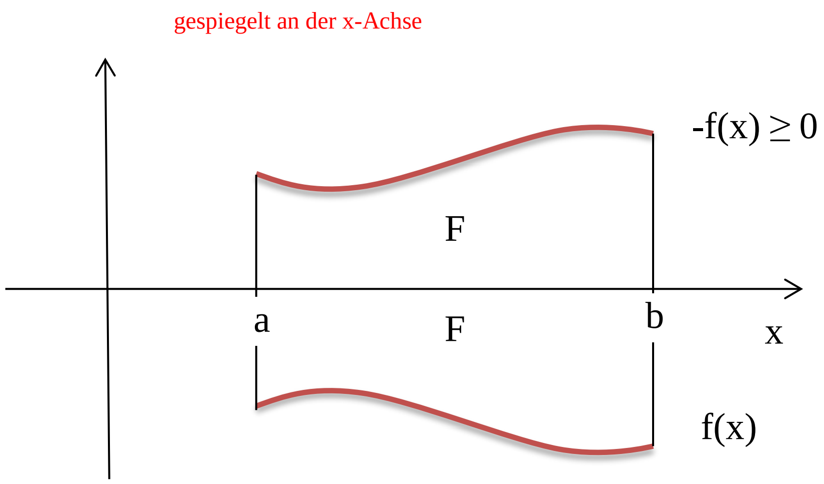
# 6. Anwendungen der Integralrechnung

## 6.1 Flächenberechnungen

Sei F der Flächeninhalt der zwischen der Kurve y=f(x) und der x-Achse gelegenen Fläche über [a,b]. Es gilt

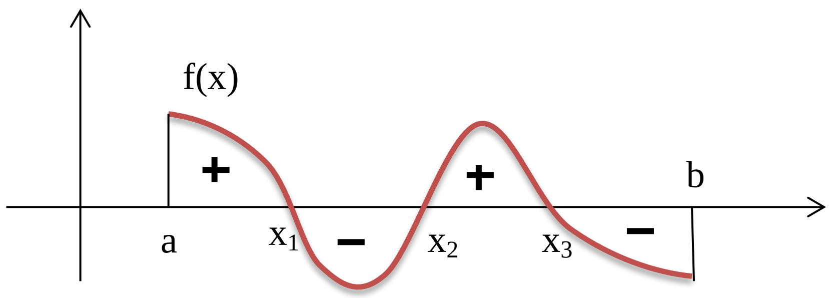
(1) $\boxed{F = \int_a^b f(x)dx \;\; falls\; f(x) \geq 0 \; in \; [a,b]}$ $\;vgl. 4.6$

(2) $\boxed{F = -\int_a^b f(x)dx \;\; falls\; f(x) \leq 0 \; in \; [a,b]}$




$$F = \int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Praktische Berechnung von F, falls f beliebig



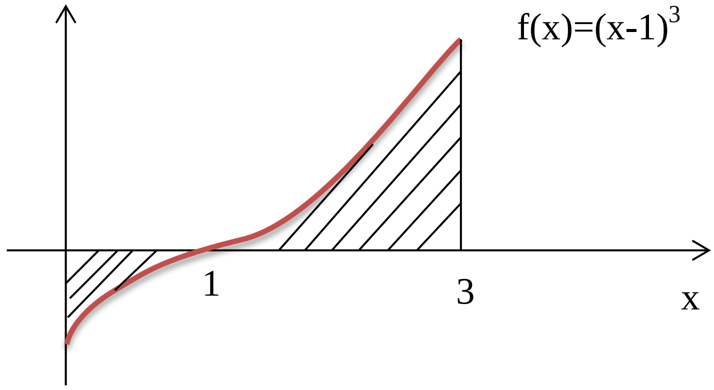
$F = \left|\int_a^{x_1}\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2}\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3}\right| + \left|\int_{x_3}^{b}\right|$

Integration von Nullstelle zu Nullstelle!!

Beispiel: Gesucht der Flächeninhalt der zwischen der Kurve $y = (x-1)^3$ und der x-Achse gelegenen Fläche über [0,3].

Lösung:

Nullstellen von f(x) in [0,3]: x = 1




$\int_0^1 (x-1)^3 dx = \left[\frac{1}{4}(x-1)^4\right]_{x=0}^{1} = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$

$\int_1^3 (x-1)^3 dx = \left[\frac{1}{4}(x-1)^4\right]_{x=1}^{3} = 4$

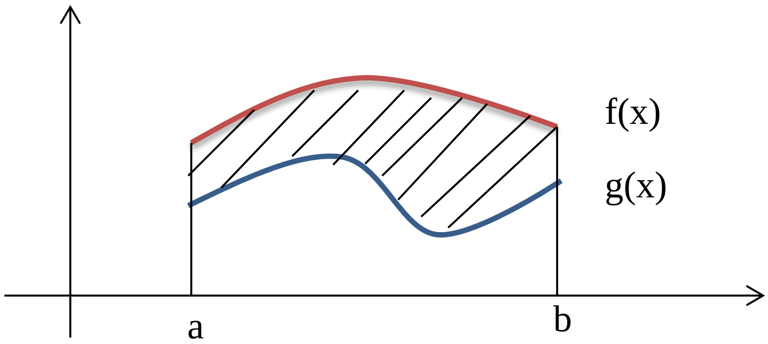
$F = \left|-\frac{1}{4}\right| + |4| = \frac{17}{4}$

## 6.2 Berechnung von Flächen zwischen zwei Kurven

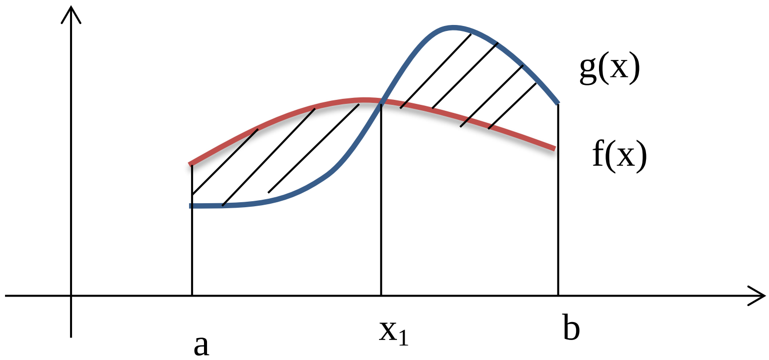
Seien f(x) und g(x) integrierbar in [a,b] und sei F der Flächeninhalt zwischen den Kurven f(x) und g(x) über [a,b].

(1) Ist $f(x) \geq g(x) in\ [a,b]$, so gilt

$$\boxed{F = \int_a^b f(x) - g(x) dx}$$




(2) Seien f(x) und g(x) beliebig.




Es gilt

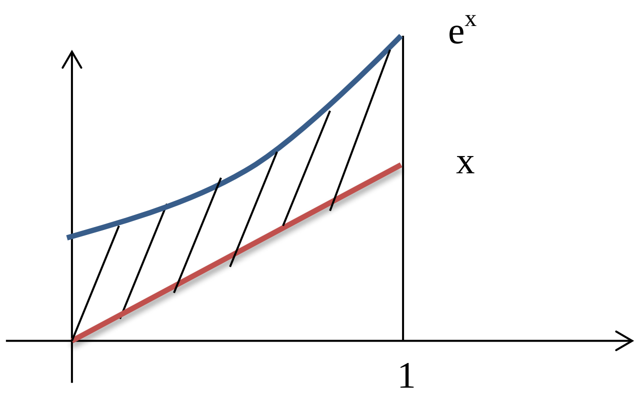
$$\boxed{F = \int_a^{x_1} f(x) - g(x)dx + \int_{x_1}^{b} g(x) - f(x)dx}$$

Integration von Schnittstelle zu Schnittstelle!

## 6.3 Beispiele zur Flächenberechnung

(1) Welchen Flächeninhalt hat die Fläche zwischen x und $e^x$ im Intervall [0,1] ?

Lsg.:



$$F = \int_0^1 e^x - x\,dx = \left[e^x - \frac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{1} = e - 1 - \frac{1}{2} = e - \frac{3}{2}$$

(2) Welchen Flächeninhalt hat die Fläche, die von den Funktionen $f(x) = x^2, g(x) = 6 - x$ und $h(x) = \frac{1}{2}x$ eingeschlossen wird?

Lsg.:

Schnittstellen: $x_1 = 0.5,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4$

$$F = \int_{0.5}^{2} x^2 - \frac{1}{2}xdx + \int_2^4 6 - x - \frac{1}{2}xdx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{4}x^2\right]_{x=2}^{4} + \left[6x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^2\right]_{x=2}^{4} = \frac{75}{16}$$

½ x

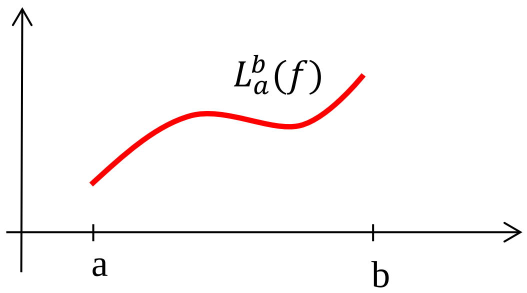
6 - x

Mit Hilfe des bestimmtem Integrals kann man weiterhin die Länge einer ebenen Kurve berechnen

## 6.4 Längenberechnungen

2 4

Sei f(x) diff‘bar in [a,b] und sei $L_a^b(f)$ die Länge der Kurve f(x).



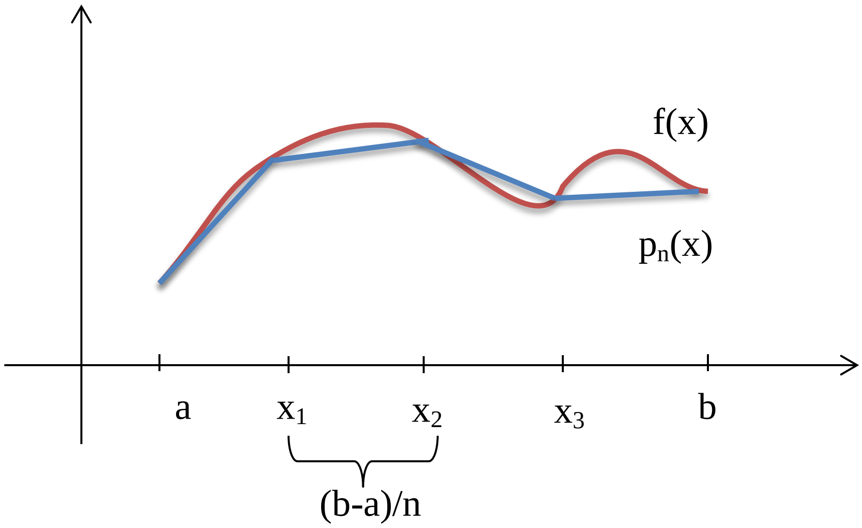

Es gilt

$$\boxed{L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx}$$

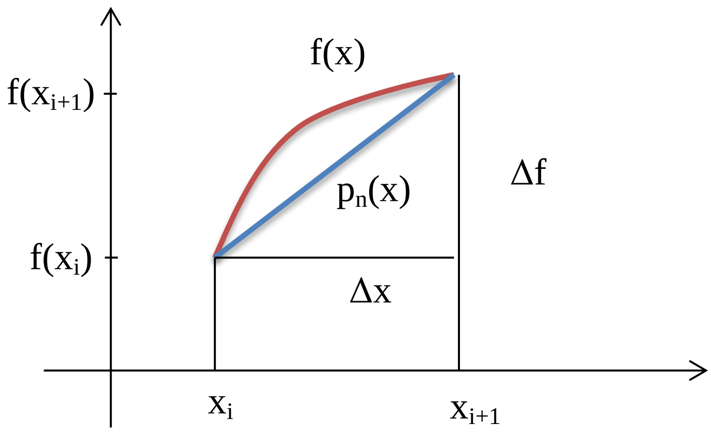
Beweis:

Sei $Z_n: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ eine äquidistante Zerlegung.

Annäherung von f(x) durch einen Polygonzug $p_n(x)$ bzgl. $Z_n$




Bestimmung einer Teilstücklänge $L_{x_i}^{x_{i+1}}(p_n)$ in $[x_i, x_{i+1}]$




$\Delta f = f(x_{i+1}) - f(x_i), \quad \Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Kap.6, 5.1) existiert ein $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ mit

$$f'(\xi_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Es gilt

$$L_{x_i}^{x_{i+1}}(p_n) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta f)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x =$$

$$= \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \frac{b-a}{n}$$

$$L_a^b(p_n) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \frac{b-a}{n}$$

Für n gegen unendlich geht der Polygonzug in die Kurve f(x) über.
Die Länge einer Kurve kann über diesen Limes definiert werden.

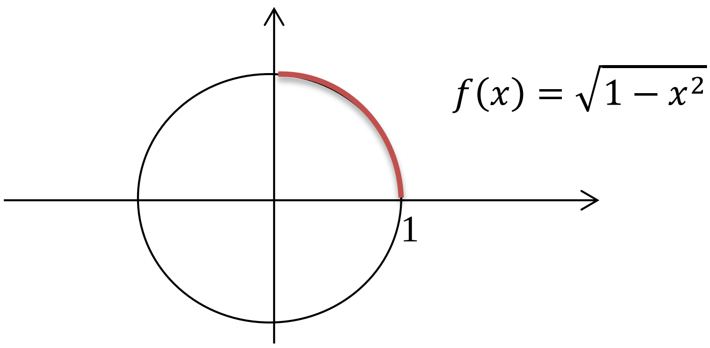
$$L_a^b(f) = \lim_{n\to\infty} L_a^b(p_n) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \frac{b-a}{n}}_{Riemann-S.für \sqrt{1+(f'(x))^2}} =$$

$$\overset{4.11}{\triangleq} \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$ ☺

## 6.5 Beispiel zur Längenberechnung

Bestimmung des Umfangs des Einheitskreises.

Lösung:




Länge des Viertelkreises:

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Longrightarrow$$

$$1 + \left(f'(x)\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1 - x^2 + x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$L_0^1(f) = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = ?$$

$$x = \sin u, \qquad \frac{dx}{du} = \cos u\,, \quad dx = \cos u\, du$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}}\cos u\,du = \int \frac{1}{\cos u}\cos u\;du = \int du$$

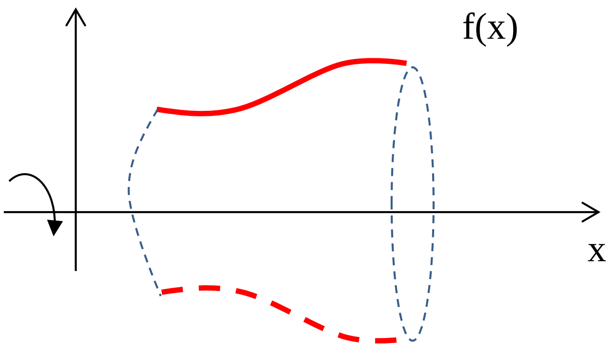
$$= u + C = \arcsin x + C$$

$$L_0^1(f) = [\arcsin x]_{x=0}^1 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

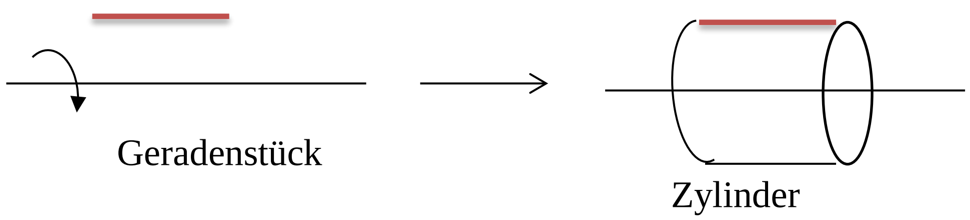
Umfang des Einheitskreises $= 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$

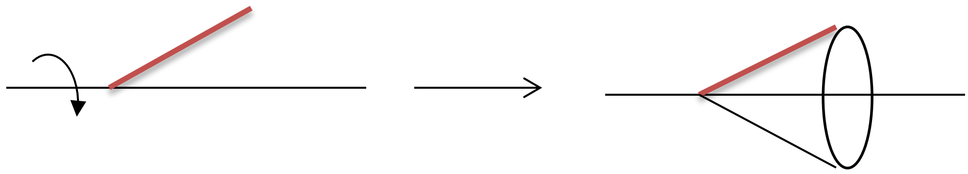
## 6.6 Rotationskörper

Durch Rotation einer Kurve f(x) um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper (f(x) nennt man dann Meridian).

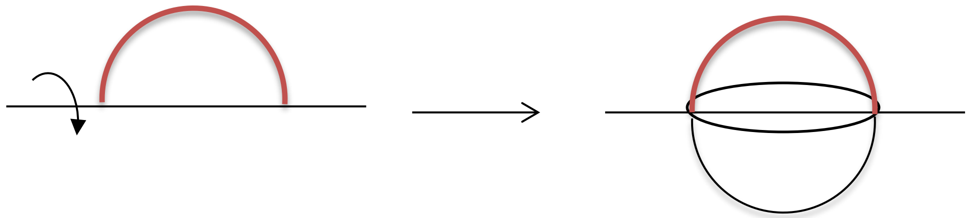



Beispiele von Rotationskörpern:



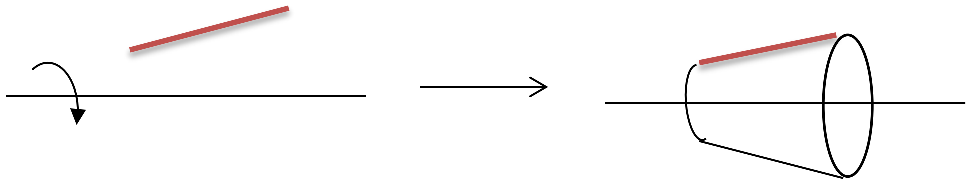


Kegel

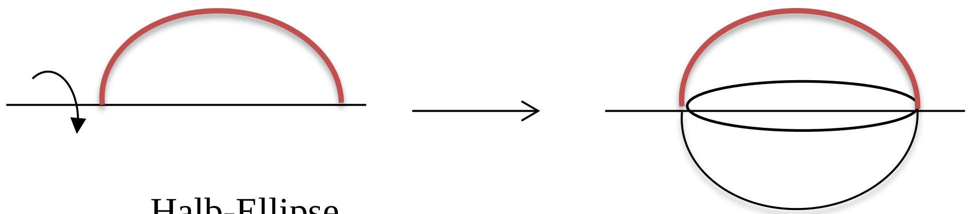


Halbkreis

Kugel

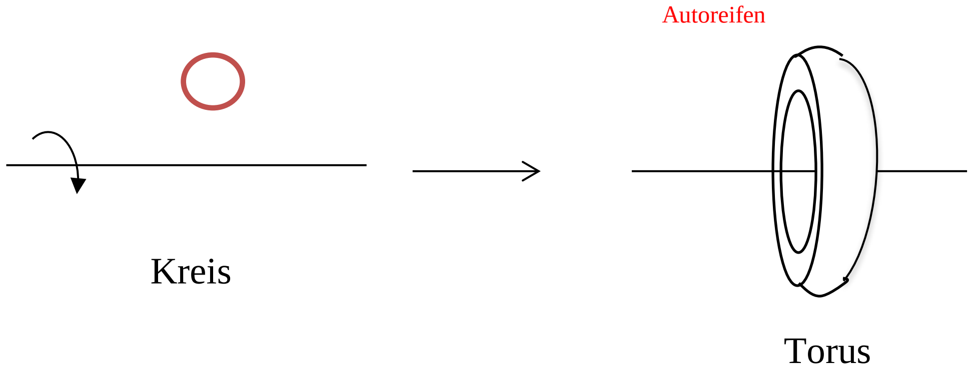


Kegelstumpf



Halb-Ellipse

Ellipsoid




## 6.7 Volumen- und Mantelflächenberechnungen von Rotationskörpern

Sei f(x) ein rotierendes Kurvenstück im Intervall [a,b].

(1) Das Rotationsvolumen $V_a^b(f)$ ist gegeben durch

$$\boxed{V_a^b(f) = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx}$$

(2) Die Mantelfläche $M_a^b(f)$ des Rotationskörpers ist gegeben durch

$$\boxed{M_a^b(f) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx}$$

ohne Beweis

(Beweis ähnlich wie bei Längenberechnungen mit Riemann-Summen)

## 6.8 Beispiele

(1) Volumen einer Kugel mit Radius r = ?

Lsg..

Rotation des Halbkreises $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ um die x-Achse im Bereich [-r,r].

$$V_a^b(f) = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^r r^2 - x^2 dx = \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{x=-r}^r$$

$$= \pi\left(r^3 - \frac{1}{3}r^3 + r^3 - \frac{1}{3}r^3\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$

(2) Oberfläche einer Kugel mit Radius r = ?

Lsg.:

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \qquad x \in [-r, r]$

$f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

$$M_{-r}^{r}(f) = 2\pi \int_{-r}^{r} f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}\,dx =$$

$$= 2\pi r \int_{-r}^{r} \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx = 2\pi r[x]_{-r}^{r} = 4\pi r^2$$

# 7. Integration von Potenzreihen

## 7.1 Satz

Die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ habe den Konvergenzradius $r > 0$. f(x) ist nach (Kap. 5, 4.1) differenzierbar in $(x_0 - r, x_0 + r)$ und somit integrierbar in $[x_0 - r, x_0 + r]$. Es gilt

$$\boxed{\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n (x - x_0)^n dx = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} \right) + C}$$

Der Konvergenzradius der integrierten Potenzreihe ist ebenfalls r.

ohne Beweis

## 7.2 Beispiele

(1) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (Kap. 5\ 3.6(2))$

Sei $t = -x^2$.

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad ,$$

$f$ür $|t| = |-x^2| < 1$ $bzw.$ $|x| < 1$

$\arctan x =$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int x^{2n} dx = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \right) + C$$

$0 = \arctan 0 = C \Rightarrow C = 0$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad , |x| < 1$$

Folgerung:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

(dieses Integral spielt in der Stochastik eine wichtige Rolle)

(2) $\int e^{-x^2} dx$ nicht integrierbar (es existiert keine Stammfunktion in analytischer Form).

$\int e^{-x^2} dx$ jedoch darstellbar als Potenzreihe:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} \quad , x \in \mathbb{R}$$

$$\int e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)} x^{2n+1} + C$$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)} x^{2n+1}$$ ist Stammfunktion von $\mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2}$.

# Kapitel 7: Uneigentliche Integrale

## 1. Einführung

### 1.1 Bestimmtes Integral (Wiederholung)

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt auf einem endlichen Intervall [a,b]. Dann heißt der Grenzwert

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k} \;,$$

bestimmtes Integral, wobei

$$Z\colon a_0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

eine Zerlegung des Intervalls [a,b] ist mit

maximale Intervalllänge

$$\underbrace{\lambda(Z)}_{Feinheit} = \max_{1\le k\le n}\{\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

und $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = 1\ldots n,$ Zwischenpunkte (Besetzung) sind.

Der Limes ist unabhängig von den Zerlegungen und Besetzungen

Man spricht von einem uneigentlichem Integral, wenn entweder der Integrand unbeschränkt ist oder das Integrationsintervall unbeschränkt ist.

### 1.2 Arten von uneigentlichen Integralen

1.Art: Uneigentliches Integral von unendlichen Intervallen.

2.Art: Uneigentliches Integral von unbeschränkten Funktionen.

# 2. Uneigentliches Integral über unendliche Intervalle

## 2.1 Uneigentliches Integral über unendliche Intervalle (Definition)

(1) Ist $f(x)$ eine Funktion, die auf jedem abgeschlossenen endlichen Teilintervall von $\begin{Bmatrix} [a,\infty) \\ (-\infty,b] \end{Bmatrix}$ integrierbar ist, so heißt

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx}$$

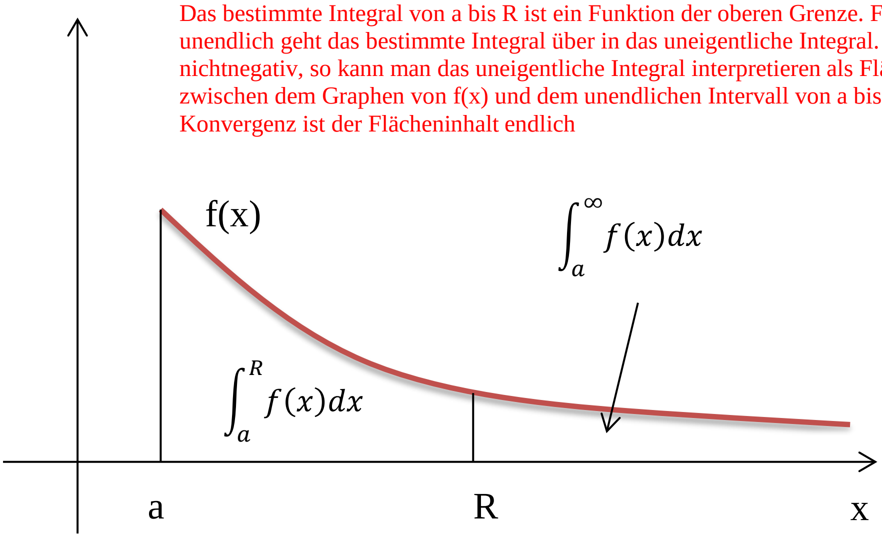
bzw.

$$\boxed{\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^b f(x)dx}$$

(an der oberen bzw. unteren Grenze) uneigentliches Integral. Existieren die Grenzwerte, so heißen die Grenzwerte konvergent; sonst divergent.

Geometrische Deutung für $\int_a^\infty f(x)dx$

Das bestimmte Integral von a bis R ist ein Funktion der oberen Grenze. Für R gegen unendlich geht das bestimmte Integral über in das uneigentliche Integral. Ist f(x) nichtnegativ, so kann man das uneigentliche Integral interpretieren als Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f(x) und dem unendlichen Intervall von a bis unendlich. Bei Konvergenz ist der Flächeninhalt endlich



(2) Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ einer auf jedem abgeschlossen endlichem Teilintervall von $\mathbb{R}$ integrierbaren Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

Ist ein Integral uneigentlich an der unteren und oberen Grenze. so lässt es sich in 2 Einzelintegrale aufspalten, die jeweils nur an einer Grenze uneigentlich ist

wegen der Intervalladditivität spielt der Wert von a keine Rolle. Im Allgemeinen wählt man für a=0

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx} \quad a\ beliebig$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ heißt dann <u>konvergent</u>, wenn $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ <u>und</u> $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ konvergieren; sonst <u>divergent</u>.

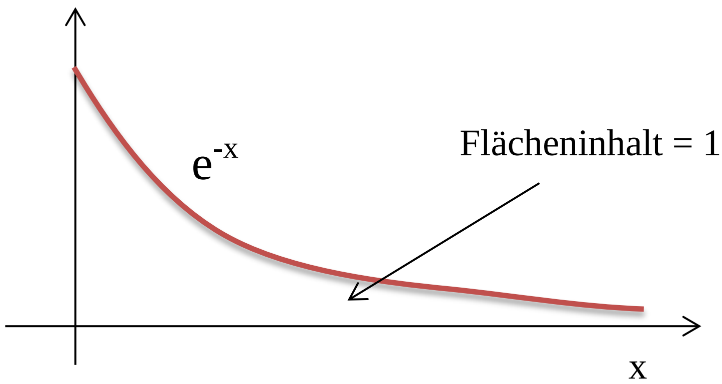
## 2.2 <u>Beispiele</u>

(1) $\int_0^{\infty} e^{-x}dx = ?$

<u>Lösung</u>:

$\int_0^{\infty} e^{-x}dx := \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-x}dx = \lim\limits_{R\to\infty} [-e^{-x}]_0^R = \lim\limits_{R\to\infty} -e^{-R} + 1$

$= 1$




(2) $\int_0^{\infty} \cos(x)\, dx = ?$

<u>Lösung</u>:

$$\int_0^{\infty} \cos(x)\, dx \coloneqq \lim_{R\to\infty} \int_0^R \cos(x)\, dx = \lim_{R\to\infty} [\sin x]_0^R =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \sin R \quad \text{divergiert, da}$$

$$\left\{\begin{matrix} \lim_{k\to\infty} \underbrace{\sin(2\pi k)}_{0} = 0 \\ \lim_{k\to\infty} \underbrace{\sin\left(2\pi k + \frac{\pi}{2}\right)}_{1} = 1 \end{matrix}\right\}$$

(3) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx =?$

Lösung:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^R = \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{R} + 1 = 1$$

(4) $\int_{-\infty}^\infty \frac{2x}{1+x^2} dx =?$

Lösung:

Der Zähler ist die Ableitung des Nenners

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{2x}{1+x^2} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^0 \frac{2x}{1+x^2} dx + \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$= \lim_{R\to\infty} [\ln(1+x^2)]_{-R}^0 + \lim_{R\to\infty} [\ln(1+x^2)]_0^R =$$

$$= -\lim_{R\to\infty} \ln(1+(-R)^2) + \lim_{R\to\infty} \ln(1+R^2) \quad \text{divergiert}$$

Bemerkung: Es gilt jedoch

$$\int_{-R}^R \frac{2x}{1+x^2} dx = \ln(1+R^2) - \ln(1+(-R)^2) = 0 \Longrightarrow$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R \frac{2x}{1+x^2} dx = 0 \text{ (Cauchy-Hauptwert)}$$

## 2.3 Cauchy-Hauptwert

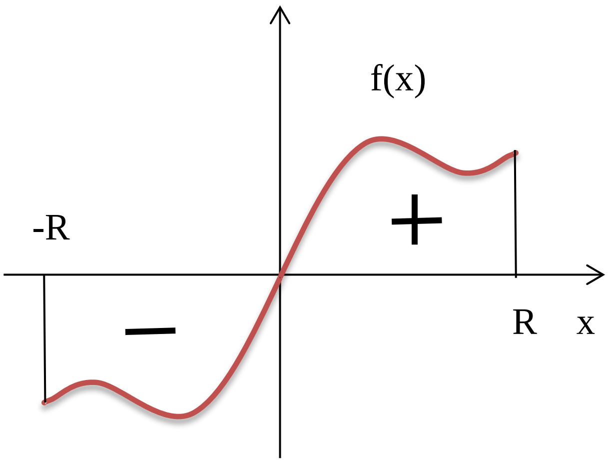
Definition: Der Wert $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R f(x)dx$ für eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Cauchy-Hauptwert (CHW)

Bemerkungen:

(1) Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungerade (d.h. $f(-x) = -f(x)$), so existiert der CHW und es gilt

$$\boxed{\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx = 0}$$

Beweis:




Das Integral einer ungeraden Funktion über ein symmetrisches Intervall ist immer gleich Null, da sich die Flächen gegenseitig aufheben.

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = 0 \Longrightarrow \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx = 0$$

☺

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\ konvergiert$ $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ CHW existiert

Beweis:

" $\Longrightarrow$ " Sei $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ konvergent .

$\lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = \lim\limits_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{R} f(x)dx\right) =$

$=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{0} f(x)dx + \lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R} f(x)dx =$

$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx$

$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

" $\not\Leftarrow$ " vgl. Bsp. 2.2(4)

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx$ divergiert, aber CHW=0

☺

wird analog eingeführt wie bei der absoluten Konvergenz von Reihen

## 2.4 Absolute Konvergenz von Integralen

Eine Funktion f heißt über $[a, \infty)$ absolut integrierbar und das Integral $\int_a^\infty f(x)dx$ absolut konvergent, wenn das Integral

$$\int_a^\infty |f(x)|dx$$

konvergiert.

Entsprechend wird die absolute Konvergenz über $(-\infty, b]$ bzw. $(-\infty, \infty)$ definiert.

## 2.5 Zusammenhang zwischen absoluter Konvergenz und Konvergenz von uneigentlichen Integralen

Es gilt

$$\boxed{\text{Integral absolut konvergent} \overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \text{Integral konvergent}}$$

Beweis:" $\Longrightarrow$ "

Sei $\int_a^\infty |f(x)|dx$ konvergent.

$$0 \le f(x) + |f(x)| \le |f(x)| + |f(x)| = 2|f(x)| \Longrightarrow$$

$$\int_a^R f(x) + |f(x)|dx \le 2\int_a^R |f(x)|dx \le 2\int_a^\infty |f(x)|dx \Longrightarrow$$

$\int_a^\infty f(x) + |f(x)|dx$ konvergent, da $F(R) = \int_a^R \underbrace{f(x) + |f(x)|}_{\ge 0} dx$

beschränkt und monoton wachsend in Abhängigkeit von R.

$\int_a^\infty f(x)dx = \underbrace{\int_a^\infty f(x) + |f(x)|dx}_{konvergent} - \underbrace{\int_a^\infty |f(x)|dx}_{konvergent}$ konvergent

" $\not\Leftarrow$ " Beispiel: $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

(ohne Beweis)

☺

## 2.6 Vergleichskriterium

(a) Sei $|f(x)| \leq g(x) \;\; \forall x \in [a, \infty)$ . Es gilt

$$\boxed{\int_a^\infty g(x)dx \text{ konvergent} \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)dx \text{ (absolut)konvergent}}$$

und

$$\boxed{\left|\int_a^\infty f(x)dx\right| \leq \int_a^\infty |f(x)|dx \leq \int_a^\infty g(x)dx}$$

(b) Sei $0 \leq g(x) \leq f(x) \;\forall x \in [a, \infty)$. Es gilt

$$\boxed{\int_a^\infty g(x)dx \text{ divergent} \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)dx \text{ divergent}}$$

Entsprechende Aussagen gelten auch für die Intervalle $(-\infty, b]$ und $(-\infty, \infty)$ .

Beweis:

(a) $|\int_a^R f(x)dx| \leq \int_a^R |f(x)|dx \leq \int_a^R g(x)dx \leq_{da\; g(x)\geq 0} \int_a^\infty g(x)dx = M \Longrightarrow$

$\int_a^\infty |f(x)|\, dx$ konvergiert $\overset{2.5}{\Rightarrow} \int_a^\infty f(x)dx$ konvergiert und es gilt

$$\left|\int_a^\infty f(x)dx\right| \leq \int_a^\infty |f(x)|dx \leq \int_a^\infty g(x)dx$$

(b) Annahme: $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergiert

$g(x) = |g(x)| \leq f(x) \;\forall x \in [a, \infty) \overset{(a)}{\Rightarrow}$

$\int_a^\infty g(x)dx$ konvergiert ↯ zur Voraussetzung

☺

## 2.7 Beispiel

$\int_0^\infty \frac{x}{x^2+3x+7} dx$ konvergent?

Lösung:

Nullstellen von $x^2+3x+7$: $x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 7} \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R} \Longrightarrow$

$\frac{x}{x^2+3x+7}$ integrierbar (stetig) in jedem abgeschlossenen endlichem Intervall von $[0, \infty)$

Zähler wird verkleinert und der Nenner vergrößert

$$\text{Für } x \geq 7 \text{ gilt: } \frac{x}{x^2+3x+7} = \frac{1}{x+3+\frac{7}{x}} \geq \frac{1}{x+4}$$

$$\int_7^\infty \frac{1}{x+4} dx = \lim_{R\to\infty} \int_7^R \frac{1}{x+4} dx = \lim_{R\to\infty} [\ln(R+4) - \ln 11] \text{ divergent}$$

$$\overset{2.6}{\Longrightarrow} \int_7^\infty \frac{x}{x^2+3x+7} dx \text{ divergent} \Longrightarrow \int_0^\infty \frac{x}{x^2+3x+7} dx \text{ divergent}$$

## 2.8 Integralkriterium für die Konvergenz von Reihen

Sei $f: [m, \infty) \to \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$ eine monoton fallende nichtnegative Funktion. Es gilt

$$\boxed{\sum_{n=m}^{\infty} f(n) \text{ konvergent} \Longleftrightarrow \int_m^\infty f(x) dx \text{ konvergent}}$$

Beweis:

" $\Longrightarrow$ "

Sei $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ konvergent.

$$M = \sum_{n=m}^{\infty} f(n) \cdot 1 \geq \underbrace{\sum_{n=m}^{R} f(n) \cdot 1}_{Obersumme} \geq \int_m^R f(x) dx \;\; \forall R \geq m \Longrightarrow$$

$\int_m^R f(x) dx$ monoton steigend und beschränkt in $R \Longrightarrow$

$$\lim_{R\to\infty}\int_m^R f(x)dx = \int_m^\infty f(x)dx \text{ existiert}$$

" $\Leftarrow$ "

Sei $\int_m^\infty f(x)dx$ konvergent.

$$\underbrace{\sum_{n=m+1}^{k} f(n)\cdot 1}_{Untersumme} \le \int_m^\infty f(x)dx \ \forall k\in\mathbb{N}, k\ge m+1 \Longrightarrow$$

$\sum_{n=m}^{k} f(n)$ monoton steigend und beschränkt in $k \Longrightarrow$

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=m}^{k} f(n) = \sum_{n=m}^{\infty} f(n) \text{ existiert}$$

2.9 <u>Beispiel</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\begin{Bmatrix}\text{konvergiert } f\ddot{u}r\ \alpha>1\\ \text{divergiert } f\ddot{u}r\ 0\le\alpha\le 1\end{Bmatrix}\ (nach\ Kap. 2, 7.2) \Longrightarrow$$

$$\boxed{\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx \begin{Bmatrix}\text{konvergiert } f\ddot{u}r\ \alpha>1\\ \text{divergiert } f\ddot{u}r\ 0\le\alpha\le 1\end{Bmatrix}}$$

2.10 <u>Anwendungsbeispiele</u>

(1) <u>Gamma-Funktion</u>

$\boxed{\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx}$ konvergent für $\alpha > 0$

Es gilt: $\Gamma(n+1) = n!$
(ohne Beweis)

<u>Bem</u>.: Die Gamma-Funktion ist damit die Fortsetzung von n! auf $\mathbb{R}^+$.

(Anwendungen: Gamma-Wahrscheinlichkeitsverteilung)

(2) <u>Stochastik</u>:

Sei X Zufallsvariable (z.B. Körpergröße, Lebensdauer eines Bauelements) mit Dichtefunktion f(x).

Erwartungswert von X (Mittelwert) $= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$

# 3. Uneigentliche Integrale unbeschränkter Funktionen

## 3.1 Unbeschränkte Funktion

Sei $c \in [a,b]$. Eine Funktion $f: [a,b]\backslash\{c\} \to \mathbb{R}$ ist in c unbeschränkt, wenn

$$\lim_{x \searrow c} f(x) = \pm\infty \text{ und/oder } \lim_{x \nearrow c} f(x) = \pm\infty$$

Zur Erinnerung:

rechtseitiger Grenzwert: $\lim_{x \searrow c} f(x) = \lim_{\substack{x \to c \\ x > c}} f(x)$

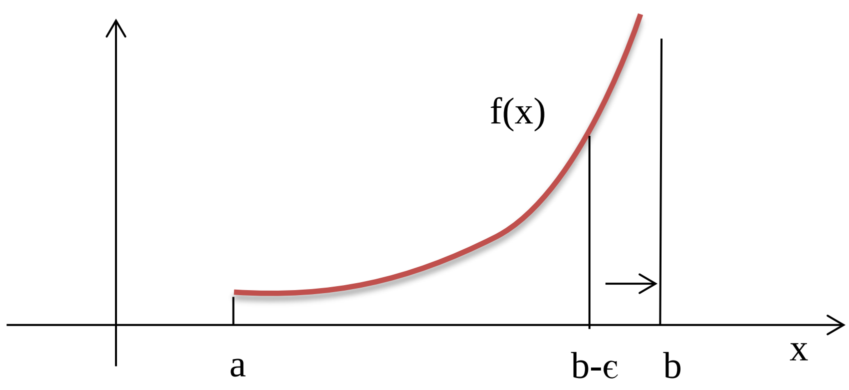
linksseitiger Grenzwert: $\lim_{x \nearrow c} f(x) = \lim_{\substack{x \to c \\ x < c}} f(x)$

Voraussetzung in diesem Abschnitt:

f(x) integrierbar in jedem abgeschlossenem Teilintervall von [a,b], das nicht die Unendlichkeitsstelle enthält.

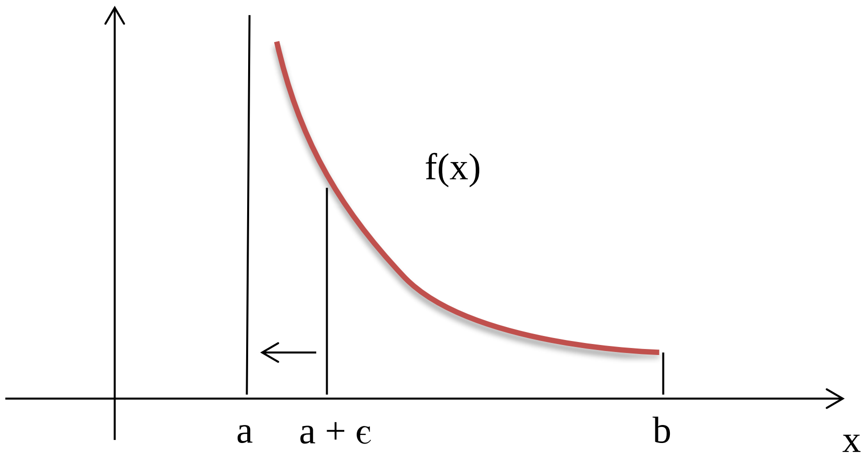
## 3.2 Uneigentliche Integrale unbeschränkter Integranden (Definition)

(1) $\int_a^b f(x)dx$ ist an der oberen Grenze uneigentlich (d.h. b ist Unendlichkeitsstelle von f )



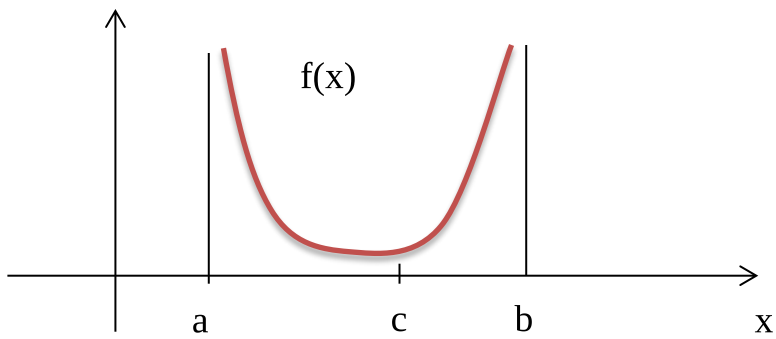
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx}$$

(2) $\int_a^b f(x)dx$ ist an der <u>unteren Grenze a uneigentlich</u>



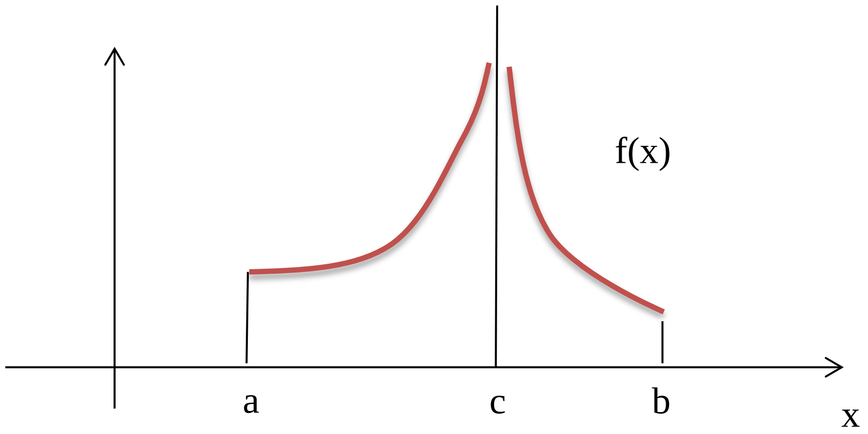

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx}$$

(3) $\int_a^b f(x)dx$ ist in <u>a und b uneigentlich</u>.




$$\boxed{\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx} \qquad c \in (a,b) \text{beliebig}$$

(4) $\int_a^b f(x)dx$ ist an einer Stelle c <u>im Innern des Integrationsintervalls uneigentlich</u>




$$\boxed{\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$

Die uneigentlichen Integrale (1) bis (4) heißen <u>konvergent</u>, falls die jeweiligen Grenzwerte existieren; sonst <u>divergent</u>.

3.3 <u>Beispiel</u>

$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ konvergent?

<u>Lösung</u>:

$$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left[\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 =$$

$$= 1 - \left(\lim_{\varepsilon \searrow 0} \sqrt{\varepsilon}\right) = 1$$

3.4 <u>Das uneigentliche Integral</u> $\int_0^b \frac{1}{x^\alpha}dx$

Es gilt für $b > 0$

$$\boxed{\begin{array}{c}\displaystyle\int_0^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx \ \text{ konvergiert falls } \alpha < 1 \\ \displaystyle\int_0^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx \ \text{ divergiert falls } \alpha \geq 1\end{array}}$$

<u>Beweis</u>:

Sei $\alpha \neq 1$.

$$\int_0^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left[\frac{1}{-\alpha+1} x^{-\alpha+1}\right]_\varepsilon^b =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha} - \left(\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^{1-\alpha}\right)\right) \begin{Bmatrix} konvergiert\ f\text{ür } \alpha < 1 \\ divergiert\ f\text{ür } \alpha > 1 \end{Bmatrix}$$

Sei $\alpha = 1$.

$$\int_0^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} [\ln x]_\varepsilon^b$$

$$= \ln b - \left(\lim_{\varepsilon \searrow 0} \ln \varepsilon\right)\ divergent$$

☺

## 3.5 <u>Cauchy-Hauptwert</u>

Sei $\int_a^b \mathrm{f(x)}dx$ uneigentlich in $c \in (a, b)$. Der Wert

$$\boxed{CHW := \lim_{\varepsilon \searrow 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right)}$$

heißt <u>Cauchy-Hauptwert</u>.

<u>Beispiel</u>:

$\int_{-2}^1 \frac{1}{x}dx$ divergent, da $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ divergiert (vgl.3.4).

Cauchy-Hauptwert:

$$CHW = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\left( \int_{-2}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x} dx \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\searrow 0}\left([\ln|x|]_{-2}^{-\varepsilon} + [\ln|x|]_{\varepsilon}^{1}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\searrow 0}(\ln\varepsilon - \ln 2 + \ln 1 - \ln\varepsilon) = -\ln 2 \;\; \text{(existiert)}$$

## 3.6 Absolute Konvergenz von uneigentlichen Integralen

Sei $\int_a^b f(x)dx$ uneigentliches Integral. Konvergiert

$$\int_a^b |f(x)| \; dx,$$

so heißt $\int_a^b f(x)dx$ absolut konvergent.

Bemerkung:

$$\int_a^b f(x) \; dx \text{ absolut konvergent} \Longrightarrow \int_a^b f(x) \; dx \text{ konvergent}$$

Beweis: analog wie vgl. 2.5

## 3.7 Vergleichskriterium

(a) Sei $|f(x)| \leq g(x) \;\; \forall x \in [a,b]$. Konvergiert $\int_a^b g(x)dx$, dann konvergiert auch $\int_a^b f(x)dx$ und es gilt

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b g(x)dx}$$

(b) Ist $0 \leq g(x) \leq f(x) \; \forall x \in [a,b]$ und divergiert $\int_a^b g(x)dx$, so divergiert auch $\int_a^b f(x)dx$.

Beweis analog wie 2.6

3.8 Beispiel

$$\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}}\,dx \text{ konvergent?}$$

Lösung:

$$\frac{x+1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x+1}{x^{\frac{1}{3}}} \leq \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} \quad \forall x \in (0,1)$$

$$2\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}\,dx \text{ konvergent } (3.4\ ) \overset{3.7}{\Rightarrow} \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}}\,dx \text{ konvergent}$$

In diesem Kapitel soll die Theorie der komplexen Zahlen weiter vertieft werden.

# Kapitel 8: Komplexe Analysis

## 1. Darstellungsformen von komplexen Zahlen

### 1.1 Normalform einer komplexen Zahl

Für $z \in \mathbb{C}$ heißt die Darstellung

$$\boxed{z = x + iy}$$

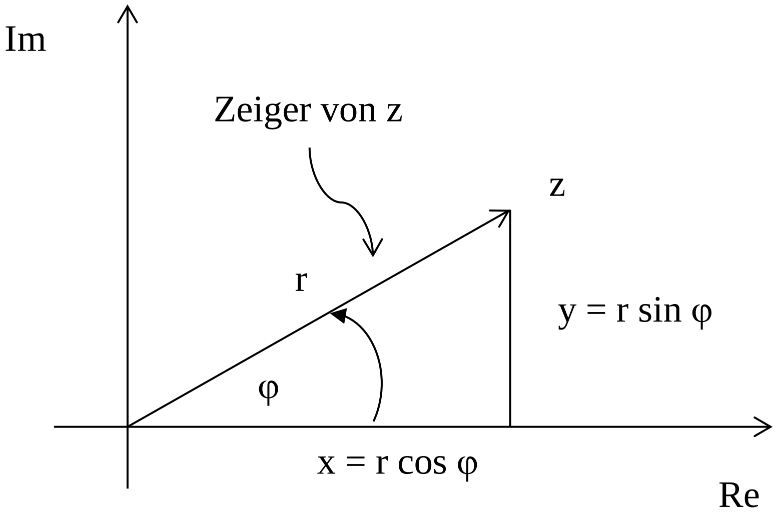
Normalform.

$(x, y)$ heißen kartesische Koordinaten.

### 1.2 Polarform einer komplexen Zahl

Sei $z = x + iy$

der Verbindungsvektor von 0 bis z heißt Zeiger von z




$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ = Betrag von z

$z = x + iy = r\cos\,\varphi + i\,r\sin\varphi = r(\cos\,\varphi + i\,\sin\varphi) = re^{i\varphi}$

Die Darstellungsform

$$\boxed{z = \begin{cases} r(\cos\,\varphi + i\,\sin\varphi)\ (trigonometrische\ Form \\ \qquad re^{i\varphi} \qquad\quad (Exponentialform) \end{cases}}$$

heißt Polarform von z.

Bezeichnungen

(1) $\varphi$ heißt Argument von z und man schreibt: $\varphi = \arg z$

(2) $(r, \varphi)$ heißen Polarkoordinaten

Bemerkungen

(1) Für $z = 0$ ist $\varphi = \arg z$ nicht definiert. der Zeiger von 0 hat keine Richtung

(2) Für ein $z \neq 0$ hat $\varphi = \arg z$ unendliche viele Werte, die sich voneinander um $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ unterscheiden.

(3) Ist $0 \leq \varphi < 2\pi$, so heißt $\varphi$ Hauptwert von z. Man schreibt dann

$$\boxed{\varphi = Arg\, z} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Groß arg von z

Beispiele

(1) $-5 = 5e^{i\pi}$, $\arg(-5) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $Arg\,(-5) = \pi$

(2) $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

(3) $-i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

## 1.3 Umrechnungen zwischen Darstellungsformen

(1) Polarform → Kartesische Form

$$\boxed{\begin{matrix} z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ z = r\,e^{i\varphi} \end{matrix}} \longrightarrow \boxed{z = x + i\,y}$$

Polarform

$$\boxed{\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix}}$$

kartesische Form

Transformationsgleichungen

(2) Kartesische Form → Polarform

z = x +i y

z = r (cos φ + i sin φ)

$z = r\, e^{i\varphi}$

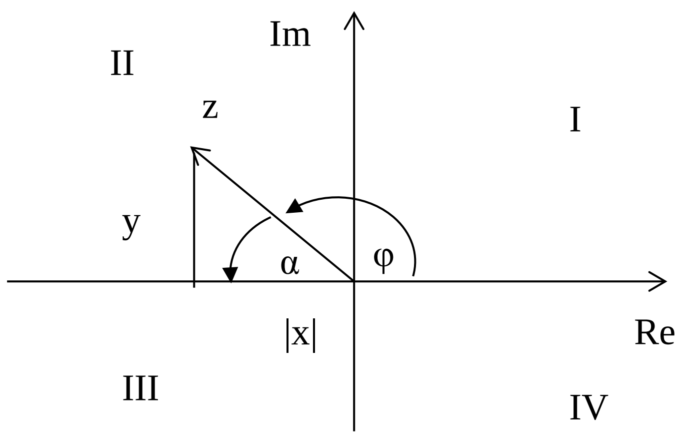
$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \begin{Bmatrix} \arctan\dfrac{y}{x}, & x > 0 \\ \pi + \arctan\dfrac{y}{x}, & x < 0 \end{Bmatrix}$$

<u>Sonderfall $x = 0$</u>: $\varphi = \begin{Bmatrix} \frac{\pi}{2} & falls\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & falls\ y < 0 \end{Bmatrix}$

<u>Beweis für φ mit z im 2. Quadranten</u>

der Beweis muss für jeden Quadranten gesondert geführt werden.




arctan x ist eine ungerade Funktion

$$\alpha = \arctan\frac{y}{|x|} = \arctan\frac{y}{-x} = -\arctan\frac{y}{x}$$

$$\varphi = \pi - \alpha = \pi + \arctan\frac{y}{x}$$

## 1.4 Beispiel

Polarform von $z = -8 - 6i =$?

Lösung:

$r = |z| = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$

$\varphi = \arctan\left(\frac{-6}{-8}\right) + \pi = 3{,}785$

$-8 - 6i = 10e^{i\,3{,}785}$

# 2. Multiplikation und Division in Polarform

## 2.1 Multiplikation in Polarform

Seien $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1},\ z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Es gilt

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}}$$

Folgerung:

$$\boxed{|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|}\ und\ \boxed{\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)}$$

Beträge werden multipliziert und die Argumente addiert.

Beweis: $e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_1} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

## 2.2 Division in Polarform

Seien $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1},\ z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} \neq 0$. Es gilt

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\ e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}}$$

Folgerung:

$$\boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}}\ und\ \boxed{\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)}$$

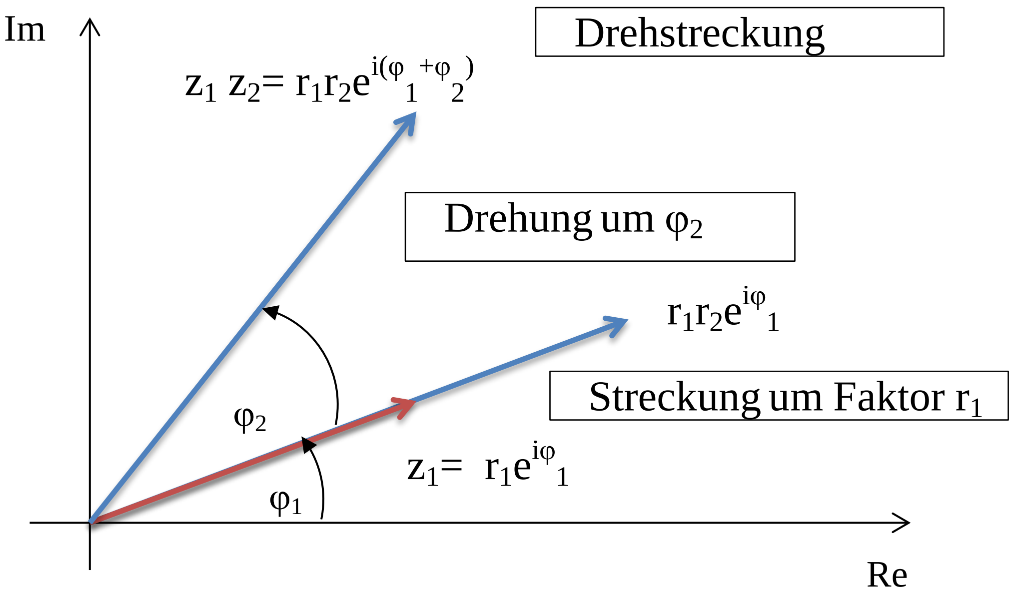
Beträge werden dividiert und die Argumente subtrahiert.

## 2.3 Geometrische Deutung der Multiplikation und Division

Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

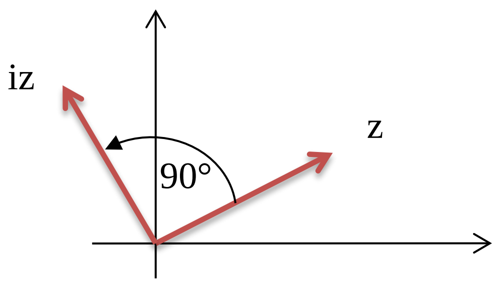
erst wird der Zeiger von z1 um den Faktor $r_2$ gestreckt (bzw. gestaucht, wenn $r_2$ <1) und dann gedreht um $\varphi_2$ im entgegengesetzten Uhrzeigersinn. Die Multiplikation kann man somit geometrisch auch als Drehstreckung interpretieren.




Beispiel:

$$i \cdot z = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\varphi} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}$$

Multiplikation mit i bewirkt Drehung des Zeigers um 90°




Division

Streckung um Faktor $\frac{1}{r_2}$ und Drehung um $-\varphi_2$ (Drehung im Uhrzeigersinn)

# 3. Potenzieren und Radizieren von komplexen Zahlen

## 3.1 Satz von Moivre

Sei $z = re^{i\varphi}$ $und$ $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\boxed{z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))}$$

Beweis:

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}$$

## 3.2 Beispiel

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)^6 = ?$$

Lösung:

$$z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i = re^{i\varphi}, \qquad r = ?, \varphi = ?$$

$$r = \left|\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{3}{2}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)^6 = \left(\sqrt{3}\right)^6 (\cos\left(6\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(6\frac{\pi}{6}\right)) =$$

$$= 3^3\left(\underbrace{\cos\pi}_{-1} + i\underbrace{\sin\pi}_{0}\right) = -27$$

## 3.3 n-te Wurzel einer komplexen Zahl

Für ein $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt jede komplexe Zahl z mit

$$\boxed{z^n = z_0} \qquad n \in \mathbb{N}$$

n-te Wurzel von $z_0$ .

Schreibweise: $z = \sqrt[n]{z_0}$

Hinweis: warum genau n Zahlen wird gleich geklärt werden.

Die komplexe Wurzel ist ein Menge von n Zahlen und keine Funktion!!

## 3.4 Berechnung der n-ten Wurzeln einer komplexen Zahl

Die Gleichung $z^n = z_0$ mit $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0} \neq 0$ besitzt die n Lösungen (n-te Wurzeln von $z_0$ )

$$z_{k+1} = \sqrt[n]{r_0} e^{i\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} =$$

$$= \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

$$\boxed{k = 0, \dots, n-1}$$

Bem.: $\sqrt[n]{r_0}$ reelle Wurzel ($r_0 > 0$) !

Beweis:

$$\left(\sqrt[n]{r_0} e^{i\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}\right)^n \overset{Moivre}{\triangleq} r_0 e^{i\left(n\frac{\varphi_0}{n} + n\frac{2k\pi}{n}\right)} = r_0 e^{i\varphi_0} \cdot \underbrace{e^{i2k\pi}}_{1} = z_0$$

Es gibt keine weiteren Lösungen von $z^n = z_0$ bzw. $z^n - z_0 = 0$. Dies folgt aus dem

Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

## 3.5 Graphische Darstellung der n-ten Wurzeln

Gegeben: $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ .

$$|z_{k+1}| = \left|\sqrt[n]{r_0} e^{i\left(\frac{\varphi_0}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right| = \left|\sqrt[n]{r_0}\right| \cdot \underbrace{\left|e^{i\left(\frac{\varphi_0}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right|}_{1} = \sqrt[n]{r_0}$$

d.h. alle Wurzeln von $z_0$ liegen auf einem Kreis mit Radius $\sqrt[n]{r_0}$.

$$Arg\ z_{k+1} = \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n} = \underbrace{\frac{\varphi_0}{n}}_{Arg\ z_1} + \underbrace{\frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} + \cdots + \frac{2\pi}{n}}_{k\ Summanden}$$

$$k = 0:\ Arg\ z_1 = \frac{\varphi_0}{n}$$

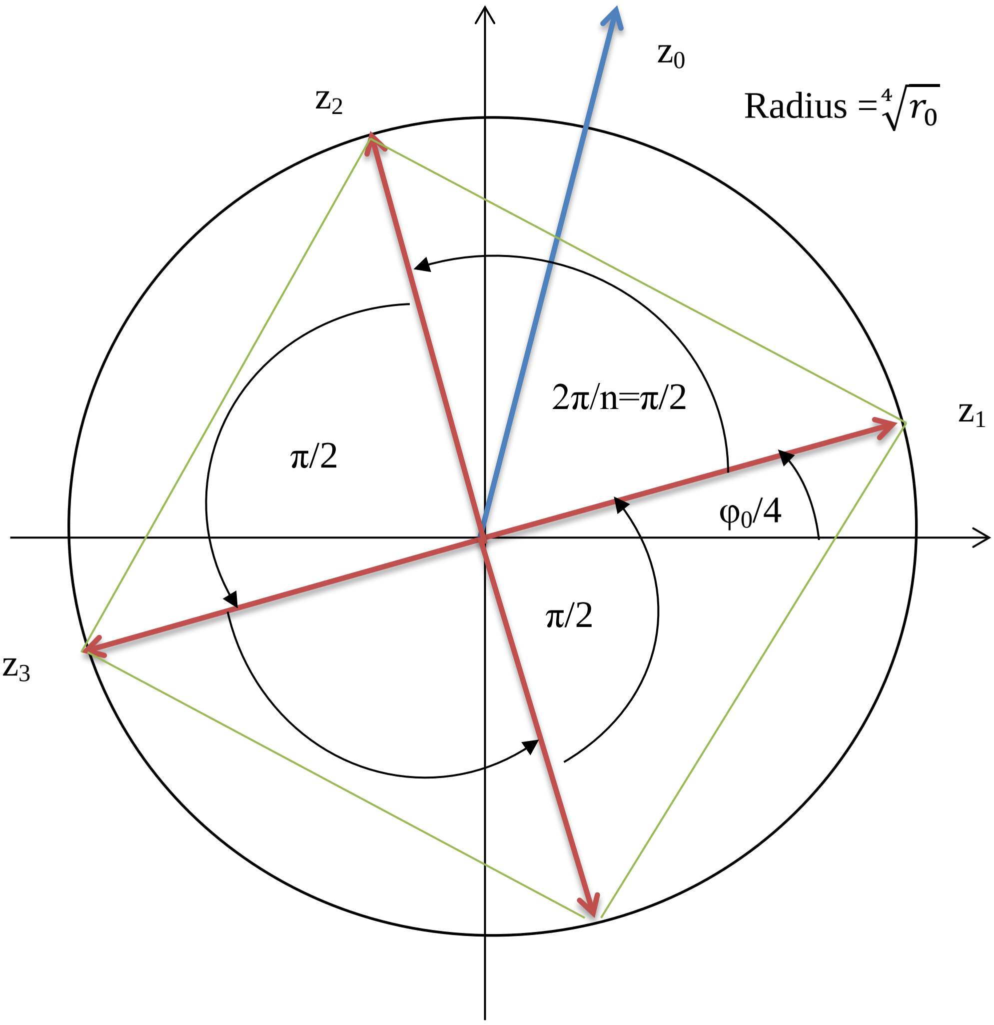
$$k = 1:\ Arg\ z_2 = \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi}{n} = Arg\ z_1 + \frac{2\pi}{n}$$

$$k = 2:\ Arg\ z_3 = \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} = Arg\ z_2 + \frac{2\pi}{n}$$

$\vdots$

Sei jetzt $n = 4$

Alle 4. Wurzeln von $z_0$ liegen auf dem Kreis mit Radius $\sqrt[4]{r_0}$. $z_1$ liegt auf diesem Kreis mit Argument $\frac{\varphi_0}{n} = \frac{\varphi_0}{4}$. $z_2$ erhält man, indem man den Zeiger von $z_1$ um den Winkel $\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{2}$ dreht. Dreht man den Zeiger von $z_2$ wieder um $\frac{\pi}{2}$, so ergibt sich $z_3$. Dreht man die Zeiger insgesamt n+1-mal, so erhalten wir wieder die erste Wurzel.



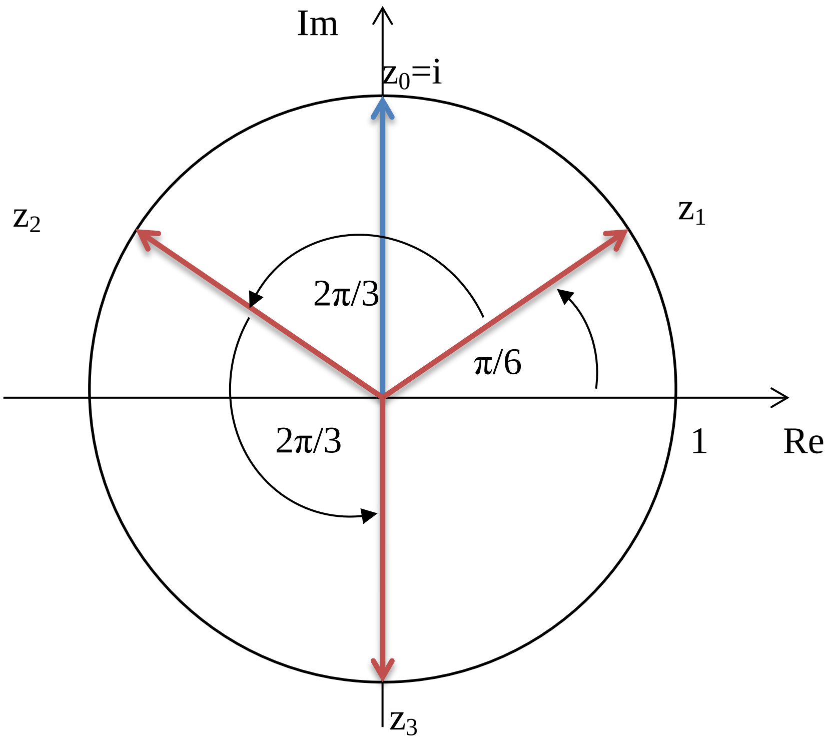

regelmäßiges 4-Eck (Quadrat), allgemein regelmäßiges n-Eck

3.6 Beispiele

(1) Graphische Bestimmung aller Werte von $\sqrt[3]{i}$.

Lösung:

$z_0 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \;\; |z_k| = \sqrt[3]{|i|}=1$




(2) Analytische Werte von $\sqrt[4]{-16} = ?$

<u>Lösung</u>:

$z_0 = -16 = 16e^{i\pi}$

$$z_{k+1} = \sqrt[4]{16}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)} = 2(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right))$$

$k = 0, 1, 2, 3$

$k = 0$: $\quad z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}(1+i)$

Analog:

$k = 1$: $z_2 = \sqrt{2}(-1+i)$

$k = 2$: $z_3 = \sqrt{2}(-1-i)$

$k = 3$: $z_4 = \sqrt{2}(1-i)$

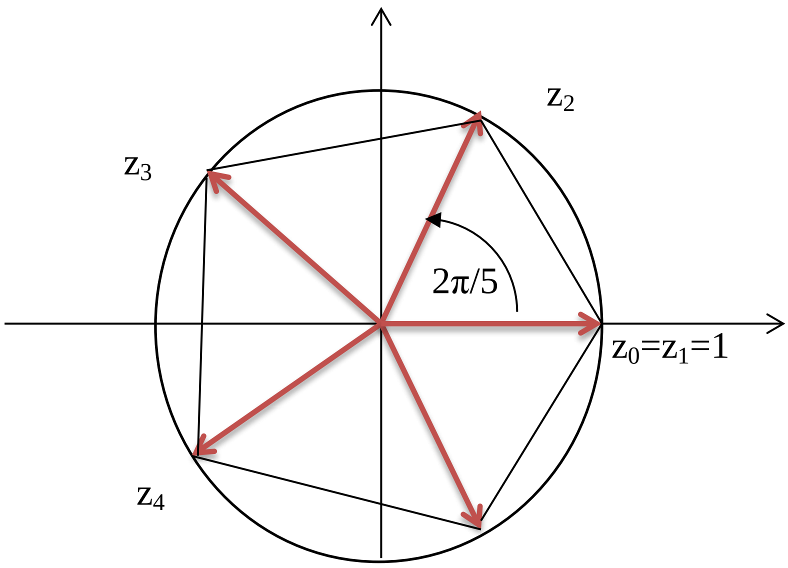
## 3.7 n-te Einheitswurzeln

Die Lösungen von $z^n = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ heißen n-te Einheitswurzeln und sind gegeben durch

$$\boxed{z_{k+1} = \sqrt[n]{1} = \cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(k\frac{2\pi}{n}\right)} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

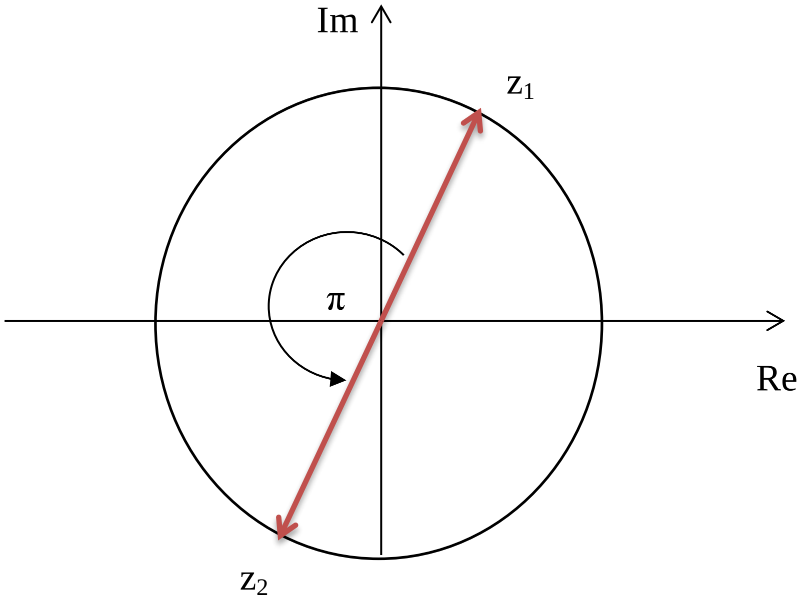
$\boxed{\sqrt[5]{1}}$

Die 5-ten Einheitswurzeln



### 3.8 Bemerkung

Ist $z_1 = a + ib$ Wurzel von $\sqrt{z_0}$, so ist $z_2 = -a - ib$ die zweite Wurzel von $\sqrt{z_0}$.




### 3.9 Lösungen von quadratischen Gleichungen mit komplexen Koeffizienten

Eine quadratische Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0, \qquad p, q \in \mathbb{C}$$

besitzt die Lösungen für komplexe quadratische Gleichungen ist die 2. Formel besser geeignet.

$$\boxed{z_{1,2} = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}} \qquad p, q - Formel$$

$\sqrt{\phantom{xx}}$ = komplexe Wurzel (2 Wurzeln)

Beweis:

$$z^2 + pz + \underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2}_{quadratische\ Ergänzung} + q = 0$$

$$\left(z + \frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow z + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \Rightarrow$$

$$z = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2 - 4q}{4}} = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

☺

3.10 <u>Beispiel</u>

Lösungen von $z^2 + (-3 + 2i)z + 5 - i = 0$ ?

<u>Lösung</u>:

$$z_{1,2} = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-(-3 + 2i) + \sqrt{(3 - 2i)^2 - 4(5 - i)}}{2}$$

$$= \frac{3 - 2i + \sqrt{-15 - 8i}}{2}$$

$\sqrt{-15 - 8i} = \pm\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}, \qquad wobei - 15 - 8i = re^{i\varphi}$

$r = ?, \varphi = ?$

$r = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$

$\varphi = \arctan\left(\frac{-8}{-15}\right) + \pi = 3{,}632$ (3.Quadrant)

$\sqrt{-15 - 8i} = \pm\sqrt{17}\,e^{i1.816} \pm \sqrt{17}(\cos(1.816) + i\sin(1.816)) =$

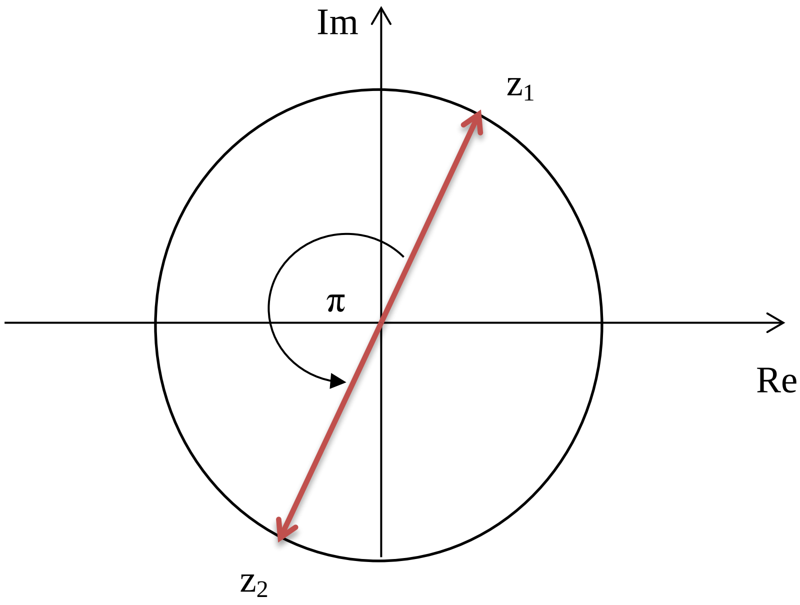
$= \pm(1 - 4i)$

$z_1 = \frac{1}{2}\big(3 - 2i + (1 - 4i)\big) = 2 - 3i$

$z_2 = \frac{1}{2}\big(3 - 2i - (1 - 4i)\big) = 1 + i$

3.8 Bemerkung

Ist $z_1 = a + ib$ Wurzel von $\sqrt{z_0}$, so ist $z_2 = -a - ib$ die zweite Wurzel von $\sqrt{z_0}$.




3.9 Lösungen von quadratischen Gleichungen mit komplexen Koeffizienten

Eine quadratische Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0, \qquad p, q \in \mathbb{C}$$

besitzt die Lösungen für komplexe quadratische Gleichungen ist die 2. Formel besser geeignet.

$$\boxed{z_{1,2} = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}} \quad p, q - Formel$$

$\sqrt{\phantom{x}}$ = komplexe Wurzel (2 Wurzeln)

Beweis:

$$z^2 + pz + \underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2}_{quadratische\ Ergänzung} + q = 0$$

$$\left(z+\tfrac{p}{2}\right)^2=-q+\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 \Longrightarrow z+\tfrac{p}{2}=\sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2-q} \Longrightarrow$$

$$z=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2-4q}{4}}=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

☺

3.10 Beispiel

Lösungen von $z^2+(-3+2i)z+5-i=0$ ?

Lösung:

$$z_{1,2}=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}=\frac{-(-3+2i)+\sqrt{(3-2i)^2-4(5-i)}}{2}$$

$$=\frac{3-2i+\sqrt{-15-8i}}{2}$$

$$\sqrt{-15-8i}=\pm\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}},\qquad wobei-15-8i=re^{i\varphi}$$

$r=?,\varphi=?$

$$r=\sqrt{15^2+8^2}=\sqrt{289}=17$$

$\varphi=\arctan\left(\frac{-8}{-15}\right)+\pi=3{,}632$ (3.Quadrant)

$$\sqrt{-15-8i}=\pm\sqrt{17}\,e^{i1.816}\pm\ \sqrt{17}(\cos(1.816)+i\sin(1.816))=$$

$$=\pm(1-4i)$$

$$z_1=\frac{1}{2}\big(3-2i+(1-4i)\big)=2-3i$$

$$z_2=\frac{1}{2}\big(3-2i-(1-4i)\big)=1+i$$