Jülich Supercomputing Centre

Mathematische Grundlagen

Prof. Paul Jansen
Oliver Bücker

JÜLICH
Forschungszentrum

FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH GmbH
Jülich Supercomputing Centre
D-52425 Jülich

Mathematische Grundlagen

Prof. Paul Jansen
Oliver Bücker

(letzte Änderung: 4. Juli 2024)

Dieses Skriptum wurde von Frau Ilona Lütje, JSC in LaTeX gesetzt. Gerne nehmen wir Ihre Anregungen und/oder Bemerkungen auf und berücksichtigen sie bei zukünftigen Aktualisierungen.
Bitte senden Sie diese an `i.luetje@fz-juelich.de`.

Inhaltsverzeichnis

Prolog 1

1. Logik 7
1.1. Wahrheitstafel . . . 8
1.2. Tautologie, Kontradiktion . . . 12
1.3. Normalform . . . 16
1.4. Aufgaben . . . 19
1.5. Prädikat, Quantor . . . 21
1.5.1. Aufgaben . . . 25

2. Mengen 26
2.1. Mengen und ihre Verknüpfungen . . . 26
2.1.1. Aufgaben . . . 34
2.2. Zahlenmengen . . . 35
2.2.1. Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$, ganze Zahlen $\mathbb{Z}$, rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ . . . 35
2.3. Die Mächtigkeit endlicher Mengen . . . 36
2.3.1. Aufgaben . . . 38

3. Definition und Berechnung endlicher Summen und Produkte 39
3.1. Endliche Summen und Produkte . . . 39
3.1.1. Definition und Rechenregeln . . . 39
3.1.2. Teleskopsumme . . . 40
3.1.3. Partialbruchzerlegung für gebrochen rationale Funktionen mit reellen, einfachen Nennernullstellen . . . 42
3.1.4. Aufgaben . . . 46
3.1.5. Wichtige endliche Summenformeln . . . 47
3.1.6. Aufgaben . . . 51
3.2. Rekursivität in Definitionen . . . 52
3.2.1. Aufgaben . . . 59

4. Beweismethoden, Anwendung logischer Prinzipien 60
4.1. Direkter (deduktiver) Beweis . . . 60
4.2. Indirekter Beweis . . . 61
4.3. Beweisprinzip der vollständigen Induktion . . . 63
4.4. Das Prinzip der vollständigen Fallunterscheidung . . . 66
4.5. Aufgaben . . . 68

5. Relationen, Abbildungen, Funktionen 70
5.1. Relationen . . . 70
5.1.1. Die Äquivalenzrelation . . . 78
5.1.2. Ordnungsrelationen auf einer Menge . . . 80
5.1.3. Eine praktische Aufgabe . . . 80
5.1.4. Aufgaben . . . 86
5.2. Abbildungen, Funktionen . . . 87
5.2.1. Einleitende Definitionen . . . 87
5.2.2. Eigenschaften von Abbildungen/Funktionen . . . 89
5.2.3. Aufgaben . . . 98

5.3. Auswertung von Polynomen . . . 99
5.3.1. Aufgaben . . . 104

6. Rechnen in geordneten Körpern 105
6.1. Gruppen und Körper . . . 105
6.1.1. Aufgaben . . . 111
6.2. Lösung von Ungleichungen in den reellen Zahlen . . . 112
6.2.1. Aufgaben . . . 119

7. Zahlensysteme, Stellenwertsysteme 120
7.1. Dezimaldarstellung der natürlichen und der ganzen Zahlen . . . 120
7.2. Darstellung und Rechnung in beliebigen b-adischen Zahlensystemen . . . 120
7.3. Algorithmen zur Umrechnung von einer Basis in eine andere . . . 122
7.4. Rechnen im Dualsystem . . . 127
7.5. Aufgaben . . . 128

8. Zahlenmengen 129
8.1. Reelle Zahlen $\mathbb{R}$ . . . 129
8.1.1. Einführung der reellen Zahlen . . . 129
8.1.2. Abzählbare Teilmengen der reellen Zahlen . . . 131
8.2. Weitere wichtige Funktionen einer reellen Veränderlichen . . . 134
8.3. Beschränkte Teilmengen der reellen Zahlen, Intervalle . . . 136
8.4. Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ . . . 140
8.4.1. Einführung der komplexen Zahlen . . . 140
8.4.2. Polarform einer komplexen Zahl . . . 143
8.4.3. Aufgaben . . . 151
8.4.4. Lösen von Polynomgleichungen in $\mathbb{C}$ . . . 153
8.4.5. Umgebung der Zahl $\mathbf{a}$ mit Abstand $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^+$ . . . 156
8.4.6. Aufgaben . . . 158

9. Grundlagen der Kombinatorik 159
9.1. Grundlegende Zählprinzipien bei endlichen Mengen . . . 159
9.2. Die vier Grundprobleme der Kombinatorik . . . 161
9.2.1. Urnenmodelle . . . 164
9.2.2. Teilchen-Fächermodelle . . . 170
9.2.3. Ein ausführliches Beispiel . . . 175
9.2.4. Programmtechnische Umsetzung der 4 Fälle . . . 178
9.2.5. Aufgaben . . . 179
9.3. Permutationen mit vorgegebenen Besetzungszahlen . . . 181
9.3.1. Aufgaben . . . 182

10. Elementare Zahlentheorie 183
10.1. Teilbarkeit, Primzahlen, Modulo-Arithmetik . . . 183
10.1.1. Aufgaben . . . 195
10.2. Anwendungen der Modulo-Arithmetik . . . 196
10.2.1. Bestimmung des Wochentags eines beliebigen Datums . . . 196
10.2.2. Berechnung von Prüfziffern . . . 196
10.2.3. Pseudozufallszahlengenerator . . . 198
10.2.4. Verschlüsselungsalgorithmen . . . 201
10.2.5. Aufgaben . . . 208

A. Schulmathematik 209
A.1. Binomische Formeln . . . 209
A.2. Bruchrechnung . . . 209
A.3. Exponentialfunktion, Logarithmus . . . 210

A.4. Kreisgleichung . . . 210
A.5. Potenzieren, Radizieren . . . 211
A.6. Quadratische Gleichungen . . . 211
A.7. Kubische Gleichungen . . . 213
A.8. (Quadratische) Wurzelgleichungen . . . 214
A.9. Trigonometrische Funktionen . . . 215
A.10. Verschiedenes . . . 215

B. Polynome, das allgemeine Horner-Schema 216

C. Partialbruchzerlegung, Teleskopprodukt 220
C.1. Ansatz für eine relle, mehrfache Nullstelle . . . 220
C.2. Ansatz für eine komplexe, einfache Nullstelle . . . 221
C.3. Ansatz für eine komplexe, mehrfache Nullstelle . . . 221
C.4. Beispiele . . . 221
C.5. Teleskopprodukt . . . 222

D. Algorithmen 223
D.1. Der „Karussell-Algorithmus“ . . . 223

Prolog

Dieses Skriptum ist die Basis der Vorlesung „Mathematische Grundlagen“ für Auszubildende des Berufs Mathematisch-technischer Softwareentwickler (MaTSE) im dualen Studiengang Angewandte Mathematik und Informatik B.Sc. (BAMI).
Dabei werden einerseits der Ausbildungsrahmenplan und der Rahmenlehrplan für MaTSEs berücksichtigt, andererseits grundlegende mathematische Themen, die oft nicht (mehr) in der Schule behandelt werden, aufgeführt.

> Die grau unterlegten Abschnitte des Skriptums dienen der Ergänzung und der Vertiefung des Lehrinhalts und sind für die MaTSE-Ausbildung nicht relevant. Sie sollten im Selbststudium erarbeitet werden.

Wir haben versucht, jeweils zum Ende eines Lernabschnitts, durch dicke Striche hervorgehoben, wichtige Lernziele zu formulieren.

Sie sollten jetzt in der Lage sein,
-
-

In den darauf folgenden Übungsaufgaben können Sie dann Ihr Wissen anwenden.

Anhang A enthält eine (sicherlich unvollständige) Zusammenfassung wichtiger mathematischer Formeln und Regeln, die aus der Schule bekannt sind. Persönliche Lücken im Bereich der Schulmathematik müssen z.B. mit Hilfe der Onlineplattform OMB+ geschlossen werden.
(`https://www.ombplus.de/ombplus/public/index.html`)

Zur Sprache der Mathematik
Jede Wissenschaft hat ihre eigene Sprache, die von der Umgangssprache mehr oder weniger abweicht[1].
Im Fall der Mathematik gibt es zum Beispiel Ausdrücke, die außerhalb der Mathematik gar nicht verwendet werden (z.B. Bijektivität, Assoziativität). Es gibt Begriffe mit einer völlig anderen Bedeutung (z.B. Bruch, Wurzel) oder Worte, die anders interpretiert werden als in der Umgangssprache.
Nimmt man zum Beispiel die Konjunktion *oder*. Im Alltag sagt man oft *oder* obwohl man *entweder ... oder* meint (exklusives oder), in der Mathematik hingegen bedeutet *oder* grundsätzlich *entweder ... oder ... oder beides* (inklusives oder).
Die Sprache der Mathematik ist knapp, präzise und klar [2].

---

[1] Goethe hatte wohl seine Schwierigkeiten mit den Mathematikern. In seinen Maximen und Reflektionen findet sich folgender Spruch: Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: Redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anders. (siehe z.B. `https://de.wikiquote.org/wiki/Mathematiker` (abgerufen am 14.5.2018))

[2] Die Besonderheit des mathematischen Denkens lässt sich auch mit einem Witz, aus dem Buch *Humor in der Mathematik* von Friedrich Wille, Vandenhoek & Ruprecht, 4. Auflage, und leicht ergänzt wurde, verdeutlichen:
Ein Mathematiker, ein Physiker und ein Soziologe sitzen im Zug und passieren die Landesgrenze. Sie sehen zwei schwarze Schafe. Da meint der Soziologe: *Ich schätze, alle Schafe in diesem Land sind schwarz.* Doch der Physiker antwortet: *Das können Sie nicht sagen. Man kann höchstens behaupten: Zwei Schafe in diesem Land sind schwarz.* Der Mathematiker schüttelt den Kopf und meint: *Auch das ist zu ungenau. Man kann lediglich sagen:* ***Mindestens*** *zwei Schafe in diesem Land sind auf* ***mindestens*** *einer Seite schwarz.*

Sie verzichtet auf unnötige Ausschmückungen und oft werden Formeln oder auch ganz spezielle Abkürzungen als Stilmittel verwandt:

a) oBdA — ohne Beschränkung der Allgemeinheit

b) qed — quot erat demonstrandum
   wzbw — was zu beweisen war

c) gdw — genau dann, wenn

d) LGS — lineares Gleichungssystem

Viele weitere Abkürzungen werden Sie in Ausbildung und Studium kennenlernen.

Der vorliegende Text soll helfen, erste Schritte in der Sprache der Mathematik zu machen.

Wie geht man in der Mathematik typischerweise vor?
Aus einem endlichen, übersichtlich dargestellten System scharf formulierter Prämissen (Voraussetzungen) werden logisch einwandfreie Schlüsse gezogen. Dabei geht man von Axiomen aus.

Folgende **Begriffe und Bezeichnungen** benutzt der Mathematiker ständig:

a) Axiome

   nennt man grundsätzlich als richtig angenommene Tatsachen oder Eigenschaften, die innerhalb der Theorie nicht bewiesen werden.

   Beispiel: Peano-Axiome der natürlichen Zahlen (siehe 2.2.1 auf Seite 35)

b) Definitionen

   dienen der Begriffsfestlegung und der Begriffspräzision.

   Beispiel: Eine natürliche Zahl p heißt Primzahl genau dann, wenn (:⇔) $p \geq 2$ und p nur durch 1 und sich selbst, ohne Rest, teilbar ist.

c) Satz, Hilfssatz, Lemma, Corrolar

   formulieren mathematische Aussagen, die aus Bekanntem bewiesen werden können.
   Aufbau: Voraussetzung, Behauptung, Beweis

   Beispiel:

   Voraussetzung: x, p, q reelle Zahlen, $p^2 - q \geq 0$, $x^2 + 2px + q = 0$

   Behauptung: $x = -p + \sqrt{p^2 - q} \quad \vee \quad x = -p - \sqrt{p^2 - q}$

   Beweis:

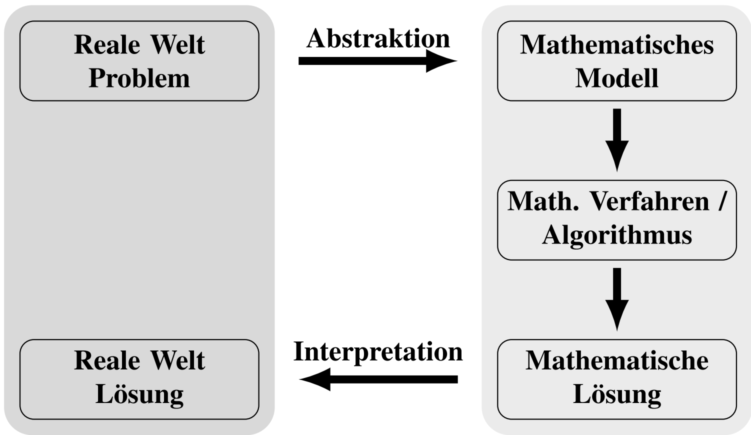
$$
\begin{aligned}
& x^2 + 2px + q = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 + 2px + q + p^2 = p^2 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 + 2px + p^2 = p^2 - q \\
\Leftrightarrow\quad & (x+p)^2 = p^2 - q \\
\Leftrightarrow\quad & x + p = \sqrt{p^2 - q} \quad \vee \quad x + p = -\sqrt{p^2 - q} \\
\Leftrightarrow\quad & x = -p + \sqrt{p^2 - q} \quad \vee \quad x = -p - \sqrt{p^2 - q}
\end{aligned}
$$

qed.

d) In der Mathematik greift man oft auf Buchstaben des griechischen Alphabets zurück:

α	alpha	β	beta
γ, Γ	gamma	δ, Δ	delta
ε	epsilon	θ, Θ	theta
π , Π	pi	φ, Φ	phi
ξ, Ξ	xi	ϱ	rho
σ, Σ	sigma	τ	tau
λ, Λ	lambda	μ	mü
ν	nü	ω, Ω	omega
ψ,Ψ	psi		

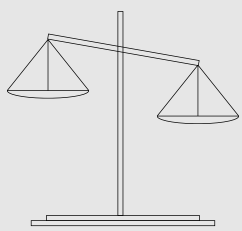
Wie wird ein Problem der realen Welt mit Hilfe der Mathematik gelöst? Das Schema zeigt die folgende Abbildung:



Das folgende Beispiel soll zeigen, wie eine Aufgabenstellung (Problem in der realen Welt) mit Hilfe einer mathematischen Modellierung gelöst werden kann. Es ist grau unterlegt und kann - wie alles, was in diesem Text grau unterlegt ist - erst einmal überschlagen werden.

Beispiel 0.0.1 (Balkenwaage)

- Beschreibung des Problems (reale Welt)
  Auf dem Wochenmarkt wurden Artikel oft mittels einer Balkenwaage wie folgt gewogen.
  Der Artikel wird in die eine (z.B. linke) Schale der Waage gelegt. Mit den vorhandenen Gewichten wird dann ein Gleichgewicht hergestellt, indem ein Teil oder alle Gewichte auf die Schalen auf beiden Seiten der Waage verteilt werden.



  Im Gleichgewichtszustand ist dann die Differenz der Summe der Gewichte der rechten Schale und der Summe der Gewichte der linken Schale gleich dem Gewicht des Artikels.

- Ein konkretes Zahlenbeispiel
  Der zu wiegende Artikel ist 12 kg schwer. Zum Wiegen stehen vier Gewichte zur Verfügung: 1 kg, 3 kg, 7 kg und 15 kg.
  Es gibt zwei Möglichkeiten das Gewicht zu ermitteln.

  1. In die Schale der linken Seite der Waage legt man zum Artikel noch 3 kg dazu, in die Schale der rechten Seite legt man das 15 kg Gewicht. Die Gewichte mit 1 kg und 7 kg werden nicht benutzt.
     $12\text{kg} + 3\text{kg} = 15\text{kg}$
  2. In die Schale der linken Seite legt man zum Artikel das 7 kg Gewicht dazu, in die Schale der rechten Seite werden 1 kg, 3 kg und 15 kg gelegt. Alle Gewichte werden benutzt.
     $12\text{kg} + 7\text{kg} = 1\text{kg} + 3\text{kg} + 15\text{kg}$

- Aufgabe: Problemlösung mit Hilfe eines Programms
  Schreiben Sie ein Programm in einer der zugelassenen Programmiersprachen, das

  1. einen Satz von maximal 10 ganzzahligen Gewichten einliest,
  2. ein ganzzahliges Artikelgewicht einliest,
  3. alle möglichen Verteilungen der Gewichte auf die Schalen der Waage systematisch darauf testet, ob der Artikel mit den vorhandenen Gewichten gewogen werden kann und
  4. die Lösungen (sofern vorhanden) zeilenweise ausgibt.

- Mathematische Überlegungen (allgemein für n Gewichte)
  $G = \{g_1, g_2, ..g_n\}$ alle zur Verfügung stehenden Gewichte (insgesamt n)
  Aufteilen der Gewichte aus G in 3 teilerfremde (disjunkte) Mengen ($L, R,$ und S)
  $L = \{l_1, l_2, ..l_l\}$ alle Gewichte, die in der linken Schale liegen (insgesamt l)
  $R = \{r_1, r_2, ..r_r\}$ alle Gewichte, die in der rechten Schale liegen (insgesamt r)
  $S = \{s_1, s_2, ..s_s\}$ alle Gewichte, die nicht benutzt werden (insgesamt $s = n - (l + r)$)
  Insgesamt stehen $n = l + r + s$ Gewichte zur Verfügung.
  Verteilt man nun die Gewichte auf die Schalen, dann gilt bei Gleichgewicht folgende lineare Gleichung:
  $$\sum_{k=1}^{l} l_k = \sum_{j=1}^{r} r_j \quad \Leftrightarrow \quad 1 \cdot \sum_{k=1}^{l} l_k = 1 \cdot \sum_{j=1}^{r} r_j \quad \Leftrightarrow \quad 1 \cdot \sum_{k=1}^{l} l_k - 1 \cdot \sum_{j=1}^{r} r_j = 0$$
  Ohne etwas an der Gleichung zu verändern, können die nicht benutzten Gewichte (Menge S) mit dem Faktor 0 hinzuaddiert werden.
  $$1 \cdot \sum_{k=1}^{r} l_k - 1 \cdot \sum_{j=1}^{l} r_j + 0 \cdot \sum_{k=1}^{n-(l+r)} s_k = 0$$
  Unter der Annahme, dass der zu wiegende Artikel mit dem Gewicht X ebenfalls in der linken Schale liegt, gilt bei Gleichgewicht folgendes:
  $$X + 1 \cdot \sum_{k=1}^{r} l_k - 1 \cdot \sum_{j=1}^{l} r_j + 0 \cdot \sum_{k=1}^{n-(l+r)} s_k = 0 \Leftrightarrow X = (-1) \cdot \sum_{k=1}^{r} l_k + 1 \cdot \sum_{j=1}^{l} r_j + 0 \cdot \sum_{k=1}^{n-(l+r)} s_k$$

- Mathematische Modellierung (allgemein für n Gewichte)
  In einem Tupel $V = (v_1, v_2, ..v_n)$ werden für alle n zur Verfügung stehenden Gewichte $(g_1, g_2, ...g_n)$ jeweils einer der Faktoren $-1, 0$ oder $+1$ eingetragen. v_1 ist also der Faktor für das Gewicht g_1, v_2 ist der Faktor für g_2, ..., v_n ist der Faktor für g_n.
  Dabei bedeutet
  $v_i = -1$: das Gewicht g_i liegt in der Schale mit dem Artikel (hier: links),
  $v_i = 0$: das Gewicht g_i liegt in keiner Schale und
  $v_i = +1$: das Gewicht g_i liegt in der Schale ohne Artikel (hier: rechts)

Das Gewicht des Gegenstandes (hier mit X bezeichnet) berechnet sich dann wie folgt:

$X = \sum_{k=1}^{n} v_k \cdot g_k \quad \forall v_k \in \{-1, 0, 1\}, g_k$ sind die vorgegebenen (konstanten) Gewichte

- Fortsetzung des konkreten Zahlenbeispiels mit den 4 zur Verfügung stehende Gewichten $G = \{1, 3, 7, 15\}$, dem Artikelgewicht von $X = 12$ kg und den 2 gefundenen Lösungstupeln:
  1. $L = \{3\}, R = \{15\}, S = \{1, 7\} \quad \Rightarrow \quad V_1 = (0, -1, 0, 1)$
     Probe: $X = 0 \cdot 1$ kg $+(-1) \cdot 3$ kg $+0 \cdot 7$ kg $+1 \cdot 15$ kg $= -3$ kg $+15$ kg $= 12$ kg
  2. $L = \{7\}, R = \{1, 3, 15\}, S = \{\} \quad \Rightarrow \quad V_2 = (1, 1, -1, 1)$
     Probe: $X = 1 \cdot 1$ kg $+1 \cdot 3$ kg $+(-1) \cdot 7$ kg $+1 \cdot 15$ kg $= (1 + 3 - 7 + 15)$ kg $= 12$ kg

- Problemlösung mit Hilfe eines Programms (eine beispielhafte Lösung)
  1. Einlesen der n zur Verfügung stehenden (konstanten) Gewichte und Speicherung dieser in einem Vektor/Array G mittels einer Programmschleife.
  2. Einlesen des Artikelgewichtes X.
  3. Systematische Bestimmung aller möglicher Gewichtsverteilungen auf die 2 Waagschalen (gespeichert durch die Faktoren $-1, 0$ und 1 im Array V) mit anschließender Prüfung, ob das Gewicht der aktuellen Gewichtsverteilung mit dem Artikelgewicht (X) übereinstimmt.
     Für $n = 3$ Gewichte besteht die Menge der möglichen Gewichtsverteilungen auf die beiden Schalen der Waage bzw. der Nichtbenutzung eines Gewichts aus folgenden $3^3 = 27$ Dreier-Tupeln[3]

$$
\begin{array}{llll}
V = \{ & (-1,-1,-1), & (-1,-1,0), & (-1,-1,1), \\
 & (-1,0,-1), & (-1,0,0), & (-1,0,1), \\
 & (-1,1,-1), & (-1,1,0), & (-1,1,1), \\
 & (0,-1,-1), & (0,-1,0), & (0,-1,1), \\
 & (0,0,-1), & (0,0,0), & (0,0,1), \\
 & (0,1,-1), & (0,1,0), & (0,1,1), \\
 & (1,-1,-1), & (1,-1,0), & (1,-1,1), \\
 & (1,0,-1), & (1,0,0), & (1,0,1), \\
 & (1,1,-1), & (1,1,0), & (1,1,1) \quad \}
\end{array}
$$

     Für n Gewichte kann die Darstellung in aufzählender Form sehr unübersichtlich werden. Man wählt dann besser folgende Form[4]:
     $V = \{(v_1, v_2, ...v_n)$ mit $v_i \in \{-1, 0, 1\}, i = 1..n\}$
     Die Anzahl aller möglicher Tupel (= Mächtigkeit der Menge V) beträgt
     $|V| = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot ... \cdot 3}_{\text{n-mal}} = 3^n$

     Es gibt also insgesamt 3^n mögliche Verteilungen der Gewichte und somit 3^n zu prüfende Gleichungen.

  4. Eine beispielhafte programmtechnische Umsetzung ist die Programmierung von n Schleifen mit jeweils 3 Durchläufen. Für jedes Gewicht wird dann im Array V genau einmal der Wert $-1, 0$ und 1 gesetzt. Zur Prüfung der Gewichtsverteilung wird ihr Gewicht berechnet und mit dem Gewicht des Artikels verglichen.
     Stimmen die Werte überein, wird der Artikel mit der im Array V festgelegten Verteilung der Gewichte ausgegeben.

     Pseudocode der Schleifen für $n = 3$ Gewichte
     for ($v\,[1] = -1$ to $1, + + v\,[1]$) {
       for ($v\,[2] = -1$ to $1, + + v\,[2]$) {

for ($v\,[3] = -1$ to $1, ++\,v\,[3]$) {
$gewicht = v\,[1] \cdot g\,[1] + v\,[2] \cdot g\,[2] + v\,[3] \cdot g\,[3]$
if ($gewicht = X$) Ausgabe der im Array V gespeicherten Verteilung
}
}
}

[3] $(1, -1, 0)$ bedeutet: Gewicht 1 liegt in der linken Schale, Gewicht 2 liegt in der rechten Schale, Gewicht 3 wird nicht benutzt

1. Logik

Die Logik ist die Grundlage aller Mathematik. Ohne sie ist die Informatik nicht denkbar.

Nimmt man zum Beispiel die Bedingungen des IF-Statements:
$if\ (n < 10)\ and\ (i > 5\ or\ j > 17))\ then\ Befehl$
Der Befehl wird ausgeführt, wenn zum Beispiel $n = i = j = 9$ oder $n = i = 0, j = 18$ ist.
Er wird nicht ausgeführt, wenn zum Beispiel $n = 9$ und $i = j = 5$ ist.

In diesem Kapitel werden nur die notwendigsten Grundlagen der Logik besprochen.

In der **Aussagenlogik** „rechnet" man mit Aussagen wie in der Algebra mit Zahlen. Dabei versteht man unter „Aussage" ein sprachliches Gebilde, dem genau einer der Wahrheitswerte (nämlich wahr oder falsch) zugeordnet werden kann[1]. Die Wahrheitswerte werden mit *wahr* (w oder 1) oder *falsch* (f oder 0) bezeichnet.

Beispiel 1.0.1 (Aussagen)

a) Kanada ist ein Land. (w)

b) Moskau ist die Hauptstadt von Spanien. (f)

c) Diese Aussage ist falsch. $\rightarrow$ *Paradoxon*, keine Aussage

d) $1 + 101 = 110$ $(f) \rightarrow$ (*Dezimalsystem*)

e) $(1)_2 + (101)_2 = (110)_2$ $(w) \rightarrow$ (*Dualsystem*)

Der Wahrheitswert hängt also auch vom jeweiligen Kontext ab!

Definition 1.0.2 (Aussagebausteine, Aussageformen, Junktoren)
Aussagenlogisch nicht weiter zerlegbare Aussagen nennt man ***Aussagebausteine*** *(meist mit Großbuchstaben A, B, C,... bezeichnet).*
Diese werden durch ***Junktoren*** *zu neuen Aussagen verknüpft, den sogenannten* ***zusammengesetzten Aussagen oder Aussageformen***[2] *(oft bezeichnet mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$).*
Der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage/Aussageform ist durch die Wahrheitswerte der einzelnen Aussagebausteine sowie den verbindenden Junktoren eindeutig festgelegt.

Beispiel 1.0.3 (Aussageformen)

A:	Es regnet. (w)	C:	Der Hahn kräht auf dem Mist. (w)
B:	Es schneit. (f)	D:	Das Wetter ändert sich. (f)
α:	Es regnet oder es schneit. (w) $\rightarrow \alpha :\ A \vee B$	α:	Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, dann ändert sich das Wetter oder es bleibt wie es ist. (w) $\rightarrow \alpha :\ C \Rightarrow (D \vee \neg D)$

[1] In diesem Fall spricht man von einer zweiwertigen Logik. Zum Thema „nicht-zweiwertige" Logik siehe z.B. Fuzzy-Logik.

[2] Der Begriff Aussageform wird in der Literatur unterschiedlich benutzt.

1.1. Wahrheitstafel

Diese Tafeln sind die Verknüpfungstabellen von Aussagebausteinen. Sie legen die Wahrheitswerte einer Aussageform für alle möglichen Kombinationen von Wahrheitswerten der einzelnen Aussagebausteine, verknüpft durch Junktoren, fest.[3]. Aus bekannten Wahrheitswertbelegungen von einfachen Aussageformen werden die von neuen komplizierteren Aussageformen berechnet.

- Die 4 Aussageformen mit einstelligen Junktoren sind folgende.
  (Es gibt nur einen Aussagebaustein A.)

A	id(A)
w	w
f	f

Identität

A	$\neg A$
w	f
f	w

NOT, Negation[4]

A	$\top$
w	w
f	w

Tautologie

A	$\bot$
w	f
f	f

Kontradiktion

- Im Folgenden sind 7 ausgewählte Aussageformen mit zweistelligen Junktoren von insgesamt 16 möglichen zweistelligen Junktoren aufgeführt. Die Aussagebausteine sind A und B.

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$\overbrace{XOR\,(A,B)}^{exklusives\ \text{ODER}}$	NOR (A,B)	NAND (A,B)
w	w	w	w	w	w	f	f	f
w	f	w	f	f	f	w	f	w
f	w	w	f	w	f	w	f	w
f	f	f	f	w	w	f	w	w

Erläuterungen zu diesen 7 Aussageformen:

- Die Disjunktion $A \vee B$ ist genau dann wahr, wenn mindestens einer der Aussagebausteine wahr ist. Man nennt es auch einschließendes/inklusives ODER [5].
- Die Konjunktion $A \wedge B$ ist nur dann wahr, wenn beide Aussagebausteine wahr sind.
- Die Implikation ($\Rightarrow$) kann man sich mit Hilfe der folgenden Aussagen verdeutlichen:
  1. Wenn Köln am Rhein liegt, ist frisches Gras grün $(w) \Rightarrow (w)$ ist eine wahre Aussage
  2. Wenn Köln am Rhein liegt, ist frisches Gras rot $(w) \Rightarrow (f)$ ist eine falsche Aussage
  3. Wenn Köln an der Donau liegt, ist frisches Gras grün $(f) \Rightarrow (w)$ ist eine wahre Aussage
  4. Wenn Köln an der Donau liegt, ist frisches Gras rot $(f) \Rightarrow (f)$ ist eine wahre Aussage

  Für die Implikation gilt „ex falso quodlibet" (lateinisch, aus Falschem folgt Beliebiges). Die Implikation (Wenn.., dann..) ist besonders schwer zu verstehen. Denn in der Umgangssprache bedeutet z.B.
  „Wenn ich genug Geld habe, dann fahre ich in Urlaub." auch
  „Wenn ich kein Geld habe, dann fahre ich nicht."
  Dies entspricht nicht der logischen Implikation!
- $A \Leftrightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn beide Aussagebausteine denselben Wahrheitswert besitzen (Äquivalenz).
- XOR (A, B) ist nur wahr, wenn genau ein Aussagebaustein wahr ist. Es ist das ausschließende/exklusive ODER, das genau so auch umgangssprachlich verwendet wird. (Wahrheitstafel siehe Beispiel 1.1.1 auf der nächsten Seite)
- NOR entspricht NOT OR[6]
- NAND entspricht NOT AND[7]

[3] Es gibt vier **einstellige** und 16 **zweistellige Junktoren**.
[4] Statt $\neg A$ kann man auch $\overline{A}$ benutzen.
[5] In der Umgangssprache meint man mit ODER meist das exklusive ODER (XOR), also das entweder-oder.
[6] gebräuchliche Schreibweisen für NOR: $\neg(A \vee B)$, $\overline{A \vee B}$, $A \downarrow B$
[7] gebräuchliche Schreibweisen für NAND: $\neg(A \wedge B)$, $\overline{A \wedge B}$, $A|B$ (Sheffer-Strich)

Man kann auch Junktoren mit mehr als 2 Aussagebausteinen betrachten. So gibt es $2^{2^3} = 2^8 = 256$ verschiedene dreistellige Junktoren. Allgemein gibt es 2^{2^n} verschiedene n-stellige Junktoren.

Beispiel 1.1.1 (Wahrheitstafel für die Aussageform XOR (A,B))
Man kann folgende Äquivalenz mit einer Wahrheitstafel nachweisen:
$\alpha : (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \;\Leftrightarrow\; XOR\,(A, B)$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg A \wedge B$	$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$	$XOR\,(A, B)$	α
w	w	f	f	f	f	f	f	w
w	f	f	w	w	f	w	w	w
f	w	w	f	f	w	w	w	w
f	f	w	w	f	f	f	f	w

Die Anzahl der Zeilen der Wahrheitstafel einer Aussageform hängt von der Anzahl der möglichen Wahrheitswertbelegungen der Aussagebausteine ab.

Für 2 Aussagebausteine gibt es	$2^2 = 4$ Möglichkeiten, also 4 Zeilen,
für 3 Aussagebausteine sind es	$2^3 = 8$ Möglichkeiten, also 8 Zeilen
und für n Aussagebausteine sind es	2^n Möglichkeiten und somit 2^n Zeilen.

Beispiel 1.1.2 (mögliche Schlüsselwörter für Junktoren in der deutschen Sprache)
Um ein in Umgangssprache formuliertes Problem in die formale mathematische Logik zu „übersetzen“, müssen sprachliche Schlüsselwörter den richtigen Junktoren zugeordnet werden.
Die grundlegende Vorgehensweise wird im Folgenden anhand der Aussagebausteine
A: „Es regnet.“ und B: „Die Sonne scheint nicht.“ beispielhaft gezeigt.
Die Sprache lässt jedoch Platz für Interpretationen, so dass sprachlich formulierte Beispiele, mit formaler mathematischer Logik betrachtet, häufig nicht das ergeben, was uns der sogenannte „gesunde Menschenverstand“ sagt.

Disjunktion[8] **/** (inklusives) Oder
$A \vee B$ **Entweder** es regnet **oder** die Sonne scheint nicht **oder** beides.
Konjunktion / und:
$A \wedge B$ Es regnet **und** die Sonne scheint nicht.
Implikation / wenn, dann:
$A \Rightarrow B$ **Wenn** es regnet, **dann** scheint die Sonne nicht.
Äquivalenz / genau dann, wenn:
$A \Leftrightarrow B$ Es regnet **genau dann**, **wenn** die Sonne nicht scheint[9]

Bemerkung 1.1.3 (NAND und NOR als Basisjunktoren)
Alle zweistelligen Junktoren kann man sowohl nur durch den Junktor NAND ($|$) als auch nur durch den Junktor NOR ($\downarrow$)ausdrücken. Für NAND ist es hier ausgeführt. Versuchen Sie die entsprechenden Formeln für NOR selbst zu finden.

Negation: $\neg A \Leftrightarrow (A|A)$

Konjunktion: $(A \wedge B) \Leftrightarrow [(A|B)|(B|A)]$

Disjunktion: $(A \vee B) \Leftrightarrow [(A|A)|(B|B)]$

XOR: $[(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)] \Leftrightarrow [(A|(B|B)|((A|A)|B)]$

[8] Alternativ auch als Adjunktion bezeichnet.
[9] Das ist offensichtlich umgangssprachlich falsch (Bewölkung, Schneefall, ...)

Implikation: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow [A|(B|B)]$

Äquivalenz: $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A|B)|((A|A)|(B|B))]$

Beispiel 1.1.4 (Implikation ausgedrückt durch NAND: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A|(B|B))$)
Zughörige Wahrheitstafel zum Nachweis der Richtigkeit:

A	B	$A \Rightarrow B$	$B\|B$	$A\|(B\|B)$	$A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad A\|(B\|B)$
w	w	w	f	w	W
w	f	f	w	f	W
f	w	w	f	w	W
f	f	w	w	w	W

Beispiel 1.1.5 (verkürzte Schreibweise der Wahrheitstafel von Beispiel 1.1.4)

$(A$	$\Rightarrow$	$B)$	$\Leftrightarrow$	$(A$	$\|$	$(B$	$\|$	$B)$
w	w	w	w	w	w	w	f	w
w	f	f	w	w	f	f	w	f
f	w	w	w	f	w	w	f	w
f	w	f	w	f	w	f	w	f
1.	2.	1.	4.	1.	3.	1.	2.	1.

Die Vorteile dieser Schreibweise sind die komprimierte und sehr übersichtliche Darstellung sowie die einfache Nachvollziehbarkeit der Bearbeitung durch die Ziffern in der letzten Tabellenzeile.

Bemerkung 1.1.6

In der Mathematik sagt man

	$A \Rightarrow B$	A ist hinreichend für B (B wenn A)
		B ist notwendig für A (A nur wenn B)
	$A \Leftrightarrow B$	A ist notwendig und hinreichend für B und umgekehrt
		oder auch A ist äquivalent zu B

Statt der Wahrheitswerte **w** und **f** werden im Hinblick auf die Programmierung oftmals die Werte **1** und **0** verwendet: **w** $\rightarrow$ **1** **f** $\rightarrow$ **0**
Dann kann man folgende Funktionen benutzen, um logische Ausdrücke im Programm auszuwerten. A und B nehmen die Zahlen 0 und 1 an.

$$\begin{aligned}
\text{NOT}\,(A) &= 1 - A \\
\text{AND}\,(A,B) &= A \cdot B \\
\text{OR}\,(A,B) &= A + B - A \cdot B \\
\text{XOR}\,(A,B) &= A \cdot (1-B) + B \cdot (1-A) = A + B - 2 \cdot AB \\
\text{AEQU}\,(A,B) &= 1 - (A-B)^2 \\
\text{IMPL}\,(A,B) &= 1 - A + A \cdot B \\
\text{NAND}\,(A,B) &= 1 - A \cdot B \\
\text{NOR}\,(A,B) &= 1 - A - B + A \cdot B
\end{aligned}$$

Beispiel 1.1.7 (Fortsetzung des Beispiel 1.1.1 auf der vorherigen Seite (XOR))

$$
\begin{aligned}
\text{XOR}\ (A,B) &= \text{OR}\ \ (\ \text{AND}\ \ (A, \text{NOT}(B))\ \ ,\ \ \text{AND}\ \ (\text{NOT}\ (A), B)\ ) \\
&= A \cdot (1-B) + (1-A) \cdot B - \underbrace{A \cdot (1-B) \cdot (1-A) \cdot B}_{=0} \\
&= A \cdot (1-B) + (1-A) \cdot B \\
&= A - 2 \cdot AB + B
\end{aligned}
$$

Beispiel 1.1.8 (Fortsetzung des Beispiels 1.1.4 auf der vorherigen Seite (Implikation))

$$
\begin{aligned}
\text{NAND}\ (A, \text{NAND}\ (B,B)) &= 1 - A \cdot (1 - B \cdot B) \\
&\overset{(B \cdot B = B)}{=} 1 - A + A \cdot B \\
&= \text{IMPL}\ (A,B)
\end{aligned}
$$

Ein weiteres Anwendungsgebiet ist die Schaltalgebra:
Parallelschaltung $\rightarrow$ „oder“
Reihenschaltung $\rightarrow$ „und“

Dies kann man sich auch am Beispiel von 2 Wasserpumpen, die man nebeneinander/parallel (zur Vergrößerung der Kapazität) oder hintereinander/seriell (zur Vergrößerung der Förderhöhe) betreiben kann, klar machen.

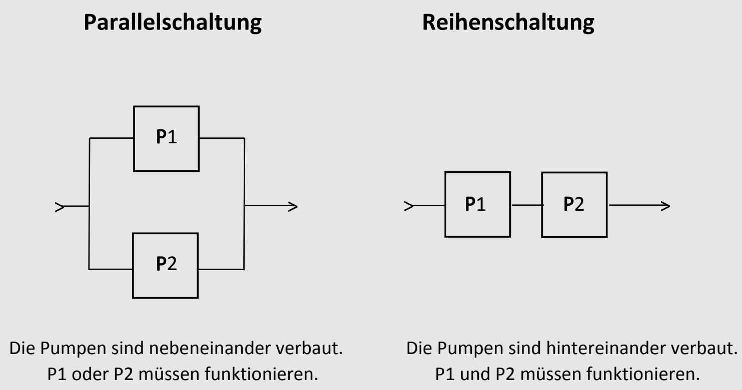


Abbildung 1.1.: Schaltalgebra

1.2. Tautologie, Kontradiktion

Definition 1.2.1 (Tautologie, Kontradiktion)
*Eine Aussageform heißt **Tautologie** (Gesetz, Satz der Aussagenlogik), wenn sie bei jeder möglichen Wahrheitswertbelegung der einzelnen Aussagebausteine wahr ist. Eine solche Aussageform ist dann allgemeingültig.*
*Eine Aussageform, die immer falsch ist, heißt **Kontradiktion** (Widerspruch).*

Beispiel 1.2.2 (Zwei ausgewählte Tautologien [siehe Satz 1.2.5 auf der nächsten Seite, Teil (9), (21)])

(9) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

$(A$	$\Rightarrow$	$B)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg$	A	$\vee$	$B)$
w	w	w	w	f	w	w	w
w	f	f	w	f	w	f	f
f	w	w	w	w	f	w	w
f	w	f	w	w	f	w	f
1.	2.	1.	4.	2.	1.	3.	1.

(21) $A \Rightarrow (B \vee \neg B)$

A	$\Rightarrow$	$(B$	$\vee$	$\neg$	$B)$
w	w	w	w	f	w
w	w	f	w	w	f
f	w	w	w	f	w
f	w	f	w	w	f
1.	4.	1.	3.	2.	1.

Beispiel 1.2.3 (Eine Kontradiktion: $(A \Leftrightarrow B) \wedge (A \wedge \neg B)$)

$(A$	$\Leftrightarrow$	$B)$	$\wedge$	$(A$	$\wedge$	$\neg$	$B)$
w	w	w	f	w	f	f	w
w	f	f	f	w	w	w	f
f	f	w	f	f	f	f	w
f	w	f	f	f	f	w	f
1.	2.	1.	4.	1.	3.	2.	1.

Bemerkung 1.2.4
Zur Einsparung von Klammern vereinbart man, dass „$\neg$“ am stärksten und „$\wedge$“ sowie „$\vee$“ stärker binden als „$\Rightarrow$“ und „$\Leftrightarrow$“.
Beispiel: $\gamma : [(A \vee B) \wedge (\neg A)] \Rightarrow B$ ist gleichwertig mit $\gamma : (A \vee B) \wedge \neg A \Rightarrow B$
Feste Regeln für die Bindung von „$\wedge$“ und „$\vee$“ gibt es nicht!
In JAVA und C^{++} zum Beispiel bindet „$\wedge$“ stärker als „$\vee$“. Im Zweifel sollten Klammern verwendet werden.

Bitte schauen Sie sich die folgenden Tautologien an. Am besten lesen Sie sich die Formeln laut vor!
Die erste Tautologie im folgenden Satz lautet :
„ Aussage A oder Aussage B ist äquivalent zu Aussage B oder Aussage A “
Die Reihenfolge spielt bei **oder** also keine Rolle.

Satz 1.2.5
Für beliebige Aussagen A, B und C sind die folgenden Aussageformen Tautologien - also immer wahr - (Der Buchstabe T steht für eine beliebige Tautologie) [10]:

(0)	$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	Kommutativgesetz
(1)	$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$	Assoziativgesetz
(2)	$A \vee \neg A$	Satz vom ausgeschlossenen Dritten, tertium non datur
(3)	$\neg(A \wedge \neg A)$	Satz vom Widerspruch
(4)	$\neg\neg A \Leftrightarrow A$	Satz von der doppelten Verneinung
(5)	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$	Gesetz von deMorgan
(6)	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$	Gesetz von deMorgan
(7)	$[A \wedge (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$	Distributivgesetz
(8)	$[A \vee (B \wedge C)] \Leftrightarrow [(A \vee B) \wedge (A \vee C)]$	Distributivgesetz
(9)	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$	
(10)	$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$	
(11)	$\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow \neg B)$	
(12)	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	Kontrapositionsgesetz
(13)	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow [(A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A]$	indirekter Beweis
(14)	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow [(A \wedge \neg B) \Rightarrow B)]$	indirekter Beweis
(15)	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow [(A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)]$	indirekter Beweis
(16)	$[(A \wedge B) \Rightarrow C] \Leftrightarrow [A \Rightarrow (B \Rightarrow C)]$	
(17)	$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$	B ist notwendig und hinreichend für A
(18)	$(T \wedge A) \Leftrightarrow A$	
(19)	$(T \vee A) \Leftrightarrow T$	
(20)	$A \Rightarrow T$	
(21)	$A \Rightarrow (B \vee \neg B)$	
(22)	$A \Rightarrow (A \vee B)$	Gesetz vom Disjunktionsschluss
(23)	$(A \wedge B) \Rightarrow A$	
(24)	$(B \wedge \neg B) \Rightarrow A$	
(25)	$[(A \vee B) \wedge \neg A] \Rightarrow B$	
(26)	$[A \wedge (A \Rightarrow B)] \Rightarrow B$	Gesetz vom modus ponens, Abtrennungsregel
(27)	$[(A \Rightarrow B) \wedge \neg B] \Rightarrow \neg A$	Gesetz vom modus tollens
(28)	$[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	Transitivität

Beispiel 1.2.6 (Beweise einiger Tautologien aus Satz 1.2.5 durch Wahrheitstafeln)

(2)

A	$\vee$	$\neg$	A
w	w	f	w
f	w	w	f
1.	3.	2.	1.

(3)

$\neg$	$(A$	$\wedge$	$\neg$	$A)$
w	w	f	f	w
w	f	f	w	f
4.	1.	3.	2.	1.

(4)

$\neg$	$\neg$	A	$\Leftrightarrow$	A
w	f	w	w	w
f	w	f	w	f
3.	2.	1.	4.	1.

(5)

$\neg$	$(A$	$\wedge$	$B)$	$\Leftrightarrow$	$\neg$	A	$\vee$	$\neg$	B
f	w	w	w	w	f	w	f	f	w
w	w	f	f	w	f	w	w	w	f
w	f	f	w	w	w	f	w	f	w
w	f	f	f	w	w	f	w	w	f
3.	1.	2.	1.	4.	2.	1.	3.	2.	1.

[10] Es ist nicht nötig, die Tautologien auswendig zu lernen. Man muss sie verstehen, um sie anwenden zu können.

(7)

A	$\wedge$	$(B$	$\vee$	$C)$	$\Leftrightarrow$	$(A$	$\wedge$	$B)$	$\vee$	$(A$	$\wedge$	$C)$
w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	w	w	f	w	w	w	w	w	w	f	f
w	w	f	w	w	w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	f	f	f	w	w	f	f	f	w	f	f
f	f	w	w	w	w	f	f	w	f	f	f	w
f	f	w	w	f	w	f	f	w	f	f	f	f
f	f	f	w	w	w	f	f	f	f	f	f	w
f	f	f	f	f	w	f	f	f	f	f	f	f
1.	3.	1.	2.	1.	4.	1.	2.	1.	3.	1.	2.	1.

(10)

$\neg$	$(A$	$\Rightarrow$	$B)$	$\Leftrightarrow$	A	$\wedge$	$\neg$	B
f	w	w	w	w	w	f	f	w
w	w	f	f	w	w	w	w	f
f	f	w	w	w	f	f	f	w
f	f	w	f	w	f	f	w	f
3.	1.	2.	1.	4.	1.	3.	2.	1.

(11)

$\neg$	$(A$	$\Leftrightarrow$	$B)$	$\Leftrightarrow$	$(A$	$\Leftrightarrow$	$\neg$	$B)$
f	w	w	w	w	w	f	f	w
w	w	f	f	w	w	w	w	f
w	f	f	w	w	f	w	f	w
f	f	w	f	w	f	f	w	f
3.	1.	2.	1.	4.	1.	3.	2.	1.

(12)

A	$\Rightarrow$	B	$\Leftrightarrow$	$\neg$	B	$\Rightarrow$	$\neg$	A
w	w	w	w	f	w	w	f	w
w	f	f	w	w	f	f	f	w
f	w	w	w	f	w	w	w	f
f	w	f	w	w	f	w	w	f
1.	2.	1.	4.	2.	1.	3.	2.	1.

(16)

$(A$	$\wedge$	B	$\Rightarrow$	$C)$	$\Leftrightarrow$	A	$\Rightarrow$	$(B$	$\Rightarrow$	$C)$
w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	w	f	f	w	w	f	w	f	f
w	f	f	w	w	w	w	w	f	w	w
w	f	f	w	f	w	w	w	f	w	f
f	f	w	w	w	w	f	w	w	w	w
f	f	w	w	f	w	f	w	w	f	f
f	f	f	w	w	w	f	w	f	w	w
f	f	f	w	f	w	f	w	f	w	f
1.	2.	1.	3.	1.	4.	1.	3.	1.	2.	1.

Definition 1.2.7 (Äquivalente Aussageformen, Äquivalenzumformung)
Zwei Aussageformen α und β heißen ***äquivalent****, wenn $\alpha \Leftrightarrow \beta$ eine Tautologie ist, d.h. für jede Belegung mit Wahrheitswerten ergibt sich bei beiden Aussageformen derselbe Wahrheitswert.*
Schreibweise: $\alpha \overset{T}{\Leftrightarrow} \beta$ oder $\alpha \sim \beta$ (selten).
Eine Äquivalenzumformung bezeichnet die Umformung einer Aussage (oder einer Gleichung bzw. Ungleichung), bei der der Wahrheitswert der ursprünglichen Aussage nicht verändert wird. Dieses Verfahren nutzt äquivalente Aussagen. Es ist die Anwendung von tautologischen Äquivalenzen.

Beispiel 1.2.8 (Beweis von Satz 1.2.5 auf Seite 13, Punkt (9) abgeleitet aus Tautologien)
(Die benutzten Tautologien aus Satz 1.2.5 stehen über den Äquivalenzzeichen.)
zu zeigen ist: $\underbrace{(A \Rightarrow B)}_{I} \Leftrightarrow \underbrace{(\neg A \vee B)}_{II}$

$$\underbrace{A \Rightarrow B}_{I} \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \neg(\neg(A \Rightarrow B)) \overset{(10)}{\Leftrightarrow} \neg(\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B}) \overset{(5)}{\Leftrightarrow} \neg A \vee \neg(\neg\mathrm{B}) \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \underbrace{\neg A \vee B}_{II}$$

Satz 1.2.9
Wird in einer Tautologie ein Aussagebaustein an jeder Stelle seines Auftretens durch eine Aussageform ersetzt, ergibt sich wieder eine Tautologie.

Beispiel: In der Tautologie $(A \vee \neg A)$ (Satz 1.2.5 auf Seite 13, Punkt (2)) wird der Aussagebaustein A durch die Aussageform $(B \wedge \neg C)$ ersetzt. Die so entstandene Aussageform ist ebenfalls eine Tautologie.

A	$\vee$	$\neg$ A
(B $\wedge$ $\neg$C)	$\vee$	$\neg$ (B $\wedge$ $\neg$C)

Folgerung 1.2.10
Erfolgt die Ersetzung an allen Stellen einer äquivalenten Aussageform, so ist die sich ergebende Aussageform wieder äquivalent.

Beispiel: In der äquivalenten Aussageform $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ (Satz 1.2.5 auf Seite 13, Punkt (9)) wird der Aussagebaustein A durch die Aussageform $(C \vee D)$ ersetzt.

(A	$\Rightarrow$ B)	$\Leftrightarrow$	($\neg$ A	$\vee$ B)
((C $\vee$ D)	$\Rightarrow$ B)	$\Leftrightarrow$	($\neg$ (C $\vee$ D)	$\vee$ B)

Satz 1.2.11
Wird in einer Aussageform eine Teilformel durch eine äquivalente Formel ersetzt, so ergibt sich eine Aussageform, die zur ursprünglichen äquivalent ist.

Es ist	(A $\Rightarrow$ B)	$\Leftrightarrow$	($\neg$ B $\Rightarrow$ $\neg$ A)	(Satz 1.2.5 auf Seite 13, (12))
und	(A $\Rightarrow$ B)	$\Leftrightarrow$	(A $\wedge$ $\neg$ B $\Rightarrow$ B)	(Satz 1.2.5 auf Seite 13, (14))

also ist ($\neg$ B $\Rightarrow$ $\neg$ A) $\Leftrightarrow$ (A $\wedge$ $\neg$ B $\Rightarrow$ B)

Beispiel 1.2.12 (Beweis zu Satz 1.2.5 auf Seite 13 Punkt (25) abgeleitet aus Tautologien)

$$
\begin{aligned}
\underbrace{(A \vee B) \wedge \neg A}_{C} \Rightarrow B &\overset{(9)}{\Leftrightarrow} \neg\underbrace{[(A \vee B) \wedge \neg A]}_{C} \vee B \\
&\overset{(5)}{\Leftrightarrow} (\neg(A \vee B) \vee \neg\neg A) \vee B \\
&\overset{(6)}{\Leftrightarrow} ((\neg A \wedge \neg B) \vee A) \vee B \\
&\overset{(8)}{\Leftrightarrow} ((\underbrace{\neg A \vee A}_{T}) \wedge (\neg B \vee A)) \vee B \\
&\Leftrightarrow (T \wedge \neg B \vee A) \vee B \\
&\overset{(18)}{\Leftrightarrow} (\neg B \vee A) \vee B \\
&\Leftrightarrow A \vee \underbrace{\neg B \vee B}_{T} \\
&\overset{(2)}{\Leftrightarrow} A \vee T \\
&\overset{(19)}{\Leftrightarrow} T
\end{aligned}
$$

1.3. Normalform

Bestimmte Typen von Aussageformen (siehe nächste Definition) sind wichtig.
Vor der Definition sei noch einmal an folgende Vokabeln erinnert:
Eine Disjunktion ist eine Oder-Verknüpfung,
eine Konjunktion ist eine Und-Verknüpfung.

Definition 1.3.1 (disjunktive und konjunktive Normalform)
Eine mehrgliedrige Disjunktion (ODER), deren Glieder Konjunktionen (UND) von Aussagebausteinen und negierten Aussagebausteinen sind, heißt ***disjunktive Normalform, DNF****.*

Eine mehrgliedrige Konjunktion (UND), deren Glieder Disjunktionen (ODER) von Aussagebausteinen und negierten Aussagebausteinen sind, heißt ***konjunktive Normalform, KNF****.*

---

1. Frage: Wie findet man zu einer vorgegebenen Wahrheitswertbelegung einer Aussageform α eine disjunktive Normalform?

Antwort: Eine disjunktive Normalform (DNF) von α ergibt sich durch ODER-Verknüpfungen der Zeilen der Wahrheitstafel, für die α wahr ist. Die zur jeweiligen Zeile gehörenden Aussagen werden mit UND verknüpft.

Beispiel 1.3.2 (Konstruktion einer Aussageform zu einer vorgegebenen Wahrheitswertbelegung)

gegeben: Wahrheitswertbelegung von α:

A	B	C	α	$\neg\alpha$
w	w	w	$\boxed{w}$	f
w	w	f	$\boxed{w}$	f
w	f	w	$\boxed{w}$	f
w	f	f	$\boxed{w}$	f
f	w	w	$\boxed{w}$	f
f	w	f	f	$\boxed{w}$
f	f	w	f	$\boxed{w}$
f	f	f	f	$\boxed{w}$

gesucht: Disjunktive Normalform DNF von α in Abhängigkeit von A, B, C.

DNF von $\alpha : (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$

2. Frage: Wie kommt man von einer DNF von α zu einer konjunktiven Normalform (KNF)?

Antwort: Zunächst wird die Wahrheitstafel um die Spalte $\neg\alpha$ erweitert und die DNF von $\neg\alpha$ in Abhängigkeit der Aussagen aufgestellt. Letztere wird negiert und mit den Gesetzen von deMorgan (siehe Satz 1.2.5 auf Seite 13, Punkte (5) und (6)) in eine konjunktive Normalform (KNF) umgeformt.

Beispiel 1.3.3 (siehe Wahrheitstafel Beispiel 1.3.2)
DNF von $\neg\alpha$: $(\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$
es gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha &\overset{(4)}{\Leftrightarrow} \neg(\neg\alpha) \\
&\Leftrightarrow \neg[(\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)] \\
&\overset{(6)}{\Leftrightarrow} \neg(\neg A \wedge B \wedge \neg C) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg B \wedge C) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \\
&\overset{(5)}{\Leftrightarrow} (A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee C)
\end{aligned}$$

Das ist eine konjunktive Normalform (KNF) von α.

Bemerkung 1.3.4
Normalformen sind nicht eindeutig.

Beispiel 1.3.5 (siehe Beispiel 1.3.3)
α ist unter anderem äquivalent zu β mit $\beta : (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge C)$ oder zu γ mit $\gamma : A \vee (B \wedge C)$. Somit sind β und γ ebenfalls Normalformen zu der im Beispiel 1.3.2 vorgegebenen Wahrheitsbelegung.
Beweis: Als erstes wird gezeigt, dass $\beta \Leftrightarrow \gamma$

$$\begin{aligned}
\beta &\Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)] \vee (B \wedge C) \\
&\Leftrightarrow [A \wedge (B \vee \neg B)] \vee (B \wedge C) \\
&\Leftrightarrow A \vee (B \wedge C) \\
&\Leftrightarrow \gamma
\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\alpha \Leftrightarrow \gamma$

$$
\begin{aligned}
\alpha &\Leftrightarrow (A \vee \neg B \vee C) \wedge \underbrace{(A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee C)}_{(A \vee B) \vee (\neg C \wedge C)} \\
&\Leftrightarrow (A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee B) \\
&\overset{(8)}{\Leftrightarrow} A \vee ((\neg B \vee C) \wedge B) \\
&\overset{(7)}{\Leftrightarrow} A \vee ((\neg B \wedge B) \vee (C \wedge B)) \\
&\Leftrightarrow A \vee (C \wedge B) \\
&\Leftrightarrow \gamma
\end{aligned}
$$

Den Beweis hätte man auch mit Hilfe einer Wahrheitstafel führen können.

Folgerung 1.3.6
Zu jeder Aussageform gibt es äquivalente Aussageformen, in denen nur die Junktoren $\neg, \wedge, \vee$ vorkommen.

Bemerkung 1.3.7
In der Aussagenlogik wird mit Aussagen „gerechnet" wie in der Algebra mit Zahlen. Man spricht daher auch von einer Algebra der Aussagenlogik (Beispiel einer Booleschen Algebra).

Sie sollten jetzt in der Lage sein,
- zu vorgegebenen Aussageformen die Wahrheitstafeln auszufüllen,
- ein in Umgangssprache formuliertes Problem in die formale mathematische Logik zu übersetzen,
- Aussageformen mit Äquivalenzumformungen zu vereinfachen,
- eine Aussageform zu einer vorgegebenen Wahrheitswertbelegung zu konstruieren,
- zu einer gegebenen Wahrheitswertbelegung eine passende Normalform (DNF, KNF) zu ermitteln.

1.4. Aufgaben

Aufgabe 1

Überprüfen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, ob die folgenden Aussageformen allgemeingültig sind.

a) $(A \vee B) \Rightarrow ((\neg A \vee B) \wedge (A \Rightarrow \neg A))$

b) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$

Aufgabe 2

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $(A \Rightarrow B) \vee ((A \wedge B) \Leftarrow B)$

b) $(A \wedge B) \Leftarrow ((A \Rightarrow B) \wedge B)$

Aufgabe 3

a) Erstellen Sie für folgende logische Aussageform eine Wahrheitsstafel:
$\neg(A \Leftrightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (\neg A \vee C) \wedge (B \wedge \neg C)$

b) Wann ist sie wahr?

c) Geben Sie eine disjunktive und eine konjunktive Normalform an.

Aufgabe 4

Gegeben seien die folgenden Aussagen:

A: Die Sonne scheint.

B: Ein Auftrag liegt vor.

C: Miss Peel übt Karate.

D: Miss Peel besucht Mr. Steed.

E: Mr. Steed spielt Golf.

F: Mr. Steed luncht mit Miss Peel.

Bestimmen Sie für folgende Aussagen die zugehörigen aussagenlogischen Formeln:

a) Wenn die Sonne scheint, dann spielt Mr. Steed Golf.

b) Wenn die Sonne nicht scheint und kein Auftrag vorliegt, dann luncht Mr. Steed mit Miss Peel.

c) Entweder übt Miss Peel Karate oder sie besucht Mr. Steed.

d) Miss Peel übt Karate genau dann, wenn Mr. Steed Golf spielt oder ein Auftrag vorliegt.
(Hinweis: Umgangssprache, also auch „oder beides“)

e) Entweder scheint die Sonne und Mr. Steed spielt Golf oder Miss Peel besucht Mr. Steed und dieser luncht mit ihr.

f) Es trifft nicht zu, dass Miss Peel Mr. Steed dann besucht, wenn ein Auftrag vorliegt.

g) Genau dann, wenn kein Auftrag vorliegt, luncht Mr. Steed mit Miss Peel.

Aufgabe 5

Untersuchen Sie die drei Fälle von Kommissar K.:

a) Kommissar K. atmet auf, sein erster Fall ist vollständig geklärt. Er weiß, dass der/die Täter unter vier verdächtigen Personen zu suchen ist. Nennen wir sie A, B, C und D.

   A spielt eine wichtige Rolle:
   Ist er unschuldig, dann ist auch B außer Verdacht.
   Die Schuld von C wäre dagegen unzweifelhaft.

   D ist die Schlüsselfigur:
   Ist er unschuldig, dann war B bei den Tätern.
   Ist er schuldig, dann ist auch C dran.

   Aber C hat ein todsicheres Alibi.

   Wer wird verhaftet?

b) Im zweiten Fall steht er knapp vor der Aufklärung.

   Wieder hat er vier Verdächtige: A, B, C und D. Er weiß zudem, dass
   mindestens zwei am Komplott beteiligt waren.

   Könnte er die Schuld von B beweisen, wüßte er, dass auch A und D beteiligt waren.

   Aus der Beteiligung von C könnte er dagegen auf die Unschuld von D schließen.

   „OK“, folgert er „der Fall ist noch nicht vollständig geklärt, aber Verhaftungen kann ich trotzdem vornehmen.“

c) Der dritte Fall hat es in sich. Nennen wir die Verdächtigen wieder A, B, C und D.

   A ist Einzelgänger und kommt nur als Alleintäter in Frage.

   C und D haben das Ding gemeinsam gedreht oder sind beide unschuldig.

   B kommt als Täter dann und nur dann in Frage, wenn auch C mit von der Partie war.

   Aus der Schuld von B folgt die von A und umgekehrt.

   Warum ist der Kommissar irritiert?

Aufgabe 6

Man hat 3 Kugeln (a,b,c), die jeweils weiß oder schwarz sind. Stellen Sie für die folgenden 4 Aussagen jeweils eine mathematische Aussageform auf:

(1) Wenn a weiß ist, dann ist b schwarz.

(2) b und c sind nicht beide weiß.

(3) Wenn b schwarz ist, dann ist c weiß.

(4) a und c haben unterschiedliche Farbe.

Erstellen Sie für die 4 Aussageformen eine Wahrheitstafel. Wie sehen die Kugeln aus, wenn alle Aussageformen zutreffen, d.h. wahr sind? Ist das Ergebnis eindeutig?

(Hinweis: Bezeichnen Sie mit A die Aussage „Kugel a ist weiß“, $\neg A$ bedeutet Kugel a ist schwarz.)

1.5. Prädikat, Quantor

Die **Prädikatenlogik** ist eine Erweiterung der Aussagenlogik. Sie wird in diesem Kapitel nur kurz gestreift. Insbesondere werden Quantoren eingeführt.

Das zentrale Konzept der Prädikatenlogik ist das **Prädikat**. Es besteht aus einer Folge von Wörtern mit klar definierten Leerstellen, den sogenannten freien Variablen.
Ersetzt man im Prädikat die Leerstellen/Variablen durch Werte/Objekte, so wird es zu einer wahren oder falschen Aussage.
Unterscheidung: **Wert / Objekt** $\longleftrightarrow$ **Prädikat / Eigenschaft**

Beispiel 1.5.1
Seien A, B zwei Aussagen aus der Aussagenlogik mit
A: Alle geraden Zahlen sind durch 2 teilbar.
B: 48 ist eine gerade Zahl.
„alle geraden Zahlen“ und „48“ sind Werte/Objekte,
„durch 2 teilbar“ und „ist eine gerade Zahl “ sind Prädikate/Eigenschaften.

Bezeichnung 1.5.2
Objekte: $a, b, c, \ldots, x, y, z$
Prädikate[11]: G, H, . . .
G(x) bedeutet: Das Objekt x besitzt die Eigenschaft G.
Beispiel:

- G $\widehat{=}$ $\sqcup$ hustet $\rightarrow$G(Otto) bedeutet: Otto hustet (einstelliges Prädikat)
- H $\widehat{=}$ $\sqcup$ teilt $\sqcup$, $\rightarrow$ H $(2, 4)$ bedeutet: 2 teilt 4 (zweistelliges Prädikat)

Für eine spezielle Wahl von x ist G(x) eine Aussage wie bisher, also wahr oder falsch.

Bemerkung 1.5.3
So wie man Aussagen in der Aussagenlogik mit Junktoren verknüpft, kann man auch Prädikate miteinander verknüpfen.
siehe Beispiel 1.5.1: $A \wedge B$
siehe Bezeichnung 1.5.2, Beispiel: G(Otto) $\wedge$ H(2,4)

Quantoren ermöglichen es, Aussagen darüber zu machen, auf wie viele Objekte ein Prädikat zutrifft. Der **Allquantor** sagt aus, dass ein Prädikat auf alle Objekte zutrifft. In formaler Sprache wird er durch $\forall$ dargestellt. Der **Existenzquantor** sagt aus, dass ein Prädikat auf mindestens ein Objekt zutrifft. In formaler Sprache wird das Zeichen $\exists$ verwendet.

Definition 1.5.4 (Allquantor, Existenzquantor)

a) ***Allquantor**: $\forall$ „Für alle ... gilt ...“*
Beispiel: $\forall x : P(x)$ bedeutet: Für alle x ist $P(x)$ wahr.

b) ***Existenzquantor** [12]: $\exists$ „Es existiert ... mit ...“*
Beispiel: $\exists x : P(x)$ bedeutet: Es existiert mindestens ein x, für das $P(x)$ wahr ist.

---

[11] Es gibt einstellige, zweistellige, ... mehrstellige Prädikate.
[12] $\exists!$ oder $\exists_1$ steht für: Es existiert genau ein ...

Beispiel 1.5.5 (mehrere Quantoren)
$P(x,y) =$ MaTSE x isst gerne Speise y (zweistelliges Prädikat mit den Variablen/Leerstellen x und y)

Aussage	$P(x,y)$
Es gibt eine Speise, die jeder MaTSE gerne isst.	$\exists y \forall x : P(x,y)$
Jeder MaTSE hat eine Speise, die er gerne isst.	$\forall x \exists y : P(x,y)$
Jede Speise wird von irgendeinem MaTSE gerne gegessen.	$\forall y \exists x : P(x,y)$
Es gibt einen MaTSE, der alle Speisen gerne isst.	$\exists x \forall y : P(x,y)$
Es gibt einen MaTSE, der eine Speise gerne isst.	$\exists x \exists y : P(x,y)$

Bemerkung 1.5.6

a) Wenn zwei unterschiedliche Quantoren hintereinander stehen, wird durch Vertauschen der Sinn verfälscht.

- $\exists y \forall x : P(x,y)$ y hängt **nicht** von x ab.
  Es gibt eine Speise, die jeder MaTSE gerne isst. (siehe Beispiel 1.5.5)
- $\forall x \exists y : P(x,y)$ y hängt von x ab.
  Jeder MaTSE hat eine Speise, die er gerne isst. (siehe Beispiel 1.5.5)

b) Variablen, die durch den Existenzquantor gebunden sind, hängen immer von allen links davon stehenden, gebundenen Variablen ab.
Betrachten Sie folgendes Beispiel:
$M = \{1,2,3,4,5\},\ x,y \in M$ und $G(x,y) : x \leq y$.

- $\forall x \exists y : x \leq y$ y hängt von x ab.
  für $x = 1$ ist $y = 1,2,3,4,$ oder 5 und
  für $x = 2$ ist $y = 2,3,4,$ oder 5 und
  für $x = 3$ ist $y = 3,4,$ oder 5 und
  für $x = 4$ ist $y = 4,$ oder 5 und
  für $x = 5$ ist $y = 5$
  (und - Verknüpfung wegen $\forall$)
- $\exists x \exists y : x \leq y$ Auch hier hängt y von x ab.
  für $x = 1$ ist $y = 1,2,3,4,$ oder 5 oder
  für $x = 2$ ist $y = 2,3,4,$ oder 5 oder
  für $x = 3$ ist $y = 3,4,$ oder 5 oder
  für $x = 4$ ist $y = 4,$ oder 5 oder
  für $x = 5$ ist $y = 5$ (oder - Verknüpfung wegen $\exists$)

Definition 1.5.7 (allgemeingültig, äquivalent)
*Eine prädikatenlogische (quantorenlogische) Aussageform heißt **allgemeingültig (Tautologie)**, wenn für jeden nichtleeren Objektbereich M alle Ersetzungen der Prädikatennamen und freien Variablen durch Prädikate und Objekte von M wahre Aussagen über M liefern.*
*Zwei prädikatenlogische Aussageformen α, β heißen **äquivalent**, wenn $\alpha \Leftrightarrow \beta$ eine Tautologie ist.*

Satz 1.5.8 (allgemeingültige Aussageformen)
α, β seien prädikatenlogische Aussageformen.

a) Die folgenden Aussageformen sind allgemeingültig:
   (1) $\exists x\, \forall y(\alpha) \Rightarrow \forall y\, \exists x(\alpha)$ (Die Rückrichtung „$\Leftarrow$" gilt nicht!)
   (2) $\forall x\, \forall y(\alpha) \Leftrightarrow \forall y\, \forall x(\alpha)$
   (3) $\exists x\, \exists y(\alpha) \Leftrightarrow \exists y\, \exists x(\alpha)$
   (4) $\neg\forall x(\alpha) \Leftrightarrow \exists x(\neg\alpha)$
   (5) $\neg\exists x(\alpha) \Leftrightarrow \forall x(\neg\alpha)$
   (6) $\exists x(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \exists x(\alpha) \vee \exists x(\beta)$
   (7) $\forall x(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \forall x(\alpha) \wedge \forall x(\beta)$
   (8) $\exists x(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \exists x(\alpha) \wedge \exists x(\beta)$ (Die Rückrichtung „$\Leftarrow$" gilt nicht!)
   (9) $\forall x(\alpha) \vee \forall x(\beta) \Rightarrow \forall x(\alpha \vee \beta)$ (Die Rückrichtung „$\Leftarrow$" gilt nicht!)

b) Wenn x in α nicht (bzw. nicht frei) vorkommt, dann sind die folgenden Aussageformen allgemeingültig:
   (10) $\exists x\ (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \alpha \wedge \exists x\ (\beta)$
   (11) $\forall x\ (\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \alpha \vee \forall x\ (\beta)$

Bemerkung 1.5.9
Ein Nachweis der Allgemeingültigkeit einer prädikatenlogischen Aussageform durch Wahrheitstafeln ist nicht möglich, dieser setzt vielmehr eine naive Mengenlehre voraus. Eine Alternative hierzu stellt die axiomatische Begründung der Prädikatenlogik dar.

Deshalb folgen hier keine Beweise zum Satz 1.5.8, sondern eine Veranschaulichung einiger allgemeingültiger Aussageformen durch Beispiele.

Beispiel 1.5.10 (zu einigen allgemeingültigen Aussageformen aus Satz 1.5.8)
Wir gehen hier jeweils von einer passenden Menge von Zahlen aus.

zu (1) $\exists x\, \forall y\, (x \cdot y = 0) \Rightarrow \forall y\, \exists x(x \cdot y = 0)$
Die Rückrichtung gilt nicht!
$y \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : \forall y\, \exists x\, (x \cdot y = 1) \not\Rightarrow \exists x\, \forall y\, (x \cdot y = 1)$

zu (2) $\forall x\, \forall y\, (x > y > 0 \Rightarrow x^2 > y^2) \Leftrightarrow \forall y\, \forall x\, (x > y > 0 \Rightarrow x^2 > y^2)$

zu (4) und (5) Die Zahlenfolge a_n heißt konvergent mit dem Grenzwert g
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ni \forall n \geq n_0\ :\ |a_n - g| < \varepsilon$

Beispiel: $a_n = 1 + \frac{1}{n}, g = 1, \varepsilon = 0,5$

$|a_n - g| = |1 + \frac{1}{n} - 1| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} \overset{!}{<} \varepsilon$
$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$
Mit $\varepsilon = 0,5 = \frac{1}{2}$ ist die Lösung $n > 2$. Also gilt die Ungleichung ab $n_0 = 3$.

Verneinung (a_n ist nicht konvergent, also divergent)
$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\, \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \ni \exists n \geq n_0\ :\ |a_n - g| \geq \varepsilon$

Beispiel: $a_n = (-1)^n, g = 1, \varepsilon = 0,5$

Zu zeigen ist, dass es zu $\varepsilon = 0,5$ und für jedes natürliche n_0 mindestens ein $n \geq n_0$ gibt mit $|a_n - g| \geq 0.5$

wähle $n = 2n_0 + 1$ (n ungerade)
$|a_n - 1| = |(-1)^{2n_0+1} - 1| = |-1-1| = 2 > 0,5 = \varepsilon$

Also ist für jede ungerade natürliche Zahl $(n = 2n_0 + 1)$ der Abstand zum Grenzwert g größer als ε und somit die Zahlenfolge $a_n = (-1)^n$ divergent.

zu (8) $\alpha(x)$: x ist Primzahl > 2, $\beta(x)$: x ist gerade
$\exists x\ (\alpha \wedge \beta)$ (f)
$\exists x\ (\alpha) \wedge \exists x\ (\beta) \not\Rightarrow \exists x\ (\alpha \wedge \beta)$ (w)

zu (10) $\exists x\ ((1 > 0) \wedge x^2 = 2) \Leftrightarrow (1 > 0) \wedge \exists x\ (x^2 = 2)$

Beispiel 1.5.11
Sei G ein zweistelliges Prädikat, dann gilt: $\neg(\exists x \forall y : G(x, y)) \Leftrightarrow \forall x \exists y : \neg G(x, y)$

Veranschaulichung durch ein wortsprachliches Beispiel:

$G(x, y)$ sei: „Es gibt einen Landweg zwischen x und y.“

Es gibt keinen Ort auf der Erde, der von allen anderen Orten auf dem Landweg zu erreichen ist.
$\Leftrightarrow$ Zu jedem Ort auf der Erde gibt es einen Ort, der nicht auf dem Landweg zu erreichen ist.

Sie sollten jetzt in der Lage sein,
- Ausdrücke mit Quantoren zu verstehen,
- Quantoren zu verwenden,
- prädikatenlogische Ausdrücke zu negieren.

1.5.1. Aufgaben

Aufgabe 1

Für $x, y, z \in \mathbb{Z}$, sei folgender prädikatenlogischer Ausdruck gegeben:
$\exists\, x > 0\, \forall\, y < 0\, \exists\, z < 0\ :\ x \cdot y \leq z$

a) Erläutern Sie die Bedeutung des Ausdrucks und bestimmen Sie ein z?
(Hinweis: Setzen Sie zunächst Zahlen für x und y ein.)

b) Wie lautet die Verneinung des Ausdrucks?

Aufgabe 2

Formulieren Sie prädikatenlogisch folgende Aussagen:

a) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon$ gilt.

b) Es trifft nicht zu, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle n_0 ein $n \geq n_0$ existiert mit $|a_n - a| \geq \varepsilon$.

c) Zeigen Sie formal, dass die beiden Aussagen logisch äquivalent sind.

Aufgabe 3

Folgende Eigenschaften/Prädikate sind gegeben:
$G := \mathbb{N},\ P(x, y) := (x \leq y),\ Q(x, y) := (x = y)$

Formulieren Sie prädikatenlogisch die folgenden Aussagen:

a) Für alle x gilt $x \leq x$.

b) Für alle x, y gilt folgendes:
Wenn $x \leq y$ und $y \leq z$, dann ist auch $x \leq z$.

c) Für alle x, y gilt folgendes:
Wenn $x \leq y$ und $y \leq x$, dann gilt $x = y$

d) Es gibt keine größte natürliche Zahl.

2. Mengen

Die Mengenlehre wird hier nur kurz eingeführt. Sie ist jedoch von großer Wichtigkeit in der modernen Mathematik.

2.1. Mengen und ihre Verknüpfungen

Definition 2.1.1 (Menge (nach Cantor[1]))
Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten m_i unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Elemente von M werden m_i genannt.

Schreibweisen

- aufzählend: $M = \{a; b; c; \ldots\}$
  unterscheidbare Objekte, Reihenfolge spielt keine Rolle
- durch Prädikat: $M = \{x \mid E(x)\}$
- speziell: leere Menge $\emptyset, \{\}$
- Elementbeziehung: $a \in M$

Beispiel 2.1.2
$M_1 = \{\text{Maria}; \text{Josef}; \text{Ingrid}; \text{Ulla}\}$
$M_2 = \{3; 5; 7; 11\}$
$M_3 = \{\triangle, \square, \bigcirc\}$
$M_4 = \{n \mid 2 < n \leq 11, n \in \mathbb{N}\} = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}, \quad 6 \in M_4, \quad 1 \notin M_4$

Die anschauliche Darstellung von Mengen in der Ebene erfolgt zum Beispiel durch sogenannte **Venn-Diagramme**. Dabei wird eine Menge jeweils durch eine Kreisfläche in der Ebene dargestellt.

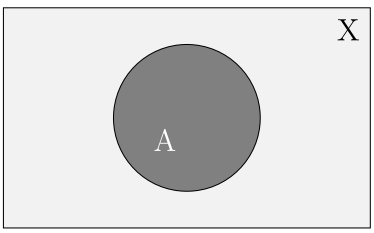


Abbildung 2.1.: Venn-Diagramm der Menge A

[1] Georg Cantor (1845-1914), Begründer der naiven Mengenlehre

Definition 2.1.3 (Teilmenge)
A und B seien Mengen.
Teilmenge
$A \subseteq B :\Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$
*A ist eine **Teilmenge** von B, A ist in B enthalten*
*B ist die **Obermenge** von A*

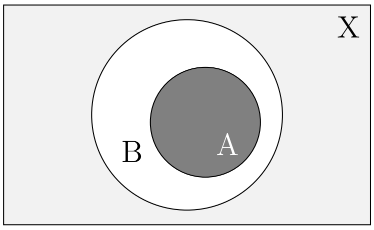


Abbildung 2.2.: $A \subseteq B$

Bemerkung 2.1.4
Die leere Menge $\emptyset$ ist Teilmenge jeder Menge.
Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst.

Beispiel 2.1.5 (Teilmenge)
Gegeben seien:
$A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^6 + 2x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 4x^2 + 8x = 0\}$
Durch Einsetzen der Elemente von A in die Gleichung von B lässt sich leicht nachweisen, dass jedes Element der Menge A auch zur Menge B gehört.

$$\left.\begin{aligned} x=-2: &\quad 64-64-80+80+16-16 &= 0\\ x=-1: &\quad 1-2-5+10+4-8 &= 0\\ x=0: &\quad 0 &= 0\\ x=1: &\quad 1+2-5-10+4+8 &= 0\\ x=2: &\quad 64+64-80-80+16+16 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B$$

aber:
$A' = \{-2; -1; 0; 1; 2; 5\} = A \cup \{5\}$

$$x = 5: \quad 15\,625 + 6\,250 - 3\,125 - 1\,250 + 100 + 40 \quad = 17640 \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \quad A' \nsubseteq B$$

Beispiel 2.1.6
Sei $M = \{1\}$, dann gilt: $\quad 1 \in \{1\}, \quad \{1\} \subseteq \{1\}, \quad \{1\} \in \{\{1\}\}$

Definition 2.1.7 (Gleichheit von Mengen & echte Teilmengen)
Gleichheit von Mengen
$A = B :\Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
*Man sagt: A und B sind **gleich***
und es gilt $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$
echte Teilmenge
$A \subset B :\Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$
*man sagt A ist eine **echte Teilmenge** von B*
andere Schreibweisen: $\subsetneq, \subsetneqq$

Beispiel 2.1.8 (Fortsetzung von Beispiel 2.1.5)
In diesem Beispiel ist $A = B$, denn
$x^6 + 2x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 4x^2 + 8x = x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x+2)$
(-2 ist also doppelte Nullstelle)

Definition 2.1.9 (Potenzmenge)
Potenzmenge
Pot$(B) = \wp(B) := \{A \mid A \subseteq B\}$ *nennt man* ***Potenzmenge*** *von* B*. Sie enthält alle möglichen Teilmengen von* B*, ist also die Menge aller Teilmengen von B.*
Beispiel: $\underbrace{B = \{a; b\}}_{2 \textit{ Elemente}}, \ \wp(B) = \underbrace{\{\emptyset; B; \{a\}; \{b\}\}}_{2^2=4 \textit{ Elemente}}$

Beispiel 2.1.10
Seien $A = \{1; 2; 3\}$ und $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ Mengen, dann gilt:
$A \subseteq B$, sogar $A \subsetneq B$ und $A \neq B$ und es ist
$\wp(A) = \{\emptyset; A; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}\}$ die Potenzmenge von A.

Definition 2.1.11 (Mengenverknüpfungen, Mengenoperationen)
A, B *seien Teilmengen einer Grundmenge* X

a) ***Vereinigung*** *von* A *und* B*:* $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
Man sagt dann auch: „A vereinigt B“.

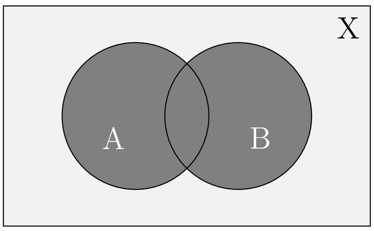


Abbildung 2.3.: $A \cup B$

b) ***Durchschnitt*** *von* A *und* B*:* $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
Man sagt dann auch: „A geschnitten B“.

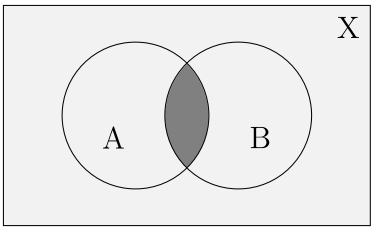


Abbildung 2.4.: $A \cap B$

*c) **Differenz** von A und B: $A\backslash B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap \overline{B}$*
Man sagt dann auch: „A ohne B“.

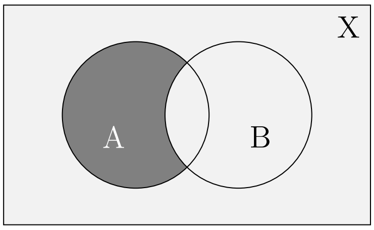


Abbildung 2.5.: $A\backslash B$

*d) **Komplement** von A in X: $\complement_X A = \overline{A} := X\backslash A \quad$ wobei $A \subseteq X$*
Wenn die Grundmenge klar ist, sagt man auch: „A Komplement“. Im Venn-Diagramm ist das die graue „Restfläche“.

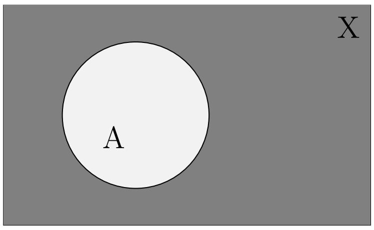


Abbildung 2.6.: $\complement_X A$

*e) **symmetrische Differenz** von A und B: $A \triangle B := (A \cup B)\backslash(A \cap B) = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$*
Man sagt dann auch: „A vereinigt B ohne A geschnitten B“.

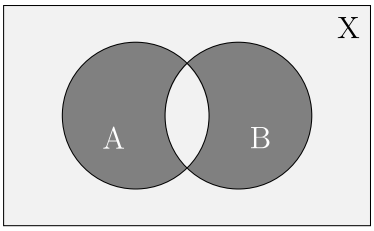


Abbildung 2.7.: $A \triangle B$

*f) **Kartesisches Produkt** von A und B: $A \times B := \{\overbrace{(a,b)}^{Tupel} | a \in A \wedge b \in B\}$*
Man sagt dann auch: „A kreuz B“.

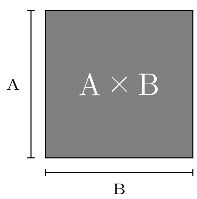


Abbildung 2.8.: $A \times B$

Statt „kartesisch“ ist auch „cartesisch“ gebräuchlich. (R.Descartes)
Achtung: Beim kartesischen Produkt ist die Reihenfolge wichtig: $A \times B \neq B \times A$
Das allgemeine kartesische Produkt kann rekursiv definiert werden.

$$\bigtimes_{i=1}^{n+1} A_i = \left(\bigtimes_{i=1}^{n} A_i \right) \times A_{n+1} \quad \text{mit } \bigtimes_{i=1}^{1} A_i = A_1$$

Wenn $A_i = M$ für alle i: $\quad M^n := \underbrace{M \times M \times \cdots \times M}_{\text{n-mal}} = \bigtimes_{i=1}^{n} M \quad \text{mit } M^1 = M$

Beispiel 2.1.12 (Kartesisches Produkt)

- 4-facher Münzwurf
  $M = \{Kopf, Zahl\}$ Modell: $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_i \in M\} = M^4$
  z.B. ist $(Zahl, Kopf, Kopf, Kopf) \in M^4$
- Lotto „6 aus 49“
  $M = \{1 \ldots 49\}$ Modell: $\{(x_1, \ldots, x_6) \mid x_i \in M \wedge x_1 < x_2 < \ldots < x_6\} \subseteq M^6$
  z.B. ist $(4, 7, 11, 15, 33, 43) \in M^6$

Beispiel 2.1.13
Gegeben seien die Mengen:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$B = \{a, b, c, g, 1, 2, 3, 8\}$$
$$X = \{1, 2, \ldots, 15, a, b, c, \ldots, z\}$$

Dann gilt:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, a, b, c, g\}$$
$$A \cap B = \{1, 2, 3, 8\}$$
$$A \backslash B = \{4, 5, 6, 7, 9, 10\}$$
$$\complement_X A = \{11, 12, 13, 14, 15, a, b, c, \ldots, z\}$$
$$A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B) = \{4, 5, 6, 7, 9, 10, a, b, c, g\}$$
$$\begin{aligned} A \times B = \{&(1, a), (1, b), (1, c), \ldots, (1, 8), \\ &(2, a), (2, b), (2, c), \ldots, (2, 8), \\ &\vdots \\ &(10, a), (10, b), (10, c), \ldots, (10, 8)\} \end{aligned}$$

Definition 2.1.14 (disjunkt (unvereinbar, fremd))
Zwei Mengen A, B heißen ***disjunkt (unvereinbar, fremd)*** $:\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

Bemerkung 2.1.15 (Einsparung von Klammern)
Von den Verknüpfungszeichen $\complement, \backslash, \cap, \cup$ bindet jedes stärker als alle folgenden.

Bemerkung 2.1.16
Aufgrund der Definition entsprechen sich die Verknüpfungen von Mengen und Aussagen:

$$\cup \equiv \vee, \cap \equiv \wedge, \complement \equiv \neg$$

Die „Rechenregeln“ der Logik gelten daher entsprechend für die Mengenlehre, und man spricht entsprechend der Algebra der Aussagenlogik von einer Mengenalgebra. Beide Algebren haben dieselbe Struktur, d.h. auch die Mengenalgebra ist eine Boolesche Algebra.

Satz 2.1.17 (Gesetze der Mengenalgebra)
Sei X Grundmenge und $A, B, C \subseteq X$.

(1)	$\emptyset \subseteq A$	
(2)	$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow X \backslash B \subseteq X \backslash A \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$	
(3)	$A \cup B = B \cup A$	Kommutativgesetz
(4)	$A \cap B = B \cap A$	Kommutativgesetz
(5)	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	Assoziativgesetz
(6)	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Assoziativgesetz
(7)	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivgesetz
(8)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivgesetz
(9)	$A \cup A = A \cap A = A$	Idempotenz
(10)	$A \backslash B = A \cap (X \backslash B) = A \cap \overline{B}$	
(11)	$B = \overline{A} \Leftrightarrow ((A \cup B = X) \wedge (A \cap B = \emptyset))$	disjunkte Zerlegung von X
(12)	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Regel von de Morgan
(13)	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Regel von de Morgan
(14)	$\overline{\overline{A}} = A$	Doppelte Verneinung

Beweis. zu (13) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
1. Möglichkeit: zurückführen auf die **Aussagenlogik**
(zu zeigen: $x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$)
Beweis:

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in A \cup B) \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B) \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \\ &\Leftrightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

q.e.d.

2. Möglichkeit: **mengentheoretischer Ansatz**
Überlegungen zur Beweisführung:
Das Komplement von $A \cup B$ ist $\overline{A \cup B}$ und Gesetz (11) zur diskjunkten Zerlegung besagt:
$B = \overline{A} \Leftrightarrow ((A \cup B = X) \wedge (A \cap B = \emptyset))$
Also definiere $C := A \cup B$ und $D := \overline{A} \cap \overline{B}$
und zeige mit Gesetz (11) die disjunkte Zerlegung zu $D = \overline{C} \Leftrightarrow \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

Beweis:

a) zu zeigen: $D \cup C = X \Leftrightarrow (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cup B) = X$

$$\begin{aligned}
(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup \underbrace{(A \cup B)}_{C} &\overset{(8)}{=} (\overline{A} \cup \underbrace{A \cup B}_{C}) \cap (\overline{B} \cup \underbrace{A \cup B}_{C}) \\
&= (X \cup B) \cap (X \cup A) \\
&= X \cap X \\
&= X
\end{aligned}$$

b) zu zeigen: $D \cap C = \emptyset \Leftrightarrow (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap (A \cup B) = \emptyset$

$$\begin{aligned}
(\underbrace{\overline{A} \cap \overline{B}}_{D}) \cap (A \cup B) &\overset{(7)}{=} (\underbrace{\overline{A} \cap \overline{B}}_{D} \cap A) \cup (\underbrace{\overline{A} \cap \overline{B}}_{D} \cap B) \\
&= (\overline{A} \cap A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap B) \\
&= (\emptyset \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \emptyset) \\
&= \emptyset \cup \emptyset \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

Definition 2.1.18
X sei eine Menge, $A_i \subseteq X$ für alle $i \in J$, J Indexmenge

a) $J = \{1, \dots, n\}$*:*
$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i := A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x | \exists i \in J (x \in A_i)\}$
$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i := A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x | \forall i \in J (x \in A_i)\}$
$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, \cdots, a_n)$ *mit* $a_i \in A_i\}$

b) *J bel. Menge:*

$\bigcup\limits_{i \in J} A_i := \{x | \exists i \in J (x \in A_i)\}$
$\bigcap\limits_{i \in J} A_i := \{x | \forall i \in J (x \in A_i)\}$

c) *J bel. Menge: $(A_i)_{i \in J}$ **paarweise disjunkt*** $:\Leftrightarrow \forall i_1, i_2 \in J, i_1 \neq i_2 : A_{i_1} \cap A_{i_2} = \emptyset$

d) *J bel. Menge:*
$(A_i)_{i \in J}$ (disjunkte) Zerlegung von X $:\Leftrightarrow$ *$(A_i)_{i \in J}$ paarweise disjunkt und* $\bigcup\limits_{i \in J} A_i = X$

Beispiel 2.1.19 (Disjunkte Zerlegung)
Gegeben sei:

$X = \{1, 2, 3, 4\}$

eine mögliche disjunkte Zerlegung:

$A_1 = \{1\} \qquad A_2 = \{2, 4\} \qquad A_3 = \{3\}$

denn es gilt:

$\{1\} \cap \{2, 4\} = \emptyset$
$\{1\} \cap \{3\} = \emptyset$
$\{2, 4\} \cap \{3\} = \emptyset$

und

$\{1\} \cup \{2, 4\} \cup \{3\} = X$

Satz 2.1.20
$A_i, B_j \subseteq X$ für $i \in I, j \in J$ dann gilt:

a) Regeln von De Morgan:
$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \quad \text{und} \quad \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$$

b) $\bigcap_{i \in I} A_i \cup \bigcap_{j \in J} B_j = \bigcap_{i,j} (A_i \cup B_j) \quad$ mit $\bigcap_{i,j} = \bigcap_{(i,j) \in IxJ}$

c) $\bigcup_{i \in I} A_i \cap \bigcup_{j \in J} B_j = \bigcup_{i,j} (A_i \cap B_j) \quad$ mit $\bigcup_{i,j} = \bigcup_{(i,j) \in IxJ}$

Dabei bedeutet:
$$\begin{aligned} I &= \{1, 2, 3, \ldots, n\} \quad J = \{1, 2, 3, \ldots, m\} \\ I \times J &= \{(i, j) | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, i, j \in \mathbb{N}\} \\ &= \{(1, 1), (1, 2), \ldots (1, m), \\ &\quad (2, 1), (2, 2), \ldots (2, m) \\ &\quad \ldots \\ &\quad \ldots \\ &\quad (n, 1), (n, 2), \ldots (n, m)\} \end{aligned}$$

Sie sollten jetzt in der Lage sein,
- mit Mengen und Verknüpfungen umzugehen,
- Teilmengen zu untersuchen,
- Mengenbeziehungen mit Venn-Diagramme darzustellen.
Sie sollten den Zusammenhang zur Logik erkennen.

2.1.1. Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sind die Mengen $M = \{2, 3, 5, 7\}$ und $N = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
Bestimmen Sie folgende Teilmengen:

a) die Vereinigung $M \cup N$

b) den Durchschnitt $M \cap N$

c) die Differenz $M \backslash N$

d) die symmetrische Differenz $(M \backslash N) \cup (N \backslash M)$

e) die Potenzmenge $P(M)$ der Menge M

f) das kartesische Produkt $M \times N$

Aufgabe 2

Beweisen Sie unter Verwendung der Rechenregeln der Mengenalgebra oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel die folgenden Beziehungen:

a) $\overline{A} \backslash \overline{B} = B \backslash A$

b) $(A \subseteq B) \Leftrightarrow [A \cup (B \backslash A) = B]$

c) $[A \cup (B \backslash C)] = [(A \cup B) \backslash (A \cup C)]$ (Hinweis: Gegenbeispiel)

d) $A \subseteq [(A \cap \overline{B}) \cup B]$

e) $[A \cap (\overline{A \cap C})] = \emptyset$ (Hinweis: Gegenbeispiel)

f) Man bestimme die Menge Y aus $(\overline{Y \cup A}) \cup (\overline{Y \cup \overline{A}}) = \overline{B}$
Die Grundmenge sei X.

2.2. Zahlenmengen

In diesem Kapitel werden die gängigen Zahlenmengen $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$ eingeführt, die man schon von der Schule kennt.

2.2.1. Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$, ganze Zahlen $\mathbb{Z}$, rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

Der Wunsch des Menschen, Dinge zu zählen, führt auf die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen:
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
In diesem Skriptum wird die Zahl 0 nicht zu den natürlichen Zahlen gezählt. Für $\mathbb{N} \cup \{0\}$ schreiben wir $\mathbb{N}_0$.

Axiomatische Einführung der natürlichen Zahlen durch die **Peano-Axiome**.

Definition 2.2.1 (Natürliche Zahlen)

Axiom 1: $1 \in \mathbb{N}$

Axiom 2: $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x^+ \in \mathbb{N}$, $\quad$ x^+ *heißt **Nachfolger** von* x

Axiom 3: $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x^+ \neq 1$

Axiom 4: $x^+ = y^+ \Rightarrow x = y$

Axiom 5: $(1 \in M \wedge (x \in M \Rightarrow x^+ \in M)) \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq M$

Bemerkung 2.2.2 (Alternative Formulierung zu Axiom 5)
Axiom 5 kann auch folgendermaßen formuliert werden: Sei $A(n)$ eine beliebige Eigenschaft von natürlichen Zahlen. Gilt $A(1)$ und für alle $x \in \mathbb{N} : A(x) \Rightarrow A(x^+)$, so gilt $A(x)$ für alle natürlichen Zahlen. Axiom 5 ist somit die Grundlage des Induktionsbeweises.

Weitere Zahlenmengen, die sich aus $\mathbb{N}$ entwickeln lassen:

- **Die ganzen Zahlen**
  Will man die Gleichung $x + 2 = 0$ lösen, muss man die Menge $\mathbb{N}$ erweitern zu der Menge der ganzen Zahlen. $\mathbb{Z} = \{z | z \in \mathbb{N} \vee -z \in \mathbb{N} \vee z = 0\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

- **Die rationalen Zahlen**
  Der Wunsch, auch die Gleichung $2 \cdot x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ lösen zu können, führt zu den rationalen Zahlen. $\mathbb{Q} = \{q | q = \frac{z_1}{z_2}, z_1, z_2 \in \mathbb{Z}, z_2 \neq 0\}$

- **Die irrationalen Zahlen**
  Die Gleichung $x^2 = 2 \Leftrightarrow \pm\sqrt{2}$ kann in den bisherigen Mengen nicht gelöst werden. Dies führt auf die **nicht rationalen** bzw. **irrationalen Zahlen**.

- **Die reellen Zahlen**
  Die rationalen und irrationalen Zahlen ergeben zusammen die reellen Zahlen $\mathbb{R}$
  (siehe Kapitel 8.1 auf Seite 129).

Bemerkung 2.2.3
Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

2.3. Die Mächtigkeit endlicher Mengen[2]

Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge wird auch mit der Mächtigkeit einer endlichen Menge bezeichnet.

Man verwendet folgende Schreibweise:

$$M = \text{endliche Menge}^{3}$$
$$|M| = \text{Mächtigkeit von M (Anzahl der Elemente)}$$

Die Mächtigkeit wird auch Kardinalzahl genannt (card(M)).

Beispiel: $M = \{a; b; c\} \quad |M| = 3$

Bemerkung 2.3.1 (einfache Rechenregeln)
Seien A,B endliche Mengen mit $|A| = n, |B| = m$ und X sei die endliche Grundmenge, dann gilt:

a) $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}), \quad |A| = |A \cap B| + |A \cap \overline{B}|$

b) $|\overline{A}| = |X \backslash A| = |X| - |A|$
$A \backslash B = A \cap \overline{B}, \quad |A \backslash B| = |A| - |A \cap B|$

c) $|A \times B| = |A| \cdot |B| = n \cdot m$

d) **Siebformel für 2 disjunkte Mengen**
$|A \cup B| = |A| + |B| = n + m$

e) **Siebformel für 2 nicht-disjunkte Mengen**, $|A \cap B| = k$
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = n + m - k$ (Schnittmenge nicht doppelt zählen)

f) **Siebformel für 3 nicht-disjunkte Mengen**

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

Zur Veranschaulichung:

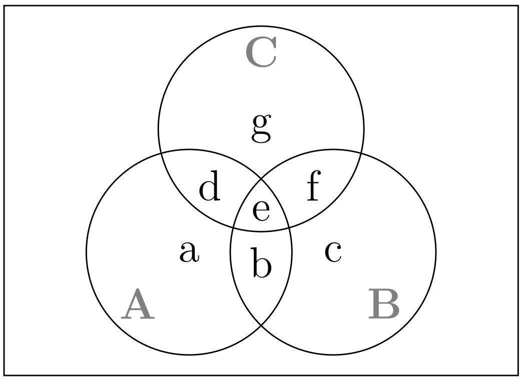


Abbildung 2.9.: Siebformel für $n = 3$

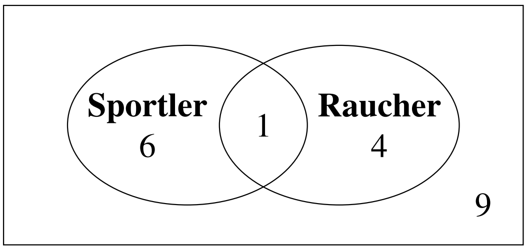
[2]Vertiefung dazu siehe Kapitel 9 auf Seite 159
[3]siehe Definition 8.1.11 auf Seite 132

$$\begin{array}{lll} |A| = a+b+d+e & |A\cap B| = b+e & |A\cap B\cap C| = e \\ |B| = b+c+e+f & |A\cap C| = d+e & \\ |C| = d+e+f+g & |B\cap C| = e+f & \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} |A\cup B\cup C| & = & |A|+|B|+|C| \\ & & -|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C| \\ & & +|A\cap B\cap C| \\ \Leftrightarrow\quad a+b+c+d+e+f+g & = & (a+b+d+e)+(b+c+e+f)+(d+e+f+g) \\ & & -(b+e)-(d+e)-(e+f) \\ & & +e \end{array}$$

Beispiel 2.3.2 (Rechenregeln)
In der Firmenkantine werden heute 3 verschiedene Vorspeisen, 2 Hauptgerichte sowie 4 Desserts angeboten.
Wieviele Menüs lassen sich daraus zusammenstellen?
$V = \{Vorspeisen\},\ |V| = 3 \quad H = \{Hauptgerichte\},\ |H| = 2$
$D = \{Desserts\}\,, |D| = 4$
$M = \{Menüs\} = V \times H \times D$
$|M| = |V| \cdot |H| \cdot |D| = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$
Es lassen sich 24 Menüs zusammenstellen.

Beispiel 2.3.3 (Venndiagramm)
Von 20 Studenten treiben 9 weder Sport noch rauchen sie. Es gibt 7 Sportler, von denen einer auch raucht, 4 Studenten rauchen nur (und treiben keinen Sport).
Wieviel Raucher gibt es insgesamt?
X : Menge aller Studenten, $|X| = 20$ (endliche Grundmenge)
S : Menge aller Sportler, $|S| = 7$
R : Menge aller Raucher, $|R| = ?$
$\overline{R \cup S}$: Menge der Studenten, die weder Sport treiben noch rauchen, $|\overline{R \cup S}| = 9$
$S \cap R$: Menge der rauchenden Sportler, $|S \cap R| = 1$
$R \backslash S$: Menge der Studenten, die nur rauchen (und keinen Sport treiben), $|R \backslash S| = 4$



Von den 20 Studenten rauchen insgesam $4 + 1 = 5$.

Bemerkung 2.3.4
Der Begriff endliche Menge wird im Kapitel 9 auf Seite 159 genauer ausgeführt.

Sie sollten jetzt in der Lage sein,
- erste einfache Mächtigkeitsaufgaben zu lösen,
- entsprechende Venn-Diagramme zu erstellen und die passenden Werte einzutragen.

2.3.1. Aufgaben

Aufgabe 1

In der folgenden Aufgabe wird beim Geschlecht nur zwischen weiblich und männlich unterschieden. Verheiratet sein bedeutet hier im klassischen Sinne die Ehe zwischen Frau und Mann. Diese Festlegungen dienen der Vereinfachung der Problematik und des Lösungsweges.

Ein Kegelclub bestehe aus 20 Personen (Frauen und Männer). Von den 13 Frauen seien 8 mit einem Mann verheiratet. Welche der folgenden Informationen sind hinreichend, um die Anzahl der mit einer Frau verheirateten Männer zu bestimmen? Begründen Sie ihre Rechnungen mit der Siebformel. Ein Venndiagramm verdeutlicht die Problematik.

a) 15 Personen sind verheiratet oder männlich.

b) 8 Personen sind unverheiratet.

c) 16 Personen sind weiblich oder unverheiratet.

Hinweis: Die Informationen aus a) b) und c) sind voneinander unabhängig. D.h. die Ergebnisse der schon gelösten Teilaufgaben werden nicht weiterverwendet.

Aufgabe 2

Eine (nicht repräsentative) Umfrage ergab:

90% der Haushalte besitzen ein Fernsehgerät,
70% der Haushalte besitzen eine Waschmaschine,
60% der Haushalte besitzen ein Auto,
65% der Haushalte besitzen ein Fernsehgerät und eine Waschmaschine,
60% der Haushalte besitzen ein Fernsehgerät und ein Auto,
45% der Haushalte besitzen eine Waschmaschine und ein Auto,
5% der Haushalte besitzen keinen dieser drei Gegenstände.

a) Wieviel Prozent der Haushalte besitzen alle drei Gegenstände?

b) Wieviel Prozent der Haushalte besitzen ein Auto, aber kein Fernsehgerät und keine Waschmaschine?

Hinweis: Nehmen Sie an, dass sich die Umfrage auf 100 Haushalte bezieht.

Aufgabe 3

In der Statistik werden Personen oft nach dichotomen Merkmalen klassifiziert, also danach, ob eine bestimmte Eigenschaft vorliegt oder nicht. Beispiele hierfür sind Vorliegen eines Gendefektes, Vorliegen einer Schwangerschaft usw.
Angenommen man habe 3 solcher Merkmale und es sei bekannt, dass

a) bei 30 % der Menschen genau eines der Merkmale vorliegt (und die anderen nicht). (Über die Gewichtung der einzelnen Merkmale ist nichts gesagt. Sie sind demnach alle gleichgewichtet.)

b) für jede Kombination von exakt zwei Merkmalen die Vorkommenshäufigkeit genau 20 % beträgt.

c) 5% aller Menschen alle drei Merkmale besitzen.

In wieviel Prozent liegt keines der drei Merkmale vor?
Begründen Sie das mit einem Venndiagramm und den Rechenregeln für die Mächtigkeiten von Mengen.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass sich die Statistik auf 100 Personen bezieht.

3. Definition und Berechnung endlicher Summen und Produkte

In diesem Kapitel werden einige grundlegende Techniken im Bereich der diskreten Mathematik erläutert. Auf diese wird dann im Folgenden zurückgegriffen.

3.1. Endliche Summen und Produkte

3.1.1. Definition und Rechenregeln

Summen- und Produktzeichen ermöglichen eine verkürzte Schreibweise für Additionen bzw. Multiplikationen. Der sichere Umgang mit ihnen ist zwingend erforderlich[1].

Beispiele:

$S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \sum\limits_{k=1}^{5} k$ Gaußche Summe (Sonderfall der arithmetischen Reihe)

$S_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} = \sum\limits_{l=2}^{5} \sqrt{l}$

$S_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \sum\limits_{i=3}^{6} \frac{1}{i}$

$P_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5! = \prod\limits_{k=1}^{5} k$

$P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \prod\limits_{k=2}^{6} \frac{1}{k}$

Die Techniken und Regeln im folgenden Satz muss man üben, um sicher mit Summen und Produkten rechnen zu können.

Satz 3.1.1 (Indextransformation, Rechenregeln)
Seien $\alpha, \beta, a_i, b_i \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$; $i, j, k, n \in \mathbb{Z}$

a) **Indextransformation** für $n \geq k$ gilt:

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{i=k+j}^{n+j} a_{i-j}$$
$$\prod_{i=k}^{n} a_i = \prod_{i=k+j}^{n+j} a_{i-j}$$

Beispiel:

$S_1 = \sum\limits_{i=3}^{5} i = 3 + 4 + 5 = \sum\limits_{i=3+2}^{5+2} (i-2) = (5-2) + (6-2) + (7-2)$

[1] Für den Begriff „endliche Summe“ wird oft auch der Begriff „endliche Reihe“ verwendet.

$$P_1 = \prod_{i=3}^{5} i = 3 \cdot 4 \cdot 5 = \prod_{i=3+2}^{5+2} (i-2) = (5-2) \cdot (6-2) \cdot (7-2)$$

b) **Rechenregeln für endliche Summen und Produkte**

(1) für $n \geq j$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j + \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$\prod_{j=1}^{n} (a_j \cdot b_j) = \left(\prod_{j=1}^{n} a_j \right) \cdot \left(\prod_{j=1}^{n} b_j \right)$$

(2) $\sum_{j=1}^{n} (\alpha \cdot a_j) = \alpha \cdot \sum_{j=1}^{n} a_j$

$$\prod_{j=1}^{n} (\alpha \cdot a_j) = \alpha^n \cdot \prod_{j=1}^{n} a_j$$

(3) $\prod_{j=1}^{n} a_j^k = \left(\prod_{j=1}^{n} a_j \right)^k$, für $k < 0$ muss $a_j \neq 0 \ \forall j$

aber: $\sum_{j=1}^{n} a_j^k \neq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \right)^k$, z.B. für $n = 2 \rightarrow$ Binomische Formel

(4) für $1 \leq k \leq n$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{k} a_j + \sum_{j=k+1}^{n} a_j$$

$$\prod_{j=1}^{n} a_j = \left(\prod_{j=1}^{k} a_j \right) \cdot \left(\prod_{j=k+1}^{n} a_j \right)$$

Bemerkung 3.1.2
Summen bzw. Produkte, die einen größeren Startwert als Endwert haben, nennt man leere Summe bzw.Produkt.

In der Mathematik vereinbart man $\sum_{i=k}^{n} a_i = 0$ und $\prod_{i=k}^{n} a_i = 1$ mit $k > n$.

3.1.2. Teleskopsumme

Eine Teleskopsumme ist eine endliche Summe von Differenzen, bei der die Werte zweimal auftreten, nämlich einmal mit positivem und einmal mit negativem Vorzeichen. Daher heben sie sich auf.

Ein einfaches Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k - a_{k+1} = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + ... + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

Beispiel 3.1.3
Mit $= a_k = \frac{1}{k}$ ergibt sich bei der folgenden Teleskopsumme der Wert $\frac{3}{4}$.

$$\sum_{k=1}^{3} a_k - a_{k+1} = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = (\frac{1}{1} \underbrace{- \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}}_{=0} \underbrace{- \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}}_{=0} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Bemerkung 3.1.4 (Vorteilhafte Berechnung einer Teleskopsumme)
Häufig liegt der einfache Fall einer endlichen Summe von Differenzen vor, bei der die Nachbarsummanden voneinander subtrahiert 0 ergeben und sich somit gegenseitig aufheben. Die Bestimmung des Wertes der Summe ist daher deutlich einfacher als in ihrer ursprünglichen Form.
Nicht jede Summe lässt sich auf diese Art berechnen!

Das folgende Beispiel zeigt, dass diese Technik auch Vorteile bietet, wenn die sich aufhebenden Summanden nicht direkt hintereinander stehen.

Beispiel 3.1.5 (Eine nicht ganz so einfache Teleskopsumme)

$$S_1 = \sum_{k=2}^{4} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}) = (\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}}_{=0} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{21}{20}$$

und das gleiche Beispiel mit allgemeinen Summanden:

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} (a_{k-1} - a_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k - \sum_{k=2}^{n+1} a_k = a_0 + a_1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{n-1} a_k - \sum_{k=2}^{n-1} a_k}_{=0} - a_n - a_{n+1}$$

$$= a_0 + a_1 - a_n - a_{n+1}$$

Bemerkung 3.1.6 (Zusammenfassung)
Um den Wert einer speziellen Summe zu berechnen, kann manchmal die Technik der Teleskopsummen benutzt werden (siehe Beispiele oben).
Oft ist es jedoch nötig, zuvor den Summanden mit Hilfe einer sogenannten Partialbruchzerlegung (siehe Beispiel 3.1.3 auf der nächsten Seite) so umzuformen, dass sich Teleskopsummen ergeben.

Betrachten Sie als Beispiel dazu die Summe

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}$$

bei der man zuerst $\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ zerlegt und dann wie im ersten Beispiel oben vorgeht.

3.1.3. Partialbruchzerlegung für gebrochen rationale Funktionen mit reellen, einfachen Nennernullstellen

Die Technik der Partialbruchzerlegung ist in der Mathematik äusserst wichtig und muss von Ihnen beherrscht werden. Sie findet in vielen Teilgebieten der Mathematik Anwendung und wird Ihnen daher im Rahmen des Studiums noch häufig begegnen.

Ganz allgemein wird mit der Partialbruchzerlegung ein Ausdruck der Form $\frac{Zählerpolynom}{Nennerpolynom}$ in eine einfache Summe überführt. Die Summanden besitzen die Form $\frac{Zahl}{x - NullstelledesNennerpolynoms}$. Die Anzahl der entstandenen Summanden entspricht der Anzahl der Nullstellen[2] des ursprünglichen Nennerpolynoms.

Im weiteren Verlauf des Abschnitts betrachten wir ausschließlich den Fall, dass das Nennerpolynom genau n verschiedene reelle Nullstellen (reelle, einfache Nullstellen) besitzt[3]. In Anlehnung an die Informatik werden in diesem Skript die Nullstellen von 0 bis (n-1) durchnummeriert.

Voraussetzung 1: Quotient von Polynomen

Ausgangspunkt für die Durchführung einer Partialbruchzerlegung ist ein Quotient (Bruch) von Polynomen[4] in der Variablen $k \in \mathbb{N}$. Diese Funktionen heißen gebrochen rationale Funktion. Das Zählerpolynom nennen wir $g(k)$, das Nennerpolynom $p(k)$.

Beispiel 3.1.7

$$f(k) = \frac{g(k)}{p(k)} = \frac{2k+4}{2k^2-2}$$

Voraussetzung 2: Grad des Zählerpolynoms kleiner als Grad des Nennerpolynoms

Der Grad eines Polynoms ist gleich der größten vorhandenen Potenz der Polynomvariablen. Sei $p(k) = 5k^{27} + 9k^5 + 13$ ein Polynom in der Variablen k, dann ist der Grad von $p(k)$ gleich 27, weil das die höchste Potenz der Variablen k ist.
Der Grad des Zählerpolynoms $g(k)$ muss kleiner als der Grad des Nennerpolynoms $p(k)$ sein[5]. Falls das nicht so ist, führt man zuerst eine **Polynomdivision** durch (siehe Beispiel 5.3.7 auf

[2] x_i ist Nullstelle einer Funktion $f(x)$ genau dann, wenn (gdw) $f(x_i) = 0$ ist. Da es sich um Polynome mit der Variablen k handelt, muss hier $p(k_i) = 0$ gelten. Wie wir im Kapitel 5.3 auf Seite 99 sehen werden, gilt $p(k) := (k - k_i) \cdot q(k)$. Man nennt das auch Abspaltung eines Linearfaktors.

[3] Die Ansätze der PBZ für weitere Typen von Nullstellen werden der Vollständigkeit halber im Anhang C aufgeführt. Eine ausführliche Erläuterung erfolgt im Kurs Analysis 1.

[4] In der Analysis betrachtet man meist $g(x)$ und $p(x)$ für reelles x oder $g(z)$ und $p(z)$ für komplexes z.

[5] Man spricht dann auch von „echt gebrochen rationaler Funktion in k“.

Seite 101). Ist der Grad des Nennerpolynoms n, dann besitzt das Nennerpolynom $p(k)$ in diesem speziellen Fall genau n reelle Nullstellen.

Beispiel 3.1.8 (Fortsetzung Beispiel 3.1.7)
$g(k) = 2k + 4 \quad \Leftrightarrow$ der Grad ist gleich 1,
$p(k) = 2k^2 - 2 \quad \Leftrightarrow$ der Grad ist gleich 2 und das Polynom besitzt genau 2 Nullstellen.

Voraussetzung 3: Koeffizient vor höchster Potenz des Nennerpolynoms gleich 1

Die Faktoren, die vor den Potenzen der Variablen k^i stehen, heißen Koeffizienten a_i. Der Koeffizient, der vor der höchsten Potenz von k (also vor k^n) im Nennerpolynom steht, muss gleich 1 sein. Ist dies nicht der Fall, werden Nenner- und Zählerpolynom durch genau diesen Koeffizienten (a_n) geteilt.

Beispiel 3.1.9 (Fortsetzung Beispiel 3.1.7)

$$\frac{2k+4}{2k^2-2} = \frac{\frac{1}{2}(2k+4)}{\frac{1}{2}(2k^2-2)} = \frac{k+2}{k^2-1}$$

Prinzipielle Vorgehensweise bei der Partialbruchzerlegung mit dem Ansatz für n reelle, einfache Nullstellen des Nennerpolynoms

Die Partialbruchzerlegung wird in folgende **5 Arbeitsschritte** aufgeteilt:

(1) Berechnung der n Nullstellen $k_0, \ldots, k_{n-1}$ des Nennerpolynoms $p(k)$
durch z.B.: Raten und Abdividieren, p-q-Formel, quadratische Ergänzung, ...
im Beispiel 3.1.7: für $k^2 - 1$ sind das $k_0 = 1$ und $k_1 = -1$

(2) Faktorisierung des Nennerpolynoms $p(k)$ mit den einfachen, reellen Nullstellen $k_0, \ldots k_{n-1}$

$$p(k) = \prod_{i=0}^{n-1}(k - k_i)$$

im Beispiel 3.1.7: $k^2 - 1 = (k-1) \cdot (k - (-1)) = (k-1) \cdot (k+1)$

(3) Ansatz für die PBZ bei reellen, einfachen Nullstellen $k_0, \ldots, k_{n-1}$
Der Quotient $\frac{g(k)}{p(k)}$ wird durch eine Summe von n Brüchen dargestellt.
Für jede reelle, einfache Nullstelle k_i wird der Summand $\frac{A_i}{k-k_i}$ notiert, $i = 0, 1, ..., (n-1)$
also insgesamt n Brüche: $\frac{g(k)}{(k-k_0)\cdot \ldots \cdot(k-k_{n-1})} = \frac{A_0}{k-k_0} + \frac{A_1}{k-k_1} + \frac{A_2}{k-k_2} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{k-k_{n-1}}$
im Beispiel 3.1.7: $\frac{k+2}{(k-1)\cdot(k+1)} = \frac{A_0}{k-1} + \frac{A_1}{k+1}$

(4) Berechnung der unbekannten Faktoren $A_0, \ \ldots \ , A_{n-1}$
Zunächst müssen der Summationsterm und der erstellte Ansatz gleichgesetzt werden.
im Beispiel 3.1.7: $\frac{k+2}{(k-1)\cdot(k+1)} = \frac{A_0}{k-1} + \frac{A_1}{k+1}$

Dann wird die Gleichung mit dem Nenner des Bruchs der linken Seite multipliziert.
im Beispiel 3.1.7: $k + 2 \;=\; A_0 \cdot (k + 1) \;+\; A_1 \cdot (k - 1)$
Für 3 reelle, einfache Nullstellen k_0, k_1, k_2 sieht die Gleichung z.B. wie folgt aus:
$g(k) \;=\; A_0 \cdot (k - k_1)(k - k_2) + A_1 \cdot (k - k_0)(k - k_2) + A_2 \cdot (k - k_0)(k - k_1)$ Aus dieser Gleichung, die ja für jedes k gilt, werden nun die Lösungen für die Unbekannten $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ berechnet. Dafür gibt es 2 gleichwertige Techniken:

- mit Methoden der Linearen Algebra

  Zunächst multipliziert man das Ansatzpolynom (rechte Seite der Gleichung) aus und sortiert die Summanden nach Potenzen von k. Dann werden die Koeffizienten beider Polynome (linke Seite mit rechter Seite) miteinander verglichen (Koeffizientenvergleich, siehe Beispiel 5.3.7 auf Seite 101). So entsteht ein lineares $n \times n$ Gleichungssystem, aus dem sich die unbekannten Konstanten berechnen lassen. (Einsetzmethode, Gauss-Algorithmus, ...)
  im Beispiel ergeben sich folgende 2 Gleichungen: $1 = A_0 + A_1$ und $2 = A_0 - A_1$

- durch Einsetzen „geschickter", kleiner Werte für k und ebenfalls Koeffizientenvergleich (siehe Beispiel 5.3.7 auf Seite 101)
  n beliebige, verschiedene Werten werden für k in die Gleichung eingesetzt. Dadurch ergeben sich n Gleichungen.
  Wählt man für k die zuvor berechneten reellen Nullstellen k_i, dann liefern die Gleichungen jeweils direkt einen Wert für die Unbekannte A_i[6].
  Diese Technik macht das zuvorige Ausmultiplizieren der Summanden des Ansatzpolynoms überflüssig!
  im Beispiel 3.1.7:
  für $k = -1$: $1 = -2 \cdot A_1$
  für $k = 1$: $3 = 2 \cdot A_0$

- Eine Kombination beider Techniken ist ebenfalls erlaubt.

Im Beispiel 3.1.7 erhält man $A_0 = \frac{3}{2}$ und $A_1 = -\frac{1}{2}$.

(5) Einsetzen der in (4) berechneten Faktoren $A_0, A_1, \ \ldots \ , A_{n-1}$ in den Ansatz der PBZ.
im Beispiel 3.1.7 also: $\frac{k+2}{k^2-1} \;=\; \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{k-1} \;-\; \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+1}$

Einige Summen, die auf den ersten Blick keine Differenzen beinhalten, können mit der Partialbruchzerlegung in Teleskopsummen umgeformt werden. Dies zeigt das folgende Beispiel:

Beispiel 3.1.10 (Das Nennerpolynom besitzt 2 einfache Nullstellen)
Zu berechnen ist der Wert der endlichen Summe: $\sum_{k=2}^{n} \frac{4}{k^2-1}$ (also $\frac{4}{3} + \frac{4}{8} + \ldots + \frac{4}{n^2-1}$)

(1) Nullstellen des Nenners sind $k_0 = 1, k_1 = -1$

(2) Faktorisierung des Nennerpolynoms $k^2 - 1 = (k-1) \cdot (k+1)$

[6] Bei Mehrfachnullstellen sollte man, um einfache Gleichungen zu erhalten, kleine Zahlen wählen.

(3) Ansatz zur PBZ
$\frac{4}{k^2-1} = \frac{4}{(k-1)\cdot(k+1)} = \frac{A_0}{k-1} + \frac{A_1}{k+1} \;\Leftrightarrow\; 4 = A_0 \cdot (k+1) + A_1 \cdot (k-1)$

(4) Berechnung A_0, A_1 durch Einsetzen der Nullstellen $k = 1$ und $k = -1$
für $k = 1:\quad 4 = 2 \cdot A_0 \Leftrightarrow A_0 = 2$
für $k = -1:\quad 4 = -2 \cdot A_1 \Leftrightarrow A_1 = -2$

(5) Einsetzen der Faktoren in den Ansatz

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{4}{k^2-1} &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{2}{k-1} + \frac{-2}{k+1} \right) \\
&= 2 \cdot \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} \right) \\
&= 2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} \right) \\
&= 2 \cdot \left(\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} \right) - \left(\sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} \quad + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \right) \\
&= 2 \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \underbrace{\sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k}}_{=0} \quad - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 3 - \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}
\end{aligned}$$

Sie sollten jetzt in der Lage sein,
- Summen und Produkte aufzustellen und umzuformen,
- Teleskopsummen zu erkennen und zu verarbeiten,
- Partialbruchzerlegung bei reellen, einfachen Nullstellen des Nenners durchzuführen,
- einfache endliche Summen zu berechnen.

3.1.4. Aufgaben

Mit diesen Aufgaben sollen sie grundlegende Fertigkeiten für das Rechnen und Umformen von Summen und Produkten üben.

Aufgabe 1

Ergänzen Sie bitte folgende Ausdrücke:

a) $\sum_{i=1}^{n}(i+2) = \sum_{i=\square}^{\square} i$

b) $\sum_{k=2}^{n+1}(k+1) = \sum_{l=\square}^{\square} (l+1)$

c) $1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 = \sum_{i=2}^{n+1} \square$

d) $3 + 9 + 15 + \ldots + (3 + 6(n-1)) = \sum_{j=1}^{n} \square = \sum_{j=0}^{n-1} \square$

e) $\sum_{k=4}^{17}(k+2) \cdot x^k = \sum_{k=2}^{\square} \square$

f) $\prod_{k=1}^{n}(x-k)^{k+1} = \prod_{i=2}^{\square} \square$

Aufgabe 2

Zerlegen Sie den Summanden der folgenden Summe in seine Partialbrüche und stellen Sie die Summe durch drei einfachere Summen dar: $\sum_{k=4}^{n}\left(\frac{k+2}{k^3-3k^2-k+3}\right)$

Aufgabe 3

Man berechne: $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\ \forall n \geq 2.$

3.1.5. Wichtige endliche Summenformeln

Als MaTSE kennt man die folgenden endlichen Summen auswendig oder weiß, wie man sie herleitet.

Bemerkung 3.1.11 (Einige endliche Summen und ihre expliziten Formeln)

(1) Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen

$\sum\limits_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$

Beweis: Summation der Zahlen vorwärts und rückwärts (Gauß'sche Summenformel)

(2) Die Summe der ersten n geraden Zahlen

$\sum\limits_{j=1}^{n} 2j = n(n+1)$

Beweis: $\sum\limits_{j=1}^{n} 2j = 2 \cdot \sum\limits_{j=1}^{n} j = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n \cdot (n+1)$

(3) Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen

$\sum\limits_{j=1}^{n} (2j-1) = n^2$

Beweis: $\sum\limits_{j=1}^{n}(2j-1) = \sum\limits_{j=1}^{n}(2j) - \sum\limits_{j=1}^{n} 1 = n(n+1) - n = n^2 + n - n = n^2$

(4) Die Summe der ersten n Quadratzahlen

$\sum\limits_{j=0}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} j^3 &= \sum_{j=0}^{n} (j+1)^3 \\ &= \sum_{j=0}^{n} (j^3 + 3j^2 + 3j + 1) \\ &= \sum_{j=0}^{n} j^3 + 3 \cdot \sum_{j=0}^{n} j^2 + 3 \cdot \sum_{j=0}^{n} j + \sum_{j=0}^{n} 1 \\ &= \sum_{j=0}^{n} j^3 + 3 \cdot \sum_{j=0}^{n} j^2 + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \end{aligned}$$

also folgt: $3 \cdot \sum\limits_{j=0}^{n} j^2 = \sum\limits_{j=1}^{n+1} j^3 - \sum\limits_{j=0}^{n} j^3 - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - (n+1)$

und damit schließlich

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} j^2 &= \frac{(n+1)^3 - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - (n+1)}{3} \\ &= \frac{2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2}{6} \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Man kann diese Formel auch mit vollständiger Induktion (siehe Kapitel 4.3 auf Seite 63) beweisen.

Beispiel 3.1.12 (Die endliche geometrische Reihe)
Ein Beispiel für eine endliche Summe ist die endliche geometrische Reihe.

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \begin{cases} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{für } a \in \mathbb{R}, a \neq 1, n, k \in \mathbb{N}_0 \\ n+1 & \text{für } a = 1 \end{cases}$$

Beweis der Formel der endlichen geometrischen Reihe (direkter Beweis)

$$\begin{array}{lrcl}
 & S_n & = & \sum_{k=0}^{n} a^k \\
\Leftrightarrow & a \cdot S_n & = & a \cdot \sum_{k=0}^{n} a^k \\
\Leftrightarrow & S_n - a \cdot S_n & = & \sum_{k=0}^{n} a^k - a \cdot \sum_{k=0}^{n} a^k \\
\Leftrightarrow & S_n - a \cdot S_n & = & \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} \\
\Leftrightarrow & S_n - a \cdot S_n & = & \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=1}^{n+1} a^k \\
\Leftrightarrow & S_n - a \cdot S_n & = & \sum_{k=0}^{n} a^k - \left(\sum_{k=1}^{n} a^k \quad + a^{n+1} \right) \\
\Leftrightarrow & S_n \cdot (1-a) & = & a^0 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a^k - \sum_{k=1}^{n} a^k}_{=0} - a^{n+1} \\
\Leftrightarrow & S_n \cdot (1-a) & = & 1 - a^{n+1} \\
\Leftrightarrow & S_n & = & \frac{1-a^{n+1}}{1-a}
\end{array}$$

oder durch vollst. Induktion[7]

IA: Induktionsanfang
für $n = 0$ gilt: $\sum_{k=0}^{0} a^k = 1 = \frac{1-a}{1-a}$ (w)

IV: Induktionsvoraussetzung
Es gelte $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ für ein festes, aber beliebiges $n \geq 0$.

IB: Induktionsbehauptung
Dann gilt auch $\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}$.

IS: Induktionsbeweis, -schluss

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1} \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1}$$
$$= \frac{1-a^{n+1}+a^{n+1}(1-a)}{1-a}$$
$$= \frac{1-a^{n+1}+a^{n+1}-a^{n+2}}{1-a}$$
$$= \frac{1-a^{n+2}}{1-a}$$

Schlusssatz: Ich habe gezeigt, dass die Behauptung für $n = 0$ gilt und, falls sie für ein $n \geq 0$ gilt, dann gilt sie auch für $n + 1$. Daher gilt die Aussage für alle $n \geq 0$.

Beispiel 3.1.13 (Eine Anwendung der endlichen geometrischen Reihe: Kapitalberechnung)
Sie zahlen jeweils zum 1. Januar eines Jahres 10 € auf ein Konto ein, das mit 5% am Ende des Jahres verzinst wird.
Wann befinden sich 100 € oder mehr auf dem Konto?

Zunächst wird notiert, wieviel Kapital (G_n) sich im jeweiligen Jahr (n) am 1. Januar auf dem Konto befindet:

$$\begin{aligned}
G_0 &= 10\\
G_1 &= G_0 \cdot 1,05 + 10 = 10 \cdot 1,05 + 10\\
&= 10 \cdot (1,05^1 + 1,05^0)\\
G_2 &= G_1 \cdot 1,05 + 10 = 10 \cdot (1,05^1 + 1,05^0) \cdot 1,05 + 10\\
&= 10 \cdot (1,05^2 + 1,05^1 + 1,05^0)\\
G_3 &= G_2 \cdot 1,05 + 10 = 10 \cdot (1,05^2 + 1,05^1 + 1,05^0) \cdot 1,05 + 10\\
&= 10 \cdot (1,05^3 + 1,05^2 + 1,05^1 + 1,05^0)\\
&\vdots\\
G_n &= 10 \cdot \sum_{j=0}^{n} 1,05^j = 10 \cdot \tfrac{1-1,05^{n+1}}{1-1,05} = 10 \cdot \tfrac{1-1,05^{n+1}}{-0,05} = 200 \cdot 1.05^{n+1} - 200
\end{aligned}$$

Gesucht: minimales n mit $G_n \geq 100$

$$\begin{aligned}
200 \cdot 1,05^{n+1} - 200 &\geq 100\\
\Leftrightarrow \quad 1,05^{n+1} &\geq \tfrac{300}{200} = \tfrac{3}{2} = 1,5\\
\Leftrightarrow \quad \ln(1,05^{n+1}) &\geq \ln(1,5)\\
\Leftrightarrow \quad (n+1) \cdot \ln(1,05) &\geq \ln(1,5)\\
\Leftrightarrow \quad n+1 &\geq \tfrac{\ln(1,5)}{\ln(1,05)} \approx 8,3\\
\Leftrightarrow \quad n &\geq 7,3
\end{aligned}$$

Nach 8 Jahren sind mehr als 100 € auf dem Konto.

[7] siehe Kapitel 4.3 auf Seite 63

Beispiel 3.1.14 (Die unendliche geometrische Reihe)

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$ für $|a| < 1$

Dies folgt direkt aus der Formel der endlichen geometrischen Reihe durch Bildung des Grenzwertes für $n \longrightarrow \infty$:

$S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-a}$, da für $|a| < 1 : a^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Bemerkung 3.1.15 (Die Doppelsumme)
Summe der Werte in einem 2-dimensionalen Feld
(= Summe der Zeilensummen = Summe der Spaltensummen)

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}_{Zeilensummen} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}}_{Spaltensummen}$$

Die gleiche Summe ohne die Diagonalelemente:

$$\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \right)$$

Bemerkung 3.1.16 (Berechnung einer endlichen Summen über eine Schleife (Programm))

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$:

```
Summe = 0
FOR i = 1 TO n
   Summe = Summe +a[i]
```

Sie sollten jetzt in der Lage sein,
- sicher mit Summen zu rechnen.
Die gängigsten Summenformeln müssen Sie auswendig kennen.

3.1.6. Aufgaben

Aufgabe 1

Leiten Sie eine explizite Formel für $\sum\limits_{j=0}^{n} j^3$ her.
(Hinweis: siehe Punkt d auf Seite 47.)

Aufgabe 2

Berechnen Sie mit der Formel der endlichen geometrischen Reihe:

$$\sum_{k=l}^{n} a \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^{k+2} \qquad l, n \in \mathbb{N}, n \geq l.$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie mit Hilfe der Formel der unendlichen geometrischen Reihe die zu den folgenden Werten gehörenden Brüche.

a) $0.\overline{09} = 0.090909\cdots$

b) $5.0\overline{9} = 5.0999999\cdots$

c) $0.8\overline{7} = 0.87777\ldots$

d) $0.48\overline{36} = 0.48363636\cdots$

3.2. Rekursivität in Definitionen

Das Prinzip der Rekursion lässt sich folgendermaßen beschreiben:

Ein Ausdruck bzw. eine Formel, die von $(n+1)$ abhängt, wird auf den Ausdruck bzw. die Formel für n zurückgeführt. Zusätzlich wird der Ausdruck für einen Anfangswert definiert.

Beispiel 3.2.1 (Die Fibonacci-Zahlen - Eine rekursiv definierte Zahlenfolge)
rekursive Definition: $\quad F_0 = 0, F_1 = 1 \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad n \in \mathbb{N}_0$

explizite Definition: $\quad F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$

Auch hierbei erfolgt der Beweis, dass die explizite Definition dieselbe Zahlenfolge liefert wie die (gegebene) rekursive Definition mittels vollständiger Induktion (Kapitel 4.3 auf Seite 63). Die Herleitung der expliziten Formel kann auf verschiedene Arten erfolgen, z.B. mit Erzeugenden Funktionen oder über Eigenwerte[8].

weitere Beispiele:

(1) Beginnen wir mit der rekursiven Definition einer Summe
$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + a_{n+1} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_{n+1}$ mit $\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$

(2) oder etwas allgemeiner
$\sum_{i=k}^{n+1} a_i = (a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n) + a_{n+1} = \left(\sum_{i=k}^{n} a_i\right) + a_{n+1}$ für $n \geq k$ mit $\sum_{i=k}^{k} a_i = a_k$

(3) $\prod_{j=1}^{n+1} a_j = (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) \cdot a_{n+1} = \left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right) \cdot a_{n+1}$ mit $\prod_{j=1}^{1} a_j = a_1$

(4) $a^{n+1} = \prod_{j=1}^{n+1} a = (a \cdot \ldots \cdot a) \cdot a = a^n \cdot a, \quad a^0 := 1$
$a =$ Basis, $a \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$ $\quad n =$ Exponent, $n \in \mathbb{N}_0$ für $a \neq 0$: $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

(5) **Fakultät**
$(n+1)! = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n) \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1) = \prod_{i=1}^{n+1} i$
Festlegung: $0! := 1$

(6) **Binomialkoeffizienten** $\quad (n, k \in \mathbb{N}_0; n \geq k)$
rekursive Definition: $\binom{n+1}{k+1} := \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$
bzw. $\binom{n}{k} := \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ für $n \geq 2, k \geq 1$, mit $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} := 1$

explizite Definition: $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n-k+j}{j}$

[8] siehe Kurs Algorithmen, Datenstrukturen und Grundlagen der theoretischen Informatik und Kurs Lineare Algebra

Beweis:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} &= \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k)(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k))} \\
&= \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k)(n-k+1) \cdot \ldots \cdot n}{(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k)(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k))} \\
&= \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} j}{\left(\prod\limits_{l=1}^{k} l\right) \cdot \left(\prod\limits_{m=1}^{n-k} m\right)} = \frac{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n} j}{\prod\limits_{l=1}^{k} l} \\
&= \frac{\prod\limits_{m=1}^{k} n-k+m}{\prod\limits_{l=1}^{k} l} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n-k+j}{j}
\end{aligned}$$

Bemerkung 3.2.2 (Das Pascalsche Dreieck)
Binomialkoeffizienten kann man für $n \in \mathbb{N}_0$ in einem Schema, dem Pascalschen Dreieck, notieren, wobei n die Zeilennummer ist. In der n-ten Zeile stehen dann die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ für $k = 0, \ldots, n$ mit $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ für $n \geq 2$, $k \geq 1$ und $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
\text{0-te Zeile:} & & & & & & & 1 & & & & & & \\
\text{1-te Zeile:} & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
\text{2-te Zeile:} & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
\text{3-te Zeile:} & & & & 1 & & \boxed{3} & & \boxed{3} & & 1 & & & \\
\text{4-te Zeile:} & & & 1 & & 4 & & \boxed{6} & & 4 & & 1 & & \\
\text{5-te Zeile:} & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\text{6-te Zeile:} & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} \\
 & & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

Beispiel: $\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 3 + 3 = 6$

$\binom{6}{4} = \binom{5}{3} + \binom{5}{4} = 10 + 5 = 15$

Bemerkung 3.2.3 (Einige einfache Regeln für Binomialkoeffizienten)
Es gilt:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} \quad \text{(Symmetrie)}\\
\binom{n}{k+1} &= \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1} \quad \text{für } k \geq 0\\
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} &= 2^n\\
\sum_{m=1}^{n} \binom{m}{k} &= \binom{n+1}{k+1} \quad \text{für jedes } k \text{, mit } \binom{m}{k} = 0 \text{ für } m \leq k
\end{aligned}$$

Machen Sie sich diese Gleichungen bitte am Pascalschen Dreieck klar.

Anwendungsbeispiele zu Binomialkoeffizienten:

- $\binom{49}{6}$ Lotto „6 aus 49“
- $\binom{n}{k}$ Anzahl k-elementiger Teilmengen einer n-elementigen Menge

(7) **Allgemeine binomische Formel – Binomischer Lehrsatz**
Von der Schule bekannt ist die erste der 3 binomischen Formeln für den Fall n=2.
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Sie kann folgendermaßen verallgemeinert werden:
rekursive Definition: $(a+b)^{n+1} := (a+b)^n \cdot (a+b)$ mit $(a+b)^1 = a+b$
explizite Definition: $(a+b)^n := \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
Bewiesen wird die explizite Definition der allgemeinen Binomischen Formel im Abschnitt der vollständigen Induktion (Kapitel 4.3 auf Seite 63).

(8) **Verallgemeinerung des Binomialkoeffizienten für $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), \mathbf{k} \in \mathbb{N}_0$**

Der Vollständigkeit halber ist hier noch die Verallgemeinerung der Binomialkoeffizienten, die bei der Taylorreihe von $(1+x)^\alpha$ als Koeffizienten auftreten, angegeben.
Hinweis: Diese Reihe wird auch binomische Reihe[9] genannt.

$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(\alpha-i)}{k!}$ für $k > 0$

Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
\binom{\alpha}{0} &:= 1 \\
\binom{\alpha}{k} &= (-1)^k \binom{k-\alpha-1}{k} \\
\binom{\alpha}{k+1} &= \binom{\alpha}{k}\frac{\alpha-k}{k+1} \\
\binom{\alpha}{k}+\binom{\alpha}{k+1} &:= \binom{\alpha+1}{k+1}
\end{aligned}$$

(9) **Rekursive Zahlenfolge**[10]

Ausgehend vom Funktionsbegriff (den man von der Schule sicher kennt!) kann man sich eine Zahlenfolge als „Funktion“ mit dem einfachen Definitionsbereich „Menge der natürlichen Zahlen“ vorstellen, also

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Allerdings schreibt man üblicherweise nicht $f(n)$ (analog zur Funktionsschreibweise $f(x)$) sondern a_n (a Index n statt f von n).

Somit besteht die Zahlenfolge aus einzelnen (diskreten) Werten $a_1, a_2, a_3 \ldots$. Die graphische Darstellung einer Folge im Koordinatensystem besteht also aus einzelnen Punkten im ersten und vierten Quadranten.

So wie man mit reellen Funktionen kontinuierliche Vorgänge beschreiben kann (denken Sie an eine EKG-Aufzeichnung beim Arzt), dienen Folgen zur Modellierung diskreter Abläufe (denken Sie an die Tabelle der Tageseinnahmen eines Supermarktes).

Nimmt man z. B. die Funktion $y = sin(x), x, y \in \mathbb{R}$, so schreibt man für die Zahlenfolge $a_n = \sin(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ (oder verkürzt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sin(n)$) und sagt a Index n ist definiert als $\sin(n)$ für alle $n = 1, 2, 3, ...$

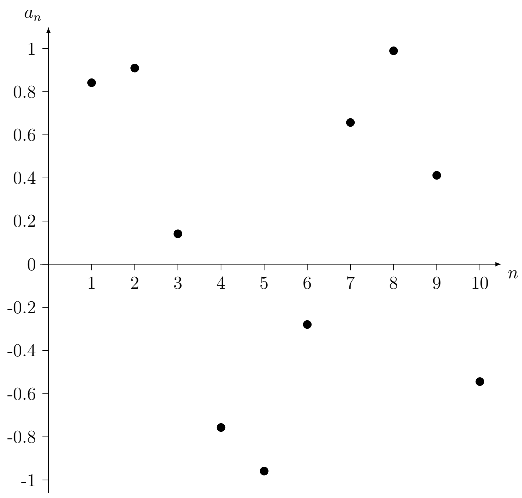


Abbildung 3.1.: Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sin(n)$ (2-dim. Darstellung)

[9] siehe Kurs Analysis 1

[10] Vertiefung in Analysis 1

Zahlenfolgen können gegeben sein durch:

a) Angabe der ersten i Folgenglieder, wenn danach klar ist, wie es weiter geht.
(Nicht sehr mathematisch!)
z.B.: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 2, 3, 5, 7, 11, ...)$

b) eine explizite Funktionsvorschrift
z.B. $a_n = n^2$

c) eine Funktionsvorschrift (rekursiv)
zum Beispiel:
rekursive Definition: $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$ mit $a_1 = 2$, $n \in \mathbb{N}$
entsprechende explizite Definition ist $a_n = 2^n$
Die Zahlenfolge ist hier $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 4, 8, 16, ...)$
Der Beweis, dass die explizite Definition dieselbe Zahlenfolge liefert wie die (gegebene) rekursive Definition, erfolgt mittels vollständiger Induktion (Kapitel 4.3 auf Seite 63).

d) einen Algorithmus
Alle natürlichen Zahlen, die ganzzahlig nur durch 1 und sich selbst teilbar sind.
z.B.: $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 2, 3, 5, 7, 11, ...)$

Beispiel 3.2.4 (Die Türme von Hanoi - Eine rekursiv definierte Zahlenfolge)

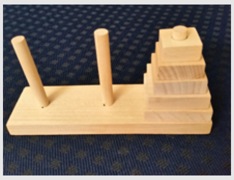


Abbildung 3.2.: Die Türme von Hanoi

Das Spiel besteht aus 3 Stäben (A, B, C) und mehreren (n) gelochten, verschieden großen Scheiben. Zu Beginn sind alle Scheiben der Größe nach sortiert auf Stab A gesteckt. Die größte Scheibe liegt unten, die mit dem kleinsten Durchmesser oben.
Ziel des Spiels ist es, den gesamten Scheibenstapel der Größe nach sortiert auf Stab C zu stecken.

Bei jedem Zug darf die oberste Scheibe eines beliebigen Stabes auf einen anderen gesteckt werden, falls dort nicht schon eine kleinere Scheibe liegt.
Das heißt, zu jedem Zeitpunkt des Spiels sind auf jedem Stab die Scheiben der Größe nach sortiert.

Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl der benötigten Züge bei optimaler Zugfolge um das Spiel erfolgreich zu beenden (in Abhängigkeit der Anzahl der Scheiben).

Anzahl vorhandener Scheiben	Anzahl nötiger Züge
1	1
2	3
3	7
4	15

Vermutlich gilt also: $z(4) = 2 \cdot z(3) + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$

Rekursive Definition: $z_n = 2 \cdot z_{n-1} + 1$
Erläuterung: Man schichtet zuerst die oberen $(n-1)$ Scheiben um, dann legt man die Unterste um und danach schichtet man die $(n-1)$ obersten Scheiben auf die Unterste. So erklärt sich die Rekursionsformel.
Explizite Definition: $z_n = 2^n - 1$
Der Beweis, dass die explizite Definition dieselbe Zahlenfolge liefert wie die rekursive, erfolgt mittels vollständiger Induktion (Kapitel 4.3 auf Seite 63).

(10) **Wie findet man zu einer rekursiven Folge eine explizite Form?**
Es gibt keinen Standardweg, um ein explizites Bildungsgesetz zu finden.

Eine mögliche Vorgehensweise ist folgende:

1. Anhand der Werte, die sich aus dem rekursiven Bildungsgesetz der Folge berechnen lassen, versucht man, ein Muster zu erkennen.
2. Dieses Muster muss nun in einem mathematischen Ausdruck formuliert werden.

Beispiel für die Vorgehensweise, wenn die Differenz zweier aufeinander folgender Folgenglieder $a_{n+1} - a_n$ von n abhängt:
Gegeben sei die rekursiv definierte Folge: $a_0 = 0, a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n + 6$
Die ersten Folgenglieder sind demnach: $0, 6, 18, 42, 84, \ldots$
Gesucht ist eine explizite Formel für die rekursive Folge.

bekannt ist:

(1) Die Differenz zweier benachbarter Folgenglieder a_n und a_{n+1} hängt von n ab.
$a_{n+1} - a_n = \underbrace{a_n + 3n^2 + 3n + 6}_{a_{n+1}} - a_n = 3n^2 + 3n + 6$

(2) $a_n = a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1})$

daraus folgt:
$$
\begin{aligned}
a_n &= a_0 + \sum_{j=1}^{n} (a_j - a_{j-1}) \\
&= 0 + \sum_{j=1}^{n} (3(j-1)^2) + 3(j-1) + 6) \\
&= 3\sum_{j=1}^{n} (j-1)^2 + 3\sum_{j=1}^{n} (j-1) + 6\sum_{j=1}^{n} 1 \\
&= 3\sum_{j=0}^{n-1} j^2 + 3\sum_{j=0}^{n-1} j + 6n \\
&= 3\tfrac{n(n-1)(2n-1)}{6} + 3\tfrac{n(n-1)}{2} + 6n \\
&= \tfrac{2n^3-3n^2+n}{2} + \tfrac{3n^2-3n}{2} + \tfrac{12n}{2} \\
&= \tfrac{2n^3+10n}{2} \\
&= n^3 + 5n
\end{aligned}
$$

Damit lautet die explizite Formel: $a_n = n^3 + 5n$
Statt der rechnerischen Herleitung kann diese Formel auch „vermutet / behauptet“ und

mittels vollständiger Induktion (siehe Kapitel 4.3 auf Seite 63) bewiesen werden.

Sie sollten jetzt in der Lage sein,
- sicher mit Binomialkoeffizienten und seinen Anwendungen zu rechnen,
- einfache Zahlenfolgen in expliziter und rekursiver Form zu erkennen,
- einfache Zahlenfolgen aufzustellen und diese umzurechnen,
- den Wert von einfachen Zahlenfolgen zu berechnen,
- binomischen Formeln und die Regeln der Potenzrechnung anzuwenden.

3.2.1. Aufgaben

Aufgabe 1

Ergänzen Sie bitte folgende Ausdrücke:

$$\binom{10}{7} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}\,\boxed{}}$$

$$\binom{1/2}{3} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

Hinweis: $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$ für $k > 0$

Aufgabe 2

Man berechne:

a) $\binom{7}{4}$

b) $\frac{2^{5^{127}}}{2^{2\cdot 5^{126}}}$

Aufgabe 3

Man berechne die ersten 5 Glieder der rekursiv definierten Folgen:

a) $a_{n+1} = a_n + 1$ mit $a_0 = 1$

b) $a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n$ mit $a_0 = 1$

c) $a_{n+1} = 6 + a_n$ mit $a_0 = 6$

Geben Sie jeweils eine allgemeine explizite Formel an.

4. Beweismethoden, Anwendung logischer Prinzipien

Beweismethoden beruhen auf logischen Prinzipien. In diesem Kapitel werden die grundlegenden Beweisprinzipien anhand von Beispielen erklärt.

4.1. Direkter (deduktiver) Beweis

Aus der Voraussetzung (V) und den bekannten wahren Aussagen der Theorie (A_i) wird schrittweise (durch wahre Implikationen) auf die Behauptung (B) geschlossen.
$V \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \ldots \Rightarrow B$
Es können auch mehrere Voraussetzungen gegeben sein.

Beispiel 4.1.1

Vor.: $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = n + (n-1) + \ldots + 1 = \sum_{i=1}^{n} (n+1-i)$
Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
Beweis:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = n + (n-1) + \ldots + 1 = \sum_{i=1}^{n} (n+1-i) \\
\Rightarrow 2 \cdot & \sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} (n+1-i) = \sum_{i=1}^{n} [i + (n+1-i)] = \sum_{i=1}^{n} (n+1) \\
\Rightarrow \quad & \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (n+1) \\
& \qquad = \frac{n+1}{2} \sum_{i=1}^{n} 1 \\
& \qquad = \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

q.e.d.

Beispiel 4.1.2
Beh.: $\forall x \in \mathbb{R} : (x^2 = x) \Leftrightarrow (x = 0 \ \lor \ x = 1)$
Beweis:

$$\begin{aligned}
x^2 = x \quad & \Leftrightarrow \quad x^2 - x = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x(x-1) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \lor \ x = 1
\end{aligned}$$

Beispiel 4.1.3 (Dreierprobe)
Vor.: Die Zahl z sei eine vierziffrige Zahl, d.h. $z = abcd$ mit $a, b, c, d \in \{0, 1, \ldots 9\}$, und die Quersumme $(q = a + b + c + d)$ sei durch 3 teilbar.
Beh.: Dann ist auch $z = abcd$ durch 3 teilbar.

Beweis:
Vor.: $q = a+b+c+d$ sei durch 3 teilbar $\Rightarrow \exists m : a+b+c+d = 3m \Leftrightarrow d = 3m-a-b-c$

$$\begin{aligned} z = 1000a + 100b + 10c + d &\overset{\text{Vor}}{=} 1000a + 100b + 10c + 3m - a - b - c \\ &= 999a + 99b + 9c + 3m \\ &= 3 \cdot (333a + 33b + 3c + m) \\ &\Rightarrow \exists n : z = 3n \end{aligned}$$

Beispiel 4.1.4
Vor.: $z > 1 + \sqrt{2}$ Beh.: $z^2 - 2z - 1 > 0$
Beweis:

$$\begin{aligned} z > 1 + \sqrt{2} &\Leftrightarrow z - 1 > \sqrt{2} \\ &\Rightarrow (z-1)^2 > 2 \\ &\Leftrightarrow z^2 - 2z + 1 > 2 \\ &\Leftrightarrow z^2 - 2z - 1 > 0 \end{aligned}$$

4.2. Indirekter Beweis

Unter dem Begriff „indirekter Beweis“ fasst man 2 unterschiedliche Beweistechniken zusammen: den Widerspruchsbeweis und den Kontrapositionsbeweis.

(1) **Widerspruchsbeweis**
Beim Widerspruchsbeweis geht man von dem Gegenteil (der Verneinung) der zu beweisenden Behauptung aus und folgert daraus unter Verwendung bekannter, richtiger Tatsachen (Voraussetzungen) eine falsche Aussage, also einen Widerspruch. Aus dieser Kette von logisch richtigen Implikationen folgt dann, dass die Behauptung richtig sein muss.

Der Beweis läuft also nach dem Prinzip $(\neg A \Rightarrow B \wedge \neg B) \Leftrightarrow A$ (Tautologie)
Man bildet $\neg A$ und schließt dann direkt auf $B \wedge \neg B$ (Widerspruch). Somit ist $\neg A$ falsch und A wahr.

Beispiel 4.2.1
Behauptung A: Es gibt unendliche viele Primzahlen.

$$\begin{aligned} \neg A \Leftrightarrow &\text{ es gibt genau } n \text{ Primzahlen mit } p_1 < p_2 < \ldots < p_n \\ &\Rightarrow x := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1 = (\prod_{i=1}^{n} p_i) + 1 \\ &\Rightarrow x > p_n \quad \Rightarrow x \text{ ist keine Primzahl} \\ &\Rightarrow \exists j : p_j | x \quad (p_j \text{ teilt x ohne Rest}) \\ &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : x = k \cdot p_j \wedge x = (\prod_{i=1}^{n} p_i) + 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow k \cdot p_j = (\prod_{i=1}^{n} p_i) + 1 \wedge k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow k = \frac{\prod_{i=1}^{n} p_i}{p_j} + \frac{1}{p_j} \wedge k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow k = \underbrace{\prod_{i=1, i \neq j}^{n} p_i + \frac{1}{p_j}}_{\notin \mathbb{N}} \wedge k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow k \notin \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N}\ \ (\Leftrightarrow V \wedge \neg V)$

$\Rightarrow \lightning$ (Widerspruch)

also ist die Annahme „$\neg A$ sei wahr“ falsch, also ist die Behauptung A richtig (wahr).

Beispiel 4.2.2

Voraussetzung A: $x \in \mathbb{R}\ \wedge\ x < -2$

Behauptung B: $x^2 - 2x - 1 > 0$

Zu beweisen ist demnach: $A \Rightarrow B$

Beweis nach dem Prinzip: $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \wedge A)$ (Tautologie)

Man bildet $\neg B$ und zeigt, dass $\neg B \wedge A$ falsch ist. Das bedeutet dann, dass $A \Rightarrow B$ wahr ist.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\neg B \Leftrightarrow\ x^2 - 2x - 1 \leq 0 \ &\Leftrightarrow\ x^2 \leq 2x + 1 \overbrace{<}^{\text{Abschätzung (*)}} -3 \\
&\Rightarrow\ x^2 < -3 \\
&\Rightarrow\ \text{Widerspruch zur Voraussetzung } x \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow\ (A \Rightarrow B) \text{ ist wahr}
\end{aligned}
$$

(*) Abschätzung von x durch Verwendung der Voraussetzung $x < -2$
Den Ausdruck vergrößern heißt hier den größtmöglichen Wert für x einsetzen.
also: $2x + 1 < 2(-2) + 1 = -4 + 1 = -3$

Beispiel 4.2.3

Behauptung A: $lg(5)$ ist eine irrationale Zahl

Annahme $\neg A$: $lg(5)$ ist eine rationale Zahl $\Leftrightarrow lg(5) = \frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{N}$

Beweis nach dem Prinzip: $\neg A \Rightarrow \lightning$. Das bedeutet dann, dass A wahr ist.

Beweis:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & lg(5) & = & \frac{m}{n} \\
\Leftrightarrow & 10^{lg(5)} & = & 10^{\frac{m}{n}} \\
\Leftrightarrow & 5 & = & 10^{\frac{m}{n}} \\
\Leftrightarrow & 5^n & = & 10^m \\
\Rightarrow & \lightning & & \text{(Widerspruch) Es gibt keine } n, m \in \mathbb{N}\text{, so dass das gilt !}
\end{array}
$$

(2) **Kontrapositionsbeweis** Beweis nach dem Prinzip:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \text{ (Tautologie)}$$

Man bildet $\neg B$ und schließt in einer endlichen Kette richtiger logischer Implikationen direkt auf $\neg A$. Ist $\neg A$ richtig (also eine wahre Aussage), so ist $\neg B$ ebenfalls richtig. Und somit ist direkt bewiesen, nach der oben genannten Tautologie, dass A richtig und somit eine wahre Aussage ist.

Beispiel 4.2.4
$A:\ n^2$ ist gerade $\quad B:\ n$ ist gerade
Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N} : n^2$ gerade $\Rightarrow n$ gerade.
Beweis:

$$\begin{aligned}
\neg B &\Leftrightarrow n \text{ ist ungerade} \\
&\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k+1 \\
&\Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = \underbrace{\underbrace{4k(k+1)}_{\text{gerade}} + 1}_{\text{ungerade}} \\
&\Rightarrow n^2 \text{ ungerade} \Leftrightarrow \neg A \\
&\Rightarrow (A \Rightarrow B) \text{ ist nach dem Kontrapositionsprinzip wahr.}
\end{aligned}$$

Das heißt: ($\forall n \in \mathbb{N} : n^2$ ist gerade $\Rightarrow n$ ist gerade) ist wahr.

4.3. Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Aussagen der Form „$A(n)$ gilt für alle natürlichen Zahlen[1] n größer gleich einem n_0“ können mit vollständiger Induktion bewiesen werden.
Das Induktionsprinzip besteht immer aus folgenden 5 Schritten:

IA: Induktionsanfang
$A(n_0)$ ist richtig

IV: Induktionsvoraussetzung
Es gelte $A(n)$ für ein festes, aber beliebiges $n \geq n_0$.

IB: Induktionsbehauptung
Dann gilt auch $A(n+1)$.

IS: Induktionsschluss, -schritt
Beweis der Induktionsbehauptung $A(n+1)$ unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung $A(n)$.

Schlusssatz:
Ich habe gezeigt, dass die Behauptung für $n = n_0$ gilt und, falls sie für ein $n \geq n_0$ gilt, dann auch für $n+1$. Daher gilt die Aussage für alle $n \geq n_0$.

Bemerkung 4.3.1
Die vollständige Induktion funktioniert im Prinzip wie das Umwerfen einer Reihe von Dominosteinen:

- Der erste Stein fällt.
- Wenn ein Stein fällt, dann fällt auch der nächste.
- So wird irgendwann jeder Stein umgefallen sein.

[1] eigentlich sogar für ganze Zahlen

Beispiel 4.3.2 (Beweis der allgemeinen binomischen Formel)
Dieses Beispiel sollte durchgearbeitet werden. Man kann daran nämlich neben der vollständigen Induktion auch die Technik der Indextransformationen üben und trainiert den Umgang mit Binomialkoeffizienten.
zu zeigen ist: $\forall n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
Beweis:

IA: Induktionsanfang

für $n = 0$ gilt: $(a+b)^0 = 1 = \sum\limits_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k}$ (wahr)

IV: Induktionsvoraussetzung

Es gelte $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ für ein festes, aber beliebiges $n \geq 0$.

IB: Induktionsbehauptung

Dann gilt auch $(a+b)^{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$.

IS: Induktionsbeweis, -schluss

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b) \\
&\overset{\textbf{IV}}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) \cdot (a+b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \overbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1}} + \overbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \underbrace{b^{n+1}}_{\text{0-ter Summand}} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \underbrace{a^{n+1}}_{(n+1)\text{-ter Summand}} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

Schlusssatz:

Ich habe gezeigt, dass die Behauptung für $n = 0$ gilt und, falls sie für ein $n \geq 0$ gilt, dann auch für $n + 1$. Daher gilt die Aussage für alle $n \geq 0$.

Beispiel 4.3.3 (Beweis der Bernoulli-Ungleichung)
zu zeigen: $\forall x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}_0 : (1+x)^n \geq 1+nx$

Zum Beispiel
$x=-1, n\geq 2: \quad (1-1)^n = 0^n = 0 \geq 1-n$ (w)
$x=4, n=3: \quad (1+4)^3 = 5^3 = 125 \geq 13 = 1+12 = 1+3\cdot 4$ (w)
$x=-4, n=3: \quad (1-4)^3 = (-3)^3 = -27 \geq -11 = 1-12 = 1+3\cdot(-4)$ (f)
$x=0, n=0, n=1$ sind triviale Sonderfälle

Vor.: $x \geq -1, x \neq 0$
Beh.: $(1+x)^n > 1+nx$ für $n \geq 2$
Beweis:

IA: für $n=2$ gilt: $\quad (1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x,$ da $x^2 > 0 \quad$ (wahr)

IV: Induktionsvoraussetzung
Es gelte für ein festes, aber beliebiges $n \geq 2 : (1+x)^n > 1+nx$.

IB: Induktionsbehauptung
Dann gilt auch $(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x$.

IS: Induktionsbeweis, -schluss

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \cdot (1+x)^n \\
&\overset{\text{IV}}{>} (1+x)(1+nx) \\
&= 1+x+nx+\underbrace{nx^2}_{>0} \\
&> 1+x+nx \\
&= 1+(n+1)x
\end{aligned}$$

Schlusssatz:
Ich habe gezeigt, dass die Behauptung für $n=2$ gilt und, falls sie für ein $n \geq 2$ gilt, dann auch für $n+1$. Daher gilt die Aussage für alle $n \geq 2$.

Falls $x \neq 0$ und $n > 1$, gilt die strenge Ungleichung.
Sonderfälle beim Induktionsprinzip:

1. Anfang nicht unbedingt bei $n=1$
(siehe Beweis der Bernoulli-Ungleichung, Beispiel 4.3.3)

2. mehrgliedrige Aussage, d.h. mehrere Anfänge und damit mehrere Voraussetzungen

Beispiel 4.3.4 (mehrgliedrige Aussage)
Vor.: $L(1) = 1 \;\wedge\; L(2) = 3 \;\wedge\; L(n+2) = 3L(n+1) - 2L(n) \; \forall n \in \mathbb{N}$
Beh.: $L(n) = 2^n - 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$
Beweis:

IA: Induktionsanfang
für $n = 1$ gilt: $L(1) = 2^1 - 1 = 1$
für $n = 2$ gilt: $L(2) = 2^2 - 1 = 3$

IV: Induktionsvoraussetzung
Es gelte $(L(n) = 2^n - 1) \wedge (L(n-1) = 2^{n-1} - 1)$ für ein festes, aber beliebiges n.

IB: Induktionsbehauptung
Dann gilt auch $L(n+1) = 2^{n+1} - 1$.

IS: Induktionsbeweis, -schluss

$$\begin{aligned} L(n+1) &= 3L(n) - 2L(n-1) \\ &\overset{\text{IV}}{=} 3(2^n - 1) - 2(2^{n-1} - 1) \\ &= 3 \cdot 2^n - 3 - 2 \cdot 2^{n-1} + 2 \\ &= 3 \cdot 2^n - 2^n - 1 \\ &= 2 \cdot 2^n - 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

Schlusssatz:
Ich habe gezeigt, dass die Behauptung für $n = 1$ und $n = 2$ gilt und, falls sie für ein $n > 2$ und $n - 1 > 1$ gilt, dann auch für $n + 1$. Daher gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

4.4. Das Prinzip der vollständigen Fallunterscheidung

Zum Abschluss soll noch das Prinzip der vollständigen Fallunterscheidung vorgestellt werden.

Lässt sich ein komplexes Problem in Teilprobleme zerlegen, reduziert sich die Komplexität, denn jedes Teilproblem kann für sich gelöst werden. Diesem Vorteil steht ein erhöhter Arbeitsaufwand gegenüber.

Zur Vorgehensweise:
Man beginnt meist mit der Bearbeitung des einfachsten Falls und lässt die Bearbeitung der anderen Fälle folgen. Manchmal können schon gewonnene Erkenntnisse aus vorigen Fällen zur Lösung der nachfolgenden Fälle verwenden werden. Sind alle Fälle bearbeitet, werden ihre Teillösungen zu einer Gesamtlösung zusammen gefasst.

Beispiel 4.4.1 (Fallunterscheidung zum Beweis der Dreiecksungleichung $|a + b| \leq |a| + |b|$)
Die zu beweisende Aussage wird in Teilaussagen zerlegt und somit der ursprünglich zu führende Beweis in Teilbeweise aufgeteilt. Diese müssen dann, jeder für sich, mit einer der oben genannten Methoden bewiesen werden.

Fall 1: für $a, b \geq 0$ gilt $\quad |a + b| = a + b = |a| + |b| \quad (w)$

Fall 2: oBdA gilt für $a \geq 0, b < 0$
i) $|b| \leq a$: $\quad |a + b| = |a - |b|| \leq |a + |b|| = |a| + |b| \quad (w)$
ii) $|b| > a$: $\quad |a + b| = ||b| - a| \leq ||b| + a| = |b| + |a| \quad (w)$

Fall 3: für $a, b < 0$ gilt $\quad |a + b| = |-1| \cdot (||a| + |b||) = |a| + |b| \quad (w)$

Beispiel 4.4.2 (Fallunterscheidung zur Lösung einer Ungleichung)
Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $|x - 7| > 8$
(siehe auch Beispiel 6.2.6 auf Seite 115 ff)

Fallunterscheidung:
Fall 1: (Betrag ist positiv für $x \geq 7$) $x - 7 > 8 \Leftrightarrow x > 15$

Fall 2: (Betrag ist negativ für $x < 7$: $7 - x > 8 \Leftrightarrow x < -1$

$L = (-\infty, -1) \cup (15, \infty)$

Zusammenfassung der Beweismethoden

Es gibt

- den direkten Beweis,
- indirekte Beweise
  - Widerspruchsbeweis
  - Kontrapositionsbeweis
- und die Beweisgruppe der vollständigen Induktion. Sie ist für Behauptungen geeignet, die von einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ abhängen.
- Die vollständigen Fallunterscheidungen sind oft sehr nützlich, um das Gesamtproblem in Teilaufgaben zu zerlegen.

Sie sollten jetzt in der Lage sein,
- Beweistypen zu unterscheiden,
- elementare Beweise nachzuvollziehen,
- insbesondere vollständige Induktionen durchzuführen,
- für einfache rekursive Folgen eine explizite Darstellung zu finden und diese zu beweisen.
Sie sollten zu den elementaren Beweismethoden Beispiele kennen.

4.5. Aufgaben

Aufgabe 1

$\binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{j} = \binom{n}{j} \cdot \binom{n-j}{k},\ 0 \le j, k \le n.$
Verwenden Sie die Methode des direkten Beweises.

Aufgabe 2

Man beweise durch vollständige Induktion:

a) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:
$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{k+1}$

b) $n^3 + 2n$ ist für alle natürlichenZahlen n durch 3 teilbar.

c) $k! \ge \frac{1}{2} \cdot 2^k \quad , \forall k \ge 1.$

d) Finden Sie ein $n_0, n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \ge n_0$ gilt: $1 + 2n^2 < n^3$.
Beweisen Sie diese Aussage.

e) $\prod_{k=0}^{n} (1 + x^{2^k}) = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} x^k \quad , n \in \mathbb{N}_0$

f) $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ist durch 133 teilbar $(n \ge 1)$

Aufgabe 2

Stimmt die Behauptung $(1 + 2 + \ldots + 9 + 10)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots 9^3 + 10^3$?
Beweisen Sie die Formel mit Hilfe der vollständigen Induktion für n Summanden.
(Oft wird in den Aufgabenstellungen auch das Wort „allgemeingültig" benutzt.)

Aufgabe 4

Es gelte $M(1) = 1$ und $M(n+1) = M(n) + 8n$ für beliebige natürliche Zahlen n.
Berechnen Sie die ersten vier Glieder, raten Sie eine geschlossene Darstellung für $M(n)$ und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.

Aufgabe 5

Die Zahlenfolge a_k ist rekursiv definiert durch ihren Startwert $a_1 = 1$ und ihrer Berechnungsvorschrift $a_k = (1 + \frac{1}{k}) \cdot a_{k-1}$. Es ergibt sich folgende Wertetabelle:

k	1	2	3	4	...
a_k	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	...

a) Berechnen sie den Wert für a_{10}.

b) Ihr Gruppenleiter behauptet, dass Sie die Berechnung durch $a_k = \frac{k+1}{2}$ ersetzen können. Zeigen Sie, dass Ihr Chef recht hat und beweisen sie mit vollst. Induktion die explizite Formel.
(Hinweis: Die rekursive Formel aus der Aufgabenstellung und die Induktionsvoraussetzung (IV) müssen im Induktionsschluss (IS) verwendet werden.)

c) Ändert man den Index des Startwertes dieser Folge auf 0, ist sie definiert durch $a_0 = 1$ (Startwert) und $a_k = (1 + \frac{1}{k}) \cdot a_{k-1}$ (Berechnungsvorschrift). Welche explizite Formel ergibt sich nun für a_n?
(Hinweis: Berechnen Sie zunächst ein paar a_k und entwickeln Sie daraus die gesuchte Formel.)

Anmerkung: In der Mathematik ist folgende Schreibweise für diese rekursive Folge üblich:
$a_0 = 1, a_{k+1} = (1 + \frac{1}{k+1}) \cdot a_k,\ k = 1, ..., (n-1)$

5. Relationen, Abbildungen, Funktionen

In diesem Kapitel wird das Konstrukt Abbildung ausgehend vom Relationenbegriff auf der mengentheoretischen Grundlage eingeführt. Dies ist in der Schulmathematik so nicht üblich.

5.1. Relationen

Zur Modellierung von Beziehungen zwischen Gegenständen oder Objekten dient das Konstrukt der Relation.

3 Beispiele:

a) Anordnung auf der Menge der ganzen Zahlen, zum Beispiel „kleiner gleich"-Beziehung: Steht x in „kleiner gleich"-Beziehung zu y, so schreiben wir in diesem Fall $x \leq y$.
Wir können diese Beziehung eindeutig beschreiben durch Angabe der Menge der Zahlenpaare, für die diese Aussage wahr ist. Für diese Menge verwenden wir dasselbe Symbol „$\leq$"
$M_{\leq} := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x \leq y\}$

b) Teilmengenbeziehung zwischen Mengen

c) Zwei natürliche Zahlen sollen in Beziehung stehen, wenn die erste die zweite ohne Rest teilt.

In diesen Beispielen werden jeweils 2 Elemente aus der gleichen Menge in Beziehung gesetzt. Im Allgemeinen muss das nicht der Fall sein, es können auch unterschiedliche Typen von Objekten in Beziehung stehen. Zum Beispiel:

- Beziehung der Form: Person wohnt in Straße
- Vektor hat die Länge (Skalar)

oder mehr als jeweils 2 Objekte.

Definition 5.1.1 (Relation)
Seien zwei Mengen A und B gegeben. Eine Menge R geordneter Paare (a,b) mit a aus A und b aus B heißt ***(binäre oder zweistellige) Relation*** *zwischen A und B, $R \subseteq A \times B$.*
Jede Teilmenge R des kartesischen Produktes $A \times B$ ist also eine Relation. A nennt man Vorbereich (oder Quelle) und B Nachbereich (Zielbereich oder Wertevorrat) der Relation.
Die Elemente einer Relation sind geordnete Tupel.
Dabei können die Komponenten aus der gleichen Menge (also $A = B$, man sagt dann Relation in oder auf der Menge A) oder aus verschiedenen Mengen (Relation zwischen den Mengen A und B) sein.

Dehnt man die Definition für Relationen auf mehr als 2 Mengen aus, nennt man die sich ergebene Menge geordneter n-Tupel n-stellige Relationen.

Bemerkung 5.1.2
Wenn das Element a aus A in Relation steht zum Element b aus B, also $(a, b) \in R$ schreibt man oft auch aRb.
Da wir hier den Zugang über die Mengenlehre gewählt haben, führen wir Relationen als Teilmengen von $A \times B$ ein.
Ein anderer Zugang wäre die Einführung über die Logik. Eine Relation entspricht dabei einem Prädikat: x steht in Relation zu y, wenn $G(x, y)$ wahr ist.
Der mathematische Relationsbegriff wird auch im Zusammenhang mit relationalen Datenbanken benutzt.

Schreibweisen: Relationen können auf verschiedene Arten gegeben sein:

- aufzählend: $R = \{(a; b); (c; d); (x; y); \ldots\}$
- durch Eigenschaften: $R = \{(x; y)|F(x) \wedge G(y) \wedge H(x, y)\}$ wobei $F(x)$, $G(y)$ und $H(x, y)$ Prädikate sind.

Definition 5.1.3
*Die Teilmenge des Vorbereichs $dom(R) = \{x \mid \exists y : xRy\} \subseteq A$ heißt **Definitionsbereich** oder **Definitionsmenge (domain)**. Die Teilmenge des Nachbereichs $ran(R) = \{y \mid \exists x : xRy\} \subseteq B$ heißt **Wertebereich** oder **Bildmenge (range)**.*

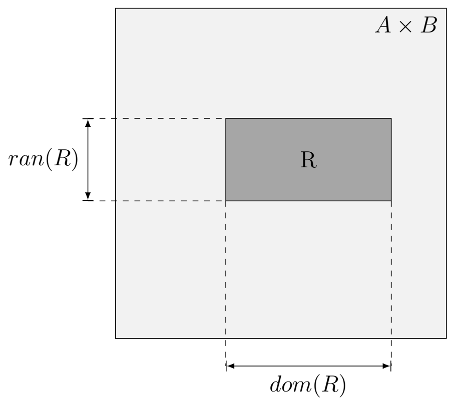


Abbildung 5.1.: Definitionsbereich $dom(R$, Wertebereich $ran(R)$

Relationen auf **endlichen Mengen** werden üblicherweise durch Pfeildiagramme oder als gerichtete Graphen mit Knoten und Kanten dargestellt.

Beispiel 5.1.4 (Pfeildiagramm)
$P = \{$Elli, Maria, Tanja, Ulla, Hans$\}$
Mütter: Elli, Maria   Kinder: Tanja, Ulla, Hans, Maria
$R_1 = \{($Elli, Tanja$), ($Elli, Ulla$), ($Elli,Maria$), ($Maria, Hans$)\} \subseteq P \times P$
oder
xR_1y : x ist Mutter von y

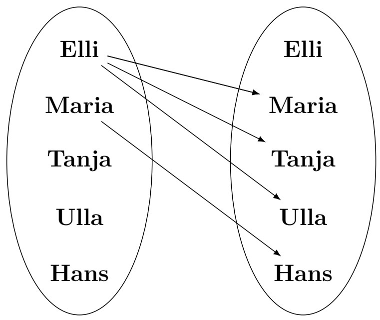


Abbildung 5.2.: Pfeildiagramm (Beispiel 5.1.4)

Eine andere Möglichkeit der Darstellung von Relationen auf einer endlichen Menge ist der gerichteter Graph mit Knoten und Kanten, wobei die Knoten die Elemente der endlichen Menge und die Kanten die Beziehungen darstellen.

Beispiel 5.1.5 (Knoten und Kanten als gerichteter Graph)
$P = \{$Elli, Maria, Tanja, Ulla, Hans$\}$
$R_2 = \{($Elli, Elli$), ($Maria, Maria$), ($Tanja, Tanja$), ($Ulla, Ulla$), ($Hans, Hans$),$
$($Elli, Ulla$), ($Ulla, Elli$), ($Tanja, Ulla$), ($Ulla, Tanja$), ($Elli, Tanja$), ($Tanja, Elli$)\}$
oder
xR_2y : x hat die gleiche Augenfarbe wie y

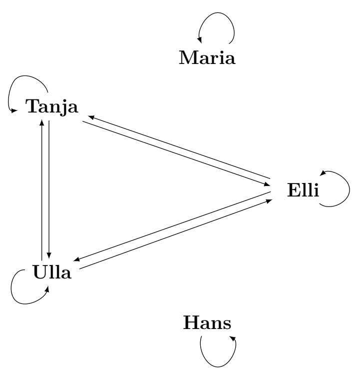


Abbildung 5.3.: Diagramm mit Knoten und Kanten als gerichteter Graph (Beispiel 5.1.5)

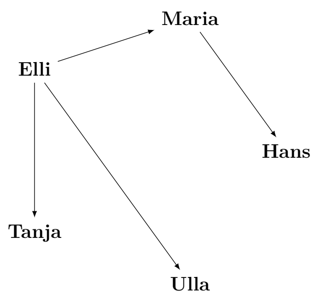


Abbildung 5.4.: Diagramm mit Knoten und Kanten als gerichteter Graph (Beispiel 5.1.4)

Beispiel 5.1.6 (Relationen auf unendlichen Zahlenmengen)

- zweistellige Relation: $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 = x\}$
  Diese Relation kann in der (x,y)-Ebene (eventuell auf einem Raster) skizziert werden.
- dreistellige Relation: $R_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \,|\, x \leq y \leq z\}$

Bemerkung 5.1.7
Relationen zwischen 2 Zahlenmengen können in der Ebene als Teilmenge einer Produktmenge von reellen Zahlen dargestellt werden: von $A := dom(R)$ nach $B := ran(R)$
$R = \{(x, y) \,|\, x \in A \wedge y \in B \wedge xRy\} \subseteq dom(R) \times ran(R) \subseteq A \times B$

Beispiel: $x \in A := \{0, 1, 2\},\ y \in B := \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
$R = \{(0, -2), (0, -1), (1, -2), (1, -1), (1, 0), (2, -2), (2, -1), (2, 0), (2, 1)\}$ oder
$xRy = \{(x, y) \,|\, x \in \{0, 1, 2\} \wedge y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \wedge x > y\}$
$R \subseteq A \times B = \{(x, y) \,|\, x \in \{0, 1, 2\} \wedge y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}\}$

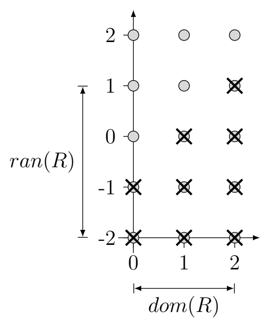


Abbildung 5.5.: Relation als Teilmenge einer Produktmenge

Beispiel: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, Teilmenge davon als Relation auf $\mathbb{R}$, Darstellung im Koordinatensystem:

a) Flächen unterhalb bzw. oberhalb der Hyperbel
   $R_1 = \{(x, y) \,|\, x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x \cdot y \geq 1\}$
   $A = \mathbb{R} = B$, $dom(R_1) = \mathbb{R}_{\neq 0} = ran(R_1)$

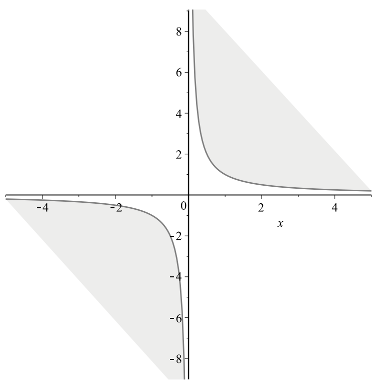
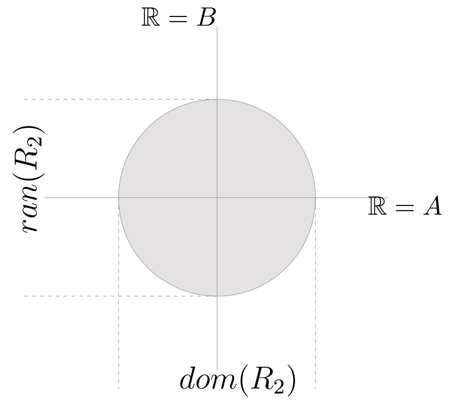


Abbildung 5.6.: Hyperbel

b) Kreisfläche mit Radius 3 und Mittelpunkt (0,0)
$R_2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 \leq 9\}$
$dom(R_2) = ran(R_2) = [-3; 3]$



Bemerkung 5.1.8 (Eigenschaften von Relationen auf einer Menge, also $R \subseteq A \times A$)

- **reflexiv** : $\forall a \in A : (a, a) \in R$
- **irreflexiv** : $\forall a \in A : (a, a) \notin R$
- **symmetrisch** : $\forall a, b \in A : (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$
- **antisymmetrisch, identitiv** : $\forall a, b \in A : (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$
- **transitiv** : $\forall a, b, c, \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$
- **total** : $\forall a, b \in A : a \neq b \Rightarrow (a, b) \in R \vee (b, a) \in R$

Bemerkung 5.1.9 (Nicht symmetrisch bedeutet nicht das Gleiche wie antisymmetrisch !!)

- **symmetrisch** Alle gerichteten Kanten müssen auch in Gegenrichtung vorhanden sein.
  $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$
- **nicht symmetrisch** Mindestens eine gerichtete Kante ist nicht in Gegenrichtung vorhanden.
  $\exists x, y \in A : (x, y) \in R \wedge (y, x) \notin R$
- **antisymmetrisch** Alle gerichteten Kanten dürfen höchstens einfach vorhanden sein.
  $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$

Beispiel 5.1.10

a) Relation R_1 ist symmetrisch und antisymmetrisch
$A = \{a, b, c\}, R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

- symmetrisch
  $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$
  $(a, a) \in R_1,\ (b, b) \in R_1,\ (c, c) \in R_1$
- antisymmetrisch
  $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$
  $(a, a) \in R_1,\ (b, b) \in R_1,\ (c, c) \in R_1$

b) Relation R_2 ist symmetrisch und nicht antisymmetrisch
$A = \{a, b, c\}, R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$

- symmetrisch
  $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$
  $(a, a) \in R_2,\ (b, b) \in R_2,\ (c, c) \in R_2,\ (a, b) \in R_2,\ (b, a) \in R_2$
- nicht antisymmetrisch
  $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$
  $(a, a) \in R_2,\ (b, b) \in R_2,\ (c, c) \in R_2,$
  aber $(a, b) \in R_2$ und auch die Gegenrichtung $(b, a) \in R_2$

c) Relation R_3 ist nicht symmetrisch und antisymmetrisch
$A = \{a, b, c\}, R_3 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b)\}$

- nicht symmetrisch
  $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$
  $(a, a) \in R_3,\ (b, b) \in R_3,\ (c, c) \in R_3,\ (a, b) \in R_3,$ aber $(b, a) \notin R_3$
- antisymmetrisch
  $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$
  $(a, a) \in R_3,\ (b, b) \in R_3,\ (c, c) \in R_3,\ (a, b) \in R_3$ und die Gegenrichtung $(b, a) \notin R_3$

Bemerkung 5.1.11 (Ablesen der Eigenschaften von Relationen im gerichteten Grafen)
(siehe Abb. 5.4 auf Seite 72)

- **Reflexivität – Kreis**
  Jeder Knoten steht mit sich selbst in Beziehung.
  $(\forall a \in A : (a, a) \in R)$
- **Symmetrie – Doppelpfeil**
  Zu jeder gerichteten Kante (Pfeil) existiert die gegensätzliche Kante.
  $(\forall a, b \in A : (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R)$
- **Transitivität – Dreierweg**
  Wenn zwei Knoten über einen dritten Knoten miteinander verbunden sind, dann sind sie auch direkt miteinander verbunden.
  $(\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R)$

Beispiel 5.1.12

$A = \{a, b, c, d\}$
$R_1 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, b), (b, d)\}$ Eigenschaften von R_1:

- nicht reflexiv $(b, b) \notin R_1$
- nicht irreflexiv $(a, a) \in R_1$
- nicht symmetrisch $(a, c) \in R_1$, aber $(c, a) \notin R_1$
- antisymmetrisch $(a, a) \in R_1$
- nicht transitiv $(a, b) \in R_1 \wedge (b, d) \in R_1$ aber $(a, d) \notin R_1$

- nicht total $(c, d) \notin R_1, (a, d) \notin R_1$

Mit der Relationserweiterung $R_2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (c, b), (b, d),$ **(c,d)**, **(a,d)**$\}$
wird die Relation **total** und auch **transitiv**.

- total $(c, d) \in R_2$ und $(a, d) \in R_2$

- transitiv
  (a, b) und $(b, d) \in R_2 \Rightarrow (a, d) \in R_2$
  (a, c) und $(c, b) \in R_2 \Rightarrow (a, b) \in R_2$
  (a, c) und $(c, d) \in R_2 \Rightarrow (a, d) \in R_2$
  (c, b) und $(b, d) \in R_2 \Rightarrow (c, d) \in R_2$

Abbildung 5.7.: R_1 (links) und R_2 (rechts) aus Beispiel 5.1.12 auf der vorherigen Seite dargestellt als gerichteter Graf

Hinweis:
Um zu zeigen, dass eine Relation eine Eigenschaft besitzt, muss diese allgemein für alle Tupel der Relation gezeigt werden.
Zum Beweis, dass eine Eigenschaft nicht zutrifft, reicht ein Gegenbeispiel.

Beispiel 5.1.13

a) $A = \{\text{alle deutschen Frauen}\}, a, b \in A$
   $R_1 = \{(a, b) \in A \times A \mid a \text{ ist Schwester/Halbschwester von } b\}$
   D.h. a und b sind Töchter des gleichen Vaters oder der gleichen Mutter oder beides.
   Die Relation R_1 ist reflexiv, symmetrisch, aber nicht transitiv.

   „nicht transitiv“ wird durch ein Gegenbeispiel gezeigt:

   a sei Kind von Vater1 und Mutter1,
   b sei Kind von Vater1 und Mutter2 und
   c sei Kind von Vater2 und Mutter2

   dann sind a und b sowie b und c Halbschwestern , aber a und c nicht!

b) $A = \wp(X), \quad M, N, P \in \wp(X)$ (Hinweis: Potenzmenge ist die Menge aller Teilmengen)
$R_2 = \{(M,N) \mid M \subseteq N\}$
z.B. $X = \{1,2\}, A = \wp(X) = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}\}$
$R_2 = \{(\emptyset,\emptyset), (X,X), (\{1\},\{1\}), (\{2\},\{2\}), (\emptyset, X), (\emptyset,\{1\}), (\emptyset,\{2\}), (\{1\}, X), (\{2\}, X)\}$
R_2 ist reflexiv, nicht symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv
nicht symmetrisch: $(\emptyset, X) \in R_2$ aber $(X, \emptyset) \notin R_2$ weil $X \not\subseteq \emptyset$

c) $A = \wp(X), \quad M, N, P \in \wp(X)$
$R_3 = \{(M,N) \mid M \subset N\}$
z.B. $X = \{1,2\}, A = \wp(X) = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}\}$
$R_3 = \{(\emptyset, X), (\emptyset,\{1\}), (\emptyset,\{2\}), (\{1\}, X), (\{2\}, X)\}$
R_3 ist nicht reflexiv, nicht symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv
nicht reflexiv: $(\emptyset,\emptyset) \notin R_3$, wegen der Bedingung $M \subset N$

Sie sollten jetzt in der Lage sein,
- Relationen als Teilmengen von kartesischen Produkten zu beschreiben,
- Relationen mit Pfeildiagrammen und mit gerichteten Graphen (Knoten,Kanten) darzustellen.
Sie sollten die wichtigsten Eigenschaften kennen und überprüfen können.

5.1.1. Die Äquivalenzrelation

Eine Relation auf A heißt Äquivalenzrelation, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv (r,s,t) ist.

Beispiel 5.1.14 (Äquivalenzrelation)

a) $X = \mathbb{R}, \quad R_1 = \{(a,b) \mid a = b\}$

b) $X = \{\text{alle Dreiecke}\}, \quad R_2 = \{(a,b) \mid a \text{ ist ähnlich}$[1]zu $b\}$

c) $X = \mathbb{Z}, \quad R_3 = \{(x,y) \mid x - y \text{ durch 3 teilbar}\} \quad (h, l \in \mathbb{Z})$
reflexiv: $x - x = 0 \cdot 3$ also durch 3 teilbar
symmetrisch: $x - y$ durch 3 teilbar $\Rightarrow y - x$ durch 3 teilbar
d.h. $x - y = h \cdot 3 \Rightarrow (y - x) = (-1) \cdot (x - y) = (-1) \cdot (h \cdot 3) = l \cdot 3$
transitiv: $x - y$ durch 3 teilbar und $y - z$ durch 3 teilbar $\Rightarrow x - z$ durch 3 teilbar
d.h. $x - y = h \cdot 3 \ \wedge \ y - z = l \cdot 3$
$\Rightarrow x - z = x \underbrace{-y + y}_{=0} - z = h \cdot 3 + l \cdot 3 = (h + l) \cdot 3$ ist durch 3 teilbar

Beispiel 5.1.15 (Anzahl möglicher Äquivalenzrelationen einer endlichen Menge)
Äquivalenzrelationen sind Relationen und somit Teilmengen des kartesischen Produkts.

In diesem Beispiel werden zur endlichen Menge $M = \{1, 2, 3\}$ alle 5 möglichen Äquivalenzrelationen gebildet.

$R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$
$R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$
$R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (3,1)\}$
$R_4 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,3), (3,2)\}$
$R_5 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2)\} = M \times M$

Definition 5.1.16 (Äquivalenzklasse)
R sei eine Äquivalenzrelation auf der Menge A und $x \in A$. Dann heißt
$[x] = \{y \mid y \in A \wedge xRy\} \subseteq A$ die von x erzeugte ***Äquivalenzklasse****. Jedes Element $a \in [x]$ heißt* ***Repräsentant*** *von $[x]$.*
Wenn man betonen möchte, zu welcher Relation die Äquivalenzklasse gehört, schreibt man die Bezeichnung der Relation als Index: $[x]_R$.

Satz 5.1.17
Die Äquivalenzklassen zu einer Relation R auf einer Menge A bilden eine (disjunkte) Zerlegung der Menge A, d.h. $[a] \neq [b] \ \Rightarrow \ [a] \cap [b] = \emptyset \ \wedge \ \bigcup_{a_i \in A} [a_i] = A$

Zwei Elemente $a, b \in A$ liegen genau dann in derselben Klasse, wenn sie äquivalent sind, d.h. $[a] = [b] \Leftrightarrow \{(a,b) \mid a \Leftrightarrow b\}$.

[1]Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn zwei (und somit in allen drei) Winkel gleich groß sind.

Beispiel 5.1.18 (Äquivalenzklassen)

a) $R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ (s. Beispiel 5.1.15 auf der vorherigen Seite)
$[x]_{R_1} = \{x\}$, also $[1]_{R_1} = \{1\},\ [2]_{R_1} = \{2\},\ [3]_{R_1} = \{3\}$

b) $R_3 : x, y \in \mathbb{Z}$ (s. Beispiel 5.1.14 auf der vorherigen Seite)
$[x]_{R_3} = \{y \mid x - y$ durch 3 teilbar$\}$
$[0]_{R_3} = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$ (alle Vielfachen von $3 + \mathbf{0}$)
$[1]_{R_3} = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$ (alle Vielfachen von $3 + \mathbf{1}$)
$[2]_{R_3} = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$ (alle Vielfachen von $3 + \mathbf{2}$)
keine weiteren Klassen

c) Beispiel: Einwohner einer Stadt
$M = \{x_i \mid x_i$ ist Einwohner der Stadt M$\}$
$R = \{(x_1, x_2) \mid x_1$ wohnt in derselben Straße wie $x_2\}$
Zu dieser Relation gibt es zum Beispiel folgende Äquivalenzklassen:
[Peter Meier] $= \{$Einwohner x_i, die in derselben Straße wie Peter Meier wohnen$\}$
Als Repräsentant ist hier Peter Meier gewählt.
[Elli Peters] $= \{$Einwohner x_k, die in derselben Straße wie Elli Peters wohnen$\}$
Als Repräsentant ist hier Elli Peters gewählt.
$\ldots$
Es gibt genau so viele Äquivalenzklassen wie Straßen in der Stadt, in denen mindestens ein Einwohner lebt. Die Anzahl der Elemente einer Äquivalenzklasse entspricht der Anzahl der Bewohner der jeweiligen Straße. (Jeder Einwohner kann nur in einer Straße wohnen, weil nur dann die Äquivalenzklassen eine disjunkte Zerlegung bilden.)

Beispiel 5.1.19 (Bestimmung von Äquivalenzklassen)
(Fortführung von Beispiel 5.1.15 auf der vorherigen Seite)
Zu einer Äquivalenzklasse gehören die Elemente der Menge, die miteinander in Beziehung stehen. Jedes Element einer Äquivalenzklasse heißt auch Repräsentant der Äquivalenzklasse. Für die Notierung sei $K = \{1, 2, 3\}$ die Menge der Äquivalenzklassen. Wegen der besseren Lesbarkeit werden oftmals einfach nur die Mengen notiert.

- Relation $R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ mit den Äquivalenzklassen
  $[1] = \{1\}, [2] = \{2\}, [3] = \{3\}$ bzw. $\{1\}, \{2\}, \{3\}$
- Relation $R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ mit den Äquivalenzklassen
  $[1] = \{1,2\}, [3] = \{3\}$ bzw. $\{1,2\}, \{3\}$
- Relation $R_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\}$ mit den Äquivalenzklassen
  $[1] = \{1,3\}, [2] = \{2\}$ bzw. $\{1,3\}, \{2\}$
- Relation $R_4 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$ mit den Äquivalenzklassen
  $[2] = \{2,3\}, [1] = \{1\}$ bzw. $\{2,3\}, \{1\}$
- Relation $R_5 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$
  mit der Äquivalenzklasse $[1] = \{1,2,3\} = M$ bzw. $\{1,2,3\}$

Bemerkung 5.1.20
Für eine endliche Menge lassen sich die Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation aus ihrem gerichteten Grafen mit Knoten und Kanten herauslesen.
Das Beispiel 5.1.5 auf Seite 72 besitzt folgende Äquivalenzklassen:

[Maria]={Maria}
[Hans] = {Hans}
[Elli] = {Elli, Tanja, Ulla}

Im gerichteten Grafen (Abb. 5.4 auf Seite 72) erkennt man die 3 Äquivalenzklassen daran, dass ihre Knoten miteinander durch Kanten verbunden sind.

5.1.2. Ordnungsrelationen auf einer Menge

Es gibt verschiedene Relationen, die die Elemente einer Menge „ordnen". Zwei Typen von Ordnungsrelationen sind nachfolgend aufgeführt:

- **(partielle) Ordnungsrelation**: reflexiv, transitiv, antisymmetrisch (denke an $\subseteq, \leq$) „partiell", da nicht alle Elemente vergleichbar sein müssen. Man nennt sie auch Halbordnung.

  Beispiel 5.1.21 (partielle Ordnungsrelation (Halbordnung))
  a) $A = \mathbb{N}\ \ n, m, k, l \in \mathbb{N}, R_1 = \{(n, m) \mid m \text{ teilt } n \text{ (ohne Rest)}\} = \{(m, n) \mid \frac{n}{m} = k\}$
  reflexiv: $\forall n \in \mathbb{N} : (n, n) \in R$ d.h: $\frac{n}{n} = 1$
  transitiv: $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$
  d.h.: $\frac{a}{b} = k \wedge \frac{b}{c} = l \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = k \cdot l \in \mathbb{N}$
  antisymmetrisch: $\forall a, b \in A : (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$
  d.h.: $a = k \cdot b \wedge \frac{b}{a} = \frac{b}{k \cdot b} = \frac{1}{k} = l \underbrace{\Leftrightarrow}_{k,l \in \mathbb{N}} k = l = 1 \Rightarrow a = b$

  b) $X = \{a, b\}, A = \wp(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
  $R_2 = \{(N, M) \mid N, M \in A \text{ und } N \subseteq M\}$
  $N = \{a\}, M = \{a, b\},\ \{a\} \subseteq \{a, b\}$
  $N = \emptyset, M = \{a\},\ \emptyset \subseteq \{a\}$
  aber $N = \{a\}, M = \{b\}$ und $\{a\} \nsubseteq \{b\}$

- **Totalordnung**: reflexiv, transitiv, antisymmetrisch, total (Halbordnung + Totalität)
  total: $\forall a, b \in A : a \neq b \Rightarrow (a, b) \in R \vee (b, a) \in R$
  z.B. für „ $\leq$ " $\ a \neq b \Rightarrow a \leq b \vee b \leq a$

5.1.3. Eine praktische Aufgabe

In diesem ausführlichen Beispiel wird der Zusammenhang zwischen einer praktischen Aufgabe (aus der realen Welt), der Mathematik (Äquivalenzrelation, Äquivalenzklasssen) und der softwaretechnischen Umsetzung verdeutlicht.

a. Ein Kunde benötigt jeweils einen Holzbalken der Länge $2,48$ Meter, $2,96$ Meter, $1,34$

Meter und $1,64$ Meter. Der Händler hat jedoch nur Balken in ganzen Meterlängen auf Lager (2 m, 3 m, 4 m, 5 m, ...). Er muss also die benötigten Holzbalken aus seinem Balkenvorrat zuschneiden. Um kostengünstig zu arbeiten muss der Verschnitt möglichst gering und die Anzahl der benötigten Schnitte möglichst klein sein.

So ist es zum Beispiel günstiger, die letzte beiden Stücke der Einkaufsliste ($1,34$ m, $1,64$ m) aus einem 3 Meter Balken zu schneiden (2 cm Verschnitt , 2 Schnitte), als aus einzelnen Balken der Länge 2 Meter (102 cm Verschnitt, 2 Schnitte).

a) Wie viele Kombinationen von Balkenschnitten gibt es, wenn diese 4 Balken auf der Einkaufsliste stehen? Und welche Kombination ist die kostengünstigste?

b) Wie viele Kombinationen gibt es, wenn n Balken benötigt werden?

b. Mathematischen Formulierung (allgemein)
Sei M_n eine n-elementige Menge (hier: Einkaufsliste). Ermitteln Sie, wie viele und welche Zerlegungen es in disjunkte, nicht leere Teilmengen von M_n gibt. Bestimmen Sie zu jeder Zerlegung die Kostenkennzahlen (hier: Verschnitt, Anzahl Balkenschnitte) und ermitteln Sie deren Minimum.

c. Mathematischer Lösungsansatz (allgemein)
Die Anzahl aller Äquivalenzrelationen auf M_n entspricht der Anzahl aller möglichen Balkenschnittkombinationen und alle Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation auf M_n bilden jeweils eine disjunkte Zerlegung von M_n und somit den Balkenschnittplan.

Also sind zur Lösung der Aufgabe erst einmal alle möglichen Äquivalenzrelationen auf M_n sowie deren Äquivalenzklassen zu bestimmen. Für jede Äquivalenzrelation werden aus den zugehörigen Äquivalenzklassen die Kostenkennzahlen (Verschnitt, Anzahl Schnitte) berechnet und deren Minimum betimmt.

d. Zusammenhang zur Holzbalkenaufgabe
2 Balken stehen in (Äquivalenz-) Relation, wenn sie aus dem selben Lagerbalken geschnitten werden. Die Anzahl aller Äquivalenzrelationen bildet die Anzahl aller möglichen Balkenschnittkombinationen zur Einkaufsliste.

Alle Äquivalenzklassen einer festen Äquivalenzrelation bilden den Schnittplan für die Balkenschnitte. Aus ihnen lassen sich die Kostenkennzahlen (Verschnitt, Anzahl Schnitte) für die jeweilige Balkenschnittkombination errechnen.

Alle Holzbalken der Einkaufsliste, die aus einem Vorratsbalken des Händlers geschnitten werden, bilden eine Äquivalenzklasse.

e. Bestimmung der Äquivalenzrelationen und -klassen exemplarisch für $n = 3$ und $n = 4$

- **für $\mathbf{n = 3}$**, $M_3 = \{a, b, c\}$
  Es gibt 5 verschiedene Äquivalenzrelationen
  $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$
  $R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$
  $R_3 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}$
  $R_4 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}$
  $R_5 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\}$
  und zu jeder Äquivalenzrelation die zugehörige Menge mit Äquivalenzklassen.

(Wegen der besseren Lesbarkeit sind die Äquivalenzklassen nicht mit Repräsentanten bezeichnet, sondern als Mengen notiert.)

$R_1: \quad \{a\}, \{b\}, \{c\}$

$R_2: \quad \{a, b\}, \{c\}$

$R_3: \quad \{a, c\}, \{b\}$

$R_4: \quad \{b, c\}, \{a\}$

$R_5: \quad \{a, b, c\}$

Alle Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation zusammen bilden eine disjunkte Zerlegung von M_3 in nicht leere Teilmengen .
Beispiel R_3: $\{a, c\} \cup \{b\} = \{a, b, c\} = M_3, \quad \{a, c\} \cap \{b\} = \emptyset$

Frage: Wie viele verschiedene disjunkte Zerlegungen von M_3 gibt es?
Oder anders formuliert:
Wie viele Äquivalenzrelationen auf M_3 gibt es?
Antwort: **Die 3. Bellsche Zahl**
$B_3 = 5$ ist die Anzahl aller disjunkten Zerlegungen von M_3.

- **für $\mathbf{n = 4}$**, $M_4 = \{a, b, c, d\}$

  Es gibt 15 verschiedene Äquivalenzrelationen

  $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$

  $R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a)\}$

  $R_3 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, c), (c, a)\}$

  $R_4 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, d), (d, a)\}$

  $R_5 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (b, c), (c, b)\}$

  $R_6 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (b, d), (d, b)\}$

  $R_7 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}$

  $R_8 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}$

  $R_9 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, c), (c, a), (b, d), (d, b)\}$

  $R_{10} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, d), (d, a), (b, c), (c, b)\}$

  $R_{11} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\}$

  $R_{12} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (a, d), (d, a), (b, d), (d, b)\}$

  $R_{13} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (b, c), (c, b), (b, d), (d, b), (c, d), (d, c)\}$

  $R_{14} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, c), (c, a), (a, d), (d, a), (c, d), (d, c)\}$

  $$R_{15} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (a, d), (d, a), (b, c), (c, b), (b, d), (d, b), (c, d), (d, c)\}$$

  und somit auch 15 verschiedene Mengen mit Äquivalenzklassen.
  (Wegen der besseren Lesbarkeit sind die Äquivalenzklassen wieder als Mengen notiert.)

  $R_1: \quad \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$

  $R_2: \quad \{a, b\}, \{c\}, \{d\}$

  $R_3: \quad \{a, c\}, \{b\}, \{d\}$

  $R_4: \quad \{a, d\}, \{b\}, \{c\}$

R_5 : $\{b, c\}, \{a\}, \{d\}$
R_6 : $\{b, d\}, \{a\}, \{c\}$
R_7 : $\{c, d\}, \{a\}, \{b\}$

R_8 : $\{a, b\}, \{c, d\}$
R_9 : $\{a, c\}, \{b, d\}$
R_{10} : $\{a, d\}, \{b, c\}$

R_{11} : $\{a, b, c\}, \{d\}$
R_{12} : $\{a, b, d\}, \{c\}$
R_{13} : $\{b, c, d\}, \{a\}$
R_{14} : $\{a, c, d\}, \{b\}$

R_{15} : $\{a, b, c, d\}$

Überlegen Sie sich, wie man aus den Äquivalenzklassen von M_3 **systematisch** die Äquivalenzklassen von M_4 herleiten kann.

f. Anwendung des Lösungsansatzes für $n = 4$ auf die Holzbalkenaufgabe
$M_4 = \{a, b, c, d\}$ ist die Einkaufsliste mit
$a :=$ Holzbalken der Länge $2,48$ m
$b :=$ Holzbalken der Länge $2,96$ m
$c :=$ Holzbalken der Länge $1,34$ m
$d :=$ Holzbalken der Länge $1,64$ m

Es gibt insgesamt 15 Äquivalenzrelationen und somit auch 15 mögliche Kombinationen von Balkenschnitten für die Einkaufsliste M_4.

g. Berechnung der Kosten am Beispiel von R_{14}
Äquivalenzklassen von R_{14} : $\{a, c, d\}, \{b\}$

Die Äquivalenzklasse $\{a, c, d\}$ weist eine Gesamtlänge von
$2,48 + 1,34 + 1,64 = 5,46$ m auf.
Bei der Verwendung eines 6 m langen Balkens beträgt der Verschnitt $0,54$ m und es werden 3 Schnitte benötigt.

Die Äquivalenzklasse $\{b\}$ weist eine Gesamtlänge von $2,96$ m auf.
Bei der Verwendung eines 3 m langen Balkens beträgt der Verschnitt $0,04$ m und es wird 1 Schnitt benötigt.

Bei der Äquivalenzrelation R_{14} beträgt der Verschnitt also insgesamt
$0,54 + 0,04 = 0,58$ m $= 58$ cm und es werden 4 Schnitte benötigt.

h. Lösung zur Holzbalkenaufgabe
Um die kostengünstigste Lösung zu bestimmen müssen zu jeder Äquivalenzrelation die Kostenkennzahlen (Anzahl aller Schnitte, Gesamtverschnitt) aus den jeweiligen Äquivalenzklassen berechnet und verglichen werden.

Relation	Äquivalenzklassen	Anzahl Schnitte	Gesamtverschnitt
R_1	$\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}$	4	$1,58$ cm
R_2	$\{a,b\},\{c\},\{d\}$	4	$1,58$ cm
R_3	$\{a,c\},\{b\},\{d\}$	4	$0,58$ cm
R_4	$\{a,d\},\{b\},\{c\}$	4	$1,58$ cm
R_5	$\{b,c\},\{a\},\{d\}$	4	$1,58$ cm
R_6	$\{b,d\},\{a\},\{c\}$	4	$1,58$ cm
R_7	$\{c,d\},\{a\},\{b\}$	4	$0,58$ cm
R_8	$\{a,b\},\{c,d\}$	4	$0,58$ cm
R_9	$\{a,c\},\{b,d\}$	4	$0,58$ cm
R_{10}	$\{a,d\},\{b,c\}$	4	$1,58$ cm
R_{11}	$\{a,b,c\},\{d\}$	4	$0,58$ cm
R_{12}	$\{a,b,d\},\{c\}$	4	$1,58$ cm
R_{13}	$\{b,c,d\},\{a\}$	4	$0,58$ cm
R_{14}	$\{a,c,d\},\{b\}$	4	$0,58$ cm
R_{15}	$\{a,b,c,d\}$	4	$0,58$ cm

i. **Die Folge der Bellschen Zahlen**
Die Anzahl der möglichen Äquivalenzrelationen einer $n-$elementigen Menge lässt sich mit Hilfe der Folge der Bellschen Zahlen berechnen.

$$
\begin{aligned}
B_1 &= 1 \\
B_2 &= 2 \\
B_3 &= 5 \\
B_4 &= 15 \\
B_5 &= 52 \\
B_6 &= 203 \\
\ldots . & \quad \ldots .
\end{aligned}
$$

$$\text{also} \qquad B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k \quad \text{mit} \quad B_0 = 1$$

zum Beispiel für $n = 4$:

$$
\begin{aligned}
B_4 &= \binom{3}{0} \cdot B_0 + \binom{3}{1} \cdot B_1 + \binom{3}{2} \cdot B_2 + \binom{3}{3} \cdot B_3 \\
&= 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \\
&= 1 + 2 + 6 + 5 \\
&= 15
\end{aligned}
$$

Bei n Balken sind es $B_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot B_k$ Kombinationen.

Vorsicht bei der softwaretechnischen Umsetzung des Problems !!
Für $\mathbf{n = 11}$ sind es schon **über 600000** Möglichkeiten.

Sie sollten jetzt in der Lage sein,
- Äquivalenzrelationen zu definieren,
- Relationen auf die Eigenschaft Äquivalenzrelation zu untersuchen und
- zu einer Äquivalenzrelation zu erweitern.
Sie sollten Äquivalenzklassen kennen und festlegen können.
Sie sollten Ordnungsrelationen kennen und untersuchen können.

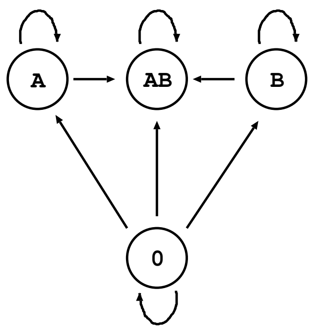
5.1.4. Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sei eine Äquivalenzrelation R auf $M = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ gemäß
$R = \{(1, 8), (3, 7), (4, 4), (9, 8), (7, 3), (5, 5), (9, 1), (8, 9), (8, 1), (1, 9), (3, 3), (8, 8), (7, 7), (1, 1), (9, 9)\}$
Zeichnen Sie ein Diagramm mit Knoten und Kanten (gerichteter Graph) und geben Sie für alle Klassen jeweils äquivalente Elemente in aufzählender Form an.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie auf der Menge $M = \{A, B, AB, O\}$ (Haupt-Blutgruppen)
die Relation R „Blutspender-Relation“ gemäß der Abbildung



auf folgende Eigenschaften:

a) Äquivalenzrelation

b) partielle Ordnungsrelation (Halbordnung)

Aufgabe 3

$n \in \mathbb{Z}$ sei in Relation mit $m \in \mathbb{Z}$ genau dann, wenn $(n - m)$ durch 7 teilbar ist.

a) Zeigen Sie, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.

b) Welche Äquivalenzklassen besitzt diese Relation?

5.2. Abbildungen, Funktionen

In diesem Kapitel wird, ausgehend von Relationen als Teilmengen des kartesischen Produkts $A \times B$, der Begriff der Abbildung eingeführt. Abbildungen sind spezielle Relationen, bei denen es für jedes Element aus A genau ein Tupel in $A \times B$ gibt.

5.2.1. Einleitende Definitionen

Definition 5.2.1 (Funktion, Abbildung, Graph)
*Gegeben seien zwei Mengen $A, B \neq \emptyset$. Eine **Abbildung** oder **Funktion** f von A nach B ordnet jedem Element $x \in A$ genau ein Element $y \in B$ zu.*
*Die Menge der Paare $G(f) := \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$ heißt **Graph** von f.*

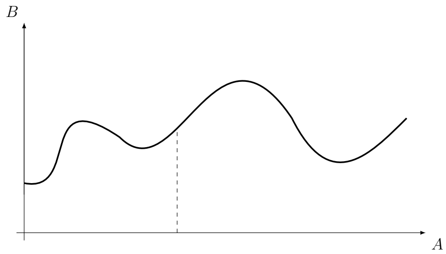


Abbildung 5.8.: Graph einer Funktion

Bemerkung 5.2.2
Abbildungen sind also spezielle (eindeutige) Relationen R, die linkstotal und rechtseindeutig sind.
Dabei bedeutet linkstotal, dass der Vorbereich dem Definitionsbereich (dom) entspricht, also
$\forall x \in A\ \exists y \in B : (x, y) \in R$
und rechtseindeutig (funktional), dass es zu jedem x höchstens ein Paar (x, y) gibt. Also
$\forall x \forall y, z \in B : (x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \Rightarrow y = z$
Entsprechend sind rechtstotal und linkseindeutig definiert.

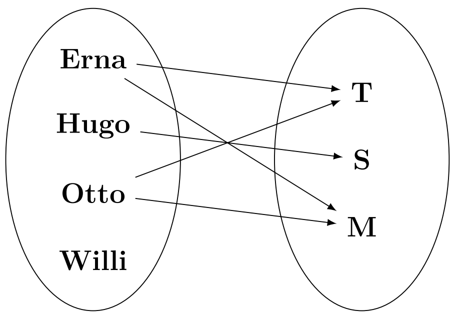


Abbildung 5.9.: Relation, keine Abbildung
weder linkstotal (z.B. „Willi“)
noch rechtseindeutig (z.B. „Erna → T und Erna → M“)

Funktionen sind spezielle Abbildungen, bei denen die zweite Menge eine Zahlenmenge ist. Manche sprechen auch nur von Funktion bei einer Abbildung zwischen Zahlenmengen.

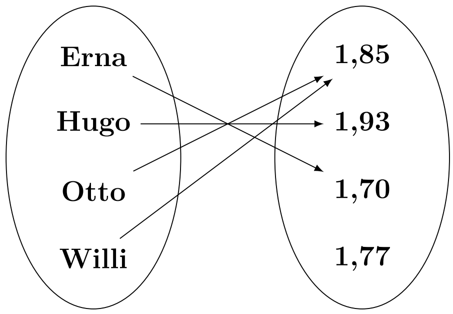


Abbildung 5.10.: Abbildung, Funktion

Bemerkung 5.2.3 (Schreibweisen)

- als Ganzes: $f : A \to B$ oder $A \xrightarrow{f} B$
- für einzelne Elemente: $f : x \mapsto y$ oder $y = f(x)$
- Definitionsbereich A, Wertevorrat B
- identische Abbildung: $id_A : A \to A$ mit $\forall x \in A \; id_A(x) = x$

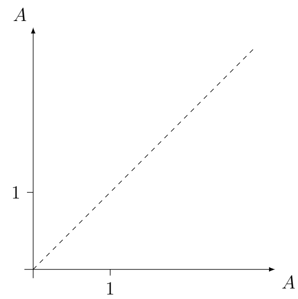


Abbildung 5.11.: Identische Abbildung

Bemerkung 5.2.4

Manchmal betrachtet man zu einer gegebenen reellen Funktion einer reellen Veränderlichen das Bild einer Menge. Ist die Funktion f gegeben (von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$) und ist U eine Teilmenge des Definitionsbereichs (z.B. ein Intervall), so versteht man unter $f[U] = \{y | \exists x \in U \text{ mit } y = f(x)\}$ das Bild von U unter f. Man beachte die eckigen Klammern hinter dem Funktionszeichen!

Beispiel 5.2.5

Beispiel: $f(x) = x^2$ und $U = [1; 2]$, so ist $\underbrace{f[U]}_{\text{Bild von U}} = \underbrace{[1; 4]}_{\text{Intervall}} := V$

Die eckigen Klammern hinter f symbolisieren „Bild von U unter f“, die eckigen Klammern hinter dem Gleichheitszeichen bedeuten jedoch „abgeschlossenes Intervall“!

Manchmal sucht man diejenige Teilmenge des Definitionsbereichs, die auf eine Teilmenge des Wertebereichs abgebildet wird. Man spricht dann vom Urbild der Menge V bezüglich f.

$$f^{-1}[V] := \{x \mid f(x) \in V\}$$

Die Bezeichnung $f^{-1}[V]$ darf nicht mit der Symbolik für eine Umkehrfunktion verwechselt werden. Das Urbild einer Menge existiert immer, wogegen eine Umkehrfunktion nicht immer existiert (siehe Kapitel 5.2.2).

Zurück zum Beispiel 5.2.5 auf der vorherigen Seite mit $f(x) := x^2$: für $V = [1;4]$ ist $f^{-1}[V] = [-2;-1] \cup [1;2]$
Man spricht vom Urbild der Menge V.
(Für $f(x) = x^2$ existiert auf dem Intervall keine Umkehrfunktion!!)

Das Urbild ist also eine Teilmenge des Definitionsbereichs und das Bild ist eine Teilmenge des Wertevorrats.

Beispiel 5.2.6 (Die Sinusfunktion)
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = sin(x)$,
dann ist $f[\mathbb{R}] = [-1, 1]$ und $f^{-1}[[0, 1]] = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[2k\pi, (2k + 1)\pi]$

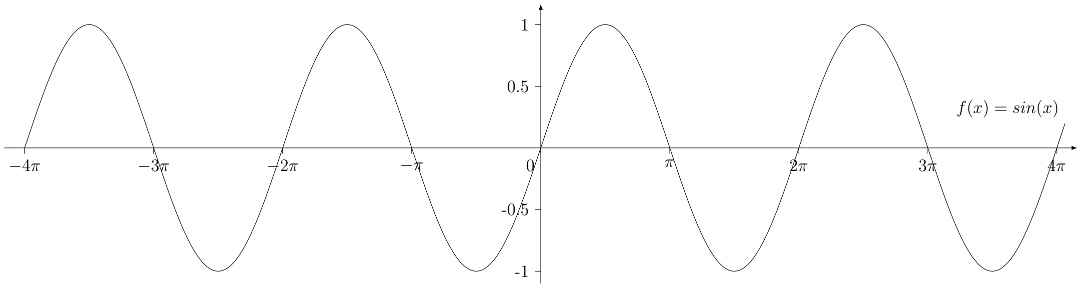


Abbildung 5.12.: Die Sinus-Funktion

5.2.2. Eigenschaften von Abbildungen/Funktionen

- **Injektivität:** Jedes Element der Bildmenge wird höchstens einmal zugeordnet. Die Abbildung ist linkseindeutig.
  $\forall s, t \in A : s \neq t \Rightarrow f(s) \neq f(t)$ oder $f(s) = f(t) \Rightarrow s = t$

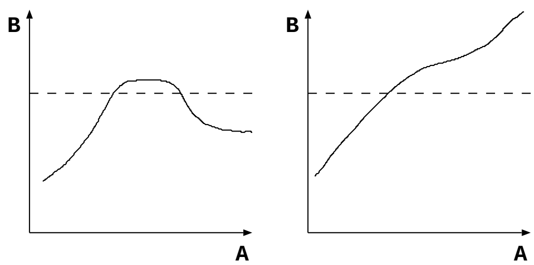


Abbildung 5.13.: links: nicht injektiv, rechts: injektiv

Abbildung 5.14.: links: nicht injektiv (1,70 ist zweimal zugeordnet), rechts: injektiv

Bemerkung: Reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen, die streng monoton sind, sind injektiv (hinreichende Bedingung). Die Umkehrung gilt nicht.

- **Surjektivität:** Jedes Element der Bildmenge wird mindestens einmal zugeordnet. Die Abbildung ist rechtstotal.
  $\forall y \in B \quad \exists x \in A : f(x) = y$ (jedes $y \in B$ ist Bild)

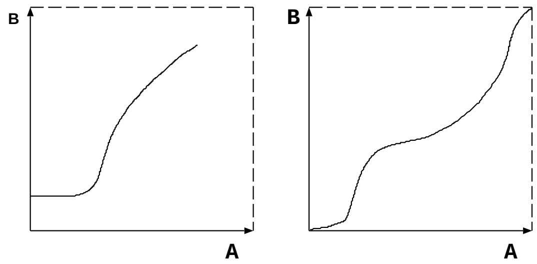


Abbildung 5.15.: links: nicht surjektiv, rechts: surjektiv

Abbildung 5.16.: links: nicht surjektiv (1,85 ist nicht zugeordnet), rechts: surjektiv

- **Bijektivität:** Jedes Element der Bildmenge wird genau einmal zugeordnet. Die Abbildung ist injektiv und surjektiv und somit eineindeutig.

Beispiel 5.2.7

a) $A = \{\text{Mitarbeiter}\} = \{\text{Willi, Sven, Jutta, Olaf}\}$
$B = \{\text{ Gehälter }\} = \{1000, 2000, 3000\}$
f_1 : Mitarbeiter x erhält Gehalt y
$G(f_1) = \{(\text{Willi}, 1000), (\text{Sven}, 1000), (\text{Jutta}, 3000), (\text{Olaf}, 1000)\}$
Nicht injektiv, da das Gehalt „1000“ dreimal zugeordnet ist.
Nicht surjektiv, da das Gehalt „2000“ nicht zugeordnet ist.

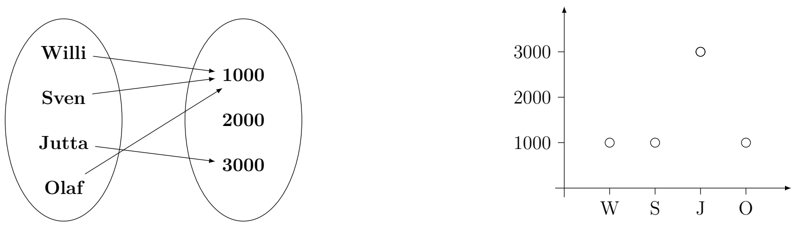


Abbildung 5.17.: Grafiken zu Beispiel 5.2.7 Pkt. 1, (nicht injektiv, nicht surjektiv)

b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 4, 9, 16, 25\}, f_2(x) = x^2$

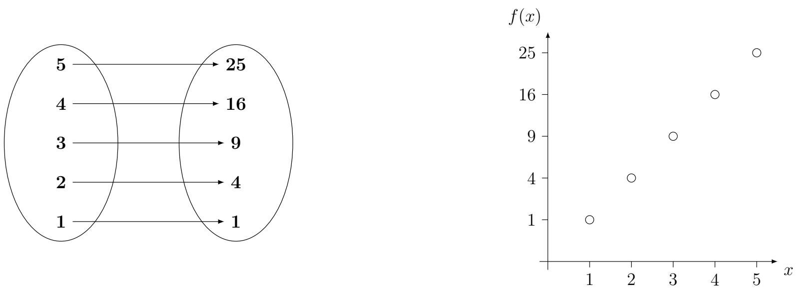


Abbildung 5.18.: Grafiken zu Beispiel 5.2.7 Pkt. 2, (bijektive Abbildung)

c) $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \,, f(n) = n + (-1)^n$
Zu zeigen: Bijektivität (also f injektiv und surjektiv)

(1) Injektivität: $f(n) = f(m) \Leftrightarrow n + (-1)^n = m + (-1)^m$
Fallunterscheidung

$$
\begin{array}{lllcll}
\text{i) } n \text{ gerade} & \text{a) } m \text{ ungerade:} & n+1 & = & m-1 & \\
 & & \Leftrightarrow n & = & m-2 & \lightning \\
 & \text{b) } m \text{ gerade:} & n+1 & = & m+1 & \\
 & & \Rightarrow n & = & m & \\
\text{ii) } n \text{ ungerade} & \text{a) } m \text{ ungerade:} & n-1 & = & m-1 & \\
 & & \Rightarrow n & = & m & \\
 & \text{b) } m \text{ gerade:} & n-1 & = & m+1 & \\
 & & \Leftrightarrow n & = & m+2 & \lightning
\end{array}
$$

(2) Surjektivität: Es ist zu zeigen $\forall k \in \mathbb{N}_0 \, \exists n \in \mathbb{N}_0$ mit $f(n) = n + (-1)^n = k$
Zu beliebigem k muss man ein n angeben, also wie hängt n von k ab ?

Fallunterscheidung
i) k ungerade $\Rightarrow$ n gerade $\Rightarrow$ $n = k - 1$
ii) k gerade $\Rightarrow$ n ungerade $\Rightarrow$ $n = k + 1$

d) $A = \mathbb{R}; B = \mathbb{R}, f_3(x) = x^2$
Diese Abbildung ist weder injektiv noch surjektiv.
nicht injektiv: $f_3(-2) = f_3(2) = 4$, aber $-2 \neq 2$
nicht surjektiv: $f_3(x) = x^2 \geq 0$, dh. negative Funktionswerte werden nicht zugeordnet

e) $A = \mathbb{R}^+, B = \mathbb{R}^+, f_4(x) = x^2$
Diese Abbildung ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

f) M sei eine Menge, $\wp(M)$ die zugehörige Potenzmenge (Menge aller Teilmengen)

$A = \wp(M) \times \wp(M) = \{(F, G) | F \in \wp(M) \wedge G \in \wp(M)\}, B = \wp(M)$
Die Abbildung $f_5 : A \to B$ ordnet jedem Tupel von zwei Teilmengen ihren Durchschnitt zu.
Also $(F, G) \to F \cap G$ und es gilt (auch für $F \neq G$):
$f_5(F, G) = F \cap G = G \cap F = f_5(G, F)$
dh. die Abbildung ist nicht injektiv.
z.B. $M = \{1, 2\}, \wp(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
dann ist $f_5((\{1\}, \emptyset)) = \emptyset = f_5((\emptyset, \{2\}))$, aber $(\{1\}, \emptyset) \neq (\emptyset, \{2\})$
f_5 ist aber surjektiv, da für jedes F aus der Potenzmenge von M auch $f_5(F, M) = F$ ist.

g) $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f_6((a, b)) = a + b$
f_6 ist nicht injektiv, aber surjektiv
nicht injektiv: $f_6((1, 2)) = f_6((2, 1)) = 3$, aber $(1, 2) \neq (2, 1)$
surjektiv: jeder Wert $x \in \mathbb{R}$ wird durch die Addition von reellen Zahlen zugeordnet

---

Definition 5.2.8 (Umkehrfunktion)
Falls $f : A \to B$ bijektiv ist, heißt $f^{-1} : B \to A$ ***Umkehrfunktion*** *oder* ***Umkehrabbildung*** *von f.*
Dabei ist für jedes $y \in B$ der Funktionswert $f^{-1}(y)$ definiert als dasjenige (eindeutige) $x \in A$ mit $y = f(x)$.

Bemerkung 5.2.9 (Die Umkehrfunktion)
$y = f(x)$ ist bijektiv, dann ist $x = f^{-1}(y)$ auch bijektiv[2]
Es gilt $(x, y) \in G(f) \Rightarrow (y, x) \in G(f^{-1})$
$f(f^{-1}) = id$ (identische Abbildung)
Zur Injektivität von f^{-1}:
$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) \;\Rightarrow\; f(f^{-1}(y_1)) = f(f^{-1}(y_2)) \;\Rightarrow\; y_1 = y_2$
Zur Surjektivität:
Zu x aus A ist $y = f(x) \;\Rightarrow\; f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$

[2] Die Notation sollte nicht mit der Bezeichnung fürs Urbild der Menge V bezüglich f verwechselt werden.

Beispiel 5.2.10 (Die Quadratwurzelfunktion)
Sie ist die Umkehrfunktion des quadratischen Polynoms für positive Werte.
$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) = x^2$ $G_f = \{(x, y)|y = f(x)\}$ $\quad y = f(x) = x^2$
$G_{f^{-1}} = \{(y, x)|x = f^{-1}(y)\}$ $\quad x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

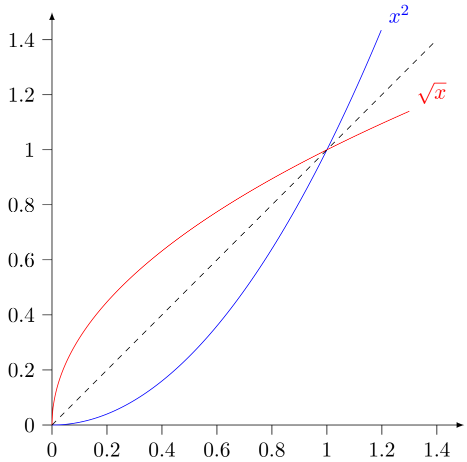


Abbildung 5.19.: Umkehrfunktion – Der Graf wird an der Winkelhalbierenden gespiegelt.

Beispiel 5.2.11

a) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c\} \Rightarrow G(f) = \{(1, b), (2, c), (3, a)\}, G(f^{-1}) = \{(b, 1), (c, 2), (a, 3)\}$

b) $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f(x) = x + 2, f^{-1}(y) = y - 2 \Rightarrow f^{-1}(f(x)) = (x + 2) - 2 = x = id_{\mathbb{R}}$

c) $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f(x) = x^2$ besitzt keine Umkehrfunktion
aber: $A = B = \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = x^2$ ist bijektiv, also $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, ($\sqrt{x}$ ist definiert für $\mathbb{R}_{\geq 0}$)

Definition 5.2.12 (Verkettung von Funktionen)
*Für $f : A \to B$ und $g : C \to D$ mit $f[A] \subseteq C$ heißt $g \circ f : A \to D$ bzw. $g(f(x))$ die **Verkettung** oder **Zusammensetzung** von f und g („g nach f“)*

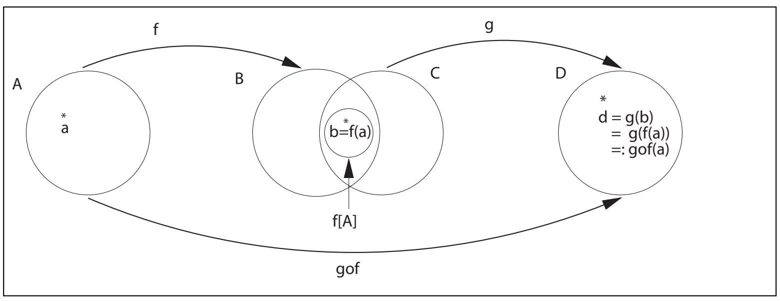


Abbildung 5.20.: Verkettung von Funktion (hier: $g \circ f(x) = g(f(x))$)

Beispiel 5.2.13

a) $A, B = \mathbb{R}, C, D = \mathbb{R}, f(x) = x^2 \Rightarrow f[\mathbb{R}] = \mathbb{R}^+ \subseteq C$
$g(x) = x + 2 \Rightarrow g(f(x)) = x^2 + 2 \quad \neq \quad f(g(x)) = (x+2)^2$

b) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{p, q, r, s\}, f : A \to B, G(f) = \{(1, p), (2, p), (3, q)\}$
$C = \{p, q\}, D = \{a, b\}, g : C \to D, G(g) = \{(p, b), (q, b)\}$
$f[A] = \{p, q\} \subseteq C$, daher $g \circ f$ bildbar und es gilt $G(g \circ f) = \{(1, b), (2, b), (3, b)\}$
$f \circ g$ ist nicht bildbar

Beispiel 5.2.14 (Zusammengesetzte Funktionen)

a) $f(x) = x^2,\ x \in [-1; 1] = D_f$ und $g(x) = \sin(x),\ x \in [-2\pi; 2\pi] = D_g$
$f\big[\,[-1; 1]\,\big] = [0; 1] \subseteq [-2\pi; 2\pi] = D_g$
$g \circ f(x) = \sin(x^2)$ ist bildbar.
$g\big[[-2\pi; 2\pi]\big] = [-1; 1] \subseteq [-1; 1] = D_f$
$f \circ g(x) = \sin^2(x)$ ist bildbar.

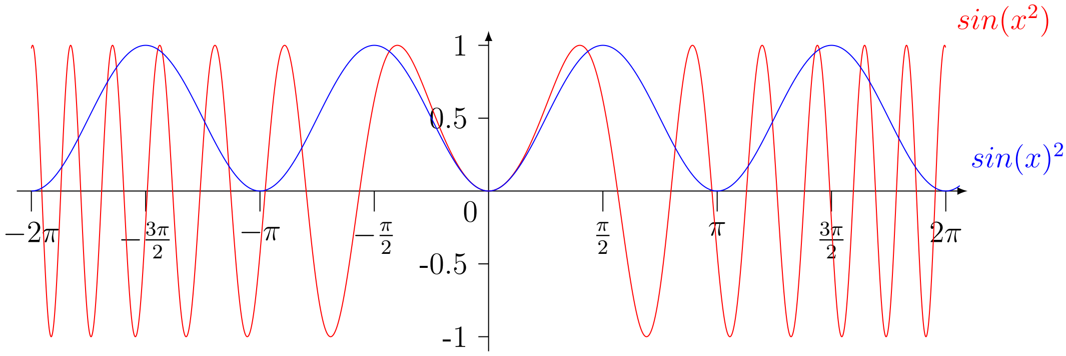


Abbildung 5.21.: $sin(x^2), sin(x)^2 = sin^2(x) = (sin(x))^2$

b) **aber**: $f(x) = x^2,\ x \in [-3; 0] = D_f$ und $g(x) = \sin(x),\ x \in [-2\pi; 2\pi] = D_g$
$f[-3; 0] = [0; 9] \nsubseteq [-2\pi; 2\pi] = D_g$
$g \circ f(x)$ ist nicht bildbar
und $g[-2\pi; 2\pi] = [-1; 1] \nsubseteq [-3; 0] = D_f$
$f \circ g(x)$ ist ebenfalls nicht bildbar.

Satz 5.2.15

f, g seien Abbildungen, $f \circ g$ und $g \circ f$ seien bildbar.

a) Sei $f : A \to B$ bijektiv, $g : B \to A$. Dann gilt
$g = f^{-1} \Leftrightarrow g \circ f = id_A \Leftrightarrow f \circ g = id_B$

b) Sei f bijektiv $\Rightarrow f^{-1}$ ist bijektiv.
Sei f bijektiv, dann gilt $(f^{-1})^{-1} = f$.

c) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ bijektiv. Dann gilt
$g \circ f$ ist bijektiv und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. (Reihenfolge beachten!)

Beweise:

a) „⇒“ Sei $g = f^{-1} \Rightarrow \begin{cases} g \circ f = f^{-1} \circ f = f^{-1}(f(x)) = id_A \\ f \circ g = f \circ f^{-1} = f(f^{-1}(x)) = id_B \end{cases}$

„⇐“ $\begin{cases} \text{Sei } g \circ f = id_A \Rightarrow g = g \circ f \circ f^{-1} = id_A \circ f^{-1} = f^{-1} \\ \text{Sei } f \circ g = id_B \Rightarrow f = f \circ g \circ g^{-1} = id_B \circ g^{-1} = g^{-1} \end{cases}$

b) $(f^{-1})^{-1} \circ f^{-1} \quad = id_B$ (siehe Teil 1)

$$\Rightarrow (f^{-1})^{-1} \circ \overbrace{f^{-1} \circ f}^{id_B} = id_B \circ f$$
$$\Leftrightarrow (f^{-1})^{-1} \quad = f$$

c) weil $g : B \to C$ und $f : A \to B$, ist $g \circ f = g(f(x)) : A \to C$

$$g \circ f \circ \quad f^{-1} \circ g^{-1} \quad = g \circ g^{-1} = id_C$$
$$\Leftrightarrow g \circ f \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = id_C \qquad (g \circ f \text{ bijektiv})$$
$$\overset{(1.)}{\Rightarrow} \qquad (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \text{, da}$$

$\alpha)$ $g(y_1) = g(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$ $\quad g$ injektiv

$\beta)$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ $\quad f$ injektiv

$$g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g \circ f(x_2) = g(f(x_2)$$
$$\overset{(\alpha)}{\Rightarrow} f(x_1) = f(x_2) \overset{\beta}{\Rightarrow} x_1 = x_2 \qquad g \circ f \text{ injektiv}$$

Beispiel 5.2.16 (zwei bijektive verkettete Funktionen und ihre Umkehrfunktion)
$f(x) = x^3,\ A = D_f = \mathbb{R},\ B = f[D_f] = \mathbb{R}$
$g(y) = y - 1,\ C = D_g = \mathbb{R},\ D = g[D_g] = \mathbb{R}$
$B = f[D_f] = \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R} = D_g = C$
Also ist $f \circ g$ bildbar. $f \circ g(x) = f(g(x)) = (x-1)^3$

Die Umkehrfunktion von $f \circ g$ ist ebenfalls bildbar. Sie setzt sich aus den beiden Umkehrfunktionen wie folgt zusammen: **Die Umkehrfunktion der zusammengesetzten Funktion = die zusammengesetzte Funktion der Umkehrfunktionen in umgekehrter Reihenfolge.**
also: $(f \circ g)^{-1}(x) = g^{-1} \circ f^{-1}(x)$

Im Beispiel ist $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ und $g^{-1}(x) = x + 1$
also $(f \circ g)^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} + 1$

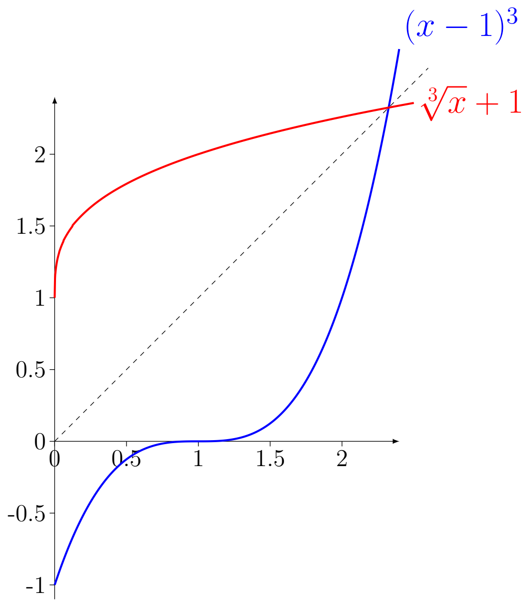


Abbildung 5.22.: bijektive verkettete Funktionen und ihre Umkehrfunktionen

Spezielle Abbildungen sind binäre Operationen:
$f : X \times X \to X$ mit $f : (x, y) \mapsto z$ mit $x, y, z \in X$
Symbole oft: $+, \cdot, \circ, *, \ldots$

Beispiel 5.2.17

a) $M = \{0, 1\}, +$
$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 0$
oder Definition von f_1 als Tabelle

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

b) $X = \mathbb{N}, f_2 = +$ mit $f_2 : (x, y) \mapsto x + y$

oder Definition von f_2 als Tabelle

+	1	2	3	...
1	2	3	4	...
2	3	4	5	...
3	4	5	6	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

c) $X = \wp(M) = \{\{1,2\}, \{1\}, \{2\}, \{\ \}\}, f_3 = \cap$ mit $f_3 : (A, B) \mapsto A \cap B$

oder Definition von f_3 als Tabelle

$\cap$	$\{1,2\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{\}$	$\{2\}$	$\{\}$
$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$

Bemerkung 5.2.18 (Spezielle Eigenschaften von binären Operationen)

a) Kommutativität: $f((a, b)) = f((b, a))$

b) Assoziativität: $f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c))$

c) Distributivität von f über g: $f(a, g(b, c)) = g(f(a, b), f(a, c))$

Beispiel 5.2.19 (kommutativ, assoziativ, distributiv)

a) $f = \cap :$ $A \cap B = B \cap A$ Kommuntativgesetz (KG)

b) $f = \cap :$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ Assoziativgesetz (AG)

c) $f = \cap, g = \cup :$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ Distributivgesetz (DG)

d) $-$ in $\mathbb{R}$ ist nicht assoziativ, nicht kommutativ

e) $\circ$ für Funktionen ist nicht kommutativ

f) $+$ ist nicht distributiv über $\cdot$

$a + (b \cdot c) \neq (a + b) \cdot (a + c)$

Sie sollten jetzt in der Lage sein,
- Abbildungen von Relationen zu unterscheiden,
- Abbildungen auf injektiv, surjektiv und bijektiv zu untersuchen,
- Definitions- und Wertebereiche festzulegen,
- Umkehrabbildungen anzugeben und zu skizzieren,
- Abbildungen zu verknüpfen.

5.2.3. Aufgaben

Aufgabe 1

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := ||x - 2| - 5|$.

a) Zeichnen Sie den Graphen von f.

b) Untersuchen Sie f auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

c) Bestimmen Sie $f[0; 3]$ und $f^{-1}[0; 1]$.

d) Bestimmen Sie die Intervalle, auf denen f injektiv ist, und geben Sie für diese Intervalle die Umkehrabbildungen an.

   Hinweis: Die Betragsfunktion $|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$

Aufgabe 2

Die Funktionen f und g seien folgendermaßen gegeben:
$f : [-\pi; \pi] \to [-1; 1]$ mit $f(x) = \sin(x)$, $\quad g : [0; 1] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}$
Lassen sich $f \circ g$ bzw. $g \circ f$ bilden? Wenn ja, geben Sie den Definitionsbereich, die zusammengesetzte Funktion und den Wertebereich an.

5.3. Auswertung von Polynomen

In diesem Kapitel werden Polynome eingeführt und die Berechnung von Polynomen mit dem sogenannten Horner-Schema erläutert. Polynome sind sehr einfache Funktionen. Sie werden auch ganz-rationale Funktionen genannt.
Polynomwerte lassen sich mit den Grundrechenarten in endlich vielen Schritten berechnen[3]. Besonders effektiv geschieht das mit dem Horner-Schema.
In der Analysis werden Sie lernen, dass Polynome stetig, integrierbar und differenzierbar sind. Im Grenzwert für x gegen $\pm\infty$ streben Sie gegen $\pm\infty$ bzw. $\mp\infty$.

Definition 5.3.1 (Polynom)
Eine Funktion der Form $p_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot (x - x_0)^k$ *heißt* ***Polynom vom Grad*** $\mathbf{n}$ $(a_n \neq 0)$.
Die a_k *sind reelle (bzw. komplexe) Zahlen (Koeffizienten),* n *ist eine natürliche Zahl (Grad des Polynoms,* $a_n \neq 0$*) und* x_0 *ist der Entwicklungspunkt des Polynoms.*

Oft betrachtet man Polynome in der einfacheren Form (um den Nullpunkt entwickelt ($x_0 = 0$*)).*
also $\quad p_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$

Beispiel 5.3.2

a) $p_2(x) = 3 + 2x + 7x^2$

b) $a_0 = 0,1 \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_{24} = 0, \quad a_{25} = \pi \quad p_{25} = 0,1 + \pi x^{25}$

Polynome sind Linearkombinationen der sogenannten Monome x^k. Diese Monome sind ebenfalls wieder Polynome und für ungerade Exponenten k bijektiv auf $\mathbb{R}$.

$$\text{Monome : } \begin{cases} p_0(x) = 1 \\ p_1(x) = x \\ p_2(x) = x^2 \\ \quad\vdots \end{cases}$$

Der Grad eines Polynoms $(grad(p_n(x)) = n)$ bestimmt sich aus dem größten Monom mit $a_n \neq 0$.

Bemerkung 5.3.3 (reelle Polynome und ihre reellen Nullstellen)

- Ein reelles Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt eine Nullstelle $x_0 \;\Leftrightarrow\; p(x_0) = 0$
- Nicht jedes Polynom hat eine (reelle) Nullstelle, z.B.: $p(x) = x^2 + 1$
- Reelle Polynome vom Grad n haben höchstens n (reelle) Nullstellen.
- Polynome mit ungeradem Grad , also $p(x) = a_{2k-1}x^{2k-1} + \ldots + a_0$, haben mindestens eine reelle Nullstelle.
  z.B.: $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1, x_0 = -1,$ denn $p(-1) = 0$

[3]Andere Funktionen wie etwa der Sinus werden durch Approximation mit geeigneten Polynomen ausgewertet.

- Zum Berechnen der Nullstellen bei Polynomen vom Grad 2 kann man die pq-Formel oder die Methode der quadratischen Ergänzung anwenden (siehe Anhang A).

- Ist x_0 Nullstelle eines Polynom $p_n(x)$ vom Grad n, dann gibt es ein Polynom vom Grad $(n-1)$ mit $p_n(x) = (x - x_0) \cdot p_{n-1}(x)$ (Abspaltung einer Nullstelle).
  p_{n-1} kann z.B. mit dem Horner-Schema berechnet werden.
  Allgemein, also falls x_0 nicht Nullstelle ist, gilt $p_n(x) = (x - x_0) \cdot p_{n-1}(x) \, + \, p_n(x_0)$

- Hat ein Polynom vom Grad n, also $p_n(x)$, n verschiedene reelle Nullstellen $x_0, \ldots, x_{n-1}$, dann kann man sie alle abspalten und kommt zu der Darstellung

$$p_n(x) = a_{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k) \quad \text{(Darstellung als Produkt von Linearfaktoren)}$$

Bemerkung 5.3.4 (Mehrfache Nullstellen)

- Ein Polynom $p_n(x)$ hat in x_0 eine k-fache Nullstelle genau dann, wenn
  $p_n(x) = (x - x_0)^k \cdot p_{n-k}(x)$ und $p_{n-k}(x_0) \neq 0$
  zum Beispiel: x^4 hat in $x_0 = 0$ eine 4-fache Nullstelle

- Allgemein hat eine Funktion $f(x)$, die hinreichend oft stetig differenzierbar ist (siehe Analysis-Kurs), in x_0 eine k-fache Nullstelle genau dann, wenn $f(x_0) = 0$ und auch die ersten $(k-1)$-Ableitungen an dieser Stelle gleich 0 sind, die k-te Ableitung jedoch ungleich Null ist.
  Im Beispiel oben mit $f(x) = x^4$ besitzt die vierte Ableitung in $x_0 = 0$ den Wert 24.

Das einfache Hornerschema

Jetzt wird das Horner-Schema eingeführt, mit dem man unterschiedliche Aufgaben im Zusammenhang mit Polynomen bearbeiten kann.

Beispiel 5.3.5 (Das einfache Hornerschema)
Das Polynom $P_3(x)$ ist in 3 Formen gegeben:
$P_3(x) = 4x^3 - x^2 + 2x - 10 \; = \; (4x^2 - x + 2) \cdot x - 10 \; = \; ((4x - 1) \cdot x + 2) \cdot x - 10$
Diese drei unterschiedlichen Vorschriften (Algorithmen) berechnen zwar denselben Wert, unterscheiden sich jedoch in ihrem Rechenaufwand. Die erste Vorschrift benötigt die meisten Rechenoperationen.
$P_3(x) = 4x^3 - x^2 + 2x - 10 = 4 \cdot x \cdot x \cdot x - x \cdot x + 2 \cdot x - 10$ (5 Multiplikationen, 3 Additionen)
$P_3(x) = (4x^2 - x + 2) \cdot x - 10 = (4 \cdot x \cdot x - 1 \cdot x + 2) \cdot x - 10$ (4 Multiplikationen, 3 Additionen)
$P_3(x) = ((4 \cdot x - 1) \cdot x + 2) \cdot x - 10$ (3 Multiplikationen, 3 Additionen)
Der dritte Berechnungsalgorithmus ist die Form, die dem Hornerschema zugrunde liegt.
Ausgehend vom Koeffizienten der höchsten Potenz, wird abwechselnd mit dem Argument x multipliziert und ein Koeffizient addiert. Dies kann tabellarisch mit dem nach William George Horner (1786 - 1837) benannten Schema durchgeführt werden.

Berechnung von $P_3(2) = 4 \cdot 2^3 - 2^2 + 2 \cdot 2 - 10 = ((4 \cdot 2 - 1) \cdot 2 + 2) \cdot 2 - 10$

	4	-1	2	-10
$x = 2$		$4 \cdot 2 = 8$	$7 \cdot 2 = 14$	$16 \cdot 2 = 32$
	4	$8 + (-1) = 7$	$14 + 2 = 16$	$32 + (-10) = 22 = P_3(2)$

Die Koeffizienten des abdividierten Polynoms lauten $4, 7$ und 16 (beginnend mit der höchsten Potenz). Für $x = 2$ ergibt sich der Wert des Polynoms $P_3(2) = 22$.

Das ursprünglich Polynom $P_3(x)$ wird jetzt wie folgt dargestellt:
$P_3(x) = (x - 2) \cdot (4 \cdot x^2 + 7 \cdot x + 16) + 22$

Satz 5.3.6 (Das einfache Hornerschema)

Sei $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ein Polynom n-ten Grades. Definiere induktiv für $x_1 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} b_n &:= a_n \\ b_{i-1} &:= b_i x_1 + a_{i-1} \text{ für } i = n, ..., 1 \end{aligned}$$

dann gilt:

$$\begin{aligned} b_0 &= P_n(x_1) \\ P_n(x) &= (x - x_1) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i x^{i-1} \right) + P_n(x_1) \end{aligned}$$

Zusammenfassend liefert die Ergebniszeile (= letzte Zeile) des Hornerschemas folgendes:
- die Koeffizienten des abdividierten Polynoms (b_i)
- den Wert des ursprünglichen Polynoms an der Stelle x_1, also $P_n(x_1)$
- und somit eine andere Darstellungsform des ursprünglichen Polynoms
  $P_n(x) = (x - x_1) \left(\sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} \cdot x^i \right) + P_n(x_1)$

Beispiel 5.3.7 (Division eines Polynoms durch einen linearen Term)
Aufgabe:
Das Polynom $p(x) = 4x^4 - 15x^3 + 14x^2 - 17x + 9$ soll durch $(x - 3)$ dividiert werden.
Es werden 3 Ansätze zur Berechnung vorgestellt.

a) Das einfache Hornerschema

	4	-15	14	-17	9
$x_1 = 3$		$3 \cdot 4 = 12$	$3 \cdot (-3) = -9$	$3 \cdot 5 = 15$	$3 \cdot (-2) = -6$
	$\mathbf{4}$	$12 + (-15) = \mathbf{-3}$	$-9 + 14 = \mathbf{5}$	$15 + (-17) = \mathbf{-2}$	$-6 + 9 = \mathbf{3}$

- Die Koeffizienten des abdividierten Polynoms sind $b_3 = 4, b_2 = -3, b_1 = 5, b_0 = -2$.
- Der Funktionswert an der Stelle 3 ist $p(3) = 3$.
- Eine andere Darstellungsform ist $p(x) = (x - 3) \cdot (4x^3 - 3x^2 + 5x - 2) + 3$

b) Die Polynomdivision

$$
\begin{array}{l}
(4x^4 - 15x^3 + 14x^2 - 17x + 9) : (x-3) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 2 \\
-\underline{(4x^4 - 12x^3)} \\
\qquad -3x^3 + 14x^2) \\
\qquad -\underline{(-3x^3 + 9x^2)} \\
\qquad\qquad 5x^2 - 17x) \\
\qquad\qquad -\underline{(5x^2 - 15x)} \\
\qquad\qquad\qquad -2x + 9) \\
\qquad\qquad\qquad -\underline{(-2x + 6)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 3
\end{array}
$$

bei der Division bleibt der Rest 3 , also ist
$p(x) : (x-3) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 2 + \frac{3}{x-3}$
bzw. $p(x) = 4x^4 - 15x^3 + 14x^2 - 17x + 9 = (x-3) \cdot (4x^3 - 3x^2 + 5x - 2) + 3$

c) Die aufwendigste Berechnung erfolgt mit dem Koeffizientenvergleich[4]. Dabei werden die Koeffizienten der Polynome der linken und der rechten Seite einer Gleichung monomenweise miteinander verglichen.
D.h. die Koeffizienten des Monoms x^k der linken und der rechten Seite der Gleichung müssen gleich sein. Das gilt für alle Monome des Polynoms.
Es entsteht ein lineares Gleichungsystem, das gelöst werden muss.
Die Formel $P_n(x) = (x - x_1)\left(\sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} \cdot x^i\right) + P_n(x_1)$ führt zu folgender Gleichung:

$$
\begin{aligned}
4x^4 - 15x^3 + 14x^2 - 17x + 9 &= (x-3) \cdot (b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) + r_0 \\
&= b_3x^4 + b_2x^3 + b_1x^2 + b_0x - 3b_3x^3 - 3b_2x^2 - 3b_1x - 3b_0 + r_0 \\
&= b_3x^4 + (b_2 - 3b_3)x^3 + (b_1 - 3b_2)x^2 + (b_0 - 3b_1)x - 3b_0 + r_0
\end{aligned}
$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$
\begin{aligned}
b_3 = 4 &\quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{b_3 = 4} \\
b_2 - 3b_3 = -15 &\quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{b_2} = -15 + 3b_3 = \mathbf{-3} \\
b_1 - 3b_2 = 14 &\quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{b_1} = 14 + 3b_2 = \mathbf{5} \\
b_0 - 3b_1 = -17 &\quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{b_0} = -17 + 3b_1 = \mathbf{-2} \\
-3b_0 + r_0 = 9 &\quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{r_0} = 9 + 3b_0 = \mathbf{3}
\end{aligned}
$$

$p(x) = 4x^4 - 15x^3 + 14x^2 - 17x + 9 = (x-3) \cdot (4x^3 - 3x^2 + 5x - 2) + 3$

Zusammenfassung

Das Hornerschema kann also genutzt werden um folgende Aufgaben zu lösen:

- Abdivision von linearen Termen $(x - x_0)$
  Falls alle x_i dabei die Nullstellen des Polynoms sind $p(x_i) = 0$, läßt es sich auf ganz einfache Weise in seine Linearfaktoren zerlegen.

- Auswertung (Berechnung) von Polynomen an der Stelle x
  So lassen sich die Funktionswerte sowie alle höheren Ableitungen eines Polynoms in x berechnen.

[4] Zwei Polynome sind gleich, wenn die jeweiligen Koeffizienten der gleichen Monome gleich sind.

- Ausblick:
  Im Kapitel 7.3 wird auf Seite 123 das Hornerschema zur Umrechnung natürlicher Zahlen von einem Stellenwertsystem in ein anderes benutzt.

Sie sollten jetzt in der Lage sein,
- Polynome mit dem einfachen Horner-Schema auszuwerten,
- Linearfaktorzerlegungen zu erstellen,
- Polynome zu gegebenen Nullstellen aufzustellen,
- Polynomdivision durchzuführen.

5.3.1. Aufgaben

Aufgabe 1

Berechnen Sie den Funktionswert von $f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 7x + 11$ an der Stelle $x_0 = -3$ mit Hilfe des Horner Schemas.

Aufgabe 2

Das Polynom $f(x) = x^4 + 9x^3 + 18x^2 - 30x - 100, x \in \mathbb{R}$ besitzt die Nullstellen $x = -5$ und $x = 2$. Bestimmen Sie die faktorisierte Darstellung des Polynoms.

Aufgabe 3

Bringen Sie das Polynom $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ auf die Form
$p_1(x) = a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$ und berechnen Sie mit Hilfe des Horner Schemas $p_1(-2)$.

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie ein Polynom möglichst geringen Grades, das die Nullstellen $1, 2$ und 3 hat.

b) Werten Sie das Polynom an den Stellen $x_0 = 1.5$ und $x_1 = 2.5$ mit dem Horner-Schema aus und erläutern Sie das Ergebnis.

Aufgabe 5

Führen Sie für $p_1(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ und $p_2(x) = x - 1$ die Polynomdivision durch und interpretieren Sie das Ergebnis.

6. Rechnen in geordneten Körpern

Die Einführung des Rechnens in abstrakten algebraischen Strukturen ist anspruchsvoll. Beim ersten Lesen sollte man vom Rechnen in bekannten Zahlenmengen (reelle Zahlen, Brüche) und den Grundrechenarten (Addition, Multiplikation) ausgehen, wie man es von der Schule kennt. Die abstrakten Strukturen Gruppe und Körper sollte jeder MaTSE kennen.

6.1. Gruppen und Körper [1]

Es werden Vorkenntnisse über Mengen, über Operationen (Verknüpfungen) auf Mengen sowie über deren Eigenschaften vorausgesetzt.

Definition 6.1.1 (Verknüpfung auf einer Menge)
*Sei M eine Menge. Eine Abbildung $* : M \times M \to M$, die jedem Tupel (x, y) ein Element $*(x, y) := x * y$ zuordnet, heißt **Verknüpfung** auf M.*

Je zwei Elementen aus M wird also ein drittes zugeordnet, wie zum Beispiel bei der Summe von Zahlen.

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ haben bezüglich der Addition einige Eigenschaften, die man zum Vorbild für folgende Definition nehmen kann.

Definition 6.1.2 (Gruppe, abelsch)
G sei eine Menge, auf der eine Verknüpfung $*$ definiert ist.
*$(G, *)$ ist eine **Gruppe** $:\Leftrightarrow \forall x, y, z \in G$ gilt*

a) $(G, *)$ *ist abgeschlossen bzgl. der Verknüpfung*

b) $(x * y) * z = x * (y * z)$ *assoziativ*

c) $\exists e \in G : \forall x \in G \quad x * e = e * x = x$ *ein neutrales Element*[2]

d) $\forall x \in G \quad \exists x^{-1} \in G : x^{-1} * x = x * x^{-1} = e$ *inverse Elemente*[3] *(mind. eins)*

*Falls außerdem $x * y = y * x$ gilt, so heißt die Gruppe **kommutativ** oder **abelsch**.*

Bemerkung 6.1.3 (Gruppenaxiome)
Die Axiome lassen sich mit dem Kürzel **aani** zusammenfassen:
a bgeschlossen **a** ssoziativ **n** eutrales Element **i** nverse Elemente

[1] In diesem Kurs wird auf weitere algebraische Strukturen, wie z.B. Ring, nicht eingegangen.
[2] Das neutrale Element ist eindeutig.
[3] Inverse Elemente sind eindeutig.

Beispiel 6.1.4 (Gruppe)

a) $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine abelsche Gruppe

b) Die Bruchzahlen ohne die NULL bilden eine abelsche Gruppe bezüglich der Multiplikation

c) $M = \{0,1\}$ mit folgender Verknüpfung $\begin{array}{c|cc} * & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$ ist eine abelsche Gruppe

d) Auf $G := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\neq 0}$ sei durch $(a_1, a_2) * (b_1, b_2) := (\underbrace{a_1 + b_1 + 2}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{3a_2 b_2}_{\in \mathbb{R}_{\neq 0}})$ eine Verknüpfung definiert. $(G, *)$ ist eine kommutative Gruppe.

Beweis der Gruppenaxiome

- Abgeschlossenheit
  $\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{\neq 0}\right) \times \left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{\neq 0}\right) \to \left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{\neq 0}\right)$
  $(a_1, a_2) * (b_1, b_2) = (\underbrace{a_1 + b_1 + 2}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{3a_2 b_2}_{\in \mathbb{R}^{\neq 0}}) = (c_1, c_2)$
- Assoziativgesetz
  $(a_1, a_2) * [(b_1, b_2) * (c_1, c_2)] = [(a_1, a_2) * (b_1, b_2)] * (c_1, c_2)$
  $\Leftrightarrow (a_1, a_2) * (b_1 + c_1 + 2; 3b_2 c_2) = (a_1 + b_1 + 2; 3a_2 b_2) * (c_1, c_2)$
  $\Leftrightarrow (a_1 + (b_1 + c_1 + 2) + 2, 3a_2 (3b_2 c_2)) = ((a_1 + b_1 + 2) + c_1 + 2, 3 (3a_2 b_2) c_2)$
  $\Leftrightarrow (a_1 + b_1 + c_1 + 4, 9a_2 b_2 c_2) = (a_1 + b_1 + c_1 + 4, 9a_2 b_2 c_2)$
- Neutrales Element
  $(a_1, a_2) * (n_1, n_2) = (a_1, a_2)$
  $\Leftrightarrow (a_1 + n_1 + 2, 3a_2 n_2) = (a_1, a_2)$
  $\Leftrightarrow a_1 + n_1 + 2 = a_1 \ \wedge \ 3a_2 n_2 = a_2$
  $\Leftrightarrow n_1 = -2 \ \wedge \ n_2 = \frac{1}{3}$
  $N = \left(-2, \frac{1}{3}\right)$
- Inverse Elemente
  $(a_1, a_2) * (i_1, i_2) = \left(-2, \frac{1}{3}\right) = N$
  $\Leftrightarrow (a_1 + i_1 + 2, 3a_2 i_2) = \left(-2, \frac{1}{3}\right)$
  $\Leftrightarrow a_1 + i_1 + 2 = -2 \ \wedge \ 3a_2 i_2 = \frac{1}{3}$
  $\Leftrightarrow i_1 = -4 - a_1 \ \wedge \ i_2 = \frac{1}{9a_2}$
  $(a_1, a_2)^{-1} = \left(-4 - a_1, \frac{1}{9a_2}\right)$
  z.B. zu $(3,4)$ ist $(3,4)^{-1} = \left(-7, \frac{1}{36}\right)$
  Probe: $(3,4) * \left(-7, \frac{1}{36}\right) = \left(3 - 7 + 2, 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{36}\right) = \left(-2, \frac{1}{3}\right) = N$
- Kommutativität
  $$\begin{aligned}(a_1, a_2) * (b_1, b_2) &= (a_1 + b_1 + 2, 3a_2 b_2) \\ &= (b_1 + a_1 + 2, 3b_2 a_2) \\ &= (b_1, b_2) * (a_1, a_2)\end{aligned}$$
  Gilt wegen der Kommutativität der Addition und Multiplikation

e) einfache Funktionen mit der Operation „Verkettung“

Die Funktionenmenge $M = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\},\ \forall i = 1, ..., 6 : f_i : \mathbb{R}\backslash\{0; 1\} \to \mathbb{R}$ und $f_1(x) = x \quad f_2(x) = \frac{1}{x} \quad f_3(x) = 1 - x \quad f_4(x) = \frac{x}{x-1} \quad f_5(x) = \frac{x-1}{x} \quad f_6(x) = \frac{1}{1-x}$
bildet mit der Verkettung $\quad (f_i \circ f_k)(x) = f_i(f_k(x)) \quad$ eine Gruppe.
Zum Erstellen der Verknüpfungstafel muss jede Verknüpfung explizit ausgerechnet und das Ergebnis eingetragen werden. (i Zeilennummerierung, j Spaltennummerierung)

So ist zum Beispiel für $f_5 = \frac{x-1}{x}$ und $f_2 = \frac{1}{x}$ das Ergebnis
$f_5 \circ f_2 = f_5(f_2(x)) = \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}} = (\frac{1}{x} - 1) \cdot x = 1 - x = f_3(x)$

Verknüpfungstafel:

$f_i \circ f_j$	x	$\mathbf{\frac{1}{x}}$	$1-x$	$\frac{x}{x-1}$	$\mathbf{\frac{x-1}{x}}$	$\frac{1}{1-x}$
x	x	$\frac{1}{x}$	$1-x$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{1}{1-x}$
$\mathbf{\frac{1}{x}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{1-x}$
$1-x$	$1-x$	$\frac{x-1}{x}$	x	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x-1}{x}$	x	$1-x$	$\frac{1}{x}$
$\mathbf{\frac{x-1}{x}}$	$\frac{x-1}{x}$	$\mathbf{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{1-x}$	x
$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{x}$	$1-x$	x	$\frac{x-1}{x}$

oder die Ergebnisse mit ihren Funktionsnamen bezeichnet:

$f_i \circ f_j$	f_1	$\mathbf{f_2}$	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_6	f_5	f_4	f_6
f_3	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_4	f_4	f_6	f_5	f_1	f_3	f_2
$\mathbf{f_5}$	f_5	$\mathbf{f_3}$	f_4	f_2	f_6	f_1
f_6	f_6	f_4	f_2	f_3	f_1	f_5

Beweis der Gruppenaxiome

- Abgeschlossenheit
  siehe Verknüpfungstafel
- Assoziativgesetz
  $f_i \circ (f_k \circ f_l) = f_i(f_k(f_l(x))) = f_l(f_i(f_k(x))) = (f_i \circ f_k) \circ f_l \quad$ für $i, k, l \in \{1, 2, \cdots, 6\}$
  siehe Verknüpfungstafel
  Beispiel: $f_6 \circ (f_5 \circ f_4) = f_6(\frac{1}{x}) = \frac{x}{x-1} = f_4(x) = (f_6 \circ f_5) \circ f_4$
- Neutrales Element
  $f_i(f_{neutral}(x)) = f_i(x) \Rightarrow f_{neutral}(x) = f_1(x) = x \quad$ (siehe Verknüpfungstafel)

- Inverse Elemente
  $f_i(f_{invers}(x)) = f_{neutral}(x) = x$
  für $f_1(x):\ f_{invers}(x) = x = f_1(x)$
  für $f_2(x):\ f_{invers}(x) = \frac{1}{x} = f_2(x)$
  für $f_3(x):\ f_{invers}(x) = 1 - x = f_3(x)$
  für $f_4(x):\ f_{invers}(x) = \frac{x}{x-1} = f_4(x)$
  für $f_5(x):\ f_{invers}(x) = \frac{1}{1-x} = f_6(x)$
  für $f_6(x):\ f_{invers}(x) = \frac{x-1}{x} = f_5(x)$ (siehe Verknüpfungstafel)

Folgende Eigenschaften von Gruppen sind wichtig.
Das $*$ kann dabei die Addition oder die Multiplikation bei Zahlen oder eine andere Verknüpfung bedeuten.

a) $(a^{-1})^{-1} = a$
b) $a * b = c * b \Rightarrow a = c$ Kürzungsregel
Beweis: $a * b = c * b \Rightarrow a * \underbrace{b * b^{-1}}_{=e} = c * \underbrace{b * b^{-1}}_{=e} \Rightarrow a = c$
c) $a * x = b \Rightarrow x = a^{-1} * b$ Auflösen einer linearen Gleichung nach x

Es gibt weitere Strukturen („schwächer“ als Gruppe), die jedoch im folgenden nicht weiter behandelt werden.
a) Halbgruppe: assoziativ z.B. $(\mathbb{N}, +)$
b) Monoid: assoziativ, neutrales Element z.B. $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$

Ausgehend von den Rechenregeln der reellen Zahlen fasst der folgende Begriff des Körpers wichtige Rechengesetze für eine axiomatische Einführung zusammen und stellt die abstrakte Grundlage dar.

Definition 6.1.5 (Körper)
K sei eine Menge, auf der zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ definiert sind [4].
*$(K, +, \cdot)$ heißt **Körper** $:\Leftrightarrow \forall x, y, z \in K$ gilt*

a) $x + y = y + x,\ x \cdot y = y \cdot x$ *Kommutativgesetze*

b) $(x + y) + z = x + (y + z),\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ *Assoziativgesetze*

c) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ *Distributivgesetz*

d) In K gibt es zwei Neutralelemente: Null (0) und Eins (1).
Das Neutralelement bezüglich $+$ wird stets mit Null bezeichnet,
das Neutralelement bezüglich $\cdot$ wird stets mit Eins bezeichnet. ($Null \neq Eins$)
Bestimmung der Neutralelemente: $\forall x \in K:\quad x + Null = x,\quad x \cdot Eins = x$

e) $\forall x \in K\ \exists y \in K : x + y = 0$
$\forall x \in K \backslash \{0\}\ \exists z \in K : x \cdot z = 1$ *Inverse Elemente*

---

[4] Die Abgeschlossenheit wird vorausgesetzt.

Bemerkung 6.1.6
$(K, +, \cdot)$ ist genau dann ein Körper, wenn

- $(K, +)$ ist eine kommutative Gruppe
- $(K\backslash\{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe
- das Distributivgesetz gilt

Beispiel 6.1.7 (Körper)

a) $(\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$

b) $K = \{0, 1\}$ mit den folgenden Verknüpfungen:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

c) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$ sind keine Körper, da die inversen Elemente bzgl. der Multiplikation bzw. der Addition fehlen.

Folgerung 6.1.8 (Neutralelement bezüglich + (= Null) und · (= Eins))

a) $a + Null = Null + a = a \quad a \cdot Eins = Eins \cdot a = a \quad \forall a \in K$

b) $a \cdot b = Null \Rightarrow a = Null \vee b = Null$ Nullteilerfreiheit

c) $a \cdot x = b \Rightarrow x = a^{-1} \cdot b$, falls $a \neq$ Null

Bemerkung 6.1.9
Es gibt noch weitere algebraische Strukturen, die jedoch hier keine bedeutende Rolle spielen.
Falls $\cdot$ nicht kommutativ ist, spricht man zum Beispiel vom Schiefkörper.

Folgerung 6.1.10
$(K, +, \cdot)$ sei ein Körper mit den Verknüpfungen Addition und Multiplikation.

a) Die Addition (Multiplikation) endlich vieler Elemente ist unabhängig von der Klammerung und der Reihenfolge.

b) In Körpern kann man „einfache“ (lineare) Gleichungen lösen:
Die Gleichung $a + x = b$ ist in K eindeutig lösbar. ($\Rightarrow$ inverse Elemente sind eindeutig).
Die Gleichung $a \cdot x = b$ ist in K für $a \neq 0$ eindeutig lösbar.

c) $-(-x) = x, (x^{-1})^{-1} = x, x \neq 0$
$0 \cdot x = 0, (-1) \cdot x = -x$
$x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z, \quad x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0 \quad$ (Nullteilerfreiheit)

Wegen der mathematischen Exaktheit wird nun noch der Begriff „geordneter Körper“, auch angeordneter Körper genannt, eingeführt. In diesem speziellen Körper kann man zum Beispiel Ungleichungen lösen. Beim ersten Lesen sollte man einfach an die reellen Zahlen denken.
(Ungleichungen mit reellen Zahlen siehe 6.2 auf Seite 112).

Definition 6.1.11 (geordneter Körper)
$(K, +, \cdot)$ heißt ***geordneter Körper*** *genau dann, wenn K ein Körper ist, auf K eine Ordnung $\leq$ definiert ist und die Körperstruktur und Ordnung verbunden sind durch*

a) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \; \forall x, y, z \in K$

b) $0 \leq x, 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y \; \forall x, y, \in K$

Beispiel 6.1.12
$\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ sind geordnete Körper mit dem üblichen $\leq$, $\mathbb{C}$ ist kein geordneter Körper (siehe Kapitel 8.4 auf Seite 140).

Bemerkung 6.1.13
Für $x, y \in K$, K geordneter Körper, gilt genau eine der drei Aussagen:
(1) $x < y$ (2) $x = y$ (3) $x > y$

Sie sollten jetzt in der Lage sein,
- die Begriffe Gruppe und Körper zu definieren,
- eine konkrete Menge mit einer Verknüpfung auf die Eigenschaften einer Gruppe zu untersuchen,
- eine konkrete Menge mit zwei Verknüpfung auf die Eigenschaften eines Körpers zu untersuchen,
- insbesondere das neutrale Element und die inversen Elemente zu bestimmen.

6.1.1. Aufgaben

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die Menge $M = \{2^k | k \in \mathbb{Z}\}$ bezüglich der Multiplikation eine kommutative Gruppe bildet.

Aufgabe 2

$M = \{n + m \cdot \sqrt{2} \mid n, m \in \mathbb{Q}\ ,\ (n, m) \neq (0, 0)\}$
Zeigen Sie, dass $(M, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist. Die Gültigkeit des AG (Assoziativgesetz) darf vorausgesetzt werden.
Hinweis: Zur Berechnung von Neutralelement und inversen Elementen werden die Koeffizienten von $(\sqrt{2})^0$ und $(\sqrt{2})^1$ verglichen. Dadurch ergeben sich 2 Gleichungen zur Berechnung der 2 Unbekannten.

6.2. Lösung von Ungleichungen in den reellen Zahlen

In diesem Kapitel werden Ungleichungen behandelt. Dazu werden Funktionen wie zum Beispiel die Betragsfunktion eingeführt. Beim Lösen der Ungleichungen wird der Einfachheit halber immer vom geordneten Körper der reellen Zahlen ausgegangen.
Die Definitionen und Sätze lassen sich jedoch auch auf allgemeine geordnete Körper übertragen.

Folgerung 6.2.1
$a, x, y, z, u, v \in \mathbb{R}$

a) $x > y \Leftrightarrow x + z > y + z$

b) $x, y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$

c) $x > y \Leftrightarrow x - y > 0, x \geq y \Leftrightarrow x - y \geq 0$

d) $x < y \leq z \Rightarrow x < z$

e) $x < y < z \Rightarrow x < z$

f) $x \geq 0 \Leftrightarrow -x \leq 0, x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$

g) $x \geq y \Leftrightarrow -x \leq -y, \quad x > y \Leftrightarrow -x < -y$

h) $x \geq y, u \geq v \Rightarrow x + u \geq y + v, \quad x > y, u > v \Rightarrow x + u > y + v$

i) $x \geq y, a > 0 \Rightarrow a \cdot x \geq a \cdot y, \quad x > y, a > 0 \Rightarrow a \cdot x > a \cdot y$

j) $x \geq y, a < 0 \Rightarrow a \cdot x \leq a \cdot y, \quad x > y, a < 0 \Rightarrow a \cdot x < a \cdot y$

k) $x \leq 0, y \leq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0, \quad x < 0, y < 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$

l) $x \leq 0, y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \leq 0, \quad x < 0, y > 0 \Rightarrow x \cdot y < 0$

m) $x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 > 0$

n) $1 > 0$

o) $x > y > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$

p) $x > y > 0 \Rightarrow \frac{x}{y} > 1$

Bemerkung 6.2.2
$NE_{\cdot} > NE_{+}$ (vergleiche 14. oben)
Das Neutrale Element der Multiplikation ist größer als das Neutrale Element der Addition.

Folgerung 6.2.3

a) Zwischen zwei Elementen in $\mathbb{R}$ (bzw jedem geordnetem Körper) befindet sich immer ein drittes.
$x, y \in K, x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R} : x < z < y$

Beweis.

$$\begin{aligned} x < y &\overset{1.}{\Rightarrow} x + x < y + x \land x + y < y + y \\ &\Rightarrow x + x < x + y < y + y \\ &\Rightarrow x \cdot 1 + x \cdot 1 < x + y < y \cdot 1 + y \cdot 1 \\ &\overset{\text{DG}}{\Rightarrow} x(1+1) < x + y < y(1+1) \\ &\Rightarrow x < (1+1)^{-1}(x+y) = \underbrace{\frac{1}{2}(x+y)}_{=z} < y \end{aligned}$$

b) $\mathbb{R}$ (wie jeder geordnete Körper) besteht aus unendlich vielen Elementen.

Definition 6.2.4 (Signum, Absolutbetrag)
Sei $K = \mathbb{R}$ oder ein anderer geordneter Körper. Dann wird das Vorzeichen einer Zahl $x \in K$ definiert wie folgt: $\begin{array}{ll} x \textit{ positiv} & :\Leftrightarrow x > 0 \\ x \textit{ negativ} & :\Leftrightarrow x < 0 \end{array}$

Schreibweise als Teilmenge des Körpers:
$K_{>0} = \{x \in K \mid x > 0\} \quad K_{<0} = \{x \in K \mid x < 0\} \quad$ (*analog* $K_{\geq 0}$, $K_{\leq 0}$)

Die Vorzeichenfunktion – Signum:

$$sgn : \begin{cases} K \to \{-1, 0, 1\} \\ x \mapsto sgn(x) = \begin{cases} -1 & \textit{für } x < 0 \\ 0 & \textit{für } x = 0 \\ 1 & \textit{für } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Die Betragsfunktion – Absolutbetrag:

$$abs : \begin{cases} K \to K_{\geq 0} \\ x \mapsto |x| = \begin{cases} -x & \textit{für } x < 0 \\ x & \textit{für } x \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Und es gilt $x = abs(x) \cdot sgn(x)$

Folgerung 6.2.5 (Betrags- und Vorzeichenfunktion)
$K = \mathbb{R}$ oder ein anderer geordneter Körper, $x, y \in K$.
Es gelten folgende Formeln für die Betrags- und die Vorzeichenfunktion:

a) $x = |x| \cdot \operatorname{sgn}(x)$

b) $|x| = |-x|$

c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, also auch mit $x = y$: $|x^2| = x^2 = |x|^2$

d) $\operatorname{sgn}(x \cdot y) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{sgn}(y)$

e) $|x| \geq 0$

f) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

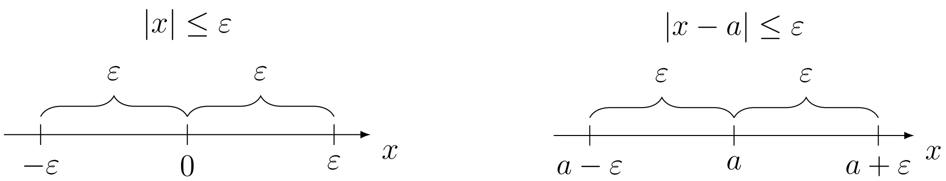
g) für $c \geq 0$ gilt:
$|x| = c \Leftrightarrow x = c \vee x = -c$

h) $\left|\frac{1}{x}\right| = |x^{-1}| = |x|^{-1} = \frac{1}{|x|}$

i) $\forall \varepsilon > 0$ gilt:

(1) $|x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \Leftrightarrow x \geq -\varepsilon \ \wedge \ x \leq \varepsilon$
$|x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon \Leftrightarrow x > -\varepsilon \ \wedge \ x < \varepsilon$
speziell: $\varepsilon = |x| : -|x| \leq x \leq |x|$

(2) $|x| > \varepsilon \Leftrightarrow x < -\varepsilon \ \vee \ x > \varepsilon$
$|x| \geq \varepsilon \Leftrightarrow x \leq -\varepsilon \ \vee \ x \geq \varepsilon$



(a) Abstand ε um 0
(siehe i))

(b) Abstand ε um a
(siehe j))

Abbildung 6.1.: grafische Darstellung der Abstände auf dem Zahlenstrahl (zu i und j)

j) $a \in K, \forall \varepsilon > 0$ gilt:

(1) $|x - a| \leq \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$
$|x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$

(2) $|x - a| \geq \varepsilon \Leftrightarrow x \leq a - \varepsilon \ \vee \ x \geq a + \varepsilon$
$|x - a| > \varepsilon \Leftrightarrow x < a - \varepsilon \ \vee \ x > a + \varepsilon$

k) für $b > 0$ gilt:
$(x - a)^2 < b \Leftrightarrow -\sqrt{b} < x - a < \sqrt{b}$
$(x - a)^2 > b \Leftrightarrow x - a > \sqrt{b} \ \vee \ x - a < -\sqrt{b}$

l) Dreiecksungleichung: $|x + y| \leq |x| + |y|$

Beweis. es gelte $-|x| \leq x \leq |x|, \quad -|y| \leq y \leq |y|$

$$\begin{aligned} &\overset{\text{(Folg. 6.2.1 } h)}{\Rightarrow} && -|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y| \\ &\Leftrightarrow && -(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y| \\ &\overset{(i)}{\Leftrightarrow} && |x + y| \leq |x| + |y| \end{aligned}$$

m) $|x + y| \geq ||x| - |y||$

Beweis.

$$\begin{aligned} |x| &= |(x + y) - y| \\ &\overset{(l)}{\leq} |x + y| + |-y| \\ \Rightarrow |x| - |y| &\leq |x + y| \end{aligned}$$

analog: $|y| - |x| \leq |x + y| \quad \Rightarrow ||y| - |x|| \leq |x + y|$

Beispiel 6.2.6 (Das Lösen von Ungleichungen[5] – Eine Anwendung der Folgerung 6.2.5)
Gesucht ist eine möglichst einfache Darstellung der Menge der Zahlen, die die Gleichung bzw Ungleichung erfüllen. Diese Mengen nennt man Lösungsmenge.

Neben der nachfolgend verwendeten Lösungsmethode ist die Methode der vollständigen Fallunterscheidung (siehe Kapitel 4.4 auf Seite 66) als alternative Vorgehensweise möglich.

a) Lösung einer Betragsgleichung

$$\begin{aligned} |x+1| = 3 \;&\Leftrightarrow\; \big(x+1 = 3 \wedge x+1 \geq 0\big) \;\vee\; \big((-1)(x+1) = 3 \wedge x+1 < 0\big) \\ &\Leftrightarrow\; x = 2 \wedge x \geq -1 \;\vee\; x = -4 \wedge x < -1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow L = \{2; -4\}$

b) (1) Bestimmen Sie die Lösungsmenge zu $|x-1| < 2$
Gesucht werden alle Zahlen, deren Abstand zur 1 kleiner als 2 LE ist.

$$\begin{aligned} |x-1| < 2 \;&\Leftrightarrow\; (-2 < x-1) \;\wedge\; (x-1 < 2) \\ &\Leftrightarrow\; -2 < x-1 < 2 \\ &\Leftrightarrow\; -2+1 < x-1+1 < 2+1 \\ &\Leftrightarrow\; -1 < x < 3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow L_{1a} = \; \{x | -1 < x < 3\} \; = \; (-1; 3) \; =]-1; 3[$

(2) Bestimmen Sie die Lösungsmenge zu $|x-1| \geq 2$
Gesucht werden alle Zahlen, die mindestens 2 LE von 1 entfernt sind. Der Abstand zur 1 soll also mindestens 2 LE betragen.

$$\begin{aligned} |x-1| \geq 2 \;&\Leftrightarrow\; (x-1 \leq -2) \;\vee\; (2 \leq x-1) \\ &\Leftrightarrow\; (x-1+1 \leq -2+1) \;\vee\; (2+1 \leq x-1+1) \\ &\Leftrightarrow\; x \leq -1 \;\vee\; 3 \leq x \end{aligned}$$

$\Rightarrow L_{1b} = \; \{x | x \leq -1 \;\vee\; 3 \leq x\} \; = \; (-\infty; -1] \cup [3; \infty) \; =]-\infty; -1] \cup [3; \infty[$

c) Bestimmung der Lösungsmenge für $x+3 \leq |2x| \Leftrightarrow |2x| \geq x+3$

$$\begin{aligned} |2x| \geq x+3 \;&\overset{(9)}{\Leftrightarrow}\; 2x \leq -(x+3) \;\vee\; 2x \geq (x+3) \\ &\Leftrightarrow\; 2x \leq -x-3 \;\vee\; 2x \geq x+3 \\ &\Leftrightarrow\; 2x+x \leq -x-3+x \;\vee\; 2x-x \geq x+3-x \\ &\Leftrightarrow\; 3x \leq -3 \;\vee\; x \geq 3 \\ &\Leftrightarrow\; x \leq -1 \;\vee\; x \geq 3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow L_2 = \; \{x | x \leq -1 \;\vee\; x \geq 3\} \; = \; (-\infty; -1] \cup [3; \infty)$

[5] Sie müssen nicht alle besprochen werden.

d) Bestimmung der Lösungsmenge für $|x^2 + 3x| > 4$

$$\begin{aligned}
\left|x^2+3x\right| > 4 \;&\Leftrightarrow\; \left|x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right| > 4 \qquad \text{(quadrat. Ergänzung}^6\text{)}\\
&\Leftrightarrow\; \left|\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right| > 4\\
&\Leftrightarrow\; -\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right) > 4 \vee \left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right) > 4 \qquad \text{(Betragsfunktion)}\\
&\Leftrightarrow\; \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4} < -4 \vee \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4} > 4\\
&\Leftrightarrow\; \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 < \frac{9}{4}-4 \vee \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 > \frac{9}{4}+4\\
&\Leftrightarrow\; \underbrace{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 < -\frac{7}{4}}_{Kontradiktion} \vee \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 > \frac{25}{4}\\
&\Leftrightarrow\; \perp \vee \left|x+\frac{3}{2}\right| > \frac{5}{2}\\
&\Leftrightarrow\; \left|x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right| > \frac{5}{2}\\
&\overset{(j)}{\Leftrightarrow}\; x < \left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{5}{2} \vee x > \left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{5}{2}\\
&\Leftrightarrow\; x < -4 \vee x > 1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow L_3 = \{x|x > 1 \vee x < -4\} = (-\infty; -4) \cup (1; \infty)$

e) Bestimmung der Lösungsmenge für $|x^2 + 3x| \leq 4$

$$\begin{aligned}
\left|x^2+3x\right| \leq 4 \;&\overset{(j)}{\Leftrightarrow}\; -4 \leq x^2+3x \leq 4\\
&\Leftrightarrow\; -4 \leq x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2 \leq 4 \qquad \text{(quadrat. Ergänzung}^6\text{)}\\
&\Leftrightarrow\; -4 \leq \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2 \leq 4\\
&\Leftrightarrow\; -4+\left(\frac{3}{2}\right)^2 \leq \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 \leq 4+\left(\frac{3}{2}\right)^2\\
&\Leftrightarrow\; -\frac{7}{4} \leq \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{25}{4}\\
&\Leftrightarrow\; \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{25}{4}
\end{aligned}$$

[6] Die pq-Formel ist nur für quadratische Gleichungen definiert. Bei quadrat. Ungleichungen muss die quadrat. Ergänzung verwendet werden.

$$\Leftrightarrow \quad \left|x+\frac{3}{2}\right| \le \frac{5}{2}$$

$$\overset{(j)}{\Leftrightarrow} \quad -\frac{5}{2} \le x+\frac{3}{2} \le \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -4 \le x \le 1$$

$\Rightarrow L_4 = \{x| -4 \le x \le 1\} = [-4;1] = \overline{L_3} = \mathbb{R} \setminus L_3$

f) Bestimmung der Lösungsmenge für $|x-2| \le |x-3|$

Es soll die Menge aller Zahlen bestimmt werden, deren Abstand zur 2 kleiner ist als ihr Abstand zur 3. Die Lösung müßte also $L = \{x|x \le 2.5\} = (-\infty; 2.5]$ sein.

$$\begin{aligned} |x-2| \le |x-3| &\overset{(j)}{\Leftrightarrow} 2-|x-3| \le x \le 2+|x-3| \\ &\Leftrightarrow \underbrace{2-|x-3| \le x}_{(a)} \wedge \underbrace{x \le 2+|x-3|}_{(b)} \end{aligned}$$

(a) Bestimmung der Lösungsmenge von $2-|x-3| \le x$

$$\begin{aligned} 2-|x-3| \le x &\Leftrightarrow 2-x \le |x-3| \\ &\Leftrightarrow |x-3| \ge 2-x \\ &\overset{(10)}{\Leftrightarrow} x \le 3-(2-x) \vee x \ge 3+(2-x) \\ &\Leftrightarrow x \le 3-2+x \vee x \ge 3+2-x \\ &\Leftrightarrow \underbrace{0 \le 1}_{Tautologie} \vee 2x \ge 5 \\ &\Leftrightarrow \top \vee x \ge \frac{5}{2} \\ &\Leftrightarrow \top \end{aligned}$$

$\Rightarrow L_{51} = \{x|x \in \mathbb{R}\} = (-\infty; \infty)$

(b) Bestimmung der Lösungsmenge von $x \le 2+|x-3|$

$$\begin{aligned} x \le 2+|x-3| &\Leftrightarrow x-2 \le |x-3| \\ &\Leftrightarrow |x-3| \ge x-2 \\ &\overset{(10)}{\Leftrightarrow} x \le 3-(x-2) \vee x \ge 3+(x-2) \\ &\Leftrightarrow x \le 3-x+2 \vee x \ge 3+x-2 \\ &\Leftrightarrow 2x \le 5 \vee 0 \ge 1 \\ &\Leftrightarrow x \le \frac{5}{2} \vee \bot \\ &\Leftrightarrow x \le \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow L_{52} = \{x|x \le \frac{5}{2}\} = (-\infty; \frac{5}{2}]$

Die Lösung ergibt sich aus dem Durchschnitt der Lösungsmengen von (a) und (b)

$L_{51} \cap L_{52} = (-\infty; \infty) \cap (-\infty; \frac{5}{2}] = (-\infty; 2.5]$

$\Rightarrow L_5 = \{x|x \le 2.5\} = (-\infty; 2.5]$

Sie sollten jetzt in der Lage sein,
- Betrags- und Vorzeichenfunktionen zu definieren,
- Lösungsmengen von Ungleichungen in den reellen Zahlen zu bestimmen und zu skizzieren,
- die pq-Formel und die quadratische Ergänzung anzuwenden. (Anhang A).

6.2.1. Aufgaben

Hinweise:

Multipliziert/Dividiert man eine Ungleichung mit/durch eine negative Zahl, kehrt sich das Ungleichheitszeichen um.
Die quadratische Ergänzung ist für Ungleichungen definiert, die p-q-Formel nicht.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen:

a) $x + |x - 1| > 3$

b) $2 + |x + 3| < 3$

c) $|2(x + 1)| < |5 - x| + 2$

d) $2|x - 7| < 7(x + 2) + |5x + 2|$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen:

a) $\frac{3x+2}{3-2x} \geq 2$

b) $3x^2 - 10x + 3 \geq 0$

c) $|3 - x^2| > 1$

7. Zahlensysteme, Stellenwertsysteme

Das Thema Zahlensysteme und die Umrechnung zwischen den verschiedenen Systemen wird in der Vorlesung IT-Grundlagen sehr ausführlich besprochen. Deshalb wird es hier nur kurz abgehandelt.

Eine natürliche Zahl a kann auf verschiedene Arten geschrieben werden:
Die alten Römer verwendeten ein Buchstabensystem mit den Buchstaben I, V, X, L, C, D und M. Die Zahl 14 wurde beispielsweise als XIV dargestellt.

Die römische Schreibweise unterscheidet sich wesentlich von den Stellenwertsystemen, denn dort wird jeder Stelle einer Zahl ein bestimmter Wert zugeordnet.

Die Zahl 24 besitzt zum Beispiel im bekannten Dezimalsystem folgende Stellen:
Die 4 ist der Einer. Ihr Wert ist $4 = 4 \cdot 10^0$.
Die 2 ist der Zehner. Ihr Wert ist $20 = 2 \cdot 10^1$.

Wichtig ist demnach die Unterscheidung zwischen der Zahl und ihrer Darstellung.

7.1. Dezimaldarstellung der natürlichen und der ganzen Zahlen

- $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a$ lässt sich als Linearkombination von Potenzen der Basis 10 darstellen: $a = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + \ldots + a_n \cdot 10^n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i$
- die Koeffizienten a_i sind Elemente von $\{0, ..., 9\}$ für $i = 0, ..., n$
- abkürzende Schreibweise: $a = a_n a_{n-1} \ldots a_0$ (übliche Dezimaldarstellung)
- ist $a \in \mathbb{Z}$ und $a < 0$, so gilt eine obige Darstellung für $-a$, und für a erhält man $a = -a_n a_{n-1} \ldots a_0$
- Beispiel: $24289 = 2 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$
  $= 9 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^4$

7.2. Darstellung und Rechnung in beliebigen b-adischen Zahlensystemen

- Statt der Basis 10 wird eine beliebige andere natürliche Zahl $b \geq 2$ als Basis genommen.
- $a \in \mathbb{N}$ kann man stets darstellen als Summe $a = d_0 b^0 + d_1 b^1 + \ldots + d_k b^k = \sum\limits_{i=0}^{k} d_i \cdot b^i$, wobei $d_0, \ldots, d_k$ $(k \geq 0)$ die „Ziffern“ der Darstellung sind und und es gilt $d_i \in \{0, ..., b-1\}$ mit $d_k \neq 0$

- diese Darstellung ist eindeutig
- Bestimmung dieser Darstellung durch sukzessive Division:

$$\begin{aligned}
a: \quad b^k = & \;\; d_k \text{ Rest } r_k \\
r_k : b^{k-1} = & d_{k-1} \text{ Rest } r_{k-1} \\
r_{k-1} : b^{k-2} = & d_{k-2} \text{ Rest } r_{k-2} \\
\vdots \\
r_2: \quad b^1 = & \;\; d_1 \text{ Rest } r_1 \\
& \text{und } d_0 = r_1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = (d_k d_{k-1} \dots d_1 d_0)_b$$

Beispiel 7.2.1 (Darstellung der Zahl $(508)_{10}$ im 6-er System)
$6^3 = 216$ und $6^4 = 1296$. Also ergibt sich $k = 3$ und (ohne Index)

$$\begin{aligned}
508 : 6^3 &= 2 \text{ Rest } 76 \text{ also } d_3 = 2, r_3 = 76 \\
76 : 6^2 &= 2 \text{ Rest } 4 \;\;\text{ also } d_2 = 2, r_2 = 4 \\
4 : 6^1 &= 0 \text{ Rest } 4 \;\;\text{ also } d_1 = 0, r_1 = 4 \\
& \qquad\qquad\quad \text{ und } d_0 = 4 = r_1
\end{aligned}$$

daher gilt $(508)_{10} = (2204)_6$

Bemerkung 7.2.2
Ist die Basis b der b-adischen Darstellung kleiner als 11, so kann man als Ziffern $0, 1, \dots, b-1$ verwenden. Ist aber $b \geq 11$, so braucht man mehr als 10 Ziffern. Wegen der Eindeutigkeit ist es jedoch nötig, nur eingliedrige Ziffern zu verwenden.
Im Zwölfersystem behilft man sich zum Beispiel dadurch, dass man als neue Ziffern die Buchstaben A, B einführt, im 16er-System werden die Buchstaben A, B, C, D, E, F als neue Ziffern verwendet.

Bemerkung 7.2.3
Aus der Darstellung im b-adischen System ergibt sich, dass dort formal genauso gerechnet wird wie im Dezimalsystem. Die Rolle der 10 ist jedoch durch b zu ersetzen.

Beispiel 7.2.4 (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division im 6er System)
(a) Addition und Subtraktion

$$\begin{array}{rr} & 543 \\ + & \underline{252} \\ & 1235 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rr} & 543 \\ - & \underline{252} \\ & 251 \end{array}$$

(b) Multiplikation und Division

$$\begin{array}{l} \underline{543 \cdot 252} \\ 1530 \\ 4443 \\ \underline{1530} \\ 243400 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 543 : 242 = 2 \quad \text{Rest } 15 \\ \underline{-\,524} \phantom{ : 242 = 2 \quad \text{Rest } 15} \\ 15 \phantom{ : 242 = 2 \quad \text{Rest } 15} \end{array}$$

(c) Die Kontrolle der Ergebnisse durch Berechnungen im Dezimalsystem folgt im Beispiel 7.3.1 auf Seite 125.

Beispiel 7.2.5 (Rechnungen in verschiedenen Zahlensystemen)

- $(543)_6 + (242)_6 = (1225)_6$
- $(715)_8 + (267)_8 = (1204)_8$
- $(32A1)_{11} + (AA)_{11} = (33A0)_{11}$
- $(213)_5 - (132)_5 = (31)_5$
- $(1354)_8 - (726)_8 = (426)_8$
- $(153)_6 \cdot (23)_6 = (4443)_6$
- $(207)_8 \cdot (26)_8 = (5632)_8$
- $(3214)_5 : (12)_5 = (222)_5$

7.3. Algorithmen zur Umrechnung von einer Basis in eine andere

a) **Der Divisionsalgorithmus**

Dividiere die umzuwandelnde Zahl sukzessive durch die neue Basis (mit Rest), bis sich die Zahl 0 ergibt. Die Reste der Divisionen ergeben in umgekehrter Reihenfolge die ursprüngliche Zahl in der neuen Basis.

Es ist also iterativ folgendes zu berechnen:
$a_i : b = a_{i-1}$ Rest r_i bis $a_{i-1} = 0$

Dieser Algorithmus verlangt, dass man „sicher“ im Quellsystem rechnen kann. Er wird meist bei der Umrechnung vom Dezimalsystem in ein b-adisches System angewendet.

Ein Beispiel:
Umrechnung von $(508)_{10}$ ins 6er System und wieder zurück ins Dezimalsystem

(a) Umrechnung von $(508)_{10}$ ins 6er System

$$\begin{aligned} 508 : 6 &= 84 \quad \text{Rest } 4 \\ 84 : 6 &= 14 \quad \text{Rest } 0 \\ 14 : 6 &= 2 \quad \text{Rest } 2 \\ 2 : 6 &= 0 \quad \text{Rest } 2 \end{aligned}$$

Also ergibt sich $(508)_{10} = (2204)_6$

(b) Umrechnung von $(2204)_6$ zurück ins Dezimalsystem

Zur Umrechnung müssen Divisionen im 6er System durchgeführt werden. Dazu benötigt man im 6er System die Vielfachen von 14, denn $(10)_{10} = (14)_6$.

(1) Die neue Basis im 6er System ist $(10)_{10} = (14)_6$.

(2) Bestimmung einiger Vielfache von $(14)_6$ im 6er System
$1 \cdot 14 = 14$
$2 \cdot 14 = 32$
$3 \cdot 14 = 50$
$4 \cdot 14 = 104$
$5 \cdot 14 = 122$

(3) Die Additions- und Multiplikationstabelle im 6er System

+	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	10
2	3	4	5	10	11
3	4	5	10	11	12
4	5	10	11	12	13
5	10	11	12	13	14

·	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	10	12	14
3	3	10	13	20	23
4	4	12	20	24	32
5	5	14	23	32	41

(4) Divisionen im 6er System

$$\begin{array}{l} 2204 : 14 = 122 \ \text{Rest}\ 12 \\ \underline{14} \\ \ \ 40 \\ \ \ \underline{32} \\ \ \ \ \ 44 \\ \ \ \ \ \underline{32} \\ \ \ \ \ 12 \end{array} \qquad 122 : 14 = 5 \ \text{Rest}\ 0 \qquad 5 : 14 = 0 \ \text{Rest}\ 5$$

verkürzte Schreibweise:

$$\begin{aligned} (2204)_6 : (14)_6 &= (122)_6 \quad \text{Rest } (12)_6 = (8)_{10} \\ (122)_6 : (14)_6 &= \quad (5)_6 \quad \text{Rest } (0)_6 \ = (0)_{10} \\ (5)_6 : (14)_6 &= \quad (0)_6 \quad \text{Rest } (5)_6 \ = (5)_{10} \end{aligned}$$

Also ergibt sich $(2204)_6 = (508)_{10}$

Einfacher wird letztere Umwandlung mit dem Hornerschema, da hierbei alle Berechnungen im Zielsystem (hier im Dezimalsystem) durchgeführt werden.

b) **Das Hornerschema – Umwandlung eines b-adische Zahlensystems ins Dezimalsystem**

Die umzuwandelnde Zahl wird als Linearkombinationen von Potenzen ihrer Basis b dargestellt und die Summe berechnet.

$(a)_{10} = d_0b^0 + d_1b^1 + d_2b^2 + \cdots + d_kb^k$

Für eine einfachere Berechnung (ohne Taschenrechner) können Potenzen der Basis

b ausgeklammert werden.Damit spart man sich das aufwendige Berechnen der Potenzen der Basis b.

Beispiel: Umrechnung von $(2204)_6$ ins 10-er System

(a) Linearkombination von Potenzen zur Basis 6

$$\begin{aligned}(2204)_6 &= 2\cdot 6^3 + 2\cdot 6^2 + 0\cdot 6^1 + 4\cdot 6^0\\ &= (2\cdot 6^2 + 2\cdot 6^1 + 0)\cdot 6 + 4\\ &= ((2\cdot 6^1 + 2\cdot 6^0)\cdot 6 + 0)\cdot 6 + 4\\ &= (14\cdot 6 + 0)\cdot 6 + 4\\ &= 84\cdot 6 + 4\\ &= (508)_{10}\end{aligned}$$

(b) alternativ mit dem Hornerschema

	2	2	0	4
x=6		12	84	504
	2	14	84	508

Also ergibt sich $(2204)_6 = (508)_{10}$

c) **Das Hornerschema – Umrechnung eines Zahlenwertes von Basis a in Basis b**

Beispiel 1: $(654)_7 \to (410)_9$

(1) Da alle Berechnungen im 9er-System erfolgen, werden zunächst eine Additions- und eine Multiplikationstabelle fürs 9er-System aufgestellt.

+	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	10
2	3	4	5	6	7	8	10	11
3	4	5	6	7	8	10	11	12
4	5	6	7	8	10	11	12	13
5	6	7	8	10	11	12	13	14
6	7	8	10	11	12	13	14	15
7	8	10	11	12	13	14	15	16
8	10	11	12	13	14	15	16	17

·	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	4	6	8	11	13	15	17
3	3	6	10	13	16	20	23	26
4	4	8	13	17	22	26	31	34
5	5	11	16	22	27	33	38	44
6	6	13	20	26	33	40	46	53
7	7	15	23	31	38	46	54	62
8	8	17	26	34	44	53	62	71

(2) Umwandlung der ursprünglichen Basis in die Zielbasis: $7_{10} \to 7_9$

(3) Umrechnung in die neue Basis. Alle Rechnungen erfolgen im 9er-System.

	6	5	4
7		46	405
	6	52	410

Also: $(654)_7 \to (410)_9$

Beispiel 2: $(410)_9 \to (654)_7$

(1) Da alle Berechnungen im 7er-System erfolgen, werden zunächst eine eine Additions- und eine Multiplikationstabelle fürs 7er-System aufgestellt.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	10
2	3	4	5	6	10	11
3	4	5	6	10	11	12
4	5	6	10	11	12	13
5	6	10	11	12	13	14
6	10	11	12	13	14	15

·	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	11	13	15
3	3	6	12	15	21	24
4	4	11	15	22	26	33
5	5	13	21	26	34	42
6	6	15	24	33	42	51

(2) Umwandlung der ursprünglichen Basis in die Zielbasis: $9_{10} \to 12_7$

(3) Umrechnung in die neue Basis. Alle Rechnungen erfolgen im 7er-System.

	4	1	0
12		51	654
	4	52	654

Also: $(410)_9 \to (654)_7$

Beispiel 7.3.1 (Fortführung des Beispiels 7.2.4 auf Seite 121)

- Umwandlung der Zahlen ins Dezimalsystem

  Linearkombinationen von Potenzen zur Basis 6:

  $(543)_6 = 5 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 + 3 = (5 \cdot 6 + 4) \cdot 6 + 3 = 34 \cdot 6 + 3 = (207)_{10}$
  $(242)_6 = 2 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 + 2 = (2 \cdot 6 + 4) \cdot 6 + 2 = 16 \cdot 6 + 2 = (98)_{10}$

oder mit dem Hornerschema:

	5	4	3
x=6		30	204
	5	34	207

	2	4	2
x=6		12	96
	2	16	98

- Berechnungen im Dezimalsystem mit dem Divisionsalgorithmus

$207 + 98 = (305)_{10} = (1225)_6$

$$\begin{aligned} 305 : 6 &= 50 \quad \text{Rest } 5 \\ 50 : 6 &= 8 \quad \text{Rest } 2 \\ 8 : 6 &= 1 \quad \text{Rest } 2 \\ 1 : 6 &= 0 \quad \text{Rest } 1 \end{aligned}$$

$207 - 98 = (109)_{10} = (301)_6$

$$\begin{aligned} 109 : 6 &= 18 \quad \text{Rest } 1 \\ 18 : 6 &= 3 \quad \text{Rest } 0 \\ 3 : 6 &= 0 \quad \text{Rest } 3 \end{aligned}$$

$207 \cdot 98 = (20286)_{10} = (233530)_6$

$$\begin{aligned} 20286 : 6 &= 3381 \quad \text{Rest } 0 \\ 3381 : 6 &= 563 \quad \text{Rest } 3 \\ 563 : 6 &= 93 \quad \text{Rest } 5 \\ 93 : 6 &= 15 \quad \text{Rest } 3 \\ 15 : 6 &= 2 \quad \text{Rest } 3 \\ 2 : 6 &= 0 \quad \text{Rest } 2 \end{aligned}$$

$207 : 98 = (2 \text{ Rest } 11)_{10} = (2 \text{ Rest } 15)_6$

$$\begin{aligned} 11 : 6 &= 1 \quad \text{Rest } 5 \\ 1 : 6 &= 0 \quad \text{Rest } 1 \end{aligned}$$

Beispiel 7.3.2 (Umrechnung von $(9999)_{10}$ ins 16er System)

$$\begin{aligned} 9999 : 16 &= 624 \quad \text{Rest } 15 \mathrel{\widehat{=}} F \\ 624 : 16 &= 39 \quad \text{Rest } 0 \\ 39 : 16 &= 2 \quad \text{Rest } 7 \\ 2 : 16 &= 0 \quad \text{Rest } 2 \end{aligned}$$

Also ergibt sich $(9999)_{10} = (270F)_{16}$

Eine andere Schreibweise ist:

$$\begin{aligned} 9999 &= 624 \cdot 16 &+F \\ 624 &= 39 \cdot 16 &+0 \\ 39 &= 2 \cdot 16 &+7 \\ 2 &= 0 \cdot 16 &+2 \end{aligned}$$

Und in einer Gleichung zusammengefasst:

$$\begin{aligned} 9999 &= 624 \cdot 16 + F \\ &= (\underbrace{39 \cdot 16 + 0}_{624}) \cdot 16 + F \\ &= ((\underbrace{2 \cdot 16 + 7}_{39}) \cdot 16 + 0) \cdot 16 + F \\ &= (((\underbrace{0 \cdot 16 + 2}_{2}) \cdot 16 + 7) \cdot 16 + 0)\dot{1}6 + F \\ 9999 &= (2 \cdot 16 + 7) \cdot 16^2 + F \end{aligned}$$

7.4. Rechnen im Dualsystem

Bemerkung 7.4.1 (Berechnungen im Dualsystem)
Besonders einfach gestalten sich die Rechnungen im **Dualsystem** oder **dyadischen** System mit der Basis 2. Man hat nur zwei Ziffern 0, 1 und dementsprechend ist das Kleine 1x1 besonders einfach. Diesem Vorteil gegenüber steht der Nachteil der sehr langen dyadischen Darstellungen auch von kleinen Zahlen: $(19)_{10} = (10011)_2, \quad (157)_{10} = (10011101)_2$

Beispiel 7.4.2 (Berechnungen im Dualsystem)

- $\begin{array}{ccc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$
- $(10110)_2 + (1111)_2 + (1001)_2 + (1100)_2 = (111010)_2$
- $(1010100)_2 - (111011)_2 = (11001)_2$
- $(10010010)_2 - (1101101)_2 = (100101)_2$
- $(11011)_2 \cdot (101)_2 = (10000111)_2$
  Die Multiplikation reduziert sich auf die Addition geschickt untereinander geschriebener Zahlen, die alle gleich dem ersten Faktor sind.
  $\begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdot & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$ verkürzt: $\begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdot & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$
- $(111011)_2 : (110)_2 = (1001 \text{ Rest } 101)_2$
  Bei der Division ist eine Zahl entweder 1-mal oder 0-mal enthalten.

Ganze Zahlen können im Stellenwertsystem exakt, ohne Genauigkeitsfehler geschrieben werden.
Bei den reellen Zahlen funktioniert das im Allgemeinen nicht. Die Zahl $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$ besitzt zum Beispiel unendlich viele Nachkommastellen, da sie periodisch ist. Die Zahl $\sqrt{2}$ ist zwar nicht periodisch, besitzt aber dennoch unendlich viele Nachkommastellen.

Im Computer besteht der Speicherplatz für jeden Zahlentyp aus endlich vielen Stellen. Somit können nur endlich viele natürliche oder ganze Zahlen exakt dargestellt werden. Reelle Zahlen mit unendlich vielen Nachkommastellen können ebenfalls nicht exakt dargestellt werden.

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{10} &= (0,1)_{10} \\ &= (0,00011001\ldots)_2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot 2^{-k} \qquad \alpha_k = \{0,1\} \end{aligned}$$

Sie sollten jetzt in der Lage sein,
- in den unterschiedlichen Zahlensystemen zu rechnen.

7.5. Aufgaben

Aufgabe 1

Stellen Sie die Tafeln für die Addition und Multiplikation im 5er Zahlsystem auf:

+	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

·	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

Berechnen Sie damit

$321_5 + 133_5$ $\quad 321_5 - 133_5$ $\quad 321_5 \cdot 133_5$ $\quad 321_5 : 133_5$

Aufgabe 2

Wandeln Sie jeweils um:

a) $1471_{10} \to a_2$

b) $1471_{10} \to b_{16}$

c) $1010101001_2 \to c_{16}$

d) $1010101001_2 \to d_{10}$

Aufgabe 3

Erklären Sie den folgenden Trick:
Sie fertigen 4 Karten A, B, C, D und beschriften sie mit folgenden Zahlen:
$A := \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$
$B := \{2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15\}$
$C := \{4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15\}$
$D := \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$.
Beim nächsten Familienfest bitten Sie Tante Agathe sich eine Zahl zwischen 1 und 15 zu merken. Dann lassen Sie sich von Tante Agathe die Karten $A - D$ zeigen auf denen die Zahl steht und schon kennen Sie die Zahl.
(Hinweis: Der Trick beruht auf dem Dualsystem)

Aufgabe 4

Bestimmen Sie mit Hilfe des Hornerschemas die Dezimalzahl zur Hexadezimalzahl $4BE3_{16}$.

8. Zahlenmengen

8.1. Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Die reellen Zahlen ($\mathbb{R}$) können auf mehrere Arten eingeführt werden. Wir haben uns für die axiomatische Einführung entschieden. Das heißt, die Einführung erfolgt, bis auf die Isomorphie, als geordneter ordnungsvollständiger Körper.

Motivation: Vervollständigung des geordneten Körpers $\mathbb{Q}$
Eine Zahl im bisherigem Sinne entspricht zum Beispiel der Länge einer Strecke oder dem Punkt einer Geraden. Es gibt Zahlen, Streckenlängen oder Punkte einer Geraden, denen kein Element aus $\mathbb{Q}$ entspricht. Zum Beispiel die Diagonale eines Quadrats mit der Seitenlänge 1 ($d = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).
Die Menge der rationalen Zahlen besitzt also „Lücken“. Die Menge der reellen Zahlen kann dadurch charakterisiert werden, dass keine Lücken vorliegen. Sie ergibt sich, wenn die rationalen Zahlen „um ihre Lücken erweitert“ werden.

8.1.1. Einführung der reellen Zahlen

Als erstes wird gezeigt, dass es (mindestens eine) irrationale (also nicht rationale) Zahl gibt.

8.1.1 Lemma
Beh.: $\sqrt{2}$ ist nicht rational

Beweis. Der Beweis wird indirekt geführt, d.h. Annahme: $\sqrt{2}$ sei rational.

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \sqrt{2} &= \frac{n}{m} \qquad \text{(n,m teilerfremd)}\\
\Rightarrow 2 &= \frac{n^2}{m^2}\\
\Leftrightarrow n^2 &= 2m^2\\
&\Rightarrow n^2 \quad \text{ist gerade Zahl}\\
&\Rightarrow n \quad \text{ist gerade}\\
\Rightarrow \exists k : n &= 2k\\
\Rightarrow n^2 &= 4k^2\\
\Rightarrow 2m^2 &= 4k^2\\
\Rightarrow m^2 &= 2k^2\\
&\Rightarrow m^2 \quad \text{ist gerade Zahl}\\
&\Rightarrow m \quad \text{ist gerade}\\
&\Rightarrow \text{Widerspruch zu „teilerfremd“}\\
\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}
\end{aligned}$$

Definition 8.1.2 (ordnungsvollständig)
M sei eine geordnete Menge, $\leq$ sei die Ordnungsrelation.

a) $A, B \subseteq M, c \in M$
$A \leq c :\Leftrightarrow \forall a \in A : a \leq c$
$A \leq B :\Leftrightarrow \forall a \in A \forall b \in B : a \leq b$

b) M heißt ***ordnungsvollständig*** *genau dann, wenn*
$\forall A, B \subseteq M, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \leq B : \exists c \in M : A \leq c \leq B \qquad (*)$

Bemerkung 8.1.3
K ist ordnungsvollständig, wenn $(*)$ für Dedekind'sche Schnitte gilt.

Bemerkung 8.1.4
K sei ein geordneter Körper; $A, B \subseteq K$. A und B bilden einen Dedekind'sche Schnitt genau dann, wenn $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cup B = K, A \leq B$.

Beispiel 8.1.5 (Dedekind'scher Schnitt)
$A = \left\{x \in K | x \leq \sqrt{2}\right\}$
$B = \left\{x \in K | x > \sqrt{2}\right\}$
Jeder Dedekind'sche Schnitt (DK) definiert eine reelle Zahl. Alle DKs $\widehat{=} \mathbb{R}$.

Für $\mathbb{Q}$ gilt die Ordnungsvollständigkeit nicht, für $\mathbb{R}$ gilt sie.
Daher kann man die reellen Zahlen wie folgt einführen:

Definition 8.1.6 (Axiome der reellen Zahlen)
Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ erfüllt die folgenden Axiome: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

Axiom 1: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *Körper*

Axiom 2: $\leq$ *ist eine Ordnungsrelation auf ganz* $\mathbb{R}$

Axiom 3: $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

Axiom 4: $0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$

Axiom 5: *Sei $A, B \subseteq \mathbb{R}; A, B \neq \emptyset$ mit*

a) $A \cup B = \mathbb{R} \wedge A \cap B = \emptyset$

b) $x \in A \wedge y \in B \Rightarrow x \leq y$

$\Rightarrow \exists! c \in \mathbb{R}$ *mit $x \leq c \leq y$ für alle x und y* ***Dedekind'sches Axiom***

Bemerkung 8.1.7
Die Axiome 1-4 gelten auch für rationale Zahlen.

Im Folgenden werden der Vollständigkeit halber noch die algebraischen und die transzendenten Zahlen eingeführt.

Bemerkung 8.1.8
Eine **algebraische Zahl** x_0 ist eine reelle oder komplexe Zahl, die die Nullstelle eines Polynoms $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k \text{ mit } a_n \neq 0, a_k \in \mathbb{Z}\right)$ vom Grad $n > 0$ darstellt.
Das heißt, sie löst die Gleichung $P(x) = 0$. An der Stelle x_0 hat das Polynom also den Funktionswert $P(x_0) = 0$.

$\sqrt{2}$ ist zum Beispiel eine **algebraische Zahl**, denn sie löst die Gleichung $P(x) = x^2 - 2 = 0$. Sie ist also Nullstelle des Polynoms $P(x)$ mit $P(\sqrt{2}) = 0$

Jede rationale Zahl ist algebraisch,
denn für $q = x_0 = \frac{n}{m}$, $n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$ und $P(x) = m \cdot x - n$ ist
$P(q) = P(x_0) = m \cdot \frac{n}{m} - n = 0$
Es gibt, wie im Beispiel an $\sqrt{2}$ gezeigt, aber auch irrationale Zahlen, die algebraisch sind.
Die algebraischen Zahlen sind abzählbar.
Reelle Zahlen, die nicht algebraisch sind, heißen **transzendent**.

$\mathbb{R}$
(reelle Zahlen)

$\mathbb{Q}$
(rationale Zahlen)

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
(irrationale Zahlen)

algebraische Zahlen
z.B. $\sqrt{2}$, $\frac{3}{4}$

transzendente Zahlen
z.B. π, e

8.1.2. Abzählbare Teilmengen der reellen Zahlen

Die folgende 2 Sätze sollen dabei helfen, den Begriff der Abzählbarkeit zu erläutern.

Satz 8.1.9 (Satz von Archimedes)
$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$
d.h. zu jeder reellen Zahl a gibt es eine natürliche Zahl n, die größer ist als a.

Beweis. Folgt aus den Peano Axiomen (Definition 2.2.1 auf Seite 35), in dem man $n = [a] + 1$ betrachtet. ($[a]$ bezeichnet die Gaussklammer (größte ganze Zahl kleiner gleich a) siehe Definition 8.2.4 auf Seite 135) □

Satz 8.1.10
$\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$, d.h. $\forall a, b \in \mathbb{R}\ \exists q \in \mathbb{Q}$ mit $a < q < b$.
Es gilt sogar, dass in jedem offenen Intervall unendlich viele rationale Zahlen liegen.

Beweis. $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$ (Satz des Archimedes),
also gilt $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{a}\ (= \varepsilon)$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad (\varepsilon = b - a)$
also betrachte die Zahlen $k \cdot \frac{1}{n}$, dann gibt es ein k^*, so dass $(k^* - 1) \cdot \frac{1}{n} \leq a \leq k^* \cdot \frac{1}{n} \leq b$
Damit hat man eine passende rationale Zahl q mit $a < q < b$ gefunden. □

Definition 8.1.11 (Abzählbarkeit, Mächtigkeit, Kardinalzahl)

a) *Eine Menge M heißt* ***endlich*** $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ *und* $f : M \to \{1, .., n\}$ *bijektiv oder* $M = \{\}$

b) *Eine Menge M heißt* ***abzählbar****, wenn sie endlich ist oder wenn es eine bijektive Abbildung von M auf die Menge $\mathbb{N}$ gibt.*

c) *Eine Menge M heißt* ***überabzählbar****, wenn sie nicht abzählbar ist.*

d) *Unter der* ***Mächtigkeit*** *einer endlichen Menge M $(= |M|)$ versteht man die Anzahl der Elemente von M. Sie wird auch* ***Kardinalzahl*** *der Menge genannt.*
Zwei Mengen A, B heißen ***gleichmächtig****, falls eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ existiert.*
Die Mächtigkeit von $\mathbb{N}$ wird mit $\mathbf{Aleph_0}$[1] *bezeichnet.*

Bemerkung 8.1.12 (Gleichmächtigkeit von Mengen)
Endliche Mengen sind gleichmächtig, wenn sie gleich viele Elemente enthalten.

Folgerung 8.1.13
Alle unendlich abzählbaren Mengen sind gleichmächtig, insbesondere gleichmächtig mit $\mathbb{N}$. Sie haben als Kardinalzahl $Aleph_0$.

Wie man im anschließenden Beispiel sieht, gehören dazu $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$. Sie sind gleichmächtig wie $\mathbb{N}$.

[1] erster Buchstabe des hebräischen Alphabets

Beispiel 8.1.14 (abzählbar unendlich, überabzählbar)

a) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, denn mit

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{für } n \text{ gerade} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

wird eine bijektive Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definiert.
(so ist z.B.: $f(54)) = 27$ oder $f(57) = -28$)

Wertetabelle (skizziert):
```
1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
↓  ↓  ↓  ↓  ↓  ↓
0, 1, -1, 2, -2, 3, ...
```

b) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar (s. Cantor'sches Schema (Abb. 8.1), Diagonalenschema)

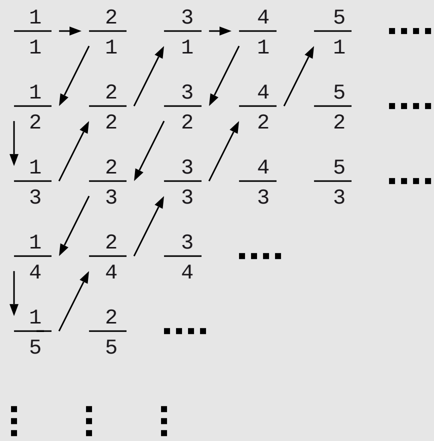


Abbildung 8.1.: Cantor'sches Schema

- 0 und negative Zahlen „einfügen", dadurch verdoppelt sich die Zählung
- mehrfach vorkommende Zahlen raus nehmen, da sonst nicht bijektiv

c) $\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sind überabzählbare Mengen

Bemerkung 8.1.15 (Alternative Einführung von $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$)
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sind die wichtigsten Teilmengen der reellen Zahlen.

a) Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bilden die kleinste Teilmenge der reellen Zahlen, die folgende Eigenschaften hat:

(1) $1 \in \mathbb{N}$

(2) $\mathbb{N}$ ist bzgl. der Addition abgeschlossen:
$1 \in \mathbb{N}$
$1 + 1 \in \mathbb{N}$ $\qquad \Rightarrow \mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$
$1 + 1 + 1 \in \mathbb{N}$

b) Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bilden die kleinste Teilmenge der reellen Zahlen, die folgende Eigenschaften hat:

   (1) $0, 1 \in \mathbb{Z}$

   (2) $\mathbb{Z}$ ist bzgl. der Addition abgeschlossen

   (3) bzgl. der Addition existieren Inverse

c) Die Erweiterung der ganzen Zahlen auf Abgeschlossenheit bezüglich der Multiplikation und Existenz von multiplikativen inversen Elementen führt auf die Menge der gekürzten Brüche ($\mathbb{Q}$).

8.2. Weitere wichtige Funktionen einer reellen Veränderlichen

Im Kapitel 5.3 auf Seite 99 wurden schon die Polynome vorgestellt. Jetzt folgen weitere Funktionen und Funktionstypen und im Kurs Analysis 1 wird die Liste wichtiger mathematischer Funktionen nochmals erweitert.

Definition 8.2.1 (Indikatorfunktion)
Sei $A \neq \emptyset, \ A \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \textit{für } x \in A \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Beispiel 8.2.2 (Dirichlet-Funktion)
Sie ist nach dem deutschen Mathematiker Peter Gustav Lejeune Dirichlet benannt. Manchmal wird sie auch als Dirichletsche Sprungfunktion bezeichnet.

$$\mathbb{D}(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rationale Zahl zwischen 0 und 1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Abschnittweise definierte Funktionen sind auf Teilintervallen des Definitionsbereichs durch verschiedene Terme definiert:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{für } x < a_1 \\ f_2(x) & \text{für } a_1 \leq x \leq a_2 \\ f_3(x) & \text{für } x > a_2 \end{cases}$$

Man schreibt auch $f(x) = f_1(x)\mathbb{1}_{(-\infty,a_1)}(x) + f_2(x)\mathbb{1}_{[a_1,a_2]}(x) + f_3(x)\mathbb{1}_{(a_2,\infty)}(x)$, $\mathbb{1}$ ist Indikatorfunktion.

Beispiel 8.2.3 (Abschnittweise definierte Funktion)
Sei $\quad a_1 = -1, a_2 = 1 \qquad f_1(x) = f_3(x) = x, \ f_2(x) = -x$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < -1 \\ -x & \text{für } -1 \leq x \leq 1 \\ x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$f(x) = x\mathbb{1}_{(-\infty,-1)}(x) - x\mathbb{1}_{[-1,1]}(x) + x\mathbb{1}_{(1,\infty)}(x)$

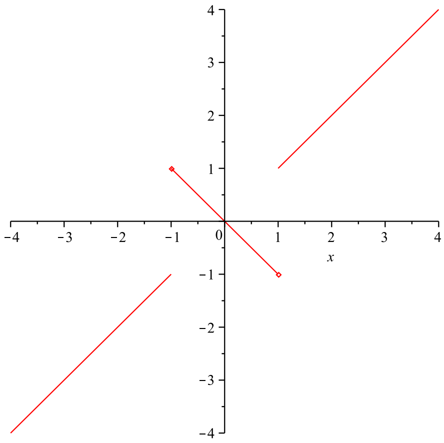


Abbildung 8.2.: abschnittweise definierte Funktion

Definition 8.2.4 (Gaußklammer)
$[x] = \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$ *heißt* ***(untere) Gaußklammer***[2]*.*

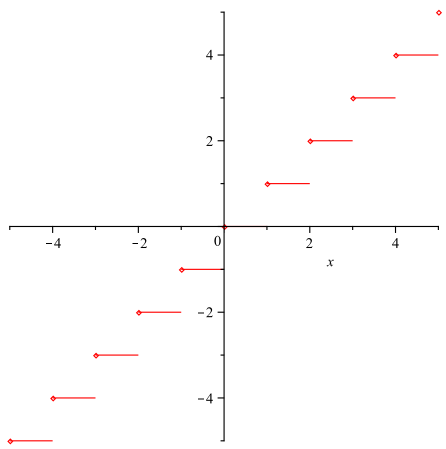


Abbildung 8.3.: Gaußklammer im Bereich $[-5, 5]$

Aus der Gaußklammer lässt sich die **Sägezahnfunktion** ableiten: $f(x) := x - \lfloor x \rfloor$

[2]In der Informatik (z.B. java.math) bezeichnet man die Funktion $\lfloor x \rfloor$ als floor(x) (Abrundungsfunktion) (ceil (x) ist die Aufrundungsfunktion.)

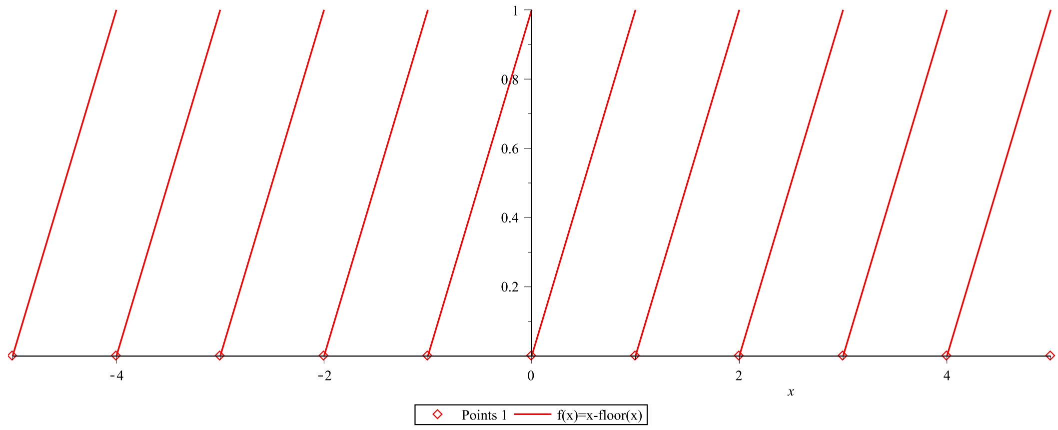


Abbildung 8.4.: Sägezahnfunktion im Bereich $[-5, 5]$

8.3. Beschränkte Teilmengen der reellen Zahlen, Intervalle

Definition 8.3.1 (obere (untere) Schranke, beschränkt)
Es sei $A \neq \emptyset, A \subseteq \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.

*a) c heißt **obere (untere) Schranke** von $A :\Leftrightarrow A \leq c$ $(A \geq c)$.*

*b) A heißt nach **oben (unten) beschränkt**, falls eine obere (untere) Schranke von A existiert.*

*c) A heißt **beschränkt**, wenn A nach oben und nach unten beschränkt ist.*

Folgerung 8.3.2
Es sei $A \neq \emptyset, A \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt A beschränkt $\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R} : |a| \leq r \quad \forall a \in A$.

Beispiel 8.3.3 (Schranke)

- Sei $M := \{\frac{1}{n} \text{ mit } n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$
  Es gilt: $0 \leq M \leq 1, M$ ist beschränkt, 0 ist untere, 1 obere Schranke.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ $\mathbb{N}$ ist nach unten beschränkt, aber $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt. Man sagt auch $\mathbb{N}$ ist unbeschränkt.

Definition 8.3.4 (Minimum, Maximum)
Es sei $A \neq \emptyset, A \subseteq \mathbb{R}, c, d \in \mathbb{R}$.

*a) c heißt **kleinstes Element (Minimum)** von $A :\Leftrightarrow c \in A \wedge A \geq c$.*

*b) d heißt **größtes Element (Maximum)** von $A :\Leftrightarrow d \in A \wedge A \leq d$*

Schreibweise: $\min\{A\} := c$; $\max\{A\} := d$
Minimum und Maximum der Menge A sind in der Menge A enthaltene Schranken.

Bemerkung 8.3.5
Minimum und Maximum einer Menge reeller Zahlen müssen Elemente der Menge sein. Sie müssen nicht existieren. Wenn sie aber existieren, dann sind sie eindeutig bestimmt.

Beispiel 8.3.6 (Fortsetzung von Beispiel 8.3.3 auf der vorherigen Seite)
$M := \{\frac{1}{n} \text{ mit } n \in \mathbb{N}\} = \{1; \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$
$1 \in M, M \leq 1 \Rightarrow 1$ ist größtes Element von M.
$0 \notin M, 0 < M$. 0 ist untere Schranke, aber nicht kleinstes Element, denn
Sei k kleinstes Element von $M \Leftrightarrow k \in M; M \geq k$.

$$\begin{aligned} k \in M \quad &\Rightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : k = \frac{1}{n_0} \\ &\Rightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \frac{1}{n} \in M \wedge \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} = k \\ &\Rightarrow \quad k \notin M \quad ↯ \end{aligned}$$

D.h. M besitzt kein kleinstes Element: $\max\{M\} = 1$, $\min\{M\}$ existiert nicht.

Definition 8.3.7 (Infimum, Supremum)
*Sei $A \neq \emptyset, A \subseteq \mathbb{R}$. Ist A nach oben (unten) beschränkt, dann heißt die kleinste obere (größte untere) Schranke von A das **Supremum (Infimum)** von A.*

Schreibweise: $\sup(A), \inf(A)$

Satz 8.3.8
Jede nicht leere nach oben (unten) beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt eine kleinste obere (größte untere) Schranke. Die kleinste obere Schranke wird Supremum von A, die größte untere Schranke wird Infimum von A genannt.

Bemerkung 8.3.9
Der letzte Satz beruht auf der Ordnungsvollständigkeit und gilt daher nicht in $\mathbb{Q}$.
$A = \{q \in \mathbb{Q} | q > 0 \text{ und } q^2 \leq 2\}$, A besitzt keine kleinste obere Schranke in $\mathbb{Q}$.

Beispiel 8.3.10 (s. Beispiel 8.3.3 auf der vorherigen Seite)

- $M := \{\frac{1}{n} \text{ mit } n \in \mathbb{N}\} = \{1; \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$
  $\sup(M) = \max(M) = 1$, $\inf(M) = 0$, $\min(M)$ existiert nicht
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$
  $\inf(\mathbb{N}) = \min(\mathbb{N}) = 1$, $\sup(\mathbb{N}) = \infty$ (siehe folgende Definition)

Definition 8.3.11 (Erweitertes System der reellen Zahlen)
$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty; \infty\}$. *Die Elemente aus* $\mathbb{R}$ *heißen endlich,* $\pm\infty$ *heißen auch uneigentliche Punkte.*
Fortsetzung der Ordnung auf $\overline{\mathbb{R}}$ *durch:* $-\infty < a < \infty \quad \forall a \in \mathbb{R}$.
Falls $A \neq \emptyset, A \subseteq \mathbb{R}, A$ *nach oben (unten) unbeschränkt, dann gilt*
$\sup(A) = \infty, \quad \inf(A) = -\infty$

Bemerkung 8.3.12

a) $A \neq \emptyset, A \subseteq \mathbb{R}:$
$\sup(A) \in A \Leftrightarrow \max(A)$ existiert
$\inf(A) \in A \Leftrightarrow \min(A)$ existiert
existieren $\max(A)$ bzw. $\min(A)$, dann gilt:
$\sup(A) = \max(A), \quad \inf(A) = \min(A)$

b) $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R} : \inf(A) \leq \inf(B) \leq \sup(B) \leq \sup(A)$

Satz 8.3.13
Es sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R};\ a, b \in \mathbb{R}$.
Wenn $a(b)$ eine obere (untere) Schranke von A ist, dann gilt:

$$a = \sup(A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : a - \varepsilon \leq x \leq a$$
$$b = \inf(A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : b \leq x \leq b + \varepsilon$$

Mengen von reellen Zahlen zwischen 2 Schranken fasst man unter dem Begriff Intervall zusammen.

Definition 8.3.14 (Intervall)
Es seien $a, b \in \mathbb{R},\ \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}},\ \alpha \leq a < b \leq \beta$.
Die folgenden Mengen sind Intervalle.

$[a; b]$	$:=$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	*abgeschlossen*
$[a; \beta[= [a; \beta)$	$:=$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < \beta\}$	*halboffen*
$]\alpha; b] = (\alpha; b]$	$:=$	$\{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x \leq b\}$	*halboffen*
$]\alpha; \beta[= (\alpha; \beta)$	$:=$	$\{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta\}$	*offen*

a bzw. α heißt ***linker Endpunkt*** *und b bzw. β* **rechter Endpunkt** *des Intervalls. Ein beschränktes Intervall heißt endlich und die Differenz der Endpunkte eines endlichen Intervalls heißt Länge des Intervalls.*

Ein Intervall heißt offen (abgeschlossen), wenn es die endlichen Endpunkte nicht enthält (enthält).
Ein endliches Intervall, das nur einen seiner Endpunkte enthält, heißt halboffen.

Bemerkung 8.3.15
I sei ein Intervall $\Rightarrow \inf(I)$ bzw. $\sup(I)$ ist ein linker bzw. rechter Endpunkt von I.

Beispiel 8.3.16

$[1; 2]$	abgeschlossenes Intervall
$[1; 2)$	halboffenes Intervall
$(1; 2]$	halboffenes Intervall
$(1; 2)$	offenes Intervall
$(-\infty; 2]$	abgeschlossenes Intervall, da der endliche Endpunkt enthalten ist
$(-\infty; 2)$	offenes Intervall
$(-\infty; \infty)$	sowohl abgeschlossen als auch offen, da es keine endlichen Endpunkte enthält

Bemerkung 8.3.17
Mit Intervallen kann man auch „rechnen“ (siehe Intervallarithmetik).
Zum Beispiel gilt: $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$

Sie sollten jetzt in der Lage sein,
- abschnittweise definierte Funktionen zu untersuchen,
- offene und abgeschlossene Intervalle zu unterscheiden.
Sie sollten die Begriffe Minimum/Maximum und Supremum/Infimum sicher beherrschen.

8.4. Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

In den Rahmenplänen für die MaTSE-Ausbildung spielen die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ keine Rolle. Daher werden sie in diesem separaten Kapitel eingeführt. Es kann von denjenigen übersprungen werden, die sich in der MaTSE-Ausbildung isoliert, ohne einen integrierenden Bachelorstudiengang, befinden. Die komplexen Zahlen ($\mathbb{C}$) gehören fest zu den Standardthemen des Studiums.

Dieses Kapitel behandelt eine Zahlenmenge, die in der Schule heute nicht mehr betrachtet wird.
Die Motivation ist der Wunsch, die Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ zu bestimmen.Das ist in $\mathbb{R}$ nicht möglich. Daher muss die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ erweitert werden.
Das Rechnen mit komplexen Zahlen spielt insbesondere in der Elektrotechnik eine Rolle.

8.4.1. Einführung der komplexen Zahlen

In diesem Kapitel werden die Grundrechenarten eingeführt.

Definition 8.4.1 (Komplexe Zahl)
*Eine **komplexe Zahl** $z = (a, b)$ ist ein Paar reeller Zahlen, für das Addition und Multiplikation von $z_1 = (a_1, b_1)$ und $z_2 = (a_2, b_2)$ durch*

- $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$

definiert sind.
Neben der Tupel-Schreibweise ist die folgende Form üblich, die im weiteren Skript verwendet wird:
$z = (a, b) = a + i \cdot b$, *mit* $i^2 = -1$. *Dabei heißt a Realteil und b Imaginärteil von z.*
Die komplexen Zahlen werden in der Gauß'schen Zahlenebene als Pfeile dargestellt (wie Vektoren). Auf der horizontalen Achse werden die Realteile und auf der vertikalen Achse die Imaginärteile aufgetragen.

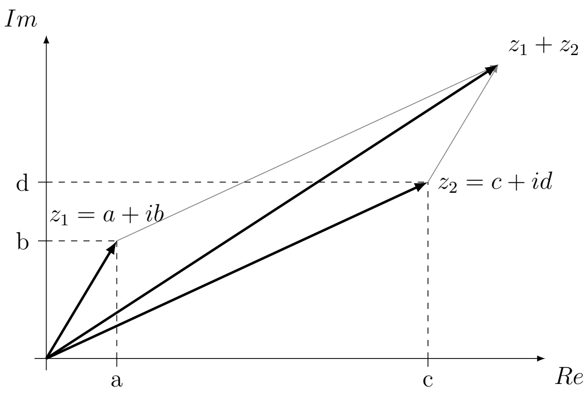


Abbildung 8.5.: Addition von komplexen Zahlen

Mit $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$ *und* $z_2 = a_2 + i \cdot b_2$ *ist*

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + i \cdot (b_1 + b_2) \\
z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + i \cdot b_1) \cdot (a_2 + i \cdot b_2) \\
&= a_1 a_2 + i \cdot b_1 a_2 + i \cdot a_1 b_2 + i^2 \cdot b_1 b_2 \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i \cdot (b_1 a_2 + a_1 b_2) \quad \textit{wegen } i^2 = -1
\end{aligned}$$

Man führt i als „neue“ Zahl ein, rechnet wie gewohnt, ersetzt aber i^2 durch -1.

Satz 8.4.2
Die komplexen Zahlen mit dem Nullelement $(0,0)$ und dem Einselement $(1,0)$ bilden einen Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Dieser Körper kann nicht angeordnet werden. Es gilt $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Beweis. **Körpereigenschaften**

- Kommutativgesetze
  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
- Assoziativgesetze
  $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ und $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
- Distributivgesetz

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (a_1, b_1) \cdot (a_2 + a_3, b_2 + b_3) \\
&= (a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3), a_1(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3)) \\
&= (a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3, a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_1) \\
z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 &= (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1a_3 - b_1b_3, a_1b_3 + a_3b_1) \\
&= (a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3, a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_1) \\
&= z_1 \cdot (z_2 + z_3)
\end{aligned}$$

- Neutralelemente
  bezüglich der Addition: $\mathit{Null} = 0 + 0i = (0, 0)$
  bezüglich der Multiplikation: $\mathit{Eins} = 1 + 0i = (1, 0)$
- Inverse Elemente
  bezüglich der Addition: $-a - ib = (-a, -b)$
  bezüglich der Multiplikation: $\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$ □

Bezeichnung 8.4.3 ($z = a + ib = (a, b)$)

imaginäre Einheit:	$i = 0 + 1 \cdot i = (0, 1)$ mit $i^2 = -1$
Darstellung:	$z = a + ib = (a, b)$
	$a = Re(z)$ Realteil
	$b = Im(z)$ Imaginärteil
konjugiert komplexe Zahl:	$\overline{z} = a - ib = (a, -b)$ (sprich: z quer)
Realteil:	$a = \frac{z+\overline{z}}{2}$
Imaginärteil:	$b = \frac{z-\overline{z}}{2}$
Betrag:	$\lvert z\rvert = r = \sqrt{(a+bi)\cdot(a-bi)} = \sqrt{a^2 - b^2 i^2}$
	$= \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$
	$\lvert z\rvert^2 = z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = Re^2(z) + Im^2(z)$

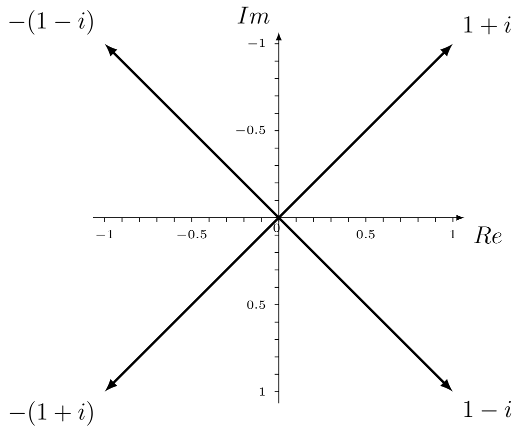


Abbildung 8.6.: Darstellung von $z, \overline{z}, -z$ und $-\,\overline{z}$ in der Gauß'schen Zahlenebene (hier: $z = 1 + i$)

$z = 1 + i, \;\; \overline{z} = 1 - i, \;\; -z = -(1+i) = -1 - i, \;\; -\overline{z} = -(1-i) = -1 + i$

Beispiel 8.4.4
$i \cdot i = i^2 = -1$ bzw. $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$
$z = 3 + 4i = (3, 4)$, $\;\overline{z} = 3 - 4i = (3, -4)$, $\;\lvert z\rvert = r = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Bemerkung 8.4.5
$\mathbb{R} \approx \{z = (a, 0) | a \in \mathbb{R}\}, \; z \in \mathbb{C}$
Jede reelle Zahl läßt sich als komplexe Zahl mit dem Imaginärteil 0 interpretieren.

Satz 8.4.6
Für beliebige komplexe Zahlen z, z_1, z_2 gilt:

a) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{\lvert z_2\rvert^2}$ speziell: $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\lvert z\rvert^2} = \frac{\overline{z}}{z\cdot\overline{z}} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$

b) $\overline{\overline{z}} = z$

c) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

d) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

e) $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}| \geq 0$ (Der Betrag einer komplexen Zahl ist immer reell.)

f) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

g) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

h) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung)

Beispiel 8.4.7 (Division)
Bei der Division durch eine komplexe Zahl muss der Bruch mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners erweitert werden. Dadurch wird der Nenner reell und für die weiteren Berechnungen kann das bekannte Regelwerk der reellen Zahlen benutzt werden.
also: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$

$$\begin{aligned}\frac{1+2i}{3+4i} &= \frac{(1+2i)\cdot(3-4i)}{(3+4i)\cdot(3-4i)} \\ &= \frac{3-4i+6i-8i^2}{9-12i+12i-16i^2} \\ &= \frac{11+2i}{25} \\ &= \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i\end{aligned}$$

Beispiel 8.4.8 (Division und Multiplikation komplexer Zahlen)

$$\begin{aligned}z_1 &= 3+4i \quad \overline{z_1} = 3-4i \quad z_2 = 1-i \quad \overline{z_2} = 1+i \\ \frac{1}{z_1} &= \frac{\overline{z_1}}{z_1 \cdot \overline{z_1}} = \frac{3-4i}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i \\ z_1 \cdot z_2 &= (3+4i)(1-i) = 3+4+4i-3i = 7+i \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(3+4i)(1+i)}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i\end{aligned}$$

8.4.2. Polarform einer komplexen Zahl

Mit Hilfe der Polarform wird in diesem Kapitel das Potenzieren und das Radizieren durchgeführt.

Herleitung der Polarform einer komplexen Zahl:
Sei $z \neq 0$, also $|z| > 0$.

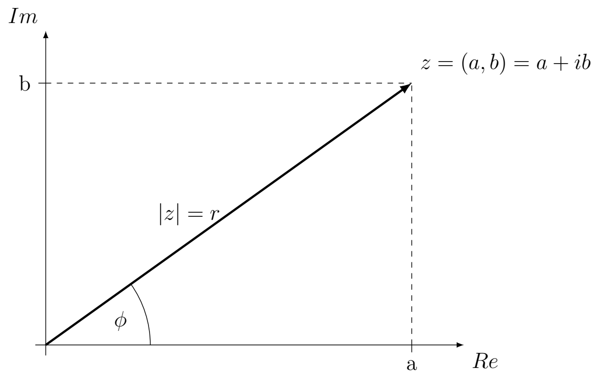


Abbildung 8.7.: Komplexe Zahlenebene

Der Pfeil, der die komplexe Zahl z kennzeichnet, bildet mit der (positiven) reellen Achse einen Winkel ϕ und hat die Länge $|z|$.
Es gilt $\cos\phi = \frac{Re(z)}{|z|}, \sin\phi = \frac{Im(z)}{|z|}$. Also ist $Re(z) = |z| \cdot \cos\phi, Im(z) = |z| \cdot \sin\phi$.
Hieraus folgt (mit $a = Re(z)$ und $b = Im(z)$):
$z = a + ib = Re(z) + iIm(z) = |z| \cdot \cos\phi + i|z| \cdot \sin\phi = |z| \cdot (\cos\phi + i\sin\phi)$
in Tupelschreibweise: $z = (a, b)$ oder $z = (r, \phi), r \geq 0, \phi \in [0, 2\pi[$

Definition 8.4.9 (Polarform)
Die Darstellung $z = |z| \cdot (\cos\phi + i\sin\phi) = r \cdot (cos\phi + i\sin\phi), r \geq 0, \phi \in [0, 2\pi[$ heißt ***Polarform*** *der komplexen Zahl z.*

Bemerkung 8.4.10 (Darstellung mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion)
$z = |z| \cdot (\cos\phi + i \cdot sin\phi) = |z| \cdot e^{i\cdot\phi} = r \cdot e^{i\cdot\phi}$

Umrechnung einer komplexen Zahl z von kartesische Koordinaten in Polarkoordinaten
gegeben: $z = x + iy = (x, y)$, gesucht: $z = r \cdot (\cos(\phi) + i \cdot \sin(\phi) = (r, \phi)$

a) Berechnung des Abstands von z zum Ursprung $(0, 0)$
$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) Bestimmung des Winkels ϕ

$$\begin{aligned} \tan(\phi) &= \frac{y}{x} = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{Im(z)}{Re(z)} \\ \phi &= \arctan\frac{y}{x} \end{aligned}$$

aber: $\phi = arctan\frac{y}{x} \;:\; \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
Wegen der Priodenlänge π des Tangens kann der Arkustangens den gesuchten Winkel ϕ nur in 2, anstatt, wie bei Polarwinkeln erforderlich, in vier Quadranten zuordnen. (Stichwort: Bijektivität des Tangens, Umkehrfunktion Arkustangens)

Lösung: Bei der Bestimmung des Winkels ϕ muss der Quadrant berücksichtigt werden, in dem die komplexe Zahl z liegt.

1. Quadrant:	$x > 0, y > 0$	$0 < \phi < \frac{\pi}{2}$	$\phi = \arctan \frac{y}{x}$
2. Quadrant:	$x < 0, y > 0$	$\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$	$\phi = \arctan \frac{y}{x} + \pi$
3. Quadrant:	$x < 0, y < 0$	$\pi < \phi < \frac{3\pi}{2}$	$\phi = \arctan \frac{y}{x} + \pi$
4. Quadrant:	$x > 0, y < 0$	$\frac{3\pi}{2} < \phi < 2\pi$	$\phi = \arctan \frac{y}{x} + 2\pi$
z liegt auf der x-Achse:			
	$x > 0, y = 0$		$\phi = 0$
	$x < 0, y = 0$		$\phi = \pi$
z liegt auf der y-Achse:			
	$x = 0, y > 0$		$\phi = \frac{\pi}{2}$
	$x = 0, y < 0$		$\phi = \frac{3\pi}{2}$

Diese Funktion ist in vielen Programmierspachen unter dem Namen **atan2** bzw. **arctan2** implementiert.

Beispiel 8.4.11 (Umrechnung in die Polarform)

a) $z = 1 + i, \quad Re(z) = 1, \quad Im(z) = 1$
gesucht ist: r, ϕ mit $z = r \cdot (\cos\phi + i \sin\phi)$
$r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
$\phi^* = \arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$
ϕ^* liegt im 4. Quadranten, also $\phi = \phi^*$
$\Rightarrow z = \sqrt{2} \cdot (\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$

b) $z = 1 - i, \quad Re(z) = 1, \quad Im(z) = -1$
gesucht ist: r, ϕ mit $z = r \cdot (\cos\phi + i \sin\phi)$
$r = |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
$\phi^* = \arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right) = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4}$
ϕ^* liegt im 4. Quadranten, also $\phi = \phi^* + 2\pi = \frac{7}{4}\pi$
$\Rightarrow z = \sqrt{2} \cdot (\cos(\frac{7}{4}\pi) + i \sin(\frac{7}{4}\pi)) = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{7}{4}\pi}$

c) $z = 3 + 4i, \quad Re(z) = 3, \quad Im(z) = 4$
gesucht ist: r, ϕ mit $z = r \cdot (\cos\phi + i \sin\phi)$
$r = |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
$\phi^* = \arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$
ϕ^* liegt im 4. Quadranten, also $\phi = \phi^*$
$\Rightarrow z = 5 \cdot (\cos(arctan\frac{4}{3}) + i \sin(arctan\frac{4}{3})) = 5 \cdot e^{i \cdot arctan\frac{4}{3}}$

Bemerkung 8.4.12 (Rechnen in Polarform)
Seien $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) = r_1 \cdot e^{i\phi_1} = (r_1, \phi_1)$ und
$z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) = r_2 \cdot e^{i\phi 2} = (r_2, \phi_2)$. Dann gilt:

- Multiplikation:
  $$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)) \\ = (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{i\cdot(\phi_1+\phi_2)} \\ = (r_1,\phi_1)\cdot(r_2,\phi_2) = (r_1\cdot r_2, \phi_1+\phi_2) \end{aligned}$$

  Beweis. Beweis für die Darstellung durch die Sinus- und Kosinusfunktion:
  $$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)\cdot r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) \\ &= r_1r_2(\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2 + i(\sin\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_2\cos\phi_1)) \\ &\overset{\text{Add.theoreme}}{=} r_1r_2(\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)) \end{aligned}$$

  Beweis. Beweis für die Darstellung durch die komplexe Exponentialfunktion:
  $$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (r_1 \cdot e^{\phi_1}) \cdot (r_2 \cdot e^{\phi_2}) \\ &\overset{\text{KG}}{=} (r_1 \cdot r_2) \cdot (e^{i\phi_1} \cdot e^{i\phi_2}) \\ &\overset{\text{Potenzgesetz}}{=} (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{i\cdot(\phi_1+\phi_2)} \end{aligned}$$

  D.h. bei der Multiplikation werden die Beträge (als reelle Zahlen) miteinander multipliziert und die Argumente (Winkel im Bogenmaß) addiert.

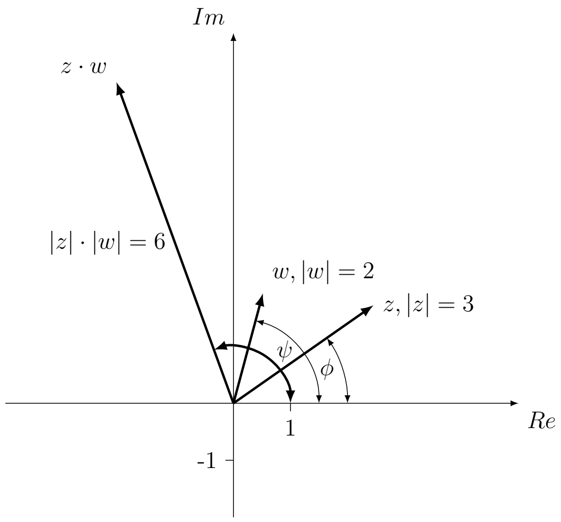
  

  Abbildung 8.8.: Multiplikation einer komplexen Zahl

  Die Multiplikation entspricht einer **Drehstreckung**:
  Multiplikation der Beträge $\Rightarrow$ Streckung des Vektors
  Addition der Winkel $\Rightarrow$ Drehung des Vektors Beispiel:
  $z = 1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$
  $w = 2 + 3i = \sqrt{13}(\cos\phi + i\sin\phi)$ mit $\phi = \arctan(\frac{3}{2}) = 0.98279\cdots$
  $w \cdot z = \sqrt{26}(\cos(\phi + \frac{\pi}{4}) + i\sin(\phi + \frac{\pi}{4}))$

- Potenzieren:
  $z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \quad \rightarrow \quad z^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$

  Beispiel 8.4.13 (Potenzieren)
  $z = 1 - i \Rightarrow z^6 = (1-i)^6$
  Als erstes erfolgt die Umwandlung der komplexen Zahl (z) in Polarkoordinatendarstellung:
  $\tan\phi = -\frac{1}{1} = -1 \Rightarrow \phi = \arctan(-1) = \frac{7}{4}\pi = -45^o$
  $r = |z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
  $\Rightarrow z = \sqrt{2}(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi)$
  Danach wird die Potenz berechnet:

$$\begin{aligned} z^6 = (1-i)^6 &= (\sqrt{2}(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi))^6 \\ &= (\sqrt{2})^6(\cos\frac{21}{2}\pi + i\sin\frac{21}{2}\pi) \\ &= 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) \\ &= 8(0+i) \\ &= 8i \end{aligned}$$

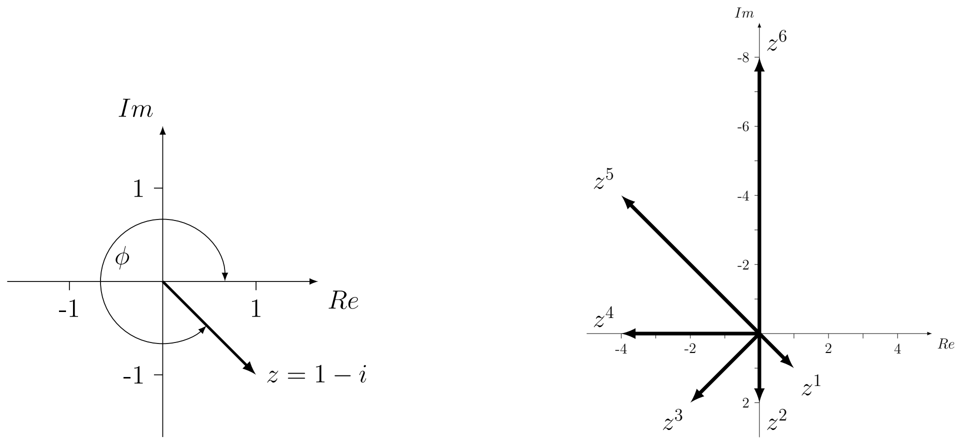


Abbildung 8.9.: Potenzieren: $z^6 = 8i$

- n-te Wurzeln ziehen (Radizieren):
  Diese Rechnung wird mit der **Moivre'sche Formel** (Satz 8.4.14) durchgeführt. Sie liefert genau n komplexe Zahlen ($w_0, w_1, ..., w_{n-1}$).

Satz 8.4.14 (Moivre'sche Formel)
Die n Wurzeln aus $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ berechnen sich wie folgt:
$\sqrt[n]{z} = w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1$
Es ergeben sich also genau n komplexe Zahlen $w_0, w_1, ..., w_{n-1}$ wegen der Periodizität von Sinus und Cosinus.

Beweis.

$$\begin{aligned} w &= \sqrt[n]{z} \\ w^n &= (\sqrt[n]{z})^n \\ &= [\sqrt[n]{r} \cdot (\cos(\frac{\phi + 2k\pi}{n}) + i \cdot \sin(\frac{\phi + 2k\pi}{n}))]^n \\ &= (\sqrt[n]{r})^n \cdot [\cos(n \cdot \frac{\phi + 2k\pi}{n}) + i \cdot \sin(n \cdot \frac{\phi + 2k\pi}{n})] \\ &= r \cdot (\cos(\phi + 2k\pi) + i \sin(\phi + 2k\pi)) \\ &= r \cdot (\cos\phi + i \sin\phi) \end{aligned}$$

Vorsicht: Bei der Bestimmung von ϕ muss der Quadrant, in dem die komplexe Zahl liegt, berücksichtigt werden! □

Beispiel 8.4.15 (Berechnung von $z^3 = 8$ mit der Moivre'sche Formel)
$z^3 = 8 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8 + 0 \cdot i}$ mit $z_1 = 8 + 0 \cdot i$

$\phi = 0, \quad r = |z_1| = \sqrt{8^2 + 0^2} = 8, \quad z_1 = 8\,(\cos(0) + i \cdot \sin(0))$

$w_k = \sqrt[3]{8} \cdot \left(\cos\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right)\right), k = 0..2$

$w_0 = 2 \cdot (\cos(0) + i \cdot \sin(0)) = 2 \cdot (1 + 0i) = 2$
$w_1 = \sqrt[3]{8} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -1 + i\sqrt{3}$
$w_2 = \sqrt[3]{8} \cdot \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -1 - i\sqrt{3}$

$$\sqrt[3]{8} = \begin{cases} 2 \\ -1 + i\sqrt{3} \\ -1 - i\sqrt{3} \end{cases}$$

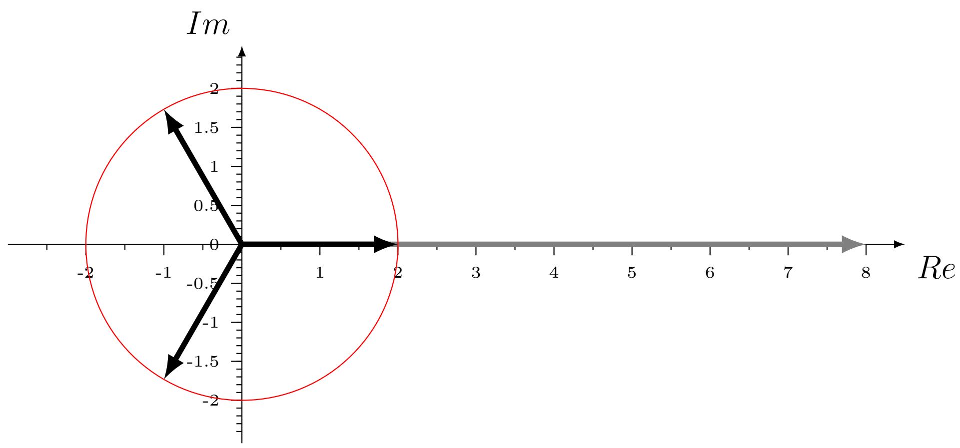


Abbildung 8.10.: Radizieren: Die 3 komplexen Lösungen von $z = \sqrt[3]{8}$

Beispiel 8.4.16 (Die 3 komplexen Lösungen von $z^3 = 1 - i$)
$z^3 = 1 - i \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{1-i}$ mit $z_1 = 1 - i$
$\phi = \frac{7}{4}\pi, \quad |z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
z_1 = 1 - i &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right) \\
\sqrt[3]{1-i} &= \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\frac{7}{4}\pi + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{7}{4}\pi + 2k\pi}{3}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2 \\
&= \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{7}{12}\pi + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7}{12}\pi + \frac{2k\pi}{3}\right)\right)
\end{aligned}$$

Es ergeben sich als Lösung 3 komplexe Zahlen:

$$\begin{aligned}
k = 0 \quad &: \quad w_0 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi) \\
k = 1 \quad &: \quad w_1 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{15}{12}\pi + i\sin\frac{15}{12}\pi) \\
k = 2 \quad &: \quad w_2 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{23}{12}\pi + i\sin\frac{23}{12}\pi)
\end{aligned}$$

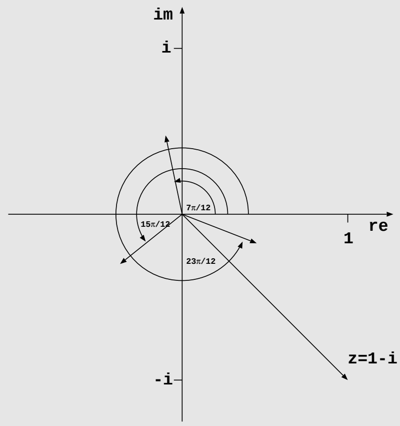


Abbildung 8.11.: Die 3 komplexen Lösungen von $z = \sqrt[3]{1-i}$

Beispiel 8.4.17 ($z^8 = 1$)
$z^8 = 1[+0i] \quad$ gesucht: $\sqrt[8]{1}$

Es gibt 8 komplexe Zahlen $z_0..z_7$ mit
$z_j^8 = 1; j = 0..7$

kartesische Form $\longrightarrow$ Polarform:
$1 + 0i \longrightarrow 1 \cdot (\cos 0 + i \cdot \sin 0) \qquad r = 1; \phi = 0$

$w_k = \underbrace{\sqrt[8]{r}}_{1} \cdot (\cos\frac{0+2k\pi}{8} + i \cdot \sin\frac{0+2k\pi}{8})$

8 Einheitswurzeln:
$w_0 = 1$
$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad [(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}})^8 = 1]$
$w_2 = i$ $\qquad [i^8 = 1]$
$w_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$
$w_4 = -1$
$w_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$
$w_6 = -i$
$w_7 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Longrightarrow$ regelmäßiges 8-Eck auf dem Einheitskreis

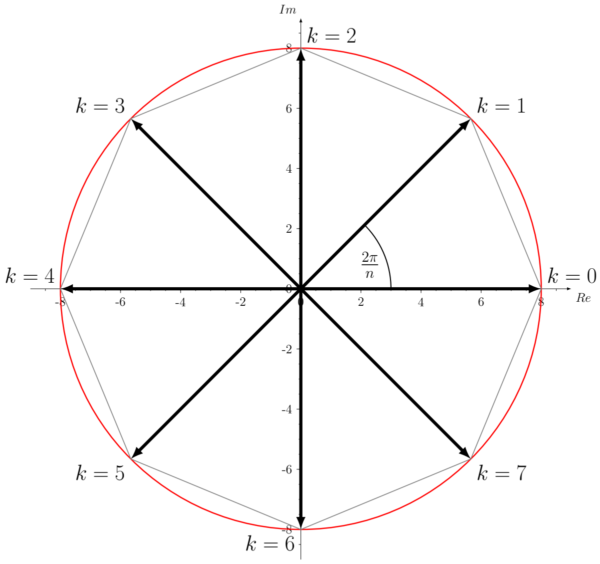


Abbildung 8.12.: Die 8 8-ten Wurzeln auf dem Einheitskreis

Bemerkung 8.4.18 (Darstellungen komplexer Zahlen)

- $z = a + bi$ kartesische Koordinaten
- $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ Polarkoordinatendarstellung
- $z = re^{i\phi}$ komplexe Exponentialfunktion

  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}$ Reihendarstellung der Exponentialfunktion

Sie sollten jetzt in der Lage sein,
- in den komplexen Zahlen zu rechnen (Grundrechenarten, Potenzieren, Radizieren),
- Gleichungen zu lösen,
- eine komplexe Zahlen in die verschiedenen Darstellungen umzuwandeln,
- in den verschiedenen Darstellungen von komplexen Zahlen zu rechnen.

8.4.3. Aufgaben

Aufgabe 1

a) $(5+5i)+(3+4i)=$

b) $(5+5i)-(3+4i)=$

c) $(5+5i)\cdot(3+4i)=$

d) $(5+5i):(3+4i)=$

e) $\frac{|5+5i|}{5+5i}=$

f) die Polarkoordinatendarstellung von $z=5+5i$

g) $(5+5i)^2=$

h) $(5+5i)^4=$

i) $(5+5i)^6=$

j) $\sqrt[4]{16}=$

k) $\sqrt[3]{5+5i}=$

l) Verifizieren Sie die Formel: $e^{i\pi}+1=0$

Aufgabe 2

Gegeben seien $z_1=3+4i$ und $z_2=1-i$. Berechnen Sie folgende Ausdrücke und geben Sie sie in der Form $a+bi$ an.

a) $z_1\cdot\overline{z_1}$

b) $\frac{1}{z_1}$

c) $z_1\cdot z_2$

d) $\frac{z_1}{z_2}$

Aufgabe 3

Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4+1=0$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie alle $z\in\mathbb{C}$ mit $z^4-2z^2+4=0$. Geben Sie die Lösungen sowohl in Polarform als auch in der Form $a+ib$ an.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $z = (1 + \sqrt{3}i)^5$.

Aufgabe 6

Man berechne sämtliche Werte von $(-1 + \sqrt{3}i)^{\frac{1}{5}}$.

8.4.4. Lösen von Polynomgleichungen in $\mathbb{C}$

Die Aufgabe, die Nullstellen von ganz-rationalen Funktionen (Polynomen) zu berechnen, lässt sich in $\mathbb{C}$ lösen. Die Anzahl der Lösungen ist gleich dem Grad des Polynoms, d.h. bei einer Gleichung n-ten Grades gibt es immer n (komplexe) Lösungen [3].
Mit Hilfe der Nullstellen läßt sich jedes Polynom in seine Linearfaktoren zerlegen (Faktorisierung).

$P_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C}$, $a_n = 1$ mit den Nullstellen $z_1, \cdots z_n$ läßt sich schreiben als
$P_n(z) = \prod\limits_{k=1}^{n} (z - z_k)$
Die Nullstellen $z_1, \cdots z_n$ können mehrfach auftreten und sie können reell oder komplex sein.

Sind die Koeffizienten des Polynoms $(a_0, \cdots a_n)$ reell, treten die Nullstellen konjugiert komplex auf, d.h. ist z_1 Nullstelle des Polynoms, so ist auch $\overline{z_1}$ Nullstelle, denn

$$
\begin{aligned}
z_1 \text{ ist Nullstelle} \Leftrightarrow P_n(z_1) = 0 \quad & \Rightarrow \quad \overline{P_n(z_1)} = 0 \\
& \Rightarrow \quad 0 = \overline{P_n(z_1)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z_1^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\,\overline{(z_1^k)} \\
& \overset{a_k \text{reell}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{(z_1^k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k (\overline{z_1}^k) = P_n(\overline{z_1})
\end{aligned}
$$

Beispiel 8.4.19 (Lösen einer Polynomgleichung mit komplexen Koeffizienten)
(= Bestimmen der Nullstellen eines Polynoms)

Aufgabe: Bestimmen Sie die Nullstellen des Polynoms $P(z) = z^2 + 2z - i$.

Polynom vom Grad 2 $\Rightarrow$ Es besitzt 2 Nullstellen.
Koeffizienten sind komplex: $P(z) = 1 \cdot z^2 + 2 \cdot z^1 + (-i) \cdot z^0, a_2 = 1, a_1 = 2, a_0 = -i$
Berechnung der Nullstellen[4]:

$$
\begin{aligned}
z^2 + 2z - i \quad & = \quad 0 \\
z_{1,2} \quad & \overset{\text{p-q-Formel}}{=} \quad -1 + \underbrace{\sqrt{1+i}}_{z^*}
\end{aligned}
$$

Bemerkung 8.4.20
Zur Berechnung der Nullstellen dieses Polynoms wurde die bekannte p-q-Formel verwendet. Es wird jedoch nur + statt $\pm$ vor die Wurzel der Diskriminante geschrieben, weil die Quadratwurzel einer komplexen Zahl zwei verschiedene Lösungen besitzt (Satz 8.4.14 auf Seite 147).

[3] Fundamentalsatz der Algebra
[4] Man kann quadratische Gleichungen ($n = 2$) formal nach der p-q-Formel oder mit quadratische Ergänzung lösen.

allgemeine Formel: $z_{1,2} = -\frac{a_1}{2} + \underbrace{\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}}_{z^*}$

Beispiel 8.4.21 (Fortsetzung des Beispiels 8.4.19 auf der vorherigen Seite)
Berechnung der komplexen Quadratwurzel mit der Moivre'sche Formel (Satz 8.4.14 auf Seite 147):

$$\begin{aligned} z^* &= \sqrt{1+i} \\ z_1^* &= \sqrt{\sqrt{2}} \cdot \left(cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \\ &\approx -0.098 + i \cdot 0.455 \\ z_2^* &= \sqrt{\sqrt{2}} \cdot \left(cos\left(\frac{9}{8}\pi\right) + i \cdot sin\left(\frac{9}{8}\pi\right)\right) \\ &\approx -2.098 - i \cdot 0.455 \end{aligned}$$

Lösung der Polynomgleichung:
$z_1 = -1 + z_1^* \approx -1 + (-0.098 + i \cdot 0.455) = -1 - 0.098 + i \cdot 0.455$
$z_2 = -1 + z_2^* \approx -1 + (-2.098 - i \cdot 0.455) = -1 - 2.098 - i \cdot 0.455$

Beispiel 8.4.22 (Polynomgleichung mit reellen Koeff. – Quadratische Ergänzung)

$$\begin{aligned} z^2 - 2z + 3 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 - 2z + 1 + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (z-1)^2 = -2 \\ &\Leftrightarrow \quad z_1 = 1 + \sqrt{-2} \\ &\Leftrightarrow \quad z_1 = 1 + i\sqrt{2} \qquad \wedge \qquad \overline{z_1} = z_2 = 1 - i\sqrt{2} \end{aligned}$$

Hinweis: $\sqrt{-2} = \sqrt{i^2 \cdot 2} = \begin{cases} i \cdot \sqrt{2} \\ -i \cdot \sqrt{2} \end{cases}$

Da die Koeffizienten der zu lösenden Polynomgleichung reell sind, ergeben sich z_1 und $\overline{z_1}$ (konjugierte komplexe Zahl von z_1) als Lösungen.

Probe:
Durch Ausmultiplikation der Linearfaktoren muss sich das ursprüngliche Polynom ergeben.

$$(z - (1 + i\sqrt{2})) \cdot (z - (1 - i\sqrt{2})) = z^2 - 2z + 3 = 0$$

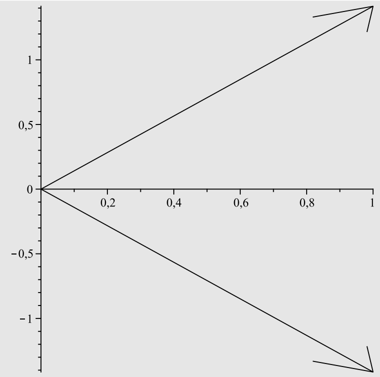


Abbildung 8.13.: $z_1 = 1 + i \cdot \sqrt{2}, \quad \overline{z_1} = z_2 = 1 - i \cdot \sqrt{2}$

Beispiel 8.4.23 (komplexes Polynom mit reellen Koeffizienten)
Aufgabe: Lösen Sie die Gleichung $z^4 + 1 = 0$.

- Die Gleichung $x^4 + 1 = 0$ besitzt keine reellen Nullstellen, sondern 4 komplexe Nullstellen (Polynom vom Grad 4).
- $z^4 + 1 = 1 \cdot z^4 + 0 \cdot z^3 + 0 \cdot z^2 + 0 \cdot z^1 + 1 \cdot z^0$
  Polynom mit den reellen Koeffizienten $a_4 = 1, a_3 = a_2 = a_1 = 0, a_0 = 1$
  $\Rightarrow$ Lösungen sind zwei Nullstellenpaare: $z_0, \overline{z_0}$ und $z_1, \overline{z_1}$
- zu lösende Gleichung: $z^4 = -1 \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{-1}$
  $\Rightarrow$ komplexe Wurzeln, Moivre'sche Formel (Satz 8.4.14 auf Seite 147)
- Darstellung von $z^* = -1$ in Polarkoordinaten:
  $z^* = -1 = -1 + i \cdot 0 = (-1, 0), \quad \Phi = \pi, \quad |z^*| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$
  $z^* = -1 = 1 \cdot (cos(\pi) + i \cdot sin(\pi))$
- Berechnung der 4 Lösungen mit der Moivre'schen Formel:

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[4]{-1} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right) \qquad k = 0, 1, 2, 3 \\ &= z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \ \wedge \ z_1 = \overline{z_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \ \wedge \\ &\quad\; z_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \ \wedge \ z_4 = \overline{z_3} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

- Faktorisierung des Polynoms $z^4 + 1$

$$\begin{aligned} z^4 + 1 &= (z - z_0) \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_3) \\ &= \left(z - \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(z - \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(z + \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(z + \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Bemerkung 8.4.24 (Komplexe Funktionen ($\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$))

$z \longrightarrow z$	Identität
$z \longrightarrow \overline{z}$	Spiegelung an der Real-Achse
$z \longrightarrow -z$	Spiegelung am Nullpunkt
$z \longrightarrow -\overline{z}$	Spiegelung an der Imaginär-Achse
$z \longrightarrow \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{\lvert z\rvert^2}$	Spiegelung am Einheitskreis + Spiegelung an der Real-Achse

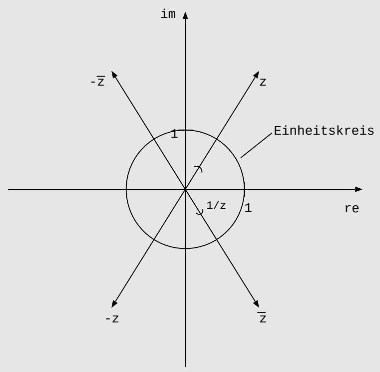


Abbildung 8.14.: Darstellung von $z, \overline{z}, -z, -\overline{z}$ und $\frac{1}{z}$

8.4.5. Umgebung der Zahl a mit Abstand $r \in \mathbb{R}^+$

- Für reelle Zahlen ($a \in \mathbb{R}$) gilt:
  $U_r(a) := \{x \mid |x-a| = r\} = \{a-r, a+r\}$ zwei Punkte
  $U_r(a) := \{x \mid |x-a| \leqslant r\} = [a-r, a+r]$ Intervall mit Mittelpunkt a und Länge $2r$

- Für komplexe Zahlen ($z \in \mathbb{C}$) gilt:
  $U_r(a) := \{z \mid |z-a| = r\}$ Kreisrand um a mit Radius r
  $U_r(a) := \{z \mid |z-a| \leqslant r\}$ Kreisfläche (+ Kreisrand) um Punkt a mit Radius r

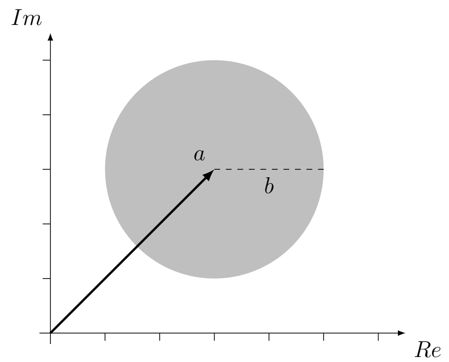


Abbildung 8.15.: Die Darstellung von $|z-a| < b$ ist ein Kreis um a mit dem Radius b (ohne Rand)

Beispiel 8.4.25 (Abstand in der reellen und der komplexen Zahlenebene)

Frage:
Welche reellen und welche komplexen Zahlen haben den gleichen Abstand zur Zahl 5 und zur Zahl 7?

Lösung:

- Abstand in der reellen Zahlenebene
  $\{x \in \mathbb{R}|\; |x-5| = |x-7|\} = \{6\}$

- Abstand in der komplexen Zahlenebene
  $\{z \in \mathbb{C}|\; |z-5| = |z-7|\} = \{z \in \mathbb{C}| z = 6 + i\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$

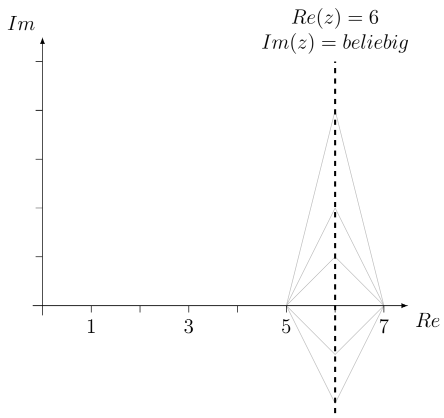


Abbildung 8.16.: Darstellung: $|z-5| = |z-7|$

Sie sollten jetzt in der Lage sein,
- komplexe Zahlen in der Gaussschen Zahlenebene darzustellen,
- Abstände zu berechnen,
- komplexe Polynome (auch mit komplexen Koeffizienten) aufzustellen und zu berechnen,
- Gleichungen zu lösen.

8.4.6. Aufgaben

Aufgabe 1

Man berechne alle Nullstellen der Gleichung $z^2 - 2iz + 8 = 0$.

Aufgabe 2

Für das Polynom $f(x) = x^4+9x^3+18x^2-30x-100, x \in \mathbb{C}$ sollen alle Nullstellen berechnet werden. Es sei bekannt, dass $x = -5$ und $x = 2$ Nullstellen des Polynoms sind.
Berechnen Sie die restlichen Nullstellen und geben Sie das Polynom als Produkt seiner Linearfaktoren an.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie ein Polynom möglichst geringen Grades, das die Nullstellen $1 + \imath$ und $\imath$ hat.

a) Die Koeffizienten sind aus $\mathbb{C}$.

b) Die Koeffizienten sind aus $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4

Für welche Punkte der Gauß'schen Zahlenebene gilt $(z + i) \cdot (\overline{z} - i) = 9$?

Aufgabe 5

Für welche komplexen Zahlen gilt: $z \cdot \overline{z} + Re((3 - 2i) \cdot z) + 1 = 0$?

9. Grundlagen der Kombinatorik

Die Kombinatorik ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit der Bestimmung der Mächtigkeit von endlichen Mengen befasst. Erste Formeln sind schon im Kapitel 2.3 auf Seite 36 behandelt worden.

9.1. Grundlegende Zählprinzipien bei endlichen Mengen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen für das Abzählen gelegt.

Definition 9.1.1
M sei eine Menge.
M heißt endlich $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \, \exists$ bijektive Abbildung $f : M \to \{1, \ldots, n\} \vee M = \emptyset$
$M \neq \emptyset$ sei endlich: Die eindeutig bestimmte Zahl n heißt Mächtigkeit/Kardinalzahl oder Anzahl der Elemente der Menge M. Schreibweise: $|M| = n$
Die Mächtigkeit der leeren Menge ist 0. $|\emptyset| = 0$.

Grundlegende Zählprinzipien:
(Spezialfälle der folgenden Regeln haben Sie bereits im Abschnitt 2.3 auf Seite 36 ff. kennengelernt.)

1. **Summenregel**
   Bei der **Vereinigung disjunkter Mengen** addieren sich die Mächtigkeiten der einzelnen Mengen.
   $S = \bigcup\limits_{i=1}^{k} M_i$ mit $|M_i| < \infty$ und $M_i \cap M_j = \emptyset$ (disjunkt) für $i \neq j \Rightarrow |S| = \sum\limits_{i=1}^{k} |M_i|$
   Spezialfall für $k = 2$ (Abschitt 2.3 auf Seite 36): A, B endlich, disjunkt (d.h. $A \cap B = \emptyset$)
   $|A \cup B| = |A| + |B|$

   Beispiel: $M_1 = \{a, b, c\},\ |M_1| = 3, \quad M_2 = \{d, e\},\ |M_2| = 2$
   $M_1 \cap M_2 = \emptyset,\ M_1 \cup M_2 = \{a, b, c, d, e\},\ |M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| = 3 + 2 = 5$

2. **Produktregel**
   Die Ergebnismenge des kartesischen Produkts von k Mengen besteht aus geordneten $k-$Tupel. Die Anzahl dieser $k-$Tupel berechnet sich aus der Multiplikation der Mächtigkeiten der einzelnen Mengen.
   $S = \bigtimes\limits_{i=1}^{k} M_i$ mit $|M_i| < \infty \Rightarrow |S| = \prod\limits_{i=1}^{k} |M_i|, \quad |M_i| = n_i \quad |S| = \prod\limits_{i=1}^{k} n_i$
   Spezialfall für $k = 2$ (siehe Kapitel 2.3 auf Seite 36): A, B endlich, $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Beispiel: $M_1 = \{a, b, c\},\ |M_1| = 3,\ M_2 = \{d, e\},\ |M_2| = 2$
$M_1 \times M_2 = \{(a, d), (a, e), \dots (c, e)\}, \quad |M_1 \times M_2| = |M_1| \cdot |M_2| = 3 \cdot 2 = 6$

3. **Gleichheitsregel**
Zwei endliche Mengen haben **gleich viele Elemente**, wenn man jedes Element aus der einen Menge auf ein Element der anderen Menge bijektiv (eineindeutig) abbilden kann. Beide Mengen besitzen dann die selbe Mächtigkeit.
Sei $|M_1| < \infty$, $|M_2| < \infty$ mit $M_1, M_2 \neq \emptyset$, wenn $f : M_1 \to M_2$ bijektiv $\Rightarrow |M_1| = |M_2|$
Beispiel: $M_1 = \{1, 2, 3\},\ M_2 = \{1, 8, 27\},\ f(x) = x^3$ (bijektiv) $\Rightarrow |M_1| = |M_2| = 3$

4. **Schubfach-Prinzip**
Wird eine Menge auf eine andere, die **weniger Elemente** hat, abgebildet, dann werden mindestens zwei Elemente auf das gleiche Element abgebildet.
$M_1, M_2 \neq \emptyset,\ |M_1| < \infty,\ |M_2| < \infty,\ \ |M_1| > |M_2|$
$f : M_1 \to M_2 \ \Rightarrow \exists y \in M_2$ mit $|f^{-1}[\{y\}]| \geq 2$ (Mächtigkeit des Urbilds)
Beispiel: $M_1 = \{-1, 1\},\ M_2 = \{1\},\ f(x) = x^2 \ \Rightarrow y = 1, |f^{-1}[\{1\}]| = |\{1, -1\}| = 2$

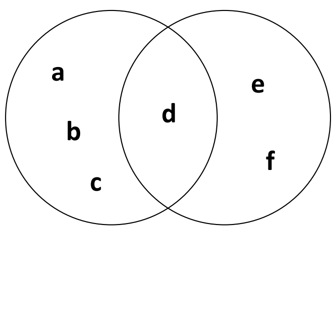
5. **Siebformel**
Die Siebformel, auch allgemeine Summenregel genannt, stellt eine Erweiterung der Summenregel (siehe Punkt 1) auf nicht-disjunkte Mengen dar.

Bei der Berechnung der Mächtigkeiten der **Vereinigung nicht-disjunkter Mengen** addieren sich die Mächtigkeiten der einzelnen Mengen, doppelt gezählte Elemente der Schnittmengen muss man jedoch wieder abziehen.

- allgemein für k nicht-disjunkte Teilmengen gilt
$S = \bigcup_{i=1}^{k} M_i,\ |S| = |\bigcup_{i=1}^{k} M_i| = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \cdot [\sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_j \leq k} |\bigcap_{i=1}^{j} M_{n_i}|]$
- Spezialfälle für $k = 2$ und $k = 3$ (Abschitt 2.3 auf Seite 36):
Seien A, B, C endliche Mengen, so gilt für
$k = 2 : \quad |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
$k = 3 : \quad |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Oftmals ist es einfacher sich die Formel anhand eines Venn-Diagrammens herzuleiten.

Beispiel: $M_1 = \{a, b, c, d\},\ M_2 = \{d, e, f\},\ M_1 \cap M_2 = \{d\}$
$|M_1| = 4,\ |M_2| = 3,\ |M_1 \cap M_2| = 1$
$\Rightarrow |S| = |M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2| = 4 + 3 - 1 = 6$



Bemerkung 9.1.2
Statt $|A \cap B|$ wird oftmals die verkürzte Schreibweise $|AB|$ verwendet.

Beispiel 9.1.3 (Siebformel)

a) für 3 Mengen: $M_1 \cup M_2 \cup M_3$
$|S| = |M_1 \cup M_2 \cup M_3| = |M_1| + |M_2| + |M_3| - |M_1M_2| - |M_1M_3| - |M_2M_3| + |M_1M_2M_3|$

mit obiger Formel:

$$\begin{aligned}
|S| &= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{j-1} \cdot [\sum_{1 \le n_1 < \ldots < n_j \le 3} |\bigcap_{i=1}^{j} M_{n_i}|] \\
&= \quad (-1)^{1-1}\,[|M_1| + |M_2| + |M_3|] \\
&\quad + (-1)^{2-1}\,[|M_1M_2| + |M_1M_3| + |M_2M_3|] \\
&\quad + (-1)^{3-1}\,[|M_1M_2M_3|] \\
&= |M_1| + |M_2| + |M_3| \; - \; |M_1M_2| - |M_1M_3| - |M_2M_3| \; + \; |M_1M_2M_3|
\end{aligned}$$

b) für 4 Mengen:
Gesucht ist die Mächtigkeit der Menge der Zahlen, die durch 2, 3, 5 oder 7 teilbar und kleiner gleich 100 sind.
$M = \{1 \ldots 100\}, \quad M_k = \{j \mid k \text{ teilt } j \text{ ohne Rest}\}$
$M_2 = \{2, 4, 6, \ldots, 98, 100\}$, $M_3 = \{3, 6, 9, \ldots, 96, 99\}$, $M_5 = \{5, 10, 15, \ldots, 95, 100\}$,
$M_7 = \{7, 14, 21, \ldots, 91, 98\}$

$$\begin{aligned}
&|M_2 \cup M_3 \cup M_5 \cup M_7| \\
&= \quad |M_2| + |M_3| + |M_5| + |M_7| \\
&\quad -|M_2M_3| - |M_2M_5| - |M_2M_7| - |M_3M_5| - |M_3M_7| - |M_5M_7| \\
&\quad +|M_2M_3M_5| + |M_2M_3M_7| + |M_2M_5M_7| + |M_3M_5M_7| \\
&\quad -|M_2M_3M_5M_7| \\
&= 50 + 33 + 20 + 14 - 16 - 10 - 7 - 6 - 4 - 2 + 3 + 2 + 1 + 0 - 0 \\
&= 78
\end{aligned}$$

9.2. Die vier Grundprobleme der Kombinatorik

Die Kombinatorik beschreibt grundsätzlich eine Auswahl von k Objekten aus einer $n-$elementigen Grundmenge. Die getroffene Auswahl wird durch k-Tupel beschrieben. Diese werden in einer Ergebnismenge zusammengefasst. Gesucht ist letztendlich die Mächtigkeit der Ergebnismenge, also die Anzahl der $k-$Tupel, die in der Ergebnismenge enthalten sind.

Es gibt folgende Modellansätze:

- **Das Urnenmodell**
  Grundmenge = numerierte Kugeln in einer Urne
  Auswahl = Ziehung von Kugeln aus der Urne
  Die Mächtigkeit der Grundmenge (n) ist die Anzahl aller vorhandenen Kugeln. Das

Experiment besteht aus dem Ziehen der Kugeln und dem Notieren der Kugelnummern.

- **Das Teilchen-/Fächermodell**

Grundmenge = numerierte Fächer
Auswahl = Besetzung der Fächer mit Teilchen

Die Mächtigkeit der Grundmenge (n) ist die Anzahl aller Fächer. Bei der Durchführung des Experiments werden die Teilchen in den/auf die Fächer/n angeordnet/verteilt und die Nummern der besetzten Fächer notiert.

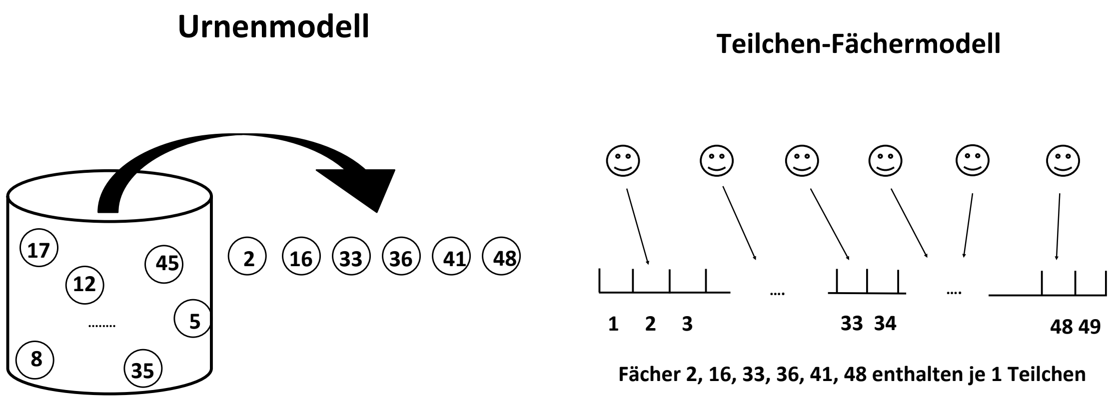


Abbildung 9.1.: Die unterschiedlichen Modelle beschreiben dasselbe Ergebnis

Für die Auswahl bzw. Anordnung der k Objekte der Grundmenge M_n gibt es 2 Ansätze:

- mit Berücksichtigung der Reihenfolge
  Die Kennzeichnung des gezogenen Objektes bzw. die Fachnummer, in die das Objekt gelegt wurde, wird **während** der Ziehung bzw. Anordnung notiert. **Die zeitliche Reihenfolge der Auswahl/Anordnung** muss nach Ende des Experiments an den Tupeln der Ergebnismenge ablesbar sein.
  Man spricht von **k−Permutationen** oder **k−Variationen** aus M_n.
  $(a_1, a_2, ..., a_k),\ a_i \in M_n$

- ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
  Nach Beendigung des Experiments werden die Kennzeichnungen der gezogenen Objekte bzw. die Nummern der Fächer, die Objekte enthalten, **sortiert** und dann **notiert**.
  Man spricht von **k−Kombinationen** aus M_n.
  $(a_1, a_2, ..., a_k),\ a_i \in M_n, a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_k$

Für die Grundmenge bzw. für die Fächer gilt folgendes:

- mit Wiederholung/Mehrfachbelegung
  Urnenmodell: Die Auswahl des Objektes wird für die Ergebnismenge festgehalten und das Objekt wieder der Grundmenge zugeführt.

> Teilchen-/Fächermodell: Es dürfen in jedem Fach mehrere Objekte angeordnet werden.

  $a_i = a_j$ ist möglich für $i \neq j$

- ohne Wiederholung/Einfachbelegung
  Urnenmodell: Das Objekt wird nach seiner Auswahl nicht wieder der Grundmenge zugeführt.

  > Teilchen-/Fächermodell: Es darf in jedem Fach höchstens ein Objekt angeordnet werden.

  $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$

Aus diesen Ansätzen heraus lassen sich, unabhängig vom gewählten Modell, die vier Grundprobleme der Kombinatorik herleiten: **Auswahl/Anordung von k Objekten aus einer n-elementigen Grundmenge $\mathbf{M_n}$ mit/ohne Zurücklegen/Wiederholung/Mehrfachbelegung, mit/ohne Berücksichtigen der Reihenfolge**.

Alle möglichen Ergebnisse des Experiments werden durch $k-$ Tupel beschrieben, die in einer Ergebnismenge (hier: E) zusammengefaßt werden. Nachfolgend gilt $M_n = \{1, 2, ..., n\}$

- ohne Zurücklegen/Wiederholung mit Berücksichtigen der Reihenfolge (Permutationen)
  $E = \{(a_1, ..., a_k) \text{ mit } a_j \in M_n, a_i \neq a_j \text{ für } i, j = 1, ..., k\,,\ i \neq j\,\}$
- mit Zurücklegen/Wiederholung mit Berücksichtigen der Reihenfolge (Permutationen)
  $E = \{(a_1, ..., a_k) \text{ mit } a_j \in M_n \text{ für } j = 1, ..., k\}$
- ohne Zurücklegen/Wiederholung ohne Berücksichtigen der Reihenfolge (Kombinationen)
  $E = \{(a_1, ..., a_k) \text{ mit } a_j \in M_n, 1 \leq a_1 < a_2 < ... < a_k \leq n\}$
- mit Zurücklegen/Wiederholung ohne Berücksichtigen der Reihenfolge (Kombinationen)
  $E = \{(a_1, ..., a_k) \text{ mit } a_j \in M_n, 1 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_k \leq n\}$

Die Anzahl der möglichen Ausgänge des Experiments entspricht der Mächtigkeit der Ergebnismenge. Um diese zu berechnen, sind, unabhängig vom gewählten Modell, grundsätzlich folgende 3 Schritte notwendig:

1. **abstrakte verbale Modellierung**
   Die zu lösende Aufgabe wird mathematisch (abstrakt) formuliert und somit ist festgelegt, um welches der 4 Grundprobleme es sich handelt.
2. **Grundmenge**
   Mathematische Modellierung der Grundmenge (Mengenschreibweise) und Bestimmung ihrer Mächtigkeit.
3. **Ergebnismenge**
   Mathematische Modellierung aller möglichen Ausgänge des Experiments durch Bestimmung der Ergebnismenge (= Menge geordneter Tupel) und Berechnung der Mächtigkeit der Ergebnismenge (= Anzahl der Tupel).

9.2.1. Urnenmodelle

Aus einer Urne, die $n \in \mathbb{N}$ numerierte und somit unterscheidbare Kugeln enthält, werden k Kugeln nacheinander entnommen/gezogen. Es findet also eine **Auswahl von k Objekten aus einer Menge mit n Elementen** statt. Dabei kann die Reihenfolge der Ziehungen eine Rolle spielen oder auch nicht (Permutation/Kombination). Ebenso ist zu beachten, ob jedes entnommene Element zurückgelegt wird oder nicht (mit/ohne Wiederholung).

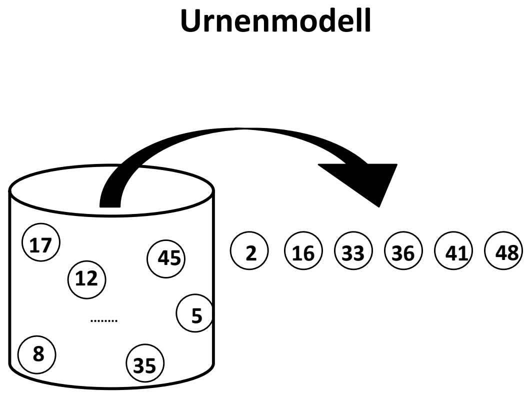


Abbildung 9.2.: Ziehen von 6 Kugeln aus 49 ohne Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Beispiel 9.2.1 (Auswahl von 8 Kugeln aus 15)
Experiment: Aus einer Kiste, die 15 durchnummerierte Billardkugeln enthält, sollen nacheinander 8 Kugeln ausgewählt werden. Die Nummer der gezogenen Kugel soll direkt notiert und die Kugel nicht mehr in die Kiste zurückgelegt werden.

1. abstrakte verbale Modellierung:
   Auswahl von 8 unterscheidbaren Kugeln aus einer Urne mit 15 Kugeln, mit Berücksichtigung der Reihenfolge ohne Zurücklegen/Wiederholung.

2. Grundmenge:
   $B_{15} = \{1, 2, ..., 15\}$ die Menge aller 15 Billardkugeln ($|B_{15}| = n = 15$)

3. Ergebnismenge:
   $E = \{(a_1, a_2, ..., a_8) | a_i \in B_{15}, a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j\}$ die möglichen Ergebnisse des Urnenmodells,
   wobei a_1 die Nummer der zuerst gezogenen Kugel ist, a_2 die Nummer der als zweites gezogenen Kugel und a_8 die Nummer der zuletzt gezogenen Kugel.

   $(5, 3, 12, 15, 1, 7, 11, 2)$ bedeutet zum Beispiel Kugel 5 wurde als erstes gezogen, Kugel 3 als zweites, ... und Kugel 2 als letztes.
   $|E| = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{15!}{(15-8)!} = \binom{15}{8} \cdot 8! = 259\,459\,200$

Die 4 Experimenttypen mit ihren Ergebnismengen und den zugehörigen Formeln zur Berechnung der Mächtigkeiten

Bei der **Auswahl von k unterscheidbaren Objekten aus einer n-elementigen Grundmenge ($M_n = \{1, 2, ..., n\}$)** unterscheidet man 4 Experimenttypen:
(für die folgenden Beispiele gilt: $M_3 = \{1, 2, 3\}, n = 3, k = 2$)

1. **mit Berücksichtigung der Reihenfolge ohne Zurücklegen** (**Permutation ohne Wiederholung**)
   - Ziehen von k Objekten aus einer Urne mit n unterscheidbaren Elementen mit Berücksichtigung der Reihenfolge, ohne Zurücklegen
   - $E = \{(a_1, ..., a_k) \text{ mit } a_j \in M_n, a_i \neq a_j \text{ für } i, j = 1, ..., k \text{ , } i \neq j\ \}$
   - Mächtigkeit der Ergebnismenge:
     1-te Position des k-Tupels: n Möglichkeiten
     2-te Position des k-Tupels: $(n-1)$ Möglichkeiten
     3-te Position des k-Tupels: $(n-2)$ Möglichkeiten
     ...
     k-te Position des k-Tupels: $(n-k+1)$ Möglichkeiten
     $|E| = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k! =: n^{\underline{k}} = n_k$
   - Beispiel:
     $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$
     $|E| = \binom{3}{2} \cdot 2! = 3! = 6$

   Bemerkung 9.2.2 (Permutationen – Variationen)
   Oftmals wird der Begriff **„Permutationen“** für die Auswahl **aller** Objekte aus der Grundmenge unter Berücksichtigung der Reihenfolge ohne Zurücklegen verwendet. Er ist somit eine Verkürzung des Ausdrucks „n-Permutationen aus $M_n = \{1, ..., n\}$ ohne Wiederholung“ **(Permutationen – $\mathbf{PER^{oW}(n, n)}$)**

   Damit ist zum Beispiel eine bijektive Abbildung $f : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ gemeint, die durch n-Tupel beschrieben wird. Jedes n-Tupel besteht dabei aus n verschiedenen Elementen.

   Konkret: Die Permutationen der Zahlen $1, 2, 3$ sind folgende sechs 3er Tupel:
   $$PER^{oW}(3, 3) = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$$
   Ein weiteres Beispiel kommt aus dem Bereich der Linearen Algebra. Dort wird bei der Definition der Determinanten nur der Begriff „Permutationen“ verwendet, obwohl „$PER^{ow}(n, n)$“ gemeint ist.

   Für die Auswahl **einiger** Objekte (konkret k Objekte) aus einer n-elementigen Grundmenge unter Berücksichtigung der Reihenfolge wird in diesem Zusammenhang oftmals der Begriff **„Variationen“** verwendet.
   (Variationen – $\mathbf{PER^{oW}(n, k), n > k}$)

2. **mit Berücksichtigung der Reihenfolge mit Zurücklegen** (**Permutation mit Wiederholung**)
   - Ziehen von k Objekten aus einer Urne mit n unterscheidbaren Elementen mit Berücksichtigung der Reihenfolge, mit Zurücklegen

- $E = \{(a_1, ..., a_k)$ mit $a_j \in M_n$ für $j = 1, ..., k\}$
- Mächtigkeit der Ergebnismenge:
  1-te Position des k-Tupels: n Möglichkeiten
  2-te Position des k-Tupels: n Möglichkeiten
  3-te Position des k-Tupels: n Möglichkeiten
  ...
  k-te Position des k-Tupels: n Möglichkeiten
  $|E| = n \cdot n \cdot ... \cdot n = \prod_{i=1}^{k} n = n^k$
- Beispiel:
  $E = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$
  $|E| = 3^2 = 9$

3. **ohne Berücksichtigung der Reihenfolge ohne Zurücklegen**
   (**Kombination ohne Wiederholung**)
   - Ziehen von k Objekten aus einer Urne mit n unterscheidbaren Elementen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, ohne Zurücklegen
   - $E = \{(a_1, ..., a_k)$ mit $a_j \in M_n, 1 \leq a_1 < a_2 < ... < a_k \leq n\}$
   - Mächtigkeit der Ergebnismenge:
     Die Mächtigkeit dieser Menge lässt sich mit Hilfe der Formel für die Permutationen ohne Wiederholung (Punkt 1) erklären.
     Da im Gegensatz zu der Permutation die Reihenfolge, in der die Objekte gezogen werden, keine Rolle spielt, werden die $k!$- Tupel, die durch die Berücksichtigung der Reihenfolge entstehen, nicht mitgezählt.
     Also gilt $|E| = \frac{|PER^{oW}|}{k!} = \frac{\binom{n}{k} \cdot k!}{k!} = \binom{n}{k}$
     Letztendlich wird berechnet, wieviele k-elementige Teilmengen aus einer n-elementigen Grundmenge gebildet werden können.
     Insbesondere gilt, dass aus jeder n-elementigen Grundmenge genau eine 0-elementige Teilmenge gebildet werden kann, nämlich die leere Menge $\emptyset$. Das heisst $\binom{n}{0} = 1$.
     Analog dazu gilt $\binom{n}{n} = 1$, denn es gibt auch immer genau eine n-elementige Teilmenge, nämlich die Grundmenge selbst.
   - Beispiel:
     $E = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$
     $|E| = \binom{3}{2} = 3$

4. **ohne Berücksichtigung der Reihenfolge mit Zurücklegen**
   (**Kombination mit Wiederholung** [1])
   - Ziehen von k Objekten aus einer Urne mit n unterscheidbaren Elementen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, mit Zurücklegen
   - $E = \{(a_1, ..., a_k)$ mit $a_j \in M_n, 1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k \leq n\}$
   - Mächtigkeit der Ergebnismenge:
     Die Formel der Mächtigkeit dieser Menge lässt sich mit Hilfe der Formel für die Kombinationen ohne Wiederholung (Punkt 3) herleiten.

[1] Dieser Fall ist der schwierigste und seltenste.

Die dafür erforderlichen Ergebnistupel $(b_1, b_2, ...b_k)$ konstruiert man sich aus den oben genannten $(a_1, a_2, \ldots a_k)$ wie folgt:
Man definiert: $b_j := a_j + j - 1$ für $j = 1, \ldots, k$.
Also ist $b_1 = a_1, b_2 = a_2 + 1, b_3 = a_3 + 2, \ldots, b_k = a_k + (k-1)$.
So entsteht aus den ursprünglichen Tupeln $(a_1, a_2, ...a_k)$ die Tupel
$(b_1, b_2, ...b_k) = (a_1, a_2 + 1, a_3 + 2, ..., a_k + k - 1)$.
mit $b_j \in \{1, 2, ..., n + k - 1\}$, $1 \leq b_1 < b_2 < ... < b_k \leq n + k - 1$
(siehe auch Einschub: weiter Erläuterungen)

Die aus den a_j konstruierten Tupel der b_j sind also k-Kombinationen ohne Wiederholung aus $M_{n+k-1} = \{1, \ldots, n + k - 1\}$
mit $|E| = |KOM^{oW}(n + k - 1, k)| = \binom{n+k-1}{k}$

- Einschub: weitere Erläuterungen

$(a_1, ..., a_k) \xrightarrow{f} (b_1, ..., b_k)$ wobei $b_j = f(a_j) = a_j + j - 1$

z.B.: $A := (1, 3, 3, 5, 5, 5, 9) \xrightarrow{f} (1, 4, 5, 8, 9, 10, 15) := B, k = 7, n + k - 1 = 16$

$A = \{(a_1, ..., a_k) | 1 \leq a_1 \leq ... \leq a_k \leq n\}$ (Komb. mit Zurücklegen)
$B = \{(b_1, ..., b_k) | 1 \leq b_1 < b_2 < ... < b_k \leq n + k - 1\}$ (Komb. ohne Zurücklegen)
Die beiden Mengen sind gleichmächtig, da f bijektiv ist:

- f ist injektiv $(x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$
  Beweis: $(a_1, ..., a_k) \neq (c_1, ..., c_k) \exists j$ mit $a_j \neq c_j$
  $\Rightarrow b_j = a_j + j - 1 \neq c_j + j - 1 = d_j$
  $\Rightarrow (b_1, ..., b_k) = f(a_1, ..., a_k) \neq f(c_1, ..., c_k)$
- f ist surjektiv $(\forall y \exists x$ mit $f(x) = y)$
  Beweis: $\forall (b_1, ..., b_k) \in M^k_{m+k-1}$
  $\exists (a_1, .., a_k) \in M^k_n$ mit $a_j = b_j - j + 1$

also $|A| = |B| = \binom{n+k-1}{k}$

- Beispiel:
  $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$
  $|E| = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6$

Beispiele für die vier Fälle:

1. **Permutationen ohne Wiederholung**

   (1) *Medaillenverteilung*

   Wieviele Möglichkeiten der Medaillenverteilung gibt es bei einem 100 Meter Endlauf der olympischen Spiele?
   Erklärung: Aus den n Sportlern des Endlaufs sind k Sportler, die eine Medaille bekommen, auszuwählen. Zunächst wird der erste Sieger bestimmt, dann der Zweitplatzierte etc. Die Reihenfolge der Platzierungen ist wichtig und jeder der Sportler kann pro Wettkampf nur eine der Platzierungen erreichen .

   Beispiel: 10 Sportler $(n = 10)$ kämpfen um die ersten 3 Plätze $(k = 3)$

   i) abstrakte verbale Modellierung:

Ziehen von 3 unterscheidbaren Kugeln aus einer Urne mit 10 Kugeln, mit Berücksichtigung der Reihenfolge ohne Zurücklegen/Wiederholung.

ii) Grundmenge:
$G = \{1, 2, ..., 10\}, |G| = 10$

iii) Ergebnismenge:
$E = \{(a_1, a_2, a_3)|a_i \in G, a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j\}$
Mächtigkeit der Ergebnismenge:
$|E| = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$

Es gibt also 720 Möglichkeiten für die Verteilung der ersten drei Plätze.

(2) *Wörter mit k verschiedenen Buchstaben bilden*

Aus den 26 Buchstaben des Alphabets (ohne Umlaute und Beachtung der Groß- und Kleinschreibung) sollen Wörter mit vier Buchstaben gebildet werden, ohne dass ein Buchstabe im Wort doppelt vorkommt. „DANN“ ist also nicht erlaubt, „DANE“ schon.
Man wählt also aus den $n = 26$ Buchstaben $k = 4$ aus, beachtet die Reihenfolge ($\rightarrow$ Permutationen, weil „DANE“ und „ENAD“ verschiedene Wörter sind) und benutzt keinen Buchstaben mehrfach (kein Zurücklegen / keine Wiederholung).

i) abstrakte verbale Modellierung
Ziehen von 4 unterscheidbaren Kugeln aus einer Urne mit 26 Kugeln, mit Berücksichtigung der Reihenfolge und ohne Zurücklegen.

ii) Grundmenge
$G = \{A, B, ..., Z\}, |G| = 26$

iii) Ergebnismenge
$E = \{(a_1, ..., a_4)|a_i \in G, a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j, i, j = 1, 2, 3, 4\}$
Mächtigkeit der Ergebnismenge:
$|E| = \frac{26!}{(26-4)!} = \frac{26!}{22!} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358\,800$

Dieses Experiment liefert demnach 358 800 Wörter.

2. **Permutationen mit Wiederholung**

(1) *mögliche TOTO-Tipps*

Beim Toto tippt man das Ergebnis von Sportwettkämpfen.
Zum Beipiel gilt beim Fußball:
Für jedes der k vom Wettanbieter festgelegten Spiele wird für den persönlichen Tipp entweder die 0 (steht für Unentschieden), die 1 (Sieg der Heimmannschaft) oder die 2 (Sieg der Gastmannschaft) auf einem Tippschein notiert.

Für k Spiele lautet die abstrakte, verbale Modellierung:
Ziehen von k unterscheidbaren Kugeln aus einer Urne mit 3 Kugeln mit Berücksichtigung der Reihenfolge, mit Zurücklegen/Wiederholung.
Grundmenge: $G = \{0, 1, 2\}, |G| = 3$

Ergebnismenge: $E = \{(a_1, a_2, ..., a_k)|a_i \in G, i = 1, 2, ..., k\}, |E| = 3^k$

Beispiel: Man tippt auf 5 Spiele:
Modellierung: Ziehen von 5 unterscheidbaren Kugeln aus einer Urne mit 3 Kugeln mit Berücksichtigung der Reihenfolge, mit Zurücklegen.
$G = \{0, 1, 2\}, E = \{(a_1, a_2, ..., a_5)|a_j \in G \text{ für } j = 1, 2, ..., 5\}$

(Erklärung: a_1 legt den getippten Ausgang von Spiel 1 fest, a_2 ist der Tipp für Spiel 2, ... und a_5 ist der Tipp für Spiel 5. Das Tupel $(0,0,2,1,2)$ aus der Ergebnismenge E bedeutet zum Beispiel: Spiel 1 endet unentschieden, Spiel 2 ebenfalls, in Spiel 3 geht die Gastmannschaft als Sieger vom Platz, in Spiel 4 gewinnt die Heimmannschaft und Spiel 5 entscheidet wiederum die Gastmannschaft für sich.)

$|E| = 3^5 = 243$
Es gibt 243 mögliche Tipps.

(2) *Wörter mit k Buchstaben bilden*

Es werden Wörter aus k Buchstaben gebildet, wobei die einzelnen Buchstaben mehrfach vorkommen können („OTTO“ ist hierbei ein mögliches Wort). Man unterscheidet die Wörter „ABER“ und „RABE“.
Die Reihenfolge ist also wichtig ($\rightarrow$ Permutationen).

Modellierung: Ziehen von k unterscheidbaren Kugeln aus einer Urne mit 26 Kugeln unter Berücksichtigung der Reihenfolge mit Zurücklegen/Wiederholung.
$G = \{A, B, ..., Z\}, |G| = 26$
$E = \{(a_1, a_2, ..., a_k)|a_j \in G \text{ für } j = 1, 2, ..., k\}$
$|E| = 26^k$

3. **Kombinationen ohne Wiederholung**
Bestimmen von k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Grundmenge.

(1) *Lottoziehung, 6 aus 49*

Beim Lotto werden aus den Ziffern 1 bis 49   6 Zahlen gezogen und der Größe nach aufsteigend sortiert.
Die Reihenfolge, in der die Zahlen gezogen werden, spielt also keine Rolle ($\rightarrow$ Kombinationen). Die Kugeln werden nach der Ziehung nicht zurück in die Trommel gelegt, damit sechs verschiedene Zahlen gezogen werden (ohne Wiederholung/Zurücklegen).

Es wird demnach die Anzahl aller 6-elementigen Teilmengen einer 49-elementigen Grundmenge gesucht.
Modellierung: Ziehen von 6 unterscheidbaren Kugeln aus einer Urne mit 49 Kugeln ohne Berücksichtigung der Reihenfolge ohne Zurücklegen/Wiederholung.
$G = \{1, 2, 3, ..., 49\}, |G| = 49$
$E = \{(x_1, x_2, ..., x_6)|1 \leq x_1 < x_2 ... < x_6 \leq 49\}$
$|E| = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13\,983\,816$
Beim Lotto kann man fast 14 Millionen verschiedene Tipps abgeben.

4. **Kombinationen mit Wiederholung**

(1) *Dominosteine*

Auf Dominosteinen stehen jeweils zwei der Ziffern 0 bis 6. Es gibt sowohl Steine mit zwei gleichen (z.B. $(1-1)$) als auch Steine mit zwei verschiedenen Ziffern, wobei jede Ziffernkombination nur einmal vorkommt. (Der Stein $(2-5)$ ist also derselbe wie $(5-2)$). Wie viele verschiedene Steine gibt es?

Modellierung: Ziehen von 2 unterscheidbaren Kugeln aus einer Urne mit 7 Kugeln ohne Berücksichtigung der Reihenfolge mit Zurücklegen/Wiederholung.
$G = \{0, 1, 2, ..., 6\}, |G| = 7$
$E = \{(a_1, a_2)|0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 6\}$

$|E| = \binom{7+2-1}{2} = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\cdot 6!} = \frac{7\cdot 8}{2} = 28$
Es sind 28 verschiedene Dominosteine im Spiel.

(2) *Ziehen von 7 Ziffern ohne Berücksichtigung der Reihenfolge mit Zurücklegen*

- Modellierung mit einem Urnenmodell
Modellierung: Ziehen von 7 unterscheidbaren Kugeln aus einer Urne mit 10 Kugeln ohne Berücksichtigung der Reihenfolge mit Zurücklegen/Wiederholung.
Grundmenge: $G = \{0, 1, 2, ..., 9\}, |G| = 10$
$A = \{(a_1, ..., a_7)|0 \leq a_1 \leq ... \leq a_7 \leq 9\}$ z.B: $A = (1, 3, 3, 5, 5, 5, 9)$
$|A| = \binom{16}{7} = \binom{n+k-1}{k}$
- alternative Modellierung mit einem Punkt-/Strichmodell

Jede der k Ziffern wird durch einen Punkt dargestellt und jeder der $(n-1)$ Übergänge von einem Zahlenwert zum nächsten wird durch einen Strich dargestellt. Dadurch ergeben sich $(n+k-1)$ Plätze, auf die die k Punkte verteilt werden können.
(Die Reihenfolge der Ziffern der Grundmenge ist hier: $1, 2, 3, 4, ..., 9, 0$)

Jedes Punkt-Strich-Muster ist eindeutig durch ein $k-$elementiges Tupel darstellbar. Es enthält die Platznummern der Punkte.
z.B. $A = (1, 3, 3, 5, 5, 5, 9) \quad \longrightarrow \quad .\,|\,|\,.\,.\,|\,|\,.\,.\,.\,|\,|\,|\,|\,.\,|$
Tupel der Platznummern der Punkte: $A^* = (1, 4, 5, 8, 9, 10, 15)$
Bei diesem Beispiel sind $n^* = n + k - 1 = 16$ Plätze verfügbar, auf die die $k = 7$ Punkte verteilt werden können.

also: $A^* = \{(a_1, a_2, ..., a_7)|1 \leq a_1 < a_2... < a_7 \leq 16\}$
$|A^*| = \binom{16}{7} = \binom{n^*}{k} = |A| = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$

Zusammenfassung der Formeln des Urnenmodells

Ziehen/Auswählen von k Objekten aus einer $n-$elementigen Menge

	mit Wiederholung/Zurücklegen	ohne Wiederholung/Zurücklegen
Reihenfolge beachten	$\mid PER^{mW}(n,k) \mid = n^k$	$\lvert PER^{oW}(n,k)\rvert = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!$
Reihenfolge nicht beachten	$\lvert KOM^{mW}(n,k)\rvert = \binom{n+k-1}{k}$	$\lvert KOM^{oW}(n,k)\rvert = \binom{n}{k}$

9.2.2. Teilchen-Fächermodelle

Teilchen-Fächermodelle unterscheiden sich von den Urnenmodellen lediglich durch eine andere Interpretation der Fragestellung.
Statt k Objekte aus n vorhandenen Elementen auszuwählen (Urnenmodell), werden bei den Teilchen-Fächermodellen k Objekte (auch Teilchen genannt) in n Fächer angeordnet bzw. auf n Fächer verteilt. Die Fächer sind von 1 bis n durchnummeriert. Das Ergebnis der Verteilung der Teilchen wird in den $k-$Tupeln der Ergebnismenge durch die Nummer des/der besetzten Fächer festgehalten: $(a_1, a_2, ..., a_k), a_i$ ist die Nummer des Fachs, das mit dem $i-$ten Teilchen besetzt ist, falls die Teilchen unterscheidbar sind.

$a_1 \rightarrow$ Nummer des Fachs, das Teil 1 enthält, $a_2 \rightarrow$ Nummer des Fachs, das Teil 2 enthält, ...
Sonst ist a_i die Fachnummer des i-ten Teilchens „von links“.
Ist die Reihenfolge, in der die Fächer besetzt werden, wichtig, d.h. die Nummer des Faches, in das gerade ein Teilchen gelegt wurde, wird sofort notiert bzw. die Teilchen sind derart unterscheidbar (z.B. durchnummeriert), dass am Ende des Experiments die zeitliche Reihenfolge der Besetzung nachvollzogen werden kann, handelt es sich um **Permutationen**. Spielt die Reihenfolge der Fächerbesetzung jedoch keine Rolle, d.h. die Nummern der besetzten Fächer werden zum Beispiel nach dem Experiment aufsteigend sortiert notiert, handelt es sich um **Kombinationen**.

Darf jedes Fach nach Durchführung des Experiments höchstens ein Teilchen enthalten, spricht man von einer **Einfachbesetzung**, andernfalls handelt es sich um eine **Mehrfachbesetzung**. Letztere entspricht in Urnenterminologie einer Ziehung mit Wiederholung/Zurücklegen, eine Einfachbesetzung entspricht einer Ziehung ohne Zurücklegen/Wiederholung.

Bei manchen Experimenten kann der Ansatz über das Teilchen-Fächermodell der einfachere sein.

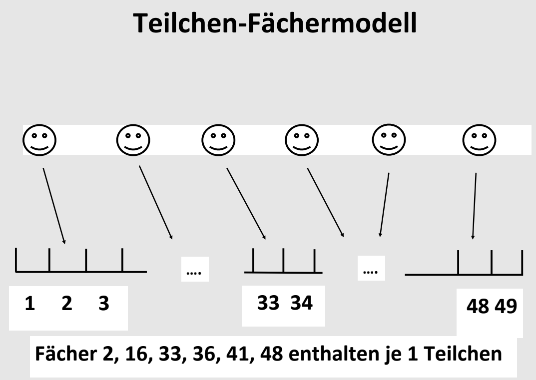


Abbildung 9.3.: Anordnen von 6 Teilchen (nicht unterscheidbar) in 49 Fächer (Einfachbelegung)

Beispiel 9.2.3 (Anordnung von 8 Kugeln in 15 Fächer (Fortführung Beispiel 9.2.1 auf Se
8 durchnummerierte Billardkugeln sollen so in 15 Fächer angeordnet bzw. auf 15 Fächer verteilt werden, dass in jedem Fach höchstens 1 Kugel liegt (Einfachbesetzung).
Die Kugeln sind unterscheidbar ($\rightarrow$ Permutation wegen der Durchnummerierung) und jedes Fach ist am Ende des Experiments mit höchstens einer Kugel belegt ($\rightarrow$ Einfachbesetzung).
Abstrakt bedeutet dieses Experiment: „Anordnen von 8 unterscheidbaren Teilchen in 15 Fächer ohne Mehrfachbelegung. Jedes Fach darf höchstens eine Kugel enthalten.“
Wenn $F_{15} = \{1, 2, 3, ..., 15\}$ die 15 Fächer sind (Grundmenge), so beschreibt
$E = \{(a_1, a_2, ..., a_8) | a_i \in F_{15}, a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j\}$ die möglichen Ergebnisse des Experiments, interpretiert als Teilchen-Fächermodell, wobei a_1 die Fachnummer ist, in der Kugel 1 liegt, a_2 ist die Fachnummer von Kugel 2 und a_8 ist die Fachnummer, in der Kugel 8 liegt.

Ein mögliches Tupel der Ergebnismenge ist zum Beispiel $(5, 3, 12, 15, 1, 7, 11, 2)$. Die Interpretation als Teilchen-Fächermodell lautet: Kugel 1 liegt in Fach 5, Kugel 2 liegt in Fach 3, ... Kugel 8 liegt in Fach 2.

Bemerkung 9.2.4
Die formale Beschreibung durch $PER^{oW}, PER^{mW}, KOM^{oW}$ und KOM^{mW} (siehe Seite 165 ff.) ist die gleiche. Lediglich die Interpretation der Fragestellung ist eine andere.
Die Grundmenge $F_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ enthält die Nummern aller zur Verfügung stehenden Fächer. Die $k-$Tupeln der Ergebnismenge enthalten die Nummern der besetzten Fächer ($a_j, j = 1, ..., k$, Nummer des Fachs, das Teil j enthält bzw. die Fachnummer des j-ten Teilchens von „links“).

1. **Permutation mit Einfachbelegung** (PER^{oW})
   Verteilen von k unterscheidbaren Teilchen auf n Fächer, so dass jedes Fach nach dem Experiment höchstens ein Teilchen enthält (Einfachbesetzung). Die Fachnummer wird sofort nach der Belegung notiert, bzw. die Teilchen sind gekennzeichnet (unterscheidbar), damit die Reihenfolge der Besetzung nach Beendigung des Experiments nachvollzogen werden kann.
   - Permutation, weil die Reihenfolge der Verteilung wichtig ist
   - ohne Wiederholung, da das Experiment maximal eine Einfachbesetzung der Fächer vorgibt

   $F_n = \{1, 2, ..., n\}$
   $E = \{(a_1, ..., a_k) \text{ mit } a_j \in F_n, a_i \neq a_j \text{ für } i, j = 1, ..., k\, ,\, i \neq j\,\}$
   $|E| = \binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$

2. **Permutation mit Mehrfachbesetzung** (PER^{mW})
   Verteilen von k unterscheidbaren Teilchen auf n Fächer. Nach dem Experiment enthält jedes Fach 0 bis k Teilchen (Mehrfachbesetzung). Die Fachnummer wird sofort nach der Besetzung notiert, bzw. die Teilchen sind gekennzeichnet (unterscheidbar), damit die Reihenfolge der Besetzung nach Beendigung des Experiment nachvollzogen werden kann.
   - Permutation, weil die Reihenfolge der Verteilung wichtig ist
   - mit Wiederholung, da ein Fach mehrere Teilchen enthalten darf (Mehrfachbesetzung)

   $F_n = \{1, 2, ..., n\}$
   $E = \{(a_1, ..., a_k) \text{ mit } a_j \in F_n, \text{ für } j = 1, ..., k\}$
   $|E| = n \cdot n \cdot ... \cdot n = \prod_{i=1}^{k} n = n^k$

3. **Kombination mit Einfachbesetzung** (KOM^{oW})
   k nicht unterscheidbare (also gleiche) Teilchen werden auf n Fächer verteilt, so dass jedes Fach nach dem Experiment höchstens ein Teilchen enthält (Einfachbesetzung). Die Nummern der besetzten Fächer werden am Ende des Experiments (z.B. aufsteigend sortiert) notiert.
   - Kombination, weil die Reihenfolge der Verteilung keine Rolle spielt
   - ohne Wiederholung, da das Experiment maximal eine Einfachbesetzung der Fächer vorgibt

$F_n = \{1, 2, ..., n\}$
$E = \{(a_1, ..., a_k) \text{ mit } a_j \in F_n, 1 \leq a_1 < a_2 < ... < a_k \leq n\}$
$|E| = \frac{|PER^{oW}|}{k!} = \frac{\binom{n}{k} \cdot k!}{k!} = \binom{n}{k}$

4. **Kombination mit Mehrfachbesetzung** (KOM^{mW})
   k nicht unterscheidbare (also gleiche) Teilchen werden auf n Fächer verteilt. Nach dem Experiment enthält jedes Fach 0 bis k Teilchen (Mehrfachbesetzung). Die Nummern der belegten Fächer werden nach dem Ende des Experiments (z.B. aufsteigend sortiert) notiert.
   - Kombination, weil die Reihenfolge der Verteilung keine Rolle spielt
   - mit Wiederholung, da ein Fach mehrere Teilchen enthalten darf (Mehrfachbesetzung)

   $F_n = \{1, 2, ..., n\}$
   $E = \{(a_1, ..., a_k) \text{ mit } a_j \in F_n, 1 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_k \leq n\}$
   $|E| = \binom{n+k-1}{k}$

Beispiel 9.2.5 (Wieviele maximal 3-stellige Zahlen mit der Quersumme 10 gibt es?)
Es ist also nach ein-, zwei- oder dreistelligen Zahlen mit der Quersumme 10 gefragt.

Für dieses Experiment gibt es mehrere Modellansätze:

1. **Kombinationen ohne Mehrfachbesetzung**
   Modell: Man betrachtet die Summe $h + z + e = 10$ (mit $h \rightarrow$ Hunderter, $z \rightarrow$ Zehner, $e \rightarrow$ Einer). Beide Summationszeichen (+) werden durch ein leeres Fach gekennzeichnet, die Anzahl der mit Teilchen belegten Fächer vor dem ersten leeren Fach ist die Ziffer h (Hunderter), die Anzahl der belegten Fächer zwischen dem ersten leeren Fach und dem zweiten leeren Fach ist die Ziffer z (Zehner) und die restliche Anzahl belegter Fächer ist die Ziffer e (Einer).
   Es gibt also insgesamt 12 Fächer: 10 werden einfach mit nicht unterscheidbaren Teilchen besetzt, die 2 leeren Fächer dienen der Trennung der Positionen der Ziffern der Zahl (Hunderter, Zehner, Einer)

   Die Zahl 352 mit der Quersumme 10 hat z.B. folgende Fächerbesetzung:

♣	♣	♣		♣	♣	♣	♣	♣		♣	♣

   $k = 10$ nicht unterscheidbare Teilchen ($\rightarrow$ Kombinationen) werden ohne Mehrfachbesetzung ($\rightarrow$ ohne Wiederholung) auf $n = 12$ Fächer verteilt.
   Die Grundmenge (= Anzahl Fächer)) ist $F_{12} = \{1, 2, ..., 12\}$
   $E = \{(a_1, a_2, ...a_{10}) \text{ mit } a_j \in F_{12}, 1 \leq a_1 < a_2 < ... < a_{10} \leq 10\}$
   $|E| = \binom{12}{10} = \frac{12!}{10!2!} = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66$
   Ein Problem bilden noch die Fälle, in denen zehn direkt aufeinanderfolgende Fächer besetzt sind. Für die dargestellte Zahl bedeutet das, dass eine der Ziffern (Hunderter, Zehner oder Einer) den Wert 10 besitzt und somit einer höheren Stelle/Position zugeordnet wird.
   Aus 10 Einer wird 1 Zehner, aus 10 Zehner wird 1 Hunderter und aus 10 Hunderter wird 1 Tausender.

   $(3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)$ entspricht der Zahl 0 0 10 = 0010 = 10 mit Quersumme 1.

$(2,3,4,5,6,7,8,9,10,11)$ entspricht der Zahl 0 10 0 = 0100 = 100 mit Quersumme 1.
$(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)$ entspricht der Zahl 10 0 0 = 1000, 4-stellig und Quersumme 1

Diese 3 Tupel gehören demnach alle nicht in die Ergebnismenge des Experiments, obwohl sie von der Modellierung erfasst werden. Deshalb muss von der Mächtigkeit der Ergebnismenge der Wert 3 subtrahiert werden. Es gibt somit $66 - 3 = 63$ maximal dreistellige Zahlen mit der Quersumme 10.

2. **Kombinationen mit Mehrfachbesetzung**
Die gleiche Aufgabenstellung kann man jedoch auch als „Kombination mit Mehrfachbesetzung“ modellieren:
Anordnen von $k = 10$ nicht unterscheidbaren Teilchen ($\rightarrow$ Kombination) in $n = 3$ Fächer, die jeweils mehrere Teilchen aufnehmen können (Mehrfachbesetzung $\rightarrow$ mit Wiederholung).
Die Anzahl der Teilchen eines Fachs bestimmt die Ziffer, das Fach legt die Stelle/Position der Ziffer fest. (Fach 1 beinhaltet die Anzahl der Hunderter der darzustellenden Zahl, Fach 2 die der Zehner und Fach 3 legt die Ziffer der Einerstelle fest.)

Die Zahl 352 mit der Quersumme 10 hat z.B. folgende Fächerbelegung

♣♣♣	♣♣♣♣♣	♣♣

$F_3 = \{1,2,3\}$
$E = \{(a_1, a_2, ...a_{10}) | a_j \in F_3, 1 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_{10} \leq 3\}$
$|E| = \binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$
Von diesem Ergebnis muss ebenfalls aus den oben genannten Gründen die Anzahl 3 subtrahiert werden. Es liefert damit auch als Ergebnis $66 - 3 = 63$ maximal dreistellige Zahlen mit der Quersumme 10.

Beispiel 9.2.6 (Kurssprecherwahl)
Für die Studenten des neuen Semesters steht die Wahl des Kurssprechers an. Aus 3 zuvor aufgestellten Kandidaten soll er/sie gewählt werden. Jeder der 31 Studenten kann genau eine Stimme abgeben. Gesucht ist die Anzahl aller möglichen Stimmenverteilungen.
Hinweis: Enthaltungen sind gültige Stimmenabgaben und somit zu berücksichtigen.
Während der Auszählung wird jede Stimme (max. 31) bei dem gewählten Kandidaten $(3+1)$ vermerkt. Das Endergebnis ist also ein 4-er Tupel (a_1, a_2, a_3, e). a_1 entspricht der Anzahl Studenten, die den Kandidaten 1 gewählt haben, a_2 entspricht den erreichten Stimmen von Kandidat 2, a_3 ist die Summe aller Stimmen, die Kandidat 3 bekommen hat und e sind die Anzahl der Enthaltungen.

Stellt man diese Aufgabe als Teilchen-Fächermodell dar, so handelt es sich um das Verteilen von $k = 31$ Teilchen auf $n = 4$ Fächer, die mehrfach besetzt sein dürfen.

Der Wahlausgang Kandidat 3 wird Kurssprecher und Kandidat 1 wird sein Vertreter hat viele
Ergebnistupel. Ein mögliches ist zum Beispiel $(10, 2, 18, 1)$ bei folgender Fächerbelegung:

♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣	♣♣	♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣	♣

Es handelt sich demnach um eine Anordnung von 31 Stimmen auf 4 Fächer $(3+1)$. Die Wahlzettel/Teilchen sind nicht unterscheidbar und Mehrfachbelegung der Fächer ist möglich.
Grundmenge: $F_4 = \{1, 2, 3, 4\}$
$E = \{(a_1, a_2, a_3, e) | 0 \leq a_i \leq 31 \text{ für } i = 1, 2, 3 \text{ und } 0 \leq e \leq 31\}$
$|E| = \binom{4+31-1}{31} = \binom{34}{31} = \frac{34!}{31! \cdot 3!} = \frac{34 \cdot 33 \cdot 32}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5\,984$
Bei dieser Wahl gibt es 5984 mögliche Stimmenverteilungen (= mögliche Ergebnistupel).

Zusammenfassung der Formeln des Teilchen-Fächermodells

Anordnen von k Teilchen in n Fächer

	mehrere Teilchen pro Fach	ein Teilchen pro Fach
Teilchen unterscheidbar	$\lvert PER^{mW}(n, k)\rvert = n^k$	$\lvert PER^{oW}(n, k)\rvert = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!$
Teilchen nicht unterscheidbar	$\lvert KOM^{mW}(n, k)\rvert = \binom{n+k-1}{k}$	$\lvert KOM^{oW}(n, k)\rvert = \binom{n}{k}$

9.2.3. Ein ausführliches Beispiel

Die Nummern der Lose einer Lotterie bestehen aus den 4-stelligen Zahlen 0000 bis 9999.
Alle Lose, deren Losnummern die Ziffer 7 enthalten (egal wie oft), gewinnen.
Hinweis: Die Losnummern der Nieten setzen sich ausschließlich aus den 9 Ziffern 0 bis 6, 8 und 9 zusammen.

Wieviele Gewinnerlose sind vorhanden?

1. Bestimmung der Grundmenge (= alle möglichen Losnummern) durch Abzählen
   $M = \{0000, 0001, 0002, ..., 9998, 9999\}$, $|M| = 10000$

2. Bestimmung der Ergebnismenge
   Um die Ergebnismenge zu bestimmen teilt man die Gewinnerlose zunächst in 4 Kategorien ein. Jede Kategorie enthält dabei die Losnummern, die gleich oft die Ziffer 7 enthalten. Durch diese Einteilung wird die gesuchte Ergebnismenge in 4 disjunkte Teilmengen zerlegt. Im folgenden gilt: $Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$, $|Z| = 9$

   - Menge der Losnummern, die genau eine 7 enthalten (und 3 Nummern aus Z)

     abstrakte Modelierung

     Ziehen von 3 Kugeln aus einer Urne mit 9 Kugeln mit Beachtung der Reihenfolge und mit Zurücklegen. Es gibt 4 Ergebnismengen, bei denen die 7 in den jeweiligen Ergebnistupeln an einer festen Stelle gesetzt ist.

     Ergebnismengen

     $L_1 = \{(7, z_2, z_3, z_4) | z_i \in Z \text{ für } i = 2, 3, 4\}$
     $L_2 = \{(z_1, 7, z_3, z_4) | z_i \in Z \text{ für } i = 1, 3, 4\}$

$L_3 = \{(z_1, z_2, 7, z_4) | z_i \in Z \text{ für } i = 1, 2, 4\}$
$L_4 = \{(z_1, z_2, z_3, 7) | z_i \in Z \text{ für } i = 1, 2, 3\}$

Ergebnismenge: $E_1 = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$

$|E_1| = \binom{4}{1} \cdot 9^3$

- Menge der Losnummern, die genau zwei mal die 7 enthalten (und 2 Nummern aus Z)

  abstrakte Modelierung

  Ziehen von 2 Kugeln aus einer Urne mit 9 Kugeln mit Beachtung der Reihenfolge und mit Zurücklegen. Es gibt 6 Ergebnismengen, bei denen die 7 in den jeweiligen Ergebnistupeln an zwei festen Stellen gesetzt ist.

  Ergebnismengen

  $L_1 = \{(7, 7, z_3, z_4) | z_i \in Z \text{ für } i = 3, 4\}$
  $L_2 = \{(7, z_2, 7, z_4) | z_i \in Z \text{ für } i = 2, 4\}$
  $L_3 = \{(7, z_2, z_3, 7) | z_i \in Z \text{ für } i = 2, 3\}$
  $L_4 = \{(z_1, 7, 7, z_4) | z_i \in Z \text{ für } i = 1, 4\}$
  $L_5 = \{(z_1, 7, z_3, 7) | z_i \in Z \text{ für } i = 1, 3\}$
  $L_6 = \{(z_1, z_2, 7, 7) | z_i \in Z \text{ für } i = 1, 2\}$

  Ergebnismenge: $E_2 = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5 \cup L_6$

  $|E_2| = \binom{4}{2} \cdot 9^2$

- Menge der Losnummern, die genau drei mal die 7 enthalten (und 1 Nummer aus Z)

  abstrakte Modelierung

  Ziehen von 1 Kugel aus einer Urne mit 9 Kugeln (mit Beachtung der Reihenfolge und) mit Zurücklegen. Es gibt 4 Ergebnismengen, bei denen die 7 in den jeweiligen Ergebnistupeln an drei festen Stellen gesetzt ist.

  Ergebnismengen

  $L_1 = \{(7, 7, 7, z_4) | z_4 \in Z\}$
  $L_2 = \{(7, 7, z_3, 7) | z_3 \in Z\}$
  $L_3 = \{(7, z_2, 7, 7) | z_2 \in Z\}$
  $L_4 = \{(z_1, 7, 7, 7) | z_1 \in Z\}$

  Ergebnismenge: $E_3 = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$

  $|E_3| = \binom{4}{3} \cdot 9^1$

  Losnummern, die genau vier mal die 7 enthalten (und 0 Nummern aus Z)
  $E_4 = \{(7, 7, 7, 7)\}$

  $|E_4| = 1 = \binom{4}{4} \cdot 9^0$

Die Ergebnismenge, die alle 4-stelligen Losnummern der Gewinnerlose enthält, setzt sich aus den disjunkten Ergebnismengen der oben genannten 4 Kategorien zusammen:
$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$
Ihre Mächtigkeit ergibt nach der Summenformel für disjunkte Teilmengen:

$$|E| = |E_1| + |E_2| + |E_3| + |E_4| = \binom{4}{1} \cdot 9^3 + \binom{4}{2} \cdot 9^2 + \binom{4}{3} \cdot 9^1 + \binom{4}{4} \cdot 9^0 = \sum_{k=1}^{4} \binom{4}{k} \cdot 9^{4-k}$$

Erklärung der verwendeten Formeln zum Bestimmen der Mächtigkeiten der einzelnen Ergebnismengen der oben festgelegten 4 Kategorien (E_1, E_2, E_3, E_4):

Um die Tupel aus $n = 4$ Ziffern zu bilden, werden 2 Experimenttypen verwendet:

1. **Kombinationen ohne Wiederholung** für die Verteilung der Ziffer 7
   Ein Gewinnerlos mit $n = 4$ Ziffern enthält k-mal die Ziffer $7, k = 1, 2, 3, 4$. Das entspricht genau den oben verwendeten 4 Kategorien. Es wird also für $k = 1, 2, 3, 4$ jeweils eine $k-$elementige Teilmenge aus einer $4-$elementigen Grundmenge (hier das Tupel der Losnummer) gebildet. Die Reihenfolge, in der die Ziffer 7 auf die k kategorieabhängigen reservierten Plätze im Tupel verteilt wird, ist egal. Wichtig ist nur, dass am Ende jeder reservierte Platz mit einer 7 besetzt ist und die Losnummer somit $k-$mal diese Ziffer an der richtigen Stelle enthält.

   Diese Mächtigkeit berechnet sich für jede Kategorie mit der Formel $\binom{4}{k}, k = 1, 2, 3, 4$

2. **Permutationen mit Wiederholung** für die Auswahl der restlichen Ziffern
   Die restlichen $(4 - k)$ Ziffern werden aus der 9-elementigen Menge Z ausgewählt. Jede dieser Ziffern darf mehrfach im Tupel enthalten sein (mit Wiederholung). Sie werden unter Berücksichtigung der Reihenfolge auf die $(4 - k)$ noch freien Plätze im Tupel verteilt, denn die Losnummer 1237 ist eine andere als die Nummer 3217.

   Diese Mächtigkeit berechnet sich in Abhängigkeit der Anzahl der bereits verteilten 7er $(= k)$ mit der Formel 9^{4-k}.

Somit ergibt sich (lt.Produktregel) für die Mächtigkeit der disjunkten Ergebnismengen jeder Kategorie folgende Formel in Abhängigkeit der Anzahl der enthaltenen 7-er $(= k)$:

$k = 1: \quad |E_1| = \binom{4}{1} \cdot 9^{4-1} = \binom{4}{1} \cdot 9^3 = 4 \cdot 9^3 = 2\,916$

$k = 2: \quad |E_2| = \binom{4}{2} \cdot 9^{4-2} = \binom{4}{2} \cdot 9^2 = 6 \cdot 9^2 = 486$

$k = 3: \quad |E_3| = \binom{4}{3} \cdot 9^{4-3} = \binom{4}{3} \cdot 9^1 = 4 \cdot 9^1 = 36$

$k = 4: \quad |E_4| = \binom{4}{4} \cdot 9^{4-4} = \binom{4}{4} \cdot 9^0 = 1 \cdot 9^0 = 1$

Insgesamt gibt es (lt. Summenformel für disjunkte Teilmengen) $2916+486+36+1 = 3439$ Gewinnerlose.

Bemerkung 9.2.7

Manchmal ist es einfacher die Anzahl der „Nieten“ zu berechnen, denn es gilt:

$|\text{Grundmenge}| = |\text{Gewinnerlose}| + |\text{Nieten}| \quad \Leftrightarrow \quad |\text{Gewinnerlose}| = |\text{Grundmenge}| - |\text{Nieten}|$

Für dieses Beispiel hat es folgende Bedeutung:

Nieten sind alle Losnummern, die keine 7 enthalten. Das heißt, die Tupel enthalten 0 mal die 7 und 4 Ziffern aus Z.

$N = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) | z_i \in Z \text{ für } i = 1, 2, 3, 4\} \quad |Z| = \binom{4}{0} \cdot 9^{4-0} = 1 \cdot 9^4 = 6\,561$

$|M| = |E| + |N| \quad \Leftrightarrow \quad |E| = |M| - |N| \quad \Leftrightarrow \quad |E| = 10\,000 - 6\,561 = 3\,439$

Bemerkung 9.2.8
Die Mächtigkeit der Grundmenge (= alle möglichen Losnummern) lässt sich ebenfalls mit den oben hergeleiteten Formeln berechnen.
M besteht aus den Gewinnerlosen und aus den Nieten. Sie enthält demnach zu den oben genannten disjunkten Teilmengen (Tupel der Gewinnerlose) zusätzlich noch alle Tupel, die keine 7 enthalten (Nieten).

$$|M| = \sum_{k=0}^{4} \tbinom{4}{k} \cdot 9^{4-k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} \cdot 9^{4-k} \cdot 1^k}_{allgem. binomische Formel} = (9+1)^4 = 10^4 = 10\,000$$

9.2.4. Programmtechnische Umsetzung der 4 Fälle

siehe Robert Sedgewick „Algorithmen in Java“, Kapitel „Erschöpfendes Durchsuchen“ (ab S 703)

Sie sollten jetzt in der Lage sein,
- Zählprinzipien für endliche Mengen anzuwenden,
- die vier Grundprobleme der Kombinatorik zu unterscheiden.
Sie sollten Experimente mathematisch modellieren (Urnenmodelle) und je nach Problemstellung die Mächtigkeiten von Grund- und Ergebnismenge berechnen können.

9.2.5. Aufgaben

Aufgabe 1

Der Nationaltrainer wählt aus 20 verfügbaren Fußballspielern 11
Spieler aus, die das nächste Spiel bestreiten.

a) Wieviele Möglichkeiten stehen dem Trainer theoretisch zur Verfügung?
Es wird nicht unterschieden, auf welcher Position ein Spieler spielt. (Das ist wenigstens für den Torwart unrealistisch.)

b) Was ergibt sich, wenn es 3 Torhüter gibt, die nicht im Feld spielen können?
(Bei Positionsberücksichtigung wird das Problem in Permutationen modelliert.)

Aufgabe 2

Sie werfen 5 mal hintereinander einen Würfel und schreiben das Ergebnis als 5-stellige Zahl auf. Wieviel mögliche, so erzeugte Zahlen gibt es?

Aufgabe 3

Sie haben den Auftrag, aus 9 verschiedenen Bewerbern 3 auszuwählen und diese 3 in der Rangfolge ihrer Eignung vorzuschlagen.
Wieviele Möglichkeiten gibt es insgesamt?
Hinweis: Die Rangfolge der Eignung der Bewerber ergibt sich aus der Reihenfolge, in der sie gezogen werden.

Aufgabe 4

Beim Fußballtotto (Elferwette) muss man die Ergebnisse aus 11 Fußballspielen vorhersagen. Die Reihenfolge der Paarungen ist festgelegt.
Mögliche Ergebnisse sind:
0 - Unentschieden, 1 - Sieg der Heimmannschaft, 2 - Sieg der Gastmannschaft
Wieviele mögliche unterschiedliche Tippergebnisse gibt es?

Aufgabe 5

Während eines Weinseminars sollen die Teilnehmer die Qualität von 5 Weinen testen. Jeder Teilnehmer soll für alle möglichen Paarungen notieren, welcher von den zwei Weinen besser ist.
Ein Weinkenner behauptet nun, es käme sehr darauf an, welcher Wein beim Paarvergleich zuerst gekostet wird. Deshalb wird festgelegt, dass bei jedem möglichen Paarvergleich auch die Reihenfolge getestet werden muss, also z.B. einmal die Reihenfolge Wein A, Wein B sowie auch die Reihenfolge Wein B, Wein A.
Wieviele Vergleiche sind notwendig, um alle Weine in dieser Art gegeneinander zu testen?

Aufgabe 6

Eine Firma, die Glasperlen herstellt, möchte herausfinden, welche Farben für Kinder besonders attraktiv sind. In 6 Glasschüsseln befinden sich jeweils 12 Glasperlen einer bestimmten Farbe. Jedes Kind, das an diesem Test teilnimmt, wird zu den Glasschüsseln gebracht und erhält die Anweisung: Du darfst Dir 10 Glasperlen auswählen und mit nach Hause nehmen.
Für das Experiment entscheidend ist die Frage, wie oft ein Kind welche Farbe ausgewählt

hat. Wieviele mögliche unterschiedliche Auswahlen gibt es für ein Kind?

Aufgabe 7

Eine Geheimzahl besteht aus 4 hexadezimalen Zeichen $(0, 1, \cdots 9, A, \cdots F)$. Herr Meier kennt diese Zahl nicht, möchte sie jedoch durch probieren herausfinden.
Wieviel Versuche muss er höchstens machen, wenn

a) es keine Einschränkungen gibt.

b) die Zeichen alle verschieden sind.

c) die Zeichen alle verschieden und sie der Größe nach geordnet sind.

d) die Zeichen der Größe nach geordnet sind, sie aber mehrfach vorkommen können.

Geben Sie jeweils ein Urnenmodell an. Die Ergebnisse müssen nicht berechnet werden.

9.3. Permutationen mit vorgegebenen Besetzungszahlen

Oft treten Fragestellungen nach den Möglichkeiten n Objekte anzuordnen auf, wobei eine bestimmte Anzahl von nicht unterscheidbaren Objekten in Gruppen zusammen gefasst werden.

Beispiel 9.3.1
Eine Menge besteht aus 2 weißen, 1 schwarzen und 3 roten Kugeln. Auf wieviel Arten lassen sich diese Kugeln anordnen?
Da nichts über die Unterscheidbarkeit der Kugeln in der Aufgabenstellung gesagt wurde, nimmt man zunächst an, dass die Kugeln (auch die gleichfarbigen) unterscheidbar sind ($\rightarrow$ Permutationen). Jede Kugeln darf nur einmal verwendet werden ($\rightarrow$ ohne Zurücklegen).
Grundmenge: $M_6 = \{w_1, w_2, s_1, r_1, r_2, r_3\}$
Ergebnismenge: $E = \{(a_1, a_2, ..., a_6) | a_i \in M_6, a_i \neq a_j \text{ für } i, j = 1, 2, ..., 6, i \neq j\}$
$|E| = \frac{6!}{(6-6)!} = \binom{6}{6} \cdot 6! = 6! = 720$
Sind die gleichfarbigen Kugeln jedoch nicht unterscheidbar, gehen die Tupel der Ergebnismenge verloren, die durch die Vertauschung gleichfarbiger Kugeln entstanden sind.
Aus $(w_1, w_2, s_1, r_1, r_2, r_3)$ wird ohne Unterscheidbarkeit gleichfarbiger Kugeln (w, w, s, r, r, r), aus $(w_2, w_1, s_1, r_1, r_2, r_3)$ wird jedoch auch (w, w, s, r, r, r).
In diesem Fall sind $2! \cdot 1! \cdot 3! = 12$ Permutationen nicht mehr unterscheidbar und die Anzahl unterscheidbarer Permutationen ergibt sich aus: $\frac{6!}{2! \cdot 1! \cdot 3!} = \frac{720}{12} = 60$

Allgemein spricht man bei diesem Experimenttyp von **Permutationen mit vorgegebenen Besetzungszahlen**:
Eine Menge besteht aus n Elementen, die sich auf g Gruppen verteilen. Die Elemente einer Gruppe sind nicht unterscheidbar, die Elemente verschiedener Gruppen sind jedoch sehr wohl unterscheidbar.
Die Anzahl der Elemente der $k-$ten Gruppe ist i_k $(k = 1, 2, ..., g)$
und es gilt: $i_1 + i_2 + ... + i_g = n$.
Zu diesen Elementen gibt es genau $\mathbf{\frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdot ... \cdot i_g!}}$ Permutationen (Anordnungsmöglichkeiten).

Beispiel 9.3.2 (Permutation mit vorgegebener Besetzungszahl)

a) Um einen Zug nach Köln zusammenzustellen stehen 12 Wagons zur Verfügung: zwei Speisewagen, drei Schlafwagen und sieben Personenwagen.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, diesen Zug zusammenzustellen?

$n = 12$ Elemente, $g = 3$ Gruppen, $i_1 = 2, i_2 = 3, i_3 = 7 \quad \rightarrow \frac{12!}{2! \cdot 3! \cdot 7!} = 7\,920$
Es gibt 7 920 Möglichkeiten.

b) Aus den Ziffern $1, 2, 3$ und 4 sollen 7-stellige Zahlen gebildet werden. Dabei soll die Ziffer eins 2-mal, die Ziffer zwei 3-mal und die Ziffern 3 und 4 jeweils 1-mal vorkommmen.
Wieviele Möglichkeiten gibt es?

$n = 7$ Elemente, $g = 4$ Gruppen, $i_1 = 2, i_2 = 3, i_3 = 1, i_4 = 1 \quad \rightarrow \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1!} = 420$
Es gibt 420 Möglichkeiten.

Bemerkung 9.3.3
Man kann auch zuerst die i_1 Plätze für Gruppe 1 auswählen, danach die i_2 Plätze der Elemente für Gruppe 2, usw.

$\binom{n}{i_1} \cdot \binom{n-i_1}{i_2} \cdot \binom{n-i_1-i_2}{i_3} \cdots \binom{n-\sum_{j=1}^{g-1} i_j}{i_g}$

Das Ergebnis stimmt mit obigem überein: $\frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{i_1! \cdot i_2! \cdot \ldots \cdot i_g!}}$.

9.3.1. Aufgaben

Aufgabe 1

Wieviel unterschiedliche Worte kann man theoretisch aus den 11 Buchstaben des Wortes MISSISSIPPI zusammenstellen?
(Es muss nicht berücksichtigt werden, ob das Wort sinnvoll ist.)

10. Elementare Zahlentheorie

Der Inhalt von diesem Kapitel ist grundlegend für die Anwendungsgebiete Simulation, Kryptographie und Ähnlichem.

10.1. Teilbarkeit, Primzahlen, Modulo-Arithmetik

Die folgenden Aussagen beziehen sich, falls nicht anders angegeben, auf die natürlichen Zahlen.

Definition 10.1.1 (Teilbarkeit, Primzahl)
Sei $a, b \in \mathbb{N}$. **b *teilt* a** *bzw.* **a *ist durch* b *teilbar***, *wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $a = b \cdot k$.*
Schreibweise: $b|a$
Eine Zahl $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$, die nur durch 1 und p teilbar ist, heißt ***Primzahl***.

Bemerkung 10.1.2 (Spezielle Teilbarkeitsregeln)
Die folgenden Regeln, mit deren Hilfe man prüfen kann, ob eine natürliche Zahl durch eine andere teilbar ist, sollten größtenteils aus der Schule bekannt sein.

- Eine Zahl ist durch **2** genau dann teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine 0,2,4,6 oder 8 ist.
- Eine Zahl ist durch **3** genau dann teilbar, wenn ihre Quersumme (Summe der Ziffern) durch 3 teilbar ist.
- Eine Zahl ist durch **4** genau dann teilbar, wenn die letzten beiden Ziffern eine Zahl ergeben, die durch 4 teilbar ist.
- Eine Zahl ist durch **5** genau dann teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine 0 oder 5 ist.
- Eine Zahl ist durch **6** genau dann teilbar, wenn sie durch 2 **und** durch 3 teilbar ist.
- 2 Teilbarkeitsregeln für die **7**
  1) Man subtrahiere das Doppelte der letzten Ziffer einer Zahl von der restlichen Zahl. Ist das Ergebnis durch 7 teilbar, so ist auch die ursprüngliche Zahl durch 7 teilbar.
     (Hinweis: Wiederhole den Algorithmus so lange, bis sich eine möglichst kleine Zahl ergibt.)
     Bsp.: Ist 212219 durch 7 teilbar?
     $21221 - 2 \cdot 9 = 21203$
     $2120 - 2 \cdot 3 = 2114$
     $211 - 2 \cdot 4 = 203$
     $20 - 2 \cdot 3 = 14$ ist teilbar durch 7. Also ist 212219 ebenfalls durch 7 teilbar.
  2) Man teile die Zahl rechts beginnend in Dreierblöcke. Diese Blöcke werden als dreistellige Zahlen aufgefasst, und jetzt addiert man die von rechts gezählt

1., 3., 5. ... Zahl (3er-Block), während man die an 2., 4. ... Position stehende Zahl subtrahiert. Die Ausgangszahl ist genau dann durch 7 teilbar, wenn die so ermittelte Summe es ebenfalls ist.
Bsp.: 212 219 ist durch 7 teilbar, da $219 - 212 = 7$ durch 7 teilbar ist.

- Eine Zahl ist durch **8** genau dann teilbar, wenn ihre letzten 3 Ziffern eine Zahl ergeben, die durch 8 teilbar ist.
- Eine Zahl ist durch **9** genau dann teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
- Eine Zahl ist durch **10** genau dann teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine Null ist.
- Eine Zahl ist durch **11** genau dann teilbar, wenn ihre Querdifferenz durch 11 teilbar ist.
  Die Querdifferenz ist dabei die alternierende Summe der Ziffern, d.h. die einzelnen Ziffern werden (beginnend bei der Einerziffer) abwechselnd addiert und subtrahiert.
  Die Querdifferenz wird auch alternierende Quersumme genannt.

Beh.: Wenn $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i$ durch 11 teilbar ist, dann ist auch $\sum_{i=0}^{n} 10^i a_i$ durch 11 teilbar.

Beweis.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} 10^i a_i &= \sum_{i=0}^{n} 10^i a_i - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i + \underbrace{\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i}_{=11k \text{ nach Vor.}} \\ &= \sum_{i=0}^{n}(10^i - (-1)^i)a_i + \sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i\end{aligned}$$

Dann bleibt noch zu zeigen: $10^i - (-1)^i = 11 \cdot l$

Beweis. (Vollständige Induktion)

IA: Induktionsanfang
für $i = 0:\ 10^0 - (-1)^0 = 0,$ für $i = 1:\ 10^1 - (-1)^1 = 11$

IV: Induktionsvoraussetzung
Es gelte für ein n, dass es existiert ein l mit
$10^n - (-1)^n = 11 \cdot l \Leftrightarrow 10^n = 11 \cdot l + (-1)^n$

IB: Induktionsbehauptung
Dann gilt auch, dass es existiert ein m mit
$10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 11 \cdot m$

IS: Induktionsbeweis, -schluss

$$
\begin{aligned}
10^{n+1} - (-1)^{n+1} &= 10^n \cdot 10 - (-1)^{n+1} \\
&\overset{\text{IV}}{=} (11 \cdot l + (-1)^n) \cdot 10 - (-1)^{n+1} \\
&= 11 \cdot (10 \cdot l) + 10 \cdot (-1)^n \underbrace{-(-1)}_{+1} \cdot (-1)^n \\
&= 11 \cdot (10 \cdot l) + (-1)^n \cdot (10 + 1) \\
&= 11 \cdot (10 \cdot l) + 11 \cdot (-1)^n \\
&= 11 \cdot (10 \cdot l + (-1)^n) \\
&= 11 \cdot m \text{ mit } m = 10 \cdot l + (-1)^n
\end{aligned}
$$

Schlusssatz
Ich habe gezeigt, dass die Behauptung für $n = 0$ gilt und, falls sie für ein $n > 0$ dann auch für $n + 1$. Daher gilt die Aussage für alle $n \geq 0$. $\square$

- Eine Zahl ist durch **12** genau dann teilbar, wenn sie durch 3 **und** 4 teilbar ist.
- Eine Zahl ist durch **25** genau dann teilbar, wenn ihre letzten beiden Ziffern eine Zahl ergeben, die durch 25 teilbar ist.

Bemerkung 10.1.3 (Allgemeine Teilbarkeitsregeln)
Die folgenden Teilbarkeitsregeln sind eigentlich unmittelbar klar und werden nur der Vollständigkeit halber aufgeführt.

- **Teilerpaare**
  Wenn die Zahl a die Zahl b als Teiler besitzt, dann ist auch die Zahl $a : b$ ein Teiler von a.
  Beispiel: 3 ist Teiler von 315. Dann ist auch $105 = 315 : 3$ ein Teiler von 315.

- **Teilerregel**
  Besitzt die Zahl a die Zahl b als Teiler, dann ist auch jeder Teiler von b ein Teiler von a.
  Beispiel: 45 ist Teiler von 450. Dann sind auch 3,5,9 und 15 als Teiler von 45 Teiler von 450.

- **Produktregel**
  Wenn sich die Zahl a in ein Produkt mit zwei Faktoren zerlegen lässt und b ein Teiler eines der beiden Faktoren ist, dann ist b auch ein Teiler der gesamten Zahl a.
  Beispiel: $1500 = 15 \cdot 100$. Dann sind 3 und 5 Teiler von 15 sowie 2,4,5,10,25 und 50 als Teiler von 100 Teiler von 1500.

- **Summenregel**
  Wenn sich die Zahl a in eine Summe zerlegen lässt und die Zahl b ein gemeinsamer Teiler aller Summanden ist, dann ist b auch Teiler der gesamten Zahl a.
  Beispiel: $742 = 700 + 42$. Dann ist 7 als gemeinsamer Teiler von 700 und 42 Teiler von 742.

- **Differenzregel**
  Wenn sich die Zahl a in eine Differenz zerlegen lässt und b ein gemeinsamer Teiler von Minuend und Subtrahend ist, dann ist b auch Teiler der gesamten Zahl a.
  Beispiel: $686 = 700 - 14$. Dann ist 7 als gemeinsamer Teiler von 700 und 14 Teiler von 686.

- **Teilerfremdheitsregel**
  Wenn die Zahl a die zwei teilerfremden Zahlen b und c als Teiler hat, dann ist auch das Produkt $b \cdot c$ ein Teiler von a.
  Beispiel: 1540 besitzt die teilerfremden Zahlen 7 und 11 als Teiler. Dann ist auch $77 = 7 \cdot 11$ Teiler von 1540.

Der nächste Satz gibt die Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen wieder, die schon von der Schule bekannt ist.

Satz 10.1.4 (Fundamentalsatz der Arithmetik)
Jede Zahl $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlen $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$ darstellen, wobei $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ Primzahlen sind und $e_1, e_2, \ldots, e_k \in \mathbb{N}$.
Andere Formulierung: $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i} \quad \text{mit} \quad e_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
e_i ist die Häufigkeit, mit der der Primfaktor p_i in n „steckt".

Beispiel 10.1.5
$n = 100: \; k = 2, \; p_1 = 2, \; e_1 = 2, \; p_2 = 5, \; e_2 = 2, \Rightarrow \; n = 100 = 2^2 \cdot 5^2$

Beispiel 10.1.6 (Sieb des Eratosthenes)
Das Sieb des Eratosthenes ist ein klassischer Algorithmus zur Bestimmung aller Primzahlen kleiner oder gleich eines vorgegebenen Maximums (MAX).

1. Notiere alle Zahlen von $2, 3, 4, \ldots$, MAX in aufsteigender Reihenfolge.
2. Markiere die kleinste unmarkierte Zahl als Primzahl.
3. Markiere alle Vielfachen dieser Primzahl als Nicht-Primzahl (beginnend mit dem Quadrat), bis MAX erreicht ist.
4. Schritt 2. und 3. werden solange wiederholt, bis das Quadrat der letzten als Primzahl markierten Zahl größer als das vorgegebene Maximum (MAX) ist. Alle noch unmarkierten Zahlen sind ebenfalls Primzahlen und werden als solche markiert. Somit sind alle Primzahlen des Intervalls bestimmt.

Ein konkretes Beispiel: Bestimmen Sie alle Primzahlen kleiner gleich 30.

Notiere alle Zahlen von 2 bis 30 in aufsteigender Reihenfolge.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Markiere 2 als Primzahl (gelb) und alle Vielfachen von 2 ab $2^2 = 4$ also $4, 6, 8, ..., 30$ als Nicht-Primzahlen (grau).

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Markiere 3 als Primzahl (gelb) und alle Vielfachen von 3 ab $3^2 = 9$ also $9, 12, 15, ..., 30$ als Nicht-Primzahlen (grau).

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Markiere 5 als Primzahl (gelb) und alle Vielfachen von 5 ab $5^2 = 25$ also $25, 30$ als Nicht-Primzahlen (grau).

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Markiere 7 als Primzahl (gelb). Vielfache von 7 angefangen beim Quadrat $7^2 = 49$ sind nicht mehr in der Tabelle enthalten, weil $49 > 30$.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Da $7^2 = 49 > 30$ ist, sind alle bislang unmarkierten Zahlen ebenfalls Primzahlen.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Alle Primzahlen $p \leq 30$ sind nun (gelb) markiert. $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$

Satz 10.1.7
Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis. (indirekt)
Ann.: es gibt k Primzahlen (endlich viele), $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$
bilde: $n = \left(\prod_{j=1}^{k} p_j\right) + 1$
$\Rightarrow n$ ist nicht durch $p_1, \ldots, p_k$ teilbar (Rest 1)

$\Rightarrow n$ ist Primzahl oder n ist durch p_j teilbar mit $p_k < p_j < n$
$\Rightarrow \exists$ Primzahl größer als p_k (Widerspruch zur Annahme) $\square$

Definition 10.1.8 (ggT, kgV)
$ggT(a,b) = \max\{k \in \mathbb{N} |\ k|a \wedge k|b\}$
heißt ***größter gemeinsamer Teiler (ggT)*** *von a und b.*
$kgV(a,b) = \min\{k \in \mathbb{N} |\ k|a \wedge k|b\}$
heißt ***kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)*** *von a und b.*
Zusammenhang zwischen ggT und kgV (ohne Beweis)
$ggT(a,b) \cdot kgV(a,b) = a \cdot b \Leftrightarrow kgV(a,b) = \frac{a \cdot b}{ggT(a,b)} \Leftrightarrow ggT(a,b) = \frac{a \cdot b}{kgV(a,b)}$

Bemerkung 10.1.9 (Berechnung ggT, kgV mit Hilfe der Primfaktoren)
gegeben: $a, b \in \mathbb{N}$ gesucht: ggT(a,b) und kgV(a,b)
$A := \{p_a^{n_a} \in \mathbb{N} |\ p_a$ ist Primzahl und $p_a^{n_a} | a$ und $p_a^{n_a+1} \nmid a\}$,
$B := \{p_b^{n_b} \in \mathbb{N} |\ p_b$ ist Primzahl und $p_b^{n_b} | b$ und $p_b^{n_b+1} \nmid b\}$
A und B enthalten die Primzahlen, die a und b teilen; dabei ist n_a bzw. n_b der jeweils maximale Exponent zu p_a bzw. p_b, so dass gilt: $p_a^{n_a}$ teilt a und $p_b^{n_b}$ teilt b

Das Produkt der potenzierten Primzahlen der Schnittmenge T von A und B ergibt den ggT(a,b).

$$T = A \cap B, \quad ggt(a,b) := \prod_{p \in T} p^{min(n_a, n_b)}$$

Das Produkt der potenzierten Primzahlen der Vereinigungsmenge V von A und B ergibt das kgV(a,b).

$$V = A \cup B, \quad kgV(a,b) := \prod_{p \in V} p^{max(n_a, n_b)}$$

Beispiel 10.1.10 (Berechnung von ggT(328, 1036) und kgV(328, 1036))

1. Primfaktorzerlegung
   $328 = 2^3 \cdot 41 = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 41$
   $1036 = 2^2 \cdot 259$

2. Schnitt-, Vereinigungsmenge der Primfaktorzerlegung
   $A = \{2^3, 41\}, \quad B = \{2^2, 259\}, \quad S = \{2^2\}, \quad V = \{2^3, 41, 259\}$

3. Berechnung
   $\text{ggT}(328, 1036) = 2^2 = 4$
   $\text{kgV}(328, 1036) = 2^3 \cdot 41 \cdot 259 = 84952$ oder $\text{kgV}(328, 1036) = \frac{328 \cdot 1036}{4} = 84952$

Bemerkung 10.1.11 (Berechnung des ggT für große Zahlen)
Der ggT für große Zahlen sollte mit dem Euklidischen Algorithmus (Satz 10.1.20 auf Seite 193) berechnet werden. Dieses Verfahren ist deutlich effizienter, weil der Aufwand für die Primfaktorzerlegung entfällt.

Definition 10.1.12 (Kongruenz (Zahlentheorie, Modulare Arithmetik))
In der Mathematik nennt man zwei ganze Zahlen ***kongruent*** *bezüglich einer weiteren Zahl (Modul), wenn sie bei der Division durch den Modul denselben Rest haben. Das heißt also, die zwei Zahlen müssen sich um ein Vielfaches des Moduls unterscheiden.*
Äquivalente Definition:
Sei $a, b, m \in \mathbb{Z}, m \geq 2$. *Dann heißt* **a** ***kongruent zu*** **b** ***modulo*** **m**
$a \equiv b \pmod{m}$, *wenn* $b - a$ *durch* m *teilbar ist.*

Beispiel 10.1.13 (Kongruenz)

a) $4 \equiv 10 \pmod 3$, da $10 - 4 = 6 = 2 \cdot \mathbf{3}$ bzw. $4 - 10 = -6 = (-2) \cdot \mathbf{3}$

b) $6 \equiv 11 \pmod 5$, da $11 - 6 = 5 = 1 \cdot \mathbf{5}$ bzw. $6 - 11 = -5 = (-1) \cdot \mathbf{5}$

c) $-4 \equiv -10 \pmod 3$, da $-4 - (-10) = 6 = 2 \cdot \mathbf{3}$ bzw. $-10 - (-4) = -6 = (-2) \cdot \mathbf{3}$

d) $-7 \equiv 8 \pmod 5$, da $-7 - 8 = -15$ bzw. $8 - (-7) = -15$

e) $-8 \equiv -3 \pmod 5$, da $-8 - (-3) = -5$ bzw. $-3 - (-8) = 5$

Satz 10.1.14
$\equiv \pmod{m}$ ist eine Äquivalenzrelation[1] auf der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.
(**r**eflexiv, **s**ymmetrisch,**t**ransitiv)
Es gibt m Äquivalenzklassen[2] und jede wird durch ihren Repräsentanten $[0], [1], \cdots, [m-1]$ dargestellt. Er entspricht dem jeweiligen Divisionsrest.

Beispiel 10.1.15 (Die Äquivalenzrelation $\equiv \pmod 5$)
Die Äquivalenzrelation $\equiv \pmod 5$ besitzt 5 Äquivalenzklassen $[0][1][2][3][4]$.
$[0] = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}$
$[1] = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\}$
$[2] = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}$
$[3] = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\}$
$[4] = \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}$

Definition 10.1.16 (mod-Funktion[3])
Es gibt zwei Varianten der Modulo-Funktion

[1] siehe Beispiel 5.1.14 auf Seite 78
[2] siehe Definition 5.1.16 auf Seite 78
[3] Die Definition ist auch für reelle Zahlen möglich. In Programmiersprachen ist die mod-Funktion für Gleitpunktzahlen definiert.

(1) ***mathematische Variante***
Für $a, m \in \mathbb{N}$ *bezeichnet* $a \bmod m$ *den Rest bei der Division von* a *durch* m*. Für beliebige* $x, y \in \mathbb{Z}$ *wird definiert* $x \bmod y := x - y\lfloor \frac{x}{y} \rfloor$ *für* $y \neq 0$, $x \bmod 0 := x$ *(*$\lfloor \cdot \rfloor$ *ist die Gaußklammer)*

es gilt: $(-a) \bmod m \neq -(a \bmod m)$ *und* $(a + k \cdot m) \bmod m = a \bmod m$

Bsp.: $(-2) \bmod 3 = -2 - 3 \cdot \lfloor \frac{-2}{3} \rfloor = -2 + 3 = 1 \neq -2 = -(2 \bmod 3)$ *und*
$(1 + (-1) \cdot 3) \bmod 3 = (-2) \bmod 3 = 1 = 1 \bmod 3$

(2) ***symmetrische Variante*** *(zur Unterscheidung wird die Funktion* ***mods*** *genannt)*
$a \; mods \; m := a - m \cdot rd(\frac{a}{m})$, *(*$rd(\frac{a}{m})$ *ist der zur Null hin gerundete Quotient.)*

hier gilt: $(-a) \; mods \; m = -(a \; mods \; m)$ *und* $(a + k \cdot m) \; mods \; m \neq a \; mods \; m$

Bsp.:$(-2) \; mods \; 3 = -2 - 3 \cdot rd(\frac{-2}{3}) = -2 - 3 \cdot 0 = -2 = -(2 \; mods \; 3)$ *und*
$(1 + (-1) \cdot 3) \; mods \; 3 = (-2) \; mods \; 3 = -2 \neq 1 = 1 \; mods \; 3$

Für $a \geq 0$, $m \geq 0$ *sind die beiden Varianten identisch.*

Die Modulo-Funktion findet oft in der Programmierung Anwendung:

- Bestimmung, ob eine Zahl gerade ($z \bmod 2 = 0$) oder ungerade ($z \bmod 2 = 1$) ist.
- Beispiel Uhrzeit
  Aus dem Wert der vergangenen Sekunden seit 0 Uhr kann mit der Modulo-Funktion berechnet werden, ob eine volle Stunde beginnt. ($sek \bmod 3600 = 0$)
  Mit der Berechnung $sek \bmod 60$ erhält man zum Beispiel die Anzahl der Restsekunden nach Abzug ganzer Minuten.

In vielen Programmiersprachen wird die Modulo-Funktion durch % dargestellt und als Operator behandelt. Die implementierte Variante der Berechnung (mathematisch oder symmetrisch) ist jedoch nicht einheitlich, so dass sich bei negativen Werten unterschiedliche Ergebnisse ergeben.

- Ruby, Python und Perl verwenden zum Beispel die mathematische Variante
  $-27 \% 7 = -27 - 7 \cdot [\frac{-27}{7}] = -27 + 28 = \mathbf{1}$
- Java, C, C++, JavaScript und PHP setzen die symmetrische Variante ein
  $-27 \% 7 = -27 - 7 \cdot rd\left(\frac{-27}{7}\right) = -27 + 21 = \mathbf{-6}$
- Um bei implementierter symmetrischer Variante das Ergebnis der mathematischen Variante zu erhalten ist folgende Berechnung durchzuführen:
  $a \bmod m = (a \% m + m) \ \% m$
  $-27 \bmod 7 = (-27 \% 7 + 7) \ \%7 \ = (-6 + 7) \ \% 7 = \mathbf{1}$
  (Man berechnet die zur negativen Zahl gehörende positive, in dem man eine Periodenlänge auf die negative Zahl draufaddiert.)

Die folgenden Aussagen beziehen sich ausschließlich auf die **mathematische Variante.**

Die Modulo-Arithmetik:

$$\begin{array}{lcl} (a+b) \bmod m & = & (a \bmod m + b \bmod m) \bmod m \\ (a \cdot b) \bmod m & = & ((a \bmod m) \cdot (b \bmod m)) \bmod m \\ a^n \bmod m & = & (a \bmod m)^n \bmod m \\ \frac{a}{b} \bmod m & \neq & \frac{a \bmod m}{b \bmod m} \quad \textbf{Vorsicht!!} \end{array}$$

Beispiel 10.1.17 (Modulo-Arithmetik)

$$\begin{array}{lcl} (10+20) \bmod 7 & = & ((10 \bmod 7) + (20 \bmod 7)) \bmod 7 \\ & = & (3+6) \bmod 7 = 2 \\ (10 \cdot 20) \bmod 7 & = & ((10 \bmod 7) \cdot (20 \bmod 7)) \bmod 7 \\ & = & (3 \cdot 6) \bmod 7 = 18 \bmod 7 = 4 \\ (10^{20}) \bmod 7 & = & ((10 \bmod 7)^{20}) \bmod 7 = 3^{20} \bmod 7 = 9^{10} \bmod 7 \\ & = & (9 \bmod 7)^{10} \bmod 7 = 2^{10} \bmod 7 = (2^5)^2 \bmod 7 \\ & = & (32 \bmod 7)^2 \bmod 7 = 4^2 \bmod 7 = 16 \bmod 7 = 2 \end{array}$$

Anwendung der Formeln in der Berechnung von $7^5 \bmod 23$ (ohne 7^5 explizit auszurechnen):

$$\begin{array}{lcl} 7^5 \bmod 23 & = & (7^1 \cdot 7^1 \cdot 7^1 \cdot 7^1 \cdot 7^1) \bmod 23 \\ & = & ((((7^1 \bmod 23) \cdot 7^1 \bmod 23) \cdot 7^1 \bmod 23) \cdot 7^1 \bmod 23) \cdot 7^1 \bmod 23 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} 7^1 \bmod 23 & = & \mathbf{7} \\ \underbrace{\mathbf{7} \cdot 7^1}_{49} \mathrm{mod} 23 & = & \mathbf{3} \\ \underbrace{\mathbf{3} \cdot 7^1}_{21} \mathrm{mod} 23 & = & \mathbf{21} \\ \underbrace{\mathbf{21} \cdot 7^1}_{147} \mathrm{mod} 23 & = & \mathbf{9} \\ \underbrace{\mathbf{9} \cdot 7^1}_{63} \mathrm{mod} 23 & = & \mathbf{17} \text{ also:} \quad 7^5 \bmod 23 = 17 \end{array}$$

Satz 10.1.18 (Zusammenhang von Kongruenz und Modulo-Funktion)
$a \equiv b \pmod m \Leftrightarrow a \bmod m = b \bmod m$. Dass heißt bei der Division durch m ergibt sich für a und b der gleiche Rest.

Beispiel:

(1) $7 \equiv 22 \pmod 5 \Leftrightarrow 7 \bmod 5 = 22 \bmod 5 = 2$

(2) $(-4) \equiv (-10) \pmod 3 \Leftrightarrow (-4) \bmod 3 = (-10) \bmod 3 = 2$

Weiter gilt: $a = m\lfloor \frac{a}{m} \rfloor + a \bmod m \quad .$

Die Restklasse, der Restklassenring

Für $m \geq 2$ ist **die Restklasse einer Zahl a modulo m** die Menge aller Zahlen, die bei Division durch m denselben Rest haben.
Anders ausgedrückt: Es ist die **Äquivalenzklasse von a bezüglich der Kongruenz modulo m**.
Bezeichnet wird jede Restklasse mit einem ihrer Repräsentanten.
$[r] = \{b \mid b = a + km, k \in \mathbb{Z}\} = \{b \mid b \equiv a \pmod{m}\}, \quad r \in [r]$

Die Menge aller Restklassen modulo m bezeichnet man als $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
Sie hat m Elemente. Zur Vereinfachung der Schreibweise lässt man die eckigen Klammern der Bezeichnung der Restklasse weg.
$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{[0], [1], \cdots, [m-2], [m-1]\} = \{0, 1, \cdots, m-2, m-1\}$

Die Menge aller Restklassen bildet zusammen mit Addition und Multiplikation einen **Restklassenring**[4], wobei die Verknüpfungen wie folgt definiert werden:

Die Addition/Multiplikation von Restklassen ist durch die Addition/Multiplikation beliebiger Elemente dieser Klassen und anschließender Restbildung (mod) des Ergebnisses festgelegt. Das Ergebnis ist unabhängig vom gewählten Repräsentanten der Restklasse.

$\forall\, a_i \in [a]\,, \forall\, b_j \in [b]$ gilt

$[a_i] + [b_j] := [a_i + b_j] \bmod m$ und $[a_i] \cdot [b_j] := [a_i \cdot b_j] \bmod m$

Falls m eine Primzahl ist, dann ist der Restklassenring $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sogar ein endlicher Körper.

Einige Beispiele zu Restklassen:

- Die Restklasse von $a \bmod 2 = 0$ ist die Menge aller gerade Zahlen.
  $[0] = \{\cdots, -4, -2, 0, 2, 4, \cdots\}$
  Die Restklasse von $a \bmod 2 = 1$ ist die Menge aller ungerade Zahlen.
  $[1] = \{\cdots, -3, -1, 1, 3, 5, \cdots\}$
  zugehöriger Restklassenring: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{[0], [1]\} = \{0, 1\}$

- Die Restklasse von $a \bmod m = 0$ ist die Menge der Vielfachen von m.
  $[m] = \{b \mid b = k \cdot m\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$

- Die Restklasse von $a \bmod 3 = 1$
  $[1] = \{\cdots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \cdots\}$

Beispiel 10.1.19 (Die Restklassenmultiplikation von n mod 5)
Die Menge der Reste modulo 5 besteht aus den Zahlen $R = \{0_r, 1_r, 2_r, 3_r, 4_r\} = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$.
Die Multiplikation zweier Reste modulo 5 wird als Rest des gewöhnlichen Produkts definiert. Zum Beispiel ist $(2_r \cdot 4_r) \bmod 5 = 3_r$, weil $(2 \cdot 4) \bmod 5 = 8 \bmod 5 = 3_r$.

Zeigen Sie, dass die Menge der Restklassen von n mod 5, $n \in \mathbb{N}$ ohne die 0 ($\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}/0$) eine Gruppe bezüglich der Multiplikation bildet.

(Da 5 eine Primzahl ist, ist der Restklassenring ein endlicher Körper).

vollständige Verknüpfungstabelle:

[4] Ein Ring ist eine algebraische Struktur mit zwei Verknüpfungen. Seine Eigenschaften sind allerdings „schwächer“ als die eines Körpers (siehe Definition 6.1.5 auf Seite 108).

$\cdot$	0_r	1_r	2_r	3_r	4_r
0_r	0_r	0_r	0_r	0_r	0_r
1_r	0_r	1_r	2_r	3_r	4_r
2_r	0_r	2_r	4_r	1_r	3_r
3_r	0_r	3_r	1_r	4_r	2_r
4_r	0_r	4_r	3_r	2_r	1_r

Für den Beweis $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}/0$ sind die folgenden 4 Gruppenaxiome zu zeigen:
Abgeschlossenheit (1), Assoziativität (2), Neutralelement (3), Inverse Elemente (4)

Wegen der Übersichtlichkeit wird im folgendem der Index $_r$, der kennzeichnet, dass es sich bei den Zahlen um ein Element der Restklassenmenge von n mod 5 handelt, weggelassen.

Es gilt also: $R = \{1, 2, 3, 4\}$, $n, m \in R$

(1) $(n \cdot m) \bmod 5$ ist abgeschlossen (siehe Verknüpfungstabelle)

(2) $(n \cdot m) \bmod 5$ ist assoziativ (siehe Verknüpfungstabelle)

(3) Neutralelement: $e := 1$, da $m_i \cdot 1 = 1 \cdot m_i = m_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$ (siehe Verknüpfungstabelle)

(4) Inverselemente $(m_i \cdot m_i^{-1} = m_i^{-1} \cdot m_i = e)$:
$(1 \cdot 1) \bmod 5 = 1 \bmod 5 = 1$, also ist $i_1 := 1$
$(2 \cdot 3) \bmod 5 = 6 \bmod 5 = 1$, also ist $i_2 := 3$
$(3 \cdot 2) \bmod 5 = 6 \bmod 5 = 1$, also ist $i_3 := 2$
$(4 \cdot 4) \bmod 5 = 16 \bmod 5 = 1$, also ist $i_4 := 4$ (siehe Verknüpfungstabelle)

Satz 10.1.20 (Euklidischer Algorithmus)
Statt mit der Primfaktorzerlegung (Bemerkung 10.1.9 auf Seite 188) kann der größte gemeinsame Teiler von zwei Zahlen $0 \leq m \leq n$ auch mit der folgenden (rekursiven) Rechenvorschrift bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \mathrm{ggT}\,(0, n) &= n \\ \mathrm{ggT}\,(m, n) &= \mathrm{ggT}\,(n \bmod m, m) \end{aligned}$$

Dieses Verfahren sollte aus Effizienzgründen bei großen Zahlen grundsätzlich angewendet werden, weil der Aufwand der Primfaktorzerlegung hierbei entfällt.

Beispiel 10.1.21 (Euklidischer Algorithmus zur Bestimmung des ggT von 328 und 1036)

$$\begin{aligned} \mathrm{ggT}(328{,}1036) &= \mathrm{ggT}\ (1036 \bmod 328,\ 328) &&= \mathrm{ggT}\,(52{,}328) \\ &= \mathrm{ggT}\,(328 \bmod 52,\ 52) &&= \mathrm{ggT}\,(16{,}52) \\ &= \mathrm{ggT}\,(52 \bmod 16,\ 16) &&= \mathrm{ggT}\,(4{,}16) \\ &= \mathrm{ggT}\,(16 \bmod 4{,}4) &&= \mathrm{ggT}\,(0{,}4) \\ &= 4 \end{aligned}$$

und $\mathrm{kgv}(328{,}1036) = \frac{328 \cdot 1036}{\mathrm{ggt}\ (328{,}1036)} = \frac{328 \cdot 1036}{4} = 328 \cdot 259$

Bemerkung 10.1.22 (Iterative Vorschrift des Euklidischen Algorithmus)
Iterative Berechnung, bis sich der Rest **0** ergibt. (in Divisions- und Multiplikationsschreibweise)

$$
\begin{aligned}
n : m &= k_1 \text{ Rest } r_1 & n &= k_1 \cdot m + r_1 \\
m : r_1 &= k_2 \text{ Rest } r_2 & m &= k_2 \cdot r_1 + r_2 \\
r_1 : r_2 &= k_3 \text{ Rest } r_3 & r_1 &= k_3 \cdot r_2 + r_3 \\
r_2 : r_3 &= k_4 \text{ Rest } r_4 & r_2 &= k_4 \cdot r_3 + r_3 \\
&\dots & &\dots \\
r_{j-2} : \mathbf{r_{j-1}} &= k_j \text{ Rest } 0 & r_{j-2} &= k_j \cdot \mathbf{r_{j-1}} + 0
\end{aligned}
$$

ggt (n,m) $= r_{j-1}$

Beispiel 10.1.23 (Iterative Berechnung des ggt)

- Berechnung des ggt(1036, 328)

$$
\begin{aligned}
1036 : 328 &= 3 \text{ Rest } 52 & 1036 &= 3 \cdot 328 + 52 \\
328 : 52 &= 6 \text{ Rest } 16 & 328 &= 6 \cdot 52 + 16 \\
52 : 16 &= 3 \text{ Rest } 4 & 52 &= 3 \cdot 16 + 4 \\
16 : 4 &= 4 \text{ Rest } 0 & 16 &= 4 \cdot 4 + 0
\end{aligned}
$$

ggt(1036,328)$= 4$

- Berechnung des ggt(10736, 328)

$$
\begin{aligned}
10736 : 328 &= 32 \text{ Rest } 240 & 10736 &= 32 \cdot 328 + 240 \\
328 : 240 &= 1 \text{ Rest } 88 & 328 &= 1 \cdot 240 + 88 \\
240 : 88 &= 2 \text{ Rest } 64 & 240 &= 2 \cdot 88 + 64 \\
88 : 64 &= 1 \text{ Rest } 24 & 88 &= 1 \cdot 64 + 14 \\
64 : 24 &= 2 \text{ Rest } 16 & 64 &= 2 \cdot 24 + 16 \\
24 : 16 &= 1 \text{ Rest } 8 & 24 &= 1 \cdot 16 + 8 \\
16 : 8 &= 2 \text{ Rest } 0 & 16 &= 2 \cdot 8 + 0
\end{aligned}
$$

ggt(10736,328)$= 8$

Sie sollten jetzt in der Lage sein,
- Teilbarkeitsregeln anzuwenden,
- ggt und kgv zu definieren und zu berechnen,
- Modulo-Arithmetik durchzuführen.

10.1.1. Aufgaben

Aufgabe 1

Welche Zahlen sind kongruent mod 6?
$2; 5; 7; 11; 14; 15; 20; 54; 61; 93; 102; 109; 602$

Aufgabe 2

Berechnen Sie ohne zuvor zu multiplizieren oder zu addieren:

a) $(31 \cdot 213 - 71^3 \cdot 8) \bmod 11$

b) $2^{44} \bmod 11$

Aufgabe 3

Berechnen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus folgendes:

a) $\text{ggt}\,(4200, 990)$

b) $\text{ggt}\,(618, 366)$

Bestimmen Sie zusätzlich die jeweiligen kgv.

10.2. Anwendungen der Modulo-Arithmetik

In diesem Kapitel werden einige Beispiele zur Anwendung der Modulo-Arithmetik gegeben.

10.2.1. Bestimmung des Wochentags eines beliebigen Datums

Mit der Modulo-Arithmetik lässt sich der Wochentag eines beliebigen Datums bestimmen.

Ein Kalenderjahr im Gregorianischen Kalender besteht aus 365 Tagen. Da das Sonnenjahr etwas länger dauert, wurde zum Ausgleich der Differenz im Jahr 1582 das Schaltjahr eingeführt. Es besteht aus 366 Tagen und berechnet sich nach folgenden Regeln:

- Jedes Jahr, dessen Jahreszahl durch 4 teilbar ist, besteht aus 366 Tagen (Schaltjahr)
- Ist die Jahreszahl durch 100 teilbar, besteht das Jahr aus 365 Tagen (kein Schaltjahr).
- Ist die Jahreszahl jedoch durch 400 teilbar, besteht das Jahr aus 366 Tagen (Schaltjahr)
  (Das Jahr 2000 war also ein Schaltjahr und bestand somit aus 366 Tagen)

Beispiel 10.2.1 (Bestimmung des Wochentags vom 25. August 2010)
Unter der Annahme, dass der 1.1.2000 ein Samstag war (Referenztag), ist der Wochentag des 25.8.2010 zu bestimmen.
Zur Lösung muss zunächst die Anzahl der Tage vom 1.1.2000 bis zum 25.8.2010 berechnet werden. Vom 1.1.2000 bis zum 31.12.2009 sind es 7 Kalenderjahre und 3 Schaltjahre.
Also $7 \cdot 365 + 3 \cdot 366 = 10 \cdot 365 + 3$ Tage
Vom 1.1.2010 bis zum 25.8.2010 sind es $31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 25$ Tage.
Somit gibt es vom 1.1.2000 bis zum 25.8.2010 insgesamt
$10 \cdot 365 + 3 \ + 31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 25$ Tage.
Eine Berechnung der Summen und Produkte muss jedoch nicht erfolgen, da nur die Stellung des Wochentages im Verhältnis zum Referenztag modulo 7 (= Anzahl der verschiedenen Wochentage) benötigt wird.
(Referenztag Samstag $\rightarrow$ Stellung (Index) 1, Sonntag $\rightarrow$ 2, Montag $\rightarrow$ 3, ... Freitag $\rightarrow 7(=0)$)

$10 \bmod 7 = 3, 365 \bmod 7 = 1, 3 \bmod 7 = 3 \quad \text{also} \quad 3 \cdot 1 + 3$
$31 \bmod 7 = 3, 28 \bmod 7 = 0, 30 \bmod 7 = 2, 25 \bmod 7 = 4$
also $(3 \cdot 1 + 3 + 3 + 0 + 3 + 2 + 3 + 2 + 3 + 4) \bmod 7 = 26 \bmod 7 = 5$

Der Tag mit dem Index 5 ist der Mittwoch. Also war der 25.8.2010 ein Mittwoch.

10.2.2. Berechnung von Prüfziffern

- **Die Internationale Standard Buch Nummer (ISBN)**
  Die ISBN-Nummer ist eine 10−stellige Ziffernfolge bestehend aus 9 Ziffern $a_1, a_2, \cdots a_9$ und einer daraus berechneten Prüfziffer p. Letztere dient dazu fehlerhafte Bestellun-

gen aufgrund falscher Nummern (z.B. einem „Zahlendreher“) zu vermeiden.
Die Prüfziffer ergibt sich aus der Formel: $(10 \cdot a_1 + 9 \cdot a_2 + \cdots + 2 \cdot a_9 + p) \bmod 11 \overset{!}{=} 0$
Also berechnet sich p wie folgt:
$s = (10 \cdot a_1 + 9 \cdot a_2 + \cdots + 2 \cdot a_9), \quad m = s \bmod 11, \quad p = 11 - m$
Falls p=10 schreibt man wegen der Einziffrigkeit für p ein X (Römisch 10).

Beispiel 10.2.2 (Jürgen Lehn, Einführung in die Statistik (3-519-02071-8))
Berechnung der Prüfziffer zur ISBN 3-519-02071-8. Das korrekte Ergebnis ist **8**.

a_1	-	a_2	a_3	a_4	-	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	-	p
3	-	5	1	9	-	0	2	0	7	1	-	p

$\Rightarrow s = 10 \cdot 3 + 9 \cdot 5 + 8 \cdot 1 + 7 \cdot 9 + 6 \cdot 0 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 1 = 179$
$m = s \bmod 11 = 179 \bmod 11 = 3 \qquad p = 11 - m = 11 - 3 = 8$
Probe: $s + 8 = 179 + 8 = 187, \quad 187 \bmod 11 = 0$, da $17 \cdot 11 = 187$
Also lautet die vollständige ISBN-Nummer $\quad 3 - 519 - 02071 - 8$

- **Die HASH-Funktion**
  Eine Hashfunktion[5] erzeugt zu jedem Element aus einer meist größeren Quellmenge einen Hashcode (oder Hashwert), der aus einer kleineren Zielmenge stammt. Sie besitzt also die Aufgabe, Daten zu verstreuen (Streuwertfunktion) bzw. zu zerhacken. (to hash (engl.): zerhacken).

  Die erzeugten Hash- bzw. Streuwerte sollten möglichst eindeutig sein. Ansonsten spricht man von einer Kollision, die es zu umgehen gilt. Eine gute Hashfunktion zeichnet sich dadurch aus, dass sie möglichst wenig Kollisionen für die Eingabe erzeugt, für die sie entwickelt wurde.

  Hashfunktionen kommen in verschiedenen Gebieten der Informatik zum Einsatz. Sie lassen sich in drei große Bereiche unterteilen:

  (1) Prüfsummenberechnung
  z.B. GTIN (Global Trade Item Number, bis 2009 EAN)
  GTIN wird verwendet, um Übertragungsfehler beim Download von Daten zu erkennen.

  (2) Datenspeicherung
    - Umwandlung eines Schlüssels in eine Tabellenadresse bzw. Berechnung der Position innerhalb eines Arrays
    - Datenbankindex, Suchschlüsselfunktion
      z.B. elektronisches Adressbuch

  (3) Kryptologie
  z.B. Signatur von Mails

[5] siehe auch den Kurs Algorithmen, Datenstrukturen und theoretische Grundlagen der Informatik sowie den Kurs Datenbanken

Beispiel 10.2.3 (Speicherung einer Zeichenkette in einem Feld mit „p“ Elementen)

(1) gegeben: Primzahl $p =$ Anzahl Elemente eines Feldes vom Typ „string“, Zeichenkette *name* der Länge n.

(2) Umwandlung der Zeichenkette *name* in eine Zahl $f(name)$ gemäß: $f(name) = \sum_{i=1}^{n} b_i$ mit $b_i =$ Position des i-ten Buchstabens von *name* im Alphabet

(3) Bilden der Hashfunktion mit $k = f(name) \bmod p$

(4) Speicherung der Zeichenkette in dem k-ten Element des Feldes. (Feldelemente sind von 0 bis $p-1$ durchnummeriert.)

Konkret: Reserviert ist ein Feld ($ARRAY$) vom Typ „string“ mit 13 Elementen.
$p = 13$
$(ARRAY(0), ARRAY(1), ARRAY(2), \cdots ARRAY(12))$
name= $ANNEMARIE$,
Positionen der einzelnen Buchstaben im Alphabet: 0 13 13 4 12 0 17 8 4
$f(ANNEMARIE) = 0 + 13 + 13 + 4 + 12 + 0 + 17 + 8 + 4 = 71$
$k = f(ANNEMARIE) \bmod 13 = 71 \bmod 13 = 6$
Also wird $ANNEMARIE$ in $ARRAY(6)$ geschrieben.

Beispiel einer Kollision für diese Hashfunktion:

name = WOLF: $f(WOLF) = 22 + 14 + 11 + 5 = 52$
$k = f(WOLF) \bmod 13 = 52 \bmod 13 = 0$

name = Anna: $f(ANNA) = 0 + 13 + 13 + 0 = 26$
$k = f(ANNA) \bmod 13 = 26 \bmod 13 = 0$

10.2.3. Pseudozufallszahlengenerator

Pseudozufallszahlengeneratoren spielen bei der Simulation von zufallsabhängigen Prozessen[6] auf Computern eine große Rolle. Sie liefern nach einer deterministischen, nicht zufälligen Vorschrift Zahlen, die wie „zufällig“ aussehen.

Satz 10.2.4 (Konstruktion eines Pseudozufallszahlengenerators mit $0 \leq z_k \leq p-1$)
Für $a, p, c \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ und $\operatorname{ggT}(a, p) = 1$, sind die Zahlen z_k mit
$z_k = (k \cdot a + c) \bmod p \quad$ für $k = 0, 1, \ldots, (p-1)$ Pseudozufallszahlen.
Es ergeben sich p ganzzahlig, positive Werte zwischen 0 und $p-1$, die alle verschieden sind.
$(0 \leq z_k \leq p-1, z_k \neq z_i$ für $k \neq i$ und $k, i \in \{0, 1, \cdots, p-1\})$

[6] siehe Vorlesung Stochastik (3. Semester)

Beweis. Es gebe Zahlen $0 \leq k, k' \leq p-1$ mit $k \neq k'$ und $z_k = z'_{k'}$. Es gilt:

$$\left.\begin{array}{rcl} k \cdot a + c & = & l \cdot p + z_k \\ k' \cdot a + c & = & l' \cdot p + z_{k'} \end{array}\right\} \Rightarrow (k-k') \cdot a = (l-l')p + (z_k - z_{k'})$$

Wegen $z_k = z_{k'}$ folgt, dass $(k-k') \cdot a = (l-l') \cdot p$. Nun ist $\mathrm{ggT}(a,p) = 1$, also teilt $p \quad (k-k')$. O.B.d.A. sei $k > k'$. Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{rcl} 0 \leq k & \leq & p-1 \\ 0 \leq k' & \leq & p-1 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leq k-k' \leq p-1 \Rightarrow k-k' = 0$$

Beispiel 10.2.5 (Generator, der 13 positive, ganzzahlige Pseudozufallszahlen erzeugt)
$a = 7, p = 13, c = 1, z_k = (k \cdot 7 + 1) \bmod 13 \quad$ für $k = 0, 1, \ldots, 12$

$$\begin{aligned}
[l]z_0 &= (0 \cdot 7 + 1) \bmod 13 &&= 1 \bmod 13 = 1 \\
z_1 &= (1 \cdot 7 + 1) \bmod 13 &&= 8 \bmod 13 = 8 \\
z_2 &= (2 \cdot 7 + 1) \bmod 13 &&= 15 \bmod 13 = 2 \\
z_3 &= (3 \cdot 7 + 1) \bmod 13 &&= 22 \bmod 13 = 9 \\
z_4 &= (4 \cdot 7 + 1) \bmod 13 &&= 29 \bmod 13 = 3 \\
z_5 &= (5 \cdot 7 + 1) \bmod 13 &&= 36 \bmod 13 = 10 \\
z_6 &= (6 \cdot 7 + 1) \bmod 13 &&= 43 \bmod 13 = 4 \\
z_7 &= (7 \cdot 7 + 1) \bmod 13 &&= 50 \bmod 13 = 11 \\
z_8 &= (8 \cdot 7 + 1) \bmod 13 &&= 57 \bmod 13 = 5 \\
z_9 &= (9 \cdot 7 + 1) \bmod 13 &&= 64 \bmod 13 = 12 \\
z_{10} &= (10 \cdot 7 + 1) \bmod 13 &&= 71 \bmod 13 = 6 \\
z_{11} &= (11 \cdot 7 + 1) \bmod 13 &&= 78 \bmod 13 = 0 \\
z_{12} &= (12 \cdot 7 + 1) \bmod 13 &&= 85 \bmod 13 = 7
\end{aligned}$$

Einfache Generatoren für p Zufallszahlen bekommt man, indem man eine große Primzahl p und $a \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{N}_0$ mit $\mathrm{ggT}(a,p) = 1$ wählt und dann die oben genannte Formel benutzt:

$$z_k = (k \cdot a + c) \bmod p \qquad \text{für } k = 0, 1, \ldots, (p-1)$$

Oftmals ist man jedoch an „gleichwahrscheinlichen“ Zahlen zwischen 0 und 1 interessiert.

Beispiel 10.2.6 (Generator, der Pseudozufallszahlen zwischen 0 und 1 erzeugt.)
$p = 2114797, a = 1299709, c = 1$, dann liefert die Formel:

$$r_k = (k \cdot a + c) \bmod p, \text{ für jedes } k = k_0, (k_0+1), (k_0+2), \ldots, (p-1), 0, 1, \ldots, (k_0-1)$$

eine Pseudozufallszahl $z_k = \frac{r_k}{p} = \frac{(k \cdot a + c) \bmod p}{p}$ mit $0 \leq z_k < 1$. Der Startwert k_0 ist ein beliebiger Wert zwischen 0 und $(p-1)$.

Für den Startwert $k_0 = 2112000$ ergeben sich beispielsweise folgende Pseudozufallszahlen:

$0.0236, 0.6382, 0.2527, 0.8673, 0.4819, 0.0965, 0.7111, \ldots$

Man spricht in diesem Fall auch von einem linearen Kongruenzgenerator.

Bessere Generatoren bekommt man, wenn man k durch den vorherigen Wert r_{k-1} ersetzt. (obiger Beweis gilt auch, wenn k, k' durch $r_{k-1}, r_{k'-1}$ ersetzt werden.)
Dann gilt:

$$r_k = (r_{k-1} \cdot a + c) \bmod p,\ z_k = \frac{r_k}{p}, \text{ wobei } r_0 \in \mathbb{N}_0, 0 \leq r_0 \leq p-1$$

Hier muss $c \geq 1$ sein, z.B. $c = 1$. Denn für $c = 0$ und $r_{k-1} = 0$ liefert die Vorschrift stets $r_k = 0$.
Die z_k nehmen dann Werte aus $[0, 1)$ an.

Beispiel 10.2.7
Mit $p = 101, a = 81, c = 1$ erhält man die Formel:

$r_k = (r_{k-1} \cdot 81 + 1) \bmod 101,\ z_k = \frac{r_k}{101}$

Für den Startwert $r_0 = 11$ ergeben sich dann folgende Pseudozufallszahlen:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
r_k	11	84	38	49	31	88	59	33
z_k	0,10	0,83	0,37	0,48	0,30	0,87	0,58	0,32

Ausgehend von $z_k \in [0, 1)$ (siehe oben) kann man ganzzahlige, gleichverteilte Werte erhalten, wie zum Beispiel:

- $w_k = [6 \cdot z_k] + 1$ nimmt die Werte 1,2,3,4,5,6 an und simuliert einen Würfel

k	0	1	2	3	4	5	6	7
z_k	0,10	0,83	0,37	0,48	0,30	0,87	0,58	0,32
w_k	1	5	3	3	2	6	4	2

- $w_k = [z_k \cdot 37] \bmod 37$ nimmt die Werte 0 - 36 an und simuliert ein Roulettespiel

k	0	1	2	3	4	5	6	7
z_k	0,10	0,83	0,37	0,48	0,30	0,87	0,58	0,32
w_k	3	30	13	17	11	32	21	11

Beliebig verteilte Pseudozufallszahlen (PZZ) erzeugt man sich aus den z-Werten mit der Wahrscheinlichkeitsintegraltransformation (Transformation mit der inversen Verteilungsfunktion).
Wenn zum Beispiel $\Phi(x)$ die Standardnormalverteilung ist und $z \in [0, 1)$, dann sind die

$\Phi^{-1}(z)$ normal verteilte Pseudozufallszahlen.

Pseudozufallsgeneratoren werden in den meisten Programmiersprachen zur Verfügung gestellt.
(siehe auch in Java die Funktion „Math.random()" oder die Java Klasse „java.util.Random")

10.2.4. Verschlüsselungsalgorithmen

Informationen „sicher" zu verschicken bedeutet, dafür zu sorgen, dass kein Unbefugter sie verstehen kann. Um das zu erreichen, bedient man sich der Technik de Verschlüsselung. Das heißt, die Information (Klartext, Bild- oder Tonaufzeichnungen) wird mit Hilfe eines Verschlüsselungverfahrens in eine Zeichenfolge umgewandelt, die ohne Kenntnis des Schlüssels nicht zu interpretieren ist. Generell unterscheidet man zwischen **symmetrischen** und **asymmetrischen** Verschlüsselungsarten.

Die symmetrische Verschlüsselung

Bei der symmetrischen Verschlüsselung werden identische Schlüssel zur Ver- und Entschlüsselung benutzt. Jeder, der den Schlüssel kennt, kann Informationen ver- und wieder entschlüsseln.

Ein einfaches Beispiel hierfür ist die **CAESAR-Verschlüsselung**: Es wird ein Zeichen des Alphabets als Schlüssel verwendet und die Buchstaben vom Originaltext anhand der Position des Schlüssels im Alphabet ($P_{Schlüssel}$) zyklisch verschoben.
$B_{verschlüsselt} = (B_{original} + P_{Schlüssel})\ modulo\ 26$

Beispiel 10.2.8 (CAESAR-Verschlüsselung)
Originaltext: ANNEMARIE Schlüssel: A → S, d.h. $P_{Schlüssel} = 18$
Zunächst wird jedem Buchstaben der Originalnachricht eine Zahl gemäss seiner Stellung im Alphabet zugeordnet ($B_{original}$).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	...	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	17	18	19	20	21	22	23	24	25

ANNEMARIE → 0 13 13 4 12 0 17 8 4

A steht an Position 0 und S an Position 18. Damit gilt für die Verschlüsselung der einzelnen Buchstaben: $B_{verschlüsselt} = (B_{original} + 18)$ mod 26

Nachricht-original	A	N	N	E	M	A	R	I	E
$B_{original}$	0	13	13	4	12	0	17	8	4
$B_{original} + 18$	18	31	31	22	30	18	35	26	22
$B_{verschlüsselt} = (B_{original} + 18)$ mod 26	18	5	5	22	4	18	9	0	22
Nachricht-verschlüsselt	S	F	F	W	E	S	J	A	W

Für die Entschlüsselung gilt folgendes:

$$b = B_{verschlüsselt} - P_{Schlüssel}, \quad B_{original} = \begin{cases} b & \text{für } b \geq 0 \\ b + 26 & \text{für } b < 0 \end{cases}$$

Nachricht-verschlüsselt	S	F	F	W	E	S	J	A	W
$B_{verschlusselt}$	18	5	5	22	4	18	9	0	22
$b = B_{verschlüsselt} - 18$	0	-13	-13	4	-14	0	-9	-18	4
$B_{original}$	0	13	13	4	12	0	17	8	4
Nachricht-original	A	N	N	E	M	A	R	I	E

Die asymmetrische Verschlüsselung

Bei asymmetrischen Verschlüsselungsverfahren generiert sich jeder Teilnehmer 2 persönliche
Schlüssel (**öffentlich, privat**).
Der öffentliche Schlüssel (**public key**) dient dem Verschlüsseln von Daten vor dem Senden. Er ist jedem zugängig, der verschlüsselte Daten zu den Besitzer des public keys senden möchte.
Der geheime Schlüssel (**private key**) ist nur dem Besitzer bekannt. Damit werden die empfangenen Daten, die mit dem zugehörigen public key verschlüsselt wurden, wieder entschlüsselt.

Die Asymmetrie ergibt sich, da Daten, die mit dem einen Schlüssel des Schlüsselpaares verschlüsselt wurden, nur mit dem zweiten Schlüssel des Schlüsselpaares entschlüsselt werden können.

Einer der bekanntesten Algorithmen für diese Verschlüsselung ist der **RSA-Algorithmus**[7].

Er ist eine Anwendung von Primzahlen und Modulo-Rechnung in einem ganzzahligen Restklassenring und besteht aus den folgenden 3 Schritten:

(1) **Schlüsselerzeugung**
Öffentlicher und privater Schlüssel werden folgendermaßen erzeugt:

- Wählen Sie zwei verschiedene Primzahlen p und q.
- Bestimmen Sie die Zahlen $n = p \cdot q$ und $m = (p-1) \cdot (q-1)$.
- Wählen Sie eine Zahl e, die teilerfremd zu m ist.
- Berechnen Sie die Zahl d, die $e \cdot d \bmod m = 1$ erfüllt.
- Geben Sie die Zahlen (n, e) als öffentlichen Schlüssel bekannt, die Zahlen (n, d) behalten Sie als geheimen Schlüssel. p, q und m werden nicht mehr benötigt, bleiben jedoch geheim. Sie sollten sicher gelöscht werden.

[7]Die drei amerikanischen Mathematiker Ronald Linn Rivest, Adi Shamir und Leonard Adleman entwickelten dieses asymmetrische Verschlüsselungsverfahren. Der Name setzt sich aus den Anfangsbuchstaben ihrer Familiennamen zusammen. Sie veröffentlichten den RSA 1977. Es war das erste asymmetrische Verfahren, das veröffentlicht wurde.

(2) **Verschlüsselung**
Jedem Buchstaben des Originaltextes wird gemäss seiner Stellung im Alphabet eine Zahl zugeordnet. Mit dem öffentlichen Schlüssel (n, e) wird dann jede Zahl des Originaltextes (x), sie entspricht genau einem Buchstaben, gemäß $y = x^e \mod n$ verschlüsselt (monoalphabetische Verschlüsselung). Der so entstandene Geheimtext (y steht für jeweils einen Buchstaben) wird verschickt.

(3) **Entschlüsselung**
Zum Entschlüsseln wird der Geheimschlüssel (n, d) verwendet. Der Originaltext x berechnet sich (ebenfalls wieder buchstabenweise) nach der Vorschrift $x = y^d \mod n$. Danach kann jedes x wieder mit Hilfe des Alphabets in den zugehörigen Buchstaben umgewandelt werden.

Bemerkung 10.2.9 (Verschlüsselung von Buchstabengruppen)
Man kann statt einzelner Buchstaben auch Buchstabengruppen mit dem RSA-Algorithmus verschlüsseln.

Beispiel 10.2.10 (Verschlüsselung mit dem RSA-Algorithmus)
Die Nachricht ANNEMARIE soll mit dem RSA-Algorithmus verschlüsselt und an einen Empfänger verschickt werden, dessen öffentlicher Schlüssel $(n, e) = (1147, 29)$ ist.

(1) Zunächst werden die einzelnen Buchstabe nach ihrer Stellung im Alphabet (beginnend bei 0) in Zahlen umgewandelt (x):
ANNEMARIE = 0 13 13 4 12 0 17 8 4
Diese Zahlen werden einzeln gemäss der Vorschrift $y = x^{29} \mod 1147$ verschlüsselt:

Nachricht-original	A	N	N	E	M	A	R	I	E
x	0	13	13	4	12	0	17	8	4
$y = x^{29} \mod 1147$	0	725	725	132	292	0	42	97	132

Die verschlüsselte Nachricht lautet also: 0 725 725 132 292 0 42 97 132

(2) Der geheime Schlüssel lautet $(n, d) = (1147, 149)$. Somit kann die Nachricht mit der Vorschrift $x = y^{149} \mod 1147$ vom Empfänger entschlüsselt werden.

y	0	725	725	132	292	0	42	97	132
$x = y^{149} \mod 1147$	0	13	13	4	12	0	17	8	4
Nachricht-original	A	N	N	E	M	A	R	I	E

(3) Zum Schluss stellt sich noch die Frage, ob man den geheimen Schlüssel (n, d) aus Kenntnis des öffentlichen Schlüssels (n, e) berechnen kann?
Prinzipiell ist es möglich den geheimen Schlüssel zu berechnen, in dem man die Gleichung $e \cdot d = 1 \mod m$ löst.
Da aber $m = (p-1) \cdot (q-1)$ geheim ist, müssen zur Berechnung von m zunächst die Primfaktoren p und q bestimmt werden. Primfaktorzerlegung nimmt jedoch sehr viel Rechenzeit in Anspruch, so dass diese Verschlüsselungsmethode um so sicherer

ist, je grösser die beiden Primfaktoren (p und q) gewählt werden. Das bedeutet aber auch, dass eine Schlüssellänge, sie entspricht der Grösse der Primzahl, die heute als sicher gilt, aufgrund der steigenden Rechnerleistung in einigen Jahren vermutlich nicht mehr sicher sein wird!

In diesem Beispiel sind die Primzahlen jedoch so klein (und damit der Schlüssel so kurz) gewählt, dass jeder Computer die Zerlegung ohne Zeitprobleme berechnet: $1147 = 31 \cdot 37$, also ist $p = 31$ und $q = 37$. Damit ist $m = (31 - 1) \cdot (37 - 1) = 1080$. Zur Berechnung des geheimen Schlüssels d ist nur noch die Gleichung $29 \cdot d \bmod 1080 = 1$ mit dem euklidischen Algorithmus (Satz 10.1.20 auf Seite 193) zu lösen. Das Ergebnis lautet $d = 149$.

Bemerkung 10.2.11 (Die Mathematik zu RSA)
Der kleine Fermatsche Satz bildet die Grundlage der Mathematik zu RSA, die sich wie folgt herleiten lässt:

(1) Die Menge der Restklassen von $n \bmod p = \{[0], \ldots, [p-1]\}$ bildet bezüglich der Multiplikation eine Gruppe, falls p eine Primzahl ist (siehe Beispiel 10.1.19 auf Seite 192).

(2) Für eine feste Restklasse $[r]$ gilt:
$\forall\, j \in \{1, 2, \ldots, p-1\} \exists\, i \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ mit $i \cdot [r] = j \bmod p$
d.h. jede Restklasse kommt als Ergebnis der Multiplikation vor.

(3) Für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ wird das Produkt mit $[r]$ gebildet und diese Produkte modulo p miteinander multipliziert:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{p-1} i \cdot [r] \bmod p &= \prod_{j=1}^{p-1} j \bmod p \\ \left(\prod_{i=1}^{p-1} i\right) \cdot [r]^{p-1} \bmod p &= \prod_{j=1}^{p-1} j \bmod p \\ [r]^{p-1} \bmod p &= 1 \qquad (*) \end{aligned}$$

Diese Aussage ist der kleine Fermatsche Satz. Analog gilt $[r]^p \bmod p = [r]$

(4) Aus $\quad (*) \quad$ folgt

$$\begin{aligned} & ([r]^{(p-1)})^j \bmod p &= 1 \\ \Leftrightarrow \quad & [r]^{(p-1)\cdot j} \bmod p &= 1 \;\text{ für jede Primzahl } p \end{aligned}$$

(5) Unter Verwendung des Hilfssatzes 10.2.12 auf der nächsten Seite ergibt sich: $[r]^{\alpha \cdot (p-1) \cdot (q-1)} \bmod p \cdot q = 1$

Satz 10.2.12 (Hilfssatz)
Wenn $x^\alpha \bmod p = 1$ und $x^\alpha \bmod q = 1$, dann gilt auch $x^\alpha \bmod p \cdot q = 1$
Mit $x^\alpha \bmod p = 1 \Leftrightarrow x^\alpha = 1 + i \cdot p$ ausgedrückt:
Wenn $x^\alpha = 1 + i \cdot p$ und $x^\alpha = 1 + j \cdot q \Rightarrow x^\alpha = 1 + l \cdot p \cdot q$

Beweis.
p, q sind Primzahlen, $k, j \in \mathbb{N}$, $x^\alpha = 1 + k \cdot p = 1 + j \cdot q \Rightarrow k \cdot p = j \cdot q$ (*)
daher $\exists\, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ mit $k = m_1 \cdot q$ und $j = m_2 \cdot p$
in (*) eingesetzt: $m_1 \cdot q \cdot p = m_2 \cdot p \cdot q \Leftrightarrow m_1 = m_2 := m$, da $q \cdot p = p \cdot q$
also: $x^\alpha = 1 + m \cdot p \cdot q$ d.h. $x^\alpha \bmod p \cdot q = 1$

Beispiel 10.2.13 (Hilfssatz)
$17^2 \bmod 3 = 289 \bmod 3 = 1 = 17^2 \bmod 2 \Rightarrow 17^2 \bmod (3 \cdot 2) = 17^2 \bmod 6 = 1$

Auf den RSA angewendet bedeutet dies:

a. wähle Primzahlen p, q

b. $n = p \cdot q$, $m = (p-1) \cdot (q-1)$

c. wähle e ist teilerfremd zu m (also ist $ggT(m, e) = 1$)

d. berechne d, so dass $(e \cdot d) \bmod m = 1$, $d > 0$
   d ist das Multiplikative Inverse zu e bezüglich m, das mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus berechnet wird.

   Einschub: Mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus (siehe Beispiel 10.2.14 auf der nächsten Seite) berechnet man neben dem $ggT(m, e)$ noch zwei ganze Zahlen s und t, die die Gleichung
   $ggT(m, e) = s \cdot m + t \cdot e$ erfüllen. Der $ggT(m, e)$ wird somit als ganzzahlige Linearkombination der Ausgangszahlen m und e dargestellt.

   Der Faktor s wird für den RSA nicht weiter benötigt, aus dem Faktor t berechnet man d.

$$\text{Da } d > 0: \quad d := \begin{cases} t & \text{für } t > 0 \\ t + m & \text{sonst} \end{cases}$$

e. (n, e) ist der öffentliche , (n, d) ist der geheime Schlüssel

f. x ist die Zahl, die einem Buchstaben des zu versendenden Textes zugeordnet wurde (zum Beispiel monoalphabetische Verschlüsselung). Sie wird verschlüsselt mit $y = x^e \bmod n$

g. Entschlüsselung

$$
\begin{aligned}
y^d \bmod n &= (x^e \bmod n)^d \bmod n \\
&\overset{(a)}{=} x^{e\cdot d} \bmod n \\
&\overset{(b)}{=} x^{1+k\cdot m} \bmod n \\
&\overset{(c)}{=} x^{1+k\cdot(p-1)\cdot(q-1)} \bmod (p\cdot q) \\
&= x \cdot x^{k\cdot(p-1)\cdot(q-1)} \bmod (p\cdot q) \\
&\overset{(d)}{=} (x \bmod (p\cdot q) \cdot \underbrace{x^{k\cdot(p-1)\cdot(q-1)} \bmod (p\cdot q)}_{=1}) \bmod (p\cdot q) \\
&= x
\end{aligned}
$$

Erläuterungen:

(a) $(a \bmod b)^k = a^k \bmod b$

(b) es gilt: $(e\cdot d) \bmod m = 1 \Rightarrow e\cdot d = 1 + k\cdot m$

(c) $m = (p-1)\cdot(q-1)$

(d) $x^{k_1\cdot(p-1)} \bmod p = 1, k_1 = k\cdot(q-1)$ und $x^{k_2\cdot(q-1)} \bmod q = 1, k_2 = k\cdot(p-1)$
$\overset{Hilfssatz}{\Rightarrow} x^{k\cdot(p-1)\cdot(q-1)} \bmod p\cdot q = 1$

Beispiel 10.2.14

a. wähle $p = 7$ und $q = 11$
somit sind $n = p\cdot q = 7\cdot 11 = 77$ und $m = (p-1)\cdot(q-1) = 6\cdot 10 = 60$

b. wähle e teilerfremd zu 60, $e = 7$

c. berechne d, so dass $(7\cdot d) \bmod 60 = 1$ mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus
$d \in \{0, 1, \dots 60\}$

$$
\begin{array}{rlr}
60 = 8\cdot 7 + 4 & \Leftrightarrow\ 4 = & 1\cdot 60 - 8\cdot 7 \\
7 = 1\cdot 4 + 3 & \Leftrightarrow\ 3 = & 7 - 1\cdot 4 \\
& \Leftrightarrow\ 3 = & 7 - 1\cdot \underbrace{(1\cdot 60 - 8\cdot 7)}_{4} \\
& \Leftrightarrow\ 3 = & 7 - 1\cdot 1\cdot 60 + 8\cdot 7 \\
& \Leftrightarrow\ 3 = & 9\cdot 7 - 1\cdot 60 \\
4 = 1\cdot 3 + 1 & \Leftrightarrow\ 1 = & 1\cdot 4 - 1\cdot 3 \\
& \Leftrightarrow\ 1 = 1\cdot \underbrace{(1\cdot 60 - 8\cdot 7)}_{4} - 1\cdot \underbrace{(9\cdot 7 - 1\cdot 60)}_{3} & Fanwend \\
& \Leftrightarrow\ 1 = & 1\cdot 60 - 8\cdot 7 - 9\cdot 7 + 1\cdot 60 \\
& \Leftrightarrow\ \mathbf{1} = & \mathbf{2\cdot 60 - 17\cdot 7} \\
3 = 3\cdot 1 + 0 & &
\end{array}
$$

also: $ggT(60, 7) = 1 = 2\cdot 60 + (-17)\cdot 7 \ \Rightarrow\ s = 2,\ t = -17$

und somit ist $d = -17 + 60 = 43$

Der öffentliche Schlüssel ist $(77, 7)$ und der geheime $(77, 43)$

d. Geheimnis: $x = 5$ wird verschlüsselt mit $(n, e) = (77, 7)$

$$\begin{aligned} y = x^e \bmod n &= 5^7 \bmod 77 \\ &= 78125 \bmod 77 \\ &= 47 \end{aligned}$$

e. Geheimnis: $y = 47$ wird entschlüsselt mit $(n, d) = (77, 43)$

$$\begin{aligned} x = y^d \bmod n &= 47^{43} \bmod 77 \\ &= ((47^3)^{14} \cdot 47) \bmod 77 \\ &= (103823^{14} \cdot 47) \bmod 77 \\ &= (103823^{14} \bmod 77 \cdot 47 \bmod 77) \bmod 77 \\ &= (103823 \bmod 77)^{14} \cdot 47) \bmod 77 \\ &= (27^{14} \cdot 47) \bmod 77 \\ &= (27^7)^2 \cdot 47) \bmod 77 \\ &= (27^7 \bmod 77)^2 \cdot 47 \bmod 77) \bmod 77 \\ &= (69^2 \cdot 47) \bmod 77 \\ &= 223767 \bmod 77 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Bemerkung 10.2.15 (Bedeutung von RSA)
Bei RSA handelt es sich um eine ältere Verschlüsselungstechnik (Patentanmeldung 1983), die gegenüber neueren Techniken Defizite aufweist. Sie arbeitet unter anderem im Vergleich zu neueren Algorithmen recht langsam. Deshalb wird heutzutage RSA meist nur noch für den Austausch der Schlüssel moderner symmetrischer Verschlüsselungsverfahren benutzt.

Sie sollten jetzt in der Lage sein,
- Anwendungen der Modulo-Arithmetik aufzuzählen,
- einfache Verschlüsselungen zu berechnen.

10.2.5. Aufgaben

Aufgabe 1

Das Alphabet $\{A, B, C, \cdots X, Y, Z\}$ wird den Zahlen $\{0, 1, 2, \cdots, 23, 24, 25\}$ zugeordnet.

a) Verschlüsseln sie das Wort „PRIMZAHL“ mit der folgenden Verschlüsselung: $V(x) = (x + k) \mod 26, k = 12$ und geben sie die neue Buchstabenfolge an.

b) Prüfen sie die Verschlüsselungsfunktion $V(x)$ auf ihre Umkehrbarkeit und bestimmen sie die Dekodierungsfunktion $D(x)$.

A. Schulmathematik

A.1. Binomische Formeln

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot ab + b^2$

2. $(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot ab + b^2$

3. $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

A.2. Bruchrechnung

Für die folgende Tabelle gilt: $a, b, c, d \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$

Kürzen und Erweitern
$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$
$\frac{a}{b} \pm \frac{b}{c} \neq \frac{a}{c}$ (Aus Summen kürzen nur die Dummen!!) richtig: $\frac{a}{b} \pm \frac{b}{c} = \frac{ac}{bc} \pm \frac{bb}{bc} = \frac{ac \pm b^2}{bc}$

Addieren und Subtrahieren
$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{(a \cdot d) \pm (c \cdot b)}{b \cdot d}$ (Hauptnenner)

Multiplizieren und Dividieren
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ (Kehrwert)
$-\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{-a \mp b}{c \pm d} = \frac{a \pm b}{-c \mp d}$ (Minus vor dem Bruchstrich)

A.3. Exponentialfunktion, Logarithmus

Für die folgende Tabelle gilt: $a, b, x \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}, c, e \in \mathbb{N}$

Exponentialfunktion	
$e^0 = 1$	
Es gelten die Gesetze der Potenzrechnung.	

wichtige Logarithmen	
$log_{10} = lg$	(Logarithmus zur Basis 10)
$log_2 = ld$	(Logarithmus zur Basis 2)
$log_e = ln$	(Logarithmus zur Basis e)

Logarithmengesetze
$log(a \cdot b) = log(a) + log(b)$
$log\left(\frac{a}{b}\right) = log(a) - log(b)$
$log(a^b) = b \cdot log(a)$

Basiswechsel
$log_c(a) = \frac{log_e(a)}{log_e(c)}$

Funktion und Umkehrfunktion
$x = e^{ln(x)} = ln(e^x)$

A.4. Kreisgleichung

Kreisgleichung	$r^2 = (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2$
Umfang	$U = 2\pi \cdot r = \pi \cdot d$
Fläche	$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2$

A.5. Potenzieren, Radizieren

Für die folgende Tabellen gilt: $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $n, m, r, s \in \mathbb{Z}$

a^0	$=$	1
a^{-r}	$=$	$\frac{1}{a^r}$
$a^{\frac{m}{n}}$	$=$	$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
a^{r+s}	$=$	$a^r \cdot a^s$
a^{r-s}	$=$	$\frac{a^r}{a^s}$
$(a \cdot b)^r$	$=$	$a^r \cdot b^r$
$\left(\frac{a}{b}\right)^r$	$=$	$\frac{a^r}{b^r}$
$(a^r)^s$	$=$	$a^{(r \cdot s)}$
a^{r^s}	$=$	$a^{(r^s)}$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$=$	$\sqrt[n]{a \cdot b}$
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$=$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a}$	$=$	$\sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}}$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$	$=$	$\sqrt[n \cdot m]{a}$
$\sqrt[n]{a \pm b}$	$\neq$	$\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$

$(a^r)^s \neq a^{r^s}$ Beispiel: $(2^3)^2 = 8^2 = 64 \neq 512 = 2^9 = 2^{(3^2)} = 2^{3^2}$

$0^0 = 1$ Das gilt jedoch nicht bei der grenzwertigen Betrachtung („lim“).

Da $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ gelten die Regeln der Potenzrechnung auch fürs Radizieren.

A.6. Quadratische Gleichungen

allgemeine Form: $p(x) = ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$
Normalform: $p(x) = x^2 + px + q = 0$

a) **Die p-q-Formel** zur Lösung der Gleichung in Normalform

$x^2 + p \cdot x + q = 0, \qquad p, q, x \in \mathbb{C}$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

b) **Die a-b-c-Formel** zur Lösung der allgemeinen Form der Gleichung

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0, \qquad a, b, c, x \in \mathbb{C}, a \neq 0$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

c) **Die quadratische Ergänzung** für eine Gleichung in Normalform
Diese Technik ist auch für Ungleichungen definiert.
$x^2 + p \cdot x + q = 0, \qquad p, q, x \in \mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
x^2 + px + q &= 0 \\
x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + c &= 0 && \mid \text{Quadratische Ergänzung} \\
\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - c\right) &= 0 && \mid \text{3. Binomische Formel} \\
\left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - c}\right) \cdot \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - c}\right) &= 0 \\
x_1 &= -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - c} \\
x_2 &= -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - c}
\end{aligned}
$$

Für eine Gleichung, die in der allgemeinen Form gegeben ist, gilt: $p := \frac{b}{a}, q := \frac{c}{a}$

d) **Die Diskriminante**

$D := \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ (p-q-Formel) bzw. $D := \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$ (a-b-c-Formel)

$D > 0$ bedeutet $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 2 reelle Lösungen

$D = 0$ bedeutet $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 = x_2$, eine reelle Lösung, doppelte Nullstelle

$D < 0$ bedeutet $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$, 2 komplexe Lösungen

e) **Der Satz von Vieta** für eine Gleichung in Normalform

Mit seiner Hilfe lassen sich ganzzahlige Nullstellen einer quadratischen Gleichung „raten“.

$x^2 + p \cdot x + q = 0, \qquad p, q, x \in \mathbb{Z}$

Die Lösungen x_1, x_2 müssen folgendes erfüllen:

Bedingung 1: $x_1 \cdot x_2 = q$
Bedingung 2: $x_1 + x_2 = -p$

Mögliche Nullstellen der Gleichung sind somit nur Teiler von q (Bedingung 1). Diese werden zur Überprüfung in Bedingung 2 eingesetzt.

Beispiel: $x^2 - 2x - 8 = 0$, also sind $p = -8$ und $q = -2$

Bedingungen sind somit: $x_1 \cdot x_2 = -8$ und $x_1 + x_2 = 2$

$1 \cdot (-8) = -8$, aber $1 - 8 = -7 \neq 2$
$(-1) \cdot 8 = -8$, aber $-1 + 8 = 7 \neq 2$
$2 \cdot (-4) = -8$, aber $2 - 4 = -2 \neq 2$
$\mathbf{(-2) \cdot 4 = -8}$ **und** $\mathbf{-2 + 4 = 2 = 2}$
Die Nullstellen dieser Gleichung sind also $x_1 = -2$ und $x_2 = 4$.

f) **Die biquadratische Gleichung**

$x^4 + p \cdot x^2 + q = 0, \qquad p, q, x \in \mathbb{C},$

Lösung durch Substitution: $u = z^2 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{u}$

$$u^2 + p \cdot u + q = 0$$
$$u_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{u_1}$$
$$x_{3,4} = \pm\sqrt{u_2}$$

g) $(x-a)^2 + p \cdot (x-a) + q = 0, \qquad a, p, q, x \in \mathbb{C},$
Lösung durch Substitution: $u = x - a \Leftrightarrow x = u + a$

$$u^2 + p \cdot u + q = 0$$
$$u_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$
$$x_1 = u_1 + a$$
$$x_2 = u_2 + a$$

A.7. Kubische Gleichungen

allgemeine Form: $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit $a \neq 0$
Normalform: $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d = 0$

a) mit mindestens einer einfachen, rationalen Nullstelle und $d = 0$

(1) x ausklammern, $p(x) = x \cdot (ax^2 + bx + c) = 0$
(2) lösen des quadratischen Restpolynoms

Ein Beispiel: Lösen Sie die Gleichung $p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x = 0$

$$x^3 + 2x^2 - 3x = 0$$
$$x \cdot (x^2 + 2x - 3) = 0$$
$$x_0 = 0 \ \wedge \ x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$x_0 = 0 \ \wedge \ x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{4}$$
$$L = \{0, -1, 2\} \quad \text{und} \quad p(x) = x \cdot (x+1) \cdot (x-2)$$

b) mit mindestens einer einfachen, rationalen Nullstelle und $d \neq 0, d \in \mathbb{Z}$

(1) raten der Nullstelle (z.B. Satz von Vieta, siehe Seite 212)
(2) abdividieren dieser Nullstelle, faktorisieren des Polynoms
(3) lösen des quadratischen Restpolynoms

Ein Beispiel: Lösen Sie die Gleichung $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

(1) eine geratene Nullstelle ist z.B. $x_0 = 1$

(2) abdividieren und faktorisieren von x_0 ergibt $p(x) = (x-1)\cdot(x^2+3x+2)$

(3) Die Lösung des quadratischen Restpolynoms ist
$x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x_1=-1 \wedge x_2=-2$

$L=\{1,-1,-2\}$ und $p(x)=(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$

c) Für kompliziertere Nullstellen gibt es andere Ansätze. Das sind zum Beispiel die Cardanische Formel oder numerische Verfahren. Sie sind jedoch nicht Bestandteil dieses Kurses.

A.8. (Quadratische) Wurzelgleichungen

a) mit einer Quadratwurzel

$$\begin{aligned}
x-1 &= \sqrt{x+1} \quad \text{mit } x+1 \geq 0\\
x^2-2x+1 &= x+1\\
x^2-3x &= 0\\
x(x-3) &= 0\\
x_0 &= 0\\
x_1 &= 3
\end{aligned}$$

Probe:
für $x_0=0:\ \ 0-1=\sqrt{(0+1)} \Leftrightarrow -1=1 \quad$ (f)
für $x_1=3:\ \ 3-1=\sqrt{(3+1)} \Leftrightarrow 2=2 \quad$ (w)
Also ist $x=3$ die Lösung dieser Gleichung.

Das Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung!!
Wird eine Gleichung quadriert, bilden die Lösungen nur mögliche Kandidaten. Man „produziert“ quasi einen zusätzlicheh Kandidaten. Um die tatsächliche Lösung zu ermitteln, muss eine Probe durchgeführt werden.

b) mit zwei Quadratwurzeln

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-1} &= \sqrt{x+1}+2 \quad \text{mit } x+1\geq 0, x-1\geq 0\\
x-1 &= x+1+4\sqrt{x+1}+4
\end{aligned}$$

Diese Gleichung enthält nur noch eine Quadratwurzel (siehe Teil a)).

c) mit geschachtelten Quadratwurzeln

$$\begin{aligned}
\sqrt{-x-1-\sqrt{4x+5}} &= 1 \quad \text{mit } 4x+5\geq 0, -x-1-\sqrt{4x+5}\geq 0\\
-x-1-\sqrt{4x+5} &= 1\\
-x-2 &= \sqrt{4x+5}
\end{aligned}$$

Diese Gleichung enthält nur noch eine Quadratwurzel (siehe Teil a)).

A.9. Trigonometrische Funktionen

Winkel (Bogenmaß)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Winkel (Gradmaß)	0	30	45	60	90	180	270	360
Sinus	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	0	-1	0
Kosinus	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	-1	0	1
Tangens	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	Polstelle	0	Polstelle	0

A.10. Verschiedenes

1. Rechnungen mit Klammern
   a) Ohne Klammerung gilt Punkt- vor Strichrechnung.
   b) Distributivgesetz
   $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$
   insbesondere für $a = -1$: $(-1) \cdot (b \pm c) = -(b \pm c) = -b \mp c$
   (Die Vorzeichen der Summanden innerhalb der Klammer drehen sich um.)
   c) Ausklammern und Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot(c+d) &= (a+b)\cdot c + (a+b)\cdot d \\ &= ac + bc + ad + bd \\ &= ac + ad + bc + bd \\ &= a\cdot(c+d) + b\cdot(c+d) \\ &= (a+b)\cdot(c+d)\end{aligned}$$

2. Division durch Null
   a) Teilen durch 0 ist verboten.
   b) Der Ausdruck $\frac{0}{0}$ ist nicht definiert.

B. Polynome, das allgemeine Horner-Schema

Dieser Anhang ergänzt das Kapitel 5.3 auf Seite 99 des Haupttextes. Zur Erinnerung sei folgendes einfache Beispiel gegeben.

Beispiel B.0.1 (Auswertung von $P(x) = 5x^3 + 2x^2 + 3$ an der Stelle $x_0 = 2$)

- einfaches Ausrechnen
  $P(2) = 5 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 3 = 5 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 3 = 51$

- mit dem einfachen Hornerschema
  $P(x) = 5x^3 + 2x^2 + 3 = ((5x + 2) \cdot x + 0) \cdot x + 3$
  $P(2) = ((10 + 2) \cdot 2 \cdot 2 + 3 = 12 \cdot 24 + 3 = 51$
  tabellarische Schreibweise:

	5	2	0	3
x=2		10	24	48
	5	12	24	51

- Polynomdivision

$$
\begin{array}{l}
(5x^3 + 2x^2 + 3) : (x - 2) = 5x^2 + 12x + 24 \text{ Rest } 51 \\
\underline{-(5x^3 - 10x^2)} \\
\qquad\quad 12x^2 + 0x \\
\qquad \underline{-(12x^2 - 24x)} \\
\qquad\qquad\quad 24x + 3 \\
\qquad\qquad \underline{-(24x - 48)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 51
\end{array}
$$

Beispiel B.0.2 (Abdivision einer Nullstelle mit dem einfachen Hornerschema)
$P_6(x) = x^6 - 3x^5 - 5x^4 + 17x^3 - 22x + 12, \quad$ Nullstelle $x_1 = 1$

	1	-3	-5	17	0	-22	12
$x_1 = 1$		1	-2	-7	10	10	-12
	1	-2	-7	10	10	-12	0

$$
\begin{aligned}
P_6(x) &= x^6 - 3x^5 - 5x^4 + 17x^3 - 22x + 12 \\
&= \underbrace{(x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 10x^2 + 10x - 12)}_{P_5(x)} \cdot (x - 1)
\end{aligned}
$$

Die Frage, ob $x = 1$ vielleicht sogar eine doppelte Nullstelle des Polynoms $P_6(x)$ ist, führt zu der Überlegung, das Hornerschema erneut, diesmal jedoch auf $P_5(x)$, anzuwenden.

Satz B.0.3 (Das vollständige bzw. erweiterte Hornerschema)

Gegeben sind ein durch $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ definiertes Polynom $P_n(x)$ sowie eine auszuwertende Stelle x_0. Wendet man nun $(n+1)$-mal das einfache Hornerschema an, und zwar

- im erste Schritt wie im einfachen Hornerschema beschrieben

- in den folgenden Schritten, indem man die Ergebnisse des vorherigen Schritts als Koeffizienten benutzt. Der Funktionswert des Polynoms des vorherigen Schritts, er steht in der rechte Spalte, wird nicht mehr verwendet.

Beispiel B.0.4 (Abdivision aller Nullstellen, Zerlegung in Linearfaktoren)
$P(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$, $x = -1$ ist vierfache Nullstelle und somit ist r_k immer 0

	1	4	6	4	1	
$x_0 = -1$		-1	-3	-3	-1	
	1	3	3	1	0	$\Rightarrow \; P(x) = (x+1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)$
$x_1 = -1$		-1	-2	-1		
	1	2	1	0		$\Rightarrow \; P(x) = (x+1)(x+1)(x^2 + 2x + 1)$
$x_2 = -1$		-1	-1			
	1	1	0			$\Rightarrow \; P(x) = (x+1)(x+1)(x+1)(x+1)$
$x_3 = -1$		-1				
	0	0				

Linearfaktorzerlegung von $P(x)$: $P(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = (x+1)^4$

Beispiel B.0.5 (Bestimmung aller höheren Ableitungen in $\mathbf{x_0}$)
$P_6(x) = x^6 - 3x^5 - 5x^4 + 17x^3 - 22x + 12$, $x_0 = 1$

	1	-3	-5	17	0	-22	12	
$x_0 = 1$		1	-2	-7	10	10	-12	
	1	-2	-7	10	10	-12	**0**	$P_6(1) = 0 \cdot 0!$
$x_0 = 1$		1	-1	-8	2	12		
	1	-1	-8	2	12	**0**		$P_6'(1) = 0 \cdot 1!$
$x_0 = 1$		1	0	-8	-6			
	1	0	-8	-6	**6**			$P_6''(1) = 6 \cdot 2! = 12$
$x_0 = 1$		1	1	-7				
	1	1	-7	**-13**				$P_6'''(1) = (-13) \cdot 3! = -78$
$x_0 = 1$		1	2					
	1	2	**-5**					$P_6^{(4)}(1) = (-5) \cdot 4! = -120$
$x_0 = 1$		1						
	1	**3**						$P_6^{(5)}(1) = 3 \cdot 5! = 360$
$x_0 = 1$		1						
	1							$P_6^{(6)}(1) = 1 \cdot 6! = 720$

$P_k(x) = r_k$ ist der Funktionswert des Polynoms des k-ten Schemas $(k = 0, \dots, n)$.
Er steht jeweils in der rechten Ergebnisspalte.
Zusätzlich liefert das Hornerschema auch die k-te Ableitung $P_n^{(k)}$ des ursprünglichen Polynoms: $P_n^{(k)} = k! \cdot r_k$, $k = 0, \dots, n$.

Eine kurze Exkursion in die Analysis:

Für die Annäherung (Approximierung) einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt x_0 durch ein Polynom (Taylorpolynom) benötigt man die Ableitungen der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0.
Diese lassen sich für Polynome unter anderem durch das erweiterte Hornerschema berechnen.

hier: $T_6(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{P^{(6)}(x_0)}{6!}(x - x_0)^6$
$= 0 + 0 \cdot (x - 1) + \frac{12}{2!} \cdot (x - 1)^2 + \cdots + \frac{720}{6!} \cdot (x - 1)^6$
$= 6 \cdot (x - 1)^2 - 13 \cdot (x - 1)^3 - 5 \cdot (x - 1)^4 + 3 \cdot (x - 1)^5 + 1 \cdot (x - 1)^6$

Beispiel B.0.6 (Das Polynom $P(x) = 5x^3 + 2x^2 + 3$ ausgedrückt in Potenzen von $(x - 2)$)

- Berechnung der Ableitungen von $x_0 = 2$ mit dem erweiterten Hornerschema:

	5	2	0	3	
x=2		10	24	48	
	5	12	24	51	$P(2) = 51 \cdot 0!$
x=2		10	44		
	5	22	68		$P'(2) = 68 \cdot 1!$
x=2		10			
	5	32			$P''(2) = 32 \cdot 2!$
x=2					
	5				$P'''(2) = 5 \cdot 3!$

Also: $P(x) = 5x^3 + 2x^2 + 3 \;=\; (x-2)((x-2)((x-2)\cdot 5 + 32) + 68) + 51$

$$= 5(x-2)^3 + 32(x-2)^2 + 68(x-2) + 51$$

- Taylorpolynom an der Stelle $x_0 = 2$
  allgemeines Taylorpolynom vom Grad 3 (siehe Kurs Analysis 1):
  $T_3(x) = p(x_0) + p'(x_0)(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{p'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$
  hier: $T_3(x) = 51 + 68(x-2) + 32(x-2)^2 + 5(x-2)^3$

C. Partialbruchzerlegung, Teleskopprodukt

Die Partialbruchzerlegung einer echt gebrochen rationalen Funktion lässt sich in folgende Arbeitsschritte aufteilen:

(1) Berechnung der n Nullstellen $k_0, \dots k_{n-1}$ des Nennerpolynoms $p(k)$
durch z.B.: Raten und Abdividieren, p-q-Formel, quadratische Ergänzung, ...

Es gibt 4 verschiedene Arten von Nullstellen:

- reelle, einfache Nullstelle (siehe Bemerkung 3.1.3 auf Seite 42)
- reelle, mehrfache Nullstelle
- komplexe, einfache Nullstelle
- komplexe, mehrfache Nullstelle

(2) Faktorisierung des Nenners

(3) Bestimmen der Ansätze für die PBZ
Für jede Nullstellenart gibt es einen speziellen Ansatz. Der einfachste Ansatz für eine reelle, einfache Nullstelle wird im Skriptum (siehe Bemerkung 3.1.3 auf Seite 42) ausführlich behandelt. Der Vollständigkeit halber sind im folgenden die Ansätze der drei anderen Nullstellenarten kurz beschrieben. Am Schluss folgt ein Beispiel für eine einfache und eine doppelte reelle Nullstelle.

(4) Berechnung der unbekannten Faktoren im Nenner $(A_0, A_1, ..., A_{n-1})$
Sie werden mit mathematischen Techniken unabhängig vom benötigten Ansatz berechnet (siehe Skriptum, Seite 43).

(5) Einsetzen der in (4) bestimmten Faktoren A_i in den Ansatz (siehe (2)). Jetzt kann z.B. der Wert der endlichen Summe mit Hilfe von Teleskopsummen berechnet werden.

C.1. Ansatz für eine relle, mehrfache Nullstelle

k_i ist r_i-fache Nullstelle des Nennerpolynoms.
Für jede **r-fache reelle Nullstelle** k_i werden folgende r Summanden notiert:
$\frac{A_j}{k-k_i} + \frac{A_{j+1}}{(k-k_i)^2} + \frac{A_{j+2}}{(k-k_i)^3} + \dots + \frac{A_{j+r-1}}{(k-k_i)^r}$ (siehe Beispiel C.4.1 auf der nächsten Seite)

C.2. Ansatz für eine komplexe, einfache Nullstelle

(z_i) ist einfache Nullstelle des Nennerpolynoms.
Dann ist $\overline{z_i}$ auch einfach Nullstelle des Nennerpolynoms (wg. Koeff. reell)
(Weitere Informationen siehe komplexe Zahlen (Kapitel 8.4 auf Seite 140) und Kurs Analysis 1.)
$(k - z_i) \cdot (k - \overline{z_i}) := k^2 + a_i \cdot k + b_i$

Für jede komplexe Nullstelle z_i wird der Summand $\frac{B_i \cdot k + C_i}{k^2 + a_i \cdot k + b_i}$ notiert.

C.3. Ansatz für eine komplexe, mehrfache Nullstelle

Für jede s-fache komplexe Nullstelle z_i werden folgende s Summanden notiert:
$\frac{B_j k + C_j}{k^2 + a_i k + b_i} + \frac{B_{j+1} k + C_{j+1}}{(k^2 + a_i k + b_i)^2} + \ldots + \frac{B_{j+s-1} k + C_{j+s-1}}{(k^2 + a_i k + b_i)^s}$
mit $(k - z_i) \cdot (k - \overline{z_i}) := k^2 + a_i \cdot k + b_i$

C.4. Beispiele

Beispiel C.4.1 (Das Nennerpolynom besitzt eine doppelte und eine einfache Nullstelle)
Zu berechnen ist der Wert der endlichen Summe: $\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^3 - k^2 - k + 1}$

- Nullstellen des Nenners sind $k_0 = k_1 = 1$ (doppelte Nullstelle), $k_2 = -1$

- Ansatz zur PBZ
  $\frac{2}{k^3 - k^2 - k + 1} = \frac{A_0}{k-1} + \frac{A_1}{(k-1)^2} + \frac{A_2}{(k+1)} \Leftrightarrow 2 = A_0 \cdot (k-1)(k+1) + A_1 \cdot (k+1) + A_2 \cdot (k-1)^2$

- Berechnung A_0, A_1, A_2 durch Einsetzen von $k = 1$, $k = -1$ (Nullstellen) und $k = 0$
  $k = \quad 1: \qquad 2 = 2 \cdot A_1 \Leftrightarrow A_1 = 1$
  $k = -1: \qquad 2 = 4 \cdot A_2 \Leftrightarrow A_2 = \frac{1}{2}$
  $k = \quad 0: \qquad 2 = -A_0 + A_1 + A_2 \Leftrightarrow A_0 = -\frac{1}{2}$

- Einsetzen der Faktoren in den Ansatz

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^3-k^2-k+1} &= \sum_{k=2}^{n} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k-1} + \frac{1}{(k-1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} \right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) \\
&= \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)^2}}_{\text{Analysis 1}} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \underbrace{\sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n-1}}_{=0} -1 - \frac{1}{2} \right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{3}{2} \right)
\end{aligned}
$$

C.5. Teleskopprodukt

Bemerkung C.5.1 (Teleskopprodukt zum Berechnen des Wertes spezieller endlicher Produ
Ein endliches Produkt, dessen Faktoren aus Brüchen bestehen und sich Zähler und Nenner von Nachbarfaktoren kürzen lassen, nennt man Teleskopprodukt. Durch das Kürzen müssen bei der Bestimmung des Produktwertes deutlich weniger Multiplikationen ausgeführt werden als in der ursprünglichen Form. Nicht jedes Produkt lässt sich auf diese Art berechnen!

Beispiel C.5.2 (Teleskopprodukt)

$$
\begin{aligned}
P_2 &= \prod_{k=2}^{n} a_k \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k} \\
&= \left(\prod_{k=2}^{n} a_k \right) \cdot \left(\frac{1}{a_1} \cdot \prod_{k=2}^{n-1} \frac{1}{a_k} \cdot \underbrace{\frac{1}{a_n} \cdot a_n}_{=1} \right) \\
&= \left(\prod_{k=2}^{n} a_k \right) \cdot \left(\frac{1}{a_1} \cdot \prod_{k=2}^{n} \frac{1}{a_k} \cdot a_n \right) \\
&= \underbrace{\prod_{k=2}^{n} \underbrace{(a_k \cdot \frac{1}{a_k})}_{=1}}_{\text{Teleskopprodukt}} \cdot \frac{1}{a_1} \cdot a_n \\
&= \frac{a_n}{a_1}
\end{aligned}
$$

D. Algorithmen

In diesem Anhang werden interessante Algorithmen gesammelt, die nützlich sind, aber nicht unbedingt zum Standardstoff gehören.

D.1. Der „Karussell-Algorithmus“

Beispiel D.1.1 (Eine typische Aufgabenstellung)
Eine feste Anzahl Mannschaften nimmt an einem Turnier teil. Jede Spielpaarung besteht aus 2 Mannschaften, wobei jede Mannschaft gegen jede spielt.

Es ist ein Spielplan zu erstellen, so dass das Turnier möglichst wenig Zeit beansprucht. Das heißt die Spiele müssen **parallel** zueinander stattfinden.

Beispiel D.1.2 (Erstellung eines Saison-Spielplans)
In einer Saison ermitteln 10 Mannschaften (A, B, .. J) ihren Meister. Dabei treffen pro Spiel 2 Mannschaften aufeinander. Die Saison ist beendet, wenn jede Mannschaft einmal gegen jede andere Mannschaft gespielt hat. Um das Beispiel einfach zu gestalten wird nicht, wie üblich, zwischen Heim- und Auswärtsspiel unterschieden. Bei 10 Mannschaften gibt es demnach 9 Spieltage mit jeweils 5 Paarungen (= 45 Spiele).

Das Problem kann als „Bestimmung von 2-elementigen Teilmengen aus einer 10-elementigen Grundmenge“ modelliert werden (Urnenmodell, Kombination ohne Wiederholung).
Also formell: Ziehen von 2 unterscheidbaren Objekten aus einer Urne mit 10 Objekten ohne Berücksichtigung der Reihenfolge und ohne Zurücklegen.
$S = \{(a_1, a_2) \text{ mit } 1 \leq a_1 < a_2 \leq 10\} \quad |S| = \binom{10}{2} = 45.$

Der „Karussell-Algorithmus“ ist nun eine Möglichkeit die Paarungen der 9 Spieltage systematisch festzusetzen:

Vollständiger Spielplan:

1. Spieltag	A	B	C	D	E
	J	I	H	G	F
2. Spieltag	A	J	B	C	D
	I	H	G	F	E
3. Spieltag	A	I	J	B	C
	H	G	F	E	D
4. Spieltag	A	H	I	J	B
	G	F	E	D	C
5. Spieltag	A	G	H	I	J
	F	E	D	C	B
6. Spieltag	A	F	G	H	I
	E	D	C	B	J
7. Spieltag	A	E	F	G	H
	D	C	B	J	I
8. Spieltag	A	D	E	F	G
	C	B	J	I	H
9. Spieltag	A	C	D	E	F
	B	J	I	H	G

Der Karussell-Algorithmus:

1. Spieltag	A	B	C	D	E
	J	I	H	G	F
2. Spieltag	A	B $\rightarrow$	C $\rightarrow$	D $\rightarrow$	E
	$\nearrow$				$\downarrow$
	J	$\leftarrow$ I	$\leftarrow$ H	$\leftarrow$ G	$\leftarrow$ F
3. Spieltag	A	J$\rightarrow$	B $\rightarrow$	C $\rightarrow$	D
	$\nearrow$				$\downarrow$
	I	$\leftarrow$ H	$\leftarrow$ G	$\leftarrow$ F	$\leftarrow$ E
4. Spieltag	A	I$\rightarrow$	J $\rightarrow$	B $\rightarrow$	C
	$\nearrow$				$\downarrow$
	H	$\leftarrow$ G	$\leftarrow$ F	$\leftarrow$ E	$\leftarrow$ D

usw.

Bemerkung D.1.3
In der Informatik ist der Karussell-Algorithmus nützlich bei der Planung systematischer Tests aller Verbindungen in einem Netzwerk, in dem jeder Knoten mit jedem anderen durch eine Leitung verbunden ist.

Literaturverzeichnis

[1] Norbert Henze, Günter Last (2003)
Mathematik für Wirtschaftsingenieure 1
ISBN 3-528-03190-5

[2] Angelika Steger (2001)
Diskrete Strukturen, Band 1
ISBN 3-540-67597-3

[3] R. Günttner, H.-J. Reiffen (2000)
Osnabrücker Schriften zur Mathematik, Grundkurs Mathematik I
Reihe V, Haft 123

[4] Gerald Teschl, Susanne Teschl (2008)
Mathematik für Informatiker
Band 1: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra

[5] Wermuth, E.M.E. (1992)
Kurze Einführung in die formale Logik
FZJ-ZAM-BHB-0105