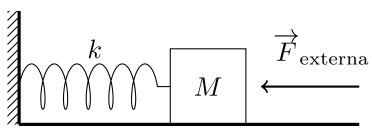
0.2. Movimiento Armónico Forzado

Una oscilación amortiguada, de la forma $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, terminará deteniéndose después de un tiempo que dependerá de la constante de amortiguamiento γ. Una manera de mantener el sistema oscilando es aplicando una fuerza externa. Por ejemplo, si la fuerza externa aplicada es constante se llegará a los casos generales en donde la ecuación diferencial es igual a una constante, por lo que esta fuerza no mantendrá al sistema oscilando. Una manera de mantener a la masa oscilando es la aplicación de una fuerza oscilante, es decir

$$F_{ext}(t) = F_0 \cos(\bar{\omega} t) \tag{0.2.1}$$

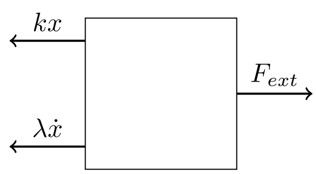
donde $\bar{\omega}$ es la frecuencia de la fuerza externa sobre el sistema. Un ejemplo de este caso sería un ventilador que se mueve alrededor del un péndulo, la frecuencia $\bar{\omega}$ será la frecuencia con que gira el ventilador alrededor del péndulo.

Caso General 1. Se tiene el siguiente sistema:



$\lambda \neq 0$

Este sistema es parecido al que ya hemos visto con anterioridad, específicamente en el caso de MAA, pero ahora hay una fuerza externa que actúa sobre el cuerpo. El DCL del cuerpo es el siguiente:



La ecuación diferencial a resolver es la siguiente:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{M}\cos(\bar{\omega} t), \tag{0.2.2}$$

La solución de esta ecuación, debido a que el lado derecho depende del tiempo, tiene dos componentes; una es la solución homogénea y otra es la solución particular.

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t), \tag{0.2.3}$$

la solución homogénea ya la conocemos, siendo esta la solución del MAA, entonces la ecuación anterior queda de la forma:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \phi) + x_p(t), \tag{0.2.4}$$

Para calcular la solución particular a este problema se puede notar que para un tiempo muy largo la solución homogénea tiende a cero, pero la fuerza se mantendrá forzando al sistema con frecuencia $\bar{\omega}$. Por lo tanto, el sistema va a tender a oscilar con la misma frecuencia de la fuerza externa a tiempos grandes. Es decir la solución tiene que tener la siguiente forma

$$x_p(t) = B\cos(\bar{\omega}t + \phi'), \tag{0.2.5}$$

donde B y ϕ' son constantes que deben ser encontradas al reintroducir esta solución a la ecuación (0.2.2), al efectuar esta operación se obtiene:

$$\begin{aligned} -B\bar{\omega}^2\cos(\bar{\omega}t + \phi') - 2B\gamma\bar{\omega}\sin(\bar{\omega}t + \phi) \\ + B\bar{\omega}_0^2\cos(\bar{\omega}t + \phi') = \frac{F_0}{M}\cos(\bar{\omega}t), \end{aligned} \tag{0.2.6}$$

al usar identidades trigonométricas, la ecuación anterior queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} -B\bar{\omega}^2\left[\cos(\bar{\omega}t)\cos(\phi') - \sin(\bar{\omega}t)\sin(\phi')\right] \\ - 2B\gamma\bar{\omega}\left[\sin(\bar{\omega}t)\cos(\phi') + \cos(\bar{\omega}t)\sin(\phi')\right] \\ + B\omega_0^2\left[\cos(\bar{\omega}t)\cos(\phi') - \sin(\bar{\omega}t)\sin(\phi')\right] = \frac{F_0}{M}\cos(\bar{\omega}t), \end{aligned} \tag{0.2.7}$$

$$\begin{aligned} B\sin(\bar{\omega}t)\left[\bar{\omega}^2\sin(\phi') - 2\gamma\bar{\omega}\cos(\phi') - \omega_0^2\sin(\phi')\right] \\ + \cos(\bar{\omega}t)\left[-B\bar{\omega}^2\cos(\phi') - 2B\gamma\bar{\omega}\sin(\phi') + B\omega_0^2\cos(\phi') - \frac{F_0}{M}\right] = 0. \end{aligned} \tag{0.2.8}$$

Asumiendo que los elementos dentro del paréntesis que acompañan a $\sin(\omega t)$ son igual a cero, tenemos:

$$B\omega^2\sin(\phi') - 2B\gamma\bar{\omega}\cos(\phi') - B\omega_0^2\sin(\phi') = 0, \tag{0.2.9}$$

$$\tan\phi' = \frac{-2\gamma\bar{\omega}}{\omega_0^2 - \bar{\omega}^2}. \tag{0.2.10}$$

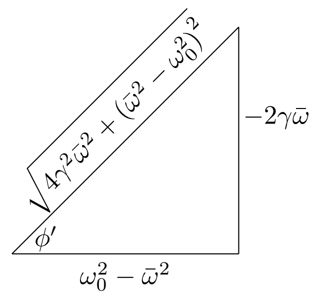
Haciendo lo mismo para el $\cos(\bar{\omega}t)$:

$$-B\bar{\omega}^2\cos(\phi') - 2B\gamma\bar{\omega}\sin(\phi') + B\omega_0^2\cos(\phi') - \frac{F_0}{M} = 0. \tag{0.2.11}$$

Esto nos da para la constante B

$$B = \frac{F_0/M}{\cos(\phi')\left(\omega_0^2 - \bar{\omega}^2\right) - 2\gamma\bar{\omega}\sin(\phi')}. \tag{0.2.12}$$

Con lo obtenido en la ecuación (0.2.10), podemos formar el siguiente triángulo:



del cual podemos decir que:

$$\sin\phi' = \frac{-2\gamma\bar{\omega}}{\sqrt{4\gamma^2\bar{\omega}^2 + \left(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2\right)^2}}, \tag{0.2.13}$$

$$\cos\phi' = \frac{\omega_0^2 - \bar{\omega}^2}{\sqrt{4\gamma^2\bar{\omega}^2 + \left(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2\right)^2}}, \tag{0.2.14}$$

$$\tan\phi' = \frac{-2\gamma\bar{\omega}}{\omega_0^2 - \bar{\omega}^2}. \tag{0.2.15}$$

Al reemplazar los valores obtenidos anteriormente en la ecuación (0.2.12), tenemos que:

$$B = \frac{F_0/M}{\frac{\left(\bar{\omega}^2-\omega_0^2\right)^2}{\sqrt{4\gamma^2\bar{\omega}^2+\left(\bar{\omega}^2-\omega_0^2\right)^2}} + \frac{4\gamma^2\bar{\omega}^2}{\sqrt{4\gamma^2\bar{\omega}^2+\left(\bar{\omega}^2-\omega_0^2\right)^2}}}, \tag{0.2.16}$$

$$B = \frac{F_0/M}{\frac{\left(\bar{\omega}^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\bar{\omega}^2}{\sqrt{4\gamma^2\bar{\omega}^2+\left(\bar{\omega}^2-\omega_0^2\right)^2}}}, \tag{0.2.17}$$

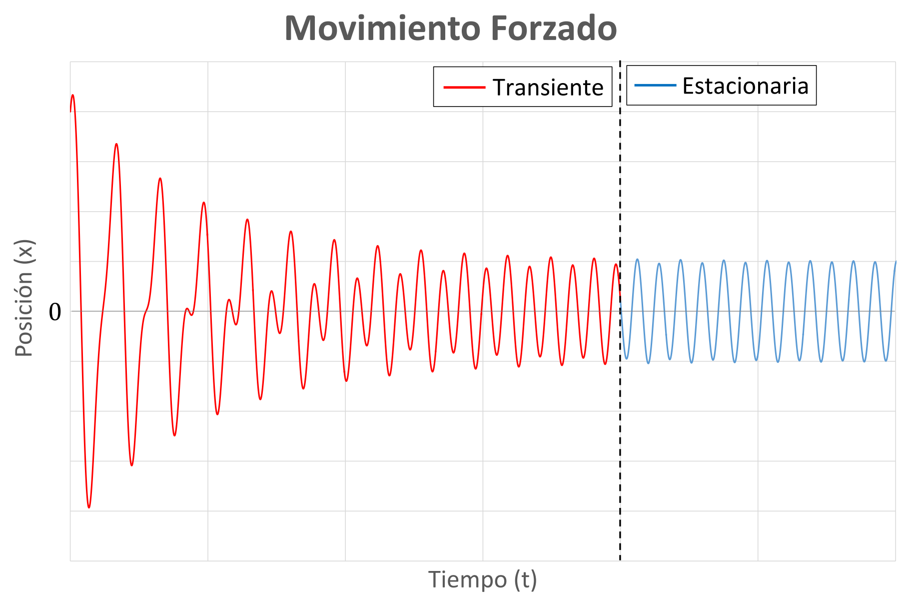
$$B = \frac{F_0/M}{\sqrt{4\gamma^2\bar{\omega}^2 + \left(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2\right)^2}}. \tag{0.2.18}$$

Entonces la ecuación de movimiento queda de la siguiente forma:

$$x_p(t) = \frac{F_0/M}{\sqrt{4\gamma^2\bar{\omega}^2 + \left(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2\right)^2}}\ \cos(\bar{\omega}t + \phi'). \tag{0.2.19}$$

La solución final será la suma de la solución homogénea y la particular, es decir

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \phi) + \frac{F_0/M}{\sqrt{4\gamma^2\bar{\omega}^2 + \left(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2\right)^2}}\ \cos(\bar{\omega}t + \phi'). \tag{0.2.20}$$



Una característica muy importante de la solución particular al movimiento forzado es el hecho que para ciertos valores de $\bar{\omega}$ la amplitud B experimenta un máximo, a este máximo se le denomina frecuencia de resonancia, el cual cuando el sistema es subamortiguado, es decir, para pequeños valores de γ puede ser muy pronunciado. Para calcular este máximo se deriva la amplitud con respecto a la frecuencia

$$\frac{dB}{d\bar{\omega}} = 0. \tag{0.2.21}$$

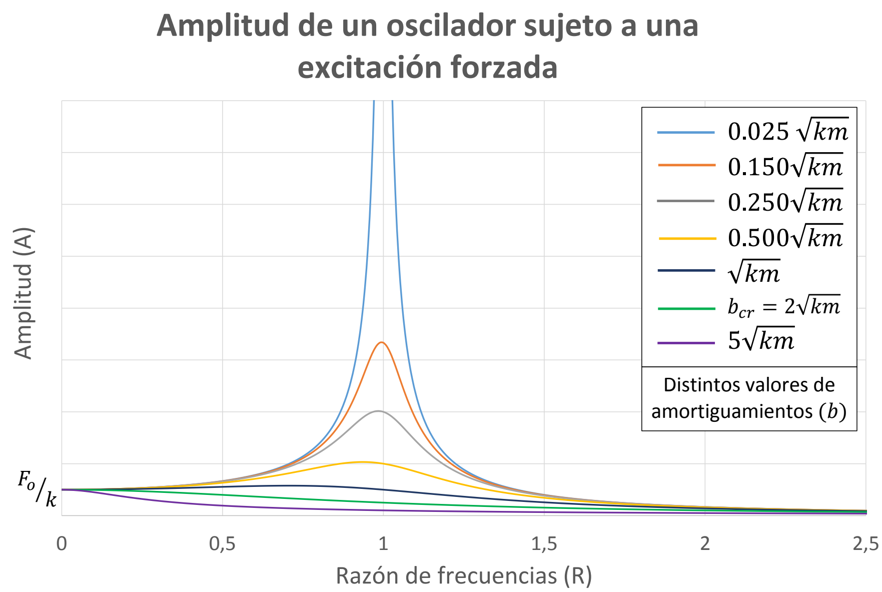
Esto nos da una frecuencia de resonancia de

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}, \tag{0.2.22}$$

Muy similar a la frecuencia de resonancia del sistema con fricción $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. El ancho de la curva Δ, el cual es calculado mediante la diferencia de polos de aquella y nos dice cual es el ancho de esa curva en la mitad de su alto, va a depender de la constante de fricción:

$$\Delta \sim \gamma. \tag{0.2.23}$$

Es decir, que cuando $\gamma \to 0$ la frecuencia de resonancia será $\omega_R = \omega_0$, el ancho será $\Delta \to 0$ y la amplitud de oscilación $B \to \infty$. Gráficamente esto se puede ver en el gráfico siguiente:


Amplitud de un oscilador sujeto a una excitación forzada
Amplitud (A)
F_o/k
0
0,5
1
1,5
2
2,5
Razón de frecuencias (R)
$0.025\sqrt{km}$
$0.150\sqrt{km}$
$0.250\sqrt{km}$
$0.500\sqrt{km}$
$\sqrt{km}$
$b_{cr} = 2\sqrt{km}$
$5\sqrt{km}$
Distintos valores de amortiguamientos (b)