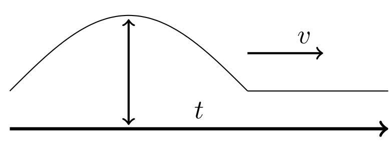
0.2. Ondas Mecánicas

Una onda mecánica es aquella en donde la información es transmitida a través de un medio. Esta información, la cual puede ser vista como transferencia de energía, se produce ya que una pequeña perturbación de una partícula afecta a sus partículas vecinas y esta información se propaga entonces de partícula en partícula. En general existen dos clases de ondas, las ondas transversales y longitudinales.

Ondas transversales

Estas ondas solamente se producen en un medio donde existe una fuerte ligazón entre partículas por lo que una perturbación transversal entre ellas produce un movimiento que se propaga transversalmente al medio, el cual puede ser único u oscilatorio. La figura siguiente muestra un pulso que se propaga hacia la derecha, las partículas se mueven de arriba hacia abajo y no de izquierda a derecha.



Esta onda se propagará a través del medio con una cierta velocidad la cual dependerá del medio por donde se esté propagando. De manera general podemos asumir que la velocidad estará dada por

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho}}, \tag{0.2.1}$$

donde F es una fuerza generalizada que tiene que ver con la fuerza de interacción entre las partículas del material que quieren restablecer el equilibrio (por ejemplo, en una cuerda estaría dada por la tensión T) y ρ tiene que ver con la densidad de masa del medio (en una cuerda esta densidad estará dada por una densidad lineal $\mu = \frac{\text{masa}}{\text{largo}}$).

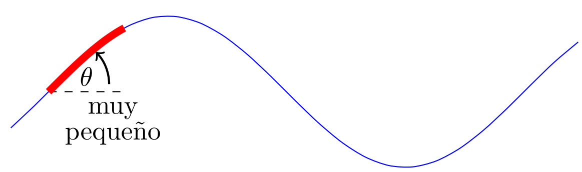
Ondas longitudinales

Este tipo de onda tiene como particularidad que las partículas tienen una perturbación en el mismo sentido que la propagación de la onda. Es decir, las partículas se mueven hacia la derecha y vuelven a la izquierda a su punto de equilibrio para un pulso, o quedan oscilando con respecto al equilirbio para varios pulsos o una onda armónica. La velocidad de propagación de esta onda es muy similar a la onda transversal, pero dependerá de la fuerza de compresibilidad del material que nos dice que tan incompresible es el material.

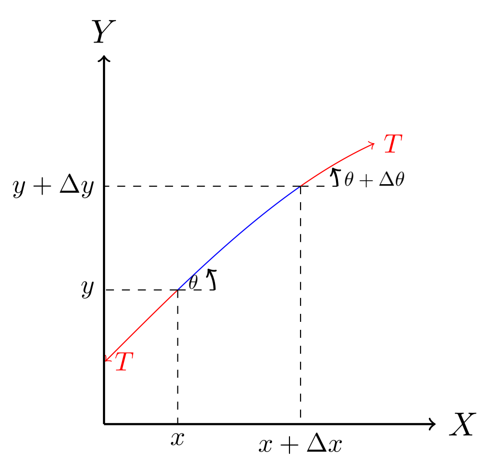
Hay que notar que para ambas ondas las velocidades dependerán del **Módulo de Young**, el cual describe la elasticidad del material por donde la onda se está propagando. Generalmente la fuerza de desplazamiento transversal es menor a la fuerza de compresibilidad. Por lo que si en un material se producen ambas ondas, un observador sentirá primero la onda longitudinal y luego la onda transversal.

0.3. Ecuación de onda

Para entender el tipo de ecuación que debe de satisfacer una onda, supongamos que estamos trabajando con una onda sinusoidal en una cuerda de tensión T, en donde la perturbación es muy pequeña por lo que el ángulo que se produce con el eje X es pequeño, como se ve en la siguiente figura:



Para seguir, tomemos un trozo de la cuerda (se encuentra resaltada en rojo) y escribamos explícitamente las fuerzas y geometría del sistema.



La cuerda posee una densidad lineal μ, la cual está dada por la masa pequeña que estamos tomando en cuenta dM dividido por su largo, i.e. $\mu = dM/\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Sumando las fuerzas del sistema en el eje Y tenemos que:

$$-T\sin(\theta) + T\sin(\theta + \Delta\theta) = dM\ddot{y}, \tag{0.3.1}$$

Usando ángulos pequeños podemos aproximar $\sin(\theta) \sim \theta$. Entonces la ecuación anterior quedará de la siguiente forma

$$-T\theta + T\theta + T\Delta\theta = dM\ddot{y}, \tag{0.3.2}$$
$$T\Delta\theta = dM\ddot{y}. \tag{0.3.3}$$

pero en este caso dM corresponde a la masa de la fracción de la cuerda, entonces podemos escribir

$$dM = \mu V = \mu\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \mu\Delta x\sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}. \tag{0.3.4}$$

Por otro lado sabemos que $\tan(\theta) = \Delta y/\Delta x = dy/dx$, entonces la igualdad anterior queda de la siguiente forma:

$$\mu\Delta x\sqrt{1 + \tan^2(\theta)} = \mu\Delta x\sqrt{1 + \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}}, \tag{0.3.5}$$
$$= \mu\Delta x\sqrt{\frac{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}}, \tag{0.3.6}$$
$$= \mu\Delta x\sqrt{\frac{1}{\cos^2(\theta)}}, \tag{0.3.7}$$
$$= \mu\Delta x\frac{1}{\cos(\theta)}, \tag{0.3.8}$$

como los ángulos son pequeños $1/\cos(\theta) \approx 1$, entonces:

$$dM \approx \mu\Delta x, \tag{0.3.9}$$

de la misma manera, usando $\tan(\theta) = dy/dx$, podemos derivar esta expresión respecto a x

$$\frac{d\tan(\theta)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}, \tag{0.3.10}$$
$$\frac{1}{\cos^2(\theta)}\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}, \tag{0.3.11}$$

como trabajamos con ángulos pequeños, se tiene

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}, \tag{0.3.12}$$

reemplazando en (0.3.3)

$$T\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{d^2y}{dt^2}\mu, \tag{0.3.13}$$
$$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{\mu}{T}\frac{d^2y}{dt^2}, \tag{0.3.14}$$
$$\Rightarrow \frac{d^2y}{d^2x} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2y}{dt^2} \tag{0.3.15}$$

la ecuacion anterior es conocida como la **Ecuación de Onda**. Donde v es una velocidad definida como

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \tag{0.3.16}$$

Esta velocidad depende de la tensión y la densidad lineal del material y no de la fuerza con la que se perturba el sistema. La solución a la ecuación de onda es cualquier función que tiene la forma:

$$y(x,t) = F(x \pm vt), \tag{0.3.17}$$

$$\text{ó} \qquad y(x,t) = F\left(t \pm \frac{x}{v}\right), \tag{0.3.18}$$

Para demostrar que $y(x,t)$ es solución a la ecuación de onda vamos a usar el cambio de variables $u = x \pm vt$ y calculamos las derivadas parciales usando la regla de la cadena,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = \pm v \frac{\partial F}{\partial u}, \tag{0.3.19}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}. \tag{0.3.20}$$

y con respecto a x

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}, \tag{0.3.21}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}. \tag{0.3.22}$$

Reemplazando en la ecuación de onda (0.3.15) obtenemos

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}. \qquad \text{Q.E.D} \tag{0.3.23}$$

Quedando entonces demostrado que cualquier combinación de $x \pm vt$ es solución a la ecuación de onda. Para el caso de $t \pm x/v$ la demostración es trivial.

0.4. Superposición

Si F_1 y F_2 son soluciones a la ecuación de onda, luego

$$y(x,t) = F_1(x \pm vt) + F_2(x \pm vt), \tag{0.4.1}$$

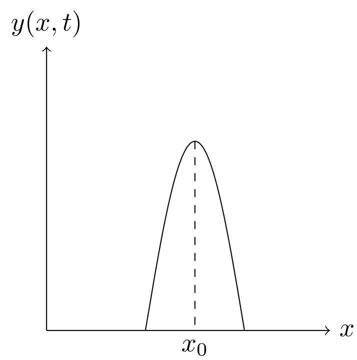
también es solución. Esto se puede comprobar de manera directa. Esta relación nos dice que si existen dos ondas que se encuentran superpuestas, la solución final será la suma de ambas.

0.5. Ejemplos de algunos tipos de Ondas

Anteriormente vimos que cualquier función que tiene una dependencia de sus variables de la forma $x \pm vt$ ó $t \pm \frac{x}{v}$ es una onda, ya que es solución a la ecuación de onda. Veamos con un poco de detalle un par de ejemplos de ciertos tipos de ondas.

Pulso

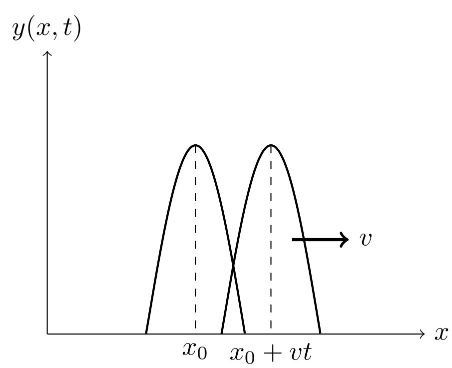
Un pulso es una variación repentina del medio de un cierto tiempo definido que se propaga luego a través de él. Una serie de tales variaciones repentinas también se le conoce como pulsos. Esta pequeña vibración puede tener cualquier forma por lo que para analizar las propiedades de una onda, no es necesario identificar cual es la forma geométrica de éste. Para entender el movimiento de este pulso, supongamos que este tiene un peak en $x = x_0$ cuando $t = 0$,



La pregunta que uno podría contestar es donde estará el peak cuando $t > 0$,

- Para $v > 0$

  el "peak" que solía encontrarse en $x = x_0$ cambió posición, es decir



ahora el peak se encuentra en $x = x_0 + vt$ ó $x_0 = x - vt$, por lo que la función evaluda en el peak $F(x_0)$ ahora deberá ser escrita $F(x - vt)$ para mostrar que se está moviéndo a la derecha.

- **Para** $v < 0$ Parecido al caso anterior, pero ahora el peak se encuentra en $x = x_0 - vt$ ó $x_0 = x + vt$. Por lo que esta onda se está moviéndo hacia la izquierda.

Onda Armónica

La onda armónica es una onda, tal que su movimiento se puede definir con la siguiente ecuación

$$y(x,t) = A\cos\left(kx \pm \omega t + \phi\right), \tag{0.5.1}$$

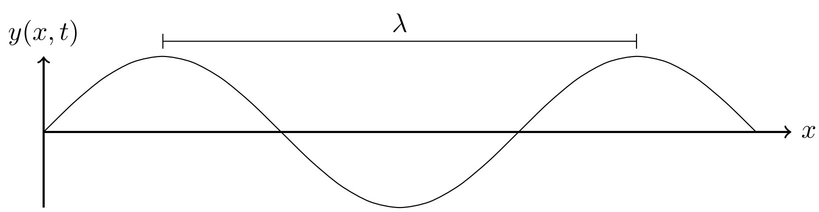
Se define k tal que no existan unidades dentro del coseno. Una onda armónica tiene propiedades muy especiales que describen este movimiento, recordemos que el signo negativo representa una onda que se mueve a la izquierda y el signo positivo una onda que se mueve hacia la derecha. Ya que esta onda es periódica se le puede definir un periodo T, una frecuencia de oscilación ($f = 1/T$, $\omega = 2\pi f$) y una longitud de onda λ como se ve en la figura. Con esto podemos definir que la onda se propaga a una velocidad dada por

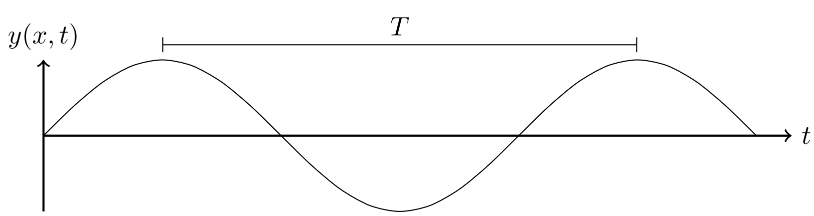
$$v = \frac{\lambda}{T}, \tag{0.5.2}$$

con esto es fácil ver que existe una relación entre la longitud de onda y la constante k dada por

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{0.5.3}$$

k se le conoce como número de onda.





0.6. Como crear una onda

Como se vió anteriormente, una onda es cualquier función en donde sus variables tengan la relación $x \pm vt$ ó $t \pm t/v$, en donde el signo negativo corresponde a una onda desplazandose a la derecha y el signo positivo hacia la izquierda. Por lo tanto podemnos crear nuestra propia forma de onda de manera geometrica al escribir una función estática $y(x)$ desplazarla al promover $x \rightarrow x \pm vt$. Esto se puede visualizar mejor con un ejemplo sencillo. Supongamos que tenemos la siguiente forma geométrica dada por la figura a continuación

Esta figura se puede escribir con la siguiente función en cada segmento de x

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ y_0 & a \leq x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases} \tag{0.6.1}$$

La función $y(x)$ nos muestra como se vería la onda como si se sacase un foto al sistema en $t = 0$, si ahora queremos mover la onda a la derecha o izquierda, debemos efectuar el cambio $x \rightarrow x \pm vt$, lo que nos da

$$y(x,t) = \begin{cases} 0 & x \pm vt < a \\ y_0 & a \leq x \pm vt \leq b \\ 0 & x \pm vt > b \end{cases} \tag{0.6.2}$$

Reescribiendo la ecuación para despejar x de tal manera que cada segmento quede bien definido nos da la siguiente onda rectangular

$$y(x,t) = \begin{cases} 0 & x < a \mp vt \\ y_0 & a \mp vt \leq x \leq b \mp vt \\ 0 & x > b \mp vt \end{cases} \tag{0.6.3}$$

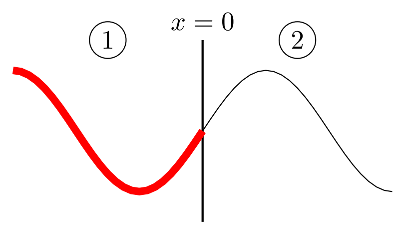
Este tipo de ejemplo se puede extender para cualquier figura geométrica, ya sea cuadrada, armónica, triangular, etc.

0.7. Reflexión y trasmisión de una onda

0.7.1. Transmisión y reflexión entre dos cuerdas

Se tiene un sistema compuesto por dos cuerdas atadas en $x = 0$, cada una con densidad lineal distinta μ_1 y μ_2, como se ve en la siguiente figura:

Las velocidades en ambas cuerdas son conocidas si se conoce la tensión que existe en ellas. Hay que notar que ambas cuerdas experimentan la misma tensión al estar unidas en $x = 0$. Si tiene una onda incidente conocida $y_i(x, t)$ que viaja a la derecha por la cuerda 1. Esta al pasar por el punto de contacto con la cuerda dos va a transmitir energía en forma de una onda de transmisión $y_t(x, t)$ y a la vez para conservar energía parte de la onda también se verá reflejada $y_r(x, t)$. Lo importante acá es que no es necesario saber exactamente cual es la forma geométrica de la onda, más bien sabemos que se puede tratar de manera general. Diagramáticamente podemos analizar lo que sucede en la siguiente figura



Primero vamos a reescribir el argumento de las funciones tal que dependan de $t \pm x/v$, donde la diferencia de signo sigue representando la dirección de propagación de la onda. Lo primero que hay que notar que en la cuerda 1 existen la onda que está incidiendo y la onda que está siendo reflejada, por lo que la onda total en la cuerda 1 será la suma de ellas, en cambio en la cuerda 2 solamente está la onda transmitida. En segundo lugar podemos argumentar que la cuerda 1 y la cuerda 2 se encuentran a la misma altura en $x = 0$ para todo tiempo t, es decir en $x = 0$:

$$y_i\left(t - \frac{x}{v_1}\right)\bigg|_{x=0} + y_r\left(t + \frac{x}{v_1}\right)\bigg|_{x=0} = y_t\left(t - \frac{x}{v_2}\right)\bigg|_{x=0}, \tag{0.7.1}$$

Noten los signos entre las variables, la onda reflejada viaja a la izquierda por lo que tiene el signo contrario. Por otro lado las ondas incidente y reflejada ambas se mueven en la cuerda 1 por lo que su velocidad será v_1 a diferencia de la onda transmitida que se encuentra en la cuerda 2, por lo que su velocidad es v_2. Entonces obtenemos en $x = 0$

$$y_i(t) + y_r(t) = y_t(t), \tag{0.7.2}$$

Por otro lado, otro argumento que puede deducirse de la figura o de manera física es el hecho que la tensión en las cuerdas es la misma y es continua. Por lo tanto, en $x = 0$ para que la tensión sea contínua la forma de la onda debe de ser contínua. Matemáticamente hablando, esto quiere decir que el gradiente de la onda en x debe de ser contínuo, i.e. al derivar la ecuacion (0.7.1) con respecto a la posición tenemos:

$$y_i'\left(t-\frac{x}{v_1}\right)\left(\frac{-1}{v_1}\right)\bigg|_{x=0}+y_r'\left(t+\frac{x}{v_1}\right)\left(\frac{1}{v_1}\right)\bigg|_{x=0}=y_t'\left(t-\frac{x}{v_2}\right)\left(\frac{-1}{v_2}\right)\bigg|_{x=0}, \tag{0.7.3}$$

En el último paso se usó la regla de la cadena, recordemos que el tilde representa la derivada con respecto a x ($y' = dy/dx$). Ahora en $x = 0$ tenemos

$$\left(\frac{-1}{v_1}\right)y_i'(t)+\left(\frac{1}{v_1}\right)y_r'(t)=\left(\frac{-1}{v_2}\right)y_t'(t), \tag{0.7.4}$$

Integrando la ecuación anterior y tomando la constante de integración igual a cero ya que la cuerda se mantenía quieta antes de que la onda incidiese en $x = 0$ se obtiene

$$\left(\frac{-1}{v_1}\right)y_i(t)+\left(\frac{1}{v_1}\right)y_r(t)=\left(\frac{-1}{v_2}\right)y_t(t), \tag{0.7.5}$$

Usando la relación obtenida anteriormente (0.7.2), las relaciones de $y_r(t)$ e $y_t(t)$ en función de la onda incidente $y_i(t)$ quedarían

$$y_r(t)=\frac{v_2-v_1}{v_2+v_1}y_i(t), \tag{0.7.6}$$

$$y_t(t)=\frac{2v_2}{v_2+v_1}y_i(t). \tag{0.7.7}$$

Para encontrar la función en todo el espacio y no solamente en $x = 0$ hay que promover el tiempo de la siguiente manera $t \to t \pm x/v$ tomando en cuenta si la onda se mueve a la derecha y si está en la cuerda 1 ó 2.

Reflexión

La onda reflejada se mueve hacia la derecha y se encuentra en la cuerda 1, por lo que debemos hacer en (0.7.6) el cambio $t \to t + x/v_1$.

$$y_r\left(t+\frac{x}{v_1}\right)=\frac{v_2-v_1}{v_1+v_2}y_i\left(t+\frac{x}{v_1}\right), \tag{0.7.8}$$

$$\text{ó} \qquad y_r\left(t+\frac{x}{v_1}\right)=\frac{v_2-v_1}{v_1+v_2}y_i\left(t-\frac{-x}{v_1}\right), \tag{0.7.9}$$

El lado izquierdo se puede asociar con la función de onda reflejada, en cambio en el lado derecho la función incidente quedaría con un signo negativo en la posición. Si definimos el coeficiente de reflexión R

$$R \equiv \frac{v_2-v_1}{v_2+v_1}, \tag{0.7.10}$$

La ecuación para la onda reflejada nos queda:

$$y_r\left(t,x\right)=R\;y_i\left(t,-x\right). \tag{0.7.11}$$

Esta ecuación nos dice que si conozco la forma de la onda incidente, luego se puede encontrar la forma de la onda reflejada simplemente multiplicando por el factor R y reemplazando x en la ecuación de la onda incidente por $-x$. Hay que notar también que el coeficiente de reflexión no depende de la tensión de la cuerda ya que podemos reescribir usando el hecho que $v = \sqrt{T/\mu}$

$$R = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}. \tag{0.7.12}$$

Solamente depende de las densidades lineales de las cuerdas.

Transmisión

De la misma manera que el caso anterior, debemos ahora promover el tiempo en (0.7.7) tal que represente una onda que se mueve a la derecha en la cuerda 2, i.e. $t \to t - x/v_2$

$$y_t\left(t - \frac{x}{v_2}\right) = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} y_i \left(t - \frac{x}{v_2}\right), \tag{0.7.13}$$

$$\text{ó} \qquad y_t\left(t - \frac{x}{v_2}\right) = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} y_i \left(t - \frac{(v_1/v_2)x}{v_1}\right), \tag{0.7.14}$$

En este caso definimos el coeficiente de transmisión T

$$T \equiv \frac{2v_2}{v_2 + v_1} \tag{0.7.15}$$

Tal que obtenemos

$$y_t\,(t, x) = T\ y_i \left(t, \frac{v_1}{v_2} x\right). \tag{0.7.16}$$

Al igual que el caso anterior, se puede encontrar la forma de la onda transmitida en todo el espacio y tiempo multiplicando la onda incidente por el factor T y efectuando el cambio $x \to \frac{v_1}{v_2} x$. También podemos observar que el coeficiente de transmisión no depende de la tensión que experimentan las cuerdas

$$T = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}. \tag{0.7.17}$$

0.7.2. Diferentes casos para reflexión y transmisión de una onda en una cuerda

Recordemos que el caso anterior es un caso general que se puede utilizar para cualquier forma de la onda incidente, concentrémonos ahora en R y T para distintos casos en donde varían las densidades de las cuerdas.

- **Cuerda conectada a una pared.** En este caso la pared se considera un objeto de masa infinita donde no puede haber transmisión de energía ($\mu \to \infty$). Por lo tanto, la velocidad en este medio será igual a cero ($v_2 = 0$). Esto nos dará los siguientes coeficientes:

  $$R = -1,$$
  $$T = 0.$$

  La onda se refleja en su totalidad pero su reflexión cambia de lado.

- **La primera cuerda es menos densa que la segunda.** $\mu_1 < \mu_2 < \infty$, con esto se obtiene $v_2 < v_1$, en este caso:

  $$-1 < R < 0,$$
  $$0 < T < 1.$$

  En este caso parte de la onda es transmitida en una onda de menor tamaño, y existe una reflexión también de menor tamaño y de sentido opuesto.

- **Ambas cuerdas poseen la misma densidad.** $\mu_1 = \mu_2$, entonces las velocidades son iguales $v_1 = v_2$, los coeficientes quedan:

  $$R = 0,$$
  $$T = 1.$$

  Este es el caso en que la onda continúa por la misma cuerda.

- **La segunda cuerda es menos densa que la primera.** $0 < \mu_2 < \mu_1$, con estas densidades se tiene que la velocidad de la cuerda 2 es menor a la cuerda 1, $v_1 < v_2$ entonces:

  $$0 < R < 1,$$
  $$1 < T < 2.$$

  Esto nos muestra que la onda adquiere velocidad en la cuerda dos y por ende crece de tamaño, por lo que la reflexión en este caso sería en el mismo sentido de la onda incidente pero de menor tamaño y hacia la izquierda.

- **Zero mass string**, este posee una densidad igual a cero ($\mu_2 = 0$) y $v_2 = \infty$, entonces:

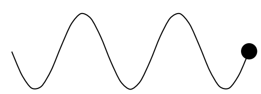
  $$R = 1,$$
  $$T = 2.$$

  Este ejemplo nos muestra que aunque se tiene que $T = 2$ no existe transmisión de energía ya que no existe la cuerda si $\mu_2 \to 0$, por lo que el resultado de la transmisión es un resultado "no físico". La onda se reflejará totalmente en el mismo sentido que la onda incidente.

0.7.3. Caso particular: Reflexión y transmisión de una onda armónica en una cuerda

En este caso particular, vamos a tomar en cuenta que la forma de la onda incidente es igual a $y_i(t,x) = A\cos(\omega t \pm kx + \phi)$. Procederemos entonces a aplicar algunos de los casos anteriores a este ejemplo.

1. **Cuerda infinita fija en x = 0**



El caso donde la cuerda es fija en $x = 0$ correspondería al caso de una cuerda conectada a una pared, en donde $\mu_2 \to \infty$ y $v_2 = 0$. Acá solamente habría una onda reflejada y no transmitida, además sabemos que esta equivale a $y_r(t,x) = Ry_i(t,-x)$ con $R = -1$. Entonces:

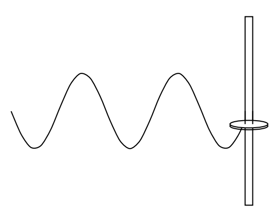
$$y_r(t,x) = -y_i(t,-x) = -A\cos(\omega t + kx + \phi)\,. \quad (0.7.18)$$

La onda total $y_T(x,t)$ que ahora vivirían en la cuerda sería la suma de la onda incidente con la reflejada, gracias al teorema de superposición de ondas, i.e. $y_T(t,x) = y_r(t,x) + y_i(t,x)$, entonces esta corresponde a:

$$y_T(t,x) = A\left(\cos(\omega t - kx + \phi) - \cos(\omega t + kx + \phi)\right), \quad (0.7.19)$$
$$\Rightarrow y_T(t,x) = 2A\sin(\omega t + \phi)\sin(kx)\,. \quad (0.7.20)$$

Con esto se satisface que $y_T(t,x)$ sea igual a 0 siempre que $x = 0$.

2. **Cuerda infinita libre en** $x = 0$



La cuerda se encuentra sujeta a un aro tal que pueda subir o bajar libremente. Este caso es el de una segunda cuerda con $\mu_2 = 0$. Para este caso vimos que físicamente no existe coeficiente de transmisión y que el coeficiente de reflexión es $R = 1$. Entonces la onda reflejada queda de la siguiente forma:

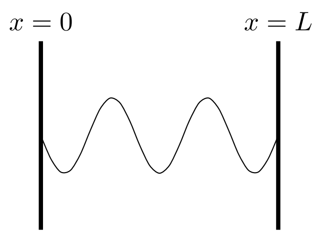
$$y_r(t,x) = A\cos(\omega t + kx + \phi)\,. \quad (0.7.21)$$

La onda total será la suma de la incidente con la reflejada, los que nos da:

$$y_T(t,x) = A\cos(\omega t + kx + \phi) + A\cos(\omega t - kx + \phi), \quad (0.7.22)$$
$$\Rightarrow y_T(t,x) = 2A\cos(\omega t + \phi)\cos(kx). \quad (0.7.23)$$

Una consecuencia importante es que el gradiente de la función total de la onda en $x = 0$ es cero. Es decir, la onda en el punto en que se encuentra suelta es siempre paralela al aro ya que tiene un máximo o mínimo en x ($\frac{dy_T}{dx} = 0$ cuando $x = 0$).

3. **Cuerda finita fija en ambos extremos:** Si tenemos ahora una cuerda oscilando la cual se encuentra fija $x = 0$ y $x = L$. es decir $y(t,0) = y(t,L) = 0$, como se muestra en la figura.



Recordemos que la ecuación que corresponde a tener $y(t,0) = 0$, cuando $x = 0$ es la siguiente:

$$y(t,x) = B\sin(\omega t + \phi)\sin(kx), \quad (0.7.24)$$

donde B es una constante. Lo importante es que la función de onda debe de satisfacer que sea igual a cero en $x = L$, entonces:

$$y(L,t) = 2A\sin(\omega t + \phi)\sin(kL), \quad (0.7.25)$$
$$2A\sin(\omega t + \phi)\sin(kL) = 0, \quad (0.7.26)$$
$$\sin(kL) = 0, \quad (0.7.27)$$
$$\Rightarrow k = \frac{n\pi}{L}. \qquad n \in \mathbb{N} \quad (0.7.28)$$

Esto nos dice que el número de onda k no puede tomar cualquier valor, y tiene que ser múltiplos enteros de π/L. Esto se le conoce como modos normales de la onda, es decir, la onda no puede oscilar con cualquier frecuencia ya que k y ω están relacionados. Vamos a escribir k_n aquel número de onda que depende de n, por definición la longitud de onda será:

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}, \quad (0.7.29)$$

donde también hemos escrito λ_n para recordar que ahora λ depende de n. Esto nos dará un valor para las frecuencias f_n y ω_n

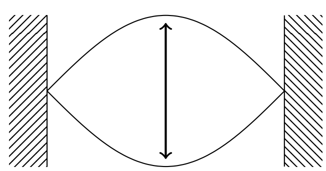
$$f_n = \frac{vn}{2L}, \tag{0.7.30}$$
$$\omega_n = \frac{vn\pi}{L}. \tag{0.7.31}$$

Cuando una cuerda tiene que oscilar con modos establecidos y contables se le llama **Onda Estacionaria**. Este tipo de onda tiene una particularidad que se producen nodos (puntos de cero movimiento) y antinodos (puntos de máximo movimiento), veamos esto con mayor detalle.

- $n = 0$: Si n toma el valor más bajo obtendremos $k_0 = f_0 = \omega_0 = 0$ y $\lambda_0 \to \infty$. Este es simplemente el resultado para una cuerda fija en dos extremos que no se encuentra oscilando. Por lo tanto, no tiene importancia en este estudio.
- $n = 1$: En este caso los valores de k_1, λ_1 y f_1 son:

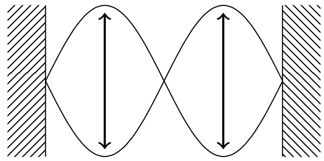
$$n = 1, \tag{0.7.32}$$
$$k_1 = \frac{\pi}{L}, \tag{0.7.33}$$
$$\lambda_1 = 2L, \tag{0.7.34}$$
$$f_1 = \frac{v}{2L}. \tag{0.7.35}$$

Esto corresponde a una oscilación de longitud de onda de $2L$. Por lo tanto, la cuerda se encontrará oscilando como se muestra en la figura con una frecuencia de $f_1 = v/2L$



Este modo de oscilación se le denomina **modo fundamental** de oscilación. Este se puede reconocer en cualquier instrumento de cuerda donde se tienen los dos puntos fijos. Hay que notar que la frecuencia depende directamente de la velocidad, y esta depende de $v = \sqrt{T/\mu}$, por lo que si se aumenta la tensión aumentará la frecuencia. Por otro lado, si se cambia la cuerda por una de mayor densidad, entonces disminuirá la frecuencia.

- $n = 2$:



en este caso los valores de λ, k y f_n son:

$$n = 2, \tag{0.7.36}$$

$$\lambda_2 = L, \tag{0.7.37}$$

$$k_1 = \frac{2\pi}{L}, \tag{0.7.38}$$

$$f_2 = \frac{v}{L}. \tag{0.7.39}$$

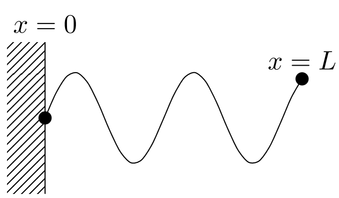
Una particularidad acá es que las frecuencias de los modos normales se pueden expresar en término de la frecuencia fundamental f_1. Es decir,

$$f_n = nf_1. \tag{0.7.40}$$

Cabe mencionar, también, que la cuerda vibra con todos sus nodos, la solución final será la suma de todas sus posibles soluciones, es decir:

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(\omega_n t + \phi) \sin(k_n x). \tag{0.7.41}$$

4. **Cuerda finita fija en un extremo y libre en el otro:** Supongamos que ahora tenemos la situación donde una cuerda se encuentra fija en $x = 0$ pero en $x = L$ está libre. Este caso se trata de la misma manera



Para satisfacer que $y = 0$ cuando $x = 0$ la forma de la onda debe de ser la misma que para el caso anterior, es decir

$$y(t, x) = B \sin(\omega t + \phi) \sin(kx). \tag{0.7.42}$$

Pero ahora la onda debe de tener pendiente igual a cero en el punto $x = L$, esto nos dice que debemos satisfacer la siguiente condición

$$\left.\frac{dy}{dx}(x, t)\right|_{x=L} = 0, \tag{0.7.43}$$

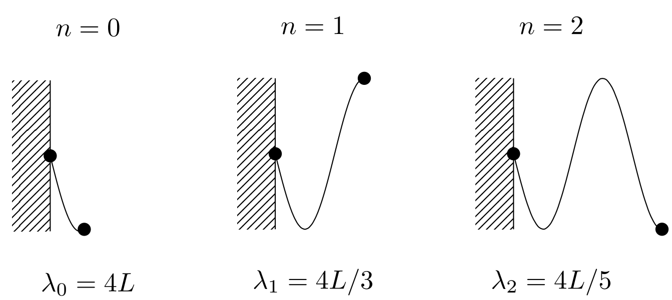
Esto de nuevo nos lleva a definir modos normales ya que $k \to k_n$ no puede tomar cualquier valor, salvo esos discretos que satisfagan la ecuación anterior.

$$k_n = \frac{(n+1/2)\,\pi}{L}, \tag{0.7.44}$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n+1/2}, \tag{0.7.45}$$

$$f_n = \frac{n+1/2}{2L}. \tag{0.7.46}$$

En este tipo de situación $n = 0$ será nuestro modo fundamental ya que tiene resultado físico. Las figuras a continuación muestran los 3 primeros modos de oscilación para una cuerda fija en un extremo y suelta en el otro



5. **Cuerda finita con ambos extremos libres:** Este, al igual que los casos anteriores debemos partir con el punto suelto en $x = 0$. Este punto nos dice que la onda debe de tener pendiente cero en ese punto, por lo que la forma de la onda queda fijada en

$$y(t,x) = B\sin(\omega t + \phi)\cos(kx)\,. \tag{0.7.47}$$

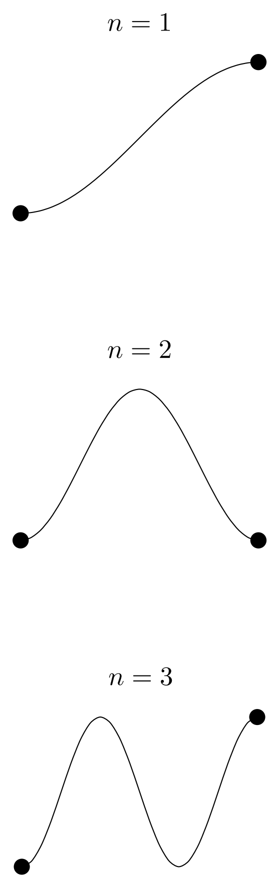
nos faltaría ahora fijar que la pendiente en $x = L$ tambén debe de ser cero. Lo que nos fijará el valor del número de onda, longitud de onda y frecuencia.

$$k_n = \frac{\pi n}{L}, \tag{0.7.48}$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \tag{0.7.49}$$

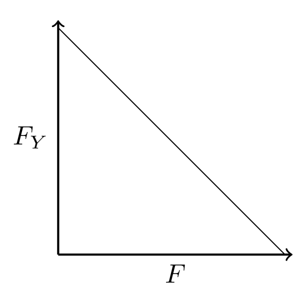
$$f_n = \frac{nv}{2L}. \tag{0.7.50}$$

A continuación podemos observar los tres primeros modos normales ($n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$)



0.7.4. Potencia de una onda

Para calcular la cantidad de energía que es entregada por una onda transversal puede calcularse a partir de la definición de potencia $P = \frac{dE}{dt}$. Esta se puede calcular usando el diagrama de fuerza según la figura a continuación



Es decir la potencia será

$$P = \frac{dE}{dt}, \tag{0.7.51}$$
$$= F_Y v_Y, \tag{0.7.52}$$
$$= F_Y \frac{dY}{dt}. \tag{0.7.53}$$

Para encontrar F_Y hay que volver a utilizar el diagrama de fuerza y asociar F con la tensión total de la cuerda cuando los ángulos son pequeños $F \sim T$, luego se puede utilizar la relación

$$\frac{F_Y}{F} = \frac{dY}{dx}, \tag{0.7.54}$$

La potencia entonces será

$$P = F_Y \frac{dY}{dt}, \tag{0.7.55}$$
$$\Rightarrow P = T \frac{dY}{dx}\frac{dY}{dt}. \tag{0.7.56}$$

Si $Y = A\cos(\omega t - kx)$:

$$P = Tk\omega A^2 \sin^2(kx - \omega t), \tag{0.7.57}$$

Como $k = \omega/r$

$$P = T\frac{\omega^2}{v} A^2 \sin^2(kx - \omega t), \tag{0.7.58}$$

como $v = \sqrt{T/\mu}$

$$P = \sqrt{\mu T}\omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t). \tag{0.7.59}$$

La potencia media será ahora el promedio de la ecuación anterior integrada en un periodo. Lo que nos da

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{\mu T}\omega^2 A^2. \tag{0.7.60}$$