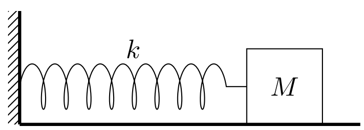
0.2. Movimiento Armónico Amortiguado (MAA)

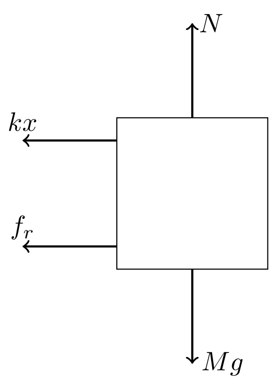
En los casos anteriores, para los MAS se asume que no existe una fuerza externa que genera pérdida de energía, como por ejemplo la fuerza de roce o fricción con algún medio. En el caso de que exista algún tipo de pérdida por medio de la fricción con el ambiente, es necesario conocer como es la fuerza de fricción para poder tratar este sistema de la misma manera que se ha hecho con anterioridad. Podemos esperar que la fricción impedirá el libre movimiento de la masa, con una fuerza que se opone al movimiento, y por lo tanto aparecerá con un signo negativo en nuestras ecuaciones.

Recordatorio. La fuerza de fricción que usaremos en este curso se define como $f_r = -b\dot{x}$, con b igual a la constante de rozamiento, esto es cierto para velocidades pequeñas. Para velocidades muy altas, puede emplearse una fuerza de fricción $f_r = -b\dot{x}^2$, pero esto va sobre lo que queremos aprender de este curso.

Caso General 1. El caso más sencillo a considerar es el de una masa sujeta a un resorte con fricción, como se muestra en la figura a continuación



El diagrama de cuerpo libre es muy parecido al anterior, mostrado en el figura 0.2.2, solamente que se tiene que considerar una fuerza extra f_r, es decir



Entonces, la sumatoria de fuerzas en el eje horizontal queda

$$\Sigma F = -kx - b\dot{x}, \tag{0.2.1}$$

$$\text{ó} \quad M\ddot{x} = -kx - b\dot{x}, \tag{0.2.2}$$

La ecuación maestra que describe este MAS con fricción será

$$\ddot{x} + \frac{b}{M}\dot{x} + \frac{k}{M}x = 0, \tag{0.2.3}$$

esta sigue siendo una ecuación diferencial homogénea de segundo orden, por lo cual la solución a esta ecuación diferencial se encuentra usando la transformación de Laplace. Para esto se requiere de la resolución a las raíces del polinomio característico al cambio de cada derivada por una variable λ. Luego la solución para una ecuación homogénea de grado n con λ_n raíces estará dada por

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots C_n e^{\lambda_n t} = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t}, \tag{0.2.4}$$

donde C_i son constantes que pueden ser imaginarias. En nuestro caso tendremos dos soluciones para λ dadas por la ecuación característica

$$\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0, \tag{0.2.5}$$

con soluciones

$$\lambda = \frac{-\frac{b}{M} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{M}\right)^2 - 4\frac{k}{M}}}{2}, \tag{0.2.6}$$

$$\lambda = -\frac{b}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2M}\right)^2 - \frac{k}{M}}, \tag{0.2.7}$$

sea $\gamma = b/2M$ y $\omega_0 = \sqrt{k/M}$, la ecuación anterior queda de la siguiente forma:

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \tag{0.2.8}$$

Las nuevas constantes tienen un significado físico, la constante ω_0 es la frecuencia natural del sistema, es decir, la frecuencia con la cual el sistema oscilaría si no tuviese el factor de fricción, al igual que en el movimiento MAS normal. La constante γ se llama amortiguamiento, y tiene que ver con la razón de la pérdida de energía del sistema por medio de la fricción del sistema. Ahora, la solución de la ecuación (**??**) es la siguiente:

$$x(t) = C_1 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}, \tag{0.2.9}$$

$$\text{ó} \quad x(t) = e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{+\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t}\right). \tag{0.2.10}$$

Hay que notar que el caso general tiene varias soluciones para posibles valores de $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

1. $\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$
2. $\gamma^2 - \omega_0^2 = 0$
3. $\gamma^2 - \omega_0^2 > 0$

La solución varía según el caso en que nos encontramos, las cuales veremos por caso:

1. debido a que $\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$, vamos a reescribir el exponente de la siguiente manera

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \tag{0.2.11}$$

y usando el hecho que $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ podemos escribir la ecuación (**??**)

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(C_1'\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t) + C_2'\sin(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t)\right), \tag{0.2.12}$$

donde C_1' y C_2' son distintas a las constantes anteriores. Vamos a definir de ahora en adelante $\omega' = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$, donde $\omega' > 0$. La ecuación (**??**) queda

$$x(t) = C_1'e^{-\gamma t}\cos(\omega' t) + C_2'e^{-\gamma t}\sin(\omega' t), \tag{0.2.13}$$
$$\text{ó} \quad x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \phi'). \tag{0.2.14}$$

El último paso se hizo utilizando trigonometría básica en donde las constantes C_1' y C_2' fueron reemplazadas por A y ϕ, las cuales están fijadas por medio de las condiciones iniciales del sistema. Para el caso general en donde $x(0) = x_0$ y $v(0) = v_0$, las ecuaciones a resolver serán

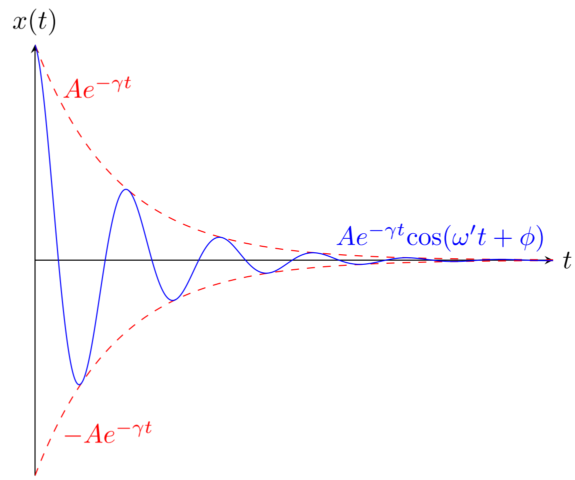
$$x_0 = A\cos\phi, \tag{0.2.15}$$
$$v_0 = A(-\gamma\cos\phi - \omega'\sin\phi). \tag{0.2.16}$$

Lo que nos da para este caso

$$\phi = -\arctan\left(\frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega' x_0}\right), \qquad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + \gamma x_0)^2}{\omega'^2}}. \tag{0.2.17}$$

Hay que tener cuidado este resultado en los casos en que $\omega' = 0$ o $x_0 = 0$.

La solución (**??**) tiene una interpretación física sencilla, se puede ver que la amplitud ahora ya no es simplemente A si no que ahora es $Ae^{-\gamma t}$ por lo que va disminuyendo a medida que el tiempo transcurre gracias a la constante γ. esto hace que el coseno oscile con amplitud cada vez menor y con una frecuencia distinta a ω_0 dada por ω'. Mientras más pequeño sea el valor de γ, es decir, mientras menor sea la pérdida por fricción, el amortiguamiento va a ser muy pequeño y la frecuencia con la que oscila el sistema tenderá a ω_0. Para entender esto, podemos graficar la ecuación anterior para valores arbitrarios de las constantes del sistema

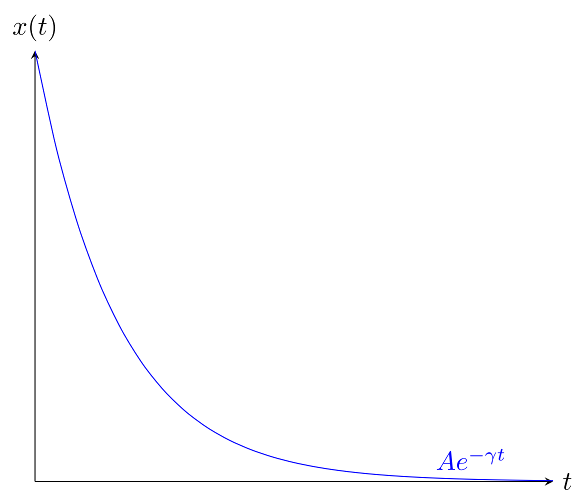


Al graficar la ecuación anterior se puede ver como la amplitud máxima está limitada por $Ae^{-\gamma t}$, y está siempre disminuyendo, hasta finalmente llegar a cero. Si la constante γ crece el decaimiento de la curva va a ser mayor, el caso límite lo discutimos en el punto 2.

2. Debido a que $\gamma^2 - \omega_0^2 = 0$, la ecuación **??** queda de la siguiente forma:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}, \tag{0.2.18}$$

al graficar la ecuación anterior veremos algo esencial de este tipo de amortiguación.



Como se ve en el gráfico anterior, acá no hay movimiento oscilatorio, aquí el péndulo vuelve a su punto de equilibrio, sin oscilar, como ocurre en el caso anterior. Este caso se llama **Movimiento Críticamente Amortiguado**

3. Debido a que $\gamma^2 - \omega_0^2 > 0$, la ecuación (**??**) no tiene un límite definido cuando el tiempo tiende a infinito, por lo que no es posible una interpretación matemática. Este sistema, al igual que el anterior no oscila, pero en este caso puede que no llegue al punto de equilibrio, en otras palabras, puede que el péndulo se detenga antes del punto de equilibrio ya que la fricción es muy grande.

   Este movimiento se conoce como **Movimiento Sobreamortiguado**

Caso General 2. Supongamos que la ecuación (**??**) está igualada a una constante C, tomando en consideración esto, la ecuación queda de la siguiente forma:

$$\ddot{x} + \frac{b}{M}\dot{x} + \frac{k}{M}x = C, \tag{0.2.19}$$

La solución de esta ecuación se puede escribir:

$$x(t) = x_p + x_h(t), \tag{0.2.20}$$

$$\text{con} \quad x_p = \frac{C}{\omega_0^2} \;\text{ y }\; x_h(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \phi'), \tag{0.2.21}$$

se puede ver que la solución dada por la ecuación (**??**) equivale a la solución de este sistema cuando la constante C es igual a cero.