0.2. Movimiento Armónico Simple (MAS)

0.2.1. Cinemática del MAS

El movimiento oscilatorio, también conocido como periódico, es un movimiento repetitivo (por ende su nombre) que ocurre bajo la acción de una fuerza que depende de la posición (ver Figura 1). Este movimiento se presenta en torno a un origen por lo que la posición, velocidad y aceleración van a ser funciones del tiempo. Esto nos describe empiricamente el sistema con las ecuaciones de cinemática vistas en cursos de física clásica que se usan para aceleraciones constantes. En cambio vamos a ver que es posible encontrar una función diferencial maestra, de la cual vamos a saber su solución y por ende vamos a poder describir las variables físicas del sistema.

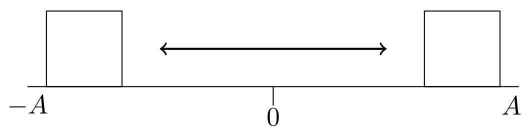


Figura 1: En este caso el cuadrado viaja entre $-A$ y A sin fricción.

La posición, además de la velocidad y aceleración de este objeto, pueden ser descrita por las siguientes ecuaciones:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi), \tag{0.2.1}$$
$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi), \tag{0.2.2}$$
$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi), \tag{0.2.3}$$

donde:

A : amplitud de oscilación.
T : periodo de la oscilación (tiempo en completar una vuelta).
ω : frecuencia angular.
ϕ : fase, esta depende del punto en donde se prende el cronómetro.

Primero notamos que la aceleración y la posición se encuentran en fase, es decir tienen máximas y mínimas al mismo tiempo, y un desfase de $\pi/2$ con respecto a la velocidad. Esta fase es posible obtenerla gracias a las condiciones iniciales que posee el sistema. Por ejemplo, veamos dos casos de condiciones iniciales distintas para un movimiento oscilatorio de posición $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$:

1. En $t = 0$, se quiere $x(0) = A$, es decir, parte del extremo derecho.

$$x(0) = A\cos(\phi), \tag{0.2.4}$$
$$A = A\cos(\phi), \tag{0.2.5}$$
$$1 = \cos(\phi), \tag{0.2.6}$$
$$\Rightarrow \phi = 0. \tag{0.2.7}$$

2. En $t = 0$, se quiere $x(0) = 0$.

$$x(0) = A\cos(\phi), \tag{0.2.8}$$
$$0 = A\cos(\phi), \tag{0.2.9}$$
$$0 = \cos(\phi), \tag{0.2.10}$$
$$\Rightarrow \phi = \pm\frac{\pi}{2}. \tag{0.2.11}$$

El signo $\pm$ nos dice si el objeto se mueve hacia la izquierda o derecha cuando $t = 0$ en $x = 0$.

Recordatorio. $\omega = 2\pi f$, con f igual a la frecuencia, siendo esta medida en Hertz [Hz].

Caso General 1. Para valores iniciales arbitrarios ($x(0) = x_0$ y $v(0) = v_0$), se tiene que las ecuaciones de posicion y velocidad son:

$$x_0 = A\cos(\phi), \tag{0.2.12}$$
$$v_0 = -A\omega\sin(\phi). \tag{0.2.13}$$

Y el valor de ϕ es igual a:

$$\frac{v_0}{x_0} = -\omega\tan(\phi), \tag{0.2.14}$$
$$\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{v_0}{\omega\ x_0}\right). \tag{0.2.15}$$

Por otro lado, el valor de A es igual a:

$$\tan(\phi) = \frac{-v_0}{\omega\ x_0}, \tag{0.2.16}$$
$$A = \frac{x_0}{\cos(\phi)}, \tag{0.2.17}$$

Por ecuaciones trigonometricas tenemos que:

$$\cos(\phi) = \frac{\omega\ x_0}{\sqrt{v_0^2 + \omega^2 x_0^2}}, \tag{0.2.18}$$

Al reemplazarlo en (0.3.17) se tiene:

$$A = \frac{\sqrt{v_0^2 + \omega^2 x_0^2}}{\omega}, \tag{0.2.19}$$
$$A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + x_0^2}. \tag{0.2.20}$$

0.2.2. Dinámica del MAS

La ecuación del Movimiento Armónico Simple (MAS), corresponde a la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0, \tag{0.2.21}$$

o en la notación de Newton

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \tag{0.2.22}$$

la solución corresponde a la ecuación de posición para un movimiento periódico (0.3.1). Recordemos que en (0.3.22) se está usando la notación $\dot{x}$ para referirnos a la primera derivada de x con respecto al tiempo y $\ddot{x}$ para la segunda derivada respecto al tiempo. Esta ecuación diferencial, homogénea, de segundo orden corresponde a un movimiento oscilatorio de frecuencia angular ω. Físicamente está ecuación describe objetos que se mueven periódicamente, es decir un resorte sin roce, un péndulo, etc.

Caso General 2. El primer caso que veremos de MAS es el de una masa m conectado a un resorte sin roce, en donde la fuerza del resorte obedece la Ley de Hooke dada por $F = -kx$, donde k es la constante elástica del resorte como se ve en la siguiente figura:

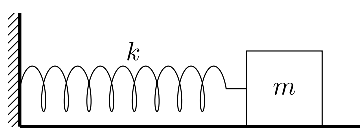
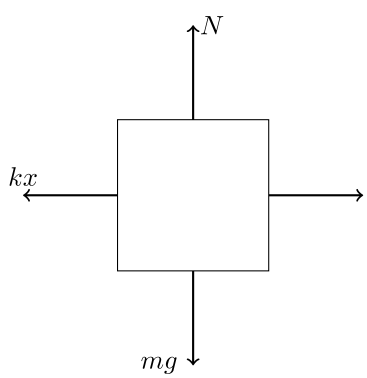


Figura 2: Ejemplo de un MAS, en este caso un cuerpo se encuentra unido a un resorte sin roce.

Para ver como actúan las fuerzas del sistema, veremos el diagrama de cuerpo libre (DCL) de este:



En este caso asumimos que el sistema no presenta roce, así que $f_r = 0$. La sumatoria de fuerzas en Y, $\Sigma F_Y = -mg + N = 0$ ó $N = mg$ ya que no hay movimiento en el eje Y. La sumatoria de fuerzas en el eje X queda igual a

$$\Sigma F = -kx,$$

notamos que la fuerza del resorte es negativa, esto sucede debido a que esta quiere mover el cuerpo al punto de equilibrio.

Siguiendo con la sumatoria de fuerzas, recordamos la segunda Ley de Newton, gracias a esta sabemos que $\Sigma F = ma = m\ddot{x}$, Entonces al reemplazar en la ecuación anterior se obtiene que $m\ddot{x} = -kx$ o

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \tag{0.2.23}$$

la solución a esta ecuación es simple y se puede calcular mediante el uso de transformación de Laplace, cuyo resultado es:

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right). \tag{0.2.24}$$

Haciendo el cambio de variables $\omega^2 = k/m$ la ecuación anterior queda de la forma:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi), \tag{0.2.25}$$

Esta es la misma ecuación que describe un movimiento oscilatorio simple explicado anteriormente, pero ahora se obtuvo por medio del uso de la mecánica del sistema. Por otro lado al derivar la ecuación anterior se obtiene la velocidad y aceleración del cuerpo:

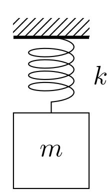
$$v(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right), \tag{0.2.26}$$

$$a(t) = -A\frac{k}{m}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right), \tag{0.2.27}$$

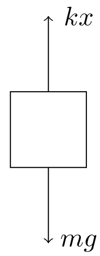
donde de nuevo la constante ϕ y A se fijan mediante las condiciones iniciales del sistema.

El caso anterior el lado derecho de la ecuación diferencial es sido igual a cero, ¿qué pasa si esta es igual a una constante?

Ejemplo 0.2.1. Se tiene una masa colgando del techo a través de un resorte de constante k, este sistema se presenta en la siguiente figura:



Para obtener la ecuación diferencial que describe este sistema hay que empezar por dibujar las fuerzas que participan. En este caso tomaremos el eje X como el eje vertical.



La sumatoria de fuerzas del sistema es el siguiente:

$$\Sigma F = mg - kx = m\ddot{x}, \tag{0.2.28}$$

$$m\ddot{x} + kx = mg, \tag{0.2.29}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = g \tag{0.2.30}$$

Esta ecuación es muy similar a la obtenida para un péndulo horizontal, pero el lado derecho ahora es igual a g. Para poder aplicar la solución oscilatoria que conocemos a esta ecuación diferencial hay que efectuar un pequeño cambio de variables $x(t) = x'(t) + mg/k$. Con esto podemos ver que la ecuación anterior se transformará a una ecuación de $x'(t)$

$$\ddot{x}' + \frac{k}{m}x' = 0 \tag{0.2.31}$$

La solución a la ecuación anterior la conocemos y es la siguiente:

$$x'(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\; t + \phi\right), \tag{0.2.32}$$

$$x'(t) = A\cos(\omega t + \phi). \tag{0.2.33}$$

Con $\omega = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural de una masa en un resorte. Por lo que la solución para $x(t)$ será

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\; t + \phi\right) + \frac{mg}{k}, \tag{0.2.34}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) + \frac{g}{\omega^2}. \tag{0.2.35}$$

Cuando comparamos la ecuación anterior con (0.3.24), podemos apreciar que se tiene un elemento extra, esta proviene de la fuerza constante de la gravedad sobre la masa la cual afecta de manera de una constante a la ecuación diferencial del MAS. Físicamente la fuerza de gravedad estira el resorte a a un nuevo punto de equilibrio dado por mg/k y luego oscila en torno a este nuevo punto. Matemáticamente esta corresponde a la suma de una solución homogénea y una particular.

La forma general de este tipo de oscilaciones es la siguiente:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = C, \tag{0.2.36}$$

la solución de esta ecuación se compone de dos partes:

$$x(t) = x'(t) + x_0, \tag{0.2.37}$$

y sus componentes son iguales a:

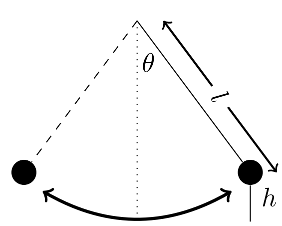
$$x'(t) = A\cos(\omega t + \phi), \tag{0.2.38}$$

$$x_0 = \frac{C}{\omega^2}. \tag{0.2.39}$$

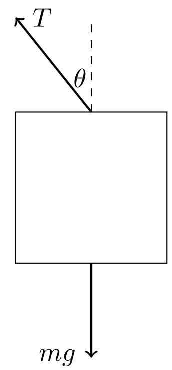
si nos damos cuenta, esta ecuación es parecida a (0.3.1), sólo que en este caso $C \neq 0$.

Péndulo simple

Caso General 3. Otro caso de oscilaciones que se presenta muchas veces en la naturaleza es la oscilación que presenta un péndulo, veamos primero el caso de un péndulo simple, en donde la cuerda que experimenta la tensión se considera ideal, es decir incompresible y de masa nula, además que la masa se considera puntual. Estos puntos se pueden justificar pensando que el radio de la masa que oscila es mucho menor al largo de la cuerda. Por otro lado la masa de la cuerda es mucho menor que la masa del cuerpo que oscila. Esto se muestra en la siguiente figura



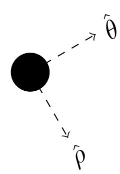
El diagrama de cuerpo libre del péndulo será:



En donde m es la masa del objeto y T la tensión sobre la cuerda, para este caso vamos a usar una cuerda ideal. Entonces tenemos:

$$\Sigma F_y = T\cos(\theta) - mg = m\ddot{y}, \tag{0.2.40}$$
$$\Sigma F_x = T\sin(\theta) = m\ddot{x}. \tag{0.2.41}$$

Es de mucha ayuda cambiar de coordenadas cartesianas $\hat{x}$ e $\hat{y}$ a coordenadas polares $\hat{\theta}$ y $\hat{\rho}$. En este caso $\hat{\theta}$ sera positivo hacia donde el ángulo θ sea mayor, lo que se aprecia en la siguiente figura:



Las ecuaciones de movimiento con estas coordenadas serán:

$$T - mg\cos(\theta) = ma_c, \tag{0.2.42}$$
$$-mg\sin(\theta) = ma_t. \tag{0.2.43}$$

La primera ecuación relaciona la tensión con la velocidad con que se mueve el cuerpo, ya que si recordamos que para un movimiento circular se tiene que $a_c = v^2/l$. Si nos concentramos en la segunda ecuación en donde la aceleración tangencial se puede expresar como $a_t = l\ddot{\theta}$

$$m\ddot{\theta}l + mg\sin(\theta) = 0, \tag{0.2.44}$$
$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0. \tag{0.2.45}$$

En el límite cuando el ángulo es pequeño, es decir, $\theta \ll \pi/4$, $\sin(\theta)$ es proporcional a θ podemos reemplazar $\sin(\theta)$ por θ. Este cambio se ve reflejado en la siguiente ecuación:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0. \tag{0.2.46}$$

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0. \tag{0.2.47}$$

la frecuencia angular con la que oscilará el péndulo será $\omega^2 = g/l$, notemos que no depende de la masa y solamente del largo del péndulo. La ecuación tiene como solución

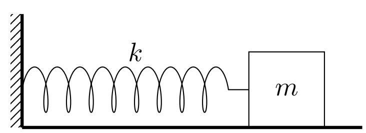
$$\theta(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \phi\right). \tag{0.2.48}$$

Es decir, el ángulo se describe con una ecuación MAS.

MAS mediante el uso de energía

Para ambos ejemplos hemos obtenido la ecuación del movimiento oscilatorio por medio de la aplicación directa de la segunda Ley de Newton o de la sumatoria de fuerzas, otro método para obtener la ecuación del MAS es por medio del uso de energía. Recordemos que por ahora solamente estamos tomando en consideración fuerzas conservativas ya que no estamos considerando el roce.

Ejemplo 0.2.2. Tomemos el primer caso de una masa atada a un resorte de la siguiente figura



Con la masa en un punto arbitrario se tiene que la energía del sistema estará dada por la suma de la energía potencial elástica más la cinética, es decir

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2. \tag{0.2.49}$$

Recordemos que el sistema no presenta roce, además de no presentar cambios en la altura ($\Delta h = 0$), gracias a esto el sistema solo tiene energía potencial elástica y cinética. En este sistema la energía se conserva, es decir $\frac{dE}{dt} = 0$. Derivando la ecuación anterior nos lleva a la siguiente igualdad (recordando el uso de la regla de la cadena)

$$\frac{dE}{dt} = kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} = 0, \tag{0.2.50}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \tag{0.2.51}$$

lo que nos lleva a la misma ecuación del MAS obtenida con anterioridad

Lo mismo se puede aplicar para el caso del péndulo, a diferencia del resorte, el sistema no presenta energía potencial elástica, pero al existir variación de altura, existe energía potencial. La energía en un punto arbitrario estará dada por

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgh, \tag{0.2.52}$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgl(1 - \cos(\theta)), \tag{0.2.53}$$

Derivando obtenemos

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + mgl\sin(\theta)\dot{\theta} = 0, \tag{0.2.54}$$

donde se usó que $h = l(1-\cos(\theta))$. El péndulo por ser un movimiento circular se tienen relaciones entre las variables cinéticas y los cambios en el ángulo $\dot{x} = \dot{\theta}l$ y $\ddot{x} = \ddot{\theta}l$, lo que nos da:

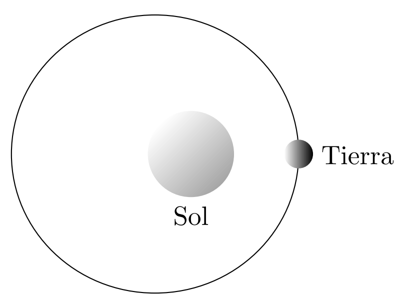
$$\ddot{\theta}\dot{\theta}l^2 + gl\sin(\theta)\dot{\theta} = 0, \tag{0.2.55}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0, \tag{0.2.56}$$

al igual que antes, debido a que $\theta \ll \pi/4 \Rightarrow \sin(\theta) = \theta$,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0. \tag{0.2.57}$$

Ley de Kepler



La Ley de Gravitación general que nos planteó Newton nos dice que la fuerza de atracción entre dos masas es proporcional a las masas en juego M_1 y M_2 y el cuadrado del inverso de las distancias entre los centros de masas d

$$\vec{F} = -\frac{GM_1M_2}{d^2}\hat{r}. \tag{0.2.58}$$

Si la distancia d es mucho mayor que los radios de los planetas, se pueden entonces considerar a las masas como objetos puntuales. La segunda ley de

Newton se puede utilizar descomponiendo en el eje X e Y donde el ángulo θ nos da la proyección del objeto con ese plano, es decir, en el eje X

$$F_x \Rightarrow M_{\text{Tierra}}\ddot{x} = -\frac{GM_{\text{Sol}}M_{\text{Tierra}}}{d^2}\sin\theta, \tag{0.2.59}$$

Multiplicando y dividiendo por d

$$M_{\text{Tierra}}\ddot{x} = -\frac{GM_{\text{Sol}}M_{\text{Tierra}}}{d^3}d\sin\theta. \tag{0.2.60}$$

Como $d\,\mathrm{sen}\,\theta = x$

$$\ddot{x} + \frac{GM_{\text{Sol}}}{d^3}x = 0, \tag{0.2.61}$$

$$\ddot{x} + w^2 x = 0. \tag{0.2.62}$$

Lo último usando el hecho que $\omega^2 = \frac{GM_{\text{Sol}}}{d^3}$. Finalmente con un poco de álgebra se obtiene

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{GM_{\text{Sol}}}{d^3} \tag{0.2.63}$$

$$\frac{d^3}{T^2} = \frac{GM_{\text{Sol}}}{4\pi^2} \;\; \textbf{(Ley de Kepler)} \tag{0.2.64}$$

La Ley de Kepler nos dice que cualquier masa que se encuentre girando alrededor del Sol tiene una relación constante entre el cuadrado de su periodo y el cubo de la distancia entre ese objeto al Sol. En otras palabras todos los planetas tienen está relación. Por ejemplo:

$$\frac{d^3_{\text{Tierra}}}{T^2_{\text{Tierra}}} = \frac{d^3_{\text{Venus}}}{T^2_{\text{Venus}}}, \tag{0.2.65}$$

Hay que mencionar que la ecuación anterior también es válida para cualquier objeto central, es decir no solamente a los planetas girando alrededor del Sol pero también por ejemplo a los satélites girando alrededor de la Tierra, es decir,

$$\frac{d^3_{\text{satélite}}}{T^2_{\text{satélite}}} = \frac{GM_{\text{Tierra}}}{4\pi^2} \tag{0.2.66}$$

Momento de inercia

La inercia es una propiedad de la materia a resistir cualquier cambio a su movimiento. Cuando este trata de giros alrededor de un eje, se desarrolla inercia a la rotación, la que está determinada por su momento de inercia (I). Este esta definido por la siguiente ecuación:

$$I = \Sigma m_i r_i^2, \tag{0.2.67}$$

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV. \tag{0.2.68}$$

La ecuación (0.3.67) corresponde al momento de inercia de una suma de partículas puntuales. El segundo es considerando el objeto como un sistema continuo de masa. Para casos que veremos a lo largo del curso usaremos la siguiente tabla que describe el momento de inercia de distintos cuerpos:

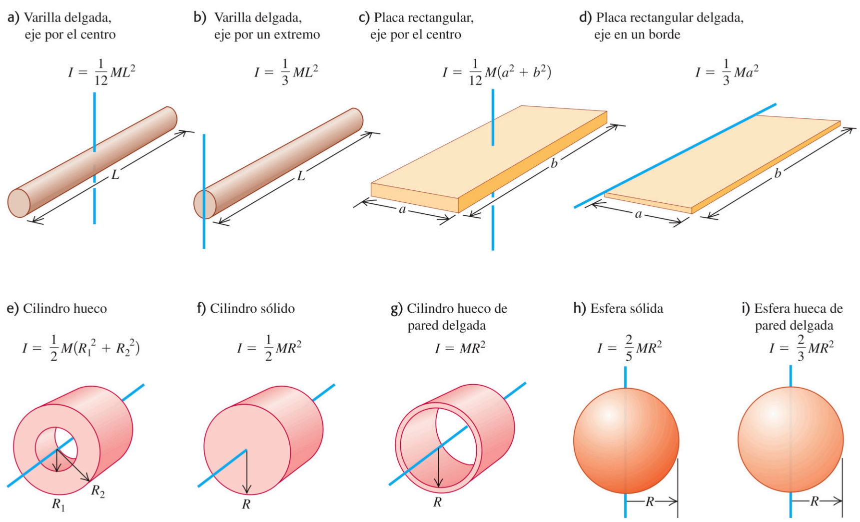
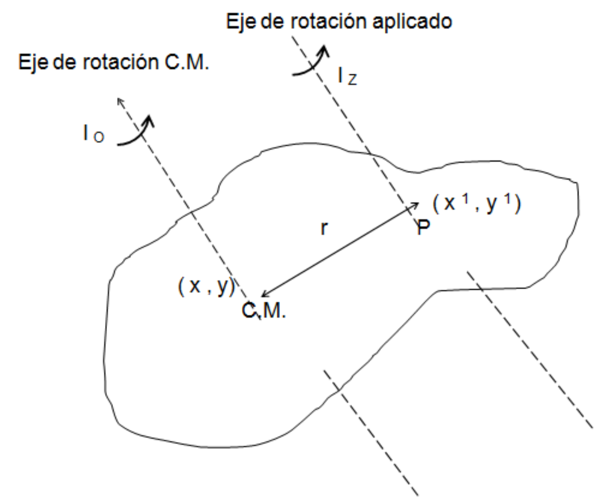


Figura 3: Diferentes cuerpos, con sus respectivos momentos de inercia

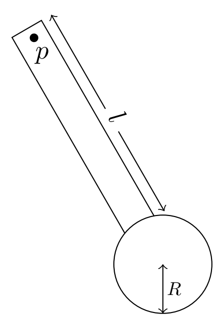
Para casos en que el eje no pase por un extremo o el centro, se utiliza el teorema de Steiner o de los ejes paralelos. En el cual se mueve el momento de inercia desde un eje conocido, los que se encuentran en la tabla anterior, a uno nuevo, que se encuentra a una distancia D del anterior

$$I = I_{\mathrm{CM}} + MD^2 \tag{0.2.69}$$



Ilustraremos este teorema con dos ejemplos:

Ejemplo 0.2.3. Se tiene el siguiente sistema compuesto de un cilindro de masa M_c y una varilla de masa M_v, calcular el momento de inercia del sistema:



En este sistema podemos encontrar dos elementos, la varilla y el cilindro, veremos los momentos de inercia de ellos y los sumaremos para obtener el momento del sistema.

- **Varilla**:
  El pivote del sistema se encuentra en un extremo, al ver la tabla en la Figura 3, sabemos que el momento de inercia de la varilla es:

  $$I_{var} = \frac{1}{3} M_v l^2. \tag{0.2.70}$$

- **Cilindro**:
  El momento de inercia del cilindro solido, que se encuentra en la Figura 3, es:

  $$I = \frac{1}{2} M_c R^2, \tag{0.2.71}$$

pero este debe ser corrido hasta el pivote, por ende usamos el teorema de Steiner para obtener el nuevo momento de inercia,

$$I_{cil} = I + M_c l^2, \tag{0.2.72}$$

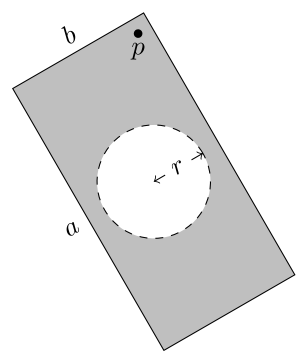
$$I_{cil} = \frac{1}{2} M_c R^2 + M_c \left(l + R\right)^2. \tag{0.2.73}$$

Al sumar los momentos de inercia obtenidos anteriormente, se obtiene el momento de inercia del sistema:

$$I_{sist} = I_{var} + I_{cil}, \tag{0.2.74}$$

$$I_{sist} = \frac{1}{3} M_v l^2 + \frac{1}{2} M_c R^2 + M_c \left(l + R\right)^2. \tag{0.2.75}$$

Ejemplo 0.2.4. Se tiene el siguiente sistema:



A un rectángulo de un material de masa M, se le retira un cilindro sólido de masa m del centro de este. Calcular el momento de inercia:

Debido a que se retira el cilindro al material, este ya no afecta al momento de inercia, en otras palabras, este debe restarse, entonces el momento de inercia del cuerpo:

$$I_{cm} = I_{rect} - I_{cilindro}, \tag{0.2.76}$$

$$I_{cm} = \frac{1}{12} M \left(a^2 + b^2\right) - \frac{1}{2} m r^2, \tag{0.2.77}$$

luego se procede a mover el centro de masa con el teorema de Steiner:

$$I = I_{cm} + (M - m) \frac{(a^2 + b^2)}{4}. \tag{0.2.78}$$

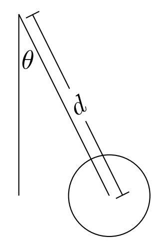
Péndulo Físico

Un péndulo físico se le denomina a aquel que sus volúmenes tienen que ser tomados en consideración, por lo que un tratamiento con momentos de inercia es obligatorio. Tenemos entonces un cuerpo rígido que es suspendido de un punto que no es su centro de masa. Este cuerpo realiza un movimiento oscilatorio bajo la acción de su propio peso. Vemos que si el cuerpo estuviese afirmado en su centro de masa no oscilaría.

Recordatorio. Algo importante para realizar este tipo de ejercicios, es tener en mente "la segunda ley de Newton para las rotaciones", que estipula:

$$\tau = I\ddot{\theta} \tag{0.2.79}$$

Caso General 4. Se tiene el siguiente péndulo:



El centro de masa del cuerpo se encuentra a una distancia d del pivote, la sumatoria de torques de este será

$$\Sigma\tau = -Mgd\sin\theta, \tag{0.2.80}$$
$$I\ddot{\theta} = -Mgd\sin\theta, \tag{0.2.81}$$

luego

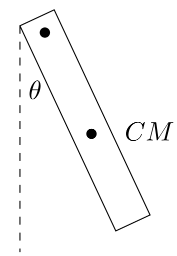
$$I\ddot{\theta} + Mgd\sin\theta = 0, \tag{0.2.82}$$
$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{Mgd}{I}\theta = 0. \tag{0.2.83}$$

El momento de inercia del péndulo se calcula usando el teorema de Steiner

$$I = I_{cm} + Md^2 \tag{0.2.84}$$

Es fácil ver que podemos definir la frecuencia angular de la misma forma que en el péndulo simple $\omega^2 = Mgd/(I_{cm} + Md^2)$, ademas debido a que $\omega = 2\pi/T$, podemos obtener el periodo del péndulo:

$$T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{I_{cm} + Md^2}{Mgd}} \tag{0.2.85}$$



Ejemplo 0.2.5. Tenemos un péndulo formado de un cuerpo rígido de largo l, que se hace oscilar

$$-Mg\frac{l}{2}\sin\theta = \Sigma\tau, \quad (0.2.86)$$

$$I\ddot{\theta} + Mg\frac{l}{2}\sin\theta = 0, \quad (0.2.87)$$

como se ha visto con anterioridad, debido a que las oscilaciones son muy pequeñas, $\sin\theta$ se comporta igual a θ.

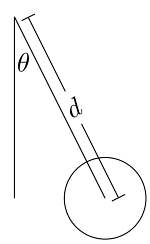
$$I\ddot{\theta} + Mg\frac{l}{2}\theta = 0, \quad (0.2.88)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgl}{2I}\theta = 0, \quad (0.2.89)$$

donde se puede definir $\omega^2 = Mgl/2I$.

Péndulo Físico por medio de Energía

Caso General 5. Para casos de péndulo físico, como el siguiente:



se puede usar la conservación de energía para poder obtener la ecuación de posición utilizando un punto arbitrario. Tomando el pivote como $h = 0$, la energía del sistema es igual a:

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 - Mgh, \quad (0.2.90)$$

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 - Mgd\cos\theta, \quad (0.2.91)$$

procederemos a derivar la energía con respecto al tiempo, ya que sabemos que la energía se conserva ($dE/dt = 0$):

$$\frac{dE}{dt} = I\alpha\omega - Mgd\sin(\theta)\omega, \tag{0.2.92}$$

$$0 = I\alpha\omega + Mgd\sin(\theta)\omega, \tag{0.2.93}$$

$$0 = I\alpha + Mgd\sin\theta, \tag{0.2.94}$$

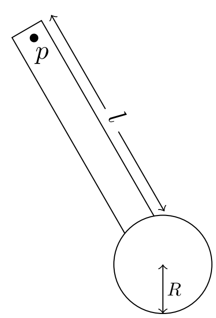
como θ es cercano a 0, $\sin\theta \approx \theta$,

$$I\ddot{\theta} + Mgd\theta = 0, \tag{0.2.95}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{Mgd}{I}\theta = 0. \tag{0.2.96}$$

Pendulo Físico Compuesto

Para el caso en que el péndulo físico esté compuesto por más de un cuerpo, como por ejemplo la figura siguiente, se puede proceder de dos maneras.



Si se conoce el lugar donde esta el centro de masa, el torque puede ser calculado de la siguiente manera

$$\tau = r_{cm}F_{cm}\sin(\theta) = I\ddot{\theta}. \tag{0.2.97}$$

En donde I es el momento de inercia del cuerpo completo. Por otro lado, si se quiere trabajo con los cuerpos por separado se puede efectuar torque en los momentos de inercia de cada cuerpo que participa

$$\tau = \sum_i r_iF_i\sin(\theta_i) = I\ddot{\theta}, \tag{0.2.98}$$

siendo I el mismo momento de inercia. Acá r_i es la distancia del eje a donde la fuerza F_i está siendo aplicada. Como en este caso $F_{cm} = Mg$ y $F_i = M_ig$, se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\ddot{\theta} + \frac{r_{cm}Mg}{I}\sin(\theta) = 0, \tag{0.2.99}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\sum_i r_iM_ig}{I}\sin(\theta) = 0. \tag{0.2.100}$$

Estas dos ecuaciones son idénticas al considerar que la definición de centro de masa está dado por

$$r_{cm} = \frac{\sum r_i M_i}{M}. \tag{0.2.101}$$

De acá se puede extraer las frecuencias angulares del sistema

$$\omega = \sqrt{\frac{r_{cm} M g}{I}} = \sqrt{\frac{\Sigma r_i M_i g}{I}}. \tag{0.2.102}$$