

UTFSM Coordinación 130

Texto Guía Física 130

Oscilaciones, Ondas mecánicas y Sonido



Índice general

1. Oscilaciones	5
1.1. Movimiento Armónico Simple (MAS)	5
1.1.1. Cinemática del MAS	5
1.1.2. Dinámica del MAS	7
1.2. Movimiento Armónico Amortiguado (MAA)	22
1.3. Movimiento Armónico Forzado	27
1.4. Ejercicios	32
2. Ondas Mecánicas	47
2.1. Ecuación de onda	48
2.2. Superposición	51
2.3. Ejemplos de algunos tipos de Ondas	51
2.4. Como crear una onda	53
2.5. Reflexión y transmisión de una onda	54
2.5.1. Transmisión y reflexión entre dos cuerdas	54
2.5.2. Diferentes casos para reflexión y transmisión de una onda en una cuerda	57
2.5.3. Caso particular: Reflexión y transmisión de una onda armónica en una cuerda	58
2.5.4. Potencia de una onda	64
2.6. Ejercicios	66
3. Sonido	75
3.1. Ondas de Sonido	75
3.2. Interferencia de Sonido	77
3.3. Sonido en Tubo	79
3.4. Potencia e Intensidad	81
3.4.1. Decibeles	82
3.5. Efecto Doppler	83
3.6. Ejercicios	85



Capítulo 1

Oscilaciones

1.1. Movimiento Armónico Simple (MAS)

1.1.1. Cinemática del MAS

El movimiento oscilatorio, también conocido como periódico, es un movimiento repetitivo (por ende su nombre) que ocurre bajo la acción de una fuerza que depende de la posición (ver Figura 1.1). Este movimiento se presenta en torno a un origen por lo que la posición, velocidad y aceleración van a ser funciones del tiempo. Esto nos describe empíricamente el sistema con las ecuaciones de cinemática vistas en cursos de física clásica que se usan para aceleraciones constantes. En cambio vamos a ver que es posible encontrar una función diferencial maestra, de la cual vamos a saber su solución y por ende vamos a poder describir las variables físicas del sistema.

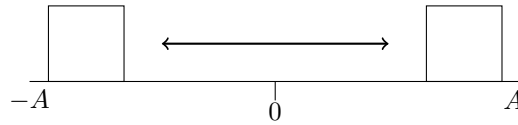


Figura 1.1: En este caso el cuadrado viaja entre $-A$ y A sin fricción.

La posición, además de la velocidad y aceleración de este objeto, pueden ser descrita por las siguientes ecuaciones:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad (1.1.1)$$

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi), \quad (1.1.2)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi), \quad (1.1.3)$$

donde:



- A : amplitud de oscilación.
 T : periodo de la oscilación (tiempo en completar una vuelta).
 ω : frecuencia angular.
 ϕ : fase, esta depende del punto en donde se prende el cronómetro.

Primero notamos que la aceleración y la posición se encuentran en fase, es decir tienen máximas y mínimas al mismo tiempo, y un desfase de $\pi/2$ con respecto a la velocidad. Esta fase es posible obtenerla gracias a las condiciones iniciales que posee el sistema. Por ejemplo, veamos dos casos de condiciones iniciales distintas para un movimiento oscilatorio de posición $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$:

1. En $t = 0$, se quiere $x(0) = A$, es decir, parte del extremo derecho.

$$x(0) = A \cos(\phi), \quad (1.1.4)$$

$$A = A \cos(\phi), \quad (1.1.5)$$

$$1 = \cos(\phi), \quad (1.1.6)$$

$$\Rightarrow \phi = 0. \quad (1.1.7)$$

2. En $t = 0$, se quiere $x(0) = 0$.

$$x(0) = A \cos(\phi), \quad (1.1.8)$$

$$0 = A \cos(\phi), \quad (1.1.9)$$

$$0 = \cos(\phi), \quad (1.1.10)$$

$$\Rightarrow \phi = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (1.1.11)$$

El signo \pm nos dice si el objeto se mueve hacia la izquierda o derecha cuando $t = 0$ en $x = 0$.

Recordatorio. $\omega = 2\pi f$, con f igual a la frecuencia, siendo esta medida en Hertz [Hz].

Caso General 1. Para valores iniciales arbitrarios ($x(0) = x_0$ y $v(0) = v_0$), se tiene que las ecuaciones de posición y velocidad son:

$$x_0 = A \cos(\phi), \quad (1.1.12)$$

$$v_0 = -A\omega \sin(\phi). \quad (1.1.13)$$

Y el valor de ϕ es igual a:

$$\frac{v_0}{x_0} = -\omega \tan(\phi), \quad (1.1.14)$$

$$\phi = -\tan^{-1} \left(\frac{v_0}{\omega x_0} \right). \quad (1.1.15)$$



Por otro lado, el valor de A es igual a:

$$\tan(\phi) = \frac{-v_0}{\omega x_0}, \quad (1.1.16)$$

$$A = \frac{x_0}{\cos(\phi)}, \quad (1.1.17)$$

Por ecuaciones trigonométricas tenemos que:

$$\cos(\phi) = \frac{\omega x_0}{\sqrt{v_0^2 + \omega^2 x_0^2}}, \quad (1.1.18)$$

Al reemplazarlo en (1.1.17) se tiene:

$$A = \frac{\sqrt{v_0^2 + \omega^2 x_0^2}}{\omega}, \quad (1.1.19)$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + x_0^2}. \quad (1.1.20)$$

1.1.2. Dinámica del MAS

La ecuación del Movimiento Armónico Simple (MAS), corresponde a la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0, \quad (1.1.21)$$

o en la notación de Newton

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad (1.1.22)$$

la solución corresponde a la ecuación de posición para un movimiento periódico (1.1.1). Recordemos que en (1.1.22) se está usando la notación \dot{x} para referirnos a la primera derivada de x con respecto al tiempo y \ddot{x} para la segunda derivada respecto al tiempo. Esta ecuación diferencial, homogénea, de segundo orden corresponde a un movimiento oscilatorio de frecuencia angular ω . Físicamente está ecuación describe objetos que se mueven periódicamente, es decir un resorte sin roce, un péndulo, etc.

Caso General 2. El primer caso que veremos de MAS es el de una masa m conectado a un resorte sin roce, en donde la fuerza del resorte obedece la Ley de Hooke dada por $F = -kx$, donde k es la constante elástica del resorte como se ve en la siguiente figura:

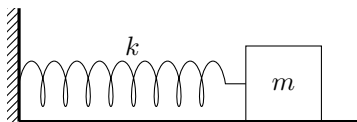
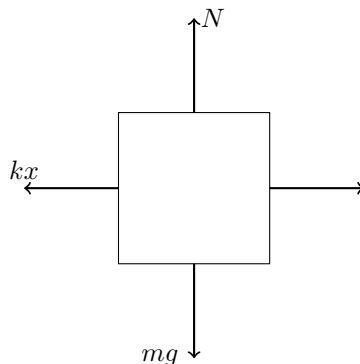


Figura 1.2: Ejemplo de un MAS, en este caso un cuerpo se encuentra unido a un resorte sin roce.

Para ver como actúan las fuerzas del sistema, veremos el diagrama de cuerpo libre (DCL) de este:



En este caso asumimos que el sistema no presenta roce, así que $f_r = 0$. La sumatoria de fuerzas en Y, $\Sigma F_Y = -mg + N = 0$ ó $N = mg$ ya que no hay movimiento en el eje Y. La sumatoria de fuerzas en el eje X queda igual a

$$\Sigma F = -kx,$$

notamos que la fuerza del resorte es negativa, esto sucede debido a que esta quiere mover el cuerpo al punto de equilibrio.

Siguiendo con la sumatoria de fuerzas, recordamos la segunda Ley de Newton, gracias a esta sabemos que $\Sigma F = ma = m\ddot{x}$, Entonces al reemplazar en la ecuación anterior se obtiene que $m\ddot{x} = -kx$ o

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \quad (1.1.23)$$

la solución a esta ecuación es simple y se puede calcular mediante el uso de transformación de Laplace, cuyo resultado es:

$$x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right). \quad (1.1.24)$$

Haciendo el cambio de variables $\omega^2 = k/m$ la ecuación anterior queda de la forma:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad (1.1.25)$$

Esta es la misma ecuación que describe un movimiento oscilatorio simple explicado anteriormente, pero ahora se obtuvo por medio del uso de la mecánica del sistema. Por otro lado al derivar la ecuación anterior se obtiene la velocidad y

aceleración del cuerpo:

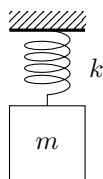
$$v(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right), \quad (1.1.26)$$

$$a(t) = -A\frac{k}{m} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right), \quad (1.1.27)$$

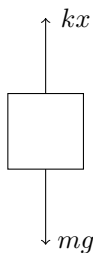
donde de nuevo la constante ϕ y A se fijan mediante las condiciones iniciales del sistema.

El caso anterior el lado derecho de la ecuación diferencial es sido igual a cero, ¿qué pasa si esta es igual a una constante?

Ejemplo 1.1.1. Se tiene una masa colgando del techo a través de un resorte de constante k , este sistema se presenta en la siguiente figura:



Para obtener la ecuación diferencial que describe este sistema hay que empezar por dibujar las fuerzas que participan. En este caso tomaremos el eje X como el eje vertical.



La sumatoria de fuerzas del sistema es el siguiente:

$$\Sigma F = mg - kx = m\ddot{x}, \quad (1.1.28)$$

$$m\ddot{x} + kx = mg, \quad (1.1.29)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = g \quad (1.1.30)$$

Esta ecuación es muy similar a la obtenida para un péndulo horizontal, pero el lado derecho ahora es igual a g . Para poder aplicar la solución oscilatoria que conocemos a esta ecuación diferencial hay que efectuar un pequeño cambio de



variables $x(t) = x'(t) + mg/k$. Con esto podemos ver que la ecuación anterior se transformará a una ecuación de $x'(t)$

$$\ddot{x}' + \frac{k}{m}x' = 0 \quad (1.1.31)$$

La solución a la ecuación anterior la conocemos y es la siguiente:

$$x'(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi\right), \quad (1.1.32)$$

$$x'(t) = A \cos(\omega t + \phi). \quad (1.1.33)$$

Con $\omega = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural de una masa en un resorte. Por lo que la solución para $x(t)$ será

$$x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi\right) + \frac{mg}{k}, \quad (1.1.34)$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) + \frac{g}{\omega^2}. \quad (1.1.35)$$

Cuando comparamos la ecuación anterior con (1.1.24), podemos apreciar que se tiene un elemento extra, esta proviene de la fuerza constante de la gravedad sobre la masa la cual afecta de manera de una constante a la ecuación diferencial del MAS. Físicamente la fuerza de gravedad estira el resorte a un nuevo punto de equilibrio dado por mg/k y luego oscila en torno a este nuevo punto. Matemáticamente esta corresponde a la suma de una solución homogénea y una particular.

La forma general de este tipo de oscilaciones es la siguiente:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = C, \quad (1.1.36)$$

la solución de esta ecuación se compone de dos partes:

$$x(t) = x'(t) + x_0, \quad (1.1.37)$$

y sus componentes son iguales a:

$$x'(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad (1.1.38)$$

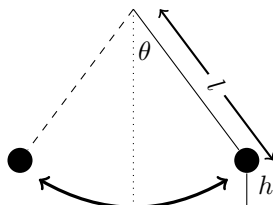
$$x_0 = \frac{C}{\omega^2}. \quad (1.1.39)$$

si nos damos cuenta, esta ecuación es parecida a (1.1.1), sólo que en este caso $C \neq 0$.

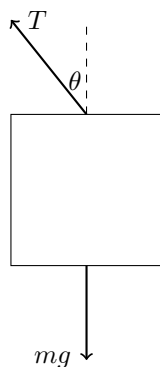
Péndulo simple

Caso General 3. Otro caso de oscilaciones que se presenta muchas veces en la naturaleza es la oscilación que presenta un péndulo, veamos primero el caso de

un péndulo simple, en donde la cuerda que experimenta la tensión se considera ideal, es decir incompresible y de masa nula, además que la masa se considera puntual. Estos puntos se pueden justificar pensando que el radio de la masa que oscila es mucho menor al largo de la cuerda. Por otro lado la masa de la cuerda es mucho menor que la masa del cuerpo que oscila. Esto se muestra en la siguiente figura



El diagrama de cuerpo libre del péndulo será:

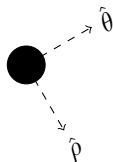


En donde m es la masa del objeto y T la tensión sobre la cuerda, para este caso vamos a usar una cuerda ideal. Entonces tenemos:

$$\Sigma F_y = T \cos(\theta) - mg = m\ddot{y}, \quad (1.1.40)$$

$$\Sigma F_x = T \sin(\theta) = m\ddot{x}. \quad (1.1.41)$$

Es de mucha ayuda cambiar de coordenadas cartesianas \hat{x} e \hat{y} a coordenadas polares $\hat{\theta}$ y $\hat{\rho}$. En este caso $\hat{\theta}$ sera positivo hacia donde el ángulo θ sea mayor, lo que se aprecia en la siguiente figura:





Las ecuaciones de movimiento con estas coordenadas serán:

$$T - mg \cos(\theta) = ma_c, \quad (1.1.42)$$

$$-mg \sin(\theta) = ma_t. \quad (1.1.43)$$

La primera ecuación relaciona la tensión con la velocidad con que se mueve el cuerpo, ya que si recordamos que para un movimiento circular se tiene que $a_c = v^2/l$. Si nos concentramos en la segunda ecuación en donde la aceleración tangencial se puede expresar como $a_t = l\ddot{\theta}$

$$m\ddot{\theta}l + mg \sin(\theta) = 0, \quad (1.1.44)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0. \quad (1.1.45)$$

En el límite cuando el ángulo es pequeño, es decir, $\theta \ll \pi/4$, $\sin(\theta)$ es proporcional a θ podemos reemplazar $\sin(\theta)$ por θ . Este cambio se ve reflejado en la siguiente ecuación:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0. \quad (1.1.46)$$

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0. \quad (1.1.47)$$

la frecuencia angular con la que oscilará el péndulo será $\omega^2 = g/l$, notemos que no depende de la masa y solamente del largo del péndulo. La ecuación tiene como solución

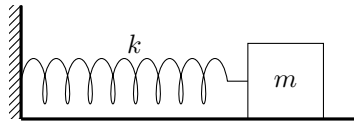
$$\theta(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \phi \right). \quad (1.1.48)$$

Es decir, el ángulo se describe con una ecuación MAS.

MAS mediante el uso de energía

Para ambos ejemplos hemos obtenido la ecuación del movimiento oscilatorio por medio de la aplicación directa de la segunda Ley de Newton o de la sumatoria de fuerzas, otro método para obtener la ecuación del MAS es por medio del uso de energía. Recordemos que por ahora solamente estamos tomando en consideración fuerzas conservativas ya que no estamos considerando el roce.

Ejemplo 1.1.2. Tomemos el primer caso de una masa atada a un resorte de la siguiente figura



Con la masa en un punto arbitrario se tiene que la energía del sistema estará dada por la suma de la energía potencial elástica más la cinética, es decir

$$E = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2. \quad (1.1.49)$$



Recordemos que el sistema no presenta roce, además de no presentar cambios en la altura ($\Delta h = 0$), gracias a esto el sistema solo tiene energía potencial elástica y cinética. En este sistema la energía se conserva, es decir $\frac{dE}{dt} = 0$. Derivando la ecuación anterior nos lleva a la siguiente igualdad (recordando el uso de la regla de la cadena)

$$\frac{dE}{dt} = kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} = 0, \quad (1.1.50)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \quad (1.1.51)$$

lo que nos lleva a la misma ecuación del MAS obtenida con anterioridad

Lo mismo se puede aplicar para el caso del péndulo, a diferencia del resorte, el sistema no presenta energía potencial elástica, pero al existir variación de altura, existe energía potencial. La energía en un punto arbitrario estará dada por

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgh, \quad (1.1.52)$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgl(1 - \cos(\theta)), \quad (1.1.53)$$

Derivando obtenemos

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + mgl \sin(\theta)\dot{\theta} = 0, \quad (1.1.54)$$

donde se usó que $h = l(1 - \cos(\theta))$. El péndulo por ser un movimiento circular se tienen relaciones entre las variables cinéticas y los cambios en el ángulo $\dot{x} = \dot{\theta}l$ y $\ddot{x} = \ddot{\theta}l$, lo que nos da:

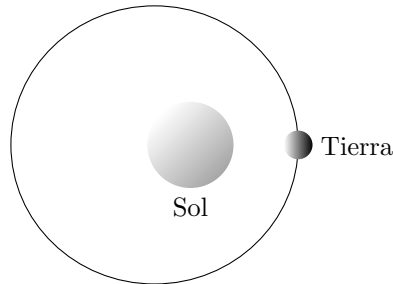
$$\ddot{\theta}\dot{\theta}l^2 + gl \sin(\theta)\dot{\theta} = 0, \quad (1.1.55)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0, \quad (1.1.56)$$

al igual que antes, debido a que $\theta \ll \pi/4 \Rightarrow \sin(\theta) = \theta$,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0. \quad (1.1.57)$$

Ley de Kepler





La Ley de Gravitación general que nos planteó Newton nos dice que la fuerza de atracción entre dos masas es proporcional a las masas en juego M_1 y M_2 y el cuadrado del inverso de las distancias entre los centros de masas d

$$\vec{F} = -\frac{GM_1M_2}{d^2}\hat{r}. \quad (1.1.58)$$

Si la distancia d es mucho mayor que los radios de los planetas, se pueden entonces considerar a las masas como objetos puntuales. La segunda ley de Newton se puede utilizar descomponiendo en el eje X e Y donde el ángulo θ nos da la proyección del objeto con ese plano, es decir, en el eje X

$$F_x \Rightarrow M_{\text{Tierra}}\ddot{x} = -\frac{GM_{\text{Sol}}M_{\text{Tierra}}}{d^2}\sin\theta, \quad (1.1.59)$$

Multiplicando y dividiendo por d

$$M_{\text{Tierra}}\ddot{x} = -\frac{GM_{\text{Sol}}M_{\text{Tierra}}}{d^3}d\sin\theta. \quad (1.1.60)$$

Como $d\sin\theta = x$

$$\ddot{x} + \frac{GM_{\text{Sol}}}{d^3}x = 0, \quad (1.1.61)$$

$$\ddot{x} + \omega^2x = 0. \quad (1.1.62)$$

Lo último usando el hecho que $\omega^2 = \frac{GM_{\text{Sol}}}{d^3}$. Finalmente con un poco de álgebra se obtiene

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{GM_{\text{Sol}}}{d^3} \quad (1.1.63)$$

$$\frac{d^3}{T^2} = \frac{GM_{\text{Sol}}}{4\pi^2} \quad (\text{Ley de Kepler}) \quad (1.1.64)$$

La Ley de Kepler nos dice que cualquier masa que se encuentre girando alrededor del Sol tiene una relación constante entre el cuadrado de su periodo y el cubo de la distancia entre ese objeto al Sol. En otras palabras todos los planetas tienen esta relación. Por ejemplo:

$$\frac{d_{\text{Tierra}}^3}{T_{\text{Tierra}}^2} = \frac{d_{\text{Venus}}^3}{T_{\text{Venus}}^2}, \quad (1.1.65)$$

Hay que mencionar que la ecuación anterior también es válida para cualquier objeto central, es decir no solamente a los planetas girando alrededor del Sol pero también por ejemplo a los satélites girando alrededor de la Tierra, es decir,

$$\frac{d_{\text{satélite}}^3}{T_{\text{satélite}}^2} = \frac{GM_{\text{Tierra}}}{4\pi^2} \quad (1.1.66)$$

Momento de inercia

La inercia es una propiedad de la materia a resistir cualquier cambio a su movimiento. Cuando este trata de giros alrededor de un eje, se desarrolla inercia a la rotación, la que está determinada por su momento de inercia (I). Este está definido por la siguiente ecuación:

$$I = \sum m_i r_i^2, \quad (1.1.67)$$

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV. \quad (1.1.68)$$

La ecuación (1.1.67) corresponde al momento de inercia de una suma de partículas puntuales. El segundo es considerando el objeto como un sistema continuo de masa. Para casos que veremos a lo largo del curso usaremos la siguiente tabla que describe el momento de inercia de distintos cuerpos:

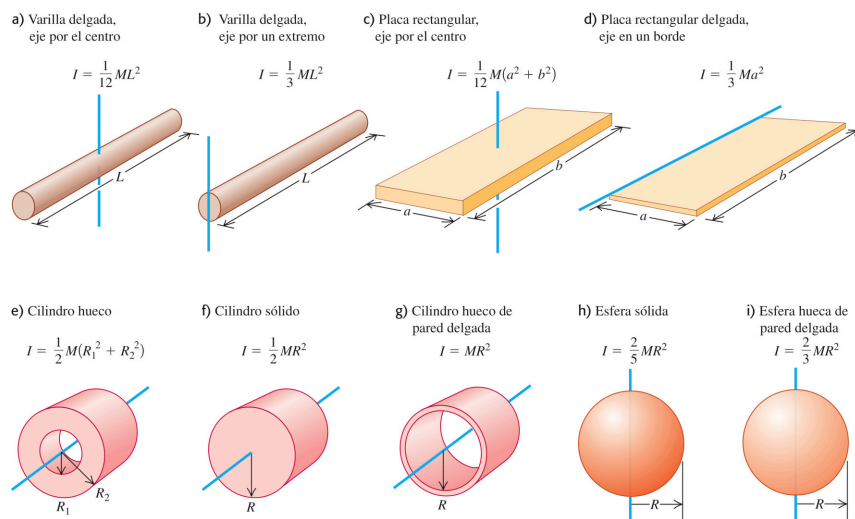
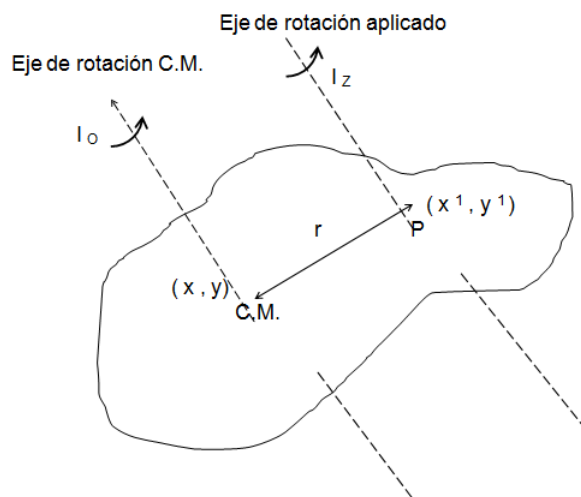


Figura 1.3: Diferentes cuerpos, con sus respectivos momentos de inercia

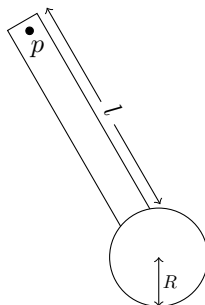
Para casos en que el eje no pase por un extremo o el centro, se utiliza el teorema de Steiner o de los ejes paralelos. En el cual se mueve el momento de inercia desde un eje conocido, los que se encuentran en la tabla anterior, a uno nuevo, que se encuentra a una distancia D del anterior

$$I = I_{CM} + MD^2 \quad (1.1.69)$$



Ilustraremos este teorema con dos ejemplos:

Ejemplo 1.1.3. Se tiene el siguiente sistema compuesto de un cilindro de masa M_c y una varilla de masa M_v , calcular el momento de inercia del sistema:



En este sistema podemos encontrar dos elementos, la varilla y el cilindro, veremos los momentos de inercia de ellos y los sumaremos para obtener el momento del sistema.

■ **Varilla:**

El pivote del sistema se encuentra en un extremo, al ver la tabla en la Figura 1.3, sabemos que el momento de inercia de la varilla es:

$$I_{var} = \frac{1}{3}M_v l^2. \quad (1.1.70)$$

■ **Cilindro:**

El momento de inercia del cilindro sólido, que se encuentra en la Figura 1.3, es:

$$I = \frac{1}{2}M_c R^2, \quad (1.1.71)$$

pero este debe ser corrido hasta el pivote, por ende usamos el teorema de Steiner para obtener el nuevo momento de inercia,

$$I_{cil} = I + M_c l^2, \quad (1.1.72)$$

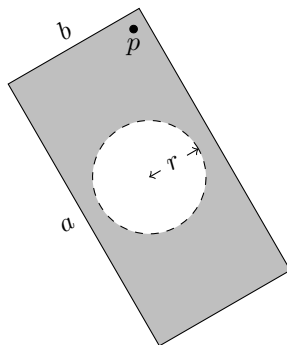
$$I_{cil} = \frac{1}{2} M_c R^2 + M_c (l + R)^2. \quad (1.1.73)$$

Al sumar los momentos de inercia obtenidos anteriormente, se obtiene el momento de inercia del sistema:

$$I_{sist} = I_{var} + I_{cil}, \quad (1.1.74)$$

$$I_{sist} = \frac{1}{3} M_v l^2 + \frac{1}{2} M_c R^2 + M_c (l + R)^2. \quad (1.1.75)$$

Ejemplo 1.1.4. Se tiene el siguiente sistema:



A un rectángulo de un material de masa M , se le retira un cilindro sólido de masa m del centro de este. Calcular el momento de inercia:

Debido a que se retira el cilindro al material, este ya no afecta al momento de inercia, en otras palabras, este debe restarse, entonces el momento de inercia del cuerpo:

$$I_{cm} = I_{rect} - I_{cilindro}, \quad (1.1.76)$$

$$I_{cm} = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) - \frac{1}{2} m r^2, \quad (1.1.77)$$

luego se procede a mover el centro de masa con el teorema de Steiner:

$$I = I_{cm} + (M - m) \frac{(a^2 + b^2)}{4}. \quad (1.1.78)$$

Péndulo Físico

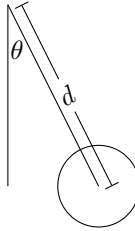
Un péndulo físico se le denomina a aquel que sus volúmenes tienen que ser tomados en consideración, por lo que un tratamiento con momentos de inercia es

obligatorio. Tenemos entonces un cuerpo rígido que es suspendido de un punto que no es su centro de masa. Este cuerpo realiza un movimiento oscilatorio bajo la acción de su propio peso. Vemos que si el cuerpo estuviese afirmado en su centro de masa no oscilaría.

Recordatorio. Algo importante para realizar este tipo de ejercicios, es tener en mente "la segunda ley de Newton para las rotaciones", que estipula:

$$\tau = I\ddot{\theta} \quad (1.1.79)$$

Caso General 4. Se tiene el siguiente péndulo:



El centro de masa del cuerpo se encuentra a una distancia d del pivote, la sumatoria de torques de este será

$$\Sigma\tau = -Mgd \sin \theta, \quad (1.1.80)$$

$$I\ddot{\theta} = -Mgd \sin \theta, \quad (1.1.81)$$

luego

$$I\ddot{\theta} + Mgd \sin \theta = 0, \quad (1.1.82)$$

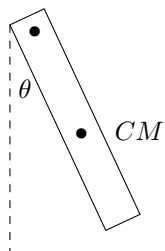
$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{Mgd}{I} \sin \theta = 0. \quad (1.1.83)$$

El momento de inercia del péndulo se calcula usando el teorema de Steiner

$$I = I_{cm} + Md^2 \quad (1.1.84)$$

Es fácil ver que podemos definir la frecuencia angular de la misma forma que en el péndulo simple $\omega^2 = Mgd/(I_{cm} + Md^2)$, además debido a que $\omega = 2\pi/T$, podemos obtener el periodo del péndulo:

$$T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{I_{cm} + Md^2}{Mgd}} \quad (1.1.85)$$



Ejemplo 1.1.5. Tenemos un péndulo formado de un cuerpo rígido de largo l , que se hace oscilar

$$-Mg \frac{l}{2} \sin \theta = \Sigma \tau, \quad (1.1.86)$$

$$I\ddot{\theta} + Mg \frac{l}{2} \sin \theta = 0, \quad (1.1.87)$$

como se ha visto con anterioridad, debido a que las oscilaciones son muy pequeñas, $\sin \theta$ se comporta igual a θ .

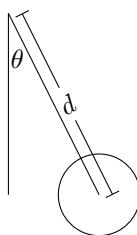
$$I\ddot{\theta} + Mg \frac{l}{2} \theta = 0, \quad (1.1.88)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgl}{2I} \theta = 0, \quad (1.1.89)$$

donde se puede definir $\omega^2 = Mgl/2I$.

Péndulo Físico por medio de Energía

Caso General 5. Para casos de péndulo físico, como el siguiente:



se puede usar la conservación de energía para poder obtener la ecuación de posición utilizando un punto arbitrario. Tomando el pivote como $h = 0$, la energía del sistema es igual a:

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 - Mgh, \quad (1.1.90)$$

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 - Mgl \cos \theta, \quad (1.1.91)$$

procederemos a derivar la energía con respecto al tiempo, ya que sabemos que la energía se conserva ($dE/dt = 0$):

$$\frac{dE}{dt} = I\alpha\omega - Mgd\sin(\theta)\omega, \quad (1.1.92)$$

$$0 = I\alpha\omega + Mgd\sin(\theta)\omega, \quad (1.1.93)$$

$$0 = I\alpha + Mgd\sin\theta, \quad (1.1.94)$$

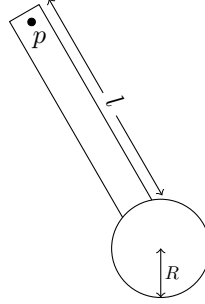
como θ es cercano a 0, $\sin\theta \approx \theta$,

$$I\ddot{\theta} + Mgd\theta = 0, \quad (1.1.95)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{Mgd}{I}\theta = 0. \quad (1.1.96)$$

Pendulo Físico Compuesto

Para el caso en que el péndulo físico esté compuesto por más de un cuerpo, como por ejemplo la figura siguiente, se puede proceder de dos maneras.



Si se conoce el lugar donde esta el centro de masa, el torque puede ser calculado de la siguiente manera

$$\tau = r_{cm}F_{cm}\sin(\theta) = I\ddot{\theta}. \quad (1.1.97)$$

En donde I es el momento de inercia del cuerpo completo. Por otro lado, si se quiere trabajo con los cuerpos por separado se puede efectuar torque en los momentos de inercia de cada cuerpo que participa

$$\tau = \sum_i r_i F_i \sin(\theta_i) = I\ddot{\theta}, \quad (1.1.98)$$

siendo I el mismo momento de inercia. Acá r_i es la distancia del eje a donde la fuerza F_i está siendo aplicada. Como en este caso $F_{cm} = Mg$ y $F_i = M_i g$, se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\ddot{\theta} + \frac{r_{cm}Mg}{I}\sin(\theta) = 0, \quad (1.1.99)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\sum_i r_i M_i g}{I}\sin(\theta) = 0. \quad (1.1.100)$$



Estas dos ecuaciones son idénticas al considerar que la definición de centro de masa está dado por

$$r_{cm} = \frac{\sum r_i M_i}{M}. \quad (1.1.101)$$

De acá se puede extraer las frecuencias angulares del sistema

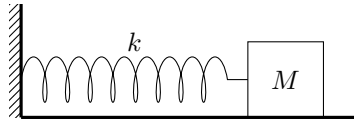
$$\omega = \sqrt{\frac{r_{cm} M g}{I}} = \sqrt{\frac{\sum r_i M_i g}{I}}. \quad (1.1.102)$$

1.2. Movimiento Armónico Amortiguado (MAA)

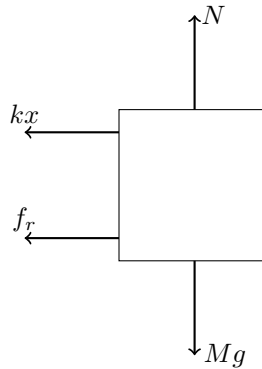
En los casos anteriores, para los MAS se asume que no existe una fuerza externa que genera pérdida de energía, como por ejemplo la fuerza de roce o fricción con algún medio. En el caso de que exista algún tipo de pérdida por medio de la fricción con el ambiente, es necesario conocer como es la fuerza de fricción para poder tratar este sistema de la misma manera que se ha hecho con anterioridad. Podemos esperar que la fricción impedirá el libre movimiento de la masa, con una fuerza que se opone al movimiento, y por lo tanto aparecerá con un signo negativo en nuestras ecuaciones.

Recordatorio. La fuerza de fricción que usaremos en este curso se define como $f_r = -b\dot{x}$, con b igual a la constante de rozamiento, esto es cierto para velocidades pequeñas. Para velocidades muy altas, puede emplearse una fuerza de fricción $f_r = -b\dot{x}^2$, pero esto va sobre lo que queremos aprender de este curso.

Caso General 6. El caso más sencillo a considerar es el de una masa sujeta a un resorte con fricción, como se muestra en la figura a continuación



El diagrama de cuerpo libre es muy parecido al anterior, mostrado en el figura 6, solamente que se tiene que considerar una fuerza extra f_r , es decir



Entonces, la sumatoria de fuerzas en el eje horizontal queda

$$\Sigma F = -kx - b\dot{x}, \quad (1.2.1)$$

$$\text{ó } M\ddot{x} = -kx - b\dot{x}, \quad (1.2.2)$$

La ecuación maestra que describe este MAS con fricción será

$$\ddot{x} + \frac{b}{M}\dot{x} + \frac{k}{M}x = 0, \quad (1.2.3)$$



esta sigue siendo una ecuación diferencial homogénea de segundo orden, por lo cual la solución a esta ecuación diferencial se encuentra usando la transformación de Laplace. Para esto se requiere de la resolución a las raíces del polinomio característico al cambio de cada derivada por una variable λ . Luego la solución para una ecuación homogénea de grado n con λ_n raíces estará dada por

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t} = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}, \quad (1.2.4)$$

donde C_i son constantes que pueden ser imaginarias. En nuestro caso tendremos dos soluciones para λ dadas por la ecuación característica

$$\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0, \quad (1.2.5)$$

con soluciones

$$\lambda = \frac{-\frac{b}{M} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{M}\right)^2 - 4\frac{k}{M}}}{2}, \quad (1.2.6)$$

$$\lambda = -\frac{b}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2M}\right)^2 - \frac{k}{M}}, \quad (1.2.7)$$

sea $\gamma = b/2M$ y $\omega_0 = \sqrt{k/M}$, la ecuación anterior queda de la siguiente forma:

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad (1.2.8)$$

Las nuevas constantes tienen un significado físico, la constante ω_0 es la frecuencia natural del sistema, es decir, la frecuencia con la cual el sistema oscilaría si no tuviese el factor de fricción, al igual que en el movimiento MAS normal. La constante γ se llama amortiguamiento, y tiene que ver con la razón de la pérdida de energía del sistema por medio de la fricción del sistema. Ahora, la solución de la ecuación (1.2.3) es la siguiente:

$$x(t) = C_1 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}, \quad (1.2.9)$$

$$\text{ó } x(t) = e^{-\gamma t} \left(C_1 e^{+\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t} \right). \quad (1.2.10)$$

Hay que notar que el caso general tiene varias soluciones para posibles valores de $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

1. $\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$
2. $\gamma^2 - \omega_0^2 = 0$
3. $\gamma^2 - \omega_0^2 > 0$

La solución varía según el caso en que nos encontramos, las cuales veremos por caso:

1. debido a que $\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$, vamos a reescribir el exponente de la siguiente manera

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad (1.2.11)$$

y usando el hecho que $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ podemos escribir la ecuación (1.2.10)

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(C'_1 \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t) + C'_2 \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t) \right), \quad (1.2.12)$$

donde C'_1 y C'_2 son distintas a las constantes anteriores. Vamos a definir de ahora en adelante $\omega' = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$, donde $\omega' > 0$. La ecuación (1.2.12) queda

$$x(t) = C'_1 e^{-\gamma t} \cos(\omega' t) + C'_2 e^{-\gamma t} \sin(\omega' t), \quad (1.2.13)$$

$$\text{ó } x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \phi). \quad (1.2.14)$$

El último paso se hizo utilizando trigonometría básica en donde las constantes C'_1 y C'_2 fueron reemplazadas por A y ϕ , las cuales están fijadas por medio de las condiciones iniciales del sistema. Para el caso general en donde $x(0) = x_0$ y $v(0) = v_0$, las ecuaciones a resolver serán

$$x_0 = A \cos \phi, \quad (1.2.15)$$

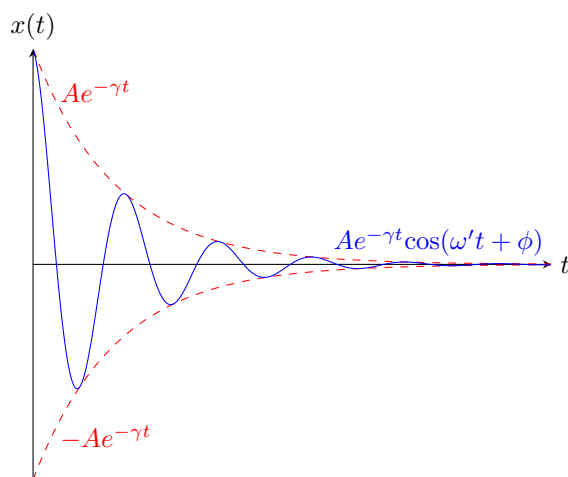
$$v_0 = A(-\gamma \cos \phi - \omega' \sin \phi). \quad (1.2.16)$$

Lo que nos da para este caso

$$\phi = -\arctan \left(\frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega' x_0} \right), \quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + \gamma x_0)^2}{\omega'^2}}. \quad (1.2.17)$$

Hay que tener cuidado este resultado en los casos en que $\omega' = 0$ o $x_0 = 0$.

La solución (1.2.14) tiene una interpretación física sencilla, se puede ver que la amplitud ahora ya no es simplemente A si no que ahora es $A e^{-\gamma t}$ por lo que va disminuyendo a medida que el tiempo transcurre gracias a la constante γ . esto hace que el coseno oscile con amplitud cada vez menor y con una frecuencia distinta a ω_0 dada por ω' . Mientras más pequeño sea el valor de γ , es decir, mientras menor sea la pérdida por fricción, el amortiguamiento va a ser muy pequeño y la frecuencia con la que oscila el sistema tenderá a ω_0 . Para entender esto, podemos graficar la ecuación anterior para valores arbitrarios de las constantes del sistema

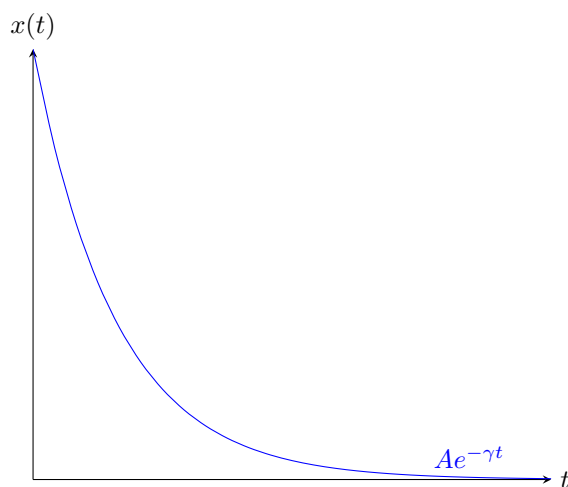


Al graficar la ecuación anterior se puede ver como la amplitud máxima está limitada por $Ae^{-\gamma t}$, y está siempre disminuyendo, hasta finalmente llegar a cero. Si la constante γ crece el decaimiento de la curva va a ser mayor, el caso límite lo discutimos en el punto 2.

2. Debido a que $\gamma^2 - \omega_0^2 = 0$, la ecuación 1.2.10 queda de la siguiente forma:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}, \quad (1.2.18)$$

al graficar la ecuación anterior veremos algo esencial de este tipo de amortiguación.



Como se ve en el gráfico anterior, acá no hay movimiento oscilatorio, aquí el



péndulo vuelve a su punto de equilibrio, sin oscilar, como ocurre en el caso anterior. Este caso se llama **Movimiento Críticamente Amortiguado**

3. Debido a que $\gamma^2 - \omega_0^2 > 0$, la ecuación (1.2.10) no tiene un límite definido cuando el tiempo tiende a infinito, por lo que no es posible una interpretación matemática. Este sistema, al igual que el anterior no oscila, pero en este caso puede que no llegue al punto de equilibrio, en otras palabras, puede que el péndulo se detenga antes del punto de equilibrio ya que la fricción es muy grande.

Este movimiento se conoce como **Movimiento Sobreamortiguado**

Caso General 7. Supongamos que la ecuación (1.2.3) está igualada a una constante C , tomando en consideración esto, la ecuación queda de la siguiente forma:

$$\ddot{x} + \frac{b}{M}\dot{x} + \frac{k}{M}x = C, \quad (1.2.19)$$

La solución de esta ecuación se puede escribir:

$$x(t) = x_p + x_h(t), \quad (1.2.20)$$

$$\text{con } x_p = \frac{C}{\omega_0^2} \text{ y } x_h(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \phi'), \quad (1.2.21)$$

se puede ver que la solución dada por la ecuación (1.2.14) equivale a la solución de este sistema cuando la constante C es igual a cero.

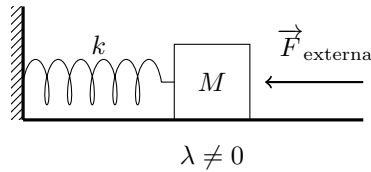
1.3. Movimiento Armónico Forzado

Una oscilación amortiguada, de la forma $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = 0$, terminará deteniéndose después de un tiempo que dependerá de la constante de amortiguamiento γ . Una manera de mantener el sistema oscilando es aplicando una fuerza externa. Por ejemplo, si la fuerza externa aplicada es constante se llegará a los casos generales en donde la ecuación diferencial es igual a una constante, por lo que esta fuerza no mantendrá al sistema oscilando. Una manera de mantener a la masa oscilando es la aplicación de una fuerza oscilante, es decir

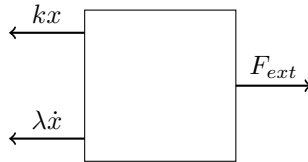
$$F_{ext}(t) = F_0 \cos(\bar{\omega}t) \quad (1.3.1)$$

donde $\bar{\omega}$ es la frecuencia de la fuerza externa sobre el sistema. Un ejemplo de este caso sería un ventilador que se mueve alrededor del un péndulo, la frecuencia $\bar{\omega}$ será la frecuencia con que gira el ventilador alrededor del péndulo.

Caso General 8. Se tiene el siguiente sistema:



Este sistema es parecido al que ya hemos visto con anterioridad, específicamente en el caso de MAA, pero ahora hay una fuerza externa que actúa sobre el cuerpo. El DCL del cuerpo es el siguiente:



La ecuación diferencial a resolver es la siguiente:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{F_0}{M} \cos(\bar{\omega}t), \quad (1.3.2)$$

La solución de esta ecuación, debido a que el lado derecho depende del tiempo, tiene dos componentes; una es la solución homogénea y otra es la solución particular.

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t), \quad (1.3.3)$$

la solución homogénea ya la conocemos, siendo esta la solución del MAA, entonces la ecuación anterior queda de la forma:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \phi) + x_p(t), \quad (1.3.4)$$



Para calcular la solución particular a este problema se puede notar que para un tiempo muy largo la solución homogénea tiende a cero, pero la fuerza se mantendrá forzando al sistema con frecuencia $\bar{\omega}$. Por lo tanto, el sistema va a tender a oscilar con la misma frecuencia de la fuerza externa a tiempos grandes. Es decir la solución tiene que tener la siguiente forma

$$x_p(t) = B \cos(\bar{\omega}t + \phi'), \quad (1.3.5)$$

donde B y ϕ' son constantes que deben ser encontradas al reintroducir esta solución a la ecuación (1.3.2), al efectuar esta operación se obtiene:

$$\begin{aligned} -B\bar{\omega}^2 \cos(\bar{\omega}t + \phi') - 2B\gamma\bar{\omega} \sin(\bar{\omega}t + \phi') \\ + B\omega_0^2 \cos(\bar{\omega}t + \phi') = \frac{F_0}{M} \cos(\bar{\omega}t), \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

al usar identidades trigonométricas, la ecuación anterior queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} -B\bar{\omega}^2 [\cos(\bar{\omega}t) \cos(\phi') - \sin(\bar{\omega}t) \sin(\phi')] \\ - 2B\gamma\bar{\omega} [\sin(\bar{\omega}t) \cos(\phi') + \cos(\bar{\omega}t) \sin(\phi')] \\ + B\omega_0^2 [\cos(\bar{\omega}t) \cos(\phi') - \sin(\bar{\omega}t) \sin(\phi')] = \frac{F_0}{M} \cos(\bar{\omega}t), \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

$$\begin{aligned} B \sin(\bar{\omega}t) [\bar{\omega}^2 \sin(\phi') - 2\gamma\bar{\omega} \cos(\phi') - \omega_0^2 \sin(\phi')] \\ + \cos(\bar{\omega}t) \left[-B\bar{\omega}^2 \cos(\phi') - 2B\gamma\bar{\omega} \sin(\phi') + B\omega_0^2 \cos(\phi') - \frac{F_0}{M} \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Asumiendo que los elementos dentro del paréntesis que acompañan a $\sin(\bar{\omega}t)$ son igual a cero, tenemos:

$$B\omega^2 \sin(\phi') - 2B\gamma\bar{\omega} \cos(\phi') - B\omega_0^2 \sin(\phi') = 0, \quad (1.3.9)$$

$$\tan \phi' = \frac{-2\gamma\bar{\omega}}{\omega_0^2 - \bar{\omega}^2}. \quad (1.3.10)$$

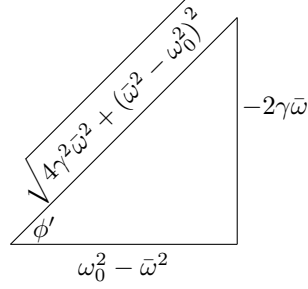
Haciendo lo mismo para el $\cos(\bar{\omega}t)$:

$$-B\bar{\omega}^2 \cos(\phi') - 2B\gamma\bar{\omega} \sin(\phi') + B\omega_0^2 \cos(\phi') - \frac{F_0}{M} = 0. \quad (1.3.11)$$

Esto nos da para la constante B

$$B = \frac{F_0/M}{\cos(\phi') (\omega_0^2 - \bar{\omega}^2) - 2\gamma\bar{\omega} \sin(\phi')}. \quad (1.3.12)$$

Con lo obtenido en la ecuación (1.3.10), podemos formar el siguiente triángulo:



del cual podemos decir que:

$$\sin \phi' = \frac{-2\gamma\bar{\omega}}{\sqrt{4\gamma^2\bar{\omega}^2 + (\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2}}, \quad (1.3.13)$$

$$\cos \phi' = \frac{\omega_0^2 - \bar{\omega}^2}{\sqrt{4\gamma^2\bar{\omega}^2 + (\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2}}, \quad (1.3.14)$$

$$\tan \phi' = \frac{-2\gamma\bar{\omega}}{\omega_0^2 - \bar{\omega}^2}. \quad (1.3.15)$$

Al reemplazar los valores obtenidos anteriormente en la ecuación (1.3.12), tenemos que:

$$B = \frac{F_0/M}{\frac{(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2}{\sqrt{4\gamma^2\bar{\omega}^2 + (\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2}} + \frac{4\gamma^2\bar{\omega}^2}{\sqrt{4\gamma^2\bar{\omega}^2 + (\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2}}}, \quad (1.3.16)$$

$$B = \frac{F_0/M}{\frac{(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\bar{\omega}^2}{\sqrt{4\gamma^2\bar{\omega}^2 + (\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2}}}, \quad (1.3.17)$$

$$B = \frac{F_0/M}{\sqrt{4\gamma^2\bar{\omega}^2 + (\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2}}. \quad (1.3.18)$$

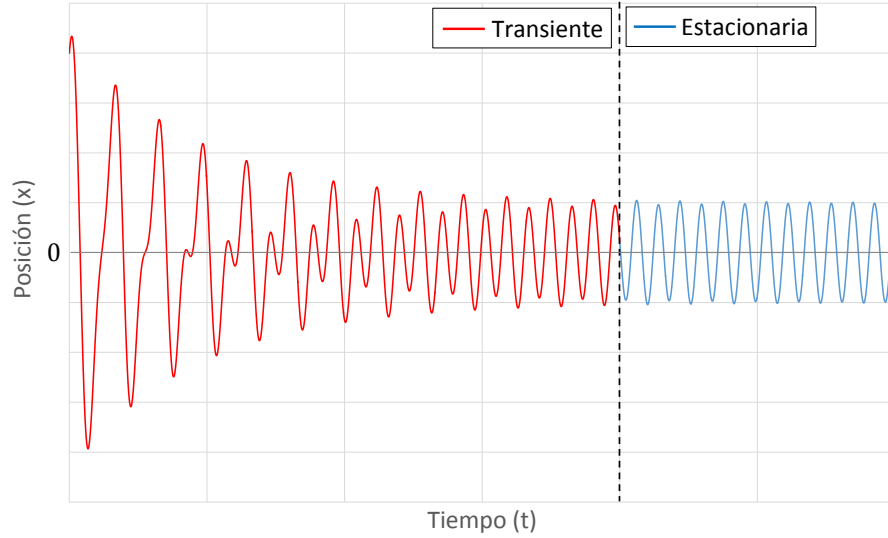
Entonces la ecuación de movimiento queda de la siguiente forma:

$$x_p(t) = \frac{F_0/M}{\sqrt{4\gamma^2\bar{\omega}^2 + (\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2}} \cos(\bar{\omega}t + \phi'). \quad (1.3.19)$$

La solución final será la suma de la solución homogénea y la particular, es decir

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \phi) + \frac{F_0/M}{\sqrt{4\gamma^2\bar{\omega}^2 + (\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2}} \cos(\bar{\omega}t + \phi'). \quad (1.3.20)$$

Movimiento Forzado



Una característica muy importante de la solución particular al movimiento forzado es el hecho que para ciertos valores de $\bar{\omega}$ la amplitud B experimenta un máximo, a este máximo se le denomina frecuencia de resonancia, el cual cuando el sistema es subamortiguado, es decir, para pequeños valores de γ puede ser muy pronunciado. Para calcular este máximo se deriva la amplitud con respecto a la frecuencia

$$\frac{dB}{d\bar{\omega}} = 0. \quad (1.3.21)$$

Esto nos da una frecuencia de resonancia de

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}, \quad (1.3.22)$$

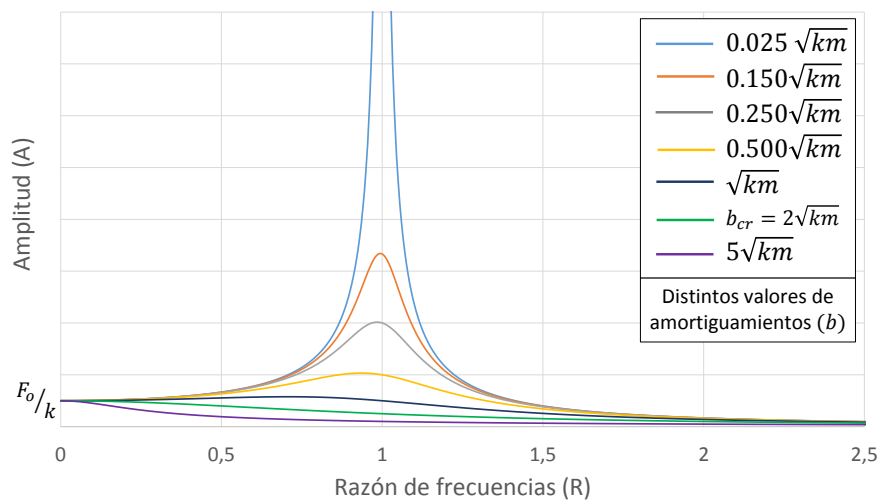
Muy similar a la frecuencia de resonancia del sistema con fricción $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. El ancho de la curva Δ , el cual es calculado mediante la diferencia de polos de aquella y nos dice cual es el ancho de esa curva en la mitad de su alto, va a depender de la constante de fricción:

$$\Delta \sim \gamma. \quad (1.3.23)$$

Es decir, que cuando $\gamma \rightarrow 0$ la frecuencia de resonancia será $\omega_R = \omega_0$, el ancho será $\Delta \rightarrow 0$ y la amplitud de oscilación $B \rightarrow \infty$. Gráficamente esto se puede ver en el gráfico siguiente:

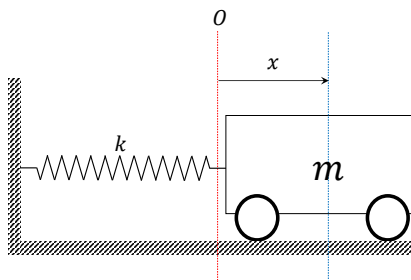


Amplitud de un oscilador sujeto a una excitación forzada



1.4. Ejercicios

Ejercicio 1. Considere el sistema de la siguiente figura:



cuyo carro presenta una masa de $m = 5$ [kg] y un resorte de rigidez $k = 2$ [kN/m]. El movimiento del sistema se inicia a causa de que el carro se encuentra inicialmente a $x_0 = 3$ [cm] de su posición de equilibrio y se le impone una velocidad inicial $v_0 = 0,5$ [m/s]. Determine la ecuación del movimiento del sistema y su solución.

Solución:

- Del DCL del sistema y de la Segunda Ley de Newton aplicada a fuerzas se obtiene, considerando signo positivo el sentido que presenta el grado de libertad x :

$$\sum F_x = -F_k = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad -kx = m\ddot{x}$$

Entonces la ecuación del movimiento es:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Correspondiente al MAS.

Reemplazando los valores dados en el enunciado en la Ecuación del Movimiento obtenida se tiene:

$$\ddot{x} + \frac{2000[\text{N/m}]}{5[\text{kg}]}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + 400[\text{rad/s}]^2 \cdot x = 0$$

La solución de dicha ecuación de movimiento está dada por la ecuación $x(t) = A \sin(w_n t + \phi)$ en donde la frecuencia angular natural del sistema es $w_n = \sqrt{400}$ [rad/s] = 20 [rad/s], obteniéndose así:

$$x(t) = A \sin(20[\text{rad/t}]t + \phi)$$

Se imponen las condiciones iniciales x_0 y v_0 para poder encontrar los valores de la amplitud A y el ángulo de desfase ϕ .



$$x_0 = 0,03[\text{m}] = x(0) = A \sin(\phi) \implies A = \frac{0,03[\text{m}]}{\sin(\phi)} \quad (1.4.1)$$

Por otro lado la velocidad del carro en el tiempo es:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = w_n A \cos(w_n t + \phi)$$

Por lo que la velocidad inicial del sistema queda expresada como:

$$v_0 = 0,5[\text{m/s}] = v(0) = 20[\text{rad/s}] A \cos(\phi) \implies A = \frac{0,025[\text{m}]}{\cos(\phi)} \quad (1.4.2)$$

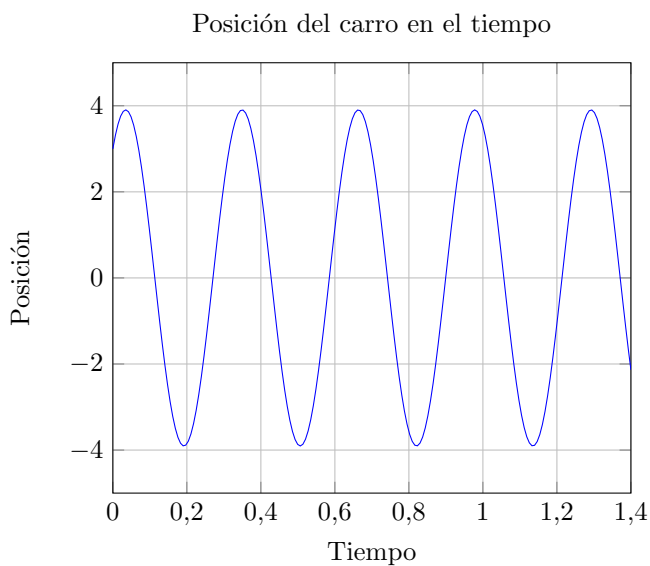
Igualando las ecuaciones (1.4.1) y (1.4.2) se llega a:

$$\tan(\phi) = 1,2 \implies \phi = 0,876[\text{rad}]$$

Luego reemplazando en la ecuación (1.4.1) se obtiene la amplitud A del movimiento.

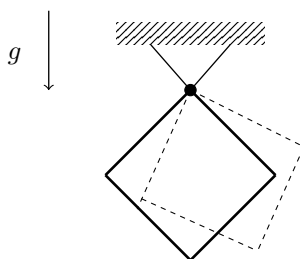
$$A = \frac{0,03[\text{m}]}{\sin(0,876[\text{rad}])} = 0,03905[\text{rad}]$$

A continuación se muestra el gráfico de posición del carrito con respecto al tiempo.



Se puede apreciar en el gráfico que el sistema no empieza desde la posición más estirada, alejándose el carrito en las primeras centésimas de segundo de la posición de equilibrio del sistema hasta alcanzar su amplitud máxima. Esto se debe a que existe una velocidad inicial no nula.

Ejercicio 2. La siguiente figura muestra una placa cuadrada metálica homogénea, de lado a y masa m , la cual oscila alrededor de un eje perpendicular a su superficie ubicado en uno de sus extremos.



Suponga que la placa puede realizar oscilaciones pequeñas en torno al punto O y que el momento de inercia de la placa respecto de su centro de masa es $I_{CM} = ma^2/6$.

- Obtenga la ecuación del movimiento.
- Encuentre el periodo de oscilación.
- Determine la frecuencia y el periodo si el lado de la placa es a .
- Considerando que el centro de masa (CM) de la placa en $t = 0$ forma un ángulo de $\pi/10$ con respecto a la vertical y que la velocidad en esa posición es cero, encuentre la velocidad y la aceleración del CM de la placa en función del tiempo. (Considere $a = 10$ [cm])

Solución:

- El sistema se modela como péndulo físico. A continuación se muestra el *DCL*, con su respectivo grado de libertad (GL):

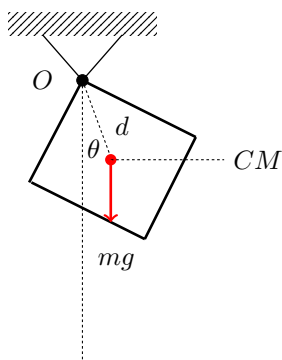


Figura 1.4: DCL de la placa cuadrada pivoteada en el punto O , no se muestran las reacciones en el punto O .

Donde:

- θ : (GL) Ángulo de giro medido desde un eje vertical que pasa por O .
- CM : Posición del centro de masa.
- mg : Peso de la placa.
- d : Distancia entre el punto O y el Centro de Masa.

Del DCL y de la Segunda Ley de Newton aplicada para el torque con respecto al punto O se obtiene, considerando positivo el mismo sentido en que crece el grado de libertad θ (se recomienda seguir esta convención con el fin de que no existan problemas de confusión de signos):

$$\circlearrowleft \sum \tau_O = -mg \cdot d \cdot \sin(\theta) = I\ddot{\theta}$$

Ordenando la ecuación anterior se obtiene la expresión:

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I}\theta = 0 \quad (1.4.3)$$

donde la distancia d corresponde a la mitad de la diagonal de la placa cuadrada, es decir $d = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Por otro lado, la inercia de rotación de la placa I que aparece en la ecuación de movimiento debe ser calculada con respecto al eje de rotación que pasa perpendicularmente a la placa en O . Generalmente se conoce las inercias de ciertas figuras con respecto a un eje de rotación que pasa por su CM, por lo que para conocer la inercia I se debe aplicar el Teorema de los Ejes Paralelos.

El momento de inercia I_{CM} para una placa cuadrada respecto a un eje perpendicular es:

$$I_{CM} = \frac{1}{6}ma^2$$



Entonces la inercia con respecto al punto O aplicando Teorema de Steiner es:

$$I = I_O = \frac{1}{6}ma^2 + m \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{2}{3}ma^2$$

Definidas la inercia I y la distancia d , se reemplaza en la ecuación (1.4.3), obteniéndose:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} + \left(mg \cdot \frac{3a}{2ma^2\sqrt{2}}\theta \right) &= 0 \\ \ddot{\theta} + \left(\frac{3g}{2a\sqrt{2}}\theta \right) &= 0\end{aligned}\tag{1.4.4}$$

- b) A partir de la ecuación del movimiento (1.4.4) se obtiene la frecuencia angular de la placa:

$$\omega^2 = \frac{3g}{2a\sqrt{2}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{2a\sqrt{2}}}$$

Y la frecuencia angular se puede expresar en función del periodo T como:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2a\sqrt{2}}{3g}} = \pi\sqrt{\frac{8a\sqrt{2}}{3g}}$$

- c) Con $a = 10$ [cm] y considerando la aceleración de gravedad $g = 9,8$ [m/s²] se obtiene el periodo:

$$T = \pi\sqrt{\frac{8 \cdot 0,1\sqrt{2}}{3 \cdot 9,8}} = 0,616 \text{ [s]}$$

Luego la frecuencia f de la placa es:

$$f = \frac{1}{T} = 1,62 \text{ [Hz]}$$

- d) Como la placa se encuentra pivoteada en torno al punto O , se tiene que la velocidad y la aceleración lineal del CM corresponderá a la velocidad y aceleración tangencial a la trayectoria circular descrita por el CM (perpendicular al radio d que describe la trayectoria):

$$v_{CM}(t) = d \cdot \dot{\theta} \quad \wedge \quad a_{CM}(t) = d \cdot \ddot{\theta}(t)$$



Por lo que se debe resolver la ecuación (1.4.4) que corresponde a la del MAS.

Tanto la amplitud A y el ángulo de desfase ϕ se obtienen de las condiciones iniciales del problema. Se sabe que en $t = 0$, el CM se encuentra formado un ángulo de $\pi/10$ con respecto al eje vertical que pasa por O y que se encuentra en reposo, por lo que:

$$\begin{aligned}\theta(0) &= \frac{\pi}{10} \\ \dot{\theta}(0) &= 0\end{aligned}$$

Por otro lado la velocidad angular $\dot{\theta}$ está dada por:

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi)$$

Entonces igualando las ecuaciones de posición y velocidad evaluadas en $t = 0$ con las condiciones iniciales respectivamente se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}A \sin(\phi) &= \frac{\pi}{10} \\ A\omega \cos(\phi) &= 0\end{aligned}$$

De la segunda ecuación del sistema se obtiene el valor del ángulo de desfase ϕ

$$A\omega \cos(\phi) = 0 \implies \cos(\phi) = 0 \implies \phi = \frac{\pi}{2}$$

Y reemplazando el valor de ϕ encontrado en la primera ecuación del sistema se obtiene el valor de la amplitud A .

$$A \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{10} \implies A = \frac{\pi}{10}$$

Con $a = 10[\text{cm}]$ y la aceleración de gravedad $g = 9,8 [\text{m/s}^2]$ se tiene que la frecuencia angular ω es:

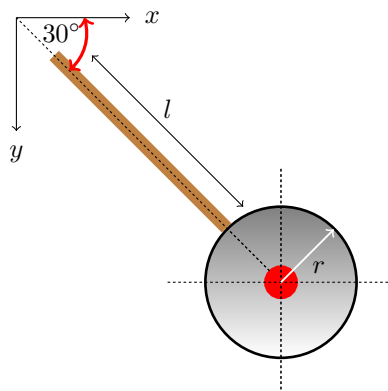
$$\omega = \sqrt{\frac{3 \cdot 9,8}{2 \cdot 0,1\sqrt{2}}} = 10,20[\text{rad/s}]$$

Finalmente reemplazando todos los valores encontrados en la ecuación ($\theta(t) = A \sin(\omega t + \phi)$), se tiene que la posición del CM en el tiempo es:

$$\theta(t) = \frac{\pi}{10} \sin\left(10,20 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \vee \theta(t) = \frac{\pi}{10} \cos(10,20t)$$

Observe que, para este caso, la amplitud A puede obtenerse sin necesidad de realizar un análisis matemático. En vista de que la amplitud inicial es de $\pi/10$ y no existen fuerzas externas y el sistema comienza del reposo, el CM de la placa no podrá superar dicho ángulo por lo que la amplitud del movimiento será de $A = \pi/10$, por otro lado como el movimiento se inicia a partir del reposo y con una amplitud dada se puede deducir que la función que describe el movimiento es del tipo cosenoidal y que no presenta ángulo de desfase.

Ejercicio 3. Determine el centro de masas del sistema que se presenta en la figura, conformados por una barra de longitud $l = 100$ [cm], un disco de radio $r = 5$ [cm] y una masa puntual en el centro del disco de masa $m_p = 2$ [kg]. Considere que el disco y la barra están conformados por un mismo material cuya densidad superficial es de $\lambda = 200$ [kg/m²] (considere un espesor de la barra igual a 5 [mm] y el sistema de coordenadas que aparece en la figura).



Solución:

Primero se deben calcular las masas de la barra (m_b) y del disco (m_d). Como se conoce la densidad superficial del material que conforma el disco y la barra, se calcula su área por separado:

$$\begin{aligned}\text{Área barra } (A_b) &= 100 \text{ [cm]} \cdot 0,5 \text{ [cm]} = 50 \text{ [cm}^2] = 0,05 \text{ [m}^2] \\ \text{Área disco } (A_d) &= \pi \cdot (5 \text{ [cm]})^2 = 79 \text{ [cm}^2] = 0,0079 \text{ [m}^2]\end{aligned}$$

Entonces la masa tanto del disco (m_d) como la de la barra (m_b) son respectivamente:

$$\begin{aligned}m_d &= 200 \text{ [kg/m}^2] \cdot 0,0079 \text{ [m}^2] = 1,58 \text{ [kg]} \\ m_b &= 200 \text{ [kg/m}^2] \cdot 0,0050 \text{ [m}^2] = 1,00 \text{ [kg]}\end{aligned}$$



Las masas m_d , m_b y la masa puntual m_p , se ubican en las siguientes coordenadas cartesianas:

$$\vec{X}_d = ((L+r) \cdot \cos(30^\circ), (L+r) \cdot \sin(30^\circ)) = (90,93, 52,50)[\text{cm}]$$

$$\vec{X}_b = ((L/2) \cdot \cos(30^\circ), (L/2) \cdot \sin(30^\circ)) = (43,30, 25,00)[\text{cm}]$$

$$\vec{X}_p = ((L+r) \cdot \cos(30^\circ), (L+r) \cdot \sin(30^\circ)) = (90,93, 52,50)[\text{cm}]$$

Por lo tanto, la posición del centro de masas del sistema es: *Coordenada* X_{CM} :

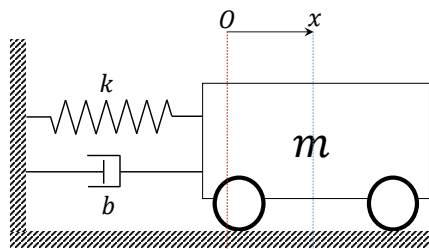
$$\begin{aligned} X_{\text{CM}} &= \frac{m_d \cdot x_d + m_b \cdot x_b + m_p \cdot x_p}{m_d + m_b + m_p} \\ &= \frac{(1,58 \cdot 90,93 + 1,00 \cdot 43,30 + 2,00 \cdot 90,93)[\text{kg} \cdot \text{cm}]}{4,58[\text{kg}]} \\ X_{\text{CM}} &= 80,53[\text{cm}] \end{aligned}$$

Coordenada Y_{CM} :

$$\begin{aligned} Y_{\text{CM}} &= \frac{m_d \cdot y_d + m_b \cdot y_b + m_p \cdot y_p}{m_d + m_b + m_p} \\ &= \frac{(1,58 \cdot 52,50 + 1,00 \cdot 25,00 + 2,00 \cdot 52,50)[\text{kg} \cdot \text{cm}]}{4,58[\text{kg}]} \\ Y_{\text{CM}} &= 46,50[\text{cm}] \end{aligned}$$

Donde X_{CM} e Y_{CM} corresponden a las coordenadas x e y del eje cartesiano señalizado en la figura.

Ejercicio 4. Considere el sistema de la figura de abajo, cuya masa es de $m = 10$ [kg] y rigidez $k = 10$ [N/m], además en $t = 0$ la masa se libera del reposo desde la posición $x = 0,2$ [m]. Calcule la ecuación de movimiento, así como un gráfico representativo y analice físicamente lo obtenido para cada una de las siguientes constantes de amortiguamiento:



- a) $b = 1 \text{ [N}\cdot\text{s/m]}$
- b) $b = 20 \text{ [N}\cdot\text{s/m]}$
- c) $b = 40 \text{ [N}\cdot\text{s/m]}$

Solución:

Se procede a realizar el DCL del bloque de masa m (puesto a que solo existe desplazamiento en el eje x solo se dibujarán las fuerzas que estén en esta dirección o algunas de sus componentes lo estén):

Donde:

F_k : Fuerza del resorte ($F_k = kx$)

F_a : Fuerza de amortiguamiento ($F_a = b\dot{x}$)

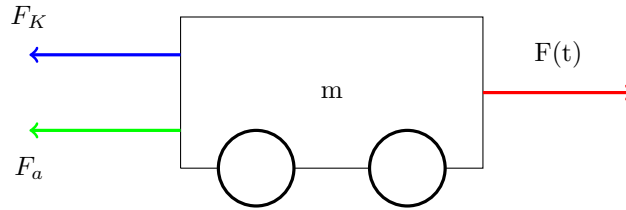


Figura 1.5: DCL del sistema masa-resorte-amortiguador viscoso

Luego, por sumatoria de fuerzas y según la 2° Ley de Newton:

$$\sum F_x = -F_k - F_a = m\ddot{x}$$

Reemplazando las expresiones de las fuerzas:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

Y expresada de forma normalizada:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (1.4.5)$$

De la ecuación ($\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$) se obtienen la frecuencia de amortiguamiento y la frecuencia angular natural del sistema.

$$\gamma = \frac{b}{2m} \wedge \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

a) La ecuación (1.4.5) queda expresada como:

$$\ddot{x} + 0,1\dot{x} + x = 0 \quad (1.4.6)$$



De donde las frecuencias al cuadrado características son:

$$\gamma^2 = 0,0025[\text{rad}^2/\text{s}^2] \wedge \omega_n^2 = 1[\text{rad}^2/\text{s}^2]$$

En este caso se obtiene que $\gamma^2 < \omega_n^2$ por lo que el sistema presenta un MAA. La posición del carro en el tiempo es:

$$x(t) = Ce^{-\gamma t} \sin(\omega_d t + \phi)$$

Donde la frecuencia angular del sistema ω_d :

$$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \gamma^2} = \sqrt{1 - 0,0025}[\text{rad/s}] = 0,999[\text{rad/s}] \quad (1.4.7)$$

Los valores de la amplitud C y del ángulo de desfase ϕ se obtienen de las condiciones iniciales del sistema. El sistema parte del reposo en $x(0) = 0,2$ [m] por lo que:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0,2[\text{m}] = C \sin(\phi) \\ \ddot{x}(0) &= 0 = -\gamma C \sin(\phi) + \omega_d C \cos(\phi) \end{aligned}$$

De la segunda ecuación del sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\tan(\phi) = \frac{\omega_d}{\gamma} = 399,50 \implies \phi = \pi/2$$

Reemplazando el valor de ϕ se obtiene el valor de C :

$$C = \frac{0,2[\text{m}]}{\sin(\pi/2)} = 0,2[\text{m}]$$

Entonces la función que describe la posición del carrito en el tiempo es:

$$x(t) = 0,2e^{0,05t} \sin(0,999t + \pi/2) = 0,2e^{-0,05t} \cos(0,999t)$$

Cuyo gráfico es el siguiente:

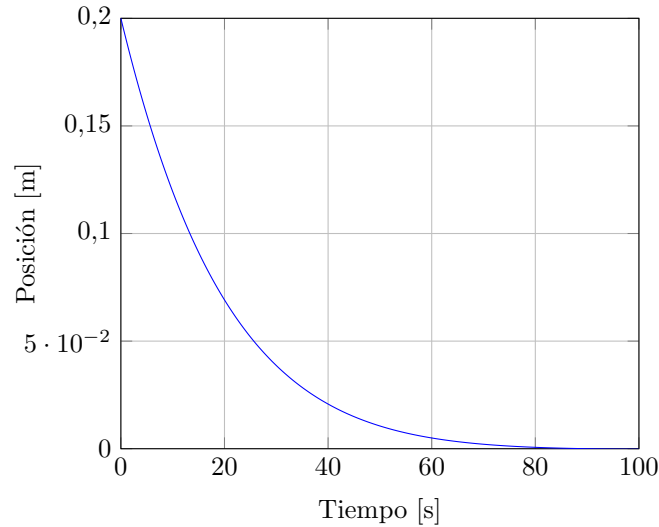


Figura 1.6: Posición del carro en función del tiempo para MAA.

b) En este caso la ecuación de movimiento (1.4.5) queda expresada como:

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = 0 \quad (1.4.8)$$

De donde las frecuencias respectivas γ y ω_n son:

$$\gamma^2 = 1[\text{rad}^2/\text{s}^2] \wedge \omega_n^2 = 1[\text{rad}^2/\text{s}^2]$$

En este caso se tiene que $\gamma^2 = \omega_n^2$ con lo que se está en frente de un amortiguamiento crítico. La posición del carro es:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t}$$

De las condiciones iniciales se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0,2[\text{m}] = A \\ \ddot{x}(0) &= 0 = B - \gamma A \end{aligned}$$

De la primera ecuación del sistema se obtiene el valor de la constante A y de la segunda se obtiene el valor de B:

$$B = \gamma A = 0,2 [\text{m/s}]$$

Entonces la función que describe la posición del carro en el tiempo es:

$$x(t) = 0,2e^{-t} + 0,2te^{-t}$$

Con el tiempo t en segundos. El gráfico de la función anterior es:

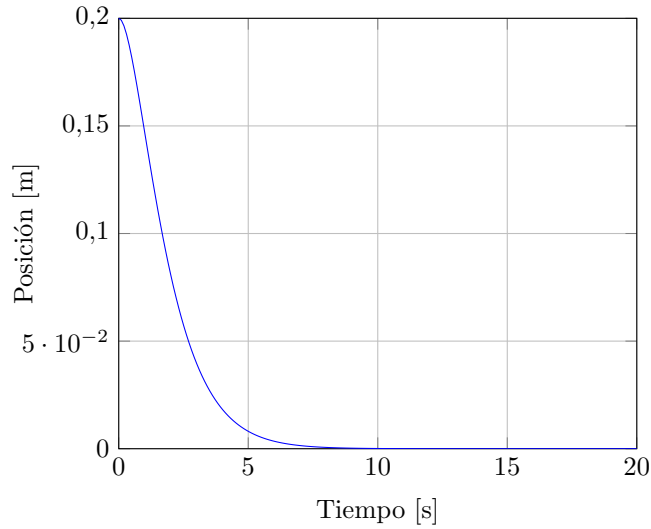


Figura 1.7: Posición del carro en función del tiempo con amortiguamiento crítico.

- c) Finalmente en este caso la ecuación de movimiento (1.4.5) queda expresada como:

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + x = 0 \quad (1.4.9)$$

De donde las frecuencias respectivas γ y ω_n son:

$$\gamma^2 = 4[\text{rad}^2/\text{s}^2] \wedge \omega_n^2 = 1[\text{rad}^2/\text{s}^2]$$

En este caso se tiene que $\gamma^2 > \omega_n^2$ por lo que se está en frente de un sistema con movimiento sobreamortiguado, cuya función de posición en el tiempo es:

$$x(t) = Ae^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_n^2})t} + Be^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_n^2})t}$$

De las condiciones iniciales se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0.2[\text{m}] = A + B \\ \dot{x}(0) &= 0 = -\gamma(A + B) + (A - B)\sqrt{\gamma^2 - \omega_n^2} \end{aligned}$$

De la segunda ecuación del sistema y combinándola con la primera se obtiene:

$$B = \frac{-0.4}{\sqrt{3}} + A \quad (1.4.10)$$

Reemplazando la ecuación (1.4.10) en la primera ecuación del sistema se obtiene el valor de A:

$$A = 0,1 + \frac{0,2}{\sqrt{3}} = 0,215 \implies B = -0,015$$

Luego la función del movimiento del sistema sobreamortiguado es:

$$x(t) = 0,215e^{(-2+\sqrt{3})t} - 0,015e^{(-2-\sqrt{3})t}$$

Cuyo gráfico es el siguiente:

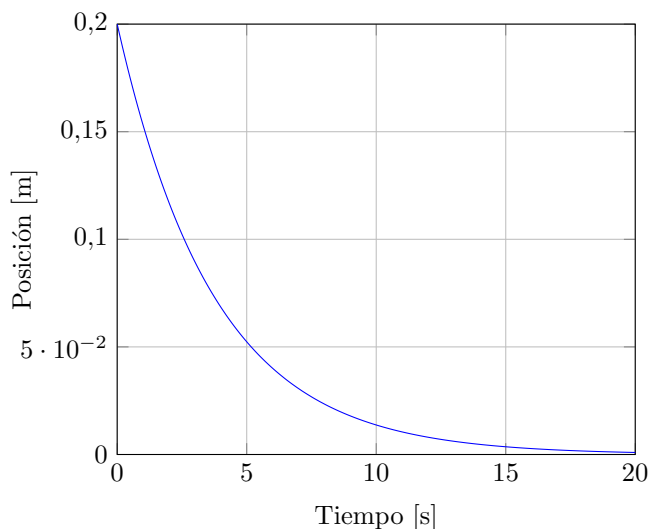


Figura 1.8: Posición del carro en función del tiempo para un movimiento sobreamortiguado.

Físicamente, la constante de amortiguamiento pone una resistencia a la velocidad del movimiento y que ésta definirá el movimiento del sistema, tal como se puede apreciar en los gráficos. Existen 3 clasificaciones, Movimiento Armónico Amortiguado, con Amortiguamiento Crítico y Sobre-Amortiguado. En el caso a) el amortiguamiento proporcionado no alcanza a detener el movimiento impuesto por una posición inicial fuera del equilibrio provocando que el sistema oscile en torno a dicha posición hasta que se detenga, en otras palabras el amortiguamiento es insuficiente para que se detenga el sistema justo cuando el carro pasa por la posición de equilibrio más de 2 veces. En el caso b) el amortiguamiento proporcionado es mayor que en el caso a) y presenta la característica que es el valor mínimo tal que el movimiento del sistema no presente oscilaciones; este valor define si el movimiento del sistema será subamortiguado o sobreamortiguado. Y en el caso c) el amortiguamiento proporcionado es mayor que en el caso límite b), por lo que el sistema tiende a disminuir su velocidad con mayor rapidez que en el caso b), esto explica que a medida que aumenta el amortiguamiento proporcionado al sistema, la pendiente al inicio del gráfico

sea cada vez menos (absolutamente), tal como se muestra en el siguiente gráfico:

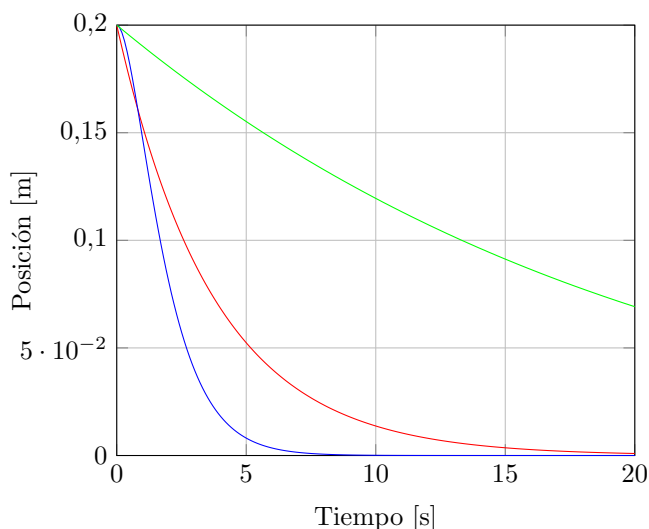


Figura 1.9: Posición del carro en función del tiempo bajo tres diferentes tipos de amortiguamiento.

Ejercicio 5. En una fábrica se desea instalar un motor. El motor ejerce una fuerza externa sinusoidal sobre el piso en donde se desea instalar. Uno de los requisitos que debe cumplir el motor es que en el momento de que esté encendido, éste no destruya el piso. Para ello se ha impuesto un límite que consiste en que el piso no oscile más allá de 2 [cm]. Si en una muy mala simplificación el sistema motor-piso se representa como un sistema masa-resorte-amortiguamiento, se solicita determinar las posibles frecuencias con la cual puede funcionar el motor. Para ello considere que el motor ejerce una fuerza máxima de 100 [N] y el piso posee un amortiguamiento de $b = 10$ [N s/m], una rigidez $k = 10^6$ [N/m] y una masa de 10^3 [kg].

Solución:

Las frecuencias natural ω_n y de amortiguamiento γ del sistema son:

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{10^6 [\text{N/m}]}{10^3 [\text{kg}]} = 10^3 [\text{rad}^2/\text{s}^2]$$

$$2\gamma = \frac{b}{m} = \frac{10 [\text{Ns/m}]}{10^3 [\text{kg}]} = 10^{-2} [\text{rad/s}]$$

Los valores de la razón de frecuencias R son:



$$0,02[\text{m}] = \frac{\frac{100[\text{N}]}{10^6[\text{N/m}]}}{\sqrt{(R^2 - 1)^2 + \frac{(10^{-2}R)}{10^3[\text{rad}^2/\text{s}^2]}}} \Rightarrow R = 0,74, 1,16$$

En el resultado de R solo se han colocado los valores positivos, pues no existen frecuencias negativas tal que den razones negativas. De los resultados obtenidos se observa que para obtener amplitudes menores a los 2 [cm] del piso la máquina debe vibrar bajo el 74 % de la frecuencia natural ω_n o sobre el 116 %, pero durante el encendido del motor, éste pasa por todos los valores de frecuencia hasta alcanzar el 116 % de la frecuencia natural, pasando así por valores de frecuencia no permitidos (se puede producir resonancia). Por lo tanto, la frecuencia de funcionamiento posible del motor son bajo el 74 % de ω_n , es decir:

$$\omega < 23,40 [\text{rad/s}]$$

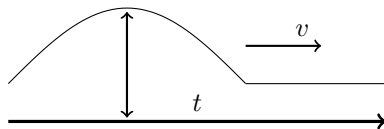
Capítulo 2

Ondas Mecánicas

Una onda mecánica es aquella en donde la información es transmitida a través de un medio. Esta información, la cual puede ser vista como transferencia de energía, se produce ya que una pequeña perturbación de una partícula afecta a sus partículas vecinas y esta información se propaga entonces de partícula en partícula. En general existen dos clases de ondas, las ondas transversales y longitudinales.

Ondas transversales

Estas ondas solamente se producen en un medio donde existe una fuerte ligazón entre partículas por lo que una perturbación transversal entre ellas produce un movimiento que se propaga transversalmente al medio, el cual puede ser único u oscilatorio. La figura siguiente muestra un pulso que se propaga hacia la derecha, las partículas se mueven de arriba hacia abajo y no de izquierda a derecha.



Esta onda se propagará a través del medio con una cierta velocidad la cual dependerá del medio por donde se esté propagando. De manera general podemos asumir que la velocidad estará dada por

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho}}, \quad (2.0.1)$$

donde F es una fuerza generalizada que tiene que ver con la fuerza de interacción entre las partículas del material que quieren restablecer el equilibrio (por ejemplo, en una cuerda estaría dada por la tensión T) y ρ tiene que ver con la densidad de masa del medio (en una cuerda esta densidad estará dada por una densidad lineal $\mu = \frac{\text{masa}}{\text{largo}}$).

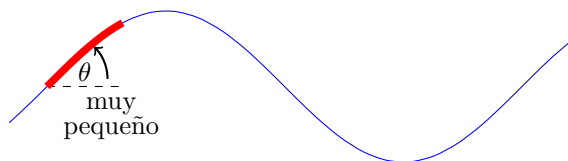
Ondas longitudinales

Este tipo de onda tiene como particularidad que las partículas tienen una perturbación en el mismo sentido que la propagación de la onda. Es decir, las partículas se mueven hacia la derecha y vuelven a la izquierda a su punto de equilibrio para un pulso, o quedan oscilando con respecto al equilibrio para varios pulsos o una onda armónica. La velocidad de propagación de esta onda es muy similar a la onda transversal, pero dependerá de la fuerza de compresibilidad del material que nos dice que tan incompresible es el material.

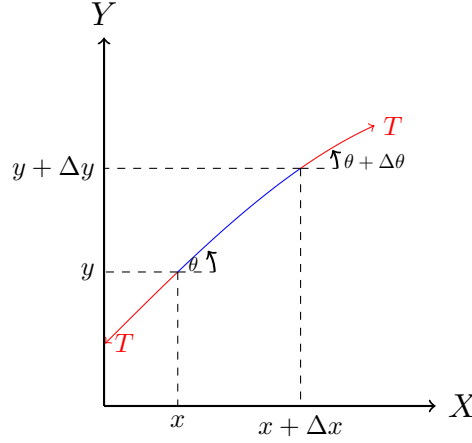
Hay que notar que para ambas ondas las velocidades dependerán del **Módulo de Young**, el cual describe la elasticidad del material por donde la onda se está propagando. Generalmente la fuerza de desplazamiento transversal es menor a la fuerza de compresibilidad. Por lo que si en un material se producen ambas ondas, un observador sentirá primero la onda longitudinal y luego la onda transversal.

2.1. Ecuación de onda

Para entender el tipo de ecuación que debe de satisfacer una onda, supongamos que estamos trabajando con una onda sinusoidal en una cuerda de tensión T , en donde la perturbación es muy pequeña por lo que el ángulo que se produce con el eje X es pequeño, como se ve en la siguiente figura:



Para seguir, tomemos un trozo de la cuerda (se encuentra resaltada en rojo) y escribamos explícitamente las fuerzas y geometría del sistema.



La cuerda posee una densidad lineal μ , la cual está dada por la masa pequeña que estamos tomando en cuenta dM dividido por su largo, i.e. $\mu = dM/\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Sumando las fuerzas del sistema en el eje Y tenemos que:

$$-T\sin(\theta) + T\sin(\theta + \Delta\theta) = dM\ddot{y}, \quad (2.1.1)$$

Usando ángulos pequeños podemos aproximar $\sin(\theta) \sim \theta$. Entonces la ecuación anterior quedará de la siguiente forma

$$-T\theta + T\theta + T\Delta\theta = dM\ddot{y}, \quad (2.1.2)$$

$$T\Delta\theta = dM\ddot{y}. \quad (2.1.3)$$

pero en este caso dM corresponde a la masa de la fracción de la cuerda, entonces podemos escribir

$$dM = \mu V = \mu\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \mu\Delta x\sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}. \quad (2.1.4)$$

Por otro lado sabemos que $\tan(\theta) = \Delta y/\Delta x = dy/dx$, entonces la igualdad anterior queda de la siguiente forma:

$$\mu\Delta x\sqrt{1 + \tan^2(\theta)} = \mu\Delta x\sqrt{1 + \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}}, \quad (2.1.5)$$

$$= \mu\Delta x\sqrt{\frac{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}}, \quad (2.1.6)$$

$$= \mu\Delta x\sqrt{\frac{1}{\cos^2(\theta)}}, \quad (2.1.7)$$

$$= \mu\Delta x\frac{1}{\cos(\theta)}, \quad (2.1.8)$$



como los ángulos son pequeños $1/\cos(\theta) \approx 1$, entonces:

$$dM \approx \mu \Delta x, \quad (2.1.9)$$

de la misma manera, usando $\tan(\theta) = dy/dx$, podemos derivar esta expresión respecto a x

$$\frac{d \tan(\theta)}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad (2.1.10)$$

$$\frac{1}{\cos^2(\theta)} \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad (2.1.11)$$

como trabajamos con ángulos pequeños, se tiene

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad (2.1.12)$$

reemplazando en (2.1.3)

$$T \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} \mu, \quad (2.1.13)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\mu}{T} \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad (2.1.14)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (2.1.15)$$

la ecuación anterior es conocida como la **Ecuación de Onda**. Donde v es una velocidad definida como

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (2.1.16)$$

Esta velocidad depende de la tensión y la densidad lineal del material y no de la fuerza con la que se perturba el sistema. La solución a la ecuación de onda es cualquier función que tiene la forma:

$$y(x, t) = F(x \pm vt), \quad (2.1.17)$$

$$\text{ó} \quad y(x, t) = F\left(t \pm \frac{x}{v}\right), \quad (2.1.18)$$

Para demostrar que $y(x, t)$ es solución a la ecuación de onda vamos a usar el cambio de variables $u = x \pm vt$ y calculamos las derivadas parciales usando la regla de la cadena,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \pm v \frac{\partial F}{\partial u}, \quad (2.1.19)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}. \quad (2.1.20)$$



y con respecto a x

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}, \quad (2.1.21)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}. \quad (2.1.22)$$

Reemplazando en la ecuación de onda (2.1.15) obtenemos

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}. \quad \text{Q.E.D} \quad (2.1.23)$$

Quedando entonces demostrado que cualquier combinación de $x \pm vt$ es solución a la ecuación de onda. Para el caso de $t \pm x/v$ la demostración es trivial.

2.2. Superposición

Si F_1 y F_2 son soluciones a la ecuación de onda, luego

$$y(x, t) = F_1(x \pm vt) + F_2(x \pm vt), \quad (2.2.1)$$

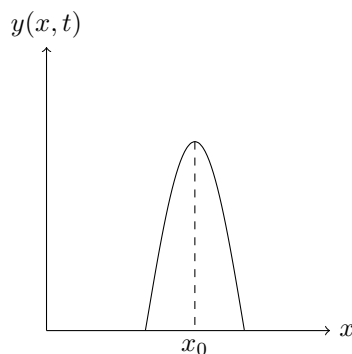
también es solución. Esto se puede comprobar de manera directa. Esta relación nos dice que si existen dos ondas que se encuentran superpuestas, la solución final será la suma de ambas.

2.3. Ejemplos de algunos tipos de Ondas

Anteriormente vimos que cualquier función que tiene una dependencia de sus variables de la forma $x \pm vt$ ó $t \pm \frac{x}{v}$ es una onda, ya que es solución a la ecuación de onda. Veamos con un poco de detalle un par de ejemplos de ciertos tipos de ondas.

Pulso

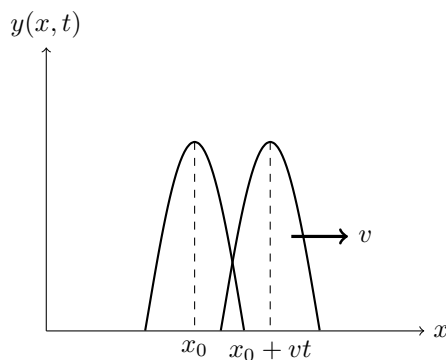
Un pulso es una variación repentina del medio de un cierto tiempo definido que se propaga luego a través de él. Una serie de tales variaciones repentinas también se le conoce como pulsos. Esta pequeña vibración puede tener cualquier forma por lo que para analizar las propiedades de una onda, no es necesario identificar cual es la forma geométrica de éste. Para entender el movimiento de este pulso, supongamos que este tiene un peak en $x = x_0$ cuando $t = 0$,



La pregunta que uno podría contestar es donde estará el peak cuando $t > 0$,

- Para $v > 0$

el "peak" que solía encontrarse en $x = x_0$ cambió posición, es decir



ahora el peak se encuentra en $x = x_0 + vt$ ó $x_0 = x - vt$, por lo que la función evaluada en el peak $F(x_0)$ ahora deberá ser escrita $F(x - vt)$ para mostrar que se está moviendo a la derecha.

- **Para $v < 0$** Parecido al caso anterior, pero ahora el peak se encuentra en $x = x_0 - vt$ ó $x_0 = x + vt$. Por lo que esta onda se está moviendo hacia la izquierda.

Onda Armónica

La onda armónica es una onda, tal que su movimiento se puede definir con la siguiente ecuación

$$y(x, t) = A \cos(kx \pm \omega t + \phi), \quad (2.3.1)$$

Se define k tal que no existan unidades dentro del coseno. Una onda armónica tiene propiedades muy especiales que describen este movimiento, recordemos que



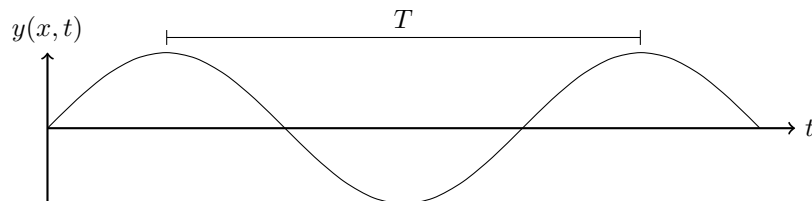
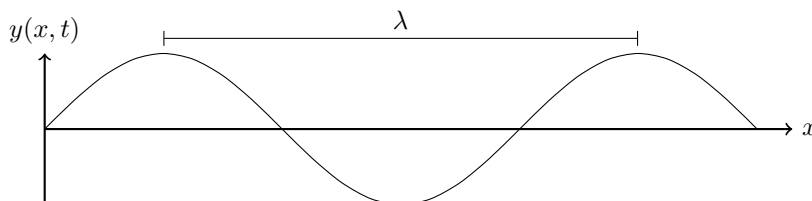
el signo negativo representa una onda que se mueve a la izquierda y el signo positivo una onda que se mueve hacia la derecha. Ya que esta onda es periódica se le puede definir un periodo T , una frecuencia de oscilación ($f = 1/T$, $\omega = 2\pi f$) y una longitud de onda λ como se ve en la figura. Con esto podemos definir que la onda se propaga a una velocidad dada por

$$v = \frac{\lambda}{T}, \quad (2.3.2)$$

con esto es fácil ver que existe una relación entre la longitud de onda y la constante k dada por

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (2.3.3)$$

k se le conoce como número de onda.



2.4. Como crear una onda

Como se vió anteriormente, una onda es cualquier función en donde sus variables tengan la relación $x \pm vt$ ó $t \pm x/v$, en donde el signo negativo corresponde a una onda desplazandose a la derecha y el signo positivo hacia la izquierda. Por lo tanto podemos crear nuestra propia forma de onda de manera geometrica al escribir una función estática $y(x)$ desplazarla al promover $x \rightarrow x \pm vt$. Esto se puede visualizar mejor con un ejemplo sencillo. Supongamos que tenemos la siguiente forma geométrica dada por la figura a continuación



Esta figura se puede escribir con la siguiente función en cada segmento de x

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ y_0 & a \leq x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases} \quad (2.4.1)$$

La función $y(x)$ nos muestra como se vería la onda como si se sacase un foto al sistema en $t = 0$, si ahora queremos mover la onda a la derecha o izquierda, debemos efectuar el cambio $x \rightarrow x \pm vt$, lo que nos da

$$y(x, t) = \begin{cases} 0 & x \pm vt < a \\ y_0 & a \leq x \pm vt \leq b \\ 0 & x \pm vt > b \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Reescribiendo la ecuación para despejar x de tal manera que cada segmento quede bien definido nos da la siguiente onda rectangular

$$y(x, t) = \begin{cases} 0 & x < a \mp vt \\ y_0 & a \mp vt \leq x \leq b \mp vt \\ 0 & x > b \mp vt \end{cases} \quad (2.4.3)$$

Este tipo de ejemplo se puede extender para cualquier figura geométrica, ya sea cuadrada, armónica, triangular, etc.

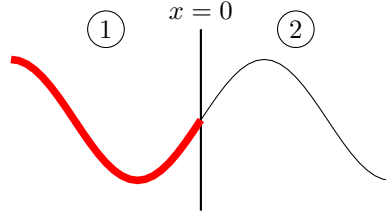
2.5. Reflexión y transmisión de una onda

2.5.1. Transmisión y reflexión entre dos cuerdas

Se tiene un sistema compuesto por dos cuerdas atadas en $x = 0$, cada una con densidad lineal distinta μ_1 y μ_2 , como se ve en la siguiente figura:



Las velocidades en ambas cuerdas son conocidas si se conoce la tensión que existe en ellas. Hay que notar que ambas cuerdas experimentan la misma tensión al estar unidas en $x = 0$. Si tiene una onda incidente conocida $y_i(x, t)$ que viaja a la derecha por la cuerda 1. Esta al pasar por el punto de contacto con la cuerda dos va a transmitir energía en forma de una onda de transmisión $y_t(x, t)$ y a la vez para conservar energía parte de la onda también se verá reflejada $y_r(x, t)$. Lo importante acá es que no es necesario saber exactamente cual es la forma geométrica de la onda, más bien sabemos que se puede tratar de manera general. Diagramáticamente podemos analizar lo que sucede en la siguiente figura



Primero vamos a reescribir el argumento de las funciones tal que dependan de $t \pm x/v$, donde la diferencia de signo sigue representando la dirección de propagación de la onda. Lo primero que hay que notar es que en la cuerda 1 existen la onda que está incidiendo y la onda que está siendo reflejada, por lo que la onda total en la cuerda 1 será la suma de ellas, en cambio en la cuerda 2 solamente está la onda transmitida. En segundo lugar podemos argumentar que la cuerda 1 y la cuerda 2 se encuentran a la misma altura en $x = 0$ para todo tiempo t , es decir en $x = 0$:

$$y_i \left(t - \frac{x}{v_1} \right) \Big|_{x=0} + y_r \left(t + \frac{x}{v_1} \right) \Big|_{x=0} = y_t \left(t - \frac{x}{v_2} \right) \Big|_{x=0}, \quad (2.5.1)$$

Noten los signos entre las variables, la onda reflejada viaja a la izquierda por lo que tiene el signo contrario. Por otro lado las ondas incidente y reflejada ambas se mueven en la cuerda 1 por lo que su velocidad será v_1 a diferencia de la onda transmitida que se encuentra en la cuerda 2, por lo que su velocidad es v_2 . Entonces obtenemos en $x = 0$

$$y_i(t) + y_r(t) = y_t(t), \quad (2.5.2)$$

Por otro lado, otro argumento que puede deducirse de la figura o de manera física es el hecho que la tensión en las cuerdas es la misma y es continua. Por lo tanto, en $x = 0$ para que la tensión sea continua la forma de la onda debe de ser continua. Matemáticamente hablando, esto quiere decir que el gradiente de la onda en x debe de ser continuo, i.e. al derivar la ecuación (2.5.1) con respecto a la posición tenemos:

$$y'_i \left(t - \frac{x}{v_1} \right) \left(\frac{-1}{v_1} \right) \Big|_{x=0} + y'_r \left(t + \frac{x}{v_1} \right) \left(\frac{1}{v_1} \right) \Big|_{x=0} = y'_t \left(t - \frac{x}{v_2} \right) \left(\frac{-1}{v_2} \right) \Big|_{x=0}, \quad (2.5.3)$$

En el último paso se usó la regla de la cadena, recordemos que el tilde representa la derivada con respecto a x ($y' = dy/dx$). Ahora en $x = 0$ tenemos

$$\left(\frac{-1}{v_1} \right) y'_i(t) + \left(\frac{1}{v_1} \right) y'_r(t) = \left(\frac{-1}{v_2} \right) y'_t(t), \quad (2.5.4)$$

Integrando la ecuación anterior y tomando la constante de integración igual a cero ya que la cuerda se mantenía quieta antes de que la onda incidiese en $x = 0$ se obtiene

$$\left(\frac{-1}{v_1} \right) y_i(t) + \left(\frac{1}{v_1} \right) y_r(t) = \left(\frac{-1}{v_2} \right) y_t(t), \quad (2.5.5)$$



Usando la relación obtenida anteriormente (2.5.2), las relaciones de $y_r(t)$ e $y_t(t)$ en función de la onda incidente $y_i(t)$ quedarían

$$y_r(t) = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} y_i(t), \quad (2.5.6)$$

$$y_t(t) = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} y_i(t). \quad (2.5.7)$$

Para encontrar la función en todo el espacio y no solamente en $x = 0$ hay que promover el tiempo de la siguiente manera $t \rightarrow t \pm x/v$ tomando en cuenta si la onda se mueve a la derecha y si está en la cuerda 1 ó 2.

Reflexión

La onda reflejada se mueve hacia la derecha y se encuentra en la cuerda 1, por lo que debemos hacer en (2.5.6) el cambio $t \rightarrow t + x/v_1$.

$$y_r \left(t + \frac{x}{v_1} \right) = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} y_i \left(t + \frac{x}{v_1} \right), \quad (2.5.8)$$

$$\text{ó} \quad y_r \left(t + \frac{x}{v_1} \right) = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} y_i \left(t - \frac{-x}{v_1} \right), \quad (2.5.9)$$

El lado izquierdo se puede asociar con la función de onda reflejada, en cambio en el lado derecho la función incidente quedaría con un signo negativo en la posición. Si definimos el coeficiente de reflexión R

$$R \equiv \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}, \quad (2.5.10)$$

La ecuación para la onda reflejada nos queda:

$$y_r(t, x) = R y_i(t, -x). \quad (2.5.11)$$

Esta ecuación nos dice que si conozco la forma de la onda incidente, luego se puede encontrar la forma de la onda reflejada simplemente multiplicando por el factor R y reemplazando x en la ecuación de la onda incidente por $-x$. Hay que notar también que el coeficiente de reflexión no depende de la tensión de la cuerda ya que podemos reescribir usando el hecho que $v = \sqrt{T/\mu}$

$$R = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}. \quad (2.5.12)$$

Solamente depende de las densidades lineales de las cuerdas.

Transmisión

De la misma manera que el caso anterior, debemos ahora promover el tiempo en (2.5.7) tal que represente una onda que se mueve a la derecha en la cuerda



2, i.e. $t \rightarrow t - x/v_2$

$$y_t \left(t - \frac{x}{v_2} \right) = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} y_i \left(t - \frac{x}{v_2} \right), \quad (2.5.13)$$

$$\text{ó} \quad y_t \left(t - \frac{x}{v_2} \right) = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} y_i \left(t - \frac{(v_1/v_2)x}{v_1} \right), \quad (2.5.14)$$

En este caso definimos el coeficiente de transmisión T

$$T \equiv \frac{2v_2}{v_2 + v_1} \quad (2.5.15)$$

Tal que obtenemos

$$y_t(t, x) = T y_i \left(t, \frac{v_1}{v_2} x \right). \quad (2.5.16)$$

Al igual que el caso anterior, se puede encontrar la forma de la onda transmitida en todo el espacio y tiempo multiplicando la onda incidente por el factor T y efectuando el cambio $x \rightarrow \frac{v_1}{v_2} x$. También podemos observar que el coeficiente de transmisión no depende de la tensión que experimentan las cuerdas

$$T = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}. \quad (2.5.17)$$

2.5.2. Diferentes casos para reflexión y transmisión de una onda en una cuerda

Recordemos que el caso anterior es un caso general que se puede utilizar para cualquier forma de la onda incidente, concentrémonos ahora en R y T para distintos casos en donde varían las densidades de las cuerdas.

- **Cuerda conectada a una pared.** En este caso la pared se considera un objeto de masa infinita donde no puede haber transmisión de energía ($\mu \rightarrow \infty$). Por lo tanto, la velocidad en este medio será igual a cero ($v_2 = 0$). Esto nos dará los siguientes coeficientes:

$$R = -1,$$

$$T = 0.$$

La onda se refleja en su totalidad pero su reflexión cambia de lado.

- **La primera cuerda es menos densa que la segunda.** $\mu_1 < \mu_2 < \infty$, con esto se obtiene $v_2 < v_1$, en este caso:

$$-1 < R < 0,$$

$$0 < T < 1.$$

En este caso parte de la onda es transmitida en una onda de menor tamaño, y existe una reflexión también de menor tamaño y de sentido opuesto.



- **Ambas cuerdas poseen la misma densidad.** $\mu_1 = \mu_2$, entonces las velocidades son iguales $v_1 = v_2$, los coeficientes quedan:

$$R = 0,$$

$$T = 1.$$

Este es el caso en que la onda continúa por la misma cuerda.

- **La segunda cuerda es menos densa que la primera.** $0 < \mu_2 < \mu_1$, con estas densidades se tiene que la velocidad de la cuerda 2 es menor a la cuerda 1, $v_1 < v_2$ entonces:

$$0 < R < 1,$$

$$1 < T < 2.$$

Esto nos muestra que la onda adquiere velocidad en la cuerda dos y por ende crece de tamaño, por lo que la reflexión en este caso sería en el mismo sentido de la onda incidente pero de menor tamaño y hacia la izquierda.

- **Zero mass string**, este posee una densidad igual a cero ($\mu_2 = 0$) y $v_2 = \infty$, entonces:

$$R = 1,$$

$$T = 2.$$

Este ejemplo nos muestra que aunque se tiene que $T = 2$ no existe transmisión de energía ya que no existe la cuerda si $\mu_2 \rightarrow 0$, por lo que el resultado de la transmisión es un resultado “no físico”. La onda se reflejará totalmente en el mismo sentido que la onda incidente.

2.5.3. Caso particular: Reflexión y transmisión de una onda armónica en una cuerda

En este caso particular, vamos a tomar en cuenta que la forma de la onda incidente es igual a $y_i(t, x) = A \cos(\omega t \pm kx + \phi)$. Procederemos entonces a aplicar algunos de los casos anteriores a este ejemplo.

1. Cuerda infinita fija en $x = 0$



El caso donde la cuerda es fija en $x = 0$ correspondería al caso de una cuerda conectada a una pared, en donde $\mu_2 \rightarrow \infty$ y $v_2 = 0$. Acá solamente habría una onda reflejada y no transmitida, además sabemos que esta equivale a $y_r(t, x) = R y_i(t, -x)$ con $R = -1$. Entonces:

$$y_r(t, x) = -y_i(t, -x) = -A \cos(\omega t + kx + \phi). \quad (2.5.18)$$

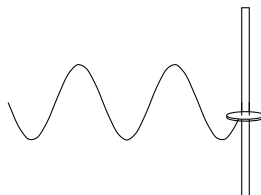
La onda total $y_T(x, t)$ que ahora vivirían en la cuerda sería la suma de la onda incidente con la reflejada, gracias al teorema de superposición de ondas, i.e. $y_T(t, x) = y_r(t, x) + y_i(t, x)$, entonces esta corresponde a:

$$y_T(t, x) = A (\cos(\omega t - kx + \phi) - \cos(\omega t + kx + \phi)), \quad (2.5.19)$$

$$\Rightarrow y_T(t, x) = 2A \sin(\omega t + \phi) \sin(kx). \quad (2.5.20)$$

Con esto se satisface que $y_T(t, x)$ sea igual a 0 siempre que $x = 0$.

2. Cuerda infinita libre en $x = 0$



La cuerda se encuentra sujeta a un aro tal que pueda subir o bajar libremente. Este caso es el de una segunda cuerda con $\mu_2 = 0$. Para este caso vimos que físicamente no existe coeficiente de transmisión y que el coeficiente de reflexión es $R = 1$. Entonces la onda reflejada queda de la siguiente forma:

$$y_r(t, x) = A \cos(\omega t + kx + \phi). \quad (2.5.21)$$

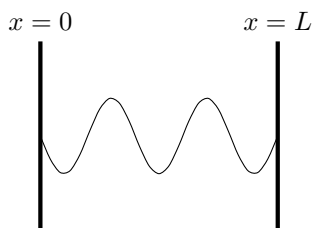
La onda total será la suma de la incidente con la reflejada, los que nos da:

$$y_T(t, x) = A \cos(\omega t + kx + \phi) + A \cos(\omega t - kx + \phi), \quad (2.5.22)$$

$$\Rightarrow y_T(t, x) = 2A \cos(\omega t + \phi) \cos(kx). \quad (2.5.23)$$

Una consecuencia importante es que el gradiente de la función total de la onda en $x = 0$ es cero. Es decir, la onda en el punto en que se encuentra suelta es siempre paralela al aro ya que tiene un máximo o mínimo en x ($\frac{dy_T}{dx} = 0$ cuando $x = 0$).

3. Cuerda finita fija en ambos extremos: Si tenemos ahora una cuerda oscilando la cual se encuentra fija $x = 0$ y $x = L$. es decir $y(t, 0) = y(t, L) = 0$, como se muestra en la figura.





Recordemos que la ecuación que corresponde a tener $y(t, 0) = 0$, cuando $x = 0$ es la siguiente:

$$y(t, x) = B \sin(\omega t + \phi) \sin(kx), \quad (2.5.24)$$

donde B es una constante. Lo importante es que la función de onda debe de satisfacer que sea igual a cero en $x = L$, entonces:

$$y(L, t) = 2A \sin(\omega t + \phi) \sin(kL), \quad (2.5.25)$$

$$2A \sin(\omega t + \phi) \sin(kL) = 0, \quad (2.5.26)$$

$$\sin(kL) = 0, \quad (2.5.27)$$

$$\Rightarrow k = \frac{n\pi}{L}. \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.5.28)$$

Esto nos dice que el número de onda k no puede tomar cualquier valor, y tiene que ser múltiplos enteros de π/L . Esto se le conoce como modos normales de la onda, es decir, la onda no puede oscilar con cualquier frecuencia ya que k y ω están relacionados. Vamos a escribir k_n aquel número de onda que depende de n , por definición la longitud de onda será:

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}, \quad (2.5.29)$$

donde también hemos escrito λ_n para recordar que ahora λ depende de n . Esto nos dará un valor para las frecuencias f_n y ω_n

$$f_n = \frac{vn}{2L}, \quad (2.5.30)$$

$$\omega_n = \frac{vn\pi}{L}. \quad (2.5.31)$$

Cuando una cuerda tiene que oscilar con modos establecidos y contables se le llama **Onda Estacionaria**. Este tipo de onda tiene una particularidad que se producen nodos (puntos de cero movimiento) y antinodos (puntos de máximo movimiento), veamos esto con mayor detalle.

- $n = 0$: Si n toma el valor más bajo obtendremos $k_0 = f_0 = \omega_0 = 0$ y $\lambda_0 \rightarrow \infty$. Este es simplemente el resultado para una cuerda fija en dos extremos que no se encuentra oscilando. Por lo tanto, no tiene importancia en este estudio.
- $n = 1$: En este caso los valores de k_1 , λ_1 y f_1 son:

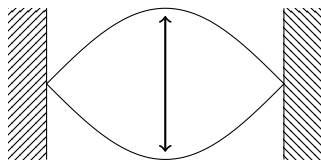
$$n = 1, \quad (2.5.32)$$

$$k_1 = \frac{\pi}{L}, \quad (2.5.33)$$

$$\lambda_1 = 2L, \quad (2.5.34)$$

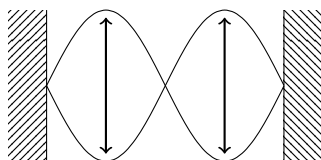
$$f_1 = \frac{v}{2L}. \quad (2.5.35)$$

Esto corresponde a una oscilación de longitud de onda de $2L$. Por lo tanto, la cuerda se encontrará oscilando como se muestra en la figura con una frecuencia de $f_1 = v/2L$



Este modo de oscilación se le denomina **modo fundamental** de oscilación. Este se puede reconocer en cualquier instrumento de cuerda donde se tienen los dos puntos fijos. Hay que notar que la frecuencia depende directamente de la velocidad, y esta depende de $v = \sqrt{T/\mu}$, por lo que si se aumenta la tensión aumentará la frecuencia. Por otro lado, si se cambia la cuerda por una de mayor densidad, entonces disminuirá la frecuencia.

■ $n = 2$:



en este caso los valores de λ , k y f_n son:

$$n = 2, \quad (2.5.36)$$

$$\lambda_2 = L, \quad (2.5.37)$$

$$k_1 = \frac{2\pi}{L}, \quad (2.5.38)$$

$$f_2 = \frac{v}{L}. \quad (2.5.39)$$

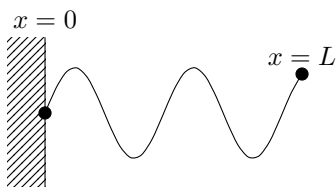
Una particularidad acá es que las frecuencias de los modos normales se pueden expresar en término de la frecuencia fundamental f_1 . Es decir,

$$f_n = n f_1. \quad (2.5.40)$$

Cabe mencionar, también, que la cuerda vibra con todos sus nodos, la solución final será la suma de todas sus posibles soluciones, es decir:

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(\omega_n t + \phi) \sin(k_n x). \quad (2.5.41)$$

4. **Cuerda finita fija en un extremo y libre en el otro:** Supongamos que ahora tenemos la situación donde una cuerda se encuentra fija en $x = 0$ pero en $x = L$ está libre. Este caso se trata de la misma manera



Para satisfacer que $y = 0$ cuando $x = 0$ la forma de la onda debe de ser la misma que para el caso anterior, es decir

$$y(t, x) = B \sin(\omega t + \phi) \sin(kx). \quad (2.5.42)$$

Pero ahora la onda debe de tener pendiente igual a cero en el punto $x = L$, esto nos dice que debemos satisfacer la siguiente condición

$$\left. \frac{dy}{dx}(x, t) \right|_{x=L} = 0, \quad (2.5.43)$$

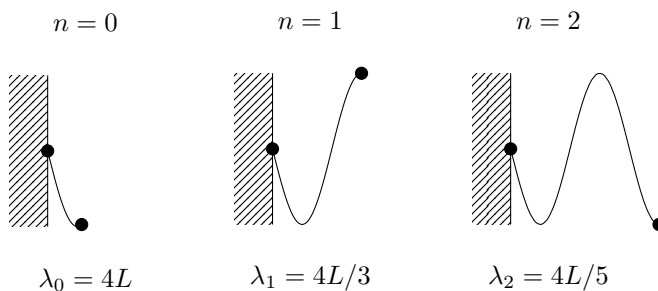
Esto de nuevo nos lleva a definir modos normales ya que $k \rightarrow k_n$ no puede tomar cualquier valor, salvo esos discretos que satisfagan la ecuación anterior.

$$k_n = \frac{(n + 1/2) \pi}{L}, \quad (2.5.44)$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n + 1/2}, \quad (2.5.45)$$

$$f_n = \frac{n + 1/2}{2L}. \quad (2.5.46)$$

En este tipo de situación $n = 0$ será nuestro modo fundamental ya que tiene resultado físico. Las figuras a continuación muestran los 3 primeros modos de oscilación para una cuerda fija en un extremo y suelta en el otro





5. **Cuerda finita con ambos extremos libres:** Este, al igual que los casos anteriores debemos partir con el punto suelto en $x = 0$. Este punto nos dice que la onda debe de tener pendiente cero en ese punto, por lo que la forma de la onda queda fijada en

$$y(t, x) = B \sin(\omega t + \phi) \cos(kx). \quad (2.5.47)$$

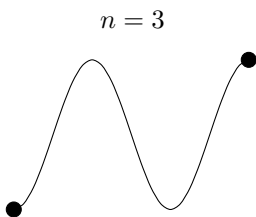
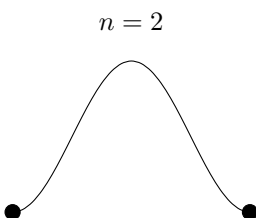
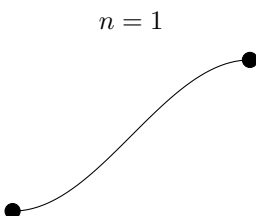
nos faltaría ahora fijar que la pendiente en $x = L$ también debe de ser cero. Lo que nos fijará el valor del número de onda, longitud de onda y frecuencia.

$$k_n = \frac{\pi n}{L}, \quad (2.5.48)$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad (2.5.49)$$

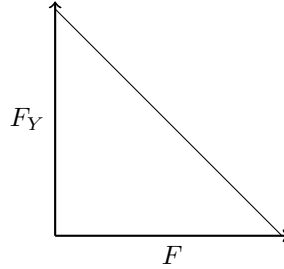
$$f_n = \frac{nv}{2L}. \quad (2.5.50)$$

A continuación podemos observar los tres primeros modos normales ($n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$)



2.5.4. Potencia de una onda

Para calcular la cantidad de energía que es entregada por una onda transversal puede calcularse a partir de la definición de potencia $P = \frac{dE}{dt}$. Esta se puede calcular usando el diagrama de fuerza según la figura a continuación



Es decir la potencia será

$$P = \frac{dE}{dt}, \quad (2.5.51)$$

$$= F_Y v_Y, \quad (2.5.52)$$

$$= F_Y \frac{dY}{dt}. \quad (2.5.53)$$

Para encontrar F_Y hay que volver a utilizar el diagrama de fuerza y asociar F con la tensión total de la cuerda cuando los ángulos son pequeños $F \sim T$, luego se puede utilizar la relación

$$\frac{F_Y}{F} = \frac{dY}{dx}, \quad (2.5.54)$$

La potencia entonces será

$$P = F_Y \frac{dY}{dt}, \quad (2.5.55)$$

$$\Rightarrow P = T \frac{dY}{dx} \frac{dY}{dt}. \quad (2.5.56)$$

Si $Y = A \cos(\omega t - kx)$:

$$P = Tk\omega A^2 \sin^2(kx - \omega t), \quad (2.5.57)$$

Como $k = \omega/v$

$$P = T \frac{\omega^2}{v} A^2 \sin^2(kx - \omega t), \quad (2.5.58)$$

como $v = \sqrt{T/\mu}$

$$P = \sqrt{\mu T} \omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t). \quad (2.5.59)$$



La potencia media será ahora el promedio de la ecuación anterior integrada en un periodo. Lo que nos da

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{\mu T} \omega^2 A^2. \quad (2.5.60)$$

2.6. Ejercicios

Ejercicio 6. La Figura 2.1 muestra tres cuerdas unidas de diferentes densidad lineal en $t = 0$. Posteriormente la masa M es levemente empujada hacia arriba una distancia A_i por lo que empieza a oscilar con frecuencia angular ω_i . La oscilación de la masa M genera una onda que empieza a viajar hacia la derecha por la primera cuerda con velocidad v_i . Cada cuerda tiene un largo de 4[m] y están sometidas a la misma tensión T .

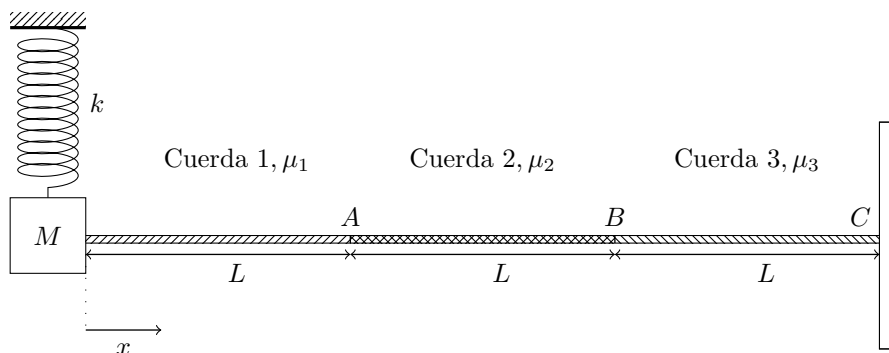


Figura 2.1: Esquema del problema

- Encuentre la ecuación de la onda incidente que viaja por la cuerda 1, en función de los datos dados.
- Encuentre matemáticamente y grafique el comportamiento de todas las ondas que se generan en las tres cuerdas, cuando hayan transcurrido 1,8[s], considerando los siguientes datos:

$$A_i = 0,075[\text{m}], \quad \omega_1 = 2[\text{rad/s}], \quad v_1 = 4[\text{m/s}], \quad T = 144[\text{N}], \quad \mu_1 = 9[\text{kg/m}], \\ \mu_2 = 4[\text{kg/m}], \quad \mu_3 = 1[\text{kg/m}].$$

SOLUCIÓN:

- Puesto a que el sistema en $t = 0$ las cuerdas se encuentran de forma horizontal, se tendrá que la ecuación de onda que viaja por la cuerda 1 se puede describir como:

$$\psi_1(x, t) = A \sin(k_1 x - \omega t)$$

Se sabe que el factor k es igual a:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Por otro lado la velocidad de propagación de una onda es:

$$v = \lambda f \implies \lambda = \frac{v}{f}$$



Y la frecuencia f se obtiene de la frecuencia angular ω que será exactamente igual a la que oscila la masa $M(w = w_1)$

$$\omega = 2\pi f \implies f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Ocupando los datos dados se tiene que:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi} [\text{Hz}] \implies \lambda = \frac{4}{\frac{1}{\pi}} = 4\pi [\text{m}] \implies k_1 = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} [\text{m}^{-1}]$$

Finalmente:

$$\psi_1(x, t) = 0,075 [\text{m}] \sin \left(\frac{1}{2} [\text{m}^{-1}] x - 2 [\text{rad/s}] t \right)$$

- b) Inicialmente se debe saber qué onda existirá en cada cuerda (incidente, transmitida o reflejada). Para ello se debe calcular la velocidad de propagación de la onda en cada cuerda. Se sabe que la velocidad de propagación se define como:

$$v_i = \sqrt{\frac{T}{\mu_i}}$$

Entonces las velocidades serán:

$$v_1 = 4 [\text{m/s}] \quad ; \quad v_2 = 6 [\text{m/s}] \quad ; \quad v_3 = 12 [\text{m/s}]$$

Y teniendo en cuenta el largo de cada cuerda, se tiene que la onda incidente se demora:

$$t_1 = \frac{L}{v_1} = \frac{4}{4} = 1 [\text{s}]$$

Por lo que en la cuerda 1 habrá una onda incidente y una reflejada. Ahora se analiza si la onda reflejada llega hasta el punto inicial:

$$d_0 = v_1 (1,8 - 1) = 4 \cdot 0,8 = 3,2 [\text{m}]$$

Por lo tanto la onda reflejada en la cuerda 1 no alcanza a llegar al punto inicial. Luego la onda se demora un tiempo Δt_2 en atravesar la cuerda 2:



$$\Delta t_2 = \frac{L}{v_2} = \frac{4}{6} = 0.6[s]$$

Entonces la onda en ir desde el punto inicial hasta B demora $t_1 + \Delta t_2 = 1.6[s]$ luego existirá una onda transmitida y reflejada en la cuerda 2.

Por último la onda avanza desde el punto B hacia la derecha una distancia:

$$d_1 = v_3 (1.8 - t_1 + \Delta t_2) = 12(1.8 - 1.6) = 1.6 [m]$$

Por lo tanto la onda no alcanza a llegar al punto C.

Por otro lado se ve si la onda reflejada en la cuerda 2 llega al punto A. Para esto se debe multiplicar la velocidad de la onda por los $(1.8 - 1.6 [s])$ restantes.

$$d_2 = v_2 (1.8 - 1.6) = 6 (1.8 - 1.6) = 0.8[m]$$

Por lo tanto la onda no alcanza a llegar al punto A y se desplaza 0.8 [m] desde el punto B hacia A.

Luego se procede a calcular la longitud de onda de cada cuerda. (Recordad que la frecuencia no cambia para las 3 cuerdas):

$$\lambda_1 = 4\pi [m] ; \lambda_2 = 6\pi [m] ; \lambda_3 = 12\pi [m]$$

En general se tiene que las ondas incidentes, reflejadas y transmitidas presentarán la forma:

$$\psi_i(x, t) = A_i \sin(k_i x_i - \omega t) \quad (2.6.1)$$

$$\psi_t(x, t) = A_t \sin(k_t x_i - \omega t) \quad (2.6.2)$$

$$\psi_r(x, t) = A_r \sin(k_i x_i + \omega t) \quad (2.6.3)$$

Donde k_i es de acuerdo a la cuerda donde viaja la onda incidente y A_t con respecto a la cuerda en donde se transmite la onda. Como la frecuencia no cambia, se tiene que en las 3 cuerdas la frecuencia angular es de ω . x_i no necesariamente será igual a la coordenada x definida inicialmente.

Para encontrar las amplitudes de las ondas incidentes, transmitidas y reflejadas se utiliza:

$$A_t = \frac{2v_{i+1}}{v_i + v_{i+1}} A_i \quad (2.6.4)$$

$$A_r = \frac{v_{i+1} - v_i}{v_i + v_{i+1}} A_i \quad (2.6.5)$$

Donde el subíndice i indica incidente, r reflejado y t transmitido.

Cuerda 1: Amplitud transmitida (A_2):

$$A_2 = \frac{2 \cdot v_2}{v_1 + v_2} A_1 = \frac{2 \cdot 6}{4 + 6} \cdot 0,075 = 0,090 \text{ [m]}$$

Amplitud reflejada en la cuerda 1 (A_{r1}):

$$A_{r1} = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} A_1 = \frac{6 - 4}{4 + 6} \cdot 0,075 = 0,015 \text{ [m]}$$

Cuerda 2: Amplitud transmitida (A_3):

$$A_3 = \frac{2 \cdot v_3}{v_2 + v_3} A_2 = \frac{2 \cdot 12}{6 + 12} \cdot 0,090 = 0,120 \text{ [m]}$$

Amplitud reflejada en la cuerda 2 (A_{r2}):

$$A_{r2} = \frac{v_3 - v_2}{v_2 + v_3} A_2 = \frac{12 - 6}{6 + 12} \cdot 0,090 = 0,030 \text{ [m]}$$

Luego, un bosquejo de la forma que presenta la onda en la cuerda se ve como:

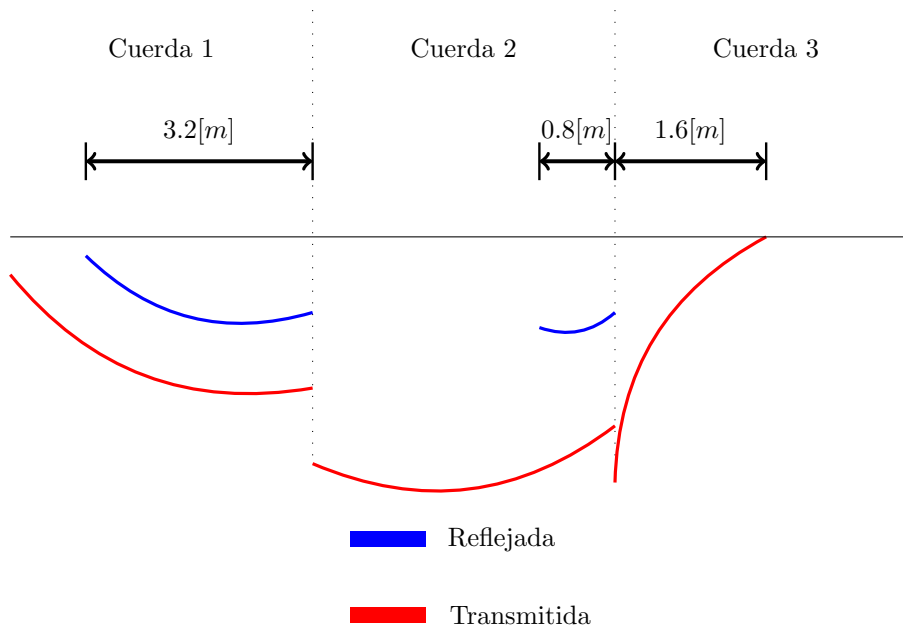


Figura 2.2: Esquema del problema



Ejercicio 7. Dos fuentes puntuales, A y B , separadas una distancia a entre sí, emiten cada una onda con longitud de onda λ , cuyas funciones de onda son respectivamente:

$$\begin{aligned}y_A &= A \sin(\omega t) \\ y_B &= A \sin(\omega t + \pi/4)\end{aligned}$$

Suponga que existe un punto P , muy distante de A y B , a distancia r_A y r_B respectivamente, en donde las ondas se superponen. Determine una relación entre la longitud de onda y las distancias de las fuentes al punto P para que existe interferencia: (a) Constructiva. (b) Destructiva.

$$\text{Ayuda: } \sin(\alpha) + \sin(\beta) = \sin((\alpha + \beta)/2) \cos((\alpha - \beta)/2)$$

SOLUCIÓN:

- 1) En primer lugar deben definirse las ondas en función del tiempo y la posición.

Para la onda A una partícula en $x = 0$ oscilará con la función $y_A = A \sin(\omega t)$. Luego la perturbación viaja desde $x = 0$ a un punto a una distancia x en un tiempo x/v , por lo que el punto ubicado a una distancia x recibirá la perturbación que sintió el punto $x = 0$ hace un tiempo x/v , por lo que se tiene que la posición en función del tiempo para el punto x es:

$$\Psi_A(x, t) = A \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) = A \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{\lambda f}\right) = A \sin\left(\omega t - \frac{2\pi f x}{\lambda f}\right) = A \sin(\omega t - kx)$$

Obteniéndose así la función de onda de propagación de la onda de la fuente A . Análogo se hace para la fuente B .

$$\Psi_B(x, t) = A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - kx\right)$$

Luego al sumar Ψ_A y Ψ_B ocupando la identidad trigonométrica dada, se tiene:

$$\Psi_A(r_A, t) + \Psi_B(r_B, t) = A \sin(\omega t - kr_A) + A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - kr_B\right) = 2A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{8} - \frac{k}{2}(r_A + r_B)\right) \cos\left(\frac{k}{2}(r_B - r_A) - \frac{\pi}{8}\right)$$

- a) Fase constructiva

- Método 1:

Para que se produzca una fase constructiva, es decir, que en un tiempo t dado se obtenga una amplitud de $2A$ se tiene que esto se produce cuando los ángulos que se encuentran dentro de cada función seno se



encuentran desfasados un valor $2n\pi$, con $n = 1, 2, 3 \dots$ es decir:

Si $\omega t - kr_A \leq \omega t + \frac{\pi}{4} - kr_B$:

$$\begin{aligned}\omega t - kr_A - \left(\omega t + \frac{\pi}{4} - kr_B\right) &= 2n\pi \\ k(r_B - r_A) - \frac{\pi}{4} &= 2n\pi \\ \frac{2\pi}{\lambda}(r_B - r_A) - \frac{\pi}{4} &= 2n\pi \\ \Rightarrow (r_B - r_A) &= \left(n + \frac{1}{8}\right)\lambda\end{aligned}$$

Si $\omega t - kr_A \geq \omega t + \frac{\pi}{4} - kr_B$:

$$\begin{aligned}\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - kr_B\right) - (\omega t - kr_A) &= 2n\pi \\ k(r_A - r_B) + \frac{\pi}{4} &= 2n\pi \\ \frac{2\pi}{\lambda}(r_A - r_B) + \frac{\pi}{4} &= 2n\pi \\ \Rightarrow (r_A - r_B) &= \left(n - \frac{1}{8}\right)\lambda\end{aligned}$$

- Método 2:

Del resultado de la suma de ondas $\Psi_A(r_A, t) + \Psi_B(r_B, t)$, se observa que existe una parte que queda determinado tanto por el tiempo y otra no (funciones seno y coseno respectivamente). En los lugares en que la función independiente del tiempo adopta sus valores extremos 1 y -1 , la oscilación exhibe su mayor amplitud $2A$. Esto sucede cuando se cumple que el argumento de la función coseno satisface:

$$\frac{k}{2}(r_B - r_A) - \frac{\pi}{8} = n\pi$$

Si $\left(\frac{k}{2}(r_B - r_A) - \frac{\pi}{8}\right) > 0$ con $n = 1, 2, 3, \dots$ Luego:

$$\begin{aligned}k(r_B - r_A) - \frac{\pi}{4} &= 2n\pi \\ \frac{2\pi}{\lambda}(r_B - r_A) - \frac{\pi}{4} &= 2n\pi \\ \Rightarrow (r_B - r_A) &= \left(n + \frac{1}{8}\right)\lambda\end{aligned}$$



Si $\left(\frac{k}{2}(r_B - r_A) - \frac{\pi}{8}\right) < 0$, entonces se tiene:

$$\frac{k}{2}(r_B - r_A) - \frac{\pi}{8} = n\pi$$

Con $n = 1, 2, 3, \dots$ Luego:

$$\begin{aligned} k(r_A - r_B) + \frac{\pi}{4} &= 2n\pi \\ \frac{2\pi}{\lambda}(r_A - r_B) + \frac{\pi}{4} &= 2n\pi \\ \Rightarrow (r_A - r_B) &= \left(n - \frac{1}{8}\right)\lambda \end{aligned}$$

b) Para que exista una interferencia destructiva se tiene que tener que para cualquier instante de tiempo:

$$\Psi_A(r_A, t) + \Psi_B(r_B, t) = A \sin(\omega t - kr_A) + A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - kr_B\right) = 2A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{8} - \frac{k}{2}(r_A + r_B)\right) \cos\left(\frac{k}{2}(r_B - r_A) - \frac{\pi}{8}\right)$$

• Método 1:

Dicho efecto se produce cuando los ángulos que se encuentran dentro de cada función seno se encuentran desfasados un valor $(2n - 1)\pi$, con $n = 1, 2, 3, \dots$ es decir:

Si $\omega t - kr_A \leq \omega t + \frac{\pi}{4} - kr_B$:

$$\begin{aligned} \omega t - kr_A - \left(\omega t + \frac{\pi}{4} - kr_B\right) &= (2n - 1)\pi \\ k(r_B - r_A) - \frac{\pi}{4} &= (2n - 1)\pi \\ \frac{2\pi}{\lambda}(r_B - r_A) - \frac{\pi}{4} &= (2n - 1)\pi \\ \Rightarrow (r_B - r_A) &= \left(\frac{(2n - 1)}{2} + \frac{1}{4}\right)\lambda \end{aligned}$$

Si $\omega t - kr_A \geq \omega t + \frac{\pi}{4} - kr_B$:

$$\begin{aligned} \left(\omega t + \frac{\pi}{4} - kr_B\right) - (\omega t - kr_A) &= (2n - 1)\pi \\ k(r_A - r_B) + \frac{\pi}{4} &= (2n - 1)\pi \\ \frac{2\pi}{\lambda}(r_A - r_B) + \frac{\pi}{4} &= (2n - 1)\pi \\ \Rightarrow (r_A - r_B) &= \left(\frac{(2n - 1)}{2} - \frac{1}{4}\right)\lambda \end{aligned}$$



- Método 2:

Del resultado de la suma de ondas $\Psi_A(r_A, t) + \Psi_B(r_B, t)$, se tiene que la función coseno, dependiente solo de la posición, anulará la suma si:

$$\begin{aligned}\frac{k}{2}(r_B - r_A) - \frac{\pi}{8} &= \frac{(2n-1)\pi}{2} \\ k(r_B - r_A) + \frac{\pi}{4} &= (2n-1)\pi \\ \frac{2\pi}{\lambda}(r_B - r_A) + \frac{\pi}{4} &= (2n-1)\pi \\ \Rightarrow (r_B - r_A) &= \left(\frac{(2n-1)}{2} + \frac{1}{4} \right) \lambda\end{aligned}$$

Esto es válido si $r_B - r_A > 0$, si $r_B - r_A < 0$ se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{k}{2}(r_A - r_B) - \frac{\pi}{8} &= \frac{(2n-1)\pi}{2} \\ k(r_A - r_B) + \frac{\pi}{4} &= (2n-1)\pi \\ \frac{2\pi}{\lambda}(r_A - r_B) + \frac{\pi}{4} &= (2n-1)\pi \\ \Rightarrow (r_A - r_B) &= \left(\frac{(2n-1)}{2} + \frac{1}{4} \right) \lambda\end{aligned}$$

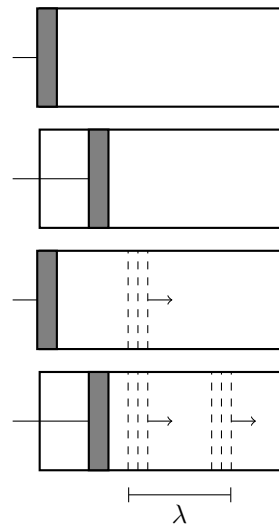


Capítulo 3

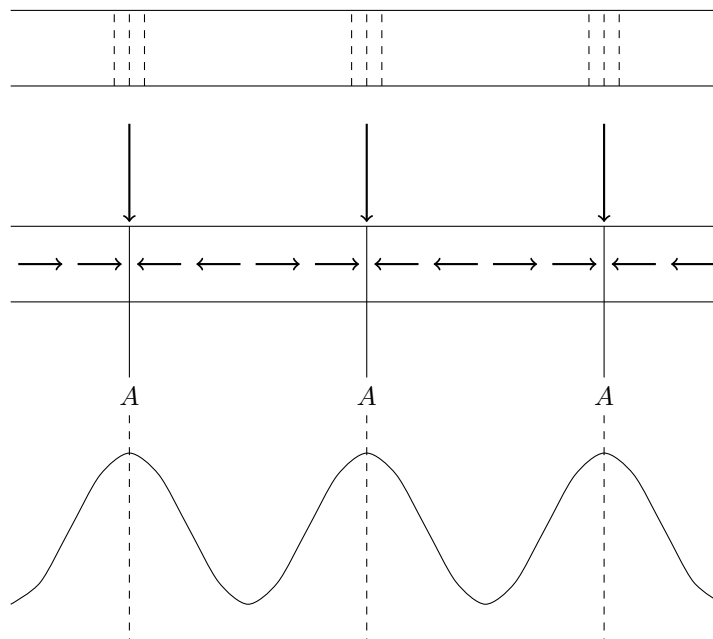
Sonido

3.1. Ondas de Sonido

Una onda sonora es una onda longitudinal, la cual se genera al existir una fuente que genera un aumento de presión el cual se propaga a través de un medio. Si tomamos por ejemplo un pistón como se muestra en la figura a continuación y presionamos este pistón, vamos a producir un pulso de presión. Si procedemos a efectuar este movimiento de manera periódica, crearemos un continuo de pulsos, el cual puede interpretarse como una onda armónica en términos de variaciones de presión dentro del pistón. En la figura puede verse que los máximos de presión están en los puntos con líneas punteadas y los mínimos de presión entre cada set de máximos de presión. Esto nos permite poder definir apropiadamente una longitud de onda λ y frecuencia f .



Por otro lado sabemos que las partículas tienden a moverse de sectores de mayor presión a sectores de menor presión, por lo que las partículas oscilarán entre puntos de mayor presión. Ahora si ahora consideramos los puntos de máximo y mínimo desplazamiento, podemos identificar que donde se produce la presión máxima se tiene un desplazamiento mínimo, y donde la presión es mínima se produce un desplazamiento máximo.



Este tipo de onda periódica puede describirse por medio de una función armónica con respecto a la presión o al máximo o mínimo de desplazamiento, i.e.

$$P(x, t) = P_0 \cos(kx \pm \omega t + \phi), \quad (3.1.1)$$

donde los parámetros k , ω y P_0 están bien definidos. También podemos definir la velocidad de propagación $v = f\lambda = \omega/k$, donde ahora v es la velocidad del sonido en algún medio. El sonido se desplaza a distintas velocidades, dependiendo del material en que se desplaza, por ejemplo:

Material	Velocidad [m/s]
Aire a 0[°C]	331,5
Agua a 25[°C]	1593
Acero	6200
Madera	3700

La velocidad de propagación del sonido también se puede obtener de la

siguiente forma:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho}}, \quad (3.1.2)$$

donde F es una fuerza restituyente y ρ corresponde a la densidad del material donde se propaga. En el caso que el sonido se propague en un gas ideal (del cual hablaremos más adelante) la velocidad se obtiene como

$$v_{\text{gas}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\rho}}, \quad (3.1.3)$$

donde γ y R son constantes que dependen de cada gas. Si se tiene un sólido la velocidad está dada por:

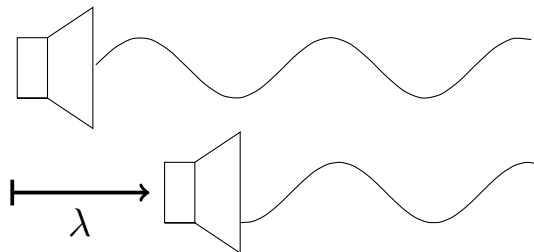
$$v_{\text{sólido}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (3.1.4)$$

en este caso E se conoce como modulo de Young, que representa la elasticidad del sólido.

La onda de sonido corresponde a una onda longitudinal, pero esta puede representarse de la misma manera que una onda transversal ya que podemos identificar la forma en que la presión se distribuye en el material. Gracias a esto, la onda posee las propiedades de cualquier onda y cumple con todas las características que vimos anteriormente.

3.2. Interferencia de Sonido

Una de las primeras características que describimos de las ondas, es el hecho que dos ondas suman su amplitud si se encuentran en un mismo punto. Esto puede llevar a interferencias constructivas o destructivas. Observemos esto desde el punto de vista de una onda en una dimensión. Supongamos que se tienen dos parlantes iguales que apuntan en la dirección horizontal a una distancia λ como se ve en la figura

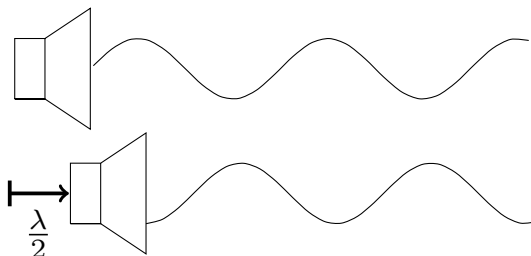


En este caso podemos observar que las ondas van a sumarse constructivamente, por lo que la onda resultante tendrá el doble de amplitud. Es fácil de

intuir que esto ocurrirá siempre que la distancia d entre los parlantes sea:

$$d = n\lambda. \quad \text{donde } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.1)$$

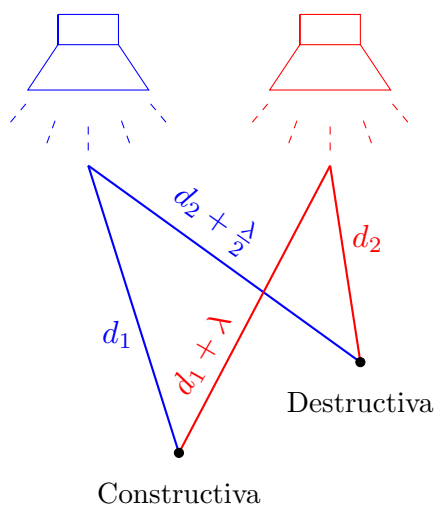
Por otro lado, si ahora tenemos una configuración igual pero la distancia entre los parlantes es $\lambda/2$, lo que se puede observar en la siguiente figura



Las dos ondas van a tener una interferencia destructiva, generando una onda de cero amplitud. De nuevo esto ocurrirá siempre que se cumpla

$$d = \frac{(2n+1)\lambda}{2}. \quad (3.2.2)$$

En el caso de tener más de una dimensión se obtendrán resultados similares, por ejemplo, imaginemos ahora que se tienen dos parlantes separados por una distancia cualquiera. Como la onda de sonido se propaga en todas direcciones, existen puntos especiales donde hay interferencia constructiva y otros donde es destructiva.



Por ejemplo, si en un punto la distancia al primer parlante es d_1 , existe una interferencia constructiva si la distancia al segundo parlante es $d_2 = d_1 + n\lambda$. En



el caso contrario si, por ejemplo, la distancia al segundo parlante es d_2 , entonces la distancia al primer parlante d_1 para que la interferencia sea destructiva se tiene que tener $d_1 = d_2 + \frac{2n+1}{2}\lambda$.

3.3. Sonido en Tubo

Al poder describir la onda de sonido como una onda armónica se puede tener un sistema muy similar a una onda moviéndose en una cuerda. Para esto necesitamos un escenario con las mismas propiedades a el de una cuerda. Varios instrumentos musicales han podido traspasar esto a notas musicales, de los cuales destacaremos dos tipos, el primero es donde existe un tubo y una boquilla que cuenta con una lengüeta la cual vibra y crea un frente de onda de presión. Algunos instrumentos tienen esta forma, por ejemplo, el clarinete, la flauta dulce, el saxofón, etc. Por otro lado existen instrumentos que no cuentan con lengüeta, para producir este frente de onda. En estos instrumentos la vibración tiene que ser producida por el músico donde los labios producen estas vibraciones. Algunos instrumentos de este tipo son la flauta traversa, la trompeta, etc.

Si tenemos un tubo en donde la vibración es producida como el primer grupo explicado con anterioridad, la lengüeta produce entonces un máximo de vibración. Este tubo puede estar abierto o cerrado al otro lado. Un tubo abierto permite el libre movimiento de las partículas dentro del tubo, por lo que se consideraría de máximo desplazamiento, en cambio el tubo cerrado no permite a las partículas dentro desplazarse más allá, por lo que este punto sería considerado un punto de mínimo desplazamiento. Estos dos casos corresponderían a una cuerda abierta en el lado izquierdo y suelta en el lado derecho para un tubo abierto, y una cuerda suelta en el lado izquierdo y fija en el lado derecho para un tubo cerrado. En otras palabras vamos a analizar un tubo donde el lado izquierdo está la boquilla y el lado derecho se encuentra abierto o cerrado.

1. Tubo con extremo derecho abierto:

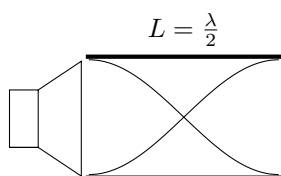
En este caso ambos extremos tienen un máximo de desplazamiento, por lo que se puede de manera inmediata identificar cuales son sus armónicos.

■ Primer Armónico (modo fundamental):

Para el modo fundamental de oscilación se tiene una longitud de onda de $\lambda_1 = 2L$ y una frecuencia de

$$f_1 = \frac{v}{2L}. \quad (3.3.1)$$

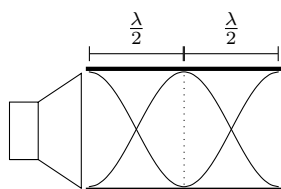
Este se representa en la siguiente figura:



■ **Segundo Armónico:**

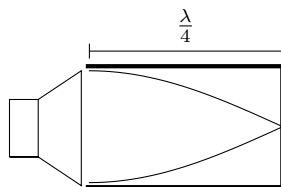
Para el segundo armónico se tiene una longitud de onda de $\lambda_2 = L$ y una frecuencia de

$$f_2 = \frac{v}{L} = 2f_1. \quad (3.3.2)$$



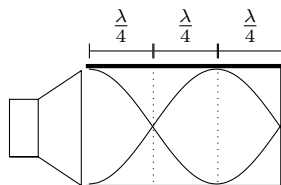
2. **Tubo con extremo derecho cerrado:**

- **Primer Armónico:** De la misma manera que en el caso anterior, se puede obtener el modo fundamental viendo la geometría del sistema, en este caso la longitud de onda estará dada por $\lambda_1 = 4L$ por lo que su frecuencia de oscilación es $f_1 = v/4L$.



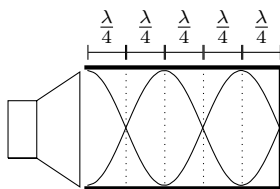
■ **Segundo Armónico:**

Para el segundo armónico se tiene una longitud de onda de $\lambda_2 = 4L/3$ y su frecuencia es $f_2 = 3v/4L$.



■ **Tercer Armónico:**

Para el tercer armónico se tiene una longitud de onda de $\lambda_3 = 4L/5$ y una frecuencia de $f_3 = 5v/4L$.

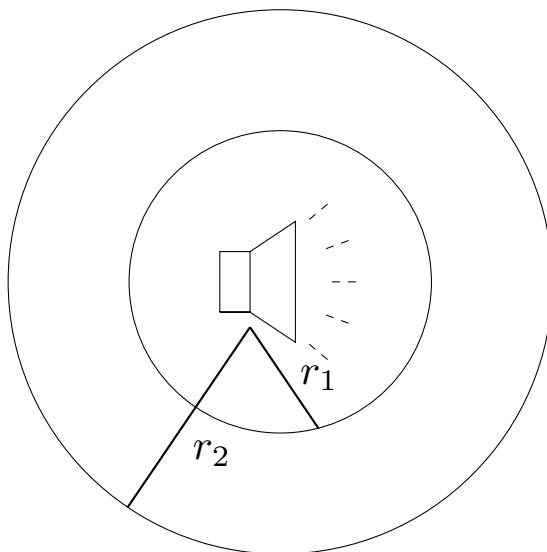


3.4. Potencia e Intensidad

La generación de una onda de sonido se efectúa por medio de un emisor que entrega potencia al medio. Esta potencia es luego repartida radialmente en las tres dimensiones, es por tanto que mientras más lejos un receptor se encuentre del emisor, menor es la cantidad de potencia que recibe. Para tomar en cuenta esto se define la intensidad. Esta toma en cuenta la fracción de potencia y está dada por:

$$I = \frac{\text{potencia}}{\text{superficie}}, \quad (3.4.1)$$

Para entender mejor este concepto, supongamos que tenemos dos receptores a distancias r_1 y r_2 respectivamente, tal como se ve en la siguiente figura





La superficie donde se encuentran ambos observadores están dadas por:

$$A_1 = 4\pi r_1^2, \quad (3.4.2)$$

$$A_2 = 4\pi r_2^2, \quad (3.4.3)$$

Por lo que la intensidad que recibe cada observador estaría dada por la razón entre la potencia y su correspondiente superficie en donde se encuentra, y equivale a:

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2}, \quad (3.4.4)$$

$$I_2 = \frac{P}{4\pi r_2^2}. \quad (3.4.5)$$

Si tomamos la razón entre ambas intensidades obtenemos que

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}, \quad (3.4.6)$$

es decir, mientras mayor sea la distancia de un observador con respecto a la fuente, la intensidad de sonido decae de manera $\sim 1/r^2$, y la razón de dos observadores con respecto a una fuente va como la razón del inverso de sus distancias al cuadrado.

3.4.1. Decibeles

Una gran particularidad que tiene nuestro oído, es que puede escuchar sonidos entre el siguiente rango de frecuencias

$$20 \text{ [Hz]} \sim 20 \text{ [kHz]}. \quad (3.4.7)$$

Por otro lado, la mínima intensidad que puede escuchar el ser humano es de

$$I_0 = 10^{-12} \text{ [W/m}^2\text{]}, \quad (3.4.8)$$

y un máximo de

$$I_M \sim 10^{13} I_0. \quad (3.4.9)$$

Este rango de intensidades es muy amplio, por lo que es favorable introducir un nuevo parámetro que nos pueda dar mejor información acerca de la intensidad que percibimos. Esta nueva unidad son los decibeles db , estos se definen de la siguiente forma:

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right). \quad (3.4.10)$$

En el caso que $I = I_0$ se tiene que $\beta = 0$. El rango del dolor, la intensidad máxima que puede escuchar un humano, equivale a 120 db . Para comparar la intensidad de dos sonidos se usa la siguiente ecuación:

$$\Delta\beta = 10 \log \left(\frac{I_2}{I_1} \right) \quad (3.4.11)$$



Para comparar la intensidad de dos sonidos a distancia diferente se puede fácilmente llegar a:

$$\Delta\beta = 20 \log \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \quad (3.4.12)$$

A continuación se muestra una tabla con decibeles y su respectivo ejemplo:

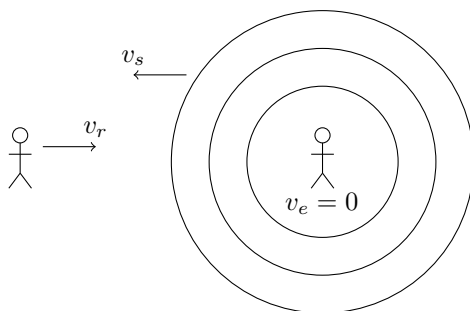
Decibeles	Ejemplo
0	-
10	Afuera de un estudio de música
20	Living vacío
30	Interior de biblioteca
40	Conversación tranquila
50	Oficina
60	-
70	Calle transitada
80	-
90	Metro
100	Taladro
120	Umbral del dolor
150	Concierto
160	Turbina jet

3.5. Efecto Doppler

El efecto Doppler corresponde al fenómeno en el cual la longitud de onda y la frecuencia de una onda varía según el desplazamiento del emisor y el receptor. Para entender este fenómeno partiremos con un ejemplo sencillo.

■ Emisor inmóvil y receptor móvil

Imaginemos que tenemos una persona (a la derecha de la figura a continuación) que emite un sonido a una frecuencia constante f_e con una longitud de onda λ , este emisor está quieto mientras que la persona que recibe la señal a su izquierda se mueve a una velocidad v_r .



La frecuencia de la persona que recibe la onda será mayor ya que al acercarse al emisor pasará más rápido por cada longitud de onda, es por tanto que la frecuencia que recibe el receptor se calculará mediante la suma de la velocidad del sonido (v_s), sumándole la velocidad con que atraviesa las ondas, i.e.

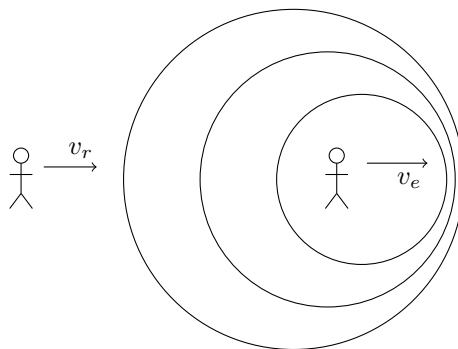
$$f_r = \frac{v_s + v_r}{\lambda}, \quad (3.5.1)$$

$$\Rightarrow f_r = \frac{v_s + v_r}{v_s} f_e. \quad (3.5.2)$$

Podemos ver que si la velocidad del receptor hubiese sido cero, entonces el percibe la misma frecuencia que la emitida, al contrario, si el receptor se hubiese movido alejándose del emisor, entonces habría que reemplazar $v_r \rightarrow -v_r$, lo que nos da una frecuencia menor a la del emisor. Nuestra primera conclusión es que si el receptor y el emisor se acercan, luego el receptor escucha un tono más agudo (de mayor frecuencia), o si ambos se alejan, entonces el receptor escuchará un sonido más grave, de menor frecuencia.

■ Emisor y receptor móviles

Si consideramos un caso más general, podemos también decir que el emisor puede estar moviéndose con respecto al receptor, en este caso podemos, en primera instancia, analizar que ocurre con la señal que emite el emisor. Como se observa en la figura, si el emisor se está moviendo hacia la derecha las longitudes que emite se encontrarán más cercas unas con otras a su derecha ya que se está moviendo hacia ese lado. Por el contrario, los pulsos que emite hacia su izquierda se encontrarán más separados ya que se está alejando.



Podemos entonces fácilmente deducir que las longitudes de onda que emite

hacia el frente y hacia atrás dependen de la velocidad del emisor, i.e.

$$\lambda_{\text{frente}} = \frac{v_s - v_e}{f_e}, \quad (3.5.3)$$

$$\lambda_{\text{atrás}} = \frac{v_s + v_e}{f_e}, \quad (3.5.4)$$

$$(3.5.5)$$

Las longitudes de onda que emite hacia atrás son recibidas por el receptor que también se encuentra moviéndose hacia la derecha, es por tanto que si usamos la ecuación (3.5.1) obtenemos

$$f_r = \frac{v_s + v_r}{\lambda_{\text{atrás}}}, \quad (3.5.6)$$

$$\Rightarrow f_r = \frac{v_s + v_r}{v_s + v_e} f_e. \quad (3.5.7)$$

Para entender un poco la ecuación anterior, hay que analizar algunos casos:

- $v_r > 0$ y $v_e > 0$, y $v_r = v_e$, entonces

$$f_r = f_e \quad (3.5.8)$$

- $v_r > v_e$, y $v_r > 0$ y $v_e > 0$, entonces

$$f_r > f_e \quad (3.5.9)$$

- $v_r = 0$ y $v_e < 0$, entonces

$$f_r > f_e \quad (3.5.10)$$

- $v_r = 0$ y $v_e > 0$, entonces

$$f_r < f_e \quad (3.5.11)$$

Existen varios casos más que pueden analizarse. Hay que notar que los signos utilizados fueron establecidos en este ejemplo en particular, si se escogiese otro marco de referencia, hay que darse cuenta del cambio de los signos.

3.6. Ejercicios

Ejercicio 8. Un radiopatrulla de Carabineros viaja a 80 [km/h] por una carretera, por su lado pasa un auto que se aleja a una velocidad constante de 140 [km/h] en el mismo sentido. El carabinero enciende el radar que emite una frecuencia de 20 [GHz] para determinar la velocidad del automóvil porque no está seguro si el auto viaja a más de 120 [km/h] que es lo permitido.

El auto que se aleja de Carabineros tiene un sistema especial para alterar el radar. Este dispositivo refleja la onda del radar aumentando su frecuencia en 0,5 [GHz]. El radar registra una frecuencia de la onda reflejada igual 19,2 [GHz]. Considere la velocidad del sonido igual a 340 [m/s].

- Determine la frecuencia del radar que incide sobre el automóvil.
- Determine la velocidad del automóvil que registra el radar de Carabineros. Indique si el automóvil va en exceso de velocidad para el carabinero.
- Si el automóvil tuviese el sistema apagado para alterar el radar, ¿cuál es la frecuencia que registrará el radiopatrulla?

SOLUCIÓN:

- En este caso el receptor es el automóvil con exceso de velocidad (auto *B*) y el emisor es el auto de Carabineros (auto *A*)

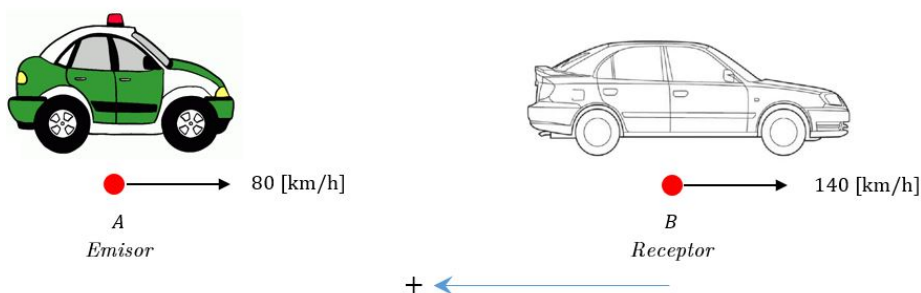


Figura 3.1: Análisis inicial a)

En la Figura 3.1 se muestra el sentido positivo de análisis de las velocidades. La ecuación de efecto Doppler se define como:

$$f_r = \frac{v_r + v_s}{v_e + v_s} \cdot f_e$$

Donde:

v_r : Velocidad del receptor = -140 [km/h] = $-38,89$ [m/s]

v_e : Velocidad del emisor = -80 [km/h] = $-22,22$ [m/s]

v_s : Velocidad del sonido = 340 [m/s]

f_e : Frecuencia del emisor = 20 [GHz]

f_r : Frecuencia captada por el receptor

Entonces:

$$f_r = \frac{-38,89 + 340}{-22,22 + 340} \cdot 20[\text{GHz}] = 18,95[\text{GHz}]$$

b) Ahora la situación presentada corresponde a lo que se muestra en la Figura 3.2:

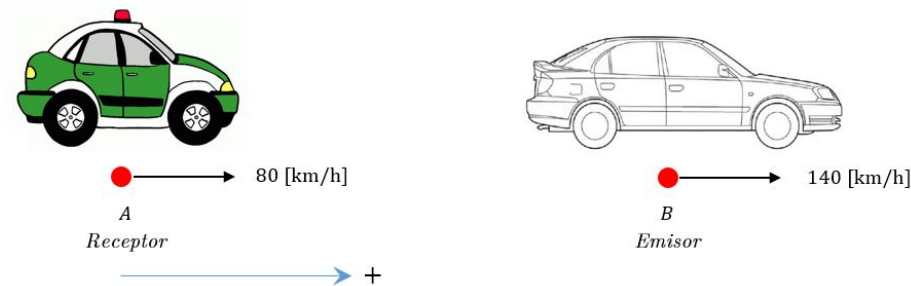


Figura 3.2: Análisis inicial b)

En donde ahora:

v_r : Velocidad del A = 22,22 [m/s]

v_e : Velocidad "aparente" del auto B

v_s : Velocidad del sonido = 340 [m/s]

f_e : Frecuencia del emisor = 218,95 [GHz] + 0,5 [GHz] = 19,45 [GHz]

f_r : Frecuencia captada por el auto A = 19,2 [GHz]

Entonces despejando v_e de la ecuación ($f_r = \frac{v_r + v_s}{v_e + v_s} \cdot f_e$) de efecto Doppler, se obtiene:

$$v_e = (v_r + v_s) \cdot \frac{f_e}{f_r} - v_s$$

$$v_e = (22,22 + 340)[\text{m/s}] \cdot \frac{19,45}{19,2} - 340[\text{m/s}] = 26,94[\text{m/s}] = 96,97[\text{km/h}] < 120[\text{km/h}]$$

Por lo tanto, con el dispositivo de alteración de frecuencia encendido, el radar registra que el auto B no va a exceso de velocidad.



- c) Se presenta la misma situación anterior (caso b)), pero ahora el dispositivo que altera la frecuencia reflejada por el auto B no está encendido, emitiendo éste una frecuencia de $f_e = 18,95$ [GHz]. Ocupando la ecuación ($f_r = \frac{v_r + v_s}{v_e + v_s} \cdot f_e$) se obtiene que la frecuencia captada por el radar (f_r) es de:

$$f_r = \frac{22,22 + 340}{38,89 + 340} \cdot 18,95[\text{GHz}] = 18,12[\text{GHz}]$$