Grade 10 Competition
مسابقة الصف العاشر

OMCC

September 30, 2022
٣٠ سبتمبر، ٢٠٢٢

§1 Problems

المسائل:

Problem 1.1. Evaluate

$$-1-(-1)^2-(-1)^3-\cdots-(-1)^{99}-(-1)^{100}$$

احسب قيمة:

$$-1-(-1)^2-(-1)^3-\cdots-(-1)^{99}-(-1)^{100}$$

Problem 1.2. Let a, b, and c be real numbers such that

$$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}$$

Compute $\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)$

لتكن a, b, و c أعداد حقيقية حيث أن

$$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}$$

احسب $\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)$

Problem 1.3. Consider the real numbers x, y, z, u, and v that satisfy the equations

$$\begin{aligned}2x+y+z+u+v&=16\\x+2y+z+u+v&=17\\x+y+2z+u+v&=19\\x+y+z+2u+v&=21\\x+y+z+u+2v&=23\end{aligned}$$

Find $x+y+z+u+v$

لتكن x,y,z,u و v أعداد حقيقية تحل المعادلات:

2x+y+z+u+v = 16

x+2y+z+u+v = 17

x+y+2z+u+v = 19

x+y+z+2u+v = 21

احسب $x+y+z+u+v$

Problem 1.4. Suppose a, b are two numbers such that $a^2+b^2+8a-14b+65=0$. Find the value of a^2+ab+b^2.

افترض أن a و b عددان حيث أن $a^2+b^2+8a-14b+65=0$. احسب قيمة a^2+ab+b^2
.

Problem 1.5. Find the product of all the possible values of the expression

$$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}$$

for non-zero real numbers a, b, and c.
(Reminder: $|a|$ is the absolute, non-negative value of a)

أوجد حاصل ضرب جميع القيم الممكنة ل

$$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}$$

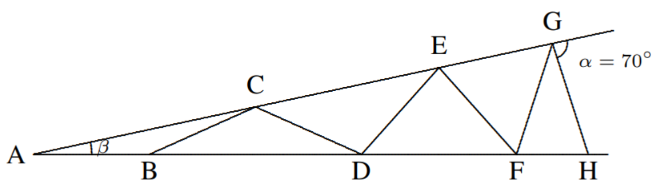
حيث أن a و b و c أعداد حقيقية لا يساوي أي منها الصفر (تذكير: $|a|$ هي القيمة المطلقة (غير السالبة) ل a)

Problem 1.6. Find the sum of the roots and the product of the roots of $|x|^2+|x|-6=0$. Multiply these 2 values. What is the result?

أوجد حاصل جمع وحاصل ضرب جذور المعادلة $|x|^2+|x|-6=0$. إذا ضربت القيمتين، ما الناتج ؟

Problem 1.7. Let $AB=BC=CD=DE=EF=FG=GH$, and $\alpha=70°$. Find β in degrees.

إذا كان $AB=BC=CD=DE=EF=FG=GH$ ، و $\alpha=70°$ ، أوجد قيمة الزاوية β بالدرجات.



Problem 1.8. Let $ABCD$ be a square, P be an inner point such that $PA : PB : PC = 1 : 2 : 3$. Find $\angle APB$ in degrees.

ليكن ABCD مربعا، ولتكن P نقطة داخل ذلك المربع بحيث يكون $PA : PB : PC = 1 : 2 : 3$. أوجد قيمة $\angle APB$ بالدرجات.

Problem 1.9. In $\triangle ABC$, $\angle ACB = 60°$, $\angle BAC = 75°$, AD is perpendicular on BC at D, BE is perpendicular on AC at E, AD intersects BE at H. Find $\angle CHD$ in degrees.

في $\triangle ABC$ ، $\angle ACB = 60°$ ، $\angle BAC = 75°$ ، كما أن AD متعامد على BC عند D ، و BE متعامد على AC عند E ، و AD يقطع BE عند H . إذا، أوجد قيمة الزاوية $\angle CHD$ بالدرجات.

Problem 1.10. Given that G is the centroid of $\triangle ABC$, $GA = 2\sqrt{3}$, $GB = 2\sqrt{2}$, and $GC = 2$. Find the area of $\triangle ABC$.
(Remember: The centroid x and y coordinates are the means of the x and y coordinates of the triangle vertices, respectively: $(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}.\frac{y_1+y_2+y_3}{3})$.)

ليكن G مركز الثقل ل $\triangle ABC$ و ، $GA = 2\sqrt{3}$ ، $GB = 2\sqrt{2}$ ، $GC = 2$. أوجد مساحة $\triangle ABC$. (ملاحظة: حساب إحداثيات مركز الثقل للمثلث ($\frac{x_1+x_2+x_3}{3}.\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$).)

Problem 1.11. Al, Bill, and Cal will each randomly be assigned a whole number from 1 to 10, inclusive, with no two of them getting the same number. What is the probability that Al's number will be a whole number multiple of Bill's and Bill's number will be a whole number multiple of Cal's?

علي، وأحمد، ومحمود يحصل كل منهم على رقم عشوائي من 1 إلى 10 ، بما فيهم ال 1 و ال 10 ، لا يأخذ أي منهم رقما مشتركا، ما هي احتمالية أن يكون رقم أحد مضاعفات رقم أحمد ورقم أحمد أحد مضاعفات رقم محمود؟

Problem 1.12. Call a positive integer an uphill integer if every digit is strictly greater than the previous digit. For example, $1357, 89$, and 5 are all uphill integers, but $32, 1240$, and 466 are not. How many uphill integers are divisible by 15?

لنسمي عددا صحيحا موجبا بأنه تصاعدي إذا كانت كل خانة أكبر من تلك التي تسبقها، مثلا، $1357, 89,$ و 5 أعداد تصاعدية، بينما لا تعد $32, 1240,$ و 466 كذلك. كم عدد الأعداد التصاعدية التي تقبل القسمة على 15 ؟

Problem 1.13. Each vertex of a cube is to be labeled with an integer 1 through 8, with each integer being used once, in such a way that the sum of the four numbers on the vertices of a face is the same for each face. Arrangements that can be obtained from each other through rotations of the cube are considered to be the same. How many different arrangements are possible?

تم ترقيم كل زاوية من مكعب بعدد صحيح من 1 إلى 8 حيث أن كل عدد يتم استخدامه مرة واحدة، كما أن المجموع الأعداد الأربعة على أي وجه من المكعب متساوي، أي مجموعة من

ترتيبات لتلك الأعداد يمكن الحصول عليه من خلال إدارة المكعب تعتبر ترتيبا واحدا، كم عدد الترتيبات الممكنة؟

Problem 1.14. A binary operation $\diamondsuit$ has the properties that $a \diamondsuit (b \diamondsuit c) = (a \diamondsuit b) \cdot c$ and that $a \diamondsuit a = 1$ for all nonzero real numbers a, b, and c. (Here $\cdot$ represents multiplication). The solution to the equation $2016 \diamondsuit (6 \diamondsuit x) = 100$ can be written as $\frac{p}{q}$, where p and q are relatively prime positive integers. What is $p+q$?

عملية ثنائية $\diamondsuit$ لديها خصائص أن $a \diamondsuit (b \diamondsuit c) = (a \diamondsuit b) \cdot c$ كما أن $a \diamondsuit a = 1$ لكل الأعداد الحقيقية غير الصفرية $a, b,$ و c . (هنا آ · آ تعبر عن الضرب). حل المعادلة $2016 \diamondsuit (6 \diamondsuit x) = 100$ يمكن كتابته على هيئة $\frac{p}{q}$ ، حيث p و q أعداد صحيحة موجبة بدون قواسم مشتركة. أوجد $p+q$.

Problem 1.15. Find the number of ways 66 identical coins can be separated into three nonempty piles so that there are fewer coins in the first pile than in the second pile and fewer coins in the second pile than in the third pile.

أوجد عدد الطرق التي يمكن بها تقسيم 66 عملة نقدية متطابقة على ثلاث كومات حيث أن عدد العملات في الكومة الأولى أقل من عددها في الثانية، وعددها في الكومة الثانية أقل من عددها في الثالثة.

Problem 1.16. Charles has two six-sided die. One of the die is fair, and the other die is biased so that it comes up six with probability $\frac{2}{3}$ and each of the other five sides has probability $\frac{1}{15}$. Charles chooses one of the two dice at random and rolls it three times. Given that the first two rolls are both sixes, the probability that the third roll will also be a six is $\frac{p}{q}$, where p and q are relatively prime positive integers. Find $p+q$.

يوسف لديه مكعبان من النرد بستة أوجه، أحد المكعبين هو مكعب عادل، أما الآخر فهو مكعب متحيز حيث أن نسبة ظهور رقم ستة هي $\frac{2}{3}$ ، ونسبة ظهور أي جانب آخر هي $\frac{1}{15}$. اختار يوسف أحد المكعبين بدون معرفته ورماه ثلاث مرات، إذا علمنا أن أول رميتين نتجا عن ظهور رقم ستة، يمكننا كتابة احتمالية أن تكون نتيجة الرمية الثالثة أيضا ستة على هيئة $\frac{p}{q}$ ، حيث p و q أعداد صحيحة موجبة بدون قواسم مشتركة، أوجد $p+q$.

Problem 1.17. Each of the 100 students in a certain summer camp can either sing, dance, or act. Some students have more than one talent, but no student has all three talents. There are 42 students who cannot sing, 65 students who cannot dance, and 29 students who cannot act. How many students have two of these talents?

100 طالب في مخيم صيفي يمكنهم إما الغناء أو الرقص أو التمثيل، بعض الطلاب لديهم أكثر من موهبة، بينما لا يملك طالب ثلاث مواهب مجتمعة، يوجد 42 لا يستطيعون الغناء، و 65 لا يستطيعون الرقص، و 29 لا يستطيعون التمثيل، كم عدد الطلاب الذين يمتلكون موهبتين من تلك المواهب؟

Problem 1.18. Bernardo randomly picks 3 distinct numbers from the set $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ and arranges them in descending order to form a 3-digit number. Silvia randomly picks

3 distinct numbers from the set $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ and also arranges them in descending order to form a 3-digit number. The probability that Bernardo's number is larger than Silvia's number is $\frac{p}{q}$, where p and q are relatively prime positive integers. Find $p + q$.

يختار عادل 3 أرقام مختلفة من المجموعة $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ويرتبهم ترتيبا تنازليا كي يكون رقما من ثلاث خانات. فاطمة تختار رقما 3 أرقام مختلفة من المجموعة $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ، وترتبهم أيضا تنازليا كي تحصل على رقم مكون من ثلاث خانات، احتمالية أن يكون رقم عادل أكبر من رقم فاطمة هي $\frac{p}{q}$ ، حيث p و q أعداد صحيحة موجبة بدون قواسم مشتركة. أوجد $p + q$.

Problem 1.19. Real numbers a and b are chosen with $1 < a < b$ such that no triangle with positive area has side lengths 1, a, and b or $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a}$, and 1. What is the smallest possible value of b?

a و b هي أعداد حقيقية تم اختيارها حيث أن $1 < a < b$ ولا يمكن عمل مثلث حقيقي (بمساحة موجبة) باستخدام الأرقام 1 ، a ، و b – أو – $\frac{1}{b}$ ، $\frac{1}{a}$ ، و 1 . ما هي أصغر قيمة ممكنة ل b ؟

Problem 1.20. Find the remainder when $9 \times 99 \times 999 \times \cdots \times \underbrace{99\cdots9}_{999\text{ 9's}}$ is divided by 1000.

أوجد باقي القسمة عندما نقسم $9 \times 99 \times 999 \times \cdots \times \underbrace{99\cdots9}_{\text{٩٩٩ «٩»}}$ على 1000 .