পঞ্চম অধ্যায়

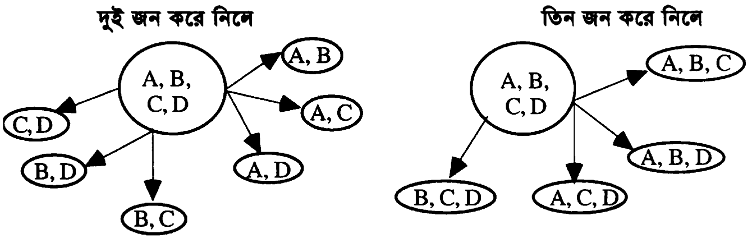
বিন্যাস ও সমাবেশ (*Permutations and Combinations*)

5.1. গণনার যোজন ও গুণন বিধি

গণনার যোজন বিধি :

মনে করি A, B, C, D নামের 4 জন খেলোয়াড়ের মধ্য থেকে প্রতিবারে দুইজন এবং তিনজন করে নিয়ে দল গঠন করতে হবে।

তাহলে, কত সংখ্যক উপায়ে দল গঠন করা যায় ? নিচের দুইটি চিত্র লক্ষ করি ঃ



উপরের চিত্র থেকে দেখা যায় দুইজন করে নিয়ে প্রথমে কাজটি 6 সংখ্যক উপায়ে এবং তিন জন করে নিয়ে দ্বিতীয়বারে কাজটি 4 সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যায়। সুতরাং স্বতন্ত্রভাবে কাজটি মোট $(6 + 4)$ বা, 10 সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যায়। একেই **গণনার যোজন বিধি** বলা হয়।

সাধারণভাবে,

> একটি কাজ সম্ভাব্য m সংখ্যক উপায়ে এবং অন্য একটি কাজ স্বতন্ত্রভাবে সম্ভাব্য n সংখ্যক উপায়ে করতে পারলে, কাজ দুইটি একত্রে সম্ভাব্য $(m + n)$ সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন উপায়ে করাকেই বলা হয় **'গণনার যোজন বিধি'**।

উদাহরণ। একটি মহাবিদ্যালয়ের পরিচালনা কমিটিতে 4 জন পুরুষ ও 3 জন মহিলা সদস্য আছেন। তাদের মধ্য থেকে 2 জন সদস্য (কেবল পুরুষ বা মহিলা) নিয়ে কতগুলি উপকমিটি গঠন করা যায় ?

সমাধান ঃ মনে করি, পুরুষ সদস্যরা হলেন A, B, C, D এবং মহিলা সদস্যরা A_1, B_1, C_1.

$(A$ ও $B)$, $(A$ ও $C)$, $(A$ ও $D)$, $(B$ ও $C)$, $(B$ ও $D)$ এবং $(C$ ও $D)$ পুরুষ সদস্যদের সমন্বয়ে 2 জন সদস্যবিশিষ্ট উপকমিটি গঠন করা যায়, অর্থাৎ 6টি উপকমিটি গঠন করা যায়।

আবার $(A_1$ ও $B_1)$, $(A_1$ ও $C_1)$ এবং $(B_1$ ও $C_1)$ মহিলা সদস্যদের সমন্বয়ে 2 জন সদস্যবিশিষ্ট 3টি উপকমিটি গঠন করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় উপ-কমিটির সংখ্যা $= 6 + 3 = 9$.

গণনার গুণন বিধি ঃ

মনে করি, ঢাকা হতে খুলনায় 6টি ভিন্ন ভিন্ন বাস যাতায়াত করে। তাহলে, একজন লোক কত সংখ্যক উপায়ে ঢাকা হতে খুলনায় পৌঁছে আবার ঢাকায় ফিরে আসতে পারবেন, যদি যাবার সময় তিনি যে বাস ব্যবহার করেছেন ফিরার সময় ঐ বাস ব্যবহার না করেন।

যেহেতু 6টি ভিন্ন ভিন্ন বাস আছে, সুতরাং লোকটি 6 সংখ্যক উপায়ে খুলনায় পৌঁছতে পারবেন। 6 সংখ্যক উপায়ের যে কোনো 1টি উপায়ে খুলনায় পৌঁছে তিনি 5 সংখ্যক উপায়ে ঢাকায় ফিরে আসতে পারবেন, কারণ যাবার ও ফিরার সময় তিনি একই বাস ব্যবহার করবেন না। সুতরাং ঢাকা হতে খুলনায় পৌঁছে আবার ঢাকায় ফিরার কাজ দুইটি একত্রে মোট (6×5) বা 30 সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করতে পারবেন।

সাধারণভাবে, যদি m সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন পদ্ধতিতে কোনো একটি কাজ সম্পন্ন করা যায় এবং এদের এক পদ্ধতিতে কাজটি সম্পাদিত হবার পর যদি অপর একটি কাজ n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন পদ্ধতিতে সম্পন্ন করা যায়, তাহলে কাজ দুইটি একত্রে মোট $m \times n$ সংখ্যক পদ্ধতিতে সম্পন্ন করা যাবে। একেই বলা হয় "গণনার গুণন বিধি"।

মন্তব্য ঃ উপরের দুইটি কাজ $m \times n$ সংখ্যক পদ্ধতির যে কোনো একটি পদ্ধতিতে সম্পাদিত হবার পর যদি তৃতীয় একটি কাজ r সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যায়, তাহলে তিনটি কাজ একত্রে মোট $m \times n \times r$ সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যাবে। অর্থাৎ যে কোনো সংখ্যক কাজের জন্য 'গণনার গুণন বিধি' প্রয়োগ করা যায়।

উদাহরণ। একজন ছাত্রের তার এক বন্ধুর বাড়ি যেতে 5টি ভিন্ন ভিন্ন রাস্তা আছে এবং ঐ বন্ধুর বাড়ি হতে তাদের মহাবিদ্যালয়ে যাবার জন্য 4টি ভিন্ন ভিন্ন রাস্তা আছে। ছাত্রটি তার বন্ধুকে নিয়ে কত সংখ্যক উপায়ে মহাবিদ্যালয়ে যেতে পারবে ?

সমাধান ঃ ছাত্রটি তার বন্ধুর বাড়িতে 5টি ভিন্ন ভিন্ন রাস্তায় যেতে পারে। যেহেতু বন্ধুর বাড়ি হতে মহাবিদ্যালয়ে যাবার জন্য 4টি ভিন্ন ভিন্ন রাস্তা আছে, সুতরাং, বন্ধুর বাড়ি যাবার 5টি রাস্তার যে কোনো 1টিতে যেয়ে 4 সংখ্যক উপায়ে তারা মহাবিদ্যালয়ে পৌঁছতে পারবে। অতএব বন্ধুকে নিয়ে ছাত্রটি 5×4 বা, মোট 20 সংখ্যক উপায়ে মহাবিদ্যালয়ে যেতে পারবে।

5.2. বিন্যাস

তিনটি অক্ষর a, b, c এর মধ্য থেকে দুইটি করে নিয়ে পর পর সাজালে পাওয়া যায়

$$ab, ac, ba, bc, ca, cb.$$

আবার তিনটি করে নিয়ে পর পর সাজানো হলে পাওয়া যায় ঃ $abc, acb, bac, bca, cab, cba.$

উপরে প্রাপ্ত প্রত্যেকটিকে বলা হয় এক একটি **বিন্যাস *(Permutation)*.**

নির্দিষ্ট সংখ্যক জিনিস থেকে কয়েকটি বা সব কয়টি একবারে নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায় (অর্থাৎ ভিন্ন ভিন্ন সারি গঠন করা যায়)তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি বিন্যাস বলা হয়।

n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থেকে প্রত্যেকবার r $(r \le n)$ সংখ্যক জিনিস নিয়ে প্রাপ্ত বিন্যাস সংখ্যাকে সাধারণত সংক্ষেপে nP_r বা, ^nP_r বা, $P(n,r)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ 1. প্রত্যেকটি অঙ্ক কেবল একবার ব্যবহার করে 1, 2, 3 দ্বারা কতগুলি দুই অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান ঃ আমরা জানি, দুইটি অঙ্ক পাশাপাশি লিখে অর্থাৎ, সাজিয়ে দুই অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা যায়। এখন 1, 2, 3 এর মধ্য থেকে দুইটি করে নিয়ে সম্ভাব্য সংখ্যাগুলি হল ঃ 12, 13, 21, 23, 31, 32.

অর্থাৎ, মোট সংখ্যা = 6.

আসলে এখানে তিনটি জিনিস (অঙ্ক) থেকে দুটি করে নিয়ে সাজানো হয়েছে। তাহলে,সংজ্ঞানুসারে বিন্যাস সংখ্যা= 6.

5.3. n ! এর ব্যাখ্যা

1 থেকে n পর্যন্ত সব স্বাভাবিক সংখ্যার ধারাবাহিক গুণফলকে সাধারণত n ! দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অর্থাৎ, $n! = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots 3.2.1.$

যেমন, $6! = 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1$

$= 6.\ 5! = 6.\ 5.\ 4!$

মন্তব্য : $n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots\ldots\ldots 3.2.1 = n(n-1)!$

$$= n(n-1)(n-2)! = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots\ldots (n-r+1)(n-r)!.$$

5.4. বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়ের বিভিন্ন সূত্র

(i) ^nP_r নির্ণয় করা, যেখানে n সংখ্যক জিনিসের প্রত্যেকে ভিন্ন ভিন্ন এবং $n \geq r$.

n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস দ্বারা r সংখ্যক শূন্যস্থান যতভাবে পূরণ করা যায় তা হল নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা, অর্থাৎ ^nP_r এর সমান।

প্রথম স্থানটি n সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়, কারণ n সংখ্যক জিনিসের যে কোনো একটিকে ঐ স্থানে বসানো যায়। প্রথম স্থানটি n সংখ্যক উপায়ের যে কোনো একটি উপায়ে পূরণ করলে দ্বিতীয় স্থানটি অবশিষ্ট $(n-1)$ জিনিসের যে কোনো একটি দ্বারা পূরণ করা যেতে পারে। অর্থাৎ দ্বিতীয় স্থানটি $(n-1)$ সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়।

সুতরাং, প্রথম দুইটি স্থান একত্রে $n(n-1)$সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যাবে (অনুচ্ছেদ 6.1)।

অর্থাৎ $^nP_2 = n(n-1)$.

আবার প্রথম ও দ্বিতীয় স্থান n সংখ্যক জিনিসের যে কোনো দুইটি দ্বারা পূরণ করার পর তৃতীয় স্থানটি পূরণের জন্য

$(n-2)$ সংখ্যক জিনিস অবশিষ্ট থাকে। সুতরাং, প্রথম দুইটি স্থান একত্রে পূরণ করার প্রত্যেকটি উপায়ের জন্য তৃতীয় স্থান $(n-2)$ সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়। অর্থাৎ, প্রথম তিনটি স্থান একত্রে $n(n-1)(n-2)$ সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়। সুতরাং, $^nP_3 = n(n-1)(n-2)$.

এভাবে অগ্রসর হলে আমরা পাই $^nP_4 = n(n-1)(n-2)(n-3)$, $^nP_5 = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ ইত্যাদি।

$\therefore\ ^nP_r = n(n-1)(n-2)\ .....\ r$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$= n(n-1)(n-2)\ ....\ (n-r+1)$

অর্থাৎ, $^nP_r = n(n-1)(n-2)\ ....\ (n-r+1)$.

লক্ষ করি : একবারে যতগুলি জিনিস নেয়া হয় বিন্যাস সংখ্যা হল ততগুলি উৎপাদকের গুণফল এবং শেষ উৎপাদকটি $= n -$ (যতগুলি জিনিস একবারে নেয়া হয়) $+ 1$

অনুসিদ্ধান্ত 1. n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থেকে সব জিনিস একবারে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা, অর্থাৎ

$^nP_n = n(n-1)(n-2)......\ n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত।

$$= n(n-1)(n-2)\ .....\ (n-n+1) = n(n-1)(n-2)\ ....\ 1 = n(n-1)(n-2)\ .....\ 3.2.1.$$

$\therefore\ ^nP_n = n!$

অনুসিদ্ধান্ত 2. আমরা জানি

$^nP_r = n(n-1)(n-2)\ ....\ (n-r+1)$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ ....\ (n-r+1)\ (n-r)\ (n-r-1)\ ....\ 3.2.1}{(n-r)(n-r-1)\ ....\ 3.2.1} = \frac{n!}{(n-r)\,!}$$

(ii) 0! এর মান নির্ণয় :

অনুসিদ্ধান্ত 1 থেকে $^nP_n = n!$

আবার অনুসিদ্ধান্ত 2 থেকে $^nP_n = \frac{n!}{0!}$ [$r = n$ বসিয়ে]

$\therefore n! = \frac{n!}{0!}$, অর্থাৎ $0! = 1$.

(iii) প্রত্যেকটি ভিন্ন নয় এরূপ জিনিসের বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করা

মনে করি, n সংখ্যক জিনিসের মধ্যে p সংখ্যক এক রকমের, q সংখ্যক দ্বিতীয় রকমের, r সংখ্যক তৃতীয় রকমের এবং বাকি জিনিসগুলি ভিন্ন ভিন্ন।

যদি p সংখ্যক একই রকম জিনিসকে p সংখ্যক স্বতন্ত্র জিনিস দ্বারা বদলানো হয়, তবে এ স্বতন্ত্র জিনিসগুলি নিজেদের স্থানে রেখে তাদেরকে $p!$ সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায়। অর্থাৎ, নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যার একটি থেকে $p!$

সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যায়। এখন নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা x হলে, p সংখ্যক জিনিস স্বতন্ত্র ধরার ফলে মোট বিন্যাস সংখ্যা হবে $x \times p\,!$.

অনুরূপভাবে $x \times p\,!$ সংখ্যক বিন্যাসের প্রত্যেকটিতে q সংখ্যক একই রকমের জিনিসকে q সংখ্যক স্বতন্ত্র জিনিস দ্বারা পরিবর্তন করা হলে, মোট বিন্যাস সংখ্যা হবে $x \times p\,! \times q\,!$.

তদ্রূপ $x \times p\,! \times q\,!$ সংখ্যক বিন্যাসের প্রত্যেকটিতে r সংখ্যক একই রকম জিনিসকে r সংখ্যক স্বতন্ত্র জিনিস দ্বারা পরিবর্তন করলে মোট বিন্যাস সংখ্যা হয় $x \times p\,! \times q\,! \times r\,!$.

এখন সবগুলি জিনিসই স্বতন্ত্র। সুতরাং, n সংখ্যক জিনিসের সবগুলি একবারে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা হবে $n!$.

$\therefore x \times p\,! \times q\,! \times r\,! = n\,!$ অর্থাৎ, $x = \dfrac{n\,!}{p\,!\,q\,!\,r\,!}$.

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{n\,!}{p\,!\,q\,!\,r\,!}$.

(iv) জিনিসগুলির পুনরাবৃত্তি ঘটতে পারে ঐসব ক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা

***n* সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থেকে একবারে *r* সংখ্যক জিনিস নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করতে হবে, যেখানে যে কোনো জিনিসের *r* সংখ্যক বার পুনরাবৃত্তি ঘটতে পারে।**

এখানে n সংখ্যক জিনিস দ্বারা r সংখ্যক শূন্য স্থান যত প্রকারে পূরণ করা যায় তা হল নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা।

এক্ষেত্রে প্রথম স্থান, দ্বিতীয় স্থান, তৃতীয় স্থান ইত্যাদির প্রত্যেকটি স্থান n সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়; কারণ প্রত্যেক জিনিস বার বার ব্যবহার করা যায়। সুতরাং, তিনটি স্থান একত্রে $n \times n \times n$, অর্থাৎ n^3 উপায়ে পূরণ করা যায়। অর্থাৎ বিন্যাস সংখ্যা $= n^3$.

এভাবে অগ্রসর হলে, একবারে r সংখ্যক জিনিস নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= n^r$.

অর্থাৎ, এ বিশেষ ক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা $= n^r$.

সমস্যা ও সমাধান :

উদাহরণ 1. প্রত্যেকটি অঙ্ক কেবল একবার নিয়ে 8, 9, 7, 6, 3, 2 অঙ্কগুলি দ্বারা তিন অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যা গঠন করা যায় ?

সমাধান : যেহেতু অঙ্কগুলি বিভিন্নভাবে সাজালে ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যা হয়, সুতরাং 6 টি জিনিসের মধ্য থেকে 3 টিকে একবারে নিয়ে যে বিন্যাস সংখ্যা তা হল মোট সংখ্যার সমান।

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= {}^6P_3 = \dfrac{6!}{(6-3)!} = \dfrac{6\,!}{3\,!} = 120.$

উদাহরণ 2. '*Courage*' শব্দটির বর্ণগুলি নিয়ে কতগুলি বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করা যায় যেন প্রত্যেক বিন্যাসের প্রথমে একটি স্বরবর্ণ থাকে?

সমাধান : '*Courage*' শব্দটিতে 7টি অক্ষর যার মধ্যে চারটি স্বরবর্ণ (*o, u, a, e*) আছে। মনে করি, এদের যে কোনো একটি স্বরবর্ণ (*o*) কে প্রথম স্থানে রাখা হল। তাহলে বাকি 6টি অক্ষর দ্বারা অবশিষ্ট স্থানগুলি 6! উপায়ে পূরণ করা যায়।

$\therefore$ 0 কে প্রথমে রেখে বিন্যাস সংখ্যা $= 6\,! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720.$

তদ্রূপ অপর স্বরবর্ণগুলি প্রথমে রাখলে প্রত্যেক ক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা $= 720.$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 4 \times 720 = 2880.$

উদাহরণ 3. স্বরবর্ণগুলিকে পাশাপাশি না রেখে '*Daughter*' শব্দটির অক্ষরগুলি কত সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায়?

সমাধান : শব্দটিতে মোট ৪টি অক্ষর আছে। এ অক্ষরগুলি সবই ভিন্ন ভিন্ন। সুতরাং সবগুলি অক্ষর একবারে নিয়ে ৪টি অক্ষরকে ${}^8P_8$ সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায়।

এখন স্বরবর্ণ *a, u, e* কে একক অক্ষর ধরে *d, g, h, t, r, (aue)* অর্থাৎ 6টি অক্ষরের সবগুলি একবারে নিয়ে ${}^6P_6$ সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায়। এখানে ক্রমানুসারে *(aue)* স্বরবর্ণগুলিকে একক অক্ষর ধরা হয়েছে। কিন্তু এ 3 টি স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে 3 ! অর্থাৎ, 6 সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায়।

∴ স্বরবর্ণগুলি পাশাপাশি রেখে অক্ষরগুলিকে ${}^6P_6 \times 6$ সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায়।

∴ স্বরবর্ণগুলি পাশাপাশি না রেখে বিন্যাস সংখ্যা $= {}^8P_8 - {}^6P_6 \times 6$

$$= 8\,! - 6\,! \times 6 = 40320 - 720 \times 6 = 36000.$$

উদাহরণ 4. '*Calculus*' শব্দটির বর্ণগুলির সবগুলি একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায় যেন প্রথম ও শেষ অক্ষর '*u*' থাকে ?

সমাধান ঃ শব্দটির মধ্যে 8টি অক্ষর আছে। এদের মধ্যে দুইটি c, দুইটি l এবং দুইটি u আছে; অবশিষ্ট অক্ষরগুলি বিভিন্ন রকমের।

শর্তানুযায়ী প্রথম ও শেষে u থাকবে। সুতরাং অবশিষ্ট 6টি স্থান বাকি 6টি অক্ষর দ্বারা পূরণ করতে হবে।

যেহেতু বাকি 6টি অক্ষরের মধ্যে 2টি c, 2টি l এবং অন্যগুলি ভিন্ন ভিন্ন, সুতরাং 6টি অক্ষরের সবগুলি একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{6\,!}{2\,!\,2\,!}$ [অনুচ্ছেদ 5.4 থেকে] $= 180$.

∴ প্রদত্ত শর্ত অনুযায়ী অক্ষরগুলিকে 180 প্রকারে সাজানো যাবে।

উদাহরণ 5. 0, 1, 2, 3, 4, 5 অঙ্কগুলি দ্বারা ছয় অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি অর্থপূর্ণ সংখ্যা গঠন করা যায় ? (প্রত্যেক অঙ্ক কেবল একবার নিয়ে একটি সংখ্যায় ব্যবহার করে)

সমাধান ঃ ছয় অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা গঠনের জন্য প্রদত্ত 6টি অঙ্কই ব্যবহার করতে হবে।

∴ 6টি অঙ্ক একবারে নিয়ে মোট সংখ্যা $= {}^6P_6 = 720$.

যে সংখ্যার সর্ববামে 0 থাকবে তা ছয় অঙ্কবিশিষ্ট অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবে না। সর্ববামের স্থানটি 0 এর জন্য নির্দিষ্ট রেখে বাকি 5টি অঙ্ককে নিজেদের মধ্যে 5! অর্থাৎ, 120 উপায়ে সাজানো যায়।

সুতরাং, 120টি সংখ্যার সর্ববামে 0 থাকবে।

∴ ছয় অঙ্কবিশিষ্ট মোট সংখা $= 720 - 120 = 600$.

উদাহরণ 6. একজন সংকেত প্রদানকারীর 6টি পতাকা আছে যার মধ্যে 1টি সাদা, 2টি সবুজ এবং 3টি লাল। তিনি 5টি পতাকা সারিতে (*in a row*) ব্যবহার করে কতটি বিভিন্ন সংকেত দিতে পারবেন ?

সমাধান ঃ পাঁচটি পতাকার সম্ভাব্য নির্বাচন নিম্নরূপঃ

	সাদা (1টি)	সবুজ (2টি)	লাল (3টি)
(*a*)	1	2	2
(*b*)	1	1	3
(*c*)	0	2	3

(*a*) এর জন্য বিন্যাস সংখ্যা, অর্থাৎ সংকেত সংখ্যা $= \dfrac{5!}{2!\,2!} = 30$

(*b*) " " " " " " " $= \dfrac{5!}{3!} = 20$

(*c*) " " " " " " " $= \dfrac{5!}{2!\,3!} = 10$

∴ নির্ণেয় মোট সংকেত সংখ্যা $= 30+20+10 = 60$.

উদাহরণ 7. 4, 5, 6, 7, 8 এর প্রত্যেকটিকে যে কোনো সংখ্যক বার নিয়ে চার অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়? এ সংখ্যাগুলির কয়টিতে একই অঙ্ক একাধিবার থাকবে ?

সমাধান ঃ এখানে 5টি অঙ্ক থেকে প্রতিবারে 4টি অঙ্ক (একই অঙ্ক একাধিবারে নিয়েও) পর পর সাজালেই চার অঙ্ক বিশিষ্ট মোট সংখ্যা পাওয়া যাবে। অর্থাৎ 5টি জিনিস থেকে প্রতিবারে 4টি জিনিস (যেখানে একই জিনিসের 4 সংখ্যক বার পুনরাবৃত্তি ঘটতে পারে) নিয়ে বিন্যাস সংখ্যাই হল মোট সংখ্যা।

∴ চার অঙ্কবিশিষ্ট মোট সংখ্যা $= 5^4 = 625$. [অনুচ্ছেদ 6.5]

আবার 5টি অঙ্ক থেকে 4টি অঙ্ক (প্রত্যেকটি কেবল একবার) নিয়ে চার অঙ্কবিশিষ্ট মোট সংখ্যা

$$= {}^5P_4 = 120.$$

∴ প্রত্যেকটি সংখ্যায় একই অঙ্ক একাধিকবার থাকবে এরূপ মোট সংখ্যা $= 625 - 120 = 505$.

প্রশ্নমালা 5.1

1. (i) প্রমাণ কর যে, প্রথম n সংখ্যক বিজোড় সংখ্যার গুণফল = $\frac{(2n)!}{2^n.n!}$. [কু. '১১; রা. '১৩]

(ii) $4 \times {}^nP_3 = 5 \times {}^{n-1}P_3$ হলে, n এর মান কত? [কু. '০৫]

2. ${}^{4n}P_3 = 2 \times {}^{2n}P_4$ হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

3. '*Equation*' শব্দটির সবগুলি অক্ষর একত্রে ব্যবহার করে কত উপায়ে অক্ষরগুলি সাজানো যায় ?

4. প্রত্যেক সংখ্যায় প্রত্যেকটি অঙ্ক কেবল একবার ব্যবহার করে 2, 3, 5, 7, 8, 9 দ্বারা তিন অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়?

5. প্রত্যেক অঙ্ক প্রত্যেকটি সংখ্যায় কেবল একবার ব্যবহার করে 0, 1, 2, 3, 5, 6 দ্বারা চার অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি অর্থপূর্ণ সংখ্যা গঠন করা যায়?

6. 1, 2, 3, 5, 6, 7 অঙ্কগুলি প্রত্যেক সংখ্যায় কেবল একবার ব্যবহার করে 5000 ও 6000 এর মধ্যবর্তী কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে ? [ব. '১৩]

7. (i) প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় কেবল একবার ব্যবহার করে 6, 5, 2, 3, 0 দ্বারা পাঁচ অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি অর্থপূর্ণ বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যায় ? [য. '১৩; ঢা.চ.দি. '১১; সি. '১০, '১৩]

(ii) 5, 3, 2, 6, 0 অঙ্কগুলির প্রত্যেকটি প্রতি সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে পাঁচ অঙ্কবিশিষ্ট কয়টি অর্থপূর্ণ জোড় সংখ্যা গঠন করা যায়? [রা'০৭; ব'০৮]

8. (i) '*Critical*' শব্দটির সব অক্ষর ব্যবহার করে কতগুলি বিন্যাস সংখ্যা পাওয়া যায়?

(ii) স্বরবর্ণগুলিকে পাশাপাশি না রেখে '*TRIANGLE*' শব্দটির অক্ষরগুলি কত সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। [চ. '০৭; ব. '১০]

9. (i)'*Second*' শব্দটির অক্ষরগুলি থেকে 1টি স্বরবর্ণ ও 2টি ব্যঞ্জনবর্ণ নিয়ে গঠিত শব্দ–এর সংখ্যা নির্ণয় কর, যাতে স্বরবর্ণ সর্বদা মধ্যস্থানে থাকে।

(ii) '*MILLENNIUM*' শব্দটির অক্ষরগুলি কত প্রকারে সাজানো যায় ? এদের মধ্যে কতগুলিতে প্রথমে ও শেষে '*M*' থাকবে ? [সি. '০৬; '১১]

10. '*Postage*' শব্দটির অক্ষরগুলি কত রকমে সাজানো যায় যেন স্বরবর্ণগুলি জোড় স্থান দখল করে ? শব্দটির অক্ষরগুলি কত প্রকারে সাজানো যায় যাতে ব্যঞ্জনবর্ণগুলি একত্রে থাকবে ?

11. '*Maturity*' শব্দটির সব অক্ষর ব্যবহার করে কত উপায়ে সাজানো যায়? এ উপায়গুলির মধ্যে কয়টির প্রথমে '*M*' থাকবে?

12. একজন বালকের ভিন্ন ভিন্ন আকারের 11টি মার্বেল আছে, যার মধ্যে 5টি কালো ও 6টি সাদা। কালো রঙের মার্বেল মাঝখানে রেখে সে 3টি মার্বেল এক সারিতে কত রকমে সাজাতে পারবে ?

13. (i) '*Parallel*' শব্দটির অক্ষরগুলির সবগুলি একত্রে নিয়ে যত রকমে সাজানো যায় তা বের কর। স্বরবর্ণগুলিকে একত্রে রেখে অক্ষরগুলি যত রকমে সাজানো যায় তাও নির্ণয় কর। [ঢা. '১৩; সি. রা. '১১; চ. '১২]

(ii) '*MATHEMATICS*' শব্দটির বর্ণগুলিকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা বের কর এবং এদের কতগুলিতে স্বরবর্ণগুলি একত্রে থাকবে ? [ঢা. '০৬; রা. '০৯; কু. ব. য. '১২]

(iii) '*CHITTAGONG*' শব্দটির বর্ণগুলিকে কতভাবে বিন্যাস করা যায় যখন স্বরবর্ণগুলি একত্রে থাকবে?

(iv) ব্যঞ্জনবর্ণগুলিকে বিজোড় স্থানে রেখে '*Equation*' শব্দটির অক্ষরগুলিকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। [য. '০৮]

14. প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 0, 1, 2, 3, 4 অঙ্কগুলি দ্বারা পাঁচ অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি অর্থপূর্ণ বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে?

15. প্রত্যেক সংখ্যায় প্রতিটি অঙ্ক কেবল একবার ব্যবহার করে 5, 1, 7, 0, 4, 3 অঙ্কগুলি দ্বারা ছয় অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে ? এদের মধ্যে কতগুলি সংখ্যায় শতক স্থানে 0 থাকবে?

16. প্রতিটি অঙ্ক যতবার আছে এর বেশি সংখ্যক বার প্রত্যেক সংখ্যায় ব্যবহার না করে 3, 4, 5, 3, 4, 5,6 এর বিজোড় অঙ্কগুলি সব সময় বিজোড় স্থানে রেখে সাত অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় ?

17. অঙ্কগুলির প্রত্যেকটি প্রত্যেক সংখ্যায় কেবল একবার ব্যবহার করে 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 দ্বারা 1000 অপেক্ষা ছোট এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় ?

18. প্রত্যেক সংখ্যায় প্রতিটি অঙ্ক কেবল একবার ব্যবহার করে 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 অঙ্কগুলি দ্বারা কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়, যাদের প্রথমে ও শেষে জোড় অঙ্ক থাকবে ?

19. 9টি বলের মধ্যে 7টি লাল ও 2টি সাদা। বলগুলিকে এক সারিতে কত রকমে সাজানো যায়। দুইটি সাদা বল পাশাপাশি না রেখে বলগুলিকে যত প্রকারে সারিতে সাজানো যায় তাও নির্ণয় কর।

20. (a) প্রমাণ কর যে, *'America'* শব্দটির বর্ণগুলি একত্রে নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায়, *'Calcutta'* শব্দটির বর্ণগুলি একত্রে নিয়ে তার দ্বিগুণ উপায়ে সাজানো যায়। [রা. '১৩]

(b) প্রমাণ কর যে, *'AMERICA'* শব্দটির বিন্যাস সংখ্যা, *'CANADA'* শব্দটির বিন্যাস সংখ্যার 21 গুণ।

(c) দেখাও যে, *'Rajshahi'* শব্দটির অক্ষরগুলির একত্রে বিন্যাস সংখ্যা, *'Barisal'* শব্দটির অক্ষরগুলির একত্রে বিন্যাস সংখ্যার চার গুণ। [ঢা. '০৮; রা. '১২]

21. নিচের শব্দগুলির প্রত্যেকের সব অক্ষর ব্যবহার করে যতগুলি বিন্যাস সংখ্যা পাওয়া যায় তা নির্ণয় কর ঃ

(i) *Cricket* **(ii)** *Chittagong* **(iii)** *Application*

22. *'Engineering'* শব্দটির সব কটি বর্ণকে কত প্রকারে বিভিন্ন রকমে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। তাদের কতগুলিতে '*e*' তিনটি একত্রে স্থান দখল করবে এবং কতগুলিতে এরা প্রথম স্থান দখল করবে?

23. 8 টি ভিন্ন ভিন্ন জিনিসকে এক সারিতে কত রকমে সাজানো যেতে পারে যেন (i) দুইটি বিশেষ জিনিস একত্রে থাকে; এবং (ii) দুইটি বিশেষ জিনিস প্রতি সাজানো ব্যবস্থায় একত্রে না থাকে ?

24. দুইজন কলা বিভাগের ছাত্রকে একত্রে না বসিয়ে 5 জন বিজ্ঞানের ছাত্র ও 5 জন কলা বিভাগের ছাত্র কত রকমে একটি গোল টেবিলের পাশে আসন নিতে পারে ? [ঢা. '১২]

25. স্বরবর্ণগুলির (i) ক্রম *(Order)* পরিবর্তন না করে, (ii) স্থান পরিবর্তন না করে এবং (iii) স্বরবর্ণের ও ব্যঞ্জনবর্ণের আপেক্ষিক অবস্থানের *(Relative position)* পরিবর্তন না করে *'Director'* শব্দটির অক্ষরগুলিকে যত প্রকারে পুনরায় সাজানো যায়, তা নির্ণয় কর।

26. একজন প্রফেসরের পদের জন্য 3 জন প্রার্থী। 5 জন লোকের ভোটে একজন নির্বাচিত হবেন। কত প্রকারে তাঁরা ভোট দিতে পারবেন? [রা. '১০]

27. *'Permutation'* শব্দটির বর্ণগুলির মধ্যে স্বরবর্ণের অবস্থান পরিবর্তন না করে বর্ণগুলিকে কত রকমে পুনরায় সাজানো যেতে পারে? [দি. '১৩]

28. প্রত্যেক অঙ্ক প্রতিটি সংখ্যায় কেবল একবার ব্যবহার করে 0, 5, 6, 7, 8, 9 দ্বারা তিন অঙ্কের বেশি নয়, এরূপ যতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় তা নির্ণয় কর।

29. একজন বালকের ভিন্ন ভিন্ন আকারের 1টি সাদা, 2টি লাল এবং 3টি সবুজ মার্বেল আছে। এদের মধ্য থেকে প্রতিবারে 4টি মার্বেল নিয়ে একটির উপর আর একটি মার্বেল সাজালে কাজটি সে কত সংখ্যক উপায়ে করতে পারবে ?

30. *'Immediate'* শব্দটির অক্ষরগুলি কত প্রকারে সাজানো যায়? এদের মধ্যে কতগুলিতে প্রথমে t এবং শেষে a থাকবে?

31. স্বরবর্ণগুলি কেবল বিজোড় স্থানে রেখে *'Article'* শব্দটির অক্ষরগুলি যত উপায়ে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। [ঢা. '১০]

32. কোনো সংখ্যায় কোনো অঙ্কের পুনরাবৃত্তি না করে 0, 1, 3, 5, 6 অঙ্কগুলি দ্বারা 3000 অপেক্ষা বৃহত্তর এবং চার অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়?

33. **(i)** টেলিফোন ডায়ালে 0 হতে 9 পর্যন্ত লেখা থাকে। যদি কক্সবাজার শহরের টেলিফোনগুলি 5 অঙ্কবিশিষ্ট হয়, তবে ঐ শহরে কত টেলিফোন সংযোগ দেয়া যাবে ? **[রা. '০৯]**
(ii) 1, 2, 3, 4, 5 অঙ্কগুলির প্রত্যেকটিকে যে কোনো সংখ্যক বার নিয়ে তিন অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়? এদের কতগুলিতে দুইটি বা তিনটি একই অঙ্ক থাকবে?

34. '*Security*' শব্দটির অক্ষরগুলি কত উপায়ে সাজানো যায় যেন স্বরবর্ণগুলি একত্রে না থাকে?

35. 6টি সবুজ, 5টি কালো এবং 2টি লাল কাউন্টার এক সারিতে কত উপায়ে সাজানো যায়? এ ব্যবস্থার কতটিতে দুইটি লাল কাউন্টার একত্রে থাকবে না?

36. প্রত্যেকবার সব অক্ষর নিয়ে এবং স্বরবর্ণগুলিকে একত্রে রেখে '*Aluminium*' শব্দটির অক্ষরগুলি থেকে মোট কয়টি বিন্যাস সংখ্যা পাওয়া যাবে?

37. 9টি অক্ষর আছে যাদের মধ্যে কতগুলি এক জাতীয় এবং বাকিগুলি ভিন্ন ভিন্ন। যদি সবগুলি অক্ষর একত্রে নিয়ে 3024 উপায়ে সাজানো যায়, তবে একজাতীয় বর্ণ কতগুলি?

38. একটি লাইব্রেরীতে একই লেখকের বীজগণিতের 6 টি বই, দুইজন লেখকের প্রত্যেকের জ্যামিতির 5 টি বই, তিনজন লেখকের প্রত্যেকের বলবিদ্যার 3 টি বই এবং ৪ জন লেখকের ইংরেজির 1টি করে বই আছে। সবগুলি বই একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে?

সমাবেশ সংখ্যা ঃ

5.5. সমাবেশ

তিনজন লোক M_1, M_2, M_3 থেকে দুইজন করে নিয়ে দল গঠন করলে সম্ভাব্য দলগুলি

$M_1M_2, M_1M_3, M_2M_3.$

আবার তিনজনের সবাইকে নিয়ে দল গঠন করলে সম্ভাব্য দলটি হবে $M_1M_2M_3$.

সম্ভাব্য দলগুলির প্রত্যেকটিকে বলা হয় এক একটি **সমাবেশ *(Combination)*.**

নির্দিষ্ট সংখ্যক জিনিস থেকে কয়েকটি বা সবকয়টি একবারে নিয়ে যত প্রকারে নির্বাচন বা দল (ক্রম বর্জন করে) গঠন করা যায় তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি সমাবেশ বলা হয়।

n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস থেকে প্রত্যেকবার r সংখ্যক জিনিস নিয়ে প্রাপ্ত সমাবেশ সংখ্যাকে সংক্ষেপে সাধারণত ^nC_r বা , $_nC_r$ বা, $C(n,r)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ : কোনো দেশের টেনিস খেলোয়াড়দের মধ্যে ক, খ ও গ নামের তিনজন ভাল খেলোয়াড়। ক, খ, গ এর মধ্য থেকে দুইজন করে নিয়ে কয়টি ভিন্ন ভিন্ন দল গঠন করা যায় ?

সমাধান ঃ আমরা সহজেই বলতে পারি দলগুলি হল ঃ কখ, কগ, খগ।

অর্থাৎ, মোট দলের সংখ্যা = 3.

আসলে এখানে তিনটি জিনিস (খেলোয়াড়) থেকে দুইটি করে নিয়ে দল গঠন করা হয়েছে। অথবা, বলা যায় তিনটি থেকে দুইটি নির্বাচন করা হয়েছে।

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে, সমাবেশ সংখ্যা = 3.

সমাবেশ ও বিন্যাস সংখ্যার মধ্যে সম্পর্ক :

মনে করি, চারটি অক্ষর a, b, c, d দেয়া আছে। এ চারটি অক্ষর থেকে প্রত্যেকবার দুইটি করে নিয়ে সাজালে আমরা পাই

ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc.

সুতরাং 4 টি থেকে প্রত্যেকবার 2টি করে নিয়ে অক্ষরগুলি 12 উপায়ে সাজানো যায়। অর্থাৎ সংজ্ঞানুসারে $^4P_2 = 12.$

লক্ষ করি : (i) ab ও ba এর উভয়ের মধ্যেই দুইটি অক্ষর a ও b আছে। ক্রম $(order)$ অনুসারে এরা বিভিন্ন। অর্থাৎ সারিতে সাজানোর সময় ক্রমেরও বিবেচনা করতে হয়। তদ্রূপ (ac, ca), (ad, da) ইত্যাদি পরস্পর বিভিন্ন।

এখন 4টি অক্ষর থেকে দুইটি করে নিয়ে দল গঠন করলে আমরা পাই (a ও b), (a ও c), (a ও d), (b ও c), (b ও d) এবং (c ও d).

সুতরাং, 4টি থেকে প্রত্যেকবার 2টি করে নিয়ে 6টি দল গঠন করা যায়। অর্থাৎ সংজ্ঞানুসারে, $^4C_2 = 6$.

(ii) ab এবং ba দুইটি ভিন্ন দল নয়। অর্থাৎ দল গঠনের সময় ক্রমকে উপেক্ষা করা হয়।

তাহলে, দেখা যায় যদি প্রত্যেক দলে অর্থাৎ সমাবেশে 2টি ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থাকে, তবে প্রত্যেকটি সমাবেশ থেকে $2\,!$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যায়। যেমন,

$^4P_2 = 12 = 6 \times 2\,! = {}^4C_2 \times 2\,!$.

তদ্রূপ $^4P_3 = {}^4C_3 \times 3\,!$, $^5P_2 = {}^5C_2 \times 2\,!$ ইত্যাদি।

সাধারণভাবে, $^nP_r = {}^nC_r \times r\,!$.

5.7. সমাবেশ সংখ্যা

প্রত্যেকটি জিনিস ভিন্ন ভিন্ন হলে, ^nC_r অর্থাৎ n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থেকে প্রত্যেকবার r সংখ্যক জিনিস নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা নির্ণয় করা (যেখানে n এবং r এর উভয়ে ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং $n \geq r$).

মনে করি, n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থেকে প্রত্যেক বার r সংখ্যক জিনিস নিয়ে সমাবেশ সংখ্যাকে ^nC_r দ্বারা সূচিত করা হল।

এখন প্রত্যেক সমাবেশে r সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস আছে, যাদেরকে $r\,!$ উপায়ে নিজেদের মধ্যে সাজানো যায়। অর্থাৎ একটি সমাবেশ থেকে $r\,!$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যায়। অতএব, ^nC_r থেকে $^nC_r \times r\,!$ সংখ্যক বিন্যাস পাই।

আবার n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থেকে প্রত্যেকবারে r সংখ্যক জিনিস নিলে বিন্যাস সংখ্যা ^nP_r .

$\therefore \; ^nC_r \times r\,! = {}^nP_r$

বা, $^nC_r \times r\,! = \dfrac{n\,!}{(n-r)\,!}$ [অনুচ্ছেদ 6.3 এর অনুসিদ্ধান্ত 2 থেকে]

$\therefore \; ^nC_r = \dfrac{n\,!}{r\,!(n-r)\,!}$ [যেখানে $n \in N, r \in N$ এবং $n \geq r$]

অনুসিদ্ধান্ত : n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থেকে সবগুলি একত্রে নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা, অর্থাৎ

$^nC_n = \dfrac{n\,!}{n\,!\,(n-n)\,!}$ [উপরের সূত্র থেকে] $= \dfrac{n\,!}{n\,!\,0\,!} = 1.$ $[\because 0\,! = 1]$

বিকল্প পদ্ধতি :

n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিসকে ভিন্ন ভিন্ন অক্ষর $a, b, c, d,\ldots\ldots$ দ্বারা সূচিত করা হল। ^nC_r সমাবেশগুলির মধ্যে যে সব সমাবেশে a সব সময় থাকবে তাদের সংখ্যা $^{n-1}C_{r-1}$. কারণ a কে বাদ দিয়ে বাকি $(n-1)$ সংখ্যক অক্ষর থেকে প্রত্যেকবার $(r-1)$ সংখ্যক অক্ষর নিয়ে $^{n-1}C_{r-1}$ সংখ্যক সমাবেশের প্রত্যেকটিতে a অন্তর্ভুক্ত করলে ঐ সমাবেশের মোট অক্ষরের সংখ্যা r হবে।

তদ্রূপ যে সব সমাবেশে $b, c, d \ldots\ldots$ থাকবে, তাদের প্রত্যেকটির সংখ্যা $^{n-1}C_{r-1}$ হবে।

সুতরাং, যদি n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন অক্ষর থেকে প্রত্যেকবার r সংখ্যক অক্ষর নিয়ে সবগুলি সমাবেশ লেখা হয়, তবে প্রত্যেকটি অক্ষর ঐ সমাবেশগুলিতে $^{n-1}C_{r-1}$ সংখ্যক বার থাকবে।

যেহেতু অক্ষরের মোট সংখ্যা n অতএব লিখিত সমাবেশগুলিতে অক্ষরের সংখ্যা $= n \times {}^{n-1}C_{r-1}$ ......(i)

আবার প্রত্যেকটি সমাবেশে r সংখ্যক অক্ষর আছে। সুতরাং; সমাবেশগুলিতে অর্থাৎ, ^nC_r এ মোট অক্ষরের সংখ্যা $= r \times {}^nC_r$ ....(ii)

অতএব, (i) ও (ii) থেকে $r \times {}^nC_r = n \times {}^{n-1}C_{r-1}$

$$\therefore {}^nC_r = \frac{n}{r} \times {}^{n-1}C_{r-1} \text{ .... (1)}$$

অনুরূপভাবে, $${}^{n-1}C_{r-1} = \frac{n-1}{r-1} \times {}^{n-2}C_{r-2} \text{ .... (2)}$$

$${}^{n-2}C_{r-2} = \frac{n-2}{r-2} \times {}^{n-3}C_{r-3} \text{ ...... (3)}$$

....

$${}^{n-r+2}C_2 = \frac{n-r+2}{2} \times {}^{n-r+1}C_1 \text{.... } (n)$$

(1) থেকে (n) পর্যন্ত সবগুলি একত্রে গুণ করে এবং গুণফলের উভয়পক্ষ থেকে সাধারণ উৎপাদকগুলি বর্জন করে আমরা পাই

$${}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\text{.....}(n-r+2)}{r(r-1)(r-2)\text{.....}2} \times {}^{n-r+1}C_r$$

এখন $^{n-r+1}C_1$ এর অর্থ হল $(n-r+1)$ সংখ্যক জিনিস থেকে প্রত্যেকবার 1টি করে নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা। সুতরাং, $^{n-r+1}C_1 = n-r+1$.

$$\therefore {}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\text{ .... }(n-r+2)(n-r+1)}{r!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\text{ ..... }(n-r+2)(n-r+1)(n-r)!}{r!\,(n-r)!}$$ [লব ও হরকে $(n-r)$! দ্বারা গুণ করে]

$$= \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

5.7. সম্পূরক সমাবেশ

আমরা জানি $^4C_1 = \frac{4!}{1!\,3!} = 4$

আবার $^4C_{4-1}$ অর্থাৎ, $^4C_3 = \frac{4!}{3!\,1!} = 4 \quad \therefore {}^4C_1 = {}^4C_{4-1}$.

$^4C_1$ এবং $^4C_{4-1}$ কে পরস্পরের সম্পূরক *(Complementary)* বলা হয়।

আমরা পাই $^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ এবং $^nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,(n-n+r)!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

$\therefore {}^nC_r = {}^nC_{n-r}$. সুতরাং, সাধারণভাবে ^nC_r এবং $^nC_{n-r}$ পরস্পরের সম্পূরক।

5.8. সূত্র : $^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$. [দি. '১৩; কু. ব. ঢা. রা. '১২]

প্রমাণঃ $${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n!}{r.(r-1)!\,(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!.\,(n-r+1).(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\left\{\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right\} = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\cdot\frac{n+1}{r(n-r+1)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-r+1)!\,r!} = \frac{(n+1)!}{r!\,\{(n+1)-r\}!} = {}^{n+1}C_r.$$

5.9. শর্তাধীন সমাবেশ

(a) n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থেকে r সংখ্যক জিনিস নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা = $^{n-p}C_{r-p}$, যেখানে p সংখ্যক নির্দিষ্ট জিনিস সব সময় থাকবে এবং $p \le r$.

প্রমাণ ঃ n সংখ্যক জিনিস থেকে নির্দিষ্ট p সংখ্যক জিনিস আলাদা করলে জিনিসের সংখ্যা হয় $(n-p)$.

এখন $(n-p)$ সংখ্যক জিনিস থেকে $(r-p)$ সংখ্যক জিনিস নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা = $^{n-p}C_{r-p}$. এ সমাবেশগুলির প্রত্যেকটিতে আলাদা করা p সংখ্যক নির্দিষ্ট জিনিস অন্তর্ভুক্ত করলে প্রত্যেকটি সমাবেশ $(r-p+p)$ বা r সংখ্যক সদস্যবিশিষ্ট হবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাবেশ সংখ্যা = $^{n-p}C_{r-p}$.

(b) n সংখ্যক জিনিস থেকে r সংখ্যক জিনিস নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা = $^{n-p}C_r$, যেখানে p সংখ্যক নির্দিষ্ট জিনিস কোনো সমাবেশে অন্তর্ভুক্ত থাকবে না এবং $p \le r$.

প্রমাণ ঃ n সংখ্যক জিনিস থেকে p সংখ্যক নির্দিষ্ট জিনিস আলাদা করলে $(n-p)$ সংখ্যক জিনিস থাকে। এখন $(n-p)$ সংখ্যক জিনিস থেকে r সংখ্যক জিনিস নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা = $^{n-p}C_r$. এ সমাবেশগুলির কোনোটিতে p সংখ্যক নির্দিষ্ট জিনিস অন্তর্ভুক্ত থাকবে না।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাবেশ সংখ্যা = $^{n-p}C_r$.

সমস্যা ও সমাধান ঃ

উদাহরণ 1. প্রমাণ কর যে, $^6C_4 + {^6C_3} + {^7C_3} = 70$.

সমাধান ঃ $^6C_4 + {^6C_3} + {^7C_3}$

$= {^7C_4} + {^7C_3}$ $\quad [\because {^nC_r} + {^nC_{r-1}} = {^{n+1}C_r}]$

$= {^8C_4} = 70.$

উদাহরণ 2. 16 বাহুবিশিষ্ট একটি বহুভুজের কৌণিক বিন্দুর সংযোগ রেখা দ্বারা কতগুলি ত্রিভুজ গঠন করা যায় ? এ বহুভুজের কতগুলি কর্ণ আছে ?

সমাধান ঃ বহুভুজের 16টি কৌণিক বিন্দু আছে। বহুভুজটির কৌণিক বিন্দুগুলির যে কোনো তিনটি বিন্দু দ্বারা একটি ত্রিভুজ গঠিত হয়। এ 3টি বিন্দু $^{16}C_3$ সংখ্যক উপায়ে নির্বাচন করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় ত্রিভুজের সংখ্যা = $^{16}C_3 = 560.$

আবার 16টি বিন্দুর যে কোনো 2টি নিয়ে যোগ করলে একটি রেখা পাওয়া যায়।

$\therefore$ রেখার মোট সংখ্যা = $^{16}C_2 = 120.$

কিন্তু এ রেখাগুলির মধ্যে 16টি রেখা বহুভুজের বাহু।

$\therefore$ নির্ণেয় কর্ণের সংখ্যা = $120 - 16 = 104.$

উদাহরণ 3. 16 জন ক্রিকেট খেলোয়াড়ের মধ্যে 5 জন ভাল বোলার, 3 জন উইকেটরক্ষক এবং বাকি কয়জন সাধারণ মানের বোলার হলেও উইকেটরক্ষক নন। এদের মধ্য থেকে 11 জন খেলোয়াড় নিয়ে কয়টি দল গঠন করা যায় যাতে কমপক্ষে 4 জন ভাল বোলার ও 2 জন উইকেটরক্ষক থাকবে ?

সমাধান ঃ একটি দল গঠন করতে সম্ভাব্য নির্বাচন হবে নিম্নরূপঃ

	ভাল বোলার (5)	উইকেটরক্ষক (3)	অন্যান্য (8)
(a)	4	2	5
(b)	4	3	4
(c)	5	2	4
(d)	5	3	3

(a) এর জন্য ভাল বোলার, উইকেটরক্ষক ও অন্যান্য খেলোয়ার নির্বাচন করা যায় যথাক্রমে $^5C_4$, $^3C_2$, $^8C_5$ উপায়ে।

$\therefore$ (a) এর জন্য নির্বাচনের উপায়ের মোট সংখ্যা $= {}^5C_4 \times {}^3C_2 \times {}^8C_5$ [অনুচ্ছেদ 5.1]
$= 840$

অর্থাৎ 4 জন ভাল বোলার, 2 জন উইকেটরক্ষক ও $(11 - 4 - 2)$ বা 5 জন অন্যান্য খেলোয়াড় নিয়ে 840 টি সম্ভাব্য দল গঠন করা যায়।

তদ্রূপ (b) এর জন্য $({}^5C_4 \times {}^3C_3 \times {}^8C_4)$, বা 350 টি দল;

(c) এর জন্য $({}^5C_5 \times {}^3C_2 \times {}^8C_4)$, বা 210 টি দল;

(d) এর জন্য $({}^5C_5 \times {}^3C_3 \times {}^8C_3)$, বা 56টি দল।

$\therefore$ নির্ণেয় দলের সংখ্যা $= 840 + 350 + 210 + 56 = 1456.$

উদাহরণ 4. 12 জন ছাত্রের মধ্য থেকে 3টি কমিটি (প্রত্যেক কমিটিতে 4 জন ছাত্র নিয়ে) গঠন করতে হবে। কত উপায়ে ঐ কমিটিগুলি গঠন করা যায় ?

সমাধান ঃ 12 জন ছাত্রের মধ্য থেকে 4 জন নিয়ে প্রথম কমিটি $^{12}C_4$ উপায়ে গঠন করা যায়। প্রথম কমিটি গঠন করার পর দ্বিতীয় কমিটি $(12 - 4)$ জন বা 8 জন ছাত্রের মধ্য থেকে $^8C_4$ উপায়ে গঠন করা যায়। আবার প্রত্যেকটি প্রথম কমিটির প্রেক্ষিতে দ্বিতীয় কমিটির সংখ্যা $^8C_4$. অতএব প্রথম ও দ্বিতীয় কমিটি $^{12}C_4 \times {}^8C_4$ উপায়ে গঠন করা যেতে পারে।

$^{12}C_4 \times {}^8C_4$ উপায়ে প্রথম ও দ্বিতীয় কমিটি গঠনের একটি উপায়ের প্রেক্ষিতে অবশিষ্ট $(12 - 8)$ জন বা 4 জন ছাত্রের মধ্য থেকে তৃতীয় কমিটি $^4C_4$ বা 1 উপায়ে গঠন করা যায়।

$\therefore$ তিনটি কমিটি গঠনের মোট উপায় (*Total number of ways*) $= {}^{12}C_4 \times {}^8C_4 \times 1$
$= 495 \times 70 \times 1 = 34650.$

উদাহরণ 5. '*Permutations*' শব্দটির বর্ণগুলি থেকে 1টি স্বরবর্ণ ও 2টি ব্যঞ্জনবর্ণ নিয়ে কতগুলি শব্দ গঠন করা সম্ভব যেন স্বরবর্ণটি সব সময় মাঝখানে থাকে ?

সমাধান ঃ '*Permutations*' শব্দের ব্যঞ্জনবর্ণগুলি ও স্বরবর্ণগুলি হচ্ছে যথাক্রমে (p, r, m, t, t, n, s) এবং (e, u, a, i, o).

এখানে একটি 't' বাদ দিয়ে বাকি 6টি ব্যঞ্জনবর্ণ (প্রত্যেকে ভিন্ন) থেকে 2টি করে নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা
$= {}^6C_2 = 15$

আবার 5টি স্বরবর্ণ থেকে 1টি করে নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা $= {}^5C_1 = 5$

$\therefore$ সব বর্ণ নিয়ে 3টি বর্ণের (2টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 1টি স্বরবর্ণ) মোট সমাবেশ সংখ্যা $= 15 \times 5 = 75.$

এখন প্রত্যেকটি সমাবেশের বর্ণগুলি সাজালে শব্দ গঠিত হবে। শর্তানুযায়ী স্বরবর্ণটি মাঝখানে থাকবে। সুতরাং ব্যঞ্জনবর্ণ দুইটি নিজেদের মধ্যে $^2P_2$ বা, 2 উপায়ে সাজানো যায়।

$\therefore$ শব্দের মোট সংখ্যা $= 75 \times 2 = 150.$

আবার ব্যঞ্জনবর্ণগুলি থেকে 2টি 't' ও স্বরবর্ণ থেকে 1টি নিয়েও শব্দ গঠন করা যায়।

$\therefore$ 2টি 't' ও 1টি স্বরবর্ণ সম্বলিত শব্দের সংখ্যা
$= {}^2C_2 \times {}^5C_1 \times 1$ [$\because$ 2 টি 't' নিজেদের মধ্যে 1 উপায়ে সাজানো যায়]
$= 1 \times 5 \times 1 = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় শব্দের মোট সংখ্যা $= 150 + 5 = 155.$

মন্তব্য ঃ এখানে শব্দ বলতে আমরা পর পর বর্ণ বসানোকে একটি শব্দ ধরে নিয়েছি। আসলে শব্দের সংজ্ঞা আলাদা।

প্রশ্নমালা 5.2

1. (i) ${}^nC_5 = {}^nC_7$ হলে, ${}^nC_{11}$ এর মান নির্ণয় কর।
   (ii) প্রমাণ কর যে, ${}^8C_8 + {}^8C_7 + {}^9C_7 + {}^{10}C_7 = {}^{11}C_8$.
   (iii) ${}^nC_2 = \frac{2}{5} \times {}^nC_4$ হলে, n এর মান নির্ণয় কর।
   (iv) ${}^nP_r = 240$, ${}^nC_r = 120$ হলে, n ও r এর মান নির্ণয় কর। [চ. '১১]
2. একটি ফুটবল টুর্নামেন্টে 8টি দল অংশগ্রহন করেছে। একক লীগ পদ্ধতিতে খেলা হলে, মোট কতটি খেলা পরিচালনা করতে হবে?
3. 17টি বাহুবিশিষ্ট একটি বহুভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি সংযোগ করে কতগুলি ত্রিভুজ গঠন করা যায়?
4. 12 বাহুবিশিষ্ট একটি বহুভুজের কৌণিক বিন্দুর সংযোগ রেখা দ্বারা কতগুলি বিভিন্ন ত্রিভুজ গঠন করা যেতে পারে? এ বহুভুজের কতগুলি কর্ণ আছে ? [দি. '১১]
5. একটি ব্যাংকের পরিচালকমন্ডলিতে 8 জন পুরুষ ও 6 জন মহিলা আছেন। ঐ পরিচালকন্ডলির সদস্যদের মধ্য থেকে 5 জন পুরুষ ও 3 জন মহিলা সমন্বয়ে কত রকমে একটি সাব–কমিটি গঠন করা যেতে পারে ?
6. (i) প্রমাণ কর যে, কোনো তিনটি বিন্দু সমরেখা নয় এরুপ n সংখ্যক বিন্দু সংযোগ করে $\frac{1}{6} n(n-1)(n-2)$ সংখ্যক ত্রিভুজ গঠন করা যায়।
   (ii) দেখাও যে, n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট একটি বহুভুজের $\frac{1}{2} n(n-3)$ সংখ্যক কর্ণ আছে। আরও দেখাও যে, এর কৌণিক বিন্দুগুলির সংযোগ রেখা দ্বারা $\frac{1}{6} n(n-1)(n-2)$ সংখ্যক বিভিন্ন ত্রিভুজ গঠন করা যেতে পারে। [ঢা . '০৫]
7. 4 জন ভদ্র মহিলাসহ 10 ব্যক্তির মধ্য থেকে 5 জনের একটি কমিটি কত প্রকারে গঠন করা যেতে পারে যেন প্রত্যেক কমিটিতে অন্ততঃপক্ষে 1 জন ভদ্র মহিলা থাকবে? [ব. '০৪]
8. 6 জন অভিজ্ঞ বোলারসহ 14 জন খেলোয়াড়ের মধ্য থেকে 11 জন খেলোয়াড়ের কতগুলি দল গঠন করা যেতে পারে যেন প্রত্যেক দলে কমপক্ষে 5 জন অভিজ্ঞ বোলার থাকে?
9. (i) 6 জন ও 8 জন খেলোয়াড়ের দুইটি দল থেকে 11 জন খেলোয়াড়ের একটি ক্রিকেট টিম গঠন করতে হবে যাতে 6 জনের দল থেকে কমপক্ষে 4 জন খেলোয়াড় ঐ টিমে থাকবে ? ক্রিকেট টিমটি কত উপায়ে গঠন করা যাবে ? [কু. '০৯]
   (ii) 6 জন গণিত ও 4 জন পদার্থ বিজ্ঞানের ছাত্র থেকে 6 জনের একটি কমিটি গঠন করতে হবে যাতে গণিতের ছাত্রদের সংখ্যাগরিষ্ঠতা থাকে। কত প্রকারে কমিটি গঠন করা যায় ? [য. '১২; ব. চ. '১৩]
10. 12টি বিভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ ও 5টি বিভিন্ন স্বরবর্ণ থেকে 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 2টি স্বরবর্ণ সমন্বয়ে গঠিত কতগুলি ভিন্ন ভিন্ন শব্দ গঠন করা যায় ? [চ. '১০]
11. একটি ক্লাবের নির্বাহী কমিটিতে 1 জন চেয়ারম্যান, 2 জন ভাইস–চেয়ারম্যান এবং 8 জন সদস্য আছেন। চেয়ারম্যান, 1 জন ভাইস–চেয়ারম্যান এবং 4 জন সদস্য নিয়ে কত উপায়ে সাব–কমিটি গঠন করা যেতে পারে?
12. একটি কলেজের অধ্যাপকের 3টি খালি পদের জন্য 10 জন প্রার্থী আছেন। খালি পদের সংখ্যা অপেক্ষা বেশি নয় এরূপ যে কোনো সংখ্যক প্রার্থীকে নির্বাচিত করা যেতে পারে। কত প্রকারে প্রার্থী নির্বাচন করা যায়? [ঢা. '০৯]
13. একজন পরীক্ষার্থীকে 12টি প্রশ্ন থেকে 6টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে। এর মধ্যে তাকে প্রথম 5টি থেকে ঠিক *(Exactly)* 4টি প্রশ্ন বাছাই করতে হবে। সে কত প্রকারে প্রশ্নগুলি বাছাই করতে পারবে ? [ব. '০৭; য. '০৬]
14. গণিতের প্রশ্নপত্রের দুইটি গ্রুপের প্রতি গ্রুপে 5টি করে প্রশ্ন আছে। একজন পরীক্ষার্থীকে 6টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে কিন্তু কোনো গ্রুপ থেকে 4টির বেশি প্রশ্নের উত্তর দিতে পারবে না। পরীক্ষার্থী কত প্রকারে প্রশ্নগুলি বাছাই করতে পারবে? [য. '০৩; সি. '১৩]

15. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 চিহ্নিত আটটি কাউন্টার থেকে কমপক্ষে 1টি বিজোড় ও 1টি জোড় কাউন্টার নিয়ে একবারে 4টি কাউন্টার নিলে সমাবেশ সংখ্যা কত হবে ?

16. (a) দুই জন নির্দিষ্ট বালককে **(i)** সব সময় অন্তর্ভুক্ত রেখে এবং **(ii)** সব সময় বাদ দিয়ে, 12 জন বালক থেকে 5 জনকে কত রকমে বাছাই করা যায় ?

(b) 10টি বস্তু থেকে একবারে 5টি নিয়ে প্রাপ্ত বিন্যাসের মধ্যে কতগুলি বিন্যাসে 2টি বিশেষ বস্তু সর্বদাই অন্তর্ভুক্ত থাকবে ? **[কু. '১০]**

17. 8 জন বালক এবং 2 জন বালিকার মধ্য থেকে বালিকাদের (i) সর্বদা গ্রহণ করে (ii) সর্বদা বর্জন করে 6 জনের একটি কমিটি কত উপায়ে গঠন করা যাবে ?

18. '*Degree*' শব্দটির অক্ষরগুলি থেকে যে কোনো 4টি অক্ষর প্রত্যেকবার নিয়ে কত প্রকারে বাছাই করা যায় ? **[রা. '১১; য. '১৩]**

19. রহিম ও রফির যথাক্রমে 8টি ও 10টি বই আছে। তারা কত প্রকারে বইগুলি বিনিময় করতে পারবে ? **(i)** যদি একটির পরিবর্তে একটি **(ii)** যদি 2টির পরিবর্তে 2টি বই দেয়া হয়।

20. এক ভদ্রলোকের 6 জন বন্ধু আছেন। তিনি কত প্রকারে তাঁর একজন বা একাধিক বন্ধুকে নিমন্ত্রণ করতে পারেন?

21. '*Cambridge*' শব্দটির বর্ণগুলি থেকে 5টি বর্ণ নিয়ে শব্দ গঠন করলে কতগুলিতে প্রদত্ত শব্দটির সবগুলি স্বরবর্ণ থাকবে? **[কু. '০৭]**

22. 12টি জিনিসের মধ্যে 2টি এক জাতীয় এবং বাকিগুলি ভিন্ন ভিন্ন জিনিস। ঐ জিনিসগুলি থেকে প্রতিবারে 5টি নিয়ে কত প্রকারে বাছাই করা যায় ?

23. '*Thesis*' শব্দটির অক্ষরগুলি থেকে প্রতিবারে 4টি অক্ষর নিয়ে কত উপায়ে বাছাই করা যেতে পারে ? **[য. '১১; ঢা. রা. '১৩; ব. দি. '১২; কু. '১১, '১৩]**

24. '*Motherland*' থেকে 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 2টি স্বরবর্ণ একত্রে কত উপায়ে বাছাই করা যেতে পারে ?

25. 9 জন লোকের একটি দল দুইটি যানবাহনে ভ্রমন করবে। এ যানবাহনের একটিতে 7 জনের বেশি এবং অপরটিতে 4 জনের বেশি ধরে না। দলটি কত রকমে ভ্রমণ করতে পারবে ? **[ঢা. য. '১১; সি. কু. '১০]**

26. একটি সমতলে 13টি বিন্দু আছে, যাদের মধ্যে 5টি বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং বাকিগুলির যে কোনো তিনটি বিন্দু সমরেখ নয়। বিন্দুগুলি সংযোগ করে যতগুলি ভিন্ন সরলরেখা পাওয়া যায়, তা নির্ণয় কর। বিন্দুগুলিকে শীর্ষবিন্দুরূপে ব্যবহার করে কতগুলি ত্রিভুজ গঠন করা যায় ?

27. সাতটি ভিন্ন ভিন্ন সরলরেখার দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 1, 2, 3, 4, 5, 6 ও 7 সেন্টিমিটার। প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজ গঠন করতে এদের চারটি সরলরেখা যত প্রকারে বাছাই করা যায় এর মোট সংখ্যা 32. [রা. ব. '১০; সি. চ. '১২]

28. দুইটি ধনাত্মক চিহ্নকে পাশাপাশি না রেখে m সংখ্যক ধনাত্মক ও n সংখ্যক ঋণাত্মক চিহ্ন $(m < n)$ যত প্রকারে এক সারিতে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর।

29. কোনো পরীক্ষায় কৃতকার্য হতে 6টি বিষয়ের প্রত্যেকটিতে ন্যূনতম নম্বর পেতে হয়। একজন পরীক্ষার্থী কত প্রকারে অকৃতকার্য হতে পারে?

30. '*America*' শব্দটির বর্ণগুলি থেকে প্রত্যেকবার 3টি বর্ণ নিয়ে কতগুলি শব্দ গঠন করা যায় ? **[ব. '১১]**

31. È*PROFESSOR*' শব্দটির অক্ষরগুলি হতে প্রতিবার চারটি করে অক্ষর নিয়ে কতভাবে সাজানো যায়? [সি. '০৯]

32. একজন বালকের সাদা, লাল, নীল, হলুদ, বেগুনি ও কালো রঙের প্রত্যেকটির 4টি করে ভিন্ন ভিন্ন আকারের মার্বেল আছে। সে প্রত্যেকবার তিনটি করে মার্বেল পর পর টেবিলে সাজালে মার্বেলগুলি সে কত উপায়ে সাজাতে পারবে ?

33. একটি তালার 3টি রিং-এর প্রত্যেকটিতে 10টি করে অক্ষর মুদ্রিত আছে। তিনটি অক্ষরের কেবল একটি বিন্যাসের জন্য তালাটি খোলা গেলে কতগুলি বিন্যাসের জন্য তালাটি খোলা যাবে না ?

প্রশ্নমালা 5.3

সৃজনশীল প্রশ্ন :

1. *'INTERESTING'* শব্দটির অক্ষরগুলির সব একত্রে নিয়ে
   (a) n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস আছে। $n \in N$ এবং $r \leq n$ হলে, ^nP_r ও ^nC_r এর সম্পর্ক লেখ।
   (b) কত প্রকারে সাজানো যায় যেন প্রথমে ও শেষে 'e' থাকে ?
   (c) কত প্রকারে সাজানো যায় যেন স্বরবর্ণগুলি একত্রে থাকে ?
2. 0, 1, 2, 3, 6, 5 অঙ্কগুলি (প্রত্যেক সংখ্যায় কেবল একবার নিয়ে) থেকে
   (a) কয়টি ছয় অঙ্কবিশিষ্ট অর্থপূর্ণ সংখ্যা পাওয়া যায়?
   (b) কয়টি ছয় অঙ্কবিশিষ্ট অর্থপূর্ণ জোড় সংখ্যা পাওয়া যায়?
   (c) কয়টি ছয় অঙ্কবিশিষ্ট অর্থপূর্ণ বিজোড় সংখ্যা পাওয়া যায়?
3. একটি ক্লাবের নির্বাহী কমিটিতে 6 জন ভদ্রলোক ও 5 জন ভদ্রমহিলা আছেন
   (a) 2 জন ভদ্রলোক ও 3 জন ভদ্রমহিলা নিয়ে 5 সদস্যবিশিষ্ট কয়টি উপ কমিটি গঠন করা যায়?
   (b) কমপক্ষে 2 জন ভদ্রমহিলা নিয়ে 5 সদস্যবিশিষ্ট কয়টি উপ কমিটি গঠন করা যায়?
   (c) প্রমাণ কর যে, $^mC_6 + {^mC_5} = {^{m+1}C_6}$.
4. *'THOUSAND'* শব্দটি থেকে
   (a) সব অক্ষরগুলি একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায় যেন স্বরবর্ণগুলি একসঙ্গে না থাকে?
   (b) 2টি স্বরবর্ণ ও 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ একত্রে নিয়ে কত উপায়ে বাছাই করা যেতে পারে?
   (c) 2টি স্বরবর্ণ ও 4টি ব্যঞ্জনবর্ণ নিয়ে অক্ষরগুলিকে কত প্রকারে সাজানো যায়?

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন :

5. *'ENGINEERING"* শব্দটির *'E'* গুলি একসঙ্গে রেখে সব অক্ষরগুলির বিন্যাস সংখ্যা —
   (a) 25800 (b) 15120
   (c) 277200 (d) 362880
6. *'MOTHERLAND"* শব্দটির সব অক্ষরগুলি একত্রে নিয়ে যত উপায়ে সাজানো যায় যেন স্বরবর্ণগুলি একসঙ্গে না থাকে তা হলো —
   (a) 3628800 (b) 241920
   (c) 3604610 (d) 5040
7. *'PARMANENT"* শব্দটির সব অক্ষরগুলি নিয়ে প্রথমে ও শেষে *'A'* রেখে যত প্রকারে সাজানো যায় তা হলো —
   (a) 360 (b) 2520
   (c) 1260 (d) 9072
8. 1, 2, 4, 5, 6 অঙ্কগুলি নিয়ে 500 থেকে বৃহত্তর কিন্তু 700 থেকে ক্ষুদ্রতর কতগুলি সংখ্যা নির্ণয় করা যায়? (প্রত্যেক সংখ্যায় অঙ্কগুলি কেবল একবার ব্যবহার করে) –
   (a) 12 (b) 24 (c) 36 (d) 48
9. 3, 5, 7, 8, 9 অঙ্কগুলি থেকে 7000 এর চেয়ে বৃহত্তর চার অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়? (প্রত্যেক সংখ্যায় অঙ্কগুলি একবার বা একাধিকবার ব্যবহার করে))
   (a) 625 (b) 192 (c) 375 (d) 64
10. 10টি বইয়ের মধ্যে 4টি বই কত প্রকারে বাছাই করা যায়, যাতে নির্দিষ্ট দুইটি বই সর্বদা বাদ থাকে?
   (a) 210 (b) 70 (c) 45 (d) 28
11. 4 জন বালিকা ও 6 জন বালকের মধ্য থেকে 4 সদস্যবিশিষ্ট কয়টি কমিটি গঠন করা যায় যাতে একজন নির্দিষ্ট বালক সর্বদা অন্তর্ভুক্ত থাকে?
   (a) 504 (b) 84 (c) 210 (d) 126

12. ${}^nC_4 + {}^nC_3 = 70$ হলে, n এর মান কত?
(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 4

13. একটি নির্বাহী কমিটিতে 6 জন পুরুষ ও 5 জন মহিলা আছেন। তাদের মধ্য থেকে 4 সদস্যবিশিষ্ট কয়টি উপকমিটি গঠন করা যায় যাতে প্রত্যেক উপ কমিটিতে কমপক্ষে 4 জন মহিলা থাকেন ?
(a) 310 (b) 315
(c) 75 (d) 330

14. 6 জন পুরুষ ও 5 জন মহিলা থেকে 5 জনের কয়টি কমিটি গঠন করা যায় যাতে প্রত্যেক কমিটিতে কমপক্ষে একজন পুরুষ ও একজন মহিলা অন্তর্ভুক্ত থাকে?
(a) 120 (b) 350
(c) 450 (d) 455

15. '*AMERICA*" শব্দের সব অক্ষরগুলি থেকে প্রতিবারে 4টি অক্ষর নিয়ে কতভাবে সাজানো যায়?
(a) 840 (b) 1270
(c) 480 (d) 360

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 5.1

1. 15. **2.** 4. **3.** 40320. **4.** 120. **5.** 300. **6.** 60. **7.** **(i)** 36. **(ii)** 60. **8.** **(i)** 10080, **(ii)** 36000. **9.** **(i)** 24 **(ii)** 226800, 5040 **10.**144, 576. **11.** 20160, 2520. **12.** 450. **13.** **(i)** 3360, 360. **(ii)** $\frac{11!}{2!\,2!\,2!}$; 120960.**(iii)** 60480. **(iv)** 2880. **14.** 36. **15.** 600,120. **16.** 18. **17.** 154. **18.** 8640. **19.** 36, 28. **21.** **(i)** 2520; **(ii)** 907200; **(iii)** 4989600; **22.** 277200, 15120, 1680. **23.** **(i)** 10080, **(ii)** 30240. **24.** 14400. **25.** **(i)** 3359, **(ii)** 59, **(iii)** 359. **26.** 243. **27.** 359. **28.** 130. **29.** 38. **30.** 45360, 630. **31.** 576. **32.** 72. **33.** **(i)** 100000 **(ii)** 125, 65. **34.** 36000. **35.** 36036, 30492. **36.** 1800. **37.** 5. **38.** $\frac{33!}{6! \times (5!)^2 \times (3!)^3}$.

প্রশ্নমালা 5.2

1. **(i)** 12. **(iii)** 8. **(iv)** $n = 16$, $r = 2$. **2.** 28. **3.** 680. **4.** 220, 54. **5.** 1120. **7.** 246. **8.** 224. **9.** **(i)** 344, **(ii)** 115. **10.** 264000. **11.** 140. **12.** 175. **13.** 105. **14.** 200. **15.** 68. **16.(a)** **(i)** 120, **(ii)** 252. **(b)** 6720. **17.** **(i)** 70 **(ii)** 28. **18.** 7. **19.** **(i)** 80 **(ii)** 1260. **20.** 63. **21.** 1800. **22.** 582. **23.** 11. **24.** 105. **25.** 246. **26.** 69, 276. **28.** $\frac{(n+1)!}{m!\;(n+1-m)!}$. **29.** 63. **30.** 135. **31.** 738. **32.** 216. **33.** 999.

প্রশ্নমালা 5.3

1. **(a)** 2494800; **(b)** 45360; **(c)** 60480. **2.** **(a)** 600; **(b)** 360; **(c)** 288. **3.** **(a)** 6; **(b)** 150; **(c)** 381. **4.** **(a)** 36000; **(b)** 30; **(c)** 10800. **5.** c; **6.** c; **7.** a; **8.** b; **9.** b; **10.** b; **11.** b; **12.** c; **13.** b; **14.** d; **15.** c.