2019-11-20

computational Statistics

HW#8

192STG11 우나영

computational Statistics

HW#8

1. Problem

지난번 과제에서 MC(Monte Carlo) estimator 의 분산을 줄이는 기술로 IS(Importance Sampling)과 AS(Antithetic Sampling) 방법을 다루었다. 본 과제에서는 분산을 줄이는 마지막 기술로 CV(Control Variate)을 다룰 것이다. 이와 같은 세 가지 방법을 연습 문제를 통해 구현해 볼 것이다.

Control Variate(CV)은 적분 값을 모르는 추정치와 correlation 이 있는 적분 값이 알려진 추정치를 이용하여 분산을 줄이는 기술이다. 우리가 알고 싶은 값은 $\mu = E(h(X))$이다. 이와 correlation 이 있으면서 동시에 알려진 값은 $\theta = E\{c(Y)\}$이다. $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ 독립적인 관측치가 있다고 할 때, 가장 간단한 추정치는 $\widehat{\mu_{MC}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i)$이고 이미 알려진 값이라 추정할 필요는 없지만 CV 기술을 사용하기 위해 $\widehat{\theta_{MC}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c(Y_i)$로 추정할 수 있다.

$$\hat{\mu}_{CV} = \hat{\mu}_{MC} + \lambda\left(\hat{\theta}_{MC} - \theta\right)\ where\ \lambda\ is\ a\ parameter\ chosen\ by\ user$$

$$Var(\hat{\mu}_{CV}) = Var(\hat{\mu}_{MC}) + \lambda^2 Var\left(\hat{\theta}_{MC}\right) + 2\lambda cov(\hat{\mu}_{MC}, \hat{\theta}_{MC})$$

$$\min_{\lambda} Var(\hat{\mu}_{CV}) = Var(\hat{\mu}_{MC}) - \frac{\{cov\left(\hat{\mu}_{MC}, \hat{\theta}_{MC}\right)\}^2}{Var\left(\hat{\theta}_{MC}\right)}$$

따라서 $\{cov\left(\hat{\mu}_{MC}, \hat{\theta}_{MC}\right)\}$가 클수록 분산의 감소 폭이 커진다. 따라서 CV 는 $cov(\hat{\mu}_{MC}, \hat{\theta}_{MC})$의 값이 큰 관계를 찾을 수 있는 문제에서 활용된다.

예제 6.7 을 풀기 전에 Option pricing 에 대한 이해가 필요하다. Option 은 정해진 시간에 정해진 가격으로 기초자산(주식, 채권 등)을 사거나 팔 수 있는 권리이다. 그 중 Call option 은 살 수 있는 권리이다. 옵션과 관련된 기본적인 용어들은 아래와 같다.

기호	단어
T	maturity date, 만기일
$S^{(T)}$	t=T 시점에서 주식의 가격
r	risk free of rate, 연 이자율
σ	volatility 위험률
K	strike price, 행사 가격, 옵션을 행사할 때 지불하거나 받는 가격

옵션의 만기일(T)일 때 권리자는 자산의 가격과 행사 가격을 비교했을 때, $S^{(t)} > K$이면 콜옵션을 행사하겠지만 $S^{(t)} < K$이면 행사하지 않을 것이다. 그렇다면 t=0 일 때 콜옵션의 가격 책정에 대한 이슈가 발생한다. 옵션 가격 책정의 기본 아이디어는 행사 시점의 기대 수익을 현재 가치로 환산한 값으로 수식으로 표현하면 아래와 같다.

$$\mathrm{C} = \exp\left\{-\frac{rT}{365}\right\}\max\left\{S^{(T)} - K, 0\right\} \quad -(1)$$

이때 랜덤 파트인 주식 가격 $S^{(T)}$는 블랙 숄즈 모델을 이용하여 추정한다.

$$S^{(T)} = S^{0}\exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T}{365} + \sigma Z\sqrt{\frac{T}{365}}\right\}\ where\ Z \sim std\ Normal\ -(2)$$

따라서 option 의 적정 가격은 E(C)이다. 이는 $\hat{\mu}_{MC} = \bar{C} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} C_i$ simple Monte Carlo 로 추정할 수도 있지만 ITO 적분을 이용하여 E(C)의 analytic solution 을 구할 수 있다. European call option 의 경우 만기일(T)에만 권리를 행사할 수 있기 때문에 t=T 시점의 주식 가격에만 dependent 하므로 위와 같은 방법으로 E(C)을 추정하여 option 의 적정 가격을 계산할 수 있다. 반면에 Asian call option 은 옵션 소유 시점 t=0 부터 만기 시점 t=T 까지 권리를 행사할 수 있기 때문에 t=0,...,T-1 시점까지의 주식 가격을 계산해야 한다.

$$S^{(t+1)} = S^{t}\exp\left\{\frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{365} + \frac{\sigma Z(t)}{\sqrt{365}}\right\}\ where\ t = 0, \dots, T-1\ -(3)$$

$$\mathrm{A} = \exp\left\{-\frac{rT}{365}\right\}\max\{\bar{S} - K, 0\} - (4)$$

따라서 Asian call option 의 적정 가격은 E(A)이다. 그러나 이는 analytic solution 이 없기 때문에 $\hat{\mu}_{MC} = \bar{A} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_i$ 이와 같은 MC estimator 를 구해야 한다. 하지만 만약 A 를 구할 때 arithmetic mean 인 $\bar{S}$ 대신 geometric mean 인 $\bar{S}_{geo} = \prod_{t=1}^{T} S^{(t)}$를 대입하면 E(A)의 analytic solution 을 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\theta = S^{(0)}\Phi(c_1)\exp\left\{-T\left(r + \frac{c_3\sigma^2}{6}\right)\frac{1 - \frac{1}{N}}{730}\right\} - K\Phi(c_1 - c_2)\exp\left\{-\frac{rT}{365}\right\} - (5)$$

$$c_1 = \frac{1}{c_2}\left[\log\left\{\frac{S^{(0)}}{K}\right\} + \left(\frac{c_3 T}{730}\right)\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{c_3\sigma^2 T}{1095}\left(1 + \frac{1}{2N}\right)\right] - (6)$$

$$c_2 = \sigma[\frac{c_3 T}{1095}\left(1 + \frac{1}{2N}\right)]^{1/2} - (7)$$

$$c_3 = 1 + \frac{1}{N} - (8)$$

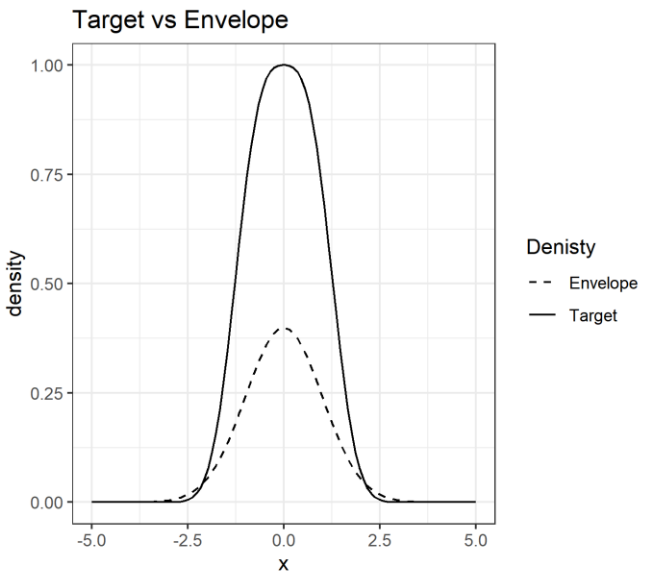
where N is the number of simulations Φ is standard normal cumulative distribution function.

또는 $\bar{S}_{geo} = \prod_{t=1}^{T} S^{(t)}$으로 arithmetic 으로 MC 를 구한 방법처럼 estimator 를 구하는 방법도 있다. 이러한 방법으로 구해진 estimator 는 $\hat{\theta}_{MC}$라 부른다. 이처럼 알려지지 않은 E(A)의 적분 값을 구하기 위해 간단한 추정치 $\hat{\mu}_{MC}$과 값이 알려져 있고 $\hat{\mu}_{MC}$와 correlation 을 갖는 θ와 $\hat{\theta}_{MC}$을 갖는 경우 Control Variate(CV) 기술을 이용하여 분산이 작은 estimator 를 구할 수 있다.

2. Result

6.3. Consider finding $\sigma^2 = E(X^2)$ when X has the density that is proportional to $q(x) = \exp\{-\frac{|x|^3}{3}\}$.

a. Estimate σ^2 using Importance Sampling with Standardized weights



Target : $q(x) = \exp\{-\frac{|x|^3}{3}\}$

Envelope : g(x) ~ Norm(0, 1)

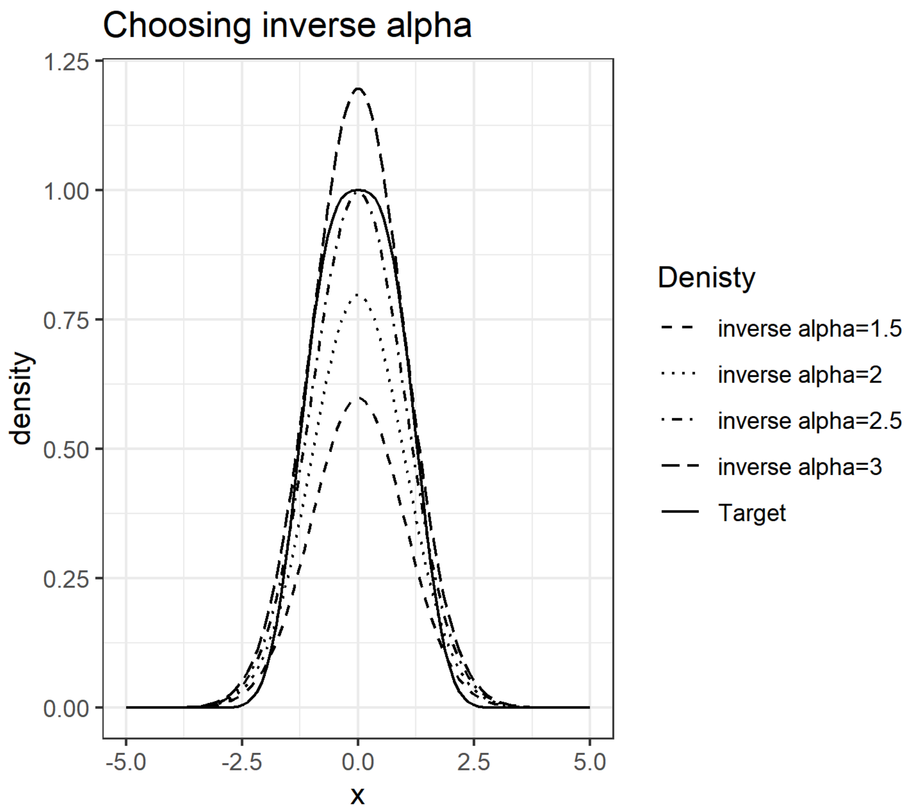
Step 1. Generate x_i ~ g(x), i=1,...,10^5

Step2. Calculate standardized weights $w*(x_i) = \frac{q(x_i)g(x_i)}{\sum q(x_i)/g(x_i)}$

Step3. $\hat{\sigma}^2 = E(X^2) = \sum h(x_i) w*(x_i)\ where\ h(x) = x^2$

$$\hat{\sigma}^2 = 0.7751$$

b. Repeat the estimation using Rejection Sampling



Target : $q(x) = \exp\{-\frac{|x|^3}{3}\}$

Envelope : g(x)/α where g(x) ~ Norm(0, 1)

Step1. 위의 그래프를 참고해 Target 을 덮을 수 있는 density 의 alpha 값을 선택한다.

Alpha 로 1/3 을 선택한다.

Step2. Generate $y_i \sim$ envelope g(y)/α, i = 1, …,10^5

Step3. Generate $u_i \sim unif(0,1)$

Step4. Reject y_i if $u_i > q(y_i)/e(y_i)$

Step5. $E({y_i}^2) \approx \hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = 0.7797$$

c. Philippe and Robert strategy

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}\left(X_{[i+1]} - X_{[i]}\right)h(X_{[i]})q(X_{[i]})}{\sum_{i=1}^{n-1}(X_{[i+1]} - X_{[i]})q(X_{[i]})}$$

where $X_{[1]}, \ldots, X_{[n]}$ *ordered sampled associated with* $X_1, \ldots, X_n$ *and when normalizing constant c is unknown.*

$$\hat{\sigma}^2 = 0.7765$$

d. comparison between Rejection and Philippe and Robert strategy

	Simple MC	Philippe and Robert
$\hat{\sigma}^2$	0.7742	0.7763
iteration	464	211
system time(sec)	61.45	20.81

Stopping rule 은 the number of iteration < 10^3과 error $= |\hat{\sigma}^2{}_{old} - \hat{\sigma}^2{}_{new}| < \epsilon, where\ \epsilon\ is\ 10^{-6}$.

위의 두 방법 모두 rejection sampling 을 이용하여 target 에서 iid sampling 을 한 뒤 Philippe and Robert 방법 그리고 Simple MC 각각의 방법으로 $\hat{\sigma}^2$을 구하였다. Simple MC 보다 Philippe and Robert 방법으로 구한 estimator 는 수렴 iteration 횟수도 절반이고 속도도 1/3 이다. 따라서 이론적으로 Philippe and Robert 방법이 Simple MC 보다 수렴이 빠르다고 알려진 사실을 뒷받침해준다.

6.7. Consider pricing a European call option on an underlying stock with current price $S^{(0)} = 50$, strike price K=52, and volatility σ = 0.5. Suppose that there are N=30 days to maturity and that the risk free rate of return is r=0.05.

a. Confirm that the fair price for this option is 2.10 when the payoff is based on $S^{(30)}$.

Problem 에 기술된 (2)번의 블랙 숄즈 공식을 이용하여 $S^{(30)}$의 주식 가격 10^5개 샘플링 한 후 (1)번의 공식에서 구해진 10^5개의 옵션 적정 가격의 평균을 취해 $\hat{\mu}_{MC}$를 구한다. 따라서 $\hat{\mu}_{MC} = 2.0833$이다.

b. Consider the analogous Asian option (Same $S^{(0)}, K, \sigma, N, and\ \ r$) with payoff based on the arithmetic mean stock price during the holding period. Using simple monte carlo, estimate the fair price for this option.

a 와 마찬가지로 Problem 에 기술된 (3)번의 블랙 숄즈 공식을 이용하여 t=1,…,T 의 각 시점의 주식 가격을 10^5개 샘플링 한 후 (4)번의 공식에서 구해진 10^5개의 Asian call option 적정 가격에 평균을 취해 $\hat{\mu}_{MC}$을 구한다. 따라서 $\hat{\mu}_{MC} = 0.9444$.

c. Improve upon the estimate in (b) using control variate strategy described in Example 6.13

Problem 에 기술된 (5)~(8)의 식을 이용하여 θ을 구하고 (4)에 arithmetic mean 을 대입해 $\hat{\mu}_{MC}$을 추정하고 (4)에 geometric mean 을 대입해 $\hat{\theta}_{MC}$을 추정한다. 추정하기 위한 sample size 는 10^5이고 각각의 추정치에 대한 분산을 구하기 위해 위와 같은 과정을 100 번 반복했다. $\hat{\mu}_{CV}$는 아래와 같이 구해지며 λ는 교재를 참고하여-1을 사용하였다.

$$\hat{\mu}_{CV} = \hat{\mu}_{MC} + \lambda(\hat{\theta}_{MC} - \theta)\ where\ \lambda\ is\ a\ parameter\ chosen\ by\ user$$

$\{corr(\hat{\mu}_{MC}, \hat{\theta}_{MC})\}$	$\hat{\mu}_{CV}$	se($\hat{\mu}_{CV}$)	se($\hat{\mu}_{MC}$)	se($\hat{\mu}_{MC}$)/se($\hat{\mu}_{CV}$)
0.9998	0.9058	0.00028	0.00691	24.1956

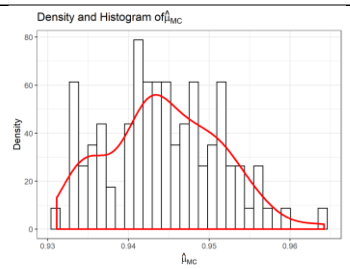
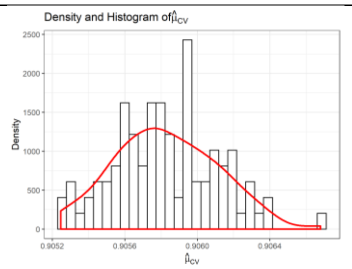
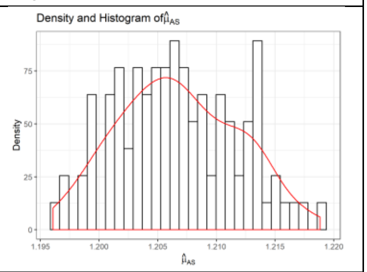
$\{corr(\hat{\mu}_{MC}, \hat{\theta}_{MC})\}$가 거의 1 에 가까워 control variate 를 사용하면 효과적으로 분산을 줄일 수 있는 조건을 갖추었다. 그 결과 se($\hat{\mu}_{CV}$)는 se($\hat{\mu}_{MC}$)보다 24 배 작아졌다.

d. Try antithetic approach to estimate the fair price for the option described in part (b)

sample size n=10^5을 반으로 나누어 한 그룹은 $S^{(T)}$를 Z로 구하고 다른 그룹은 – Z로 구해 각 그룹의 옵션 적정 가격의 MC 를 구한다. 두 MC 는 negative correlation 을 가지므로 antithetic 을 활용하여 분산을 작게 만드는 추정치를 구할 수 있다.

$\{corr(\hat{\mu}_{MC}{}^{1}, \hat{\mu}_{MC}{}^{2})\}$	$\hat{\mu}_{AS}$	se($\hat{\mu}_{AS}$)
-0.4091	1.2067	0.005059

e. Using simulation and/or analysis compare the sampling distributions of the estimators in (b),(c) and (d)

	MC	CV	AS
			
se	0.00691	0.00028	0.00505
Min	0.9311	0.9052	1.196
Q1	0.9403	0.9056	1.203
Q2	0.9441	0.9058	1.206
Q3	0.9490	0.9060	1.211

MAX	0.9642	0.9067	1.219

(b), (c) 그리고 (d)에서 생성한 MC, CV, 그리고 AS 의 샘플의 요약 통계량과 히스토그램 및 분포 그림이다. AS 는 MC 와 CV 에 비해 값이 큰 쪽에 분포한다. 분산은 CV, AS 그리고 MC 순으로 작다. 그러나 AS 와 MC 의 분산 차이는 1.5 배 정도로 큰 차이를 보이지 않는다. CV estimator 가 분산이 가장 작으므로 가장 성능이 좋은 estimator 라고 할 수 있다.

3. Discussion

본 과제에서 variance reduction 기술의 마지막으로 Control Variate 을 배웠다. Control Variate 는 unknown 적분 값을 측정하기 위해 가장 간단한 estimator 를 추정하고 그 값과 correlation 이 존재하면서 known 인 값의 관계를 이용하여 분산이 작은 estimator 를 추정할 수 있다. 만약 두 값이 correlation 이 높다면 분산의 감소폭을 키울 수 있다는 장점이 있다. 이때까지 배웠던 variance reduction 테크닉과 sampling 기술을 예제에 구현해보았다. 특히 6.7 의 경우 option pricing 에서 블랙 숄즈 모형으로 주식 가격을 구하고 이를 이용하여 옵션의 적정 가격의 예측치를 계산했다. 옵션은 가격 책정이 큰 이슈이므로 옵션의 적정 가격의 예측치의 분산을 줄이는 것이 중요하다. 따라서 MC, CV,그리고 AS 를 이용하여 예측치를 구하고 분산을 비교했다. 그 결과 CV 의 예측치가 가장 분산이 작다는 것을 확인할 수 있었다.

4. Appendix