B.ABDALIMOV, A.A.FAYZIYEV

MATEMATIKA

$$H_0:\ M(X) = M(Y),\ \ H_1:\ M(X) \neq M(Y)$$

$$t_{ko'z} = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}}\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}},$$

$$t_{krit} = t\ (n+m-2;\ \alpha).$$

TOSHKENT – 2022

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

QISHLOQ XO’JALIGI VAZIRLIGI

B.Abdalimov, A.A.Fayziyev

MATEMATIKA

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

QISHLOQ XO‘JALIGI SOHASI TALABALARI UCHUN DARSLIK

SIFATIDA TAVSIYA QILGAN

“ILM-ZIYO-ZAKOVAT”

TOSHKENT – 2022

UO'K: 336.0-01.
KBK: 824.22
A-06

B.Abdalimov, A.A.Fayziyev
Matematika: Agrar universiteti va qishloq xoʒjalik oliy oʒquv yurtlari talabalari uchun darslik.-T.: "ILM-ZIYO-ZAKOVAT", 2022.-518 bet

Mazkur darslik agrar universiteti va qishloq xoʒjalik oliy oʒquv yurtlarining matematika dasturi asosida yozilgan boʒlib, unda moliyaviy matematika elementlari, tekislik va fazoda analitik geometriya, matematik tahlil, differensial tenglamalar, vektorli va chiziqli algebra lementlari, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika va ularni qishloq xo'jalik masalalarini yechishga tatbiqlari bayon etilgan.

Darslik qishloq xoʒjalik oliy oʒquv yurtlari talabalari uchun moʒljallangan boʒlib, undan iqtisodiyot va texnika oliy oʒquv yurtlari talabalari ham foydalanishlari mumkin.

Mualliflar: B.Abdalimov, A.A.Fayziyev

Taqrizchilar: 1) Sh. Qayumov –Islom Karimov nomidagi TDTU "Oliy matematika" kafedrasi dotsenti, f.-m.f.n.,
2) T.Turg'unov–Toshkent Davlat agrar universiteti "Axborot texnalogiyalari va matematika" kafedrasi dotsenti, i.f.n.

«Axborot texnalogiyalari va matematika» kafedrasining 2021 yil " 24 " may № 10 sonli majlisida muhokama qilinib, chop etishga tavsiya etilgan.
"Agrologistika va biznes" fakulteti o'quv-uslubiy komissiyasining № 10, 2021 yil "28" may yig'ilishida va Universitet "O'quv-uslubiy Kengashining" № 8 , 07 " iyul " " 2021 " 2021 yil qarorlari bilan chop etishga tavsiya qilindi.
O'zbekiston respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2021 yil "23" noyabrdagi "500-664"- sonli buyrug'i bilan qishloq xo'jaligi sohasi talabalari uchun "Matematika" fanidan darslik sifatida tavsiya qilingan.

© B.Abdalimov, A.A. Fayziyev. 2022 yil
© Toshkent davlat agrar universitet, 2021 yil
© "ILM-ZIYO-ZAKOVAT", 2022 yil

ISSBN 978-9943-7676-3-8

TOSHKENT- 2022

KIRISH

Matematika-qadim-qadimdan oziq-ovqat zahirasini,dehqonchilik qiladigan yer maydonini, bosib o'tilgan yo'lni va boshqa hisoblashlarda, hayotiy ehtiyojlar sababli kelib chiqib rivojlangan fandir. Keyinchalik, texnika va harbiy qurollarni loyihalashda, aniqliklarini hisoblashda qo'llanilgan. Bugungi kunda barcha sohalarda matematik modellashtirish va uning usullari keng qo'llanilmoqda.

Prezidentimiz o'zlarining qator qarorlari, farmoyishlarida, hamda oily ta'limni takomillashtirishga bag'ishlangan nutqlarida, davr va zamon talabiga javob beradigan, yuqori malakali mutaxasislarni tayyorlash vazifasini, oily ta'lim tizimiga asosiy vazifa qilib qo'ymoqdalar. Chunki, vatanimizning kelajakdagi yuksak taraqqiyoti yoshlarning ilmiga, tadbirkorligiga, salohiyatiga bog'liq.

O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2018 yil 10 oktyabrdagi "Oliy ta'lim muassasalarini o'quv adabiyotlari bilan ta'minlash to'g'risida"gi 816-sonli qarori, hamda Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirining 2018 yil 13 oktyabrdagi 857-sonli buyrug'iga asosan, agrar universitetning barch yunalish talabalari uchun, ushbu darslik tayyorlandi.

Rivojlangan mamlakatlarning oliy ta'lim tizimida, talabalarga o'qitilayotgan barcha fanlar, tayyorlayotgan mutaxassislik yunalishlariga moslashtirilib, ularning kasbiy tayyorgarliklarini kuchaytirishga, kelgusida ish faoliyatlarida uchraydigan amaliy masalalarni yechishga yordam beruvchi fan sifatida o'qitiladi. Bu zamonaviy innavastion ta'lim texnalogiyalarini bizni ta'lim jarayyonimizda kengroq joriy etish, davr va zamon talabidir.

Ma'lumki, matematikani talabalarga o'qitishdan asosiy maqsad, talabalarni mantiqan to'g'ri fikr yuritishga o'rgatish bilan bir qatorda, ularni o'z ish faoliyatida uchraydigan amaliy masalalarni, matematik usullardan foydalanib yechishni, tahlil qilishni va xulosalar chiqarishni o'rgatishdan iboratdir.

Darslik, qishloq xo'jalik oliy o'quv yurtlari uchun, matematikadan tuzilgan fan dasturida rejalashtirilgan dars soatlari hajmiga mos holda tayyorlangan bo'lib unda moliyaviy matematika, tekislikda va fazoda analitik geometriya, vektorlar, chiziqli algebra, matematik tahlil, differensial va integral hisobi, differensial tenglamalar, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika bo'limlari va ularning qishloq xo'jalik hamda iqtisodiy masalalarni yechishga qo'llanishlari bayyon etilgan.

Mazkur darslik, 2004 yilda agrar universitet talabalari uchun chop etilgan B.Abdalimovning "Oliy matematika" darsligini, qayta ishlangan va qishloq xo'jaligining turli sohalariga matematikaning qo'llanilish bo'yicha mavzular bilan to'ldirilgan variantidir. Jumladan, moliyaviy matematika va ularni qishloq xo'jalik

masalalarini yechishga qo‘llanilishi, matritsalar algebrasi yordamida xo’jaliklararo balanis tenglamalarini tuzish, ortogonal vektorlarni baho va infillyatsiya indekslarini aniqlashga qo‘llashi, ishlab chiqarish funksiyalariga doir misollar, differensial hisobining iqtisodiy jarayonlarni tahlil qilishga tatbiqlari, xususan talab va taklif, talab va mahsulot bohosi orasidagi bog’lanishlar, taklifning egiluvchanligini aniq-lash, iqtisodiy jarayonlarni nisbiy o`zgaruvchanligini tahlili, ehtimollar nazariyasi-ning markaziy limit teoremasini qishloq xo‘jalik masalalarini yechishga qo‘llanilishi, matematik statistika usullari bilan, statistik ma’lumotlarini tahlil qilish asosida, qishloq xo’jalik ekinlari hosildorliklarini avvaldan prognoz (bashorat) qilish, ikki va undan ortiq paxta navlari bo’yicha o’tkazilgan tajriba natijalari asosida, ulardan yuqori hosildorlisini Styu’dent va dispersion tahlil usullari bilan kafolatli aniqlash, korrelyatsiya nazariyasi va boshqa mavzular bilan toldirilgan.

Bundan tashqari, T.A.Azlarov va X.T. Mansurovning «Matematik analiz»(1,2 tom), xorijiy adabiyotlardan S. M.Blinderning “Guide to Essential Math” 2nd Edition.Elsevier, USA 2013, John R. Fanchi “Math refresher for scientists and engineers”, 3rd.ed., Springer- Verlag, New York 2008, Jay L. Devore, Kenneth N. Berk. Modern Mathematical Statistiks with Applications (Second Edition).- Springer Science+Business Media, LLC 2012, A.M. Ahtamovning “Matematika dlya sotsiologov i ekonomistov”, Moskva, “Fizmatlit”, 2008, A.C.Солодовников, B.A.Бабайцев, A.B. Браилов «Математика в экономике», M. »ФиС», 1-tom,1998, I.A.Zaytsev “Vishiy matematika”, Moskva, 1991, hamda A.A.Fayziyev, B.Rajabov, l. Rajabovalarning “Oliy matematika, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” T.“TashDAU”, 2014, adabiyotlardan foydalanib yozildi.

Shuni takidlash lozimki, ilmu-fan, xususan matematika fani ham uzluksiz ravishda juda tez rivojlanib, barcha sohalarga keng qo’llanilmoqda. Murakkab sonli hisoblashlarni va analitik masalalarni jumladan, funksiyalarni hosilasini, ekstremum qiymatlarini, integrallarni, tenglamalar sistemasini yechuvchi, murakkab shakllarni ko’p o’lchovli holarda chizuvchi Maple (http://**w w w**. maplesolft.com), MatCad(http://**w w w**. mathsolft.com), MathLab(http://**w w w**. mah*w*orks.com), (http://**w w w**. softline.ru) va boshqa universal paket programmalar mavjud. Bu programmalardan talabalar foydalanib, yechgan misollarini to’grigini va murakkab shakillarni chizishni EHM yordammida tekshirishlari mumkin.

Ushbu darslik qishloq xoʒjaligi oliy oʒquv yurtlarining talabalariga moʒljallangan boʒlsada, undan, iqtisodiyot va texnika oliy oʒquv yurtlari talabalari ham foydalanishlari mumkin.

Darslikning I-V, IX-XVIII, XXII-XXIX -boblaridan barcha “Agranomiya” yunalishlari va qishloq xo’jalik texnikumlarining talabalari foydalanishlari nazarga tutilgan.

Professor B.Abdalimovga ushbu kitobni yozisda “Oliy matematika” [2] darsligidan foydalanishga ro’xsat berganligi uchun o’z minnatdorchiligimni bildiraman.

Kitob qolyozmasi bilan tanishib, oz mulohazalarini bildirgan hamkasblarimizga, жумладан Islom Karimov nomidagi TDTU “Oliy matematika” kafedrasi dotsenti Sh. Qayumovga, ToshDAUning Andijon filiali “Matematika va axborot kommunikatsion texnalogiyalari” kafedrasi dotsenti A.Davlatovga oz minatdorchiligimni izhor etaman.

Mazkur darslik ayrim kamchiliklardan holi bolmasligi mumkin. Bu kamchiliklarni korsatib, ozining foydali fikrlarini bildiradigan ortoqlarga muallif oldindan oz tashakkurini bildiradi.

I QISM
I-BOB
TURLI FOIZLARNI HISOBLASH VA ULARNING QISHLOQ XO‘JALIK MASALALARINI YECHISHGA QO‘LLANILISHI

1-§. Oddiy foiz masalalarini yechish

Turli foiz masalalari kundalik turmushinizda, xususan qishloq xo’jalik masalalarini yechishda juda ko’p uchraydi. Shu sababli moliyaviy matematikaning boshlang’ich bir qismi bo’lgan, turli foiz masalalariga qisqacha to’xtalib o’tamiz([9] − [13]).

A haqiqiy sonning yuzdan bir ulushi (bo‘lagi) bir foiz deyiladi.
Masalan, A soninig 8% 0,08 ·A ga, 45% esa 0,45· A ga teng bo‘ladi. Boshqacha aytganda, o’nli kasr bilan foiz orasida quyidagicha bog’lanish mavjud: 1% = 0,01; 15% = 0,15; 120%= 1,2.

Umumiy holda oddiy foiz masalalari quyidagicha yechiladi:

A - 100%
B - C %

A, B, haqiqiy sonlar noldan farqli bo‘lganda, nisbatlari proporsional bo‘ladi, ya’ni A sonning B ulushiga nisbati, ularning mos foizlari nisbatiga teng bo‘ladi:

$$\frac{A}{B} = \frac{100}{C}, \quad AC = 100B \qquad (1.1)$$

Oxirgi tenglikdan ixtiyoriy ikkitasi ma’lum bo‘lsa, uchinchi miqdorni topish mumkin.

Misol-1. Agar paxtadan 34% tola chiqsa, 1200 t paxtadan qancha tonna tola chiqadi?

Yechish: A=1200 t. 100 % ni, C =34% ni toppish uchun quyidagi proporsiyani tuzamiz

1200 - 100%

B - 34% $B = \frac{34 \cdot 1200}{100} = 408\ t.$

Misol-2. Fermer xo‘jaligining 5% ni tashkil qiluvchi 8 ga yerga sholi ekildi. Fermer xo‘jaligining qancha yeri bor?

Yechish: 8 ga - 5%

A - 100% $A = \frac{8 \cdot 100}{5} = 160\ ga.$

Misol-3. Pillaxonaga 76 kg sifatli, 4kg sifatsiz pilla topshirildi. Sifatsiz pilla necha % ni tashkil qiladi?

Yechish: Jami pilla 76+4=80 kg

80 kg - 100%

4 kg - C % $C = \frac{4 \cdot 100}{80} = 5\%$

Misol-4. Ekilgan 800 chigitdan 720 tasi unib chiqdi. Chigitning unuvchanligi necha % ni tashkil qiladi ?

Yechish: 800 - 100%

720 - C % $C = \frac{720 \cdot 100}{800} = 90\%$

Misol-5. Sutning yog‘liligi 2,5% bo’lsa, 16 kg yog’ olish uchun necha kg sut kerak?

Yechish: 16 kg - 2,5 %

x kg -100% $x = \frac{16 \cdot 100}{2{,}5} = 640\ kg.$

Misol-6. Yog‘liligi 3,2% bo’lgan 30 litr sut bilan, yog‘liligi 2,8% bo‘lgan 40 litr sut aralashtirilganida hosil bo‘lgan sutning yog‘liligi necha foiz bo‘ladi?

Yechish: x -litr p % li suyuqlikni, y- litr q % li suyuqlik bilan aralashtirishdan hosil bo’lgan aralashmaning foizi r % quyida formula bilan hisoblanadi

$$r = \frac{x \cdot p\% + y \cdot q\%}{x + y}$$

$$r = \frac{x \cdot p\% + y \cdot q\%}{x + y} = \frac{30 \cdot 3{,}2 + 40 \cdot 2{,}8}{30 + 40}\% = \frac{208}{70}\% \approx 2{,}93\ \%\ .$$

2-§. Oddiy va murakkab foizli jamg‘armalarni hisoblash.
Oddiy foizli jamg‘arma

A sonning ma’lum bir foizi vaqt (oy, kvartal, yil) o‘tishi bilan qo‘shilib borsa, jamg‘arma hosil bo‘ladi.

Agar jamg‘armada faqat boshlang‘ich *A* sonining foizi qo‘shilib borsa, oddiy foizli jamg‘arma deyiladi va quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$A_n = A(1 + \frac{np}{100}) \qquad (1.2)$$

Bu yerda, p kelishilgan muddatda ***A*** so'mning o'sish foizi, n- oylar yoki yillar soni (muddat), $\boldsymbol{A_n}$- *n* muddatdan keyingi oddiy foizli jamg'arma miqdori.

Misol-1. Boshlang'ich *A* = 1000000 so'm pul, oyiga p = 20% li oddiy foizli jamg'armada, *n* =5 oydan keyin qancha so'm bo'ladi?

Yechish: (1.2) formulaga asosan, 5 oydan keyingi oddiy foizli jamg'arma miqdori quyidagicha bo'ladi

$$A_5 = 1000000\left(1 + \frac{5 \cdot 20}{100}\right) = 1000000 \cdot 2 = 2000000 \text{ so'm}.$$

Misol-2. To'rt oydan keyin, 10% li oddiy foizli jamg'arma miqdori 14000 so'm bo'lgan bo'lsa, boshlang'ich pul miqdori qancha bo'lgan?

Yechish*:* *n = 4,* p*=10%, A_4*=14000 so'm (1.2) formulaga asosan

$14000 = A\left(1 + \frac{4 \cdot 10}{100}\right)$ tenglikdan, boshlang'ich pul miqdori $A = \frac{1400}{1{,}4} = 10000$ so'm ekanligi kelib chiqadi.

Misol-3. 5000 so'm pul, oyiga 12 % li oddiy jamg'armada, necha oydan keyin 8000 so'm bo'ladi?

Yechish: Masala shartiga asosan A_n= 8000 so'm, *A* = 5000 so'm, *p*= 12% bo'lganligidan (1.2) formulaga asosan

$$n = (A_n - A)\frac{400}{Ap} = \frac{8000 - 5000}{50 \bullet 12} = 3000:600 = 5 \text{ oydan keyin.}$$

Murakkab foizli jamg'arma

Agar jamg'arma boshlang'ich pul miqdoriga emas, balki har oylik (yillik) o'sish foiziga nisbatan olinsa, murakkab foizli jamg'arma hosil bo'ladi va u quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$K_n = K(1 + \frac{p}{100})^n = Kr^n \qquad (1.3)$$

Bu yerda, *K* boshlang'ich pul miqdori, *p*- ma'lum bir muddatda o'sish foizi, *n* muddat (oy, yil), K_n, *n* - muddatdan keying jamg'arma miqdori, $r = 1 + \frac{p}{100}$.

Misol-1. 1000000 so'm, oylik 20% li murakkab jamg'armada, 5 oydan keyin qancha so'm bo'ladi?

Yechish: K= 1000000 so'm, p= 20%, n= 5 (1.3) formulaga asosan

$K_5 = K(1 + \frac{p}{100})^5 = Kr^5 = 1000000(1 + \frac{20}{100})^5$ =1000000·1,2^5=

=1000000·2,48832 =2488320 so'm bo'ladi.

Buni oddiy foizli jamg‘arma bo’yicha hisoblangan misol-1 bilan toqqoslasak, murakkab foizli jamg‘armada 488320 so‘m ko‘p bo‘lishini ko‘ramiz.

Misol-2. Oyiga 10% li shartda, murakkab foizli jamg‘arma uch oydan keyin 4200 so’m bo‘lgan bo‘lsa, boshlang‘ich pul miqdori qancha so’m bo‘lgan?

Yechish: K_3 = 4200 so‘m, p =10%, n= 3, $r = 1 + \frac{p}{100}$ = 1,1 natijada (1.3) formulaga asosan:

$K_3 = K(1 + \frac{p}{100})^3$, $K = \frac{K_3}{r^3} = \frac{4200}{1{,}1^3}$ = 4200 : 1,331 ≈ 3155,52 so‘m bo‘lgan.

3-§. Qishloq xo’jalik korxonalarini o‘rtacha o‘sish sur’atini aniqlash.

Misol-1. 4 yillik rejani fermerlar uyushmasi bajarishi uchun, yetishtirayotgan mahsuloti hajmini 90 foiz oshirishi kerak bo‘lsa, fermerlar uyushmasini o‘rtacha yillik o‘sish sur’ati qanday bo‘lishi kerak?

Yechish: $n = 4$, $K_4=1{,}9 \cdot K$ bundan $K_4=Kr^4$ bo‘lganligi uchun,

$r^4 = 1{,}9$, $r = (1{,}9)^{0{,}25} \approx 1{,}174$, $1 + \frac{p}{100} = 1{,}174$, $\frac{p}{100} = 0{,}174$, $p = 17{,}4\%$.

Demak, o‘rtacha yillik mahsulot yetishtirish hajmini 17,4% oshirgan taqdirda 4 yillik mahsulot yetishtirish hajmini fermerlar uyushmasi 90% o’shishga erishadi.

$K_n = Kr^n$ formuladan foydalanib, qishloq xo’jalik korxonalarini o‘rtacha o‘sish sur’atini aniqlash mumkin.

Misol-2. Meva sharbatini ishlab-chiqaruvchi korxonaning ishchilari soni kvartal bo’yicha quyidagicha bo’ldi: I-kvartalda -750 kishi; I I-kvartalda -763 kishi; I I I-kvartalda -777 kishi; IV-kvartalda -785 kishi. Korxona ishchilari sonini kvartaldan-kvartalga o’zgarish foizini baholang?

Yechish. Ishchilari sonini kvartaldan-kvartalga o’rtacha o’sishini bir nechta formulalar bilan hisoblash mumkin. Oddiy taqqoslash yordamida kvartaldan-kvartalga ishchilar sonini o’zgarishi quyidagicha bo’ladi:

I I-kvartalda I-kvartalda nisbatan $K_1 = \frac{763}{750} \approx 1{,}0173$,

I I I-kvartalda I I-kvartalda nisbatan $K_2 = \frac{777}{763} \approx 1{,}0183$,

I V-kvartalda I I I-kvartalda nisbatan $K_3 = \frac{785}{777} \approx 1{,}0103$.

Ishchilari sonini kvartaldan-kvartalga o’zgarishini o’rtacha geometrik

$$\bar{X}_{geomet} = \sqrt[n]{X_1 X_2 \dots X_n} \qquad (1.4)$$

(1.4) formulasi bilan hisoblaymiz:

$\bar{K} = \sqrt[n]{K_1 K_2 K_3} = \sqrt[3]{K_1 K_2 K_3} = \sqrt[3]{1{,}0173 \cdot 1{,}0183 \cdot 1{,}0103} \approx 1{,}015$.

Demak, har bir kvartalda korxonaning ishchilari soni o’rtacha 1,5 % ga ortgan.

Quyidagi o’rtacha o’sish koeffisientini aniqlash formulasi yordamida

$\bar{M} = \sqrt[n-1]{\frac{X_n}{X_0}}$ ishchilar sonini kvartaldan-kvartalga o'zgarishini hisoblaymiz.

Bizni misolda n=4 bo'lganligidan

$$\bar{M} = \sqrt[3]{\frac{X_4}{X_0}} = \sqrt[3]{\frac{785}{750}} \approx 1{,}015 .$$

Hisoblashlar shuni ko'rsatadiki, korxonalarning o'rtacha o'sish sur'atini, $\bar{X}_{geomet}$ o'rtacha geometrik va $\bar{M}$ o'rtacha o'sish koeffisienti yordamida aniqroq baholash mumkin.

4-§. Qimmatbaho qog'ozlarning baho qiytmatini aniqlash

Ma'lumki, har qanday kelajakda beriladigan pul *M=(1+i)N* formula yordamida (bu yerda *N*-hozirgi vaqtidagi pul miqdori) aniqlanadi. Bu yerda *i = p/100,* p qo'yilgan pulning boshlang'ich foizi([11] − [15]).

Bir yildan keying yilda, pulning qiytmati $N = \frac{M}{i+1}$ teng bo'ladi. Masalan: qimmatbaho qog'ozni o'rtacha o'sish foizi 10% bo'lsin. Bir yildan keyingi qimmati *M* = 1000 so'm bo'ladigan bo'lsa, qimmatbaho qog'ozni bugun

$$N = \frac{M}{i+1} = \frac{1000}{1{,}1} = 909{,}09$$

so'mga sotib olish mumkin. Agar qimmatbaho qog'oz 2 yildan keyin 1000 so'm qiytmatga ega bo'ladigan bo'lsa, uni bugungi kunda

$$N = \frac{M}{(1+i)^2} = \frac{1000}{1{,}1^2} = \frac{1000}{1{,}21} \approx 826{,}45$$

so'mga sotib olish mumkin. Xuddi shunday *n* yildan keyin *M* so'm bo'ladigan qimmat baho qog'ozni bugun $N = \frac{M}{(1+i)^n}$ so'mga sotib olish kerak bo'ladi.

Natijada *T* yildan keyingi qimmat baho qog'ozning bahosi

$$N = \frac{C_1}{(1+i)^1} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \cdots . + \frac{C_n}{(1+i)^n} \qquad (1.5)$$

formula yordamida hisoblanadi.

Yuqoridagidan farqli ba'zi qimmatbaho qog'oz egalari ma'lum bir davr oralig'ida uning p foiz qiymatini olib turadi. Faraz qilaylik, *n* yildan keyin qiymati to'lanadigan qimmatbaho qog'oz egasi, har yili *A* so'm, ya'ni p foiz tayin bir miqdorda pul olib tursa, hozirgi vaqtdagi qog'ozning qiytmati quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$N = \frac{A}{(1+i)^1} + \frac{A}{(1+i)^2} + \cdots . + \frac{A}{(1+i)^n} + \frac{M}{(1+i)^n} \qquad (1.6)$$

Misol-1. *p*=10%, n=3, har yili *A*=20 so'm to'lab borilsa, 400 so'mli qimmatbaho qog'ozni bugungi bahosi necha so'm bo'ladi?

$N = \frac{20}{1,1} + \frac{20}{1,1^2} + \frac{20}{1,1^3} + \frac{400}{3} = 18,8 + 16,53 + 15,02 + 300,53 = 350,26$ so‘m bo‘ladi.

5-§. Xo‘jalikning uzoq muddatli qarzini to‘lash. Iste’mol krediti.

Fermer xo‘jaligi davlat bankidan ma’lum bir muddatga qarz olganida, qarzini yiliga qancha miqdordan to‘lab borishini bilishi lozim bo‘ladi. Olingan qarzni kelishilgan ulushi har yilning oxirida to‘lab boriladi .

Faraz qilaylik, fermer xo‘jaligining qarzi *K* so‘m bo‘lib, uni *n* yil muddatga, har yili *R* so‘mdan to‘lab borish shartida olgan bo‘lsin. Birinchi qarz to‘lov *RV* so‘mni yil tugashi bilan beradi, ikkinchi yil RV^2 so‘m, nihoyat *n*- yilga RV^n so‘m to‘laydi. Bu yerda, $V = \frac{1}{r} = \frac{1}{(1+\frac{p}{100})}$

Qarzini to‘liq to‘lashi uchun quyidagi tenglik bajarilishi kerak.

$$K = RV + RV^2 + ... + RV^n = R(V + V^2 + ... + V^n) \qquad (1.7)$$

($V < 1$ bo‘lganligidan) geometrik progressiyaning hadlar yig‘indisini topish formulasiga asosan $K = R\frac{V(1-V^n)}{1-V}$. Bundan

$$R = K\frac{1-V}{V(1-V^n)} \qquad (1.8)$$

Qarzdan qutilish uchun har yili to‘lab borilishi lozim bo‘lgan badal miqdori (1.8) bilan topiladi.

Misol-1. Agar *K* =1000000 so‘m qarz, 4 yil muddatga p = 25% shartda olingan bo‘lsa, qarzdan qutilish uchun yillik to‘lov badalini toping.

Yechish. *K* =1000000 so‘m, $\frac{p}{100} = 0,25$, $n = 4$, (1.8) formulaga asosan

$$V = \frac{1}{r} = \frac{1}{(1+\frac{p}{100})} = \frac{1}{1,25} = 0,8$$

bundan

$R = K\frac{1-V}{V(1-V^n)} = \frac{1000000(1-0,8)}{0,8(1-0,8^4)} = \frac{200000}{0,47232} = 423441,73$ so‘m ekanligi kelib chiqadi.

Iste’mol krediti.

Butun dunyoda aholi uchun iste’mol krediti keng tarqalgan, hususan respublikamizda ham. Unga doir misol keltiramiz([9] − [15]).

n oy muddatga, oyiga p % li to’lov shartida, *K* so‘m iste’mol krediti olingan bo’lsin. Kreditor tomonidan iste’molchi har oyiga to’lab borishi kerak bo’lgan pul miqdorining jadvali beriladi. Kelishilgan muddatning birinchi oyida *K* so’m berilgan pulning p% to’lanadi. Keyingi oylarda, har oyda to’langan pul miqdori ayrilib, uning

p% hisoblanib oyiga $I_n - somdan$ to'lab boriladi. Bu jarayonni quyidagicha yozish mumkin: Birinchi oyda

$$I_1 = \frac{Kp}{1200}\ so'm, ikkinch\ oyda\ \ I_2 = \frac{Kp}{1200}\left(1 - \frac{1}{n}\right) so'm, \qquad (1.9)$$

$$uchinci\ oyda\ \ I_3 = \frac{Kp}{1200}\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ \ so'm, \ldots\ldots, n\ oyda$$

$$I_n = \frac{Kp}{1200}\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\ \ so'm\ to'laydi.$$

Bundan, jami iste'molchi olgan krediti uchun to'laydigan pul miqdori quyidagicha bo'ladi:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots . + I_n = \frac{Kp}{1200} + \frac{Kp}{1200}\left(1 - \frac{1}{n}\right) +$$

$$+ \frac{Kp}{1200}\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{Kp}{1200}\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \qquad (1.10)$$

Umumiy kopaytuvchini qavisdan chiqarib, hosil bolgan arifmetik progressiyaning yig'indisini toppish formulasiga asosan, jami iste'molchi olgan krediti uchun to'laydigan pul miqdori quyidagicha bo'ladi:

$$I = \frac{Kp}{1200}\left(1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{Kp}{1200} . \frac{n}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{Kp}{2400}(1 + n) \qquad (1.11)$$

Agar kredit har oyda bir xil teng miqdorda to'lab borilsa, oylik to'lov miqdori quyidagicha bo'ladi b= $\frac{K+I}{n}$.

Misol-2. Iste'molchi olgan krediti $K = 1200000\ so'm, yillik\ foizi\ miqdori\ \ p = 12\ \%\ \ qaytarishmuddati\ n = 12\ oy\ bo'lsa, ste'molchini\ olgan\ kreditini\ qoplas\ rejasini\ tuzing$?

Yechish. Yuqorida ktltirilgan formulalarga asosan, olingan jami kreditning o'rtacha oylik to'lov miqdori

$$\frac{K}{n} = \frac{1200000}{12} = 100000\ so'm.$$

Iste'molchi har oyda to'lab borishi kerak bo'lgan pul miqdori, asosiy qarz to'lovi $\frac{K}{n}$ bilan shu oy uchun foiz to'lovi $I_n\ ning$ yigindisiga teng bo'ladi. Hisoblash natijalarini quyidagi jadvalda keltiramiz:

To'lov oylari	Kredit miqdori	To'lov foizi %	Kredit(fsosiy qarz) to'lovi	Jami oylik to'lov
	1200000	12 %		
1	1100000	12000	100000	112000
2	1000000	11000	100000	111000
3	900000	10000	100000	110000
4	800000	9000	100000	109000

5	700000	8000	100000	108000
6	600000	7000	100000	107000
7	500000	6000	100000	106000
8	400000	5000	100000	105000
9	300000	4000	100000	104000
10	200000	3000	100000	103000
11	100000	2000	100000	102000
12		1000	100000	101000
		78000	1200000	1278000

Jami olingan iste'mol krediti uchun to'lov miqdori

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{Kp}}{2400}(1+\mathrm{n}) = \frac{1200000 \cdot 12 \cdot (12+1)}{2400} = 78000\ so'm.$$

Demak, iste'molchi olgan $K = 1200000\ so'm$ kreditini bir yil ichida 1278000 so'm qilib qaytaradi.

6-§. Chegirib qolinadigan mablag'ni (amortizasiya fondini) hisoblash. Chiziqli usul

Aytaylik ishlab chiqarish vositalarining boshlang'ich bahosi K_0, uni n vaqt (yil yoki oy) o'tishi bilan ishlab chiqarish vositalarining eskirishi natijasida bahosi K_p so'm bo'lsin. B-bir yillik o'rtacha chegirib qolinadigan pul miqdori [12]

$$B = \frac{K_0 - K_p}{n} \qquad (1.12)$$

bo'ladi. Bundanichi yilning oxirida ishlab chiqarish vositalarining bahosi quyidagicha bo'ladi:

$$K_i = K_0 - iB \qquad (1.13)$$

Natijada chegirib qolinadigan mablag' miqdori quyidagi formula bilan hisoblanadi

$$S_i = iB \qquad (1.14)$$

Misol-13. Faraz qilaylik K_0=1000000 so'm, n= 4, K_4 = 250000 so'm, r = 5 foiz. Topish talab qilingan K_i i-yil oxiridagi ishlab chiqarish vositasining bahosi, S_i i- yil uchun chegirib qolinadigan mablag' miqdorini hisoblash.

Yechish. Chiziqli usul bilan yechamiz, unda yuqorida keltirilgan (1.12), (1.14) formulalardan foydalanib, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$B = \frac{K_0 - K_p}{n} = \frac{1000000 - 25000}{4} = 187500$$

so'm yillik amortizasiya uchun chegirish miqdori.

$S_1=1\cdot B$=187500 so'm, $S_2=2\cdot V$=375000 so'm, $S_3=3\cdot V$=562500 so'm, $S_4=4\cdot V$=750000 so'm bo'ladi.

Xuddi shunday (1.13) formulaga binoan ishlab chiqarish vositalarining baholari i-yil oxirida quyidagicha bo'ladi:

$K_1=K_0-1\cdot B$=812500 so‘m, $K_2=K_0-2\cdot B$=625000 so‘m

$K_3=K_0-3\cdot B$=437500 so‘m, $K_4=K_0-4\cdot B$=250000 so‘m

Bu mavzuda keltirilgan formulalardan foydalanib, qishloq xo‘jalik korxonasini uzoq muddatli qarzini yillik to‘lash badalini, texnika vositalarining amartizasiya fondlarini bevosita hisoblash mumkin.

7-§. Qishloq xo‘jalik ekinlarining turli ekish sxemalari.

Qishloq xo‘jalik ekinlarini ekish sxemalari bo‘yicha ko‘chat miqdorini yoki ko‘chat miqdori ma’lum bo‘lganda shu ko‘chatlarni ekish uchun zarur bo‘ladigan yer maydonini aniqlash masalalarini qisqacha o‘rganamiz. Ma’lumki, qishloq xo’jalik ekilari yaxshi rivojlanib, yuqori hosil berishi uchun maksimal oziqlanish maydoniga ega bo’lishi kerak. Paxta, yer sharoitiga qarab turli sxemada ekiladi, respublikamizda asosan ko’p ekiladi ikki holni qaraymiz:

a) **90 x 10** sxemada jo’yaklar oralig’i 90 sm, har 10 smda bir dona g’o’za ekiladi; b) **60 x15** sxemada jo’yaklar oralig’i 60 sm, har 15 smda bir dona g’o’za ekiladi.

a) holda, 10 ta go‘zaning(yani,bir pagonniy metrdagi) oziqlanish maydoni 90 x 10= 900 sm^2 .

1 ga =10000m^2=100000000 sm^2 = 10^8 sm^2

bo‘lganligidan, 1 ga maydonda o‘rtacha

100000000: 900 sm^2 =111111 dona

g‘o‘za bo‘ladi, ya’ni taxminan ≈ 111100.

b) 60 x15 sxemada ham, 60 x15 = 900 sm^2 bo’lganligidan a) holdagidek 1 ga maydonda o‘rtacha **111111 dona g‘o‘za bo‘ladi**.

Umuman, qishloq xo’jalik ekini *a* x b sxemada ekilsa

$$d = 100000000: (ab)$$

formula buyicha, o‘rtacha 1 ga maydonda qancha ko‘chat bo‘lishini aniqlash mumkin.

c) **Piyoz, sabzi asosan {(50+10+10)x8}:3, {(50+10+10)x7}:3** sxemada ekiladi. 1ga=100 mln sm^2 bo‘lganligidan 70x8 =560sm^2 yerda 3 dona piyoz bo‘lganligidan 1 dona piyoz uchun 560:3=186.7 sm^2 oziqlanish maydoni kerak bo‘ladi. Demak, 1 ga yerda o‘rtacha

100 mln sm^2: 186,7 sm^2 =534759 ≈534700

dona piyozbo‘ladi.

Sabzini ekish sxemasi uchun {(50+10+10)x7}:3=490:3=163,3 sm^2 har bir dona sabzini oziqlanish maydoni bo‘ladi. Bu sxemada

100 mln sm ^{2}: 163,3≈612369≈612300

sabzi 1 ga yerda o‘rtacha bo‘ladi.

d) **Bodring qo‘sh qatorlab ekilganda {(110+70)x40/2}**=3600 sm^2

100 mln sm^2 :3600=27778 dona≈**28000**

bodring ko‘chati 1ga maydonda bo‘ladi. {(110+70)x30/2}=-=90x30=2700sm^2 ekilganda

100mln sm^2 :2700 sm^2 =37037≈37000

dona bodring bo‘ladi.

e) **Pomidorni {(110+30)x30/2}** ekish sxemasi bo‘yicha har bir tupi uchun 2100 sm^2 oziqlanish maydoni kerak bo‘ladi, 1ga maydonda o‘rtacha **47620** dona pomidor ko‘chati bo‘ladi.

Mavzuga doir namunaviy misollarning yechimi

Mavzu nihoyasida yer maydoni berilganda shu maydonga ekish mumkin bo‘lgan ko‘chatlar sonini va ko‘chatlar soni ma’lum bo‘lganda shu ko‘chat uchun zarur bo‘lgan yer maydonini topishga misollar keltiramiz.

Ma’lumki 10000 m^2=1ga. Agar juyakni eni 60 sm bo‘lsa, 1 ga maydon 10000:60x100 =16666,67 pag.metr bo‘ladi. Agar 1 ga maydonda 120000 g‘o‘za bo‘lishi lozim bo‘lsa, 1 pag.metrda qancha g‘o‘za bo‘lishi kerak? 120000:16667=7 dona g‘o‘za bo‘lishi kerak, demak 10 pag.metrda o‘rtacha 70 ta g‘o‘za bo‘ladi. 1 dona g‘o‘za uchun qancha pag. santimetr kerak,

100:7,2=13,9 sm ≈ 14 sm.

Misol-1. 2400 m^2 maydonga necha dona *a*) pomidor; b) piyoz; c) sabzi; d) kartoshka ekish mumkin?

Yechish: Yuqorida keltirilgan 1 ga maydonga ekish sxemasiga asosan 2400 m^2=0.24 ga ekanligini inobatga olsak

a) 0,24 · 27777≈6666 dona pomidor; b) 0,24·534700=128328 dona piyoz;

c) 0,24 · 612300=146952 dona sabzi; d) 0,24·47620≈11429 dona kartoshka ekish mumkin.

Misol-2.. Har biridan 500 tup bo‘lgan *a*) kartoshka;b) pomidor; s) piyoz ko‘chatlari uchun qancha yer maydoni kerak bo‘ladi?

Yechish: 1 dona piyoz uchun(50+10+10)x8 sxemada 70 sm^2 sabziga (50+10+10)x7 sxemada 70 sm^2, 1 dona kartoshkaga 2100 sm^2, 1 dona pamidorga 1350 sm^2 bo‘lganligidan:

Kartoshka uchun: 0,21 m^2x500=105 m^2=1,05 ar (soto‘x);

Pamidor uchun: 500x1350=67,5m^2=0,675 ar (soto‘x);

Piyozga uchun: 500x70=35000sm^2=3,5m2=0,035 ar (soto‘x) yer maydoni kerak bo‘ladi.

Agar bizgabir tupdan olinadigan o‘rtacha hosildorlik miqdori berilsa, bevosita 1ga maydon hosildorligining daromadini topishimiz mumkin, masalan (taxminiy bahosi).

Ekinni turi	1 ga maydondagi o‘rtacha ko‘chatlar soni	Har bir tupdan olinadigan hosil	1ga maydondan olinadigan hosil (s.)	1kg mahsulot ni o‘rtacha bahosi (so‘m)	1ga yerdan olinadigan daromad (so‘m)
Pomidor	27777	1 kg	277.8	2000	55560000
Bodiring	27777	0.8 kg	222.2	2000	44440000
Sabzi	534700	0.04kg	213,8	1000	42760000

Albatta, har bir ekinning naviga, ekish sxemasiga qarab turli miqdorda hosilolinadi, shu sababli bir tupidan olinadigan hosildorlik ma’lum bo‘lsa yuqoridagidek istalgan maydon uchun o‘rtacha hosildorlikni, olinadigan daromadni hisoblab toppish mumkin.

8-§. Kiritilayotgan investisiyalarni samaradorligini baholashda turli foizlarni qo’llanilishi

Investisiya- ishlab-chiqarishni rivojlantirishning asosiy omillaridan biridir. Albatta kiritilayotgan investisiyaning samaradorligini aniqlash lozim bo’ladi. Chunki, ishlab-chiqarish investisiyaning samaradorligiga bog’liq ravishda rivojlanadi. Taklif qilinayotgan investisiyalardan eng muqobilini tanlash ishlab-chiqaruvchi korxona uchun katta ahamiyatga ega. Faraz qilaylik ishlab-chiqaruvchi korxonaga boshlang’ich kiritilgan investisiya miqdori C_0 bo’lsin([10] – [15]).

Kiritilgan investisyaning samaradorligini aniqlash usullarini ikki guruhga ajratish mumkin: statistik va dinamik.

Statistik usul yordamida kiritilgan investisiyaning qoplash muddatini aniqlash mumkin bo’lsa, dinamik usul yordamida investisiya kiritilgan oraliqni istalgan vaqtidagi bahosini (NPV) va investisiyaning ichki samaradorlik darajasini(IRR) baholab borish mumkin. Bu usullarga qisqacha to’xtalaib o’tamiz.

Investisiyaning effektiligini baholashning statistik usuli

Statistik usul yordamida loyiha sifatini baholash mumkin. Bu usuldan foydalanib, olingan investisiyaning qaytarish muddatini baholash mumkin. Investisiyani o’rtacha qoplash U_q- muddatini quyidagi formula yordamida aniqlash mumkin [13]:

$$U_q = \frac{C_0}{C_1} \qquad (1.15)$$

Bu yerda C_0- boshlang'ich korxonaga berilgan investisiya miqdori, C_1-yillik o'rtacha muomilada bo'lgan pul miqdori. Masalan, ma'lum bir qishloq xo'jalikkorxonasiga 200000 $, 5 yil muddatga quyidagicha miqdorda berilishiga shartnoma tuzildi: 1-yil 60000$, 2-yil 500000 $, 3-yil 40000 $, 4-yil 30000 $, 5-yil 20000$:

Yillar	Yillik tushadigan pul miqdori	Loyihaga yillik tushadigan pul miqdori	Foiz hisobida %
0	200000	200000	
1	60000	140000	30%
2	50000	90000	25%
3	40000	50000	20%
4	30000	20000	15%
5	20000	0	10%
Jami	200000		100%

(1) Formulaga asosan $U_q = \frac{C_0}{C_1} = \frac{200000}{40000} = 5$ yil.

Albatta, investor tomonidan loyihaga berilgan mablag'ning samaradorligi, va uni kelishilgan muddatlarda qaytarilishi muhim iqtisodiy ko'rsatkichlardan biridir. Agar inavatsion loyiha uzoq muddatli va kelishilgan vaqt oraliq muddatlarda bir -xil o'zgarmas mablag' miqdori bilan ta'minlanib borilsa, bu loyihani qoplash investisiya olgan korxonaning ichki sof foydasi miqdoriga bog'liq bo'ladi

$$C_0 = \frac{R_1}{1+i} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R_n}{(1+i)^n} \qquad (1.16)$$

Bu yerda $i = \frac{P}{100}$- loyihani amalga oshirish jarayonida korxonaning ishlab chiqargan mahsulotidan olingan ichki foydasi foizi, R_i_i-loyihani ishga tushirish uchun qilingan yillik xarajat qilingan pul miqdori, C_0- korxonaga berilgan investisiya miqdori.

Agar barcha yillar uchun $R_1 = R_2 = \cdots = R_n = R$ qilingan xarajatlar bir xil bo'lsa, (1.16) ni geometrik progressiyaning hadlar yig'indisini topish formulasidan foydalanib quyidagicha yozish mumkin:

$$C_0 = \frac{R(1 - \frac{1}{(1+i)^{n+1}})}{1 - \frac{1}{(1+i)}} = \frac{R}{i}\left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right) \qquad (1.17)$$

Bu tenglikdan i- ni topsak

$$i = \frac{R}{C_0}\left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right) \qquad (1.18)$$

Oxirgi tenglikdan, investisiya uzoq muddatga kiritilgan bo'lsa $i -$ quyidagicha bo'ladi $n \to \infty$, $i = \frac{R}{C_0}$.

Dinamik usul

Kiritilgan investisiyadan qilingan xarajat bilan, undan kelgan daromad vaqtga bog'liq ravishda o'zgarib boradi. Qilingan xarajat bilan, daromadni investisiya kiritilgan yillar bo'yicha, investisiya foizini e'tiboga olgan holda, taqqoslab borishga usuli dinamik usul deyiladi. Dinamik usul yordamida quyidagilarni tahlil qilib borilishi mumkin[15]:

1). Kiritilgan investisiya miqdorining tayin bir vaqtdagi holatini (qiymatini) baholash (NPV- Net Present Valne); 2). Investisiyani o'zlashtirish davrida korxonaning ichki daromadi miqdorini baholab borish(IRR - Internal Rafe of Return).

1). NPV- kiritilgan investisiya miqdorining tayin bir vaqtdagi qiymatini baholashda, investision mablag'ning o'rtacha qiymati sifatida diskont olinadi, u loyiha malga oshirilayotgan yillarda korxonani mahsulot ishlab chiqarishi hisobiga tushgan sof pul miqdori va boshlanqich korxonaga kiritilgan investisiya qiymati orqali aniqlanadi:

$$\text{NPV}=\sum_{t=1}^{n}\frac{P_t-C_t}{(1+i)^t}-C_0=\frac{P_1-C_1}{(1+i)}+\frac{P_2-C_2}{(1+i)^2}+\cdots+\frac{P_n-C_n}{(1+i)^n}-C_0 \qquad (1.19)$$

P_t −t yildagi korxonaning foydasi, C_t − t yildagi korxonaning xarajatlari, C_0 − boshlang'ich kapital qo'yilma(investisiya miqdori), t- loyiha muddati, i- diskont, muddati to'lmagan kapital qo'yilma uchun investorga to'lanadigan haq miqdori.

Agar (1.19) formulada barcha investisiya kiritilgan yillar uchun, yillik daromad va xarajatlar bir xil bo'lsa $P_t - C_t = q$, , uni geometrik progressiyani hisoblash formulasidan foydalanib quyidagicha yozish mumkin:

$$\text{NPV}=\frac{q((1+i)^n-1)}{i(1+i)^n}-C_0 \qquad (1.20)$$

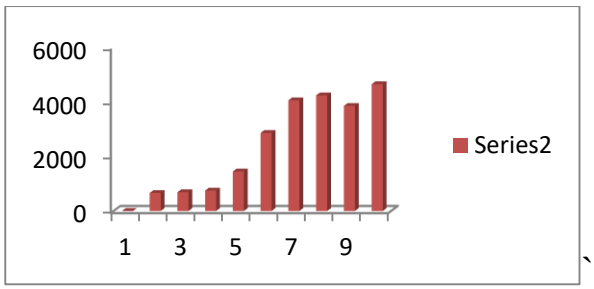
Oxirgi (1.20) formuladan ko'rinadiki, NPV = NPV(q, n, i) -ning funksiyasidan iborat ya'ni, $P_t - C_t = q$ yillik korxonaning sof foydasiga, n- loyiha kiritilgan muddatga, $i = \frac{P}{100}$ - diskont miqdoriga bog'liq bo'ladi.

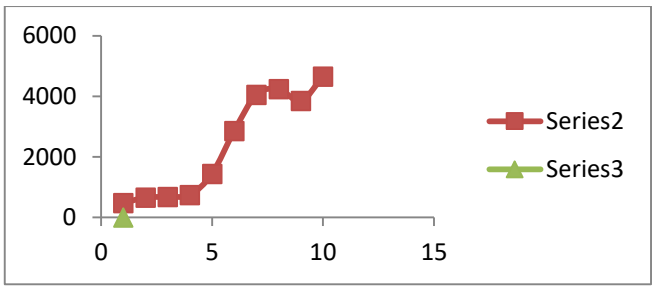
Albatta, agar NPV> 0 bo'lsa, kiritilgan investisiya korxona uchun samarali bo'ladi.

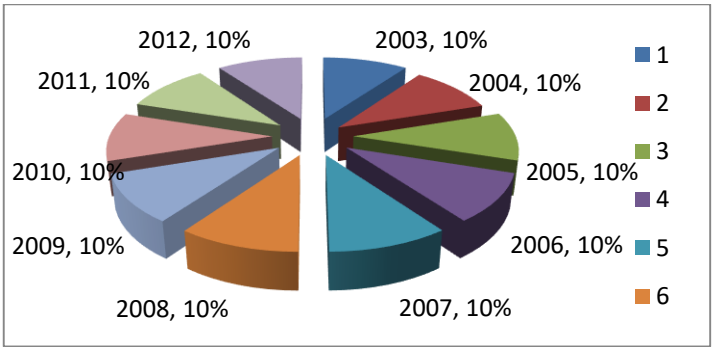
Misol. Mustaqil O'zbekiston Respublikamizning turli sohalariga kiritilayotgan chet el investisiyalari miqdori yildan-yilga oshib bormoqda. Jumladan, Respublikamizni kapital qurilish uchun, keyingi yillarda kiritilgan chet el investisiyalari miqdori quyidagicha bo'ladi(milliard so'm hisobida):

Yillar	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Kiritilgan investisiya	479,5	659,9	687,0	748,3	1447,8	2863,9	4058,1	4240,8	3853,8	4653,3

Jadval-1 dan, 2003-2012 yillarda Respublikamizni kapital qurilish uchun, har-yili o'rtacha $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum x_i\, n_i = 2369{,}24$ milliard so'm investisiyasi kiritilganini aniqlaymiz.







Respublikamizni kapital qurilishiga kiritilgan investisiyalarni yillik o'rtacha % ma'lum bo'lgan holda, uni yuqorida keltirilgan usullar yordamida, tahlil qilib, samaradorlik darajasini aniqlash mumkin.

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Paxtani 90x10 ekish sxemasida 1ga yerga o‘rtacha 111000 tup g‘o‘za ko‘chati bo‘lsa, 16 sotix yerda qancha dona g‘o‘za ko‘chati bo‘ladi?
2. Sutni yog‘liligi 3,8% bo‘lsa 2300 kg. sutdan necha kg yog‘ olish mumkin?
3. Paxtadan 32% tola chiqsa, 140 t tola olish uchun qancha tonna paxta kerak bo‘ladi?
4. Xo‘jalik paxta topshirish rejasidagi 120 t o‘rniga, 124 t paxta topshirgan. Xo‘jalik rejani necha foiz ortiq bajargan?
5. Yog‘liligi 3,2% li 30 litr sut bilan , yog‘liligi 4,4% bo‘lgan 50 litr sut aralashtirilganida hosil bo‘lgan sutning yog‘liligi necha foiz bo‘ladi?
6. 4800000 so‘m oyiga 15% li oddiy jamg’armada, 3-oydan keyin necha so‘m bo‘ladi?
7. 2500000 so‘m oyiga 12% li murakkab jamg’armada, 4-oydan keyin necha so‘m bo‘ladi?
8. Agar 1 ga yerga (110+30)x30/2 sxemada o‘rtacha 28000 dona pomidor ko‘chati ekilsa, 2250 m^2 yerga qancha pomidor ko‘chati ekiladi?
9. Paxtani 90x10 ekish sxemasida 1 ga maydonda 111000 tup g‘o‘za ko‘chati bo‘lsa, 22560 m^2 yerda qancha tup g‘o‘za ko‘chati bo‘ladi?

10. Agar 1 ga yerga o‘rtacha 512000 sabzi o’rug’i ekilsa, 1250 m^2 qancha sabzi ekiladi?

Mavzu bo’yicha tekshirish uchun savollar:

1. Turli foiz masalalari qanday hisoblanadi?
2. Oddiy va murakkab foizli gamg’armalar qanday formulalar bilan hisoblanadi ?
3. Xujalikning iqtisodiy o’sish foizini aniqlash usullarini tushuntiring?
4. Iste’mol kreditini kelishilgan muddatlarda to’lab borish sxemasini tushuntiring ?
5. Amartizatsiya fondi nima va qanday usullar bilan hisoblanadi ?
6. Qishlaq ho’jalik ekinlarini turli ekish sxemalarini aytib bering.
7. Investitsiya haqida nimani bilasiz ?
8. Kiritilgan investitsiyani samaradorlik darajasini aniqlash mumkinmi?

Kalit suzlar:

Oddiy va murakkab foizli jamg‘arma, o‘sish sur’ati, baho qiytmati, iste’mol krediti, amortizasiya fondini, ekish sxemalari, investisiya, samaradorlik

Xulosa

Turli foiz masalalari, oddiy va murakkab foizli gamg’armalar, fermer xujaligining iqtisodiy o’sish sur’atini aniqlash, iste’mol kreditini to’lab boorish, amartizatsiya fondi, qishlaq ho’jalik ekinlarini turli ekish sxemalari, kiritilgan investitsiyani samaradorlik darajasini aniqlash masalalari qisqacha nazariy bayyon etilib, bu mavzularning qishloq xo’jalin msalalarini yechishga qo’llanilishi o’rganilgan.

I I -QISM
ANALITIK GEOMETRIYA

I I BOB. TEKISLIKDA ANALITIK GEOMETRIYANING DASTLABKI TUSHUNCHALARI

Analitik geometriya matematikaning bo’limlaridan biri. U geometrik shakllarning (to’g’ri chiziq,aylana,tekislik va h.k.) xususiyatlarini algebra usuli (ya’ni tenglamalar yordamida)bilan o’rganadi[2].

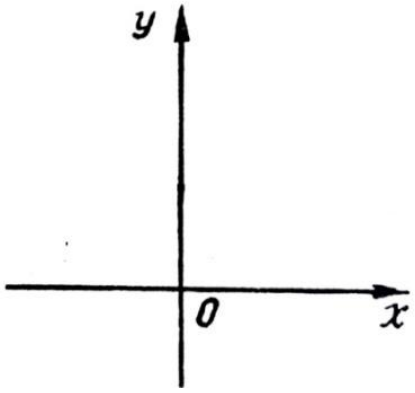
1-§. To’g’ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasi

Har qanday geometrik shakl nuqtalar to’plami bilan aniqlanadi. Binobarin, geometrik shakllarni o’rganish uchun uni tashkil etgan nuqtalarning tekislikdagi holatini topish lozim bo’ladi.Tekislikda nuqtaning holatini aniqlaydigan usul ma’lum

bo'lsa, tekislikda koordinatalar sistemasi berilgan deyiladi. Biz quyida sodda, ayni paytda keng qo'llaniladigan Dekart koordinatalari sistemasini keltiramiz.

Tekislikda ikkita o'zaro perpendikulyar to'g'ri chiziqni olaylik. Bu to'g'ri chiziqlarning biri gorizontal, ikkinchisi esa vertikal joylashsin. To'g'ri chiziqlarning kesishgan nuqtasini *O* harfi bilan belgilab,uni *koordinata boshi* deb ataymiz. Gorizontal to'g'ri chiziq *Ox o'qi* yoki *absissa o'qi* deyiladi. Vertikal to'g'ri chiziq esa *Oy o'qi* yoki *ordinata o'qi* deb ataladi.*Ox* va *Oy* o'qlarni *koordi-nata o'qlari* deyiladi (1-chizma va bos mavzularga doir chizmalar -betda berilgan).

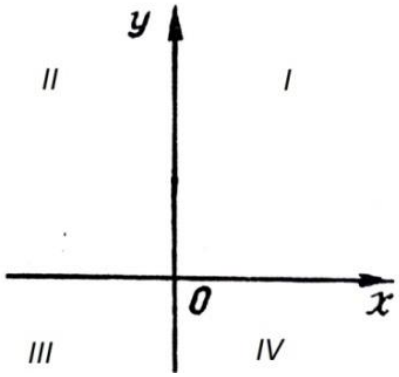
Koordinata boshi *Ox* va *Oy* o'qlarning har birini ikki qismga-ikki yarim o'qqa ajratadi. Yarim o'qlardan birini musbat,ikkinchisini esa manfiy deb hisoblaymiz. Musbat yarim o'qlar 1-chizmada strelkalar bilan ko'rsatilgan.



1-chizma

Koordinata o'qlari tekislikni 4 ta qismga (chorakka) ajratadi. Ular 2-chizmada (barcha muhim shakllar darslikning 450-470 –betlarda berilgan) ko'rsatilganidek nomerlanadi.

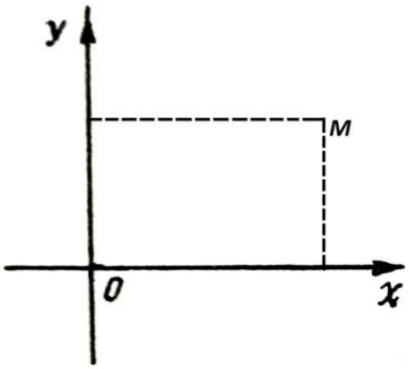
Aytaylik, M-tekislikdagi biror nuqta bo'lsin. Bu nuqtadan, *Ox* va *Oy* o'qlarga perpendikulyar tushirib, ularning *Ox* va *Oy* o'qlari bilan kesishgan nuqtalarini M_x va M_y lar bilan belgilaymiz (3-chizma).



2-chizma

Ushbu

$OM_x = x, \qquad OM_y = y$



3-chizma

kesmalarning uzunliklari *M* nuqtaning *koordinatalari* deb ataladi. Bunda M_x nuqta O nuqtadan o'ngda joylashsa, OM_x kesma uzunligi musbat ishora bilan, chapda bo'lsa, OM_x manfiy ishora bilan olinadi.

Xuddi shunga o'xshash, M_y nuqta *O* nuqtadan yuqorida joylashsa, OM_y musbat, pastda joylashsa, manfiy ishora bilan olinadi. *x* son *M* nuqtaning birinchi koordinatasi yoki absissasi, *y* son esa *M* nuqtaning ikkinchi koordinatasi yoki *ordinatasi* deb ataladi. *M* nuqta koordinatalari yordamida quyidagicha yoziladi: *M(x; y).*

Yuqorida aytilganlardan ko'rinadiki, tekislikdagi har bir nuqta *(x; y)* juftlikni aniqlaydi.

Endi, aksincha ikkita *x* va *y* sonlardan iborat *(x; y)* juftlik berilgan bo'lsin. *Ox* o'qda *x* songa mos keladigan A_x nuqtani (agar *x* musbat son bo'lsa, bu nuqta *O* nuqtadan o'ngda, *x* manfiy son bo'lsa, *O* nuqtadan chapda joylashgan bo'ladi) topamiz. Xuddi shunga o'xshash, *Oy* o'qda *y* songa mos keladigan A_y nuqtani (agar *y* musbat son bo'lsa, nuqta *O* nuqtadan yuqorida, *y* manfiy bo'lsa, *O* nuqtadan pastda joylashgan bo'ladi) topamiz. So'ng A_x nuqtadan *Ox* o'qqa pependikulyar, A_y nuqtadan *Oy* o'qqa perpendikulyar chiqaramiz. Natijada bu perpendikulyarning kesishish nuqtasiga ega bo'lamiz. Xuddi shu nuqtaning koordinatalari *x* va *y* lar bo'ladi. Shunday qilib, *(x; y)* juftlik tekislikda bitta nuqtani ifodalar ekan.

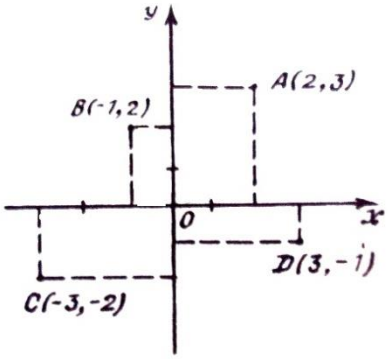
Demak, nuqtani geometrik obyekt sifatida qaraydigan bo'lsak, uning analitik ifodasi ikkita sondan iborat juftlik bo'ladi.

Ma'lumki, koordinata o'qlari butun tekislikni 4 ta chorakka bo'ladi. Bu choraklardagi nuqtalar koordinatalarining ishoralari quyidagi jadvalda ko'rsatilgan:

Choraklar	*(x; y)* nuqta koordinatalari ishorasi	
	x (absissa)	*y* (ordinata)

I.	$x>0$	$y>0$
II.	$x<0$	$y>0$
III.	$x<0$	$y<0$
IV.	$x>0$	$y<0$

Masalan, ushbu $A(2; 3)$, $B(-1; 2)$, $C(-3; -2)$, $D(3; -1)$ nuqtalarning geometrik tasvirlari 4-chizmada ifodalangan.

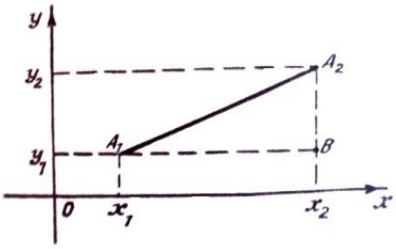


4-chizma

Xulosa qilib shuni aytish mumkinki analitik geometriyada $M(x; y)$ nuqta berilgan deganda uning koordinatalari x va y sonlardan tuzilgan $(x; y)$ juftlikning berilganligini tushunamiz.

2-§. Ikki nuqta orasidagi masofa

Tekislikda ikkita A_1va A_2 nuqtalar berilgan bo'lib, ularning koordinatalari mos ravishda $(x_1;\ y_1)$ va $(x_2;\ y_2)$ bo'lsin: $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$ (5-chizma).



5-chizma

Bu nuqtalar orasidagi masofani topish talab etilsin $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$ nuqtalar orasidagi masofani d bilan belgilaylik: $|A_1\,A_2| = d$.

A_1 nuqtadan Ox o'qqa, A_2 nuqtadan Oy o'qqa parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazaylik. Bu to'g'ri chiziqlarning kesishgan nuqtasini B bilan belgilaylik. Natijada $A_1 A_2 B$ to'g'ri burchakli uchburchak hosil bo'ladi. Ravshanki, bu $\Delta A_1 A_2 B$ ning A_1B va $A_2 B$ tomonlarining uzunliklari

$$|A_1B| = x_2 - x_1, \qquad |A_2B| = y_2 - y_1$$

bo'ladi. Pifagor teoremasidan foydalanib topamiz:

$$|A_1 A_2|^2 = |A_1B|^2 + |A_2B|^2 .$$

Demak, $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Bu tenglikdan esa

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (2.1)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, berilgan $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$ nuqtalar orasidagi masofa bu nuqtalarning bir xil ismli koordinatalari ayirmalari kvadratlarining arifmetik qiymatiga teng.

Xususan, koordinata boshi $O(0;\ 0)$ dan $A(x;\ y)$ nuqtagacha bo'lgan masofa $|OA| = d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

bo'ladi.

M i s o l. Ushbu $A\,(1;\ 2)$ va $B\,(4;\ 6)$ nuqtalar orasidagi masofa topilsin.

Y e ch i sh. Ravshanki, A nuqtaning koordinatalari x_1=1, y_1=2, B nuqtaning koordinatalari esa x_2=4, y_2=6 bo'ladi. (1.1) formuladan foydalanib topamiz:

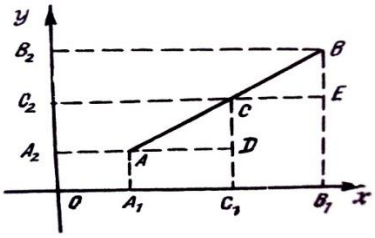
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} =$$
$$= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

3-§. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish

Tekislikda $A\ (x_1;\ y_1)$ va $B\ (x_2;\ y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lib, ularni tutashtirish natijasida AB kesma hosil qilingan. AB kesmada shunday C nuqta topish kerakki, AC kesmaning CB kesmaga nisbati berilgan λ songa teng bo'lsin:

$$\frac{AC}{BC} = \lambda$$

Izlanayotgan C nuqtaning koordinatalarini x va y deylik: $C\,(x;\ y)$ (6-chizma).



6-chizma

A, *B*, *C* nuqtalardan *Ox* va *Oy* koordinata o'qlariga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqlarning *Ox* va *Oy* o'qlari bilan kesishgan nuqtalarni mos ravishda A_1, B_1, C_1, va A_2, B_2, C_2 deylik. Ravshanki,

$$OA_1 = x_1, \qquad OC_1 = x, \qquad OB_1 = x_2,$$
$$OA_2 = y_2, \qquad OC_2 = y, \qquad OB_2 = y_2$$

bo'lib,

$$A_1C_1 = x - x_1, \qquad C_1B_1 = x_2 - x,$$
$$A_2C_2 = y - y_1, \qquad C_2B_2 = y_2 - y$$

bo'ladi.

ΔACD hamda ΔCBE lar o'xshash uchburchaklar bo'ladi. Demak ,

$$\frac{AD}{CE} = \frac{CD}{BE} = \frac{AC}{CB}. \qquad (2.2)$$

Agar

$$AD = A_1C_1 = x - x_1, \qquad CD = A_2C_2 = y - y_1$$
$$CE = C_1B_1 = x_2 - x, \qquad BE = C_2B_2 = y_2 - y$$

bo'lishini hamda

$$\frac{AC}{CB} = \lambda$$

ekanini e'tiborga olsak , u holda (2.2) tengliklardan:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda, \qquad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda$$

bo'lishi kelib chiqadi. Endi

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda, \qquad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda$$

tenglamalarning har birini alohida- alohida yechamiz:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda \Rightarrow x - x_1 = \lambda(x_2 - x) \Rightarrow x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x \Rightarrow x + \lambda x =$$
$$= x_1 + \lambda x_2 \Rightarrow x(1+\lambda) = x_1 + \lambda x_2 \Rightarrow x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},$$
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda \Rightarrow y - y_1 = \lambda(y_2 - y) \Rightarrow y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y \Rightarrow y + \lambda y =$$
$$= y_1 + \lambda y_2 \Rightarrow y(1+\lambda) = y_1 + \lambda y_2 \Rightarrow y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Demak, *AB* kesmani berilgan λ nisbatda bo'luvchi *C* nuqtaning *x* va *y* koordinatalari

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (2.3)$$

formulalar bilan topiladi.

Xususan, $C(x;\ y)$ nuqta AB kesmani teng ikkiga bo'luvchi nuqta bo'lsa ($AB = CB$), u holda

$$\frac{AC}{CB} = \lambda = 1$$

bo'lib, C nuqtaning koordinatalari (1.3) formulaga ko'ra

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$ bo'ladi.

M i s o l. $A(-2;\ 2)$ va $B(6;\ 4)$ nuqtalarni tutashtiruvchi AB kesmani $\lambda = 0.2$ nisbatda bo'ladigan $C(x;\ y)$ nuqta topilsin.

Yechish. $C(x;\ y)$ nuqtaning koordinatalarini (2.3) formuladan foydalanib topamiz:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{-2+0.2*6}{1+0.2} = \frac{-2+1.2}{1.2} = \frac{-0.8}{1.2} = -\frac{2}{3}$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{2+0.2*4}{1+0.2} = \frac{2+0.8}{1.2} = \frac{2.8}{1.2} = \frac{7}{3}$$

Shunday qilib, AB kesmani $\lambda = 0.2$ nisbatda bo'luvchi nuqta $C\left(-\frac{2}{3};\ \frac{7}{3}\right)$ bo'ladi.

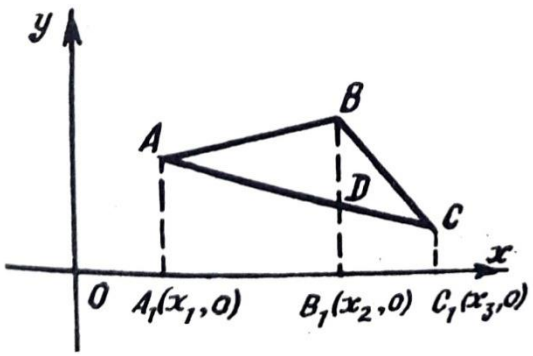
4-§. Uchburchak yuzi

Ma'lumki, o'rta maktab matematika kursida ba'zi bir tekis (yassi) shakllar — uchburchak, trapetsiya, doira va h. k. ning yuzga ega bo'lishi va ularning yuzlarini topish bilan shug'ullangan edi.

Endi uchburchaklarning yuzini koordinatalar usuli bilan topamiz.

Faraz qilaylik, tekislikda ΔABC berilgan bo'lsin. Bu uchburchak uchlari — A, B, C nuqtalarning koordinatalari mos ravishda $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$ bo'lsin: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$.

Masala uchburchak yuzi $S_{\Delta ABC}$ ni topishdan iborat (7-chizma).



7-chizma

A, B, C nuqtalardan *Ox* o'qiga perpendikulyar to'g'ri chiziqlar tushiramiz. Bu perpendikulyarning *Ox* o'qi bilan kesishgan nuqtalarini A_1, B_1, C_1 lar orqali belgilaymiz.

Izlanayotgan ΔABC ning yuzi $S_{\Delta ABC}$ ikkita ΔABD hamda ΔDBC larning yuzlari yig'indisiga teng bo'ladi:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta DBC} \qquad (2.4)$$

Ravshanki, A_1ABB_1, B_1BCC_1, va A_1ACC_1 shakllar trapetsiyadir. A_1ABB_1, trapetsiyada: AA_1 va BB_1 — asoslar, A_1B_1 esa balandlik. Shuning uchun bu trapetsiyaning yuzi

$$S_{A_1ABB_1} = \frac{AA_1 + BB_1}{2} A_1B_1$$

bo'ladi.

Agar $AA_1 = y_1$, $BB_1 = y_2$, $A_1B_1 = x_2 - x_1$ ekanini e'tiborga olsak, unda

$$S_{A_1ABB_1} = \frac{y_1 + y_2}{2} (x_2 - x_1) \qquad (2.5)$$

bo'lishini topamiz.

B_1BCC_1 trapetsiyada: B_1B va $C_1C -$ asoslar, B_1C_1 esa balandlik. Shuning uchun bu trapetsiyaning yuzi

$$S_{B_1BCC_1} = \frac{B_1B + C_1C}{2} B_1C_1$$

bo'ladi.

Agar $B_1B = y_2$, $C_1C = y_3$, $B_1C_1 = x_3 - x_2$ ekanligini e'tiborga olsak, unda

$$S_{B_1BCC_1} = \frac{y_2 + y_3}{2} (x_3 - x_2) \qquad (2.6)$$

bo'lishini topamiz.

Yuqoridagiga o'xshash, A_1ACC_1 trapetsiyaning yuzi

$$S_{A_1ACC_1} = \frac{y_1 + y_3}{2} (x_3 - x_1) \qquad (2.7)$$

bo'lishini topish qiyin emas. Ravshanki,

$$S_{\Delta ABD} + S_{\Delta DBC} = S_{A_1ABB_1} + S_{B_1BCC_1} - S_{A_1ACC_1}$$

bo'ladi. (1. 5), (1. 6), (1. 7) munosabatlardan foydalanib topamiz:

$$S_{\Delta ABD} + S_{\Delta DBC} = \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1) + \frac{y_2 + y_3}{2}(x_3 - x_2) -$$

$$- \frac{y_1 + y_3}{2}(x_3 - x_1) = \frac{1}{2}[(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_3 - x_2) +$$

$$+ (y_1 + y_3)(x_3 - x_1)] \qquad (2.8)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

M i s o l. Uchlari *A*(1; 1), *B* (2; 4), *C* (3; 3) nuqtalarda bo'lgan uchburchak yuzi topilsin.

Y e ch i sh. Ravshanki, bu holda

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $y_1 = 1$, $y_2 = 4$, $y_3 = 3$

bo'ladi. (2. 8) formuladan foydalanib, uchburchakning yuzini topamiz:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}[(1 + 4)(2 - 1) + (4 + 3)(3 - 2) + (3 + 1)(1 - 3)] =$$

$$= \frac{1}{2}(5 + 7 - 8) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \text{ kv. birlik.}$$

5-§. Analitik geometriyaning asosiy masalalari

Faraz qilaylik, tekislikda qaralayotgan nuqta o'zgaruvchan nuqta bo'lsin. Ya'ni, nuqtaning koordinatalari x va y lar o'zgaruvchi bo'lib, ularning har biri turli qiymatlarni qabul qilsin.

Ko'p hollarda o'zgaruvchi nuqtaning koordinatalari biror $F(x, y) = 0$ tenglamani qanoatlantiradigan bo'ladi. Bunday tenglamalar esa tekislikda umuman *chiziqni* ifodalaydi. Masalan, tekislikda berilgan $B(x_0; y_0)$ nuqtadan bir xil masofada turadigan nuqtalar to'plamini qaraylik. O'zagaruvchi nuqtani $M(x; y)$ bilan belgilaylik.

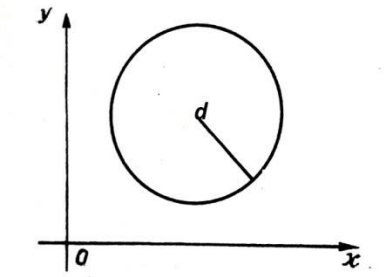
(1.1) formulaga muvofiq $B(x_0; y_0)$ hamda $M(x; y)$ nuqtalar orasidagi masofa

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan esa

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = d^2 \qquad (2.9)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $B(x_0; y_0)$ nuqtadan baravar uzoqlikda turadigan nuqtalar to'plamining har bir nuqtasining koordinatalari x va y lar (2.9) tenglamani qanoatlantiradi. Bu (2.9) tenglama markazi $B(x_0; y_0)$ nuqtada, radiusi d ga teng bo'lgan aylanani (8-chizma) ifodalaydi (qaralsin, 4-bob, 1-§).



8-chizma

Analitik geometriyaning asosiy masalasi geometric obyektlar, xususan chiziqlarni, yuqorida aytilganidek, tenglamalar bilan ifodalab, so'ng bu

tenglamalarni tekshirish bilan unga mos chiziqlarning xususiyatini o'rganishdan iborat.

Mavzu bo'yicha tekshirish uchun savollar:

1. Abscissa, ordinat o'qlari, choraklar haqida o'z fikringizni ayting?
2. Dekart koordinatalar sistemasi haqida tushuncha bering .
3. Ikki nuqta orasidagi masofani hisoblash formulasini yozing.
4. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish fo'rmulasini yozing.
5. Uchburchak va qavariq n burchakning yuzalari qanday formulalar bilan hisoblanadi?

Kalit so'zlar

Analitik, geometriya, abscissa, ordinate, sonlar o'qi, Dekart koordinatalari sistemasi, nuqta, chorak, ikki nuqta orasidagi masofa, kesma, nisbatda bo'lish, uchburchak, qavariq ko'pburchak, yuza.

Xulosa

Analitik geometriyaning asosiy masalasi geometric obyektlar, xususan to'g'ri chiziq, aylana, tekislik va h.k.larni algebraic tenglamalar bilan ifodalab, bu tenglamalar yordamida unga mos chiziqlarning xususiyatlarini o'rganishdan iborat. Abscissa va ordinate o'qlarini tekislikda o'zaro perpendikulyar ravishda kesishib to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasini tashkel qiladi. Dekart koordinatalar sistemasida ikki nuqta orasidagi masofani hisoblash, kesmani berilgan nisbatda bo'lish, uchburchak va qavariq n burchakning yuzalari hisoblash formulalari o'rganilgan.

III BOB

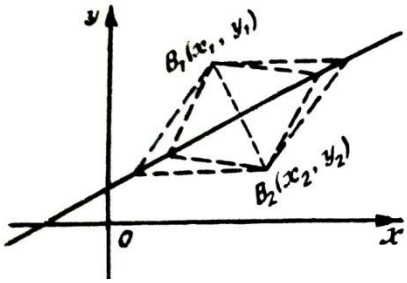
TO'G'RI CHIZIQ VA UNING TENGLAMALARI

To'g'ri chiziq tenglamasi analitik geometriyaning sodda, ayni paytda muhim tushunchalaridan biri. Tekislikda ikki nuqta berilgam bo'lsin. Bu nuqtalardan bir xil masofada turgan nuqtalar to'plami (nuqtalarning geometrik o'rni) to'g'ri chiziq deb qaraladi[2].

Quyida to'g'ri chiziqning analitik ifodalarini (tenglamalarini) topamiz va ular yordamida to'g'ri chiziqning tekislikdagi vaziyatlarini o'rganamiz.

1-§.TO'G'RI CHIZIQNING UMUMIY TENGLAMASI.

Biz yuqorida tekislikdagi to'g'ri chiziq berilgan ikki в$_1$ (x_1; y_1) hamda в$_2$ (x_2; y_2) nuqtalaedan baravar uzoqlikda turuvchi nuqtalarto'plamidan iborat deb qaradik. To'g'ri chiziqda ixtiyoriy м (x; y) nuqtani (o'zgaruvchi nuqtani) olamiz. Ravshanki, м (x; y) nuqtaning koordinatalari x y lar turliqiymatlarni qabul qilganda,to'g'ri chiziqning nuqtalari hosil bo'ladi. Bu м (x; y) nuqta bilan berilgan в$_1$ (x_1; y_1) hamda в$_2$ (x_2; y_2) nuqtalar orasidagi masofani (2.1) formuladan foydalanib topamiz (9-chizma)



9-CHIZMA

$$B_1M = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} \quad , \quad B_2M = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}\,.$$

Yuqorida aytilgan shartga ko'ra $B_1M = B_2M$ bo'ladi. Bundan esa

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

Tenglik kelib chiqadi. Keyingi tenglikdan

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = (x-x_2)^2+(y-y_2)^2$$

Bo'lishini topamiz.bu tenglikda hamma hadlarini chap tomonga o'tkazib, so'ng qisqa ko'paytirish formulasidan foydalansak, quyidagi

$$x^2-2xx_1+x_1^2+y^2-2yy_1+y_1^2-\left(x^2-2xx_2+x_2^2+y^2-2yy_2+y_2^2\right)=0$$

Tenglama hosil bo'ladi. Undan

$$-2xx_1+x_1^2-2yy_1+y_1^2+2xx_2-x_2^2+y^2-2yy_2-y_2^2=0,$$

Ya'ni

$$2(x_2-x)x+2(y_2-y_1)y+\left(x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2\right)=0$$

Bo'lishi kelib chiqadi. Agar

$$A=2(x_2-x_1), \quad B=2(y_2-y_1), \quad C=x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2$$

Deb belgilasak, quyidagi

$$Ax+By+C=0 \qquad (3.1)$$

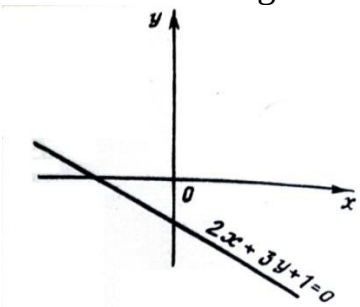
Tenglamaga kelamiz. Bu x va y ga nisbatan birinchi darajali tenglamadir.

Demak, to'g'ri chiziqdagi ixtiyoriy м (x; y) nuqtaning x va y koordinatalari (3.1)tenglama bilan bog'langan bo'lar ekan. Ushbu $Ax+By+C=0$ tenglama *to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi* deb ataladi.

To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi A, B, C sonlarga (koeffitsientlarga) bog'liq.bu sonlardan turli to'g'ri chiziqlar hosil bo'ladi. Binobarin, to'g'ri chiziqning tekislikdagi vaziyati ham shu koeffitsientlarga bog'liqdir.

3.1–eslatma. Koordinatalari (3.1) tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami to'g'ri chiziq bo'ladi.

Misol. 2x+3y+1=0 tenglama to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi bo'lib, uning tekislikdagi vaziyati 10-chizmada tasvirlangan.



10--**CHIZMA**

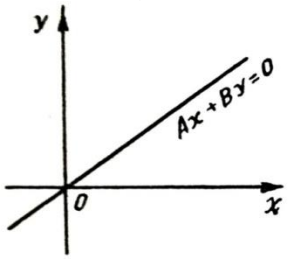
Endi (3.1) $Ax+By+C=0$ To'g'ri chiziqning tekislikda tutgan vaziyatini o'rganamiz.

1°. (2.1) to'g'ri chiziq tenglamasida $C=0$ bo'lsin. Bu holda (3.1) tenglama ushbu

$$Ax+By=0 \qquad (3.2)$$

Ko'rininshga keladi. Bu to'g'ri chiziq koordinata boshidan (ya'ni o (0; 0)nuqtadan) o'tadi. Chunki o (0; 0) nuqtaning koordinatalari (3.2) tenglamani qanoatlantiradi:

$A\cdot 0+B\cdot 0\equiv 0$ (11-chizma).



11--**CHIZMA**

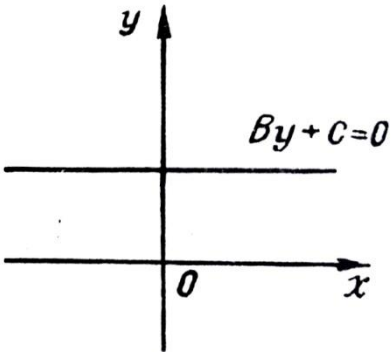
2°. (3.1) to'g'ri chiziq tenglamasida $A=0$ bo'lsin. Bu holda (3.1)tenglama ushbu

$$By+C=0 \qquad (3.3)$$

Ko'rinishga keladi. (3.3) tenglamadan topamiz:

$$y = -\frac{C}{B}, \qquad (B \neq 0).$$

Demak, to'g'ri chiziqdagi o'zgaruvchan nuqtaning ordinatasi har doim $y = -\frac{C}{B}$, ga teng. Bu holda (3.3) to'g'ri chiziq ox o'qiga (absissa o'qiga) parallel bo'ladi (12-chizma)



12 -CHIZMA

3°. (3.1) to'g'ri chiziq tenglamasida B = 0 bo'lsin. Bu holda (3.1) tenglama ushbu

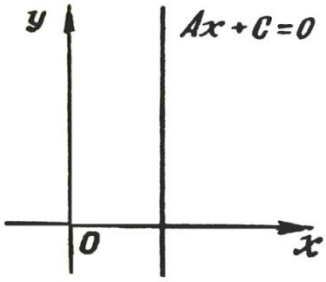
$$Ax + C = 0 \qquad (3.4)$$

Ko'rinishga keladi. (3.4) tenglamadan topamiz:

$$x = -\frac{C}{A}. \qquad (a \neq 0)$$

demak, to'g'ri chiziqdagi o'zgaruvchan nuqtaning ordinatasi har doim $x = -\frac{C}{B}$ ga teng. Bu holda (3.4) to'g'ri chiziq ox o'qiga (absissa o'qiga) parallel bo'ladi (13-chizma)

4°. (3.1) to'g'ri chiziq tenglamasida A = 0, C = 0 B ≠ 0 bo'lsin. Bu holda (3.1) tenglama $By = 0$. Ko'rinishga keladi. Undan esa $y = 0$ bo'lishi kelib chiqadi . Bu ox o'qining tenglamasidir.



13 -CHIZMA

5°. (3.1) to'g'ri chiziq tenglamasida B = 0, C = 0, A ≠ 0 bo'lsin. Bu holda (3.1) tenglama

$$Ax = 0$$

ko'rinishga keladi. Undan esa $x = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa oy o'qining tenglamasidir.

2.2-eslatma. Agar to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi

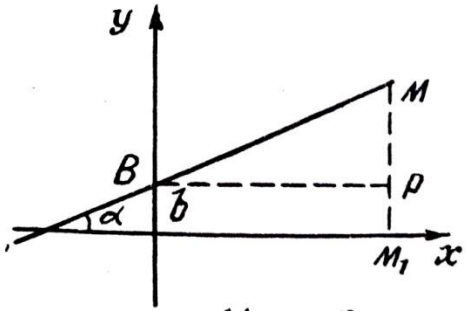
$$Ax + By + C = 0$$

Da barcha koeffitsientlar noldan farqli bo'lsa (A ≠ 0 B ≠ 0 C ≠ 0), u holda bu to'g'ri chiziq koordinata boshidan ham o'tmaydi,koordinata o'qlariga parallel ham bo'lmaydi.

To'g'ri chiziqning tekislikdagi vaziyatini o'rganishda uning boshqa ko'rinishdagi tenglamalaridan foydalanish qulay bo'ladi. Shuni e'tiborga olib,quyida to'g'ri chiziqning turli ko'rinishdagi tenglamalarini keltiramiz.

2-§. **To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi**

Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasiga nisbatan biror to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. Bu to'g'ri chiziq Oy o'qining B (0; b)nuqtasi orqali o'tib, *Ox* o'qining musabat yo'nalishi bilan α burchak tashkil etsin (14-chizma)



14 -CHIZMA

Bu to'g'ri chiziqda ixtiyoriy M (x; y)nuqtani olamiz. M (x; y)nuqtadan Ox o'qqa perpendikulyar tushiramiz. Perpendikulyarning asosini M_1 bilan belgilaymiz. U holda $OM_1 = x$, $MM_1 = y$ bo'ladi.

B nuqtadan Ox o'qqa parallel bo'lga to'g'ri chiziq tushiramiz. Uning MM_1 perpendikulyar bilan kesishgan nuqtasini P deylik. Natijada BMPuchburchak hosil bo'ladi. ΔBMP – to'g'ri burchakli uchburchakdir. Bu uchburchakda

$$\angle MBP = \alpha, \quad BP = OM_1 = x, \quad MP = MM_1 - PM_1 = y - b$$

bo'lib,

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{MP}{BP} = \frac{y-b}{x}$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan esa $y - b = tg\ \alpha \cdot x$; ya'ni $y = tg\ \alpha \cdot x + b$ bo'lishi kelib chiqadi.

Odatda, to'g'ri chiziqning Ox o'qi bilan tashkil etgan burchagining tangensi to'g'ri chiziqning *burchak koeffitsienti* deb ataladi, uni k bilan belgilanadi:

$$tg\ \alpha = k$$

Shuni e'tiborga olib, keyingi tenglikni ushbu

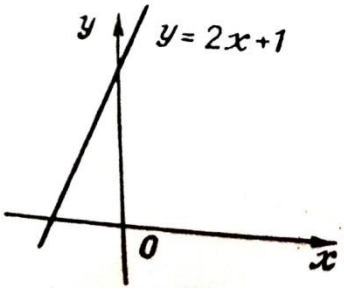
$$y = k \cdot x + b \qquad (3.5)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

To'g'ri chiziqning (3.5) ko'rinishdagi tenglamasi *to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi* deb ataladi.

Bu holda to'g'ri chiziqning tekislikdagi vaziyati *k* hamda *b* larning qiymatlari bilan to'liq aniqlanadi.

Misol. Ushbu $y=2x+1$ tenglama to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi. Bunda $k=2$ $b=1$ bo'lib, u 15-chizmada tasvirlangan.



15 -CHIZMA

3.3- eslatma. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi $Ax+By+C=0$ ($B\neq 0$) ni har doim uning burchak koeffitsientli tenglamasiga keltirish mumkin va aksincha.

Darhaqiqat, to'g'ri chiziqning umumit tenglamasi

$$Ax+By+C=0 \quad (B\neq 0) \qquad (3.1)$$

ga ega bo'laylik. Bu tenglamani y ga nisbatan yechaylik:

$$Ax+By+C=0 \Rightarrow B_y = -A_x - C \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Demak, (3.1) tenglama ushbu $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} = kx + b$ $(R = -\frac{A}{B}, b = -\frac{C}{B}, (B \neq 0))$ ko'rinishga keladi.

To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi $y = kx + b$ ga ega bo'laylik. Bu tenglamani ushbu

$$kx - y + b = 0$$

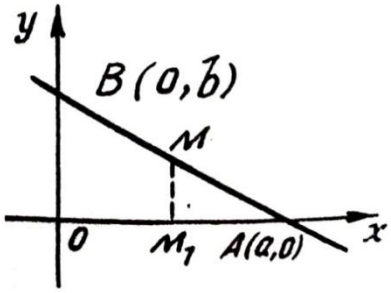
ko'rinishda yozish mumkin. Bu esa to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasidir ($A = R$, $B = -1$, $C = b$).

3-§. To'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasi

Tekislikda birorta to'g'ri chiziq Ox va Oy o'qlari bilan A va B nuqtalarda kesishsin. To'g'ri chiziqning koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalari

$$OA = a, \quad OB = b$$

ga teng bo'lsin (16-chizma).



16 -CHIZMA

Bu a va b kesmalar yordamida to'g'ri chiziqningtekislikdagi vaziyatini to'liq aniqlash mumkin. Shuni ko'rsatamiz.

To'g'ri chiziqda ixtiyoriy M (x; y)nuqtani olylik. M (x; y) nuqtadan Ox o'qiga tushirilgan perpendikulyarning asosini M_1 deylik. Unda

$$OM_1 = x, \qquad MM_1 = y \tag{3.6}$$

bo'ladi. ΔOAB va ΔM_1AM lar o'xshash uchburchaklar. Shu sababli

$$\frac{MM_1}{OB} = \frac{M_1A}{OA} \tag{3.7}$$

bo'ladi. Agar $M_1A = OA - OM_1 = a - x$ (3.8)

ni va yuqoridagi (3.6), (3.8) munosabatlarni e'tiborga olsak, (3.7) tenglikdan

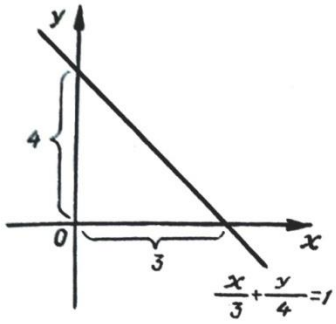
$$\frac{y}{b} = \frac{a-x}{a}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu tenglikni $\frac{y}{b} = 1 - \frac{x}{a}$,
ya'ni

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (3.9)$$

ko'rinishda yozamiz. Bu to'g'ri chiziq tenglamasidir. Odatda, to'g'ri chiziqning (3.9) ko'rinishdagi tenglamasini uning kesmalar bo'yicha tenglamasi deb ataladi

Misol. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ tenglama to'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasi. Bunda *a =3, b=4* bo'lib, uning tekislikdagi vaziyati 17-chizmada tasvirlangan.



17 -CHIZMA

To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi.*Ax+By+C=0 (A≠0, B≠0, C≠0)* ni har doim uning kesmalar bo'yicha tenglamasiga keltirish mumkin va aksincha. Haqiqatan ham,

Ax+By+C=0 → $\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y - 1 = 0 \rightarrow \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1 \rightarrow$

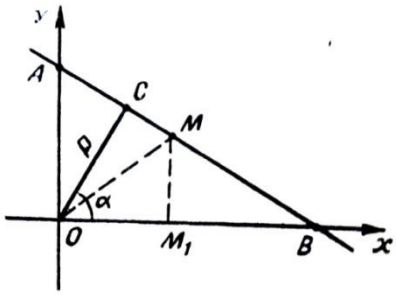
$$\rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \left(a = -\frac{C}{A}, b = -\frac{C}{B}\right),$$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \rightarrow bx + ay = ab \rightarrow bx + ay - ab = 0 \rightarrow Ax + By + C = 0$

(A=b, B=a, C=-ab)

4-§. To'g'ri chiziqning normal tenglamasi

Tekislikda biror to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. Koordinata boshidan to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning uzunligi *p* hamda shu perpendikulyarning *Ox* o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan *a* burchak ma'lum bo'lsin (18-chizma).



18 -CHIZMA

Berilgan bu *p* va *a* lar yordamida to'g'ri b chiziqning tekislikdagi vaziyati to'liq aniqlanishi mumkin. To'g'ri chiziqda ixtiyoriy *M* (*x; y*) nuqtani olamiz. Bu nuqtadan *Ox* o'qiga perpendikulyar tushiramiz.

Perlendikulyarning asosini M_1 bilan belgilaymiz ravshanki, $OM_1=x$, $MM_1=y$

Koordinata boshi bilan *M* nuqtani tutashtiramiz. Natijada OMM_1 to'g'ri burchakli uchburchak hosil bo'ladi. Agar $< MOM_1 = \varphi$ desak unda

$$x = OM_1 = OM\cos\varphi\,, y = MM_1 = OM\sin\varphi \qquad (3.10)$$

bo'ladi.

Endi to'g'ri burchakli uchburchak *OCM* ni qaraylik. Bu uchburchakda $<COM=a-\varphi$ bo'ladi.

Ravshanki: $\frac{p}{OM} = \frac{CO}{OM} = \cos(a-\varphi)$

Demak

$$p = OM\cdot\cos(a-\varphi) \qquad (3.11)$$

Ma'lumki, $\cos(a-\varphi) = \cos a\cos\varphi + \sin a$ (3.12)

(3.10), (3.11) va (3.12) munosabatlardan topamiz:

$$p = OM(\cos a\cos\varphi + \sin a\sin\varphi) =$$
$$= OM\cos\varphi\cos a + OM\sin\varphi\sin a = x\cos a + y\sin a$$

Bu tenglikdan

$$x\cos a + y\sin a - p = 0 \qquad (3.13)$$

ga ega bo'lamiz. (3.13) *to'g'ri chiziqning normal tenglamasi* deyiladi.

Endi to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi normal ko'rinishdagi tenglamaga keltirilishini ko'rsatamiz.

Biror to'g'ri chiziq berilgan bo'lib,

$$Ax + By + C = 0 \qquad (3.1)$$

uning umumiy tenglamasi,

$$x\cdot\cos a + y\sin a - p = 0 \qquad (3.13)$$

esa shu to'g'ri chiziqning normal tenglamasi bo'lsin. Bu (3.1) va (3.13) tenglamalar bitta to'g'ri chiziqni aniqlaganligi sababli, ularning koeffitsientlariga

proporsional bo'ladi. Demak, (3.1) tenglamani biror μ songa ko'paytirishdan hosil bo'lgan

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0$$

tenglama (2.13) tenglama bilan bir xil bo'ladi:

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = x\cos a + y\sin a - p$$

Bundan esa quyidagi

$$\mu Ax = x\cos a, \qquad \mu By = \sin a, \qquad \mu C = -p$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Bu tengliklardan μ ni topamiz. Buning uchun $\mu Ax = x\cos a$, $\mu By = \sin a$, tengliklarning har ikki tomonini kvadratga ko'tarib, so'ng ularni hadlab qo'shamiz:

$$\mu^2 A^2 = \cos^2 a, \quad \mu^2 B^2 = \sin^2 a, \qquad \mu^2 A^2 + \mu^2 B^2 = \cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

Demak,

$$\mu^2 (A^2 + B^2) = 1$$

Keyingi tenglikdan

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ga ko'paytirish natijasida tenglama normal ko'rinishdagi tenglama ga kelar ekan. Odatda *μ normallovchi ko'paytuvchi* deb ataladi. Normallovchi ko'paytuvchining ishorasi tenglamdagi *C* ozod hadning ishorasiga teskari qilib olinadi.

M i s o l. $5x+12y-26 = 0$ to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi normal tenglamaga keltirilsin.

Y e c h i s h. Yuqoridagi (3.14) munosabatdan foydalanib, normallovchi ko'paytuvchini topamiz:

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{1}{\sqrt{5^2+12^2}} = \frac{1}{\sqrt{25+144}} = \frac{1}{\sqrt{169}} = \frac{1}{13}$$

Berilgan tenglamani $\mu = \frac{1}{13}$ ga ko'paytiramiz:

$$\frac{1}{13}(5x+12y - 26) = 0.$$

Natijada berilgan to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi $5x+12y - 26=0$ ushbu normal ko'rinishga keladi

$$\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0$$

Mavzu bo'yicha tekshirish uchun savollar:

1. To'g'ri chiziqning turli shakldagi tenglamalarini yozing.

2. To’g’ri chiziqning umumiy shakldagi tenglamasi.
3. To’g’ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.
4. To’g’ri chiziqning normallovchi ko‘paytuvchisini hisoblash formulasini yeozing?
5. To’g’richiziqning normal tenglamasi .

Kalit so’zlar

To’g’ri chiziq, to’g’ri chiziqning tenglamalari, burchak koeffitsient, normallovchi ko‘paytuvchi.

Xulosa

Dekart kordinatalar sistemasida to’g’ri chiziqning umumiy, burchak koeffitsientli, normal shakldagi tenglamalari geometric izohlanib, ularning analitik formulalari o’rganilgan.

IV. BOB. TO’G’RI CHIZIQQA OID ASOSIY MASALALAR.

Mazkur bobda to’g’ri chiziqqa oid asosiy masalalarni keltirib, ularga doir misollar yechamiz[2].

1-§. Berilgan nuqtadan (berilgan yo’nalish bo’yicha) o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasi

Tekislikda M (x_1; y_1) nuqtadan o’tadigan hamda O_x o’qining musbat yo’nalishi bilan α burchak tashkil etadigan to’g’ri chiziqning tenglamasini topish talab etilsin.

Topilishi lozim bo’lgan to’g’ri chiziq tenglamasini $y = kx+b$ (3.5) (3-bob, 2-§, (3.5))ko’rininshda izlaymiz. Modomiki, to’g’ri chiziq M (x_1; y_1) o’tar ekan unda bu nuqtaningr x_1 *va* y_1 *koordinatalari* $y = kx+b$ tenglamani qanoatlantiradi:

$$y_1 = kx_1+b \qquad (4.1)$$

Yuqoridagi (3.5) tenglamadan(3.1) tenglamani hadlab ayirib

$$y - y_1 = kx_1+b - (kx_1+b)$$

quyidagi

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (4.2)$$

tenglamaga kelamiz. Bu berilgan M (x_1; y_1) nuqtadan o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasidir .

M i s o l. M (3; 2) nuqtadan o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasi topilsin.

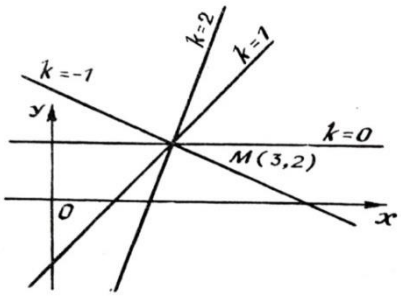
Y e ch i sh. Yuqoridagi (3.2) formulaga ko'ra M (3; 2) nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi ushbu

$$y - 2 = k(x - 3)$$

ko'rinishida bo'ladi. Uni quyidagicha

$$y = k(x - 3)+2$$

ham yozish mumkin. Bu to'g'ri chiziq k ning qiymatlariga bog'liq. k ning turli qiymatlarida M(3; 2) nuqtadan o'tuvchi turli to'g'ri chiziqlar hosil bo'ladi(19-chizma).



19 –CHIZMA

2-§. Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

Tekislikda ikkita M (x_1; y_1) hamdaN (x_2; y_2)nuqtalar berilgan. Bu nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini topish talab etilsin.

Biz yuqorida berilgan bitta M (x_1; y_1) nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqning tenglamasi

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (4.2)$$

bo'lishini ko'rdik. Bu to'g'ri chiziq N (x_2; y_2) nuqtadan ham o'tsin. Unda N (x_2; y_2) nuqtaning koordinatalari x_2 *ва* y_2 lar (4.2)tenglamani qanoatlantiradi:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Bu munosabatdan

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Bo'lishi kelib chiqadi. K ning topilgan qiymatini (4.2) tenglamadagi k ning o'rniga qo'ysak, unda $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1)$

Bo'ladi. Bundan esa

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (4.3)$$

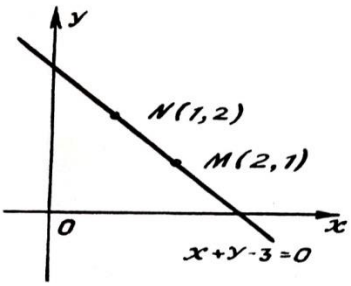
Bo'lishi kelib chiqadi. Bu tenglama berilgan ikki м (x_1; y_1) hamda n (x_2; y_2) nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi.

M i s o l. Quyidagi м (2; 1) hamda n(1; 2) nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi topilsin.

Y e ch i sh. Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi (4.3) dagi x_1, y_1 hamda x_2, y_2 lar o'rniga м (2; 1) va N (1; 2)nuqtalarning koordinatalarini qo'yib topamiz: $\frac{x-2}{1-2}=\frac{y-1}{2-1}$.

Uni $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{1}$ yoki $x + y - 3 = 0$

Ko'rinishda yozish mumkin. Bu izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasidir (20-chizma).



20 –CHIZMA

3-§. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak

Tekislikda ikkita to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. Bu tog'ri chiziqlar orasidagi burchaknitopish talab etilsin.

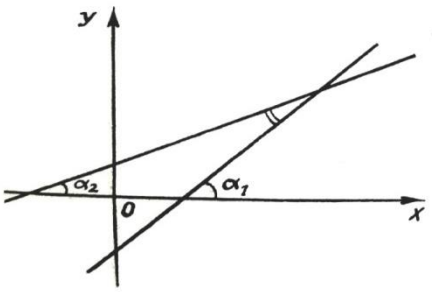
Faraz qilaylik, to'g'ri chiziqlardan birining tenglamasi

$$y = k_1x + b_1,$$

ikkinchisining tenglamasi esa

$$y = k_2x + b_2$$

bo'lsin (21-chizma).



21-CHIZMA

Ma'lumki, $k_1 = tg\alpha_1$ –birinchi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti, $k_2 = tg\alpha_2$ - ikkinchito'g'ri chiziqning burchak koeffitsientiIkki to'g'ri chiziq orasidagi burchakni φ bilan belgilaylik.

21-chizmadan ko'rinadiki, $\alpha_1 = \alpha_2 + \varphi$ bo'ladi. Bundan esa $\varphi = \alpha_1 - \alpha_2$ ekanligi kelib chiqadi. Ravshanki,

$$tg\varphi = tg(\alpha_1 - \alpha_2). \qquad (4.4)$$

endi

$$tg(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 - tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}$$

ва $tg\alpha_1 = k_1 \cdot tg\,\alpha_2 = k_2$ bo'lishini e'tiborga olib , (4.4) tenglikdan

$$tg\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 - k_1 k_2} \qquad (4.5)$$

Bo'lishini topamiz. Bu ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakning tangensini ifodalovchi formuladir. (4.5) formula yordamida ikki to'ri chiziq orasidagi φ burchak topiladi.

*M i s o l. 2x – y – 5 = 0, x – 3x + 12 = 0*to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin.

Y e ch i sh. Avvalo berilgan to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsientini topamiz. Buning uchun tenglamalarni *y* ga nisbatan yechamiz:

$2x - y - 5 = 0 \Rightarrow y = 2x - 5,$

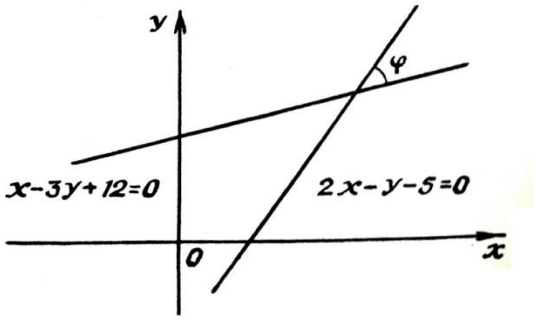
$x - 3y + 12 = 0 \Rightarrow 3y = x + 12 \Rightarrow y = \frac{1}{13}x + 4.$

Demak, $k_1 = 2$, $k_2 = \frac{1}{13}$.

(4.5) formulaga ko'ra

$$\text{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = 1$$

bo'ladi, demak $\varphi = 45°$ (22- chizma.)



22- CHIZMA.

4-§. IKKI TO'G'RI CHIZIQNING PARALELLIK VA PERPENDIKULYARLIK SHARTLARI

Tekislikda ikkita to'g'ri chiziq berilgan bo'lib, birining tenglamasi $y = k_1x + b_1$ ikkinchisining tenglamasi esa $y = k_2x + b_2$ bo'lsin.

Biz yuqorida bu to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak (burchakning tangensi)

$$\text{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$$

formula bilan aniqlashni ko'rdik.

1°. Aytaylikikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak nolga teng bo'lsin: $\varphi = 0$, ravshanki bu holda berilgan to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'ladi:

$\varphi = 0 \Rightarrow \text{tg}\varphi = \text{tg}0° = 0 \Rightarrow \text{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\ 0 \Rightarrow k_1 - k_2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2.$

Demak, $k_1 = k_2$ tenglik ikki *to'g'ri chiziqning paralellik shartidir*.

2°. Aytaylik, ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak 90° ga teng bo'lsin: $\varphi = 90°$. Ravshanki, bu holda berilgan to'g'ri chiziqlar o'zaro perpendikulyar bo'ladi

$\varphi = 90° \Rightarrow \text{tg}\varphi = \text{tg}90° = \infty \Rightarrow \text{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \infty \Rightarrow 1 + k_1 \cdot k_2 = 0 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$

$\Rightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2}\left(k_2 = -\frac{1}{k_1}\right).$

Demak, $k_1 = -\frac{1}{k_2}, \left(k_2 = -\frac{1}{k_1}\right)$

Tenglik ikki *to'g'ri chiziqning perpendikularlik shartidir*.

M i s o l l a r. $y = 5x + 7$ va $y = 5x - 11$ to'g'ri chiziqlar paralleldir, chunki $k_1 = 5$, $k_2 = 5$ demak $k_1 = k_2$.

2. $y = 3x + 7$ va $y = -\frac{1}{3}x + 1$ to'g'ri chiziqlar o'zaro perpendikulyardir , chunki $k_1 = 3$, $k_2 = -\frac{1}{3}$ bo'lib, $k_1 \cdot k_2 = -5$.

4. 1-eslatma.To'g'ri chiziqlarning tenglamalari umumiy ko'rinishda, ya'ni quyidagicha

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

bo'lsin. Bu to'g'ri chiziqlarning parallel va perpendikulyar bo'lishi shartlarini topish uchun ularni y ga nisbatan yechamiz:

$$A_1x + B_1y + C = 0 \Rightarrow B_1 \quad y = -A_1x - C_1 \Rightarrow y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1}, \quad (B_1 \neq 0).$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \Rightarrow B_2y = -A_2x - C_2 \Rightarrow y = -\frac{A_2}{B_2}x - \frac{C_2}{B_2} \quad (B_2 \neq 0).$$

Demak, $k_1 = \frac{A_1}{B_1}$, $k_1 = \frac{A_2}{B_2}$

Unda $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ va to'g'ri chiziqlarning

paralellik sharti: $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$,

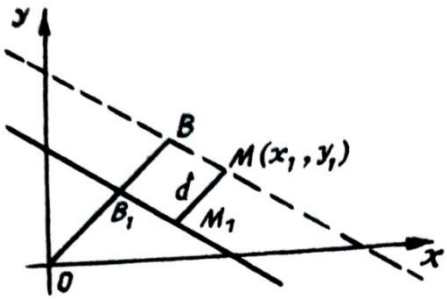
perpendikulyarlik sharti $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ bo'ladi.

5-§. Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa

Tekislikda $M(x_1; y_1)$ nuqta va biror to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. To'g'ri chiziqning tenglamasi

$$Ax + By + C = 0$$

ko'rinishda bo'lsin. Berilgan $M(x_1; y_1)$ nuqtadan shu to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toppish talab etilsin. Odatda M nuqtadan to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning uzunligi *nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa* deb ataladi (23-chizma).



23-CHIZMA

Bu MM_1 perpendikulyarning uzunligi d bilan belgilaylik. $M(x_1;\ y_1)$ nuqtadan berilgan $Ax + By + C = 0$ to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz. So'ngi, keyingi to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tushiramiz. Bu perpendikulyarning to'g'ri chiziqlar bilan kesishgan nuqtalarini B va B_1 bilan belgilaymiz.

Ravshanki, izlanayotgan masofa quyidagicha bo'ladi

$$d = MM_1 = OB - OB_1 \qquad (4.6)$$

Berilgan to'g'ri chiziq tenglamasi $Ax + By + C = 0$ ni normal ko'rinishga keltiramiz. Buning uchun uni normallovchi ko'paytiruvchi

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

ga ko'paytiramiz:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Bu tenglamani

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - OB_1 = 0$$

bilan solishtirib ,

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin\alpha, \quad \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = -OB_1$$

bo'lishini topamiz. Demak,

$$OB_1 = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (4.7)$$

Berilgan to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziqning normal tenglamasi quyidagicha

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - OB = 0$$

bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq berilgan $M(x_1;\ y_1)$ nuqtadan o'tgani uchun $M(x_1;\ y_1)$ nuqtanigkoordinatalari shu to'g'ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi:

$$x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - OB = 0.$$

Bundan

$$OB = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha \qquad (4.8)$$

bo'lishi kelib chiqadi .

Yuqoridagi (4.6), (4.7) va (4.8) munosabatlardan

d = $OB - OB_1 = x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - OB_1 =$

$$= x_1 \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + y_1 \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

bo'lishini topamiz. Demak,

$$d = \frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (4.9)$$

M i s o l. Berilgan M(3; -4) nuqtadan $6x + 8y + 31 = 0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa topilsin.

Y e ch i sh. Yuqoridagi (3.9) formuladan foydalanib topamiz:

$$d = \frac{6\cdot 3 - 8(-4) + 31}{\pm\sqrt{6^2+(-8)^2}} = \frac{18+32+31}{10} = 8{,}1.$$

6-§. Ikki to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasi

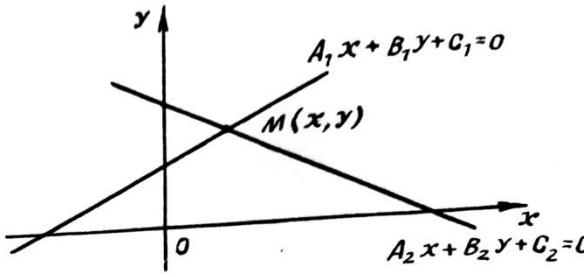
Tekislikda ikkita to'g'ri chiziq berilgan bo'lib, ularning tenglamalari mos ravishda

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \qquad (4.10)$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \qquad (4.11)$$

bo'lsin. Bu to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini topish talab etilsin .

Qaralayotgan to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini M(x; y) bilan belgilaylik (24-chizma).



24- CHIZMA.

Modomiki, izlanayotgan nuqta bir vaqtda ham (4.10) to'g'ri chiziqda, ham (4.11)
chiziqda yotar ekan, uning koordinatalari x va y lar (4.10) va (4.11) tenglamalarni qanoatlantiradi. Binobarin, bu x va y lar ushbu

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \end{cases}$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

tenglamalar sistemasining yechimi bo'ladi.

Demak, ikki to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasini topish uchun ularning tenglamalarinisistema qilib yechish kerak. Sistema yechimidagi x ning qiymati kesishishnuqtasining absissasi, y ning qiymati ordinatasi bo'ladi.

M i s o l . $3x - 3y - 3 = 0$, $x + 3y - 5 = 0$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi topilsin.

Y e ch i sh. Bu to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasining koordinatasini topish uchun ularning tenglamalarini sistema qilib yechamiz:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 4 = 0, \\ x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 4 = 0, \\ -3x - 9y + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 4 = 0, \\ -11y + 11 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2y + 4, \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2y + 4, \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$$

Demak, to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi M(2; 1) bo'ladi. Ushbu bobning oxirida to'g'ri chiziqlarga oid bir necha misollarni keltirib, ularning yechilishlarini ko'rsatamiz.

M i s o l l a r. 1. Berilgan M(0; 5) nuqtadan o'tuvchi hamda $3x - 2y - 6 = 0$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqtenglamasi topilsin.

Y e ch i sh. Berilgan M(0; 5) nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi (4.2) formulaga ko'ra

$$y - 5 = k(x - 0),$$

ya'ni

$$y = kx + 5 \qquad (4.12)$$

bo'ladi. Endi berilgan to'g'ri chiziq tenglamasi $3x - 2y - 6 = 0$ ni y ga nisbatan yechib topamiz:

$$3x - 2y - 6 = 0 \Rightarrow 2y = 3x - 6 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 3 \qquad (4.13)$$

So'ng (4.12) va (4.13) to'g'ri chiziqlar o'zaro perpendikulyar bo'lish shartidan

$$k \cdot \frac{3}{2} = -1$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $k = -\frac{2}{3}$. Topilgan k ning bu qiymatini (4.12) tenglamadagi k ning o'rniga qo'ysak, unda

$$y = -\frac{2}{3}x + 5$$

ga ega bo'lamiz. Bu berilgan nuqtadan o'tuvchi hamda berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyarbo'lgan to'g'ri chiziqning tenglamasidir .

2. Berilgan M(-1; 3) nuqtadan o'tuvchi va $4y - 3x + 8 = 0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziqning tenglamasi topilsin.

Y e ch i sh. Berilgan M(-1; 3) nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqning (4.2) formulaga ko'ra

$$y - 3 = k(x - (-1)),$$

ya'ni

$$y = k(x + 1) + 3 \qquad (4.14)$$

bo'ladi.

Berilgan to'g'ri chiziq tenglamasi $4y - 3x + 8 = 0$ ni y ga nisbatan yechamiz:

$$4y - 3x + 8 = 0 \Rightarrow 4y = 3x - 8 - 0 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x - 2 \qquad (4.15)$$

(4.14) va (4.15) to'g'ri chiziqlarning o'zaro parallel bo'lishi shartidan:

$$k = \frac{3}{4}$$

bo'lishi kelib chiqadi. (3.14)tenglamadagi k ning o'rniga qo'ysak , unda

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4}$$

ega bo'lamiz. Bu berilgan nuqtadan o'tuvchi hamda berilgan to'g'ri chiziqqa parallel bo'lagan to'g'ri chiziqning tenglamasidir.

Mavzu bo'yicha tekshirish uchun savollar:

1. Tekislikdagi analitik geometriyaning asosiy masalalarini ko'rsating va sanab o'ting.
2. Tekislikdagi to'g'ri chiziq tenglamalarini yozing.
3. Nuqtadan to'g'richiziqqacha bo'lgan masofa.
4. Parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofalar.
5. Tekislikdagi 2 ta to'g'richiziq orasidagi burchak.
6. Tekislikdagi 2 ta to'g'ri chiziqning parallelik va perpendikulyarlik shartlari.
7. Tekislikda to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasini yozing.

Kalit suzlar

Tekislik, to'g'ri chiziq, masofa, burchak, parallelik, perpendikulyarlik, to'g'ri chiziq dastasi.

Xulosa

Tekislikdagi analitik geometriyaning asosiy masalalari aytilib, nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa, parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa, ikki to'g'richiziq orasidagi burchak, to'g'ri chiziqlarning parallelik, perpendikulyarlik shartlari, to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamalari o'rganilgan.

V B O B. IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLAR

Ma'lumki, tekislikda to'g'ri chiziq *x va y* o'zgaruvchilarga nisbatan birinchi darajali

$$Ax+By+C=0 \qquad (2.1)$$

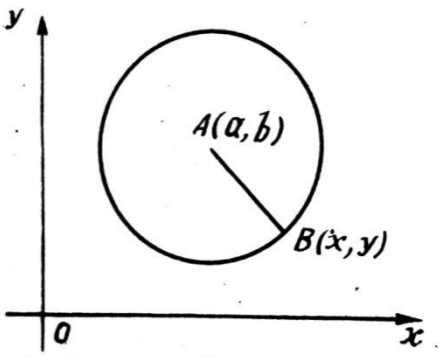
tenglama bilan analitik ifodalanadi. Ular 3 va 4-boblarda batafsil o'rganildi.
Endi tekislikda ikkinchi tartibli egri chiziqlarni (ma'lum ko'rinishdagi egri chiziqlarni) analitik ifodalarini topib, ularni o'rganamiz.
Ikkinchi tartibli egri chiziqlar *x* va *y* o'zgaruvchilarga nisbatan ikkinchi darajali tenglamalar bilan ifodalanadi. Ikkinchi darajali tenglamaning umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \qquad (5.1)$$

Odatda (5.1) tenglamani *ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi* deb ataladi.
Ushbu bobda sodda ko'rinishdagi ikkinchi tartibli egri chiziqlardan aylana, ellips, giperbola hamda parabolalarni qaraymiz. Bu egri chiziqlarning tenglamalarini topib, ular yordamida geometrik xossalarini o'rganamiz.

1-§. Aylana va uning tenglamasi

Tekislikda biror *A (a;b)* nuqta berilgan bo'lsin. *A(a;b)* nuqtadan baravar uzoqlikda turgan nuqtalar to'plami (nuqtalarning geometrik o'rni) *aylana* deb ataladi (25- chizma).
Aylanada ixtiyoriy nuqta olib, uni *B(x;y)* bilan belgilaylik.



25-CHIZMA.

Endi aylana tenglamasini topamiz. Aylana ta'rifiga ko'ra AB masofa o'zgarmas. Uni R bilan belgilaylik: AB = R. Ikki nuqta orasidagi masofani aniqlovchi (2.1) formulaga ko'ra

$$AB = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

bo'ladi. Demak, $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R.$

Bu tenglikning har ikki tomonini kvadratga ko'tarib, quyidagi

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \qquad (5.2)$$

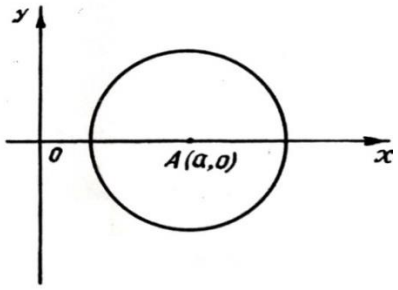
tenglamaga kelamiz. Demak, aylanadagi o'zgaruvchi $B(x;\ y)$ nuqtaning koordinatalari (5.2) tenglamani qanoatlantiradi. Yuqoridagi (5.2) tenglama aylana tenglamasini ifodalaydi. $A\ (a;b\ )$ nuqta aylana *markazi*, R esa aylana *radiusi* deyiladi.

Masalan, markazi $A(1;\ 2)$ nuqtada, radiusi $R = 3$ ga teng bo'lgan aylananing tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2, \text{ ya'ni } (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

Agar (5.2) aylana markazining koordinatalaridan biri yoki ikkalasi nolga teng bo'lsa, aylana markazi koordinata o'qlarida yoki koordinata boshida joylashgan bo'ladi:

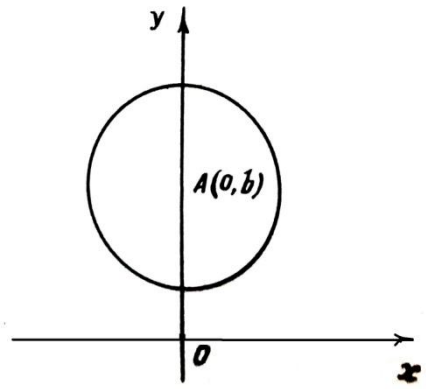
1°. Aylananing markazi $A(a;\ 0)$ nuqtada bo'lsin. Bu holda aylana tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi (26-chizma):



26- CHIZMA.

$$(x - a)^2 + y^2 = R^2. \qquad (5.3)$$

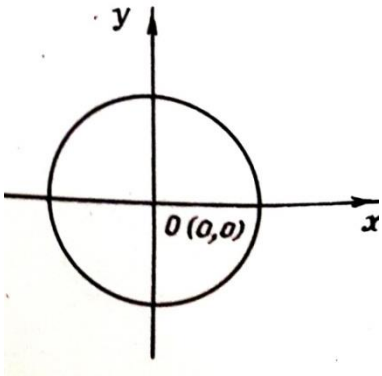
2°. Aylana markazi A (0; b) nuqtada bo'lsin. Bu holda aylananing tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi (27- chizma):



27- CHIZMA.

$$x^2 + (y-b)^2 = R^2. \qquad (5.4)$$

3°. Aylana markazi O(0; 0) nuqtada bo'lsin. Bu holda aylana tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi (28- chizma):



28- CHIZMA.

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (5.5)$$

Aytaylik, markazi $A\ (a;\ b)$ nuqtada, radiusi R ga teng bo'lgan

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \qquad (5.2)$$

aylana tenglamasiga ega bo'laylik. Bu tenglamaning chap tomoniga qisqa ko'paytirish formulasini qo'llab topamiz:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2$$

Uni quyidagicha yozish mumkin:

$$x^2 - 2ax + y^2 - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

Agar $\quad -2a = D, \quad -2b = E, \quad a^2 + b^2 - R^2 = F$

deb olinsa, unda yuqoridagi tenglama ushbu

$$x^2 + y^2 + D_x + E_y + F = 0$$

tenglamaga keladi. Bu esa A = 1, 5, B = 0, C = 1 bo'lgan holdagi ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamasi ekanini bildiradi. Demak, aylana ikkinchi tartibli egri chiziqdan iborat.

Aksincha, ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamasi (5.1) da x^2 va y^2 lar oldidagi koeffitsientlar bir-biriga teng bo'lib, x-y ning oldidagi koeffitsient esa nolga teng bo'lsa, u holda bunday ikkinchi tartibli egri chiziq aylana bo'ladi. Shuni ko'rsatamiz.

Ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamasi

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

da A = C, B = 0 bo'lsin. Bu holda tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$Ax^2 + Dx + Ay^2 + Ey + F = 0 \qquad (5.6)$$

Agar

$$Ax^2 + Dx = A\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right) = A\left(x^2 + 2\frac{D}{2A}x + \frac{D^2}{4A^2} - \frac{D^2}{4A^2}\right) =$$

$$= A(x + \frac{D}{2A})^2 - A\frac{D^2}{4A^2} = A(x + \frac{D}{2A})^2 - \frac{D^2}{4A}$$

va xuddi shunga o'xshash $\qquad Ay^2 + Ey = A(y + \frac{E}{2A})^2 - \frac{E^2}{4A}$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda (4.6) tenglama ushbu ko'rinishni oladi:

$$A(x + \frac{D}{2A})^2 - \frac{D^2}{4A} + A(y + \frac{E}{2A})^2 - \frac{E^2}{4A} + F = 0$$

Endi keyingi tenglikning har ikki tomonini A ga bo'lib topamiz:

$$(x + \frac{D}{2A})^2 - \frac{D^2}{4A^2} + (y + \frac{E}{2A})^2 - \frac{E^2}{4A^2} + \frac{F}{A} = 0$$

Bu tenglikdan esa

$$(x + \frac{D}{2A})^2 + (y + \frac{E}{2A})^2 = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A} \qquad (5.7)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Quyidagi $\quad \frac{D}{2A} = -a, \quad \frac{E}{2A} = -b, \qquad \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A} = R^2$

belgilashlarni qilaylik. Unda (5.7) tenglamaning ko'rinishi

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

bo'ladi. Bu esa aylana tenglamasidir.

M i s o l . Ikkinchi tartibli egri chiziq ushbu

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0 \qquad (5.8)$$

tenglama bilan berilgan. Uning aylana tenglamasi ekanini ko'rsatib, aylananing markazi va radiusi topilsin.

Y e c h i s h . Berilgan tenglamada x^2 va y^2 larning oldidagi koeffitsientlar bir-biriga teng hamda xy ning oldidagi koeffitsient nolga teng bo'lganligi sababli yuqorida aytilganiga ko'ra u aylananing tenglamasi bo'ladi.

(5.8) tenglamani quyidagicha yozib olamiz:

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y - 20 = 0.$$

Ravshanki,

$$x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1,$$
$$y^2 - 4y = y^2 - 2 \cdot 2y + 4 - 4 = (y-2)^2 - 4.$$

Unda

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y - 20 = (x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 - 20 =$$
$$= (x+1)^2 + (y-2)^2 - 25 = 0$$

bo'lib, berilgan tenglama ushbu

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$$

ko'rinishni oladi. Demak, aylananing markazi A (— 1; 2) nuqtada bo'lib, radiusi R = 5 ga teng bo'ladi.

Aylana bilan umumiy bitta $M\ (x_0,\ y_0)$ nuqtaga ega bo'lgan to'g'ri chiziq aylanaga o'tkazilgan *urinma* deb ataladi. $x^2 + y^2 = R^2$ aylananing $M\ (x_0\ y_0)$ nuqtasidan o'tuvchi urinma tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$x_0x + y_0y - R^2 = 0. \qquad (5.9)$$

M i s o l . $x^2 + y^2 = 8$ aylananing M (2; —2) nuqtasidan o'tuvchi urinmasi topilsin.

Yech i sh. Bu urinmaning tenglamasi yuqoridagi (5.9) formulaga ko'ra

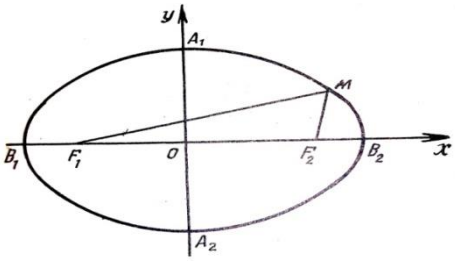
$2x + (-2)y - 8 = 0$, ya'ni $x - y - 4 = 0$ bo'ladi.

2-§. Ellips va uning tenglamasi

Tekislikda ikkita nuqta berilgan bo'lsin. Tekislikda shunday nuqtalar to'plamini qaraylikki, bu to'plamning xar bir nuqtasidan berilgan ikki nuqtagacha bo'lgan masofalar yig'indisi har doim bir xil o'zgarmas songa teng bo'lsin. Odatda bunday nuqtalar to'plami (nuqtalarning geometrik o'rni) *ellips* deb ataladi.

Berilgan ikki nuqtani mos ravishda F_1 va F_2 orqali belgilaymiz. Ellipsning tenglamasini tuzish uchun tekislikda koordinatalar sistemasini quyidagicha olamiz: berilgan F_1 va F_2nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqni abssissa o'qi, $F_1\ F_2$ kesmaning o'rtasidan o'tuvchi hamda abssissa o'qiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqni ordinata o'qi deb olamiz (29-chizma).

Agar $OF_2 = c$ ($c > 0$) deyilsa, unda yuqorida aytilganiga ko'ra $F_1 = F_1$ ($-c$; 0), $F_2 = F_2$ (c; 0) bo'ladi.



29- CHIZMA.

Ellipsda ixtiyoriy nuqta olib, uni $M(x; y)$ bilan belgilaymiz.

Endi ellips tenglamasini topamiz. Ellips ta'rifiga ko'ra F_1M va F_2M masofalar yig'indisi o'zgarmas bo'ladi. Uni $2a$ ($a > 0$) bilan belgilaylik:

$$F_1M+F_2M=2a. \qquad (5.10)$$

Berilgan ikki nuqta orasidagi masofani ifodalovchi formuladan foydalanib topamiz:

$$F_1M = \sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2+y^2},$$
$$F_2M = \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Unda (5.10) tenglik ushbu

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

ko'rinishga keladi. Keyingi tenglikni quyidagicha

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

yozib, so'ng uning har ikki tomonini kvadratga ko'taramiz:

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

Bundan esa

$$x^2+2cx+c^2+y^2-4a^2-x^2+2cx-c^2-y^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

ya'ni $\qquad 4cx-4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$

ekanligi kelib chiqadi. Keyingi tenglikdan

$$a^2-cx = a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad (5.11)$$

ga ega bo'lamiz. (4.11) tenglikning har ikki tomonini kvadratga ko'-tarib topamiz:

$$(a^2-cx)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \to a^4-2a^2cx+c^2x^2 = a^2[(x-c)^2+y^2]$$
$$\to a^4-2a^2cx+c^2x^2 = a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$
$$\to a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2 = a^4-a^2c^2 \to x^2(a^2-c^2)+a^2y^2$$
$$= a^2(a^2+c^2).$$

Ravshanki, $F_1M + F_2M > F_1F_2$. Demak, 2a > 2c, ya'ni $a>c$. Bundan esa $a^2 - c^2 > 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Shuni e'tiborga olib, keyingi tenglikning har ikki tomonini $a^2(a^2-c^2)$ga bo'lamiz:

$$\frac{x^2(a^2-c^2)}{a^2(a^2-c^2)}+\frac{a^2y^2}{a^2(a^2-c^2)}=\frac{a^2(a^2-c^2)}{a^2(a^2-c^2)}$$

Natijada ushbu tenglikka kelamiz:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

Agar $a^2 - c^2 = b^2$ (5.12)

deb belgilasak, unda ellipsning tenglamasi hosil bo'ladi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (5.13)$$

Shunday qilib, ellipsdagi o'zgaruvchi $M\ (x,\ y)$ nuqtaning koordinatalari (5.13) tenglama bilan bog'langan ekan. Bu (5.13) tenglama ellipsning tenglamasini ifodalaydi. F_l va F_2 nuqtalar ellipsning *fokuslari* deyiladi. Ravshanki, fokuslar orasidagi masofa 2 c ga teng.

Endi ushbu

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ x=0\end{cases}, \qquad \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=0\end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechib, ellipsning Oy hamda Ox koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topamiz:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ \end{cases} \to \frac{0}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \to \frac{y^2}{b^2}=1 \to y^2=b^2 \to y=\pm b.$$

Demak, ellips Oy o'qi bilan $A_1(0{:}\,b) va\, A_2(0;-b)$ nuqtalarda kesishadi (29-chizma). Shuningdek,

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=0\end{cases} \to \frac{x^2}{a^2}+\frac{0}{b^2}=1 \to x^2=a^2 \to x=\pm a$$

buladi.

Demak, ellips Ox o'qi bilan B_1 $(-a;0)$ va $B_2(a;\ 0)$ nuqtalarda kesishadi (29-chizma). Odatda a ellipsning *katta yarim o'qi,* esa *kichik yarim o'qi* deb ataladi.

Ellips fokuslari orasidagi masofa 2 c ning uning katta o'qi uzunligi 2 a ga nisbati ellipsning *ekssentrisiteti* deyiladi va ε harfi bilan belgilanadi:

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$$

tenglikdan $c^2=a^2-b^2$

bo'lishini e'tiborga olib, ellipsning eksientrisiteti

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \qquad (5.14)$$

ga teng bo'lishini topamiz.

Ellipsning ekssentrisiteti uning shaklini xarakterlaydigan miqdordir.

Ravshanki, $c < a$ bo'lganligi sababli ε har doim 1 dan kichik bo'ladi:

$\varepsilon < 1$. Agar orta borsa, unda ε kichiklashib boradi va ellips shakli aylana shakliga o'xshay boradi. Agar $a = b$ bo'lsa, unda $\varepsilon = 0$ bo'lib, ellips aylanadan iborat bo'lib qoladi.

M i s o l l a r . 1. Katta o'qi 10 ga, ekssentrisiteti $\varepsilon = 0{,}8$ ga teng bo'lgan ellipsning tenglamasi topilsin.

Y e c h i s h . Masalaning shartiga ko'ra $2a = 10$. Demak, $a = 5$. (5.14) formuladan foydalanib,

$$0.8 = \frac{c}{5} \to c = 5 * 0.8 = 4$$

bo'lishini topamiz. (5.12) formuladan esa

$$b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9, \qquad b = 3$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, (5.13) formulaga asosan ellipsning tenglamasi

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1, \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

ko'rinishda bo'ladi.

2. Berilgan $4x^2 + 9y^2 = 16$ ellipsning katta va kichik yarim o'qlari, fokuslari hamda ekssentrisiteti topilsin.

Yech i sh. Berilgan $4x^2 + 9y^2 = 16$ tenglamaning har ikki tomonini 16 ga bo'lamiz. Natijada

$$\frac{X^2}{4} + \frac{9y^2}{16} = 1 \to \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{16}{4}} = 1$$

tenglamaga kelamiz. Bu ellips tenglamasini (4.13) bilan solishtirib,

$$a^2 = 4 \to a = 2\,, \qquad b^2 = \frac{16}{9} \to b = \frac{4}{3}$$

bo'lishini topamiz. (4.12) formulaga asosan

$$b^2 = a^2 - c^2 \to c^2 = a^2 - b^2 \to c^2 = 4 - \frac{16}{9} \to c^2 = \frac{20}{9} \to c = \frac{\sqrt{20}}{9} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

bo'ladi. (4.14) formuladan foydalanib. ellipsning ekssentrisiteti e ni topamiz:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{3} : 2 = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Shunday qilib:

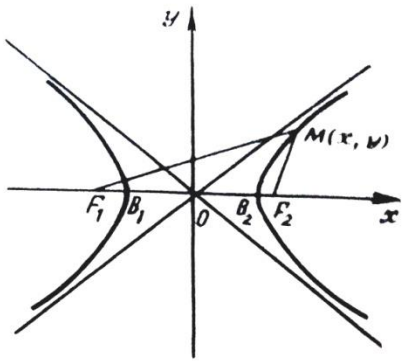
$$a = 2, \quad b = \frac{4}{3}, \; F_1\left(-\frac{2\sqrt{5}}{3};\; 0\right), F_2\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}; 0\right), \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

bo'ladi.

3-§. Giperbola va uning tenglamasi

Tekislikda ikkita nuqta berilgan bo'lsin. Tekislikda shunday nuqtalar to'plamini qaraylikki, bu to'plamning har bir nuqtasidan berilgan ikki nuqtagacha bo'lgan masofalar ayirmasi har doim bir xil o'zgarmas songa teng bo'lsin. Odatda bunday nuqtalar to'plami (nuqtalarning geometrik o'rni) *giperbola* deb ataladi.

Berilgan ikki nuqtani mos ravishda F_1va F_2 orqali belgilaylik. Giperbolaning tenglamasini tuzish uchun tekislikda koordinatalar sistemasini quyidagicha olamiz. Berilgan F_1va F_2 nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chizikni abssissa o'qi F_1F_2 kesmaning o'rtasidan o'tuvchi hamda abssissa o'qiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqni ordinata o'qi deb olamiz (30- chizma).



30- CHIZMA.

Agar $OF_2 = c$ $(c > 0)$ deyilsa, unda yuqorida aytilganiga ko'ra

$F_1 = F_1$ (—c; 0), $F_2 = F_2$ $(c; 0)$ bo'ladi.

Giperbolada ixtiyoriy nuqta olib, uni $M(x; y)$ bilan belgilaymiz.

Endi giperbolaning tenglamasini topamiz. Giperbola ta'rifiga ko'ra F_1M va F_2M masofalar ayirmasi o'zgarmas bo'ladi. Uni $2a$ bilan belgilaylik:

$$F_1 - F_2 = \pm 2a \; (a > 0). \qquad (5.15)$$

Ikki nuqta orasidagi masofani ifodalovchi (1.1) formuladan foydalanib topamiz:

$$F_1M = \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Unda (4.15) tenglik ushbu

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

ko‘rinishga keladi. Keyingi tenglikni ($F_1M > F_2M$ deb) quyidagicha

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}-2a$$

yozib, so’ng uning har ikki tomonini kvadratga ko’taramiz:

$$(x-c)^2+y^2=(x+c)^2+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+4a^2.$$

Bundan esa

$$x^2-2cx+c^2+y^2=x^2+2cx+c^2+y^2+4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

ya’ni

$$-4a^2-4cx=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

ekanligi kelib chiqadi. Keyingi tenglikdan

$$a^2+cx=a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \qquad (5.16)$$

ga ega bo’lamiz.

(5.16) tenglikning har ikki tomonini kvadratga ko’taramiz:

$$(a\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2 \to a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)$$
$$\to a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2y^1+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2 \to a^4+c^2x^2$$
$$=a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2 \to (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Ravshanki, $F_2M - F_1M < F_1F_2$. Demak, $2a < 2c$, ya’ni $a^2 < c^2$. Bundan esa $a^2 - c^2 < 0$ bo‘lishi kelib chiqadi. Shuni e’tiborga olib, yuqo ridagi tenglikning har ikki tomonini $a^2(a^2-c^2)$ ga bo‘lamiz:

$$\frac{(a^2-c^2)x^2}{(a^2-c^2)a^2}+\frac{a^2y^2}{a^2(a^2-c^2)}=1.$$

Natijada ushbu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

tenglikka kelamiz. Agar

$$a^2-c^2=-b^2 \qquad (5.17)$$

deb belgilasak, unda

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (5.18)$$

bo‘ladi

Shunday qilib, giperboladagi o’zgaruvchi $M(x; y)$ nuqtaning koordinatalari (5.18) tenglama bilan bog’langan ekan. Bu (5.18) tenglama giperbolaning tenglamasini ifodalaydi.

F_1 va F_2 nuqtalar giperbolaning *fokuslari* deyiladi. Ravshanki, fokuslar orasidagi masofa 2 c ga teng.

Endi ushbu

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ x=0\end{cases},\quad \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=0\end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechib, giperbolaning *Oy* va Ox koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topamiz. Ushbu

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ x=0\end{cases}$$

sistema yechimga ega emas (chunki *x* — 0 da $-\frac{y^2}{b^2}=1$ bo'lib, manfiy son 1 ga teng bo'ladigan ma'nosiz munosabat hosil bo'ladi).

Demak, giperbola *Oy* o'qi bilan kesishmaydi. Endi

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=0\end{cases}$$

sistemani yechamiz:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=0\end{cases}\rightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{0}{b^2}=1\rightarrow\frac{x^2}{a^2}=1\rightarrow x^2=a^2\rightarrow x=\pm a$$

Demak, giperbola *Ox* o'qi bilan B_1 (-*a;* 0) va B_2 *(a;* 0) nuqtalarda kesishadi (30- chizma). *Ox* o'qi giperbolaning *haqiqiy o'qi, Oy* esa *mavhum o'qi* deb ataladi.

Yuqorida keltirilgan giperbolaning tenglamasini *y* ga nisbatan yechib topamiz:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\rightarrow-\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}\rightarrow\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1\rightarrow y^2=b^2\frac{x^2-a^2}{a^2}\rightarrow y=$$
$$=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\qquad(5.19)$$

Keyingi tenglikdan ko'rinadiki, giperbola absissa o'qiga nisbatan simmetrik joylashgan bo'lar ekan.

Yuqoridagi (4.19) tenglikni quyidagicha yozamiz:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2}-a^2\rightarrow y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)}\rightarrow y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

Bu tenglikdan ko'rinadiki , *x* yetarli darajada katta bo'lganda $\frac{a^2}{x^2}$ nisbat 0 ga yaqin bo'lib, $\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$ esa 1 ga yaqin bo'ladi:

$$\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} \approx 1$$

Unda

$$y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} \approx \pm\frac{b}{a}x$$

bo'ladi.

Demak, x yetarli darajada katta bo'lganda giperbola nuqtalarining ordinatalari

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

to'g'ri chiziqlar nuqtalarining ordinatalariga yetarlicha yaqin bo'lardi. Bu

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

to'g'ri chiziqlar giperbolaning *asimptotalari* deb ataladi (30-chizmaga qarang.)

Giperbola fokuslari orasidagi masofa 2 c ning 2 a ga nisbati giperbolaning *ekssentrisiteti* deb ataladi va ε harfi bilan belgilanadi:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \qquad (5.20)$$

(5.17) tenglikdan $c^2 = a^2 + b^2$

bo'lishini e'tiborga olib, giperbolaning ekssentrisiteti

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

ga teng bo'lishini topamiz.

Ravshanki, $c > a$ bo'lganligi sababli ε har doim 1 dan katta bo'ladi: $\varepsilon > 1$.

M i s o l : 1. Fokuslari orasidagi masofa $2\sqrt{11}$ bo'lib, o'zi M (9; — 4) nuqtadan o'tadigan giperbolaning tenglamasi topilsin.

Ye ch i sh. Masalaning shartiga binoan $2c = 2\sqrt{11}$ bo'ladi. Demak, $c = \sqrt{11}$ (5.17) formulaga ko'ra $a^2 + b^2 = 11$ bo'ladi.

Giperbola M (9; —4) nuqtadan o'tadi. Binobarin, bu nuqtaning koordinatalari giperbola tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ni qanoatlantiradi:

$$\frac{9^2}{a^2} - \frac{(-4)^2}{b^2} = 1$$

Keyingi tenglikdan topamiz:

$$\frac{9^2}{a^2}-\frac{(-4)^2}{b^2}=1 \rightarrow= \frac{81}{a^2}-\frac{16}{b^2}=1 \rightarrow 81b^2-16a^2=a^2b^2.$$

Natijada a va b larni topish uchun ushbu

$$\begin{cases} a^2+b^2=11 \\ 81b^2-16a^2=a^2b^2 \end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz. Endi bu sistemani yechamiz:

$$\begin{cases} a^2+b^2=11 \\ 81b^2-16a^2=a^2b^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a^2=11-b^2 \\ 81b^2-16(11-b^2)=(11-b^2)^{b^2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a^2=11-b^2 \\ 81b^2-176+16b^2-11b^2+b^4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2=11-b^2 \\ b^4-86b^2-176=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a^2=11-b^2 \\ b_{1.2}^2-43\pm\sqrt{1849+176} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2=11-b^2 \\ b_1^2=2, b_2^2=-83 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1^2=11-2=9 \\ b_1^2=2, \end{cases}$$

Demak, $a^2=9, b^2=2$. Izlanayotgan giperbolaning tenglamasi

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{2}=1$$

bo'ladi.

M i s o l :2. $16x^2-25y^2=400$ giperbblaning fokuslari, ekssentrisiteti topilib, asimptotasining tenglamasi tuzilsin.

Y e c h i s h . Berilgan giperbola tenglamasining har ikki tomonini 400 ga bo'lamiz:

$$\frac{16x^2}{400}-\frac{25y^2}{400}=1$$

Natijada giperbola tenglamasi $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ ko'rinishga keladi.

Demak, $a^2=25, b^2=16$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$$

$F_1(-\sqrt{41};0)$, $F_2\sqrt{41};0)$, $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{41}}{5}$

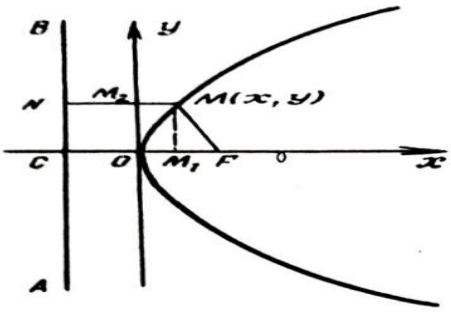
giperbola asimptotasining tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$y=\pm\frac{b}{a} \qquad x=\pm\frac{4}{5}x$$

4- §. Parabola va uning tenglamasi

Tekislikda to'g'ri chiziq va bu to'g'ri chiziqda yotmagan biror nuqta berilgan bo'lsin. To'gri chiziqdan va berilgan nuqtadan baravar uzoqlikda turgan nuqtalar to'plami (nuqtalarning geometrik o'rni) *parabola* deb ataladi.
Berilgan to'gri chiziqni *AB,* berilgan nuqtani esa *F* bilan belgilaymiz.

Parabolaning tenglamasini tuzish uchun tekislikda koordinatalar sistemasini quyidagicha olamiz. Berilgan nuqtadan o'tuvchi hamda berilgan *AB* to'g'ri chiziqqa perpepdikulyar bo'lgan to'gri chiziqni abssassa o'qi deb olamiz. *AB* to'g'ri chiziq va berilgan *F* nuqta orasidagi masofani ifodalovchi kesma o'rtasidan o'tuvchi hamda *Ox* o'qiga perpendikulyar bo'lgan to'gri chiziqni *Oy* o'qi deb olamiz (31- chizma).



31- CHIZMA.

Parabolada ixtiyoriy nuqta olib, uni *M (x; y)* bilan belgilaymiz.
Berilgan *AB* to'gri chiziqdan berilgan *F* nuqtagacha bo'lgan masofani *p* bilan *(p >* 0) belgilaylik. Unda *F* nuqtaning koordinatalari $(\frac{p}{2};0)$ bo'ladi: $F(\frac{p}{2};0)$ 31-chizmadan: $OM_1 = x$, $OM_2 = MM_1 = y$, $C(-\frac{p}{2};0)$, $N(\frac{p}{2};y)$ bo'lishini topamiz. Ravshanki,

$$MN = x + \frac{p}{2} \qquad (5.21)$$

Endi parabolaning tenglamasini topamiz. Parabola ta'rifiga ko'ra *MN* va *MF* masofalar bir-biriga teng bo'ladi:

$$MN = MF \qquad (5.22)$$

Ikki nuqta orasidagi masofani ifodalovchi (1.1) formuladan foydalanib,

$$MF = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} \qquad (5.23)$$

ni hosil qilamiz.
(5.21), (5.22) va (5.23) munosabatlardan ushbutenglikka kelamiz. Bu tenglikning har ikki tomonini kvadratga ko'tarib topamiz:

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} \rightarrow (x + \frac{p}{2})^2 = (\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2})^2$$

$$\rightarrow x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 \rightarrow x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$
$$= x^2 - 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} + y^2 \rightarrow x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$$
$$y^2 = 2px$$

Natijada quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$y^2 = 2px \qquad (5.24)$$

Shunday qilib, paraboladagi o'zgaruvchi *M (x; y)* nuqtaning koordinatalari (5.24) tenglama bilan bog'langan ekan. Bu (5.24) tenglama parabolaning tenglamasini ifodalaydi.

F nuqta parabolaning *fokusi, AB* to'g'ri chiziq parabolaning *direktrisasi* deyiladi. Demak, parabola direktrisasining tenglamasi $x = -\frac{p}{2}$, p a r a b o la fokusi *F* ning koordinatalari $F\ (\frac{p}{2}; 0)$ bo'ladi.

Parabola tenglamasi (5.24) da y o'zgaruvchi juft darajada qatnashadi. Demak, parabola Ox o'qiga nisbatan simmetrik joylashgan bo'ladi. (5.24) tenglamadan topamiz: $y^2 = 2px \rightarrow y = +\sqrt{2px}, y = -\sqrt{2px}$

Demak, parabolaning yuqori yarim tekislikdagi tenglamasi

$$y = +\sqrt{2px} \qquad (5.25)$$

quyi yarim tekislikdagi tenglamasi esa $y = -\sqrt{2px}$ bo'ladi.

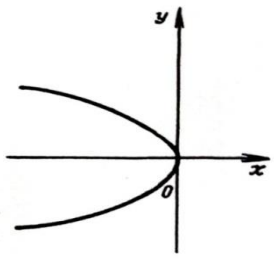
Parabolaning yuqori yarim tekislikdagi qismini qaraylik. (Quyi yarim tekislikdagi qismi xuddi shunga o'xshash bo'ladi.)

(5.25) x ning manfiy qiymatlarda y ning qiymatlari haqiqiy bo'lmaydi. Bundan Oy o'qining chap tomonida parabolaning bitta ham nuqtasi bo'lmasligi kelib chiqadi.

$x = 0$ bo'lganda $y = 0$ bo'ladi. Demak, parabola koordinata boshidan o'tadi.

x $(x > 0)$ ning qiymatlari orta borsa, (5.25) tenglamadan ko'rinadiki, mos y ning qiymatlari ham orta boradi. Demak, paraboladagi o'zgaruvchi *M* (x; *y)* nuqta parabola bo'ylab ham o'ngga, ham yuqoriga qarab Ox o'qidan ham, Oy o'qidan ham uzoqlasha borar ekan. Bu holni 31- chizmadagi parabola tasvirida ham ko'rish mumkin.

Ushbu $u^2 = — 2rx$ ko'rinishdagi tenglama ham parabolani ifoda- laydi. Uning tasviri 32-chizmada ko'rsatilgan.



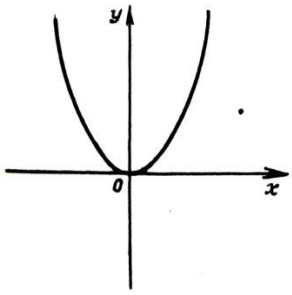
32- CHIZMA.

Ushbu

$$x^2 = 2\,py, \qquad (5.26)$$

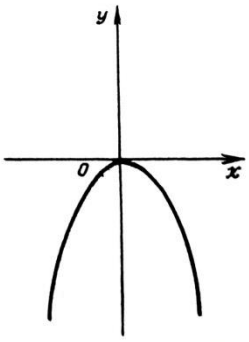
$$x^2 = -\,2py \qquad (5.27)$$

tenglamalar ham parabolalarni ifodalaydi. Bu parabolalar *Oy* o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi. (5.26) parabolaning tasviri 33-chizmada,



33- CHIZMA.

(5.27) parabolaning tasviri esa 34-chizmada ko'rsatilgan.



34- CHIZMA.

M i s o l l a r . 1. Parabolaning fokusi (5; 0) nuqta bo'lsa, shu parabolaning tenglamasi topilsin.

Y e c h i s h . Masalaning shartiga ko'ra *F* (5; 0).

Demak, $\frac{p}{2} = 5$ Bundan esa *p*= 10 bo'lishi kelib chiqadi. Yuqoridagi (5.24) dan foydalanib, izlanayotgan parabolaning tenglamasi

$$y^2 = 2\cdot 10x = 20x$$

bo'lishini topamiz.

2. Agar parabolaning (3; 5) nuqtadan o'tishi ma'lum bo'lsa, uning tenglamasi topilsin.

Y e c h i s h. Shartga ko'ra izlanayotgan parabola (3; 5) nuqtadan o'tadi. Binobarin, bu nuqtaning koordinatalari parabola tenglamasini qanoatlantiradi: $5^2 = 2p \cdot 3$. Bu tenglikdan $p = \frac{25}{6}$ bo'lishini topamiz.

Demak, parabolaning tenglamasi quyidagicha bo'ladi $y^2 = \frac{25}{3}x$

Mavzu bo'yicha tekshirish uchun savollar:

1. Aylana, ellips, giperbola, parabolaning ta'rifini aytib tenglamalarini yozing?
2. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarni fokuslarini toppish fo'rmulalarini yozib shakillarini chizing.
3. Ellipsning ekssentrisitetini hisoblash formulasini yozing.
4. Giperbolaning asimptotalarini hisoblash formulalarini yozing.

Kalit suzlar

Aylana, ellips, giperbola, parabolala, focus, ekssentrisitet, asimptota.

Xulosa

Ikkinchi tartibli egri chiziqlarga aylana, ellips, giperbola, parabolalarga ta'rif berilib, ularning muhim xarakterli xususiyatlari o'rganilgan. Ikkinchi tartibli egrichiziqlarni fokuslarini koordinatalarini toppish, ekssentrisitetini hisoblash, asimptotalarini aniqlash formulalari yozilib, shakllari chizilgan.

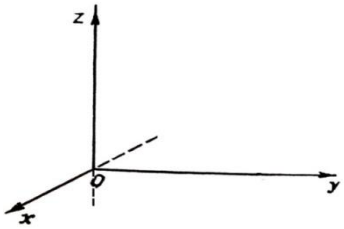
VI BOB. FAZODA ANALITIK GEOMETRIYA

Fazodagi analitik geometriyada tekislikdagi analitik geometriyadagi singari fazoviy shakllarning (geometrik obyektlarning) xossalari algebra usuli yordamida (ya'ni tenglamalar yordamida) o'rganiladi[2].

1-§ Fazoda to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasi

Fazoda ozaro bir-biri bilan perpendikulyar bo'lgan uchta to'g'ri chiziqni olaylik. Bu to'gri chiziqlarning kesishgan nuqtasini *O*harfi bilan belgilab, uni *kordinata boshi*deb ataymiz. 35-chizmada ko'rsatilganidek, to'g'ri chiziqlarning

birini *Ox* o'qi yoki *absissa* o'qi, ikkinchisini *Oy* o'qi yoki ordinata o'qi, uchinchisini esa *Oz* yoki o'qi *applikata o'qi* deb ataladi.

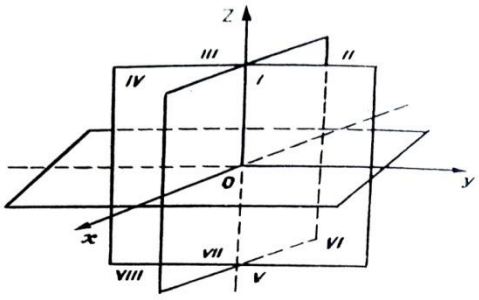


35- CHIZMA.

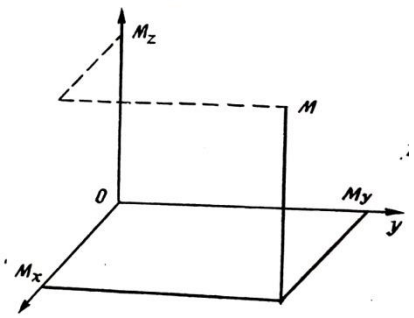
Kordinata boshi *Ox, Oy* va *Oz* o'qlarining har birini ikki qismga–ikki yarim o'qqa ajratadi.Yarim o'qlardan birini musbat,ikkinchisini manfiy deb qaraymiz. Musbat yarim o'qlar 35-chizmada strelkalar bilan ko'rsatilgan.

Ox, Oy va *Oz* o'qlar orqali o'tgan tekisliklar (ular koordinata tekisliklari deb ataladi) fazoni 8qismga ajratadi. Odatda bu qismlar *oktantlar*deb ataladi. Ular 36-chizmada ko'rsatilganidek nomerlanadi.

Aytaylik M-fazodagi biror nuqta bo'lsin. M nuqtadan *yOz, xOz, xOy* kordinat tekisliklariga parallel tekisliklar o'tkazib, ularning mos o'qlar bilan kesishgan nuqtalarini M_x , M_y , $M_z$lar bilan belgilaymiz. Bu M_x , M_y , M_z nuqtalarni aniqlashning yo'l-yo'riqlari 37-rasmda ko'rsatilgan.



36- CHIZMA.



37- CHIZMA.

Ushbu $M_x = x$, $M_y = y$, $M_z = z$

Kesmalarning uzunligi *M* nuqtaning koordinatalari deb ataladi. *x* son *M* nuqtaning birinchi koordinatasi yoki *absissasi*, y son M nuqtaning ikkinchi koordinatasi yoki *ordinatasi*, *z* son *M* nuqtaning uchinchi koordinatasi yoki *applikatasi*. *M* nuqta koordinatalari yordamida quyidagicha yoziladi: *M(x ,y, z)*

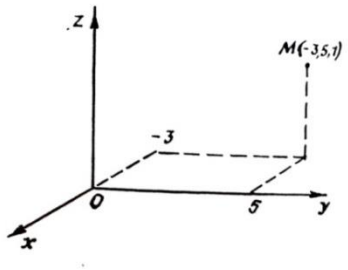
Oktantlar	*(x ,y, z)* nuqta koordinatalari ishorasi		
	x (absissa)	*y* (ordinata)	*z* (applikata)
I	$x > 0$	$y > 0$	$z > 0$
II	$x < 0$	$y > 0$	$z > 0$
III	$x < 0$	$y < 0$	$z > 0$
IV	$x > 0$	$y < 0$	$z > 0$
V	$x > 0$	$y > 0$	$z < 0$
VI	$x < 0$	$y > 0$	$z < 0$
VII	$x < 0$	$y < 0$	$z < 0$
VIII	$x > 0$	$y < 0$	$z < 0$

Yuqorida aytilganlardan ko'rinadiki, fazodagi har bir nuqta *(x ,y, z)* uchlikni aniqlaydi.

Aksincha, uchta *x ,y* va *z* sonlardan iborat *(x ,y, z)*uchlik berilgan bo'lsa, fazoda unga mosbitta nuqta topiladi.

Koordinata tekisliklari butun fazoni 8 oktantga bo'lishiniaytib o'tgan edik. Bu oktantlardagi nuqtalar koordinatalarining ishoralari 40betdagi jadvalda ko'rsatilgan.

Masalan, M(-3; 5; 3) nuqtaning fazodagi geometrik tasviri 38-chizmada ifodalangan.



38- CHIZMA.

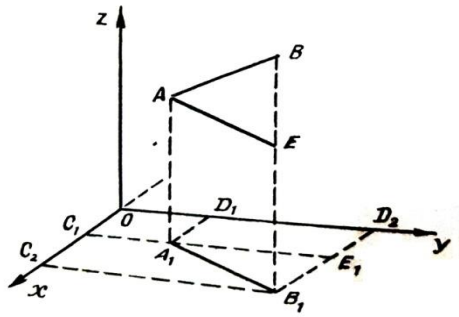
2-§. Fazodagi ikki nuqta orasidagi masofa

Fazoda ikki A va B nuqta berilgan bo'lib, ularning koordinatalari mos ravishda (x_1, y_1, z_1) va (x_2, y_2, z_2) bo'lsin: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$.

Bu nuqtalar orasidagi masofani topish talab etilsin.

39-chizmada berilgan $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalarning koordinatalarini e'tiborga olib quyidagilarni aniqlaymiz:

$$OC_1 = x_1, \quad OD_1 = y_1, \quad AA_1 = z_1,$$
$$OC_2 = x_2, \quad OD_2 = y_2, \quad BB_1 = z_2.$$



39- CHIZMA.

AA_1 va BB_1 o'zaro parallel.Ular bir tekislikda yotadi. A_1 va B_1 nuqtalarni tutashtiramiz. A nuqta A_1B_1 ga parallel AE kesmani o'tkazamiz. Natijada ABE to'g'ri burchakli uchburchak hosil bo'ladi. Pifagor teoremasidan foydalanib topamiz:

$$AB^2 = AE^2 + BE^2. \qquad (6.1)$$

A_1 nuqtadan Oy o'qqa parallel A_1E_1 to'g'ri chiziqni o'tkazib, $A_1B_1E_1$ uchburchak ham to'g'ri burchakli uchburchak bo'ladi. Yana Pifagor teoremasiga asosan: $A_1B_1^2 = A_1E_1^2 + B_1E_1^2$.

ga ega bo'lamiz.

Endi $AE = A_1B_1$ ekanini e'tiborga olib,keyingi tenglikni quyidagicha yozib olamiz : $A_1E_1^2 = A_1E_1^2 + B_1E_1^2$. (6.2)

(6.1) va (6.2.) tengliklardan

$$AB^2 = A_1B_1^2 = A_1E_1^2 + B_1E_1^2. \qquad (6.3)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Ravshanki,

$$A_1E_1 = D_1D_2 = OD_2 - OD_1 = y_2 - y_1,$$
$$B_1E_1 = C_1C_2 = OC_2 - OC_1 = x_2 - x_1,$$
$$DE = BB_1 - EB_1 = BB_1 - AA_1 = z_2 - z_1.$$

Demak, $A_1E_1 = y_2 - y_1$, $B_1E_1 = x_2 - x_1$, $BE = z_2 - z_1$.

Bularni (6.3) tenglikka qo'yib topamiz:

$$AB^2 = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Demak,

$$AB = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (6.4)$$

Bu $A(x_1, y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar orasidagi masofani ifodalovchi formuladir.

M i s o l. $A(2; 5; 0)$, $B(5; 1; 12)$nuqtalar orasidagi masofa topilsin.

Y e ch i sh. Bu nuqtalar orasidagi masofani (5.4 formuladan foydalanib topamiz:

$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (1-5)^2 + (12-0)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2} = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13.$$

3- §. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish

Fazoda $A(x_1, y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$nuqtalar berilgan bo'lib, ularni tutashtirish natijasida Aва kesma hosil qilingan. AB kesmada shunday C nuqtani topish kerakki, AC kesmaning CB kesmaga nisbati berilgan λ songa teng bo'lsin: $\frac{AC}{CB} = \lambda$.

Izlanayotgan C nuqtaning koordinatalarini $x; y$ va z deylik: $C(x; y; z)$.

Bu masalaning yechilishi mazkur kursning 1- bob, 3-§ ida keltirilgan (tekislikdagi kesmani berilgan nisbatda bo'lish)masalaning yechilishi kabidir.Shuni e'tiborga olib, biz quyidagi masalaning yechimini keltirish bilan kifoyalanamiz.

AB kesmani berilgan λ = $\frac{AC}{CB}$ nisbatda bo'luvchi nuqtaning koordinatalari quyidagi

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \qquad (6.5)$$

Formulalar bilan topiladi.

Xususan, $C(x; y; z)$ nuqta AB kesmani teng ikkiga bo'lsa ($AC = CB$), u holda

$$\frac{AC}{CB} = \lambda = 1$$

bo'lib, izlanayotgan C nuqtaning x, y, z koordinatalari quyidagicha bo'ladi:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

M i s o l. $A(3; 7; 4)$ va $B(8; 2; 3)$ nuqtalarni tutashtirishdan hosil bo'lgan AB kesmani $\lambda = \frac{2}{3}$ nisbatda bo'luvchi C nuqta topilsin.

Y e ch i sh. Izlanayotgan C nuqtaning koordinatalarini yuqorida keltirilgan

(5.5)formulalardan foydalanib topamiz:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{3+\frac{2}{3}\cdot 8}{1+\frac{2}{3}}=\frac{9+16}{3+2}=5,\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{7+2\cdot\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{21+4}{5}=5,$$

$$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}=\frac{4+3\cdot\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{6}{\frac{5}{3}}=\frac{18}{5}=3\frac{3}{5}.$$

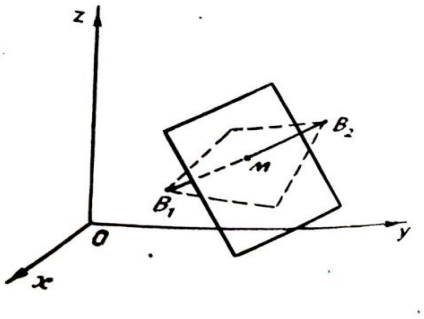
Demak, $C(5;\,5;\,3\frac{3}{5})$.

VII BOB. **TEKISLIK VA UNING TENGLAMALARI**

Fazoda ikki nuqta berilgan bo'lsin. Bu nuqtalardan bir xil masofada turgan nuqtalar to'plami (nuqtalarning geometrik o'rni) *tekislik* deb qaraladi.
Quyida tekislikning analitik ifodalarini (tenglamalarini) topamiz va ular yordamida tekislikning xususiyatlarini o'rganamiz.

1 - §. Tekislikning umumiy tenglamasi

Biz yuqorida, tekislikni berilgan ikki $B_1(x_1;\ y_1,\ z_1)$hamda $B_2(x_2;\ y_2,\ z_2)$ nuqtalardan baravar uzoqlikda turuvchi nuqtalar to'plamidan iborat deb qaradik. Endi tekislikda ixtiyoriy M (x; *y;z)* nuqtani (o'zgaruvchi nuqtani) olaylik. Ravshanki, M (x; *y; z)* nuqtaning koordinatalari *x, y va z* lar turli qiymatlarni qabul qilganda, tekislikning nuqtalari hosil bo'ladi. Bu *M (x; y; z)* nuqta bilan berilgan $B_1(x_1;\ y_1,\ z_1)$ va $B_2(x_2;\ y_2,\ z_2)$ nuqtalar orasidagi masofani (5.1) formuladan foydalanib topamiz (40-chizma):



40- CHIZMA.

$B_1M = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$,

$B_2M = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$,

Shartga ko'ra $B_1M = B_2M$ bo'lishidan

$$\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2}$$

tenglik kelib chiqadi. Keyingi tenglikdan esa

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2$$

bo'lishini topamiz. Bu tenglikda hamma hadlarini chap tomonga o'tkazib, so'ng qisqa ko'paytirish formulasidan foydalansak quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$x^2 - 2x_1x + x_1^2 + y - 2y_1y + y_1^2 + z^2 - 2z_1z + z_1^2 - (x^2 - 2x_2x +$
$+ x_2^2 + y^2 - 2y_2y + y_2^2 + z^2 - 2z_2z + z_2^2) = 0.$

Undan

$-2x_1x + x_1^2 - 2y_1y + y_1^2 - 2z_1z + z_1^2 + 2x_2x - x_2^2 - 2y_2y - y_2^2 + 2z_2z - z_2^2 = 0,$

ya'ni

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + 2(z_2 - z_1) + (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2) = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Agar

$$A = 2(x_2 - x_1),\ B = 2(y_2 - y_1),\ C = 2(z_2 - z_1),$$
$$D = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2$$

deb belgilasak, unda

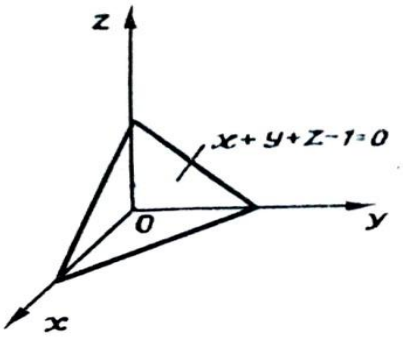
$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (7.1)$$

tenglamaga kelamiz. Bu x, y *va* z *ga* nisbatan birinchi darajali tenglamadir.

Demak, tekislikdagi ixtiyoriy M (x; $y;z$) nuqtaning x, y va z koordinatalari (7.1) tenglama bilan bog'langan bo'lar ekan. (7.1) tenglama *tekislikning umumiy tenglamasi* deb ataladi.

Tekislikning umumiy tenglamasi A, B, C, D sonlarga (koeffitsientlarga) bog'liq. Bu sonlar turli qiymatlarga teng bo'lganda turli tekisliklar hosil bo'ladi. Binobarin, tekislikning (fazodagi vaziyati ham shu koeffitsientlarga bog'liqdir.

M i s o l . $x + y + z - 1 = 0$ tenglama tekislikning umumiy tenglamasi bo'lib, uning fazodagi vaziyati 41-chizmada tasvirlangan.



41- CHIZMA.

Tekislikning umumiy tenglamasi:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (7.2)$$

berilgan bo'lsin. Bu tekislikning fazodagi vaziyatini o'rganamiz. Yuqorida aytib o'tganimizdek, tekislikning vaziyati A, B, C, D koeffitsientlarga bog'liq bo'ladi.

1°. (7.1) tekislik tenglamasida $D = 0$ bo'lsin. Bu holda (7.1) tenglama ushbu

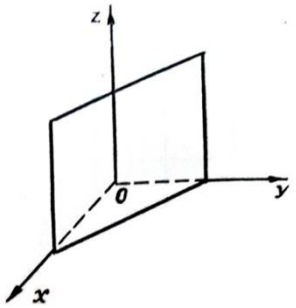
$$Ax + By + Cz = 0 \qquad (7.2)$$

ko'rinishga keladi. Bu tekislik koordinata boshidan (ya'ni 0(0; 0;0) nuqtadan) o'tadi. Chunki 0(0; 0; 0) nuqtaning koordinatalari (7.2) tenglamani qanoatlantiradi: $A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = 0$

2°. (7.1) tekislik tenglamasida $C = 0$ bo'lsin. Bu holda (7.1) tenglama ushbu

$$Ax + By + D = 0 \qquad (7.3)$$

ko'rinishga keladi. (7.3) tenglama Oz o'qiga parallel tekislikni ifodalaydi (42-chizma).

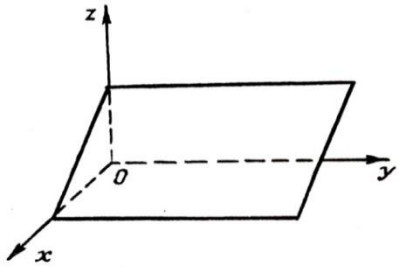


42- CHIZMA.

3°. (6.1) tekislik tenglamasida $B = 0$ bo'lsin. Bu holda (7.1) tenglama ushbu

$$Ax + Cz + D = 0 \qquad (7.4)$$

ko'rinishga keladi. (7.4) tenglama Oy o'qiga parallel tekislikni ifodalaydi (43-chizma).

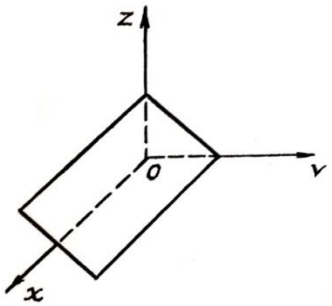


43- CHIZMA.

4°. (7.1) tekislik tenglamasida A = 0 bo'lsin. Bu holda (7.1) tenglama ushbu

$$By + Cz + D = 0 \qquad (7.5)$$

ko'rinishga keladi. (7.5) tenglama Ox o'qiga parallel bo'lgan tekislikni ifodalaydi



44- CHIZMA.

5°. (7.1) tekislik tenglamasida $C=D = 0$ bo'lsin. Bu holda tenglama ushbu

$$Ax + By = 0 \qquad (7.6)$$

ko'rinishga keladi. (7.6) tenglama Oz o'qidan o'tuvchi tekislikni ifodalaydi.

6°. (7.1) tekislik tenglamasida $B = D = 0$ bo'lsin. Bu holda (7.1) tenglama ushbu

$$Ax+ Cz = 0 \qquad (7.7)$$

ko'rinishga keladi. (7.7) tenglama Oy o'qidan o'tuvchi tekislikni ifodalaydi.

7°. (7.1) tekislik tenglamasida $A=D = 0$ bo'lsin. Bu holda tenglama ushbu

$$By + Cz = 0 \qquad (7.8)$$

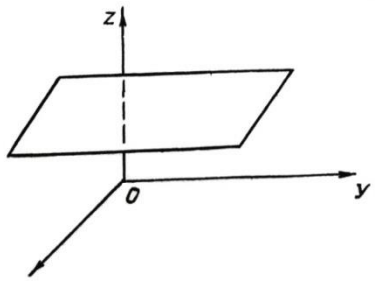
ko'rinishga keladi. (7.8) tenglama Ox o'qidan o'tuvchi tekislikni ifodalaydi.

8°. (7.1) tekislik tenglamasida $A = B = 0$ bo'lsin. Bu holda tenglama ushbu

$$Cz + D = 0 \qquad (7.9)$$

ko'rinishga keladi. (7.9) tenglamadan topamiz: $z = -\frac{D}{C}$ $(C \neq 0)$.

Demak, (7.9) tekislikning barcha nuqtalari *xOy* koordinata tekisligidan baravar uzoqlikda bo'ladi. (7.9) tenglama *xOz* tekislikka parallel bo'lgan tekislikni ifodalaydi. (45-chizma).



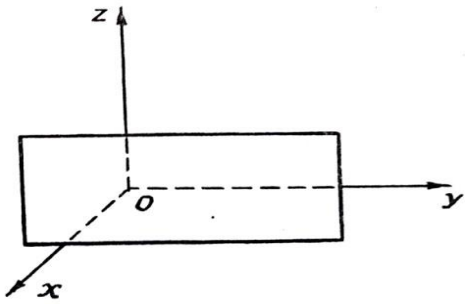
45- CHIZMA.

9°. (7.1) tekislik tenglamasida B = C = 0 bo'lsin. Bu holda (7.1) tenglama ushbu

$$Ax + D = 0 \qquad (7.10)$$

ko'rininshga keladi. (7.10) tenglamadan topamiz: $x = -\frac{D}{C}$ (A≠0).

Demak, (7.10) tekislikning barcha nuqtalari *yOz* koordinata tekisligidan baravar uzoqlikda bo'ladi. (7.10) tenglama *yOz* tekislikka parallel bo'lgan tekislikni ifodalaydi (46- chizma).



46- CHIZMA.

10°, (7.1) tekislik tenglamasida $A = C = 0$ bo'lsin. Bu holda (7.1) tenglama ushbu

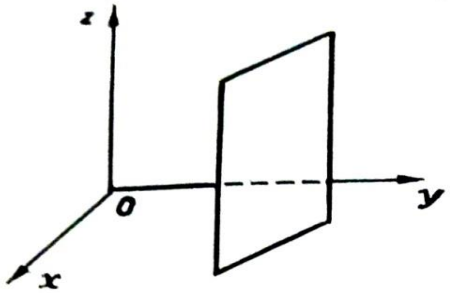
$$By + D = 0 \qquad (7.11)$$

ko'rinishga keladi. (7.11) tenglamadan topamiz:

$$y = -\frac{D}{C} \quad (A \neq 0).$$

Demak, (7.11) tekislikning barcha nuqtalari *xOz* koordinata tekisligidan baravar uzoqlikda bo'ladi.

(7.11) tenglama *xOz* tekislikka parallel bo'lgan tekislikni ifodalaydi (47-chizma).



47- CHIZMA.

11°. (7.1)tekislik tenglamasida:

а) $B = C = D = 0$ bo'lganda $Ax = 0$, ya'ni $x = 0$,

б) $C = D = A = 0$ bo'lganda $By = 0$, ya'ni $y = 0$,

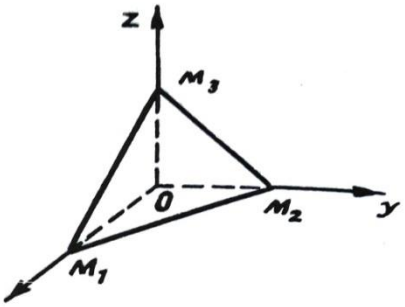
в) D = A = B = 0 bo'lganda Cz = 0, ya'ni z = 0 bo'lib (7.1) tenglma mos ravishda *yOz, xOz* va *xOy* koordinata tekisliklarini ifodalaydi.

2-§. Tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasi

Fazoda bir tekislik berilgan bo'lib, u koordinata o'qlari *Ox, Oy* va *Oz* lar bilan mos ravishda M_1, M_2, M_3 nuqtalarda kesishib, ulardan ajratgan kesmalari

$$OM_1 = a, \quad OM_2 = b, \quad OM_3 = c$$

ga teng bo'lsin. (48-chizma).



48- CHIZMA.

Bu berilgan *a, b* va *c* sonlar (kesmalar uzunliklari) yordamida fazodagi tekislik vaziyatini to'liq aniqlash mumkin. Aytaylik, qaralayotgan tekislikning tenglamasi

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (7.1)$$

bo'lsin. Modomiki bu tekislik $M_1(a; 0; 0)$, $M_2(0; b; 0)$ va $M_3(0; 0; c)$ nuqtalardan o'tar ekan demak bu nuqtalarning koordinatalari (7.1)tenglamani qanoatlantiradi:

$$A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0,$$
$$A \cdot 0 + B \cdot b + C \cdot 0 + D = 0,$$
$$A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot c + D = 0.$$

Demak,

$$Aa + D = 0, \quad Bb + D = 0, \quad Cc + D = 0.$$

Bu tengliklardan

$$A = -\frac{D}{a}. \quad B = -\frac{D}{b}. \quad C = x = -\frac{D}{c}.$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu topilgan *A, B, C* larning qiymatlarini (7.1) tenglamadagi *A, B, C* larning o'rniga qo'yamiz:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow -\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -D\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + 1.$$

Natijada

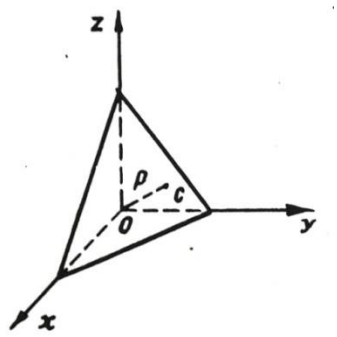
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (7.12)$$

tenglamaga kelamiz. Bu tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasidir.

3-§. Tekislikning normal tenglamasi

Fazoda tekislikning vaziyatini boshqacha ham aniqlash mumkin.

Fazoda Dekart koordinatalar tekisligiga nisbatan biror tekislikni qaraylik. Bu tekislik 49-chizmada tasvirlanganidek bo'lsin.



49- CHIZMA.

Koordinata boshidan tekislikka tushirilgan perpendikulyar uzunligi *p* va shu perpendikulyarning *Ox, Oy* va *Oz* o'qlarning musbat yo'nalishlari bilan tashkil etgan burchaklari mos ravishda α, β va γ bo'lsin.

Berilgan *p* va α, β, γ laryordamida tekislikning fazodagi vaziyati to'liq aniqlanadi. Tekislikning tenglamasi esa

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos\gamma - p = 1 \qquad (7.13)$$

bo'lib, bunda

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - p = 0$$

bo'ladi (tekislikning bu tenglamasini keltirib chiqarish tekislikning normal tenglamasini keltirib chiqarish kabidir), Odatda, (7.13) tenglama tekislikning *normal tenglamasi* deb ataladi.

Endi tekislikning umumiy tenglamasini normal ko'rininsdagi tenglamaga keltirilishini ko'rsatamiz.

Fazoda biror tekislik berilgan bo'lib,,

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (7.1)$$

uning umumiy tenglamasi,

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos\gamma - p = 1 \qquad (7.13)$$

esa shutekislikning normal tenglamasi bo'lsin.Bu tenglamalar bitta tekislikni aniqlaganligi sababli, ularning koeffitsientlari proporsional bo'ladi. Demak,

$$\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = 0$$

tenglama (7.13) tenglama bilan bir xil bo'ladi:

$$\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos\gamma - p.$$

Bundan esa

$$\mu Ax = \cos \alpha, \qquad \mu By = \cos \beta, \qquad \mu C = \cos \gamma, \quad \mu D = - p$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Natijada

$$\mu^2 A^2 + \mu^2 B^2 + \mu^2 C^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

bo'ladi. Demak,

$$\mu^2A^2 + \mu^2B^2 + \mu^2C^2 = 1$$

Bu tenglikdan esa

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, tekislikning umumiy tenglamasini

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (7.1)$$

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

ga ko'paytirish natijasida bu tenglama normal ko'rininshdagi tenglamaga kelar ekan.

μ *normallovchi ko'paytuvchi* deyilib, uning ishorasi (7.1)tenglamadagi D ning ishorasiga teskari qilib olinadi.

M i s o l. Tekislikning umumiy tenglamasi $4x + 3y — 7z+ 15 = 0$ni normal ko'rinishdagi tenglamaga keltirilsin.

Y e ch i sh. Avvalo normallovchi ko'paytuvchini topamiz:

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{1}{-\sqrt{4^2+3^2+(-7^2)}} = \frac{1}{-\sqrt{16+9+49}} = \frac{1}{\sqrt{74}}.$$

Berilgan tenglamaning har ikki tomonini $\mu = \frac{1}{\sqrt{74}}$ ga ko'paytirib, ushbu

$$-\frac{1}{\sqrt{74}}x - \frac{3}{\sqrt{74}}y + \frac{7}{\sqrt{74}}z - \frac{15}{\sqrt{74}} = 0$$

tenglamaga kelamiz. Bu tekislikning normal tenglamasidir. Bu yerda

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{74}}, \quad \cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{74}}, \quad \cos\gamma\frac{7}{\sqrt{74}}, \quad p = \frac{15}{\sqrt{74}}$$

bo'ladi.

4-§. Berilgan nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi

Fazoda biror $M\ (x_1, y_1, z_1)$ nuqta berilgan bo'lsin. Shu nuqtadan o'tuvchitekislik tenglamasini toppish talab etilsin. Tekislik tenglamasini ushbu

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (7.1)$$

ko'rinishda izlaymiz. Modomiki, bu tekislik berilgan M (x_1, y_1, z_1) nuqtadan o'tar ekan unda shu nuqtaning x_1 , y_1 va z_1 koordinatalari (7.1)tenglamani qanoatlantiradi:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \qquad (7.14)$$

Yuqoridagi (6.1) tenglamadan (7.14)tenglamani hadlab ayirib:

$$Ax + By + Cz + D - (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) = 0$$

quyidagi

$$A(x-x_1)+ B (y - y_1) + C (z - z_1) = 0 \qquad (7.15)$$

tenglamaga kelamiz. Bu berilgan M (x_1, y_1, z_1) nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasidir.

M i s o l. *M* (2; 4; 6)nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi topilsin.

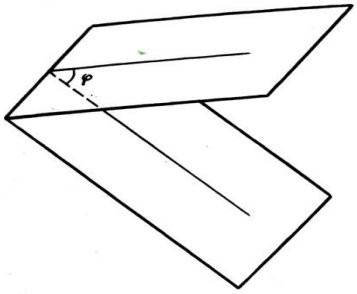
Y e ch i sh. Yuqoridagi (7.15) formulag ko'ra *M* (2; 4; 6) nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi ushbu

$$A (x — 2) + B (y — 4) + C (z —6) = 0$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu tenglama *A, B* va *C* larning qiymatlariga bog'liq. Ularning turli qiymatlarida *M* (2; 4; 6)nuqtadan o'tuvchi turli tekisliklar hosil bo'ladi.

5-§. Ikki tekislik orasidagi burchak.

Fazoda ikki tekislik berilgan bo'lsin. Bu tekisliklardan hosil bo'lgan ixtiyoriy ikki yoqli burchak berilgan *tekisliklar orasidagi burchak* deb ataladi. (50-chizma).



50-chizma

Faraz qilaylik, aytilgan tekisliklardan birining tenglamsi

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1 = 0,$$

ikkinchisinning tenglamasi esa

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D_2 = 0$$

bo'lsin. Bu tekisliklar orasidagi burchak φ ushbu

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (7.16)$$

formula bilan topiladi.

(7.16) formuladan foydalanib ikki tekislikning parallelhamda perpendikulyarlik bo'lishi shartlarini topish mumkin. Masalan, ikki tekislik orasidagi burchak φ = 90° bo'lsin.Bu holda tekisliklar o'zaro perpendikulyar

bo'ladi.

Ravshanki,, φ = 90°da

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \Rightarrow \cos 90^\circ = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = 0 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Demak, $$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (7.17)$$

tenglik ikki tekislikning perpendikulyarlik shartidir. Shuningdek, ko'rsatish mumkinki,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (7.18)$$

Tengliklar ikki tekislikning parallelik shartini ifodalaydi.

M i s o l l a r. 1. *2x — 3y + 5z + 7 = 0, 6x — 9y + 15z + 21 =0* tekisliklar o'zaro paralleldir, chunki ular uchun (7.18) shart bajariladi:

$$\frac{2}{6} = \frac{-3}{-9} = \frac{5}{15}.$$

2. *2x + y — 5z + 4 — 0, 3x + 4y + 2z — 1 = 0*tekisliklar o'zaro perpendikulyar bo'ladi, chunki ular uchun (7.17) shart bajariladi:

$$2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + (-5) \cdot 2 = 0.$$

3. *2x - y + 4z + 2 = 0, x + 2y —z + 1 = 0* ikki tekislik orasidagi burchak topilsin.

Yuqorida keltirilgan formulga ko'ra izlanayotgan φ burchakning kosinusi

$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1)}{\sqrt{4+1+16} \cdot \sqrt{1+4+1}} = -\frac{0}{\sqrt{126}} = 0$$

bo'ladi. Demak, φ = $\frac{\pi}{2}$.

6-§. Berilgan nuqtadan berilgan tekislikkacha bo'lgan masofa

Fazoda $M(x_1, y_1, z_1)$nuqta va biror tekislik berilgan bo'lsin. Qaralayotgan tekislikning normal ko'rinishdagi tenglamsi

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 1 \qquad (7.13)$$

ga ega bo'laylik.

Agar berilgan nuqtadan shu tekislikkacha bo'lgan masofani d desak, u quyidagi

$$d = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p = 1 \qquad (7.19)$$

tenglikdan topiladi.

Agar tekislik umumiy tenglamasi

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (7.1)$$

bilan berilgan bo'lsa, avvalo bu tenglamani normal ko'rinishdagi tenglamaga keltiriladi. Buning uchun normallovchi ko'paytuvchi

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ni topib olinib, berilgan tenglamani normal ko'rinishga keltiriladi:

$$\mu\,(Ax + By + Cz + D) = 0 \Rightarrow \frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0.$$

So'ng *x, y* va *z* lar o'rniga $M(x_1, y_1, z_1)$ nuqtaning koordinatalarini qo'yamiz. Natijada

$$d = \pm\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (7.20)$$

bo'ladi.

M i s o l. Berilgan $M(3; 0; 1)$ nuqtadan ushbu $x—2y + z– 1 = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofa topilsin.

Y e ch i sh. Ravshanki, bu holda $A = 1, B = — 2, C = 1, D = — 1, x_1 = 3, y_1 = 0, z_1 = 1$ bo'ladi. Yuqoridagi (7.20) formulaga ko'ra

$$d = \frac{1\cdot 3 + (-2)\cdot 0 + 1\cdot 1 - 1}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

bo'ladi.

Mavzu bo'yicha tekshirish uchun savollar:

1. Tekislik tenglamasi Ax – By + Cx + D = 0 bo'lsa, koordinatalar sistemasiga nisbatan quyidagi hollarda qanday joylashadi?
   a) D=0; b) A=0; c) A=0, B=0; d) A=0, B=0, D=0; e) A=0, D=0.
2. Tekislik tenglamasini yozing?
3. Nuqtadan tekislikgacha bo'lgan masofani toppish formulasini yozing?
4. Ikki parallel tekislik orasidagi masofani toppish formulasini yozing?
5. Tekisliklarning parallellik va perpendukulyarlik shartlari qanday?
6. Ikki tekislik orasidagi burchak toppish formulasini yozing?
7. To'g'ri chiziq va tekislikning kesilishish nuqtasi qanday topiladi?

Kalit suzlar

Tekislik, masofa, parallellik, perpendukulyarlik, ikki tekislik orasidagi burchak, kesishish nuqtasi.

Xulosa

Tekislikning umumiy sakldagi tenglamasi va uning xususiy hollari, nuqta-dan tekislikgacha bo'lgan masofa, ikki parallel tekislik orasidagi eng qisqa masofani toppish, ikki tekislik orasidagi burchak va teksliklarning parallellik, perpendukulyarlik shartlari, to'g'ri chiziq va tekislikning kesilishish nuqtasini toppish masalalari o'rganilgan.

VIII BOB. **IKKINCHI TARTIBLI SIRTLAR**

Ma'lumki, fazoda tekislik *x, y* va *z* o'zgaruvchilarga nisbatan birinchi darajali

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

tenglama bilan analitik ifodalanadi.

Endi fazoda ikkinchi tartibli sirtlarning (ma'lum ko'rininshdagi sirtlarning) analitik ifodalarini keltiramiz[2].

Ikkinchi tartibli sirtlar *x, y* ва *z* o'zgaruvchilarga nisbatan ikkinchi darajali tenglamalar bilan ifodalanadi.Ikkinchi darajali tenglamaning umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

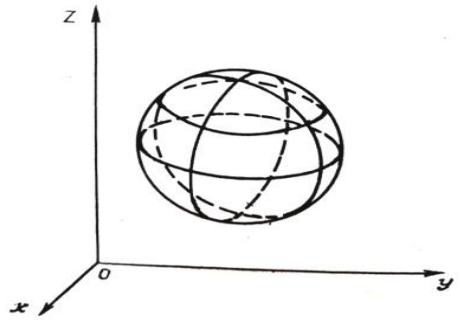
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + T = 0 \qquad (8.1)$$

Odatda (8.1) tenglama *ikkinchi tartibli sirtning umumiy tenglamasi* deb ataladi.

Ushbu bobda sodda ko'rinishdagi ikkinchi tartibli sirtlardan, ellipsoid, giperboloid hamda paraboloidlar haqida qisqacha ma'lumotlarni keltiramiz.

1-§. Sfera va uning tenglamasi

Fazoda biror *A (a; b; c)* nuqta berilgan bo'lsin. *A (a; b; c)* nuqtadan baravar uzoqlikda turgan nuqtalar to'plami (nuqtalarning geometric o'rni) *sfera* deb ataladi (51-chizma).



51-chizma

Sferada ixtiyoriy nuqta olaylik. Uni *B (x; y; z)* bilan belgilaylik.

Endi sferaning tenglamasini topamiz. Sfera ta'rifiga ko'ra *AB* masofa o'zgarmas. Uni *R* bilan belgilaylik: *AB = R*. Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasi (6.1) ga ko'ra

$$AB = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

bo'ladi. Demak,

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R.$$

Bu tenglikning har ikki tomonini kvadratga ko'tarib, quyidagi

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \qquad (8.2)$$

Tenglamaga kelamiz .Bu sferaning tenglamasi bo'ladi.

A (a; b; c) nuqta*sfera markazi*, *R* esa *sfera radiusi* deyiladi.

Xususan, sfera markazi koordinata markazi *O(0; 0; 0)*nuqtada bo'lsa, uning tenglamasi ushbu

$$x^2 + y^2 + c^2 = R^2 \qquad (8.3)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Sfera bilan tekislik (agar ular kesishsa) aylana bo'yicha kesishadiBu aylana tenglamasi sfera bilan tekislik tenglamalarini birgalikda yechishda hosil bo'ladi.

M i s o l. Markazi *A (1; 2, 3)* nuqtada, radiusi *R = 2* bo'lgan sfera tenglamasi topilsin.

Y e ch i sh. Yuqorida keltirilgan (8.2) formuladan foydalanib izlanayotgan tenglamasini topamiz:

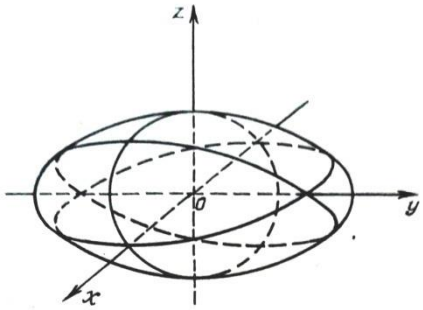
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2^2.$$

2- §. Ellipsoid

Ellipsoidning tenglamasi ushbu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (8.4)$$

ko'rinishda bo'lib, uning geometrik tasviri 52-chizmada keltirilgan. *a, b, c* lar *ellipsoidning yarim o'qlari* deyiladi.



52-chizma

(8.4) ellipsoid bilan *xOy* tekislikning kesishishidan hosil bo'lgan chiziqni topish uchun ellipsoid tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

bilan *xOy* tekislik tenglamasi

$$z = 0$$

larni birgalikda ko'ramiz:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.\\ z=0.\end{cases}$$

Natijada

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (8.5)$$

tenglamaga kelamiz. Bu esa yarim o'qlari *a* va *b* bo'lgan ellipsni ifodalaydi.

Shunday qilib, *xOy* tekislik ellipsoidni (8.5) ellips bo'yicha kesar ekan.

Xuddi shunga o'xshish ko'rsatish mumkinki, *xOz* tekislik ellipsoidni ushbu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Ellips boyicha, *yOz* tekislik esa ellipsoidni quyidagi

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

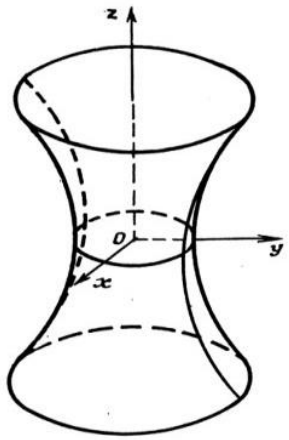
Ellips bo'yicha kesadi.

3-§. Giperboloidlar

Giperboloidlar ikki xil bo'ladi. Ushbu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (8.6)$$

ko'rinishdagi tenglama *bir pallali giperboloidning tenglamasi* bo'ladi. Bu giperboloid 53-chizmada tasvirlangan.

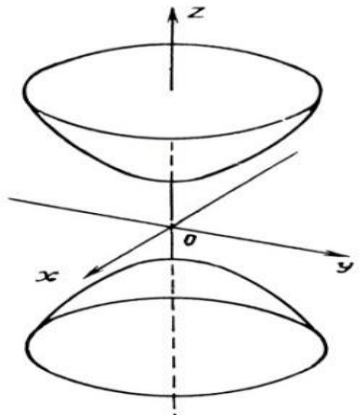


53-chizma

Quyidagi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0 \qquad (8.7)$$

ko'rinishdagi tenglama *ikki pallali giperboloidning tenglamasi* bo'ladi. Bu giperboloid 54-chizmada tasvirlangan.



54-chizma

Bir pallali giperboloid koordinata tekisliklariga hamda koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashgan bo'ladi (53-chizma).

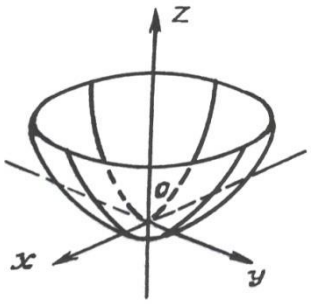
Ikki pallali giperboloid ham koordinata tekisliklariga hamda koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashgan bo'ladi. (54- chizma).

4-§. Paraboloidlar

Ushbu

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \qquad (8.8)$$

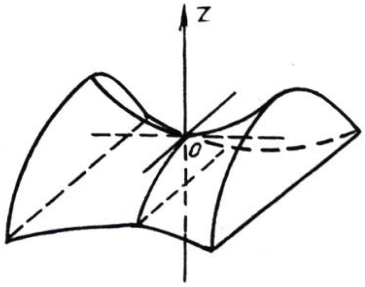
ko'rinishdagi tenglama *elliptik paraboloidning tenglamasi* bo'ladi. Bu elliptik paraboloid 55-chizmada tasvirlangan.



55-chizma

Quyidagi $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

ko'rinishdagi tenglama *giperbolik paraboloidning tenglamasi* bo'ladi. Bu giperbolik paraboloid 56-chizmada tasvirlangan.



56-chizma

Yuqorida keltirilgan paraboloidlar *xOz* hamda *yOz* tekisliklariga nisbatan simetrik joylashgan bo'ladi.

Mavzu bo'yicha tekshirish uchun savollar:

1. Ikkinchi tartibli sirtlarga sfera, ellipsoid, giperboloid hamda paraboloidlarga ta'rif berib, formulalarini yozing?
2. Ikkinchi tartibli sirtlarni ellipsoid, giperboloid hamda paraboloidlarni shakillarini chizing?

Kalit suzlar

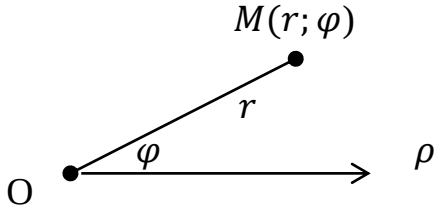
Sirt, sfera, ellipsoid, giperboloid, paraboloid.

Xulosa

Ikkinchi tartibli sirtlar sfera, ellipsoid, giperboloid hamda paraboloidlarning sodda tenglamalari tuzilib, muhim xarakterli xususiyatlari o'rganilgan va ularning shakillari chizilgan.

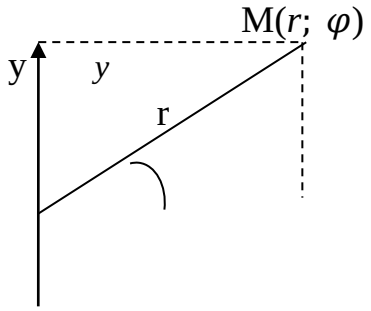
5- §. Qutb koordinatalar sistemasi

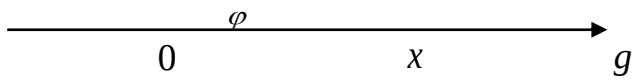
O'tgan boblarda tekislikda, berilgan nuqtaning joylashin vaziyatini aniqlashda, to'g'ri burchakli Dekart koorinatalar sistemasidan foydalandik. Amaliy masalalarni yechishda qo'llanadigan qutib koordinatalar sistemasi quyidagicha aniqlanadi: qutb boshi O nuqta va shu nuqtadan chiquvchi Ox = ρ nur orqali aniqlanuvch koordinatalar sistemasidir.Tekislikdagi har bir berilgan $M(r;\varphi)$ nuqta, qutb radiusi $r\ ya'ni,\ M(r;\varphi)$ nuqtadan qutb boshigacha bo'lgan masofa, hamda qutb o'qi bilan $OM = r\ \ bilan\ tashkel\ qilgan\ burchagi\ \varphi$ (soat strelkasiga teskari yunalishda tashkel qilgan burchagi) orqali bir qiymatli aniqlanadi:



Bu yerda O nuqta qutb boshi. $\varphi -$ soat strelkasiga qarama-qarshi yo'nalish bo'yicha olingan burchak.

Dekart va qutb koordinatalar sistemasi orasidagi bog'lanishni ko'rsatish uchun, OX o'qini qutb o'qi va 0(0;0) qutb boshi qilib olamiz. Natijada trigonometrik funktsiyalarni ta'rifiga asosan, quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:





$$Cos\varphi = \frac{x}{r}, \qquad Sin\varphi = \frac{y}{r} \quad \begin{cases} x = rCos\varphi \\ y = rSin\varphi \end{cases} \text{ yoki } x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (r > 0), \qquad tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

Dekart koordenatalar sistemasida murakkab formula bilan ifodalangan egri chiziqni, qutb koordinatalar sistemasiga sodda shakilda ifodalash mumkin. Integral hisobida ko'ramizki, Dekart koordenatalar sistemasida juda qiyin hisoblanadigan yoy uzunligi, figuralarning yuza va hajmlarini hisoblash masalalari qutb koordinatalar sistemasiga qiyinchiliksiz yechilishi mumkin.

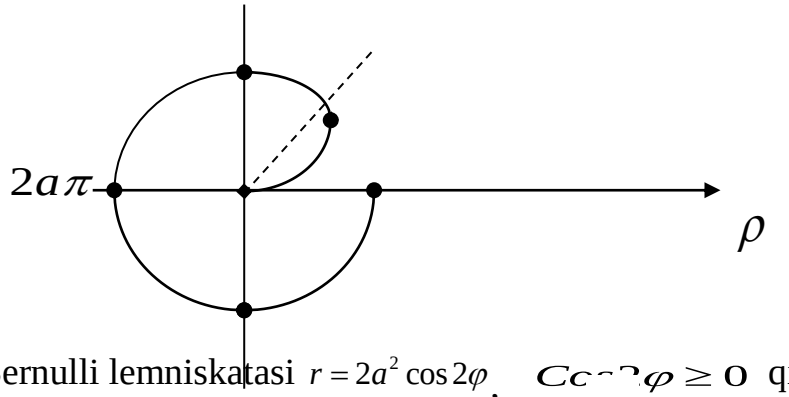
1-misol. Qutb koordinatalar sistemasida quyidagi chiziqlarni chizing.

a) $r = \alpha\varphi$ Arximed spirali;

b) $r = 2a^2 \cos 2\varphi$ Bernulli lemniskatasi.

Yechish. *a*) Arximed spiralini yasaymiz

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
r	0	$a\frac{\pi}{4}$	$\frac{a\pi}{2}$	$a\pi$	$\frac{3a\pi}{2}$	$2a\pi$



b) Bernulli lemniskatasi $r = 2a^2 \cos 2\varphi$, $Cos2\varphi \geq 0$ qiymatlarida aniqlanganda va $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \pi$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ larga nisbatan simmetrik bo'ladi, $a = 6$ bo'lsa

φ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
r	6	$3\sqrt[4]{12}$	$3\sqrt[4]{8}$	3	0

Mustaqil yechish uchun misollar

Qutb koordinatalar sistemasida quyidagi chiziqlarni chizing(Shakllarga qarang-450 bet).

1) $r=\frac{a}{\varphi}$, (Giperboloik spiral).

2) $r=a(1-Cos\varphi)$, (Kardoida).

3) $r=a(1+2Cos\varphi)$, (Paskal chig‘anog‘i).

4) $r=aSin3\varphi$, (Uch yaproqli gul).

5) $r=aSin2\varphi$, (To‘rt yaproqli gul).

Ushbu chiziqlarning tenglamalarini qutb koordinatalar sistemasida yozing ($x=rCos\varphi$, $y=rSin\varphi$ almashtirish yordamida)

1) $x^2-y^2=a^2$, 2) $x^2+y^2=a^2$ 3) $x^2+y^2=ax$

4) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 5) $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$

6) $x^4+y^4=a^2xy$

Ushbu chiziqlarning tenglamalarini Dekart koordinatalar sistemasida yozing. ($r=\sqrt{x^2+y^2}$, $tg\varphi=\frac{y}{x}$ almashtirish bilan)

7) $rCos\varphi=a$, 8) $r=2aSin\varphi$, 9) $r^2Sin2\varphi=2a^2$, 10) $r=a(1+Cos\varphi)$

Mavzu bo’yicha tekshirish uchun savollar:

1. Qutib koordinatalar sistemasi haqida tushuncha bering.
2. Dekart va qutub koordinatalari sistemasi qanday bog’lanishga ega.
3. Arximed spirali, Bernulli lemniskatasi, kardoida va boshqalarni shakillarini chizib formulalarini yozing?

Kalit suzlar

Qutib, Sirt, sfera, ellipsoid, giperboloid, paraboloid.

Xulosa

Arximed spirali, Bernulli lemniskatasi, kardoida va boshqa muhim chiziqlarning qutib koordinatalar sistemasida tenglamalari yozilib, shakllari chizilgan.

IX BOB. **CHIZIQLI VA VEKTORLAR ALGEBRASINING BOSHLANG'ICH TUSHUNCHALARI**

1-§ Chiziqli algebraning asosiy tushunchalari.

Matematikaning ko'pgina masalalari chiziqli tenglamalar sistemasi va ularni yechish bilan bog'langandir. Ikki to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasini topish, chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga kelganligi bunga dalildir.

Biz quyida sodda chiziqli tenglamalar sistemasi va ularni yechish bilan shug'ullanamiz. Bunday sistemani yechishda determinantlar tushunchasi muhim rol o'ynaydi. Shu sababli avvalo determinant tushunchasi bilan tanishamiz.

2-§ Determinantlarni hisoblash qoidalari va xossalari

1.Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar va ularning xossalari. Faraz qilaylik, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin. Bu sonlar yordami-da ushbu a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} miqdorni tuzamiz. Bu son *ikkinchi tartibli determinant* deb ataladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Demak,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}. \qquad (9.1)$$

a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} sonlar determinantnig elementlari deyiladi. *a_{11}, a_{12},— determinantnig birinchi satri. a_{21}, a_{22} –ikkinchi satri. a_{11}, a_{21}, -determinantnig birinchi ustuni, a_{12}, a_{22} – ikkinchi ustuni deyiladi. a_{11}, a_{22}, (9.1) determinantning bosh dioganali deyiladi*, *a_{12}, a_{21} esa ikkinchi dioganali* deyiladi.

Misollar

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 6 \cdot 3 = 16 - 18 = -2.$

2. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-8) - 2 \cdot 4 = 8 - 8 = 0.$

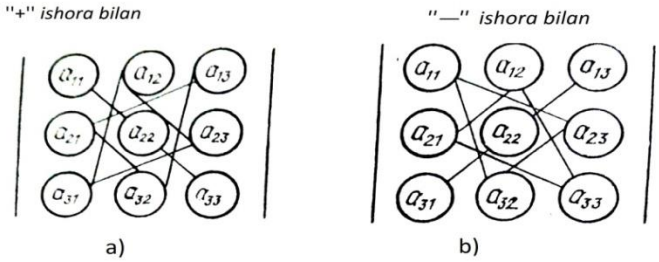
Uchinchi tartibli determinantlar quyidagicha:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu yerdagi a_{ij} (i=1,2,3, j=1,2,3) sonlardan iborat bo‘lib, determinantning elementlari deyiladi. Uchinchi tartibli determinantda 3 ta satr va 3 ta ustun bo‘lib, jami 9 ta elementdan iborat bo‘ladi.

Uchinchi tartibli determinantlarni hisoblashda uchburchak, Sarrius, yoyib yozish usullari mavjud.

1) Uchburchak qoidasi. Uchinchi tartibli determinantlar uchburchak qoidasi bo‘yicha quyidagi hisoblanadi:



56 a, b-chizma

Demak, uchinchi tartibli determinant 6 ta haddan iborat bo’lib, ularning 3 tasi «+» ishora bilan; uchtasi esa «—» ishora bilan olinadi. Hadlarning qanday ishora bilan olinish sxemasi 56 a, b-chizmada ko’rsatilgan

Demak, musbat ishora bilan bosh dioganal va uni kesib o’tuvchi uchburchaklarning uchlaridagi elementlar ko’paytmasining yig’indisi olinadi:

$$a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23} a_{31} + a_{21}\, a_{32}\, a_{11}.$$

Manfiy ishora bilan ikinchi dioganal va uni kesib o’tuvchi uchburchaklarning elementlari ko’paytmasi olinadi:

$$a_{31}\, a_{22}\, a_{13} + a_{21}\, a_{12} a_{33} + a_{11}\, a_{23}\, a_{23}.$$

Natijada uchinchi tartibli determinant uchburchak qoidasi bo’yicha quyidagicha hisoblanadi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

M i s o l-1. Ushbu uchinchi tartibli determinant hisoblansin:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix}.$$

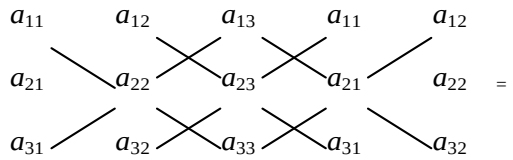
Yuqorida keltirilgan uchburchak qoidasi bo‘yicha determinantni qiymatini

hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 7 + 3 \cdot (-5) \cdot 1 + (-3)\,(-1)6 - 6 \cdot 2 \cdot 1 - 4 \cdot (-5) \cdot (-1) - (-3) \cdot 3 \cdot 7 =$$

$$= 56 - 15 + 18 - 12 - 20 + 63 = 90.$$

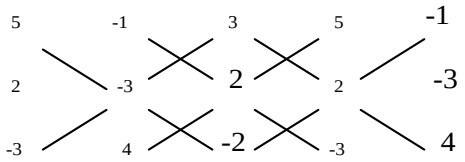
2) **Sarrius usuli**



$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

bu yerda tutashtirilgan elementlar o'zaro ko'paytirilib, asosiy diagonalga parallel tutashtirilganlari alohida qo'shilib «+» ishora bilan, yon diagonalga parallel tutashtirilganlari alohida qo'shilib «-» ishora bilan olinib, natijalar qo'shiladi.

Misol-2.



Biz yuqorida ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar tushunchasi bilan tanishdik. Xuddi shunga o'xshash n- tartibli (n>2) determinantlar tushunchasini kiritish mumkin. n ta satr va n ta ustundan tashkil topgan quyidagi determinantgan n- tartibli determinant deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Minorlar va algebraik to'ldiruvchilar. *n*-tartibli determinantning ixtiyoriy *r*-ta satr va *r*-ta ustunlaridan ($1 \le r \le n$) tuzilgan M determinantga *r*-tartibli minor deyiladi. a_{ij} –elementga mos algebraik to'ldiruvchi quyidagicha aniqlanadi

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Determenantni ixtiyoriy satr(ustun) elementlari bo'yicha(Laplas teoremasi) yoyib yozish mumkin. Masalan, n-tartibli determenantni i satr bo'yicha yoyilmasi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

3) **Yoyib yozish usuli.** Determinantni yuqorida keltirilgan ixtiyoriy satr(ustun) bo'yicha yoyib yozish qoidasidan foydalanib uchinchi tartibli determinantni birinchi satr elementlari bo'yicha yoysak, quyidagicha bo'ladi.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Misol-3. Ushbu determinantni yoyib yozish usuli bilan hisoblang.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

=4(4-24)+2(20-12)+4(20-2)= -80+16+72 = 8.

Determinantning xossalari

Determinant qator xossalarga ega. Quyida ularni sanab o'tamiz.

1°. Determinantning satrlarini mos ustunlari bilan almashtirish natijasida uning qiymati o'zgarmaydi.

2°. Determinantning biror satri (yoki ustuni)dagi barcha elementlar nolga teng bo'lsa,determinantning qiymati nolga teng bo'ladi.

3°. Determinantning ikki satrini (yoki ikki ustunini) o'zaro almashtirish natijasida uning absolyut qiymati o'zgarmaydi,ishorasi esa teskarisiga o'zgaradi.

4° Determinantning ikki satri yoki ikki ustuni bir hil bo'lsa yoki proporsional bo'lsa, determinantning qiymati nolga teng bo'ladi.

5°. Determinantning biror satridagi (yoki biror ustunidagi) barcha elementlarini o'zgarmas songa ko'paytirilsa,determinantning qiymati shu songa ko'payadi.

6°. Agar determinantning biror satrini (yoki biror ustunini) barcha elementlarini o'zgarmas noldan farqli songa ko'paytirib, determinantning boshqa satriga (yoki ustuniga) qo'shsak determinantning qiymati o'zgarmaydi.

Bu xossalardan determinantni hisoblashda foydalaniladi.

M i s o l l a r: Quyidagi determinantlarni xossalaridan hisoblanib hisoblaymiz.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 9 & 12 & 18 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3\cdot 3 & 4\cdot 3 & 6\cdot 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$3[1\cdot 4\cdot 1 + 3\cdot 6\cdot 2 + 3\cdot 0\cdot 5 - 5\cdot 4\cdot 2 - 6\cdot 0\cdot 1 - 3\cdot 3\cdot 1] =$$

$$= 3(4 + 36 + 0 - 40 - 0 - 9) = 3(-9) = -27.$$

2) $$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} == 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3-§. Chiziqli tenglamalar sistemasi. Kramer usuli

Ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \qquad (9.2)$$

Sistema *ikki noma'lum ikkita chiziqli tenglama sistemasi* deb ataladi, bunda a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} sonlar tenglamalar sistemasining *koeffitsientlari* b_1, b_2 sonlar esa *ozod hadlar* deyiladi.

(9.2) tenglamalar sistemasining koeffitsientlaridan ushbu

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (9.3)$$

determinantni tuzamiz. So'ng (8.3)determinantning birinchi ustunidagi elementlarni (9.2) sistemaning ozod hadlari bilan almashtirib, quyidagi determinantni

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (9.4)$$

Determinantni, ikkinchi ustunidagi elementlarni ozod hadlar bilan almashtirib quyidagi

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \qquad (9.5)$$

determinantni hosil qilamiz.

9. 1 – t e o r e m a. *1) Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, u holda (9.2) tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'lib, bu yechimlar*

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

2) Agar $\Delta = 0$ bo'lib, $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$ bo'lsa, (9.2) sistemaning yechimi mavjud bo'lmaydi;

3)Agar $\Delta = 0$ bo'lib, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$ bo'lsa, u holda (9.2) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

Misol. Ushbu ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglama sistemasi yechilsin:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1, \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}.$$

Bu sistema uchun yuqoridagi (9.3), (9.4) va (9.5) determinantlarni tuzamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - (-5) \cdot 4 = 9 + 20 = 29;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 11 \cdot (-5) = 3 + 55 = 58;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = 3 \cdot 11 - 1 \cdot 4 = 33 - 4 = 29.$$

9.1-teoremadan foydalanib, berilgan sistemaning yechimini topamiz:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{58}{29} = 2, \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{29}{29} = 1.$$

Ushbu

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{aligned}\right\} \qquad (9.6)$$

Sistema *uch nomalumli uchta chiziqli tenglama sistemasi* deb ataladi, bunda a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33} sonlar tenglamalar sistemasining *koeffitsientlari* b_1, b_2, b_3 sonlar esa *ozod hadlari* deb ataladi.

Bu tenglamalar sistemasi ham yuqoridagidek yechiladi. Avvalo quyidagi uchinchi tartibli determinantlar tuziladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{22} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (9.7)$$

9. 2 – t e o r e m a. 1) *Agar* $\Delta \neq 0$ *bo'lsa, (9.6) tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega va bu yechim*

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \qquad (9.8)$$

bo'ladi. 2) Agar $\Delta = 0$ *bo'lib,* $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$, $\Delta_z \neq 0$ *bo'lsa, (9.6) sistemaning yechimi mavjud bo'lmaydi. Agar* $\Delta = 0$ *bo'lib,* $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, $\Delta_z = 0$ *bo'lsa, u holda (9.6) sistemasi cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.*

Misol. Ushbu sistema yechilsin:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -5, \\ x + 2y - 4z = -9, \\ 5x - 4y + 6z = 5. \end{cases}$$

Bu sistema uchun yuqoridagi (9.7) determinantlarni tuzamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 4 + 60 - 10 - 32 + 18 = 56;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -9 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix} = -60 + 36 + 60 - 10 - 162 + 80 = 116 - 172 = -56;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & -9 & -4 \\ 5 & -5 & 6 \end{vmatrix} = -108 + 100 + 5 + 45 + 30 + 40 = 220 - 108 = 112;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & -9 \\ 5 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 20 + 135 + 50 + 15 - 72 = 240 - 72 = 168.$$

Berilgan tenglamalar sistemasining yechimi (9.8) asosan quyidagicha bo'ladi:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-56}{56}=-1,\ y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{112}{56}=2,\ z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{168}{56}=3.$$

4-§ Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish

Chiziqli tenglamalar sistemasini $n \geq 4$ bo‘lganda, Kramyer usuli bilan yechish qiyinlashadi. Bunday hollarda, chiziqli tenglamalar sistemasini Gaussning ketma – ket noma’lumni yo‘qotish usuli bilan yechish mumkin.

Bizga n-ta noma’lumli, n-ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ..... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (9.9)$$

Faraz qilaylik x_1 noma’lumning koeffisienti $a_{11}\neq 0$ bo’lsin. (9.9) tenglamalar sistemasini birinchi tenglamasini a_{11} ga bo’lib,berilgan tenglamalar sistemasiga teng kuchli bo’lgan quyidagi sistemaga ega bo’lamiz

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_1}{a_{11}} \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (9.10)$$

Hosil bo’lgan birinchi tenglamani a_{21} ga ko’paytirib ikkinchi tenglamadan ayiramiz,birinchi tenhlamani a_{13} ga ko’paytirib uchinchi tenglamadan ayiramiz va hokozo.Birinchi tenglamani a_{n1} ga ko’paytirib oxirgi tenglamadan ayiramiz,natijada quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo’ladi:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}{}'x_2 + \cdots + a_{1n}{}'x_n = b_1{}' \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b_2{}' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a'_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}{}'x_n = b_n{}' \end{cases} \qquad (9.11)$$

$a_{22}{}' \neq 0$ deb, ikkinchi tenglamani barcha x_1 larini $a_{22}{}'$ ga bo’lamiz va yuqoridagidek ikkinchi tenglamani $a_{32}{}'$, keyin $a'_{42}\ \dots, \dots, \dots, .. a_{n2}{}'$ ga ko’paytirib mos ravishda hosil bo’lgan tenglamalarni uchinchi,to’rtinchi va hokozo n tenlamani ayiramiz. Bu

jarayon barcha tenglamalar sistemasi quyidagicha uch burchak holga keltirilguncha davom ettiriladi:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = B_1 \\ \quad x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = B_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \qquad\qquad x_n = B_n \end{cases} \qquad (9.12)$$

Oxirgi tenglamadan $x_n = B_n$ ni topib, (n-1) tenglamaga qo'yilib x_{n-1} topiladi, ...Birinchi tenglamaga $x_2, x_3, \dots\dots, x_{n-1}$ qo'yilib x_1 hisoblanadi.

Agar (9.1) sistema elementar almashtirishlar yordamida (9.4) uch burchak holatga kelsa, tenglamalar sistemasi aniqlangan va **birgalikda** deyiladi,aks holda **birgalikda emas** deyiladi.

Misol. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching

Misol. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

Birinchi tenglamani mos ravishda 1 ga, -2 ga, -1ga ko‘paytirib ikkinchi uchinchi, to‘rtinchi tenglamalarga qo‘shamiz.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 1 \\ -3x_2 + 5x_3 + 11x_4 = 3 \\ 2x_2 + 7x_3 + 4x_4 = -1 \end{cases}$$

Ikkinchi tenglamani uchunchi teglamaga va ikkinchi tenglamani -2 ga to‘rtinchi tenglamani 3 ga ko‘paytirib qo‘shsak

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 1 \\ 3x_3 + 7x_4 = 4 \\ 25x_3 + 20x_4 = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 1 \\ 3x_3 + 7x_4 = 4 \\ 5x_3 + 4x_4 = -1 \end{cases}$$

Uchinchi tenglamani (-5) ga ko‘paytirib, to‘rtinchi tenglamani 3 ga ko‘paytirib qo‘shsak

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 1 \\ 3x_3 + 7x_4 = 4 \\ -23x_4 = -23 \end{cases}$$

oxirgi tenglamadan $x_4=1$ ni 3 - tenglamaga qo‘ysak $x_3 = -1$, ikkinchi tenglamadan $x_2=1$ va birinchi tenglamadan $x_1 = 1$ yechimi kelib chiqadi. Demak, chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda va uning yechimi (1; 1; -1; 1) .

Mavzu boyicha savollar :

1. Ikkinchi va uchunchi tartibli determinantlarni hisoblash qoidalari haqida ma’lumot bering?
2. Determinantlarni xossalarini ayting?
3. Uchta noma’lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi yozing.
4. Uchta noma’lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usuli bilan yechish qoidasini aytib bering ?
5. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish sxemasini tushuntiring ?

Kalit suzlar

Determinant, uchburchak, Sarrius, yoyib yozish usullari chiziqli, Kramer, tenglamalar sistemasi, Gauss.

Xulosa

Ko’pgina amaliy masalalar chiziqli tenglamalar sistemasini yechish bilan bog’langandir. Masalan ikki to’g’ri chiziqning kesishish nuqtasini topish, chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga kelganligini aytish mumkin.

Ikkinchi va uchunchi tartibli determinantlarni hisoblash qoidalari, xossalari, uchta noma’lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer, Gauss usuli bilan yechish usullari o’rganilgan.

5-§. Matritsa. Matritsalar ustida amallar. Teskari matritsani topish. Matritsaning rangi

Ushbu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}..... & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}..... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ko‘rinishda tuzilgan jadvalga matritsa deyiladi. Ushbu matritsadagi satrlar soni m, ustunlar soni n ga teng. Matritsada satrlar soni ustunlar soniga teng bo‘lishi shart emas, $\boldsymbol{a_{ij}}$ (i=1, 2,..., m, j=1,2, ..., n) sonlar matritsaning elementlari deyiladi. Agar m≠n bo‘lsa *to‘g‘ri burchakli matritsa* deyiladi. Aksincha, m = n bo‘lsa, kvadrat matritsa deyiladi. Ushbu ko‘rinishdagi

A=$(a_{11}, a_{12},...,a_{1n})$ 1 satrli n ustunli matritsani *satr matritsa* deyiladi, m satrli va 1 ustunli B=$\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \\ b_{m1} \end{pmatrix}$ matritsa *ustun matritsa* deyiladi. Bosh dioganalida turgan elimentlari 1 ga teng va boshqa barcha elimentlari 0 ga teng matritsa *birlik matritsa* deyiladi

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0..... & 0 \\ 0 & 1 & 0..... & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & 0..... & 1 \end{pmatrix}$$

A matritsani determinantini $|A|$ bilan belgilaymiz.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}..... & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}..... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Agar $|A|\neq 0$ bo‘lsa, u holda A matritsani *maxsusmas matritsa* deyiladi. Aksincha, $|A|=0$ bo‘lsa, A *maxsus matritsa* deyiladi.

A matritsadagi satrlarni mos ustunlar qilib yozish natijasida hosil bo‘lgan matritsani A^T *transponirlangan matritsa* deyiladi.

m satrli va n ustunli ikkita A va B matritsalardan birining har bir elementi ikkinchisining mos elementlariga teng $a_{ij}=b_{ij}$ bo‘lsa, bu matritsalar teng deyiladi va A=B ko‘rinishda yoziladi.

Matrisalar ustida amallar

a) *Matritsani songa ko‘paytirish.* Matritsani m soniga ko‘paytirish uchun uning barcha elementlarini shu m songa ko‘paytirish kerak, ya’ni A=(a_{ij}) bo‘lsa, mA=(ma_{ij}) bo‘ladi.

b) *Matritsalarni qo‘shish va ayirish.* m satrli va n ustunli ikkita (bir xil nxm tartibli) *A* va *B* matritsalarni qo‘shish (ayirish) uchun ularning mos elementlarini qo‘shish (ayirish) kerak.
$A=(a_{ij})$ va $B=(b_{ij})$ bo‘lsa, A+B=C, C=(c_{ij}), bu yerda, $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $(i=1,m;\ j=1,n)$.

c) *Matritsani matritsaga ko‘paytirish. A* matritsani *B* matritsaga ko‘paytirish uchun *A* matritsa satrlari soni *B* matritsa ustunlari soniga teng bo‘lishi kerak. A matritsani B matritsaga ko‘paytmasi *AB* yana matritsa bo‘lib, uning elementlarini hosil qilish uchun A matritsaning *i*- satr elementlarini *B* matritsaning *j*- ustunning mos elementlariga ko‘paytirib, natijalarni qo‘shish kerak, ya’ni,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\ .$$

Umumiy holda matritsani matritsaga ko‘paytirishda kommutativlik xossasiga ega emas AB ≠ BA.

Teskari matritsa tushunchasi. A va *X n*-tartibli kvadrat matritsalar va *E n*-tartibli birlik matritsa bo‘lsin. Agar *AX=XA=E* tenglik bajarilsa, u holda, *X* matritsani *A* ga teskari matritsa deyiladi. Teskari matritsa A^{-1} bilan belgilanadi. Har qanday maxsusmas kvadrat matritsa uchun teskari matritsa (yagona) mavjud va u quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ..... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ..... & A_{n2} \\ & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & ..... & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Bu yerda, A_{ij} $(i,j=1,n)$ *A* matritsa elementlarining algebraik to‘ldiruvchilari. Xususan, 2-tartibli kvadrat matritsa uchun teskari matritsa ushbu ko‘rinishda bo‘ladi, ya’ni

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Uchinchi tartibli kvadrat matrisa uchun esa teskari matrisa ushbu formuladan topiladi:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

bu yerda, $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ element a_{ij} elementga mos algebraik to‘ldiruvchi.

Matritsaning rangi. A matritsaning noldan farqli minorlaridan eng yuqorisining tartibiga, matritsaning rangi deyiladi. Matritsaning rangi *r(A)* bilan belgilanadi.

6-§. Chiziqli tenglamalar sistemasini matrisaviy usul bilan yechish.

Bizga uchta noma'lumli, uchta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (9.13)$$

bu tenglamalar sistemasini matritsaviy tenglama shaklida quyidagicha yozish mumkin:

$$AX=B \qquad (9.14)$$

bu yerda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Ma'lumki, agar A maxsusmas matritsa ya'ni detA≠0 bo'lsa, u holda bu matritsaga teskari A^{-1} matritsa mavjud va u quyidagicha topiladi:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \qquad (9.15)$$

Bu yerda, $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ algebraic to'ldiruvchi, a_{ij} elementga mos M_{ij} minor bo'lib U i – satr va j - ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan 2-tartibli determinant.

(9.13) matritsaviy tenglamani ikkala tomonini teskari A^{-1} matritsaga ko'paytirib, tenglamaning yechimini topamiz $X=A^{-1}B$,

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11}\bullet b_1 + A_{21}\bullet b_2 + A_{31}\bullet b_3 \\ A_{12}\bullet b_1 + A_{22}\bullet b_2 + A_{32}\bullet b_3 \\ A_{13}\bullet b_1 + A_{23}\bullet b_2 + A_{33}\bullet b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad (9.16)$$

tenglikdan matritsaviy tenglamaning yechimi kelib chiqadi:

$$x_1 = \frac{1}{|A|}(A_{11}\bullet b_1 + A_{21}\bullet b_2 + A_{31}\bullet b_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{|A|}(A_{12}\bullet b_1 + A_{22}\bullet b_2 + A_{32}\bullet b_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{|A|}(A_{13}\bullet b_1 + A_{23}\bullet b_2 + A_{33}\bullet b_3)$$

Misol-1. Tenglamalar sistemasini matritsaviy usul bilan yeching.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

A matritsaning determinantini hisoblaymiz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$$

demak, A maxsusmas matritsa, ya'ni unga A^{-1} teskari (9.15) matritsa mavjud va uni qurish uchun algebraik to'ldiruvchilarini hisoblaymiz:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \; A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$, A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3, \; A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

Uholda teskari matritsa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/10 & 3/10 & -1/10 \\ -5/10 & 1/10 & 3/10 \\ -5/10 & -1/10 & 7/10 \end{pmatrix} = 1/10\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$ (9.16) ga asosan,

$$X = A^{-1}B = 1/10\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

demak, sistemaning yechimi x_1=3, x_2=0, x_3= -2.

Misol-2. Ushbu

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

sistema matritsaviy usulda yechilsin.

Yechish: bu sistemaning matritsaviy ko'rinishi AX=B bo'ladi. Bu yerda,

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix} \quad |A| = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

bo'lganligidan teskari matritsa mavjud. Algebraik to'ldiruvchilarni topamiz:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 5=5$, $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 7=-7$, $A_{13}=(-1)^{1+3}(-6)=-6$

$A_{21}=(-1)^{2+1}3=-3$, $A_{22}=(-1)^{2+2}6=6$, $A_{23}=(-1)^{2+3}(-3)=3$

$A_{31}=(-1)^{3+1}(-1)=-1$, $A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot 1=-1$, $A_{33}=(-1)^{3+3}3=3$

A matritsaga teskari matritsa

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & -3 & -1\\ -7 & 6 & -1\\ -6 & 3 & 3\end{pmatrix}.$$

Natijada sistemaning yechimi

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & -3 & -1\\ -7 & 6 & -1\\ -6 & 3 & 3\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}13\\ 15\\ 14\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6\\ -15\\ 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -5\\ 3\end{pmatrix}$$

Bundan, tenglamalar sistemasining matritsaviy usulda yechimi $x_1=2$, $x=-5$, $x_3=3$ kelib chiqadi.

7-§. Kroneker –Kapelli teoremasi. Bir jinsli n no'malumli n ta tenglamalar sistemasini yechish

Gauss usuli bilan (9.9) tenglamalar sistemasini to'liq yechmasdan, birgalikda yoki birgalikda emasligini aniqlab bo'lmaydi. Ko'p hollarda tenglamalar sistemasini yechmasdan turib,birgalikda yoki birgalikda emas ekanligini aniqlash lozim bo'ladi. Bu savolga Kronekr –Kopelli teoremasi javob beradi.

Bizga n no'malumli, m ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases} \qquad (9.17)$$

9. 3 – t e o r e m a. (9.17) tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lishi uchun A asosiy va kengaytirilgan B matritsalarni ranglari teng bo'lishi r(A) = r(B) zarur va yetarlidir.

Bu yerda asosiy matritsa

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \dots\dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ a_{m1}a_{m2} & \dots\dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (9.18)$$

Kengaytirilgan matritsa.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & \dots. & a_{1n}b_1 \\ a_{21}a_{22} & \dots. & a_{2n}b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ a_{m1}a_{m2} & \dots. & a_{mn}\, b_m \end{pmatrix} \qquad (9.19)$$

Isboti: **Zaruriy shart.** (9.17) tenglamalar sistemasi birgalikda va uning yechimlari $x_1 = \lambda_1\,, x_1 = \lambda_2, \dots\dots, x_n = \lambda_n$ bo'lsin. U holda bu yechimlar (9.17) tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi.

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \dots + a_{1n}\lambda_n = b_1 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \dots + a_{mn}\lambda_n = b_m \end{cases} \qquad (9.20)$$

Kengaytirilgan B matritsani birinchi ustunini $\lambda_1$ga ikkinchi ustunni λ_2 ….., -n chi ustunini -$\lambda_n$ga ko'paytirib oxirgi ustunga qo'yamiz:

$$B\to B=\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} & \dots. & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots. a_{2n} & 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & \\ a_{m1}a_{m2} & \dots. & a_{mn} & 0 \end{pmatrix} \qquad (9.21)$$

Ma'lumki,matritsada elementar amallarni bajarish uning rangini o'zgartirmay-di,shu sababli r(A)=r(B). B matritsaning oxirgi ustuni nollardan iborat bo'lgan-ligidan r(A)=r(B) kelib chiqadi.

Yetarli shart. A va B matritsalarning_ rangi teng bo'lsin r(A) = r(B) = r, bu shartda (9.17) tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lishini isbotlaymiz.

Bu holda r tartibli determinant △ noldan (△≠0) farqli bo'ladi.Faraz qilaylik determinant A matritsaning chap burchagidagi bu matritsadan noldan farqli bo'lsin:

$$\triangle=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} & \dots. & a_{1r} \\ a_{21}a_{21} & \dots. & a_{2r} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ a_{r1}a_{r2} & \dots. & a_{rr} \end{vmatrix}\neq 0 \qquad (9.22)$$

Ma’lumki, matritsaning rangi,maksimal sondagi chiziqli bog’langan satr vektorlar soniga teng bo’ladi. Bu holda A va B matritsalarning birinchi r ta satri chiziqli bog’langan,qolgan satrlari birinchi r ta satrlarning chiziqli kombinatsiyalari shaklida ifodalanishi mumkin. Demak, (9.17) tenglamalar sistemasining oxirgi
(m-r) ta sini birinchi r tenglamaning natijasidan iborat bo’ladi,shu sababli bu tenglamalarni tashlab yuborish mumkin.Natijada quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo’lamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \qquad (9.9)$$

Bu yerda ikki xol bo’lishi mumkin: r = n yoki r < n.
Birinchi r = n holda tenglamalar soni no’malumlar soniga tengligidan,Kramer teoremasiga asoan(△≠0 bo’lganligidan)sistema yagona yechimga ega bo’ladi.
Agar r < n bo’lsa,ya’ni tenglamalar soni no’malumlar sonidan kichik bo’ladi (9 .14) tenglamalar sistemasidagi $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots\dots, x_n$ no’malumlar o’ng tomonga o’tkazilib,quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo’lamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1(r+1)}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2(r+1)}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r(r+1)}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{cases} \qquad (9.23)$$

(9.23) sistemaning $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots\dots, x_n$ no’malumlariga ixtiyoriy ravishda qiymatlar berib r ta no’malumli r ta tenglamalar sistemasiga ega bo’lamiz. Bu sistema, uning asosiy determinant △≠0 bo’lganidan, yagona yechimga ega bo’ladi.Bu tenglamada $x_{r+1}, \dots, x_n$ larga ixtiyoriy qiymatlar berilganligidan,(9.17) tenglamalar sistemasi bu holda cheksiz ko’p echimga ega bo’ladi,ya’ni tenglamalar sistemasixar bir qiymatida birgalikda bo’ladi.

Xulosa: 1) Agar r(A) = r(B) = n bo’lsa,(9.17) tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega,

2) Agar r(A) = r(B) = r < n bo’lsa tenglamalar sistemasi cheksiz ko’p yechimga ega va ulardan $n - r$ tasi ixtiyoriy tanlanadi.

Кronekor – Кapeli teoremasiga doir namunaviy misollarni yechimi.

Ushbu chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikdami? Кronekor – Кapeli teoremasidan foydalanib tekshiring va yeching:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$$

Yechish: A- asosiy matritsaning rangini hisoblaymiz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bu matritsa $M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ bo‘lganligan $r(A) = 2$ kelib chiqadi. Kengaytirilgan B matritsaning rangi

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r(B) = 2$$

.

Kronekor - Kapelli teoremaga asosan $r(A) = r(B) = 2 < 4$ bo‘lganligidan berilgan chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda va cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi. No‘malumlardan ikkitasi x_1 va x_2 ixtiyoriy tanlanadi (uchinchi tenglama birinchi ikkita tenglamaning chiziqli yigindisidan iborat bo‘lganligi uchun uni tashlab yuborish mumkin)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \quad\quad -2x_4 = -2 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Umumiy yechim: $(x_1; x_2; -x_1 + 2x_2; 1)$

Bu yerda x_1, x_2 ixtiyoriy tanlanganidan xususan $x_1 = 0, \quad x_2 = 0$ bo‘lganida sistemaning

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

yechimi $x_3 = 0, \quad x_4 = 1$ kelib chiqadi. (0; 0; 0; 1).

Bizga n no’malumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo’lsin

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (9.24)$$

Ma’lumki,(9.24) tenglamalar sistemasi har qachon $x_1 = x_2 = \cdots x_n = 0$ trevial yechimga ega

9. 4 – t e o r e m a. (9.24) sistemani noldan farqli yechimga ega bo’lishi uchun uning asosiy determinantini qiymati $\Delta = 0$ bo’lishi zarur va yetarli shartdir.

Zaruriy shart. Barcha $\Delta x_1, \dots\dots\dots, \Delta x_n$ determinantlarni qiymatlari nolga teng bo'lsin. Bu holda Δx_1=0, $\Delta x_2 = 0$,……,$\Delta x_n = 0$. Bu tengliklardan kamida bitta $x_i \neq 0$ ega bo'lishi uchun, $\Delta = 0$ bo'lishi kelib chiqadi.

Yetarli shart. $\Delta = 0$ bo'lsin.U holda A matritsaning rangi r(A) < n bo'lganligidan Kronekr-Kopelli tenglamasiga asosan bir jinsli tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p yechimga ega va ulardan kamida bittasi noldan farqli bo'ladi.

Mavzuga doir mustaqil yechish uchun misollar

Matrisalar ustida quyidagi amallarni bajaring:

1) Agar $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ bo'lsa $3A+2B$ toping.

2) $A=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{matrix} AB=? \\ BA=BA \end{matrix}$ bo'ladimi?

3) $A=\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $AB=?$

4) $A^4=\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^4=?$

5) Agar $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ bo'lsa $4A^2-A=?$

6) $A^3=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}^3=?$

7) Agar $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bo'lsa $4A^n=?$

6) Quyidagi matrisalarni teskari A^{-1} matrisalarini toping:

$a)$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$, c) $A=\begin{pmatrix} Cos\alpha & -Sin\alpha \\ Sin\alpha & Cos\alpha \end{pmatrix}$, d) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, f) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Quyidagi matrisalarning $r(A)$ rangini toping:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1-1 \\ 1 & -2 & 1-1 \\ 1 & -2 & 1\ 5 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini matrisaviy usul bilan yeching

1. $\begin{cases} 5x+8y-z=-7, \\ x+2y+3z=1, \\ 2x-3y+2z=9. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x+2y+z=5, \\ 2x+3y+z=1, \\ 2x+y+3z=11. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x+2y+4z=31, \\ 5x+y+2z=29, \\ 3x-y+z=10. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x-3y+2z=9, \\ 2x+5y-3z=4, \\ 5x+6y-2z=18. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x-y-z=4, \\ 3x+4y+2z=11, \\ 3x-2y+4z=11. \end{cases}$

Quyidagi tenglamalar sistemasini birgalikda yoki birgalikda emasligini Kronekor-Kapelli teoremasi bilan tekshirib, yechimlarini toping:

1) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=4 \\ 2x+x_2+3x_3=8 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3-2x_4=-4 \\ x_1+x_2-x_3+2x_4=1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=1 \\ 2x_1-x_2+2x_3+3x_4=18 \\ -x_2+2x_3-x_4=0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1 \\ 2x_1+x_2-2x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2-3x_3=1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=-2 \\ x_1+2x_2+3x_3=-1 \\ x_1-3x_2-2x_3=3 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=1 \\ 2x_1+x_2-5x_3=-1 \\ x_1-x_2-x_3=-2 \end{cases}$

Quyidagi chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasini fundamental yechimlarini toping.

1) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0 \\ 2x_1+9x_2-3x_3=0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3=0 \\ -2x_1+4x_2+6x_3=0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

8-§ . Matritsalarni iqtisodiy masalalarni yechishga qo`llanilishi. Leontevning xo'jaliklararo balans tenglamalari.

Ishlab chiqarish jarayonlarini muqobil matematik modelini yaratish, shu jarayonlarni rivojlanish qonuniyatlarini ko`rsatish bilan bir qatorda, iqtisodiy samaradorligini ham aniqlash imkoniyatini beradi. Ma'lumki, barcha ishlab chiqarish korxonalari iste'mol qiluvchi va mahsulot ishlab chiqaruvchi hisoblanadi. Masalan, fermer xo`jaligi paxta, don va boshqa mahsulotlarini ishlab chiqarsa, bu mahsulotlarni etishtirish jarayonida texnika vositalari, yoqil`i, mineral o`g`itlar va boshqa mahsulotlarni iste'mol qiladi. Ishlab chiqarishda bu aloqadorlik jarayoni ma'lum bir jadval shaklida ifodalanadi, ya'ni tarmoqlararo balans mavjud bo`ladi. Tarmoqlararo balans jarayonlarini iqtisodiy matematik modelini tuzib, uni chuqur tahlil qilish masalalariga Amerikalik olim V.Leontev asos solgan va bu ilmiy tadqiqot ishlari uchun 1963 yilda Nobel mukofotiga sazovor bo`lgan. Biz ishlab chiqarish jarayonlarini Leontev modelini sodda hollarini bayon etamiz[10]- [12].

Mahsulotini ishlab chiqaruvchi n ta xo`jalikni qaraymiz. Bu xo`jaliklar ma'lum bir $[T_0, T]$ oraliqda (masalan, bir yil davomida) mahsulot ishlab chiqarish jarayonida boshqa korxonalar bilan mahsulot almashishadi. **i**-xo`jalikni jami ishlab chiqarilgan mahsulot $x_i$ bo`lsin, x_{ij} -i xo`jalikni **j** xo`jalik mahsulotidan foydalanib ishlab chiqargan jami mahsuloti hajmi; y_i **i** xo`jalikni, ishlab chiqarmaydigan sohalar foydalanishi uchun tayyorlagan mahsuloti hajmi. Bunga xo`jalikni zahirada saqlashi, aholini shaxsiy manfaatlarida foydalanishi ma'orif, fan, so`liqni saqlash, eksportga jo`natish kiradi. Bu jarayonni jadval shaklida yozish mumkin.

Quyidagi jadvaldagi miqdorlar balans munosabatlarini $i=1,..,\overline{n}$ da qanoat-lantiradi:

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + y_i \qquad (9.25)$$

V.Leontev Amerika iqtisodiyotini tahlil qilib aniqladiki, $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_i}$ miqdor yillar davomida o`zgarmas bo`ladi, bu ishlab chiqarish texnologiyasini, vositasini o`zgarmay qolganini harakterlaydi. Boshqacha aytganda $\boldsymbol{j}$ xo'jalik x_j mahsulot

Xo'jalikni ishlab chiqarishi uchun iste'moli	Yakuniy iste'mol mahsuloti	Yalpi mahsulot ishlab chiqarish
$x_{11}, x_{12}, \dots x_{1n}$	y_1	x_1
$x_{21}, x_{22}, \dots x_{2n}$	y_2	x_2
……..	….	…
$x_{n1}, x_{n2}, \dots x_{nn}$	y_n	x_n

tayyorlashi uchu i n, xo`jalikdan $a_{ij}x_{ij}$ miqdordagi mahsulotni olishi kerak, bu yerda $a_{ij}$ - o`zgarmas koeffisient. Real chiqim yani sarf xarajat ishlab chiqarilgan mahsulot hajmiga proporsional bo`lishi kerak, bu mavjud ishlab chiqarish texnologiyasini chiziqliligini bildiradi, ya'ni

$$x_{ij} = a_{ij}x_j \qquad (i\ ,\ j=1,2,3,\ \dots,n) \qquad (9.26)$$

Bu erda a_{ij} - bevosita xarajatlar koeffitsienti deyiladi.

Natijada xo`jaliklararo (9.25) balans tenglamasini quyidagicha yozish mumkin :

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + y_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + x_n \end{cases} \qquad (9.27)$$

Buni matritsaviy formada yozsak $\bar{X} = A\bar{X} + \bar{Y}$ (9.28)

$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ i, j=1,.., n, $\bar{X} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{Vmatrix}$, $\bar{Y} = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_n \end{Vmatrix}$

Bu erda $\bar{X}$ - yalpi (jami) mahsulot, $\bar{Y}$ - yakuniy iste'mol vektorlari va A - bevosita xarajatlar matritsasi deyiladi, (9.28) xo`jaliklararo chiziqli bo`lanish balans tenglamasi yoki Leontev modeli deyiladi.

Leontev modelidan rejalashtirish masalalarida foydalanish mumkin. Masalan $[T_0,T]$ vaqt oralig'i uchun $\bar{Y}$ yakuniy iste'mol vektori berilgan holda, jami yetishtirishi lozim bo`lgan mahsulot hajmi $\bar{X}$ aniqlash mumkin. (9.28) balans

tenglamasi iqtisodiy ma'noga ega bo`lishi uchun $\boldsymbol{A}$= $(a_{ij})$ matritsa va $\bar{X}, \bar{Y}$ vektorlarni barcha elementlari nomanfiy bo`lishi kerak, ya'ni $A \geq 0$, $\bar{X} \geq 0$, $\bar{Y} \geq 0$.

Agar qiymat, yani baho ma'nosida, ishlab chiqarish jarayonini o`rgansak $x_j = 1$ so`m bo`lsa, (9.26) tenglikdan $x_{ij} = a_{ij}$ ekanligi kelib chiqadi va $a_{ij}$ j xo`jalikni 1 so`mlik mahsulotidan foydalanib $i$ xo`jalik ishlab chiqargan mahsuloti qiymatini bildiradi.

Biz qisman tanishgan ishlab chiqarish jarayonini balans tenglamasi (9.28) qanday hollarda iqtisodiy ma'noga ega bo`ladi, ya'ni mahsuldor bo`ladi. Bu savolga yetarli javob berish masalalariga to`xtalib o`tamiz.

$A \geq 0$ matritsa mahsuldor deyiladi, agar har qanday $\bar{Y} \geq 0$ vektor uchun $\bar{X} = A\bar{X} + \bar{Y}$ tenglama $\bar{X} \geq 0$ yechimiga ega bo`lsa.

Leontev tenglamasini quyidagicha yozish mumkin:

$$(E - A)\bar{X} = \bar{Y} \qquad (9.29)$$

bu yerda E - birlik matritsa.

Agar quyidagi matrisa $(E - A)^{-1}$ mavjud bo'lib u nomanfiy bo`lsa (9.29) tenglama yechimga ega bo`ladi

$$\bar{X} = (E - A)^{-1}\bar{Y} \qquad (9.30)$$

Va $A \geq 0$ matritsa mahsuldor bo`ladi.

Bundan tashqari A- matritsa mahsuldor bo`ladi faqat va faqat shu vaqtdaki, agar quyidagi qator yaqinlashuvchi bo`lsa

$$E+A+A^2+\ldots+A^n+\ldots=(E-A)^{-1} \qquad (9.31)$$

Umuman, mahsuldorligi uning barcha elementlari musbat bo`lganda va matritsani ixtiyoriy ustuni elementlari yigindisi (yoki satr elementlari yigindisi) $\mathbf{a_{i1} + a_{i2} + \ldots a_{in} < 1}$ bo`lganda ham saqlanadi, ya'ni qiymatli balans hol qaralganda, o`rganilayotgan j xo`jalik mahsulotini tannarxi 1 so`mdan oshmasligi, uni rentabelligini bildiradi.

Misol-1. Quyidagi bevosita xarajatlar matritsasini qaraymiz

$$A = \begin{Vmatrix} 0,2 & 0,5 \\ 0,8 & 0,4 \end{Vmatrix}$$

A **matritsani** mahsuldorligini aniqlash talab etilgan bo'lsin. Buning uchun

$$|E-A| = \begin{Vmatrix} 0,7 & -0,5 \\ -0,8 & 0,6 \end{Vmatrix}$$

$$|E-A| = \det(E-A) = \begin{Vmatrix} 0,7 & -0,5 \\ -0,8 & 0,6 \end{Vmatrix} = 0,42-0,4 = 0,02 \neq 0$$

demak (E-A) mahsusmas matritsa ya'ni unga teskari matritsa mavjud

$$(E-A)^{-1} = 1/|E-A| \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{Vmatrix}$$

Bizni misol uchun $A_{11}=0,6$, $A_{12}=0,8$, $A_{21}=0,5$, $A_{22}=0,7$

$$(E-A)^{-1} = \frac{1}{0,02} \begin{Vmatrix} 0,6 & 0,5 \\ 0,8 & 0,7 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 30 & 25 \\ 40 & 35 \end{Vmatrix}$$

$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ to`liq xarajatlar matritsasi, $\bar{X} = (x_1, x_2, \quad , x_n)$ - jami ishlab chiqarilgan mahsulotlar vektori, $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ - baho vektorlari bo`lsa, u holda birinchi xo`jalik $p_1x_1$ so`m foyda ko`radi, agar birinchi xo`jalikni a_{11} hajmdagi mahsulotidan foydalansa, ikkinchi xo`jalik $a_{21}$ hajmdagi mahsulotidan foydalansa,... n-chi xo`jalik a_{n1} hajmidagi mahsulotlaridan foydalansa. Mahsulot, ishlab chiqarishi uchun boshqa xo`jaliklardan sotib olgan mahsulotlarining bahosi so`mda quyidagicha bo`ladi: $\mathbf{a_{11}p_1+\ldots+a_{1n}p_n}$.

Demak, birinchi xo`jalik $x_1$ hajmli mahsulot ishlab chiqarishi uchun boshqa xo`jaliklardan $\mathbf{x_1(a_{11}p_1+\ldots+a_{1n}p_n)}$ so`mga mahsulotlar sotib olishi kerak bo`ladi. Qolgan foydani mehnatga haq to`lash, soliq, investitsiya, tadbirkorlikka sarflaydi uni $V_1$ bilan belgilasak quyidagi tenglik o`rinli bo`ladi:

$$x_1 p_1 = x_1(a_{11}p_1+\ldots+a_{1n}p_n)+V_1$$
$$p_1 = a_{11}p_1+\ldots+a_{1n}p_n + V_1/x_1$$

Bu yerda $v_i = V_i/x_i$ belgilasak. Natijada quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo`lamiz

$$\begin{aligned} p_1 &= a_{11}p_1+\ldots+a_{1n}p_n + v_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= a_{1n}p_1+a_{2n}p_2+\ldots+a_{nn}p_n+v_n \end{aligned} \qquad (9.32)$$

Bu sistemani matritsaviy shaklda yozsak

$$\bar{p} = A^T\bar{p}+\bar{v} \qquad (9.33)$$

Bu yerda $\bar{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ qo`shimcha baho vektori. Xo`jalikning mahsuloti bahosini ham shunday aniqlash mumkin.

Misol-2. Uchta tarmoqdan tashkil topgan iqtisodiy modelni qaraymiz. Tuman agroximiyasi, qishlok xo`jalik mashina parki, dehqon fermer xo`jaligi. Bevosita xarajatlar matritsasi bu tarmoqlar uchun quyidagicha

$$A^T = \begin{Vmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{Vmatrix}$$

va qo`shimcha xarajatlar vektori normasi $\bar{\boldsymbol{v}}$ = (4,10, 4) bo`lsin. Talab qilingan, teng vazinli baholarni aniqlash, A matritsani mahsuldorligidan (chunki $\sum a_{ij} > 0$ va $\sum a_{ij} < 1$) foydalanib (9.28) ga asosan

$$\bar{p} = \boldsymbol{A^T}\,\bar{p} + \bar{\boldsymbol{v}}$$

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A^T})\,\overline{p} = \bar{\boldsymbol{v}}.$$

Bundan

$$(E-A^T)=1/0,444=\begin{Vmatrix} 0,58 & 0,14 & 0,18 \\ 0,28 & 0,68 & 0,24 \\ 0,25 & 0,29 & 0,69 \end{Vmatrix},$$

$$\bar{p} == (E-A^T)^{-1}\,\bar{\boldsymbol{v}} = \begin{Vmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \end{Vmatrix}$$

Agar agroximiya tarmog`i 1,11% ga mahsulotini bahosini oshirsa (11%) ya'ni $\bar{\boldsymbol{v}}$ =(5, 11, 10;4) bo`lganda

$$S^t\,\bar{\boldsymbol{v}} = \begin{Vmatrix} 11,45 \\ 20,7 \\ 15,625 \end{Vmatrix}$$

Ya'ni agroximiya tarmo`i mahsulotini bahosi 14,5 %, mashina parki xizmati bahosi 3,5%, qishloq xo`jalik mahsulotini bahosi 4,17% oshadi.

Misol-3 Leontev modelidan rejalashtirish va boshqa iqtisodiy jarayonlarni muqobil modellashtirish masalalarini yechishda foydalanish mumkin. Umumiyroq shakldagi masalalarni Leontevning xo`jaliklararo balanis tenglamalari yordamida yechishga misol keltirib noma'lum parametrlarini topishni ko`rsatamiz:

Iste'mol qiluvchi tarmoqlar / I/chiqaruvchi tarmoqlar	Yalpi mahsulot	Sanoat A guruh	Sanoat B guruh	Qishloq xo`jalik	Boshqa tur mahsulot	Yakuniy mahsulot.

1. Ishlab chiqarish vositalarini ishlab chiqa-rish korxonalar (A)	x_1	0,2	0,1	0,06	0,2	318
2. Iste'mol mollar ishlab chiqarish korxonalari (B)	x_2	0,05	0,2	0,04	0,15	76
3. Qishloq xo`jalik tarmoqlari	x_3	0,1	0,05	0,04	0,15	67
4. Boshqa turdagi tarmoqlar	x_4	0,2	0,1	0,1	0,05	62

***A*= (a_{ij})** bevosita xarajatlar matritsasi. Yuqorida keltirilgan ma'lumotlar bo'yincha xo`jaliklararo balanis tenglamasini tuzamiz: (I-A)X=Y

$$\begin{cases} 0.8x_1-0,1x_2-0.06x_3-0.2x_4=318 \\ -0.05x_1+0,8x_2-0.04x_3-0.15x_4=76 \\ -0.1x_1-0,05x_2+0.96x_3-0.1x_4=67 \\ -0.2x_1-0,1x_2-0.1x_3+0.95x_4=62 \end{cases}$$

Hosil bo'lgan chiziqli tenglamalar sistemasini yechib, o'rganilgan hol uchun yalpi mahsuloning hajmi quyidagicha bo'lishini aniqlaymiz (480; 170; 150; 200).

Natijada, quyidagi tenglik yordamida $x_{ij} = a_{ij}x_j$ xo′jalikni boshqa korxonalardan olinadigan mahsuloti sonini aniqlaymiz:

$x_{11}=a_{11}x_1=0,2*480=96$ ta
$x_{12}=a_{12}x_2=0,1*170=17$ ta
$x_{13}=a_{13}x_3=0,06*150=9$ ta
$x_{14}=a_{14}x_4=0,2*200=40$ ta
$x_{24}=a_{24}x_4=0,15*200=30$ ta

Iste'mol qiluvchi tarmoqlar / I/chiqaruvchi tarmoqlar	Yalpi mahsulot	A	B	Qishloq xo`jalik	Boshqa tur mahsulot	YAkuniy mahsulot
A	480	96	17	9	40	318
B	170	24	34	6	30	76

3. Qishloq xo`jalik	150	48	8,0	6	20	67
4. Boshqa tarmoqlar	200	96	17	15	10	62
Sof mahsulot	-	216	94	114	100	-
Yalpi mahsulot	1000	480	170	150	200	-

Bu erda tarmoqlarni sof mahsulotlari soni (oxirigi ustundan) yalpi ishlab chiqarish mahsulotidan ayrilib topiladi:

480-(96+24+48+96)=480-264=216

170-(17+34+8+17)=170-76=94

150-(9+6+6+15)=150-36=114

200-(40+30+20+10)=100.

Xuddi shuningdek, bevosita to`liq xarajatlar koeffitsientlari matritsasini **$X=(I-A)^{-1}Y$, $X=VY$** balans tenglamalari yordamida hisoblab quyidagi yechimlarga ega bo‘lamiz:

x_1= 1,3638*318+0,2205*76+0,1264*67+0,3366*62=480,

x_2= 0,1549*318+1,306*76+0,09*67+0,2483*62=170,

x_3= 0,1838*318+0,1114*76+1,0754*67+0,1695*62=150,

x_4= 0,3228*318+0,1956*76+0,1499*67+1,1673*62=200

Xulosa qilib shuni aytish mumkinki, mahsulot ishlab-chiqaruvchi fermer xo‘jaliklarini yoki korxonalarni ishlab-chiqarish bo’yicha ma’lumotlari asosida, Leontevning xo`jaliklararo balanis tenglamalarini tuzib, unda qatnashuvchi iqtisodiy ko’rsatkichni baholovchi barcha noma’lum parametrlarni aniqlash mumkin.

Mavzu boyicha tekshirish uchun savollar :

1. Matritsa va uning turlari bo’yicha ma’lumot bering?
2. Matritsalar ustida qanday amallarni bajarish mumkin?
3. Teskari matritsani topish qoidasini tushuntiring?
4. Minor va algebraic to’ldiruvchi nima?
5. Matritsaning rangi qanday aniqlanadi?
6. Chiziqli tenglamalar sistemasini matisaviy usulda yechisda (birgalikda ekanligini) qullaniladigan Kroneker-Kapelli teoremasini aytib bering?
7. Matritsaning iqtisodiy masalalarni yechishga qollanilashi, Leon’tevning chiziqli-iqtisodiy modeli haqida ma’lumot bering?

8. Xo'jaliklararo balanis tenglamasini tuzish sxemasini aytib, iqtisodiy mohiyatini tushuntirib bering?

Kalit suzlar:

Matritsa, dioganal, birlik, teskari, minor, algebraic to'ldiruvchi, matritsaning rangi, chiziqli tenglamalar sistemasini matisaviy usulda yechis, birgalikda, Kroneker-Kapelli teoremasi, Leon'tevning chiziqli-iqtisodiy modeli, xo'jaliklararo balanis tenglamasi.

Xulosa

Matritsa va uning turlari, matritsalar ustida amallar, teskari matritsani topish, minor va algebraic to'ldiruvchi, matritsaning rangi, chiziqli tenglamalar sistemasini matisaviy usulda yechis, Kroneker-Kapelli teoremasi, matritsaning iqtisodiy masalalarni yechishga qollanilashi, Leon'tevning chiziqli-iqtisodiy modeli, xo'jaliklararo balanis tenglamasini tuzib, unda qatnashuvchi iqtisodiy ko'rsatkichni baholovchi noma'lum parametrlarni aniqlash masalalari o'rganilgan.

9-§. Vektorlar algebrasining asosiy tushunchalari

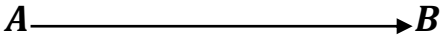
Oliy matematikada, umuman, fan va texnikaning har xil sohalarida turli kattaliklar uchraydi. Ularning bazilari faqatgina son qiymatlari bilan xarakterlanadi (masalan, uzunlik, yuza, hajm, massa va h.k.), ba'zilari esa son qiymatlari bilan birga yo'nalishi bilingandagina to'la ma'lum hisoblanadi (masalan, tezlik, tezlanish, kuch va h.k.) [2].

Aytaylik, jismning biror nuqtasiga ta'sir qilayotgan kuch miqdori 10 kg bo'lsin. Bu kuchning yo'nalishi turlicha bo'lishi mumkin. Binobarin, uning ta'sirida jismning vaziyati turlicha bo'ladi. Demak, kuchning to'la aniqlanishi uchun uning son qiymatini bilishdan tashqari, ta'sir etish yo'nalishini ham bilish kerak bo'ladi. Son qiymati va yo'nalishi bilan aniqlanuvchi kattalik vector kattalik yoki *vector* deb ataladi.

Vektor kattalik kichik harf ustiga strelka qo'yish bilan yoki quyuq harf bilan belgilanadi $\vec{a}$ yoki $\boldsymbol{a}$.

Faraz qilaylik, $\vec{a}$ vector berilgan bo'lsin. Bu vector kattalikka ma'lum masshtabda olingan kesmani qaraylik. So'ng bu kesmaga vector yo'nalishini beraylik. Natijada yo'nalgan kesma hosil bo'ladi. U vektorni geometrik tasviri bo'ladi. Masalan, jismga ta'sir etuvchi $\vec{F}$ kuchni 1- chizmada tasvirlangandek, A nuqta bilan B nuqtasini tutashtiruvchi va A nuqtadan B nuqtaga qarab yo'nalgan

kesma deb qarash mumkin: $\vec{F} = \overrightarrow{AB}$

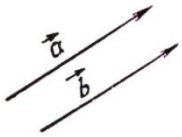


1- chizma

A nuqta vektorning *boshi, B* nuqta esa vektorning *oxiri* deyiladi. Vektorning son qiymati uning uzunligi yoki moduli deb ataladi va $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ kabi belgilanadi.

Agar vektorning uzunligi nol bo'lsa, uni *nol vektor* deyiladi. Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor berilgan bo'lsin. Agar bu vektorlarning uzunliklari, bir xil bo'lib, ular o'zaro parallel va bir tomonga yo'nalgan bo'lsa, u holda *a* va *b* o'zaro *teng vektorlar* deyiladi $\vec{a} = \vec{b}$ kabi yoziladi.

58-chizmada o'zaro teng ikki $\vec{a} = \vec{b}$ vector tasvirlangan. Bundan vektorni bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga o'z-o'ziga parallel ravishda ko'chirish mumkinligi kelib chiqadi.



58-chizma

Ikki $\vec{a} = \vec{b}$ vektorning yo'nalishlari bir xil, uzunliklari esa har xil bo'lsin. Masalan, $\vec{a}$ vektorning uzunligi $\vec{b}$ vektorning uzunligidan *k* marta ko'p bo'lsin. Demak,

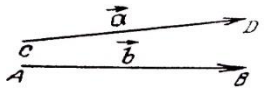
$$|\vec{a}| = k\,|\vec{b}|.$$

Shunday qilib, berilgan vektorni *k* skalyar songa ko'paytirishdan yangi vektorga kelamiz. Bu vektorning uzunligi berilgan vektorning uzunligini *k* songa ko'paytirishdan hosil bo'ladi. $k > 0$ bo'lganda $\vec{a} = \vec{b}$ vektorlar yo'nalishi bir xil, $k < 0$ bo'lganda esa yo'nalishi qarama-qarshi bo'ladi. Uzunligi birga teng, yo'nalishi esa berilgan $\vec{a}$ vektorning yo'nalishi kabi bo'lgan $\vec{a}_\circ$ vektor *birlik vektor* deb ataladi.

Ravshanki, $\vec{a}$ vektorni birlik vektor orqali quyidagicha yozish mumkin:

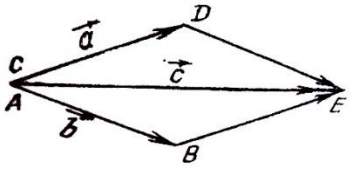
$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}_\circ .$$

1. V e k t o r l a r n i q o' s h i s h. Ikki $\vec{a} = \vec{b}$ vektor berilgan bo'lsin (59-chizma).



59-chizma

Bu vektorlarning boshlari A va B ni bir nuqtaga keltirib, tomonlari $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$ *va* $|\vec{b}| = |\overrightarrow{CD}|$ bo'lgan parallelogram yasaymiz (60-chizma).



60-chizma

A nuqtadan E nuqtaga yo'nalgan, uzunligi esa AE dioganalining uzunligiga teng bo'lgan $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$ vektor berilgan $\vec{a}$ = $\vec{b}$ vektorlar yig'indisi deb ataladi va

$$\vec{a} + \vec{b}$$

kabi yoziladi. Demak,

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

Ravshanki, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

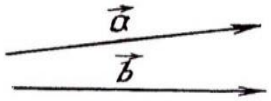
Ushbu

$$\vec{a} + (-\vec{b})$$

vektor $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ *vektorning ayirmasi* deb ataladi va $\vec{a} - \vec{b}$ kabi belgilanadi:

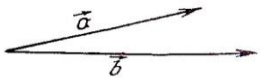
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

$\vec{a}$ = $\vec{b}$ vektorlar 61-chizmada tasvirlangan vektorlar bo'lsin.



61-chizma

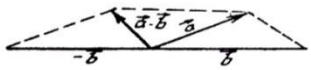
Bu vektorlarning uchlarini bir nuqtaga keltiramiz (62-chizma)



62-chizma

So'ng $\vec{b}$ vektorga ko'ra - $\vec{b}$ vektorni yasaymiz.

Yuqorida aytilganlardan foydalanib $\vec{a}$ + $(-\vec{b})$ vektorni topamiz. Bu $\overrightarrow{OA_1}$ vektordan iborat bo'ladi (63-chizma).



63-chizma

Agar $\overrightarrow{OA_1}$ = $\overrightarrow{BA}$ ekanini e'tiborga olsak, ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorga qurilgan parallelogram dioganallaridan biri $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yig'indisini, ikkinchisi esa shu vektorlar ayirmasi $\vec{a}$ - $\vec{b}$ ni ifodalashini topamiz:

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC},$$

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}.$$

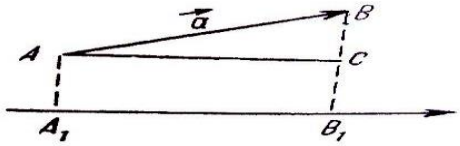
Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vector o'zaro parallel bo'lsa yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ *collinear vektorlar* deb ataladi.

Uchta $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektor bitta tekislikda yotsa yoki bir tekislikka parallel bo'lsa, $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ *komplanar vektorlar* deb ataladi.

Ravshanki, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yig'indisi $\vec{c}$ ($\vec{c}$ = $\vec{a}$ + $\vec{b}$) hamda ayirmasi $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$ bitta tekislikda yotadi, ya'ni $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ va $\vec{d}$ lar komplanar vektorlar bo'ladi.

Odatda, ma'lum yo'nalishga ega bo'lgan to'g'ri chiziq *o'q* deb ataladi. Biror l o'q berilgan bo'lsin. Bu o'qning yo'nalishini aniqlovchi birlik vektorni $l_\circ$ deylik. $\vec{a}$

vektorni qaraylik. Bu vektorning boshi *A* nuqtadan va oxiri *B* nuqtadan *l* o'qqa perpendikulyar tushiraylik. Perpendikulyarning o'q bilan kesishgan nuqtalarini mos ravishda A_1, B_1 bilan belgilaylik (64-chizma).



64-chizma

A nuqtadan *l* o'qqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Uning BB_1 bilan kesishgan nuqtasi *C* bo'lsin. Ma'lumki, $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A_1B_1}$ vektorning yo'nalishi quyidagicha aniqlanadi. *A* dan *B* ga qaratilgan yo'nalish o'q yo'nalishi bilan bir xil bo'lsa, $\overrightarrow{A_1B_1}$ vektorning yo'nalishi plus ishora bilan, teskari bo'lsa minus ishora bilan olinadi. $\overrightarrow{A_1B_1}$ vektorning uzunligi $\overrightarrow{A_1B_1}$ berilgan $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektorning *l* o'q yo'nalishiga *proyeksiyasi* deyiladi va $pr_l = \vec{a}$
kabi belgilanadi. Demak, $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| = pr_l\,\vec{a}$.

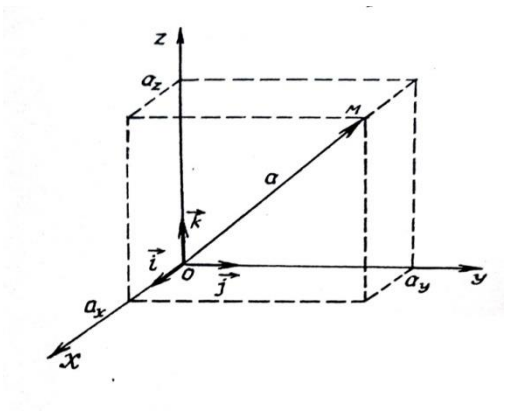
V e k t o r n i n g k o o r d i n a t a l a r i. Fazoda *Oxyz* Dekart koordinatalar sistemasini olamiz. Koordinata o'qlarining har biri uchun birlik vektor (ort.) lar kiritamiz. *Ox, Oy* va *Oz* o'qlaridagi birlik vektorlarni mos ravishda $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lar bilan belgilaymiz. $\vec{a}$ vektorning *Ox, Oy* va *Oz* koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari a_x, a_y, a_z shu vektorning *koordinatalari* deyiladi va $\vec{a}\ \{a_x, a_y, a_z\}$ ko'rinishida yoziladi. $\vec{a}$ vector o'z koordinatalari va asosiy ortlar yordamida quyidagicha yoziladi:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\ . \qquad (9.34)$$

Bundagi $a_x\vec{i}$, $a_y\vec{j}$, $a_z\vec{k}$ vektorlar $\vec{a}$ vektorning koordinata o'qlaridagi *komponentlari* deyiladi, ular tegishli koordinata o'qlariga kollinear vektorlardir— dioganali vektordan iborat bo'lgan parallelepipedning qirrali bo'lib xizmat qiladi (65-chizma).

Chizmada $\overrightarrow{M_1A} = a_x\vec{i}$, $\overrightarrow{M_1B} = a_y\vec{j}$ va $\overrightarrow{M_1C} = a_z\vec{k}$ dir). Vektor o'z koordinatalari bilan to'la aniqlanadi.

Boshlang'ich nuqtasi koordinatalar boshida va oxirgi nuqtasi *M (x, y, z)* da bo'lgan $\vec{r}$ = OM vektor *M* nuqtaning *radius-vektori* deyiladi (66-chizma).



65-chizma

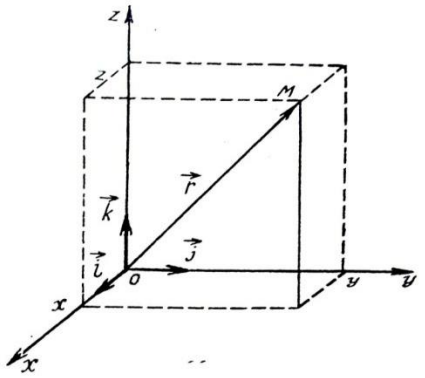
Bu holda (9.34) formula

$$\vec{r} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

ko'rinishga keladi. Radius-vektorning uzunligi

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (9.35)$$

bo'ladi.



66-chizma

Bu holda (9.34) formula

$$\vec{r} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

ko'rinishga keladi. Radius-vektorning uzunligi

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (9.35)$$

bo'ladi.

Boshlang'ich nuqtasi M_1 $(x_1; y_1; z_1)$ va oxirgi nuqtasi M_2 $(x_2; y_2; z_2)$ bo'lgan $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ vektorning (65- chizma) koordinatalari quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{a}\ \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}. \qquad (9.36)$$

Bundan ravshanki,

$$\vec{a} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \qquad (9.37)$$

bo'ladi.

Ikki vektor yig'indisi, ayirmasi va vektorning songa ko'paytmasi uchun quyidagilar o'rinlidir:

$$(\vec{a} \pm \vec{b})\ \{a_x \pm b_x,\ a_y \pm b_y,\ a_z \pm b_z\}.$$

$\lambda\vec{a}$ $\{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$ (bu yerda λ —skalyar miqdor) $\vec{a}$ $\{a_x, a_y, a_z\}$ vektorning uzunligi

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (9.38)$$

formula bilan aniqlanadi..

M_1M_2 vektorning uzunligi yoki M_1 $(x_1; y_1; z_1)$ va M_2 $(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalar orasidagi masofa

$$M_1M_2 = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (9.39)$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

M i s o l. Boshlang'ich nuqtasi M_1 (1; 2; 3) va oxirgi nuqtasi M_2 (4: 2; — 1) bo'lgan $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektorning ortlari bo'yicha yoyilmasini yozing va uzunligini hisoblang.

(9.34) formulaga ko'ra $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektorning koordinatalarini topamiz:

$$\overrightarrow{M_1M_2}\ \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\} = \{3; 0; -4\}.$$

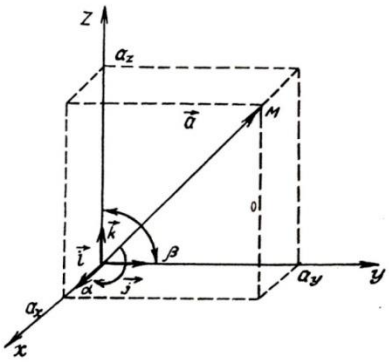
(9.34) formulaga ko'ra $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektorning ortlari bo'yicha yoyilmasi

$$\overrightarrow{M_1M_2} = 3\vec{i} - 4\vec{k} \text{ bo'ladi.}$$

Endi (9.38) yoki (9.39) formulaga ko'ra $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektorning uzunligini hisoblaymiz:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

V e k t o r n i n g y o' n a l t i r u v c h i k o s i n u s l a r i. Biror $\vec{a}\{a_x, a_y, a_z\}$ vektor berilgan bo'lsin. Bu vektor bilan $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ortlar orasidagi burchaklarni mos ravishda α, β va γ bilan belgilaylik (67-chizma). cosα, cosβ va cosγ lar $\vec{a}$ vektorning *yo'naltiruvchi kosinuslari* deyiladi.



67-chizma

Vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari orasida

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (9.40)$$

bog'lanish mavjud.

Boshlang'ich nuqtasi $A(x_1; y_1; z_1)$ va oxirgi nuqtasi $B(x_2; y_2; z_2)$ bo'lgan $\overrightarrow{A_1B_1}$ vektorning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari

$$pr_{ox}\overrightarrow{A_1B_1} = x_2 - x_1,\ pr_{oy}\overrightarrow{A_1B_1} = y_2 - y_1,\ pr_{oz}\overrightarrow{A_1B_1} = z_2 - z_1$$

bo'lib uning yo'naltiruvchi kosinuslari esa

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

bo'ladi.

$\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ radius-vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari esa quyidagicha hisoblanadi:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{r}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{r}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

M i s o l. $\vec{a}$ vektor Ox o'q bilan $\alpha = 60°$, Oy o'q bilan $\beta = 45°$ burchak hosil qiladi. Agar $|\vec{a}| = 3$ bo'lsa, uning koordinatalarini aniqlang.

$\vec{a}$ vektorning Oz o'q bilan hosil qilgan burchagini topish uchun (8.17)

formuladan foydalanamiz:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + cos^2\gamma = 1$$

Demak,

$$\cos\gamma = \frac{1}{2}; \qquad \gamma = 60^\circ$$

$\vec{a}$ vektorning koordinatalarini aniqlash uchun

$$a_x = |\vec{a}|\ \cos\alpha, \qquad a_y = |\vec{a}|\ \cos\beta, \qquad a_z = |\vec{a}|\ \cos\gamma,$$

formuladan foydalanamiz:

$$a_x = \frac{3}{2}; \qquad a_y = \frac{3}{\sqrt{2}}; \qquad a_z = \frac{3}{2};$$

I k k i v e k t o r n i n g s k a l y a r k o' p a y t m a s i. Ikki $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar berilgan bo'lsin. Bu vektorlar uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusining ko'paytmasi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning *skalyar ko'paytmasi* deyiladi va $\vec{a} \cdot \vec{b}$ yoki ($\vec{a} \cdot \vec{b}$) kabi yoziladi.

Demak,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(\vec{a},\vec{b}\right) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) \qquad (9.41)$$

Vektorlarning skalyar ko'paytmasini quyidagicha ham yozish mumkin:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = |\vec{a}|np_a\vec{b} = |\vec{b}|np_b\vec{a} \qquad (9.41)$$

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lganda ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng, ya'ni $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ · $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ortlarning skalyar ko'paytmalari

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{i} = 0 \qquad \vec{i}\cdot\vec{i} = 1,$$

$$\vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0, \qquad \vec{j}\cdot\vec{j} = 1,$$

$$\vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{j} = 0, \qquad \vec{k}\cdot\vec{k} = 1.$$

bo'ladi.

Agar $\vec{a}$ $\{a_x; a_y; a_z\}$. $\vec{b}$ $\{b_x; b_y; b_z\}$ bo'lsa,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \qquad (9.42)$$

$$\cos\varphi = \cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a||b|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}\sqrt{b_x{}^2 + b_y{}^2 + b_z{}^2}}$$

bo'ladi.

Agar $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \qquad (9.42')$$

bu vektorlar **ortogonal vektorlar** deyiladi. R^3 fazoda orthogonal vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'ladi.

Ikki vektorning vektor ko'paytmasi. $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektor bilan vektor ko'paytmasi deb $\vec{a} \times \vec{b}$ yoki $[\vec{a};\vec{b}]$ shaklda belgilanadigan shunday $\vec{c}$ vektorga aytiladiki, bu vektorning uzunligi va yo'nalishi quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

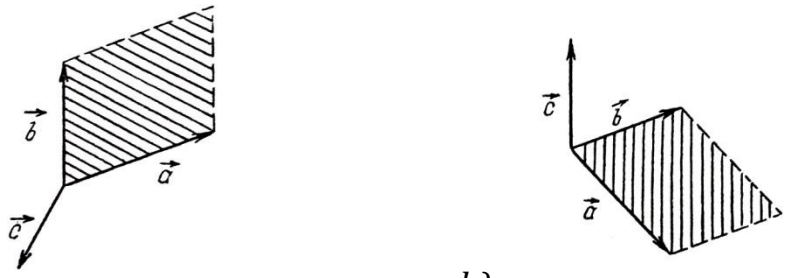
1) $\vec{c}$ vektorning uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga yasalgan parallelogramning yuziga teng, ya'ni

$$|\vec{c}| = a \cdot b \cdot \sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right), \qquad (9.43)$$

2) $\vec{c}$ vektor shu parallelogramm tekisligiga perpendikulyar, ya'ni u ham $\vec{a}$ vektorga, ham $\vec{b}$ vektorga perpendikulyar;

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \text{ va } \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 .$$

3) $\vec{c}$ vektor shunday tomonga yo'nalganki, uning uchidan qaraganda $\vec{c}$ vektor atrofida $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorga ega kichik burchak bilan aylanish soat strelkasi aylanishiga qarama-qarshidir (68-chizma).



a) *b)*

68-chizma

Vektor ko'paytmaning asosiy xossalari:

1°. $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\vec{a}\right]$,

2°. $\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right] = \left[\vec{a},\vec{c}\right] + \left[\vec{b},\vec{c}\right]$,

3°. $\left[\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}\right]=\lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right]$,

4°. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa, $[\vec{a}\cdot\vec{b}]=0$, xususiy holda $[\vec{a}\cdot\vec{a}]=0$ bo'ladi. Ortlarning vektor ko'paytmalari quyidagicha:

$$\left[\vec{i},\vec{j}\right]=-\left[\vec{j},\vec{i}\right]=\vec{k},\qquad \left[\vec{i},\vec{i}\right]=0,$$

$$\left[\vec{j},\vec{k}\right]=-\left[\vec{k},\vec{j}\right]=\vec{i},\qquad \left[\vec{j},\vec{j}\right]=0,$$

$$\left[\vec{k},\vec{i}\right]=-\left[\vec{i},\vec{k}\right]=\vec{j},\qquad \left[\vec{k},\vec{k}\right]=0.$$

Agar $\vec{a}$ $\{a_x; a_y; a_z\}$. $\vec{b}$ $\{b_x; b_y; b_z\}$ bo'lsa, ularning vektorli ko'paytmasi:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\,\vec{j}+$$

$$+(a_xb_y-a_yb_z)\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \qquad (9.44)$$

bo'lib, uning moduli

$$\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\|=\sqrt{(a_yb_x-a_zb_y)^2+(a_xb_z-a_zb_x)^2+(a_xb_y-a_yb_x)^2}$$

formula bilan hisoblanadi.

Uchlari A$(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, C $(x_3; y_3; z_3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning yuzi

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left\|\left[\vec{AB},\vec{AC}\right]\right\| \qquad (9.45)$$

formula bilan hisoblanadi.

M i s o l-1. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak $\varphi=\frac{\pi}{4}$ ga teng va $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=3$ ekanligi ma'lum. $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$ vektorning uzunligini toping.

$\vec{c}$ vektorning uzunligini topish uchun vektorlarning skalyar ko'paytmalaridan foydalanamiz. $\vec{a}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{a^2}$ deb belgilab va $\overrightarrow{a^2}=|a^2|$ ni e'tiborga olib, berilgan vektorning har ikki tomonini kvadratga ko'taramiz:

$$\overrightarrow{c^2} = (2\vec{a} + 3\vec{b})^2 = 4\overrightarrow{a^2} + 12\vec{a}\ \vec{b} + 9\overrightarrow{b^2}.$$

Berilganlarga asosan:

$$\overrightarrow{a^2} = |\vec{a}|^2 = 2; \quad \overrightarrow{b^2} = |\vec{b}|^2 = 9.$$

Demak,

$$\overrightarrow{c^2} = 4 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + 9 \cdot 9 = 125, \text{ bundan } |\vec{c}| = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}\ .$$

Misol -2. Quyidagi vektorlarni qaraymiz $\overline{a_1}$ = (3;13;-8), $\overline{a_2}$ (0;-4;5), $\overline{a_3}$ = (3;13-8), ko‘rsatish mumkinki C_1= 3, C_2 = - 5, C_3= -2 bo‘lganda (9.46) shart bu bektorlar uchun bajariladi

$$3\ \overline{a_1} - 5\ \overline{a_2} - 2\ a_3 = 0\ .$$

Demak, $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ vektorlar chiziqli bog‘langan vektorlar ekan. Kollinear vektorlar chiziqli bog‘langan vektorlar bo‘ladi.

$\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_k}$ vektorlar uchun (1) tenglik faqat va faqat $C_1 = C_2 = \dots = C_K = 0$ shartda bajarilsa, u holda bu vektorlar chiziqli bog‘lanmagan vektorlar deyiladi.

Misol -3. Bozordan 2 kg olma, 3 kg uzum, 1 kg nok, 2 kg anor sotib olindi. Sotib olingan mevalarning miqdorini $\overline{a} = \{2;3;1;4\}$ vektor shaklida yozamiz. Agar 1 kg olma 2000 so‘m, uzum 3000 so‘m., nok 4000 so‘m, anor 5000 so‘m bo‘lsa, ularni bahosini $\overline{b} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 3000 \\ 4000 \\ 5000 \end{pmatrix}$ ustun vektor shaklida yozish mumkin. natijada jami xarajatlar ikki vektorni skalyar ko‘paytmasi shaklida aniqlanadi $\overline{a} \bullet \overline{b}$ ya’ni, $\vec{a}\{a_x; a_{y.}; a_z\}$, $\vec{в}\{в_x; в_{y.}; в_z\}$, bo‘lsa $\vec{a} \cdot \vec{в} = a_x в_x + a_y в_y + a_z в_z$. bizni misol uchun

$$\overline{a} \bullet \overline{b} = (2;3;1;2) \begin{pmatrix} 2000 \\ 3000 \\ 4000 \\ 5000 \end{pmatrix} = 2 \bullet 2000 + 3 \bullet 3000 + 1 \bullet 4000 + 2 \bullet 5000 = 27000 \text{ SO‘M}$$

Misol- 4. Uchlari 0(0;0;0), A (5;2;0), B(2;5;0), C(1;2;4) nuqtalarda bo‘lgan piramidani hajmini toping.

Yechish: vektorlar ustida amallarga asosan $\overline{OA} = 5i + 2j = (5;2;0)$, $\overline{OB} = 2i + 5j = (2;5;0)$, $\overline{OC} = i + 2j + 4k = (1;2;4)$ ma’lumki piramidani hajmi $V_{PIR} = \frac{1}{6}\ V_{PARAL}$ shu sababli

$$V_{PIR} = +\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}(100-16) = \frac{1}{6}\bullet 84 = 14$$ kub. birlik ekan

10-§. Ortogonal vektorlarni baho va infillyasiya indekslarini aniqlashga qo‘llanilishi

Biz ushbu mavzuda vektorlar nazariyasi yordamida, pulning qadrlanish jarayonini baholashni o‘rganamiz.

Bizga koordinatalari bilan $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_k}$ vektorlar berilgan bo‘lsin. Agar shu vektorlar uchun kamida bittasi noldan farqli $C_1, C_2, \dots, C_K$ sonlar mavjud bo‘lib, ular uchun

$$C_1\ \overline{a_1} + C_2\ \overline{a_2} + \dots + C_K\ \overline{a_k} = 0 \qquad (1)$$

shart bajarilsa, $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_k}$ chiziqli bog‘langan vektorlar deyiladi.

Chiziqli bog‘lanmagan vektorlarni baho va inflyasiya indekislarini aniqlashga qo‘llanilishga to‘xtalib o‘tamiz. Ma’lumki, $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlarni skalyar ko‘paytmalari nolga teng bo‘lsa, bu vektorlar ortogonal (1) vektorlar bo’ladi:

$$\overline{a} \bullet \overline{b} = (\overline{a}\ ;\ \overline{b}) = 0.$$

Faraz qilaylik $\overline{a}$ vektor iste’mol qilinadigan mahsulotlarni miqdorlari, $\overline{b}_{o‘t}$ vektor har bir mahsulotni o‘tgan oydagi (yildagi) bahosi, $\overline{b}_{hoz}$ vektor mahsulotlarni hozirgi vaqtdagi baholari bo‘lsin.

Baho indeksi quyidagi formula bilan aniqlanadi([9]- [15]):

$$p = \frac{\overline{(b_{hoz}; a)}}{\overline{(b_{o't}; a)}} 100\% \qquad (9.47)$$

Baho indeksini $\overline{a}$ va $100\ \overline{b}_{hoz}$ - $P\ \overline{b}_{o‘t}$ vektorlar o‘zaro chiziqli bog‘lanmagan vektorlar bo’lganligidan, ularni skalyar ko’paytmalari nolga teng bo’ladi:

$$p\ (\overline{b}_{o‘t};\ \overline{a}) = 100\ (\overline{b}_{hoz};\ \overline{a}), \quad \text{yoki} \quad (100\ \overline{b}_{hoz} - p\ \overline{b}_{o‘t};\ \overline{a}) = 0$$

Bundan inflyasiya indeksini aniqlash formulasi quyidagicha bo’ladi

$$i = p - 100\% = \frac{(\overline{b}_{hoz;}\overline{a})}{(\overline{b}_{o'r;}\overline{a})} 100\% - 100\% = \frac{(\overline{b_{hoz}} - \overline{b_{o'r}};\ \overline{a})}{(\overline{b_{hoz}};\ \overline{a})} 100\% \qquad (9.48)$$

Bu formulani qullanilishiga sonli misol keltiramiz

Misol-1. Faraz qilaylik kundalik iste’mol qilinadigan mahsulotlarning baholari quyidagicha bo’lsin (Sentyabr 2020, aprel 2021):

Iste'mol mollarinining turlari	Iste'mol qilinadigan mahsulot miqdori birligi (kg)	Bir birlik mahsulotning o'tgan oydagi bahosi, so'm	Birlik mahsulot. hozirgi vaqtdagi bahosi, so'm
1. Non	1	1200	1600
2. Go'sht	1	50000	60000
3. Yog'	1	12000	16000
4. Shakar	1	6000	7000
5. Tuxum	1	800	1000
6. Gurunch	1	6000	8000
7. Kartoshka	1	3500	4000
8. Piyoz	1	1500	2000
9. Sabzi	1	1500	2500
10. Choy	1	17000	18000
11. Sovun	1	3000	3500
12 .Tuz	1	1200	1500
13. УН	1	5000	5500
14.	1	5000	6000
Jami xarajat, so'mda		113700	136600

Jadvaldan $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar quyidagicha bo'ladi:

$$\bar{a} = (1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1 ;1; 1; 1;1;1) \ ,$$

$\bar{b}_{o't}$ = (1200; 50000; 12000; 6000; 800; 6000; 3500; 1500; 1500; 17000; 3000;1200; 5000; 5000) 1 kg mahsulotning sentyabr 2020 oyidagi o'rtacha bahosi, so'm hisobida,

$\bar{b}_{hoz}$ = (1600; 60000; 16000; 7000; 1000; 8000; 4000; 2000; 2500; 18000; 3500; 1500; 5500; 6000) 1 kg mahsulotning aprel 2021 oyidagi o'rtacha bahosi, so'm hisobida.

(9.47) baho indeksini hisoblash formulasidan, hamda koordinatalari bilan berilgan vektorlarni skalyar ko‘paytmalarini topish qoidasidan foydalanib, quyidagiga ega bo‘lamiz $p = \frac{\overline{(b_{hoz}; a)}}{\overline{(b_{o't}; a)}} 100\%$:

$$p = \frac{136600}{113700} 100\% \approx 120\%.$$

(9.48) formulaga asosan inflyasiya indeksi

$$i = p - 100\% = (120 - 100)\% = 20\ \%$$

Demak, bizni misol uchun inflyasiya indeksi taxminan 20% ekan.

Mavzu boyicha tekshirish uchun savollar :

1. Vektor haqida tushuncha bering ?
2. Vektorning modeli koordinatalari orqali qanday ifodalanadi ?
3. Vektorlarning kolleniarlik shartlari ?
4. Vektorlarning skalyar ko’paytmasi qanday formula bilan aniqlanadi?
5. Ikki vektor orasidagi burchak. Vektorlarning perpendikulyarlik va parallel-lik shartlari ?
6. Ikki vektorning vektorko’paytmasi nima ?
7. Vektorlarning aralash ko’paytmasi deb nimaga aytiladi ?
8. Qanday vektorlar komplanar vektorlar deyiladi?
9. Uch vektorlarning aralash ko’paytmasining ma’nosi va tatbiqlari.
10. Ortogonal vektorlarni baho va ihflatsiya indekslarini aniqlashga qo’llanilishiga misollar keltiring?

Kalit so’zlar

Vektor, vektorning model, kolleniarlik, skalyar ko’paytma, vektorlar orasidagi burchak, vektorlarning perpendikulyarlik, ko’paytma, komplanar vektorlar, uch vektorlarning aralash ko’paytmasi, ortogonal vektorlar, baho va ihflatsiya indekslari.

Xulosa

Vektor, vektorning modeli, vektorlar ustida amallar, kolleniarlik sharti, skalyar ko’paytmasi, vektorlar orasidagi burchak, vektorlarning perpendikulyarlik, parallellik shartlari, ikki vektorning vectorli ko’paytmasi, aralash ko’paytmasi, komplanar vektorlar, uch vektorlarning aralash ko’paytmasi, ortogonal vektorlar va ularning baho va ihflatsiya indekslarini aniqlashga qo’llanish masalalari o’rganilgan.

III QISM

X BOB. MATEMATIK TAHLIL

1-§. Dastlabki tushunchalar

To'plam tushunchasi matematikaning boshlang'ich va ayni paytda muhin tushunchalaridan biri. To'plamni misollar yordamida tushuntiramiz. Masalan, shkafdagi kitoblar to'plamini, natural sonlar to'plami, biror xo'jalikdagi qishloq xo'jalik mashinalari to'plami, bir nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar to'plami[2].

To'plamni tashkil etgan narsalar uning *elementlari* deyiladi. Matematikada to'plamlarni bosh xarflar bilan (masalan, $A, B, \ldots$), uning elementlarini esa kichik xarflar bilan (мasalan, $a, b, \ldots$) belgilanadi.

Agar A to'plamning elementi bo'lsa ,uni $a \in A$ kabi yoziladi va *a element A to'plamga tegishli* deb o'qiladi. Agar a element A to'plamning elementi bo'lmasa, $a \overline{\in} A$kabi yoziladi.

Chekli sondagi elementlardan tashkil topgan to'plam *chekli to'plam* deb ataladi. Masalan, biror xo'jalikdagi qishloq xo'jalik mashinalaridan tashkil topgan to'plam chekli to'plam bo'ladi. Chekli bo'lmagan to'plam *cheksiz to'plam* deyiladi. Masalan, natural sonlar to'plami cheksiz to'plam bo'ladi. Odatda bu to'plamni N harfi bilan belgilanadi: $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

Elementlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan to'plam *sonly to'plam* deyiladi.

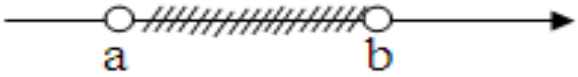
Barcha haqiqiy sonlar to'plami R harfi bilan belgilanadi ($R = (-\infty; +\infty)$).
Iikkita a va b ($a<b$) haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin. Ushbu $a \le x \le b$ tengsiz-

liklarni qanoatlantiruvchi haqiqiy sonlardan iborat to'plam *segment* (yopiq oraliq) deb ataladi va $[a; b]$ kabi belgilanadi. Demak, $[a; b] = \{x \in R: a \le x \le b)$.

Ushbu $a < x < b$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi haqiqiy sonlardan iborat

O'rta maktab matematika kursida natural sonlar,butun sonlar, ratsoinal sonlar va haqiqiy sonlar o'rganilgan. Ma'lumki, ratsional va irratsional sonlar haqiqiy sonlar deyiladi. Har bir haqiqiy songa to'g'ri chiziqda (sonlar o'qida)bitta

nuqta mos keladi va aksincha. Shu sababli haqiqiy sonni nuqta deb ham qaraladi.



shakl-69

to'plam *interval* (ochiq oraliq) deb ataladi va $(a;\ b)$ kabi belgilanadi.

Demak,

$$(a;\ b) = \{x \in R:\ a < x < b\}.$$

Ushbu

$$a \le x < b \qquad a < x \le b$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi haqiqiy sonlardan iborat to'plamlar *yarim interval* deb ataladi va ular mos ravishda $[a,\ b)$ va $(a;\ b]$ kabi belgilanadi. Demak,

$$[a;\ b) = \{x \in R:\ a \le x < b\}, \quad (a;\ b] = \{x \in R:\ a < x \le b\}.$$

70-shakl

Bu to'plamlar to'g'ri chiziqda kesmalarni ifodalaydi (70-chizma). ($[a;\ b]$ segment bo'lgan holda kesmaning chetki nuqtalari a va b lar shu kesmaga tegishli bo'ladi, $(a\ ;\ b)$ interval bo'lgan holda kesmaning chetki nuqtalari a va b lar kesmaga tegishli bo'lmaydi, $[a;\ b)$ va $(a;\ b]$ yarim intervallar bo'lgan holda esa kesmaning chetki nuqtalaridan biri shu kesmaga tegishli bo'lib, ikkinchisi esa tegishli bo'lmaydi.

2-§. Sonning absolyut qiymati

10.1-ta'rif. Musbat sonning *absolyut qiymati* deb o'sha sonning o'ziga aytiladi. Manfiy sonning *absolyut qiymati* deb shu songa qarama-qarshi songa aytiladi. Nol sonning *absolyut qiymati* deb nol sonning o'zi olinadi. Odatda x sonning absolyut qiymati $|x|$ kabi belgilanadi. Demak,

$$|x| = \begin{cases} x; & agar\ \ x > 0\ \ bo'lsa, \\ -x, & agar\ \ x < 0\ \ bo'lsa, \\ 0, & agar\ \ x = 0\ \ bo'lsa. \end{cases}$$

M i s o l. $|17| = 17$, $|(-17)| = -(-17)=17$.

Sonning absolyut qiymati ta'rifidan bevosita ushbu

$$|x| \ge 0, \quad |x| = |-x|, \quad x \le |x|, \quad -x \le |x| \qquad (*)$$

Munosabatlar kelib chiqadi.

Absolyut quyidagi xossalarga ega:

1°. Ushbu $|x| \geq a$ va $-a < x < a$ $(a > 0)$ tengsizliklar o'zaro ekvivalentdir.

2°. Ikki x va y sonlar yig'indisining absolyut qiymati bu sonlar absolyut qiymatlari yig'indisidan katta emas:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

3°. Ikki x va y sonlar ayirmasi uchun

$$|x - y| \geq |x| - |y|$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

4°. Ikki x va y sonlar ko'paytmasi va bo'linmasi uchun

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \; ; \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$$

Tengliklar o'rinli bo'ladi.

Bu xossalarning isboti qiyin emas.Ularning birini, masalan, 2°-xossaning isbotini keltiramiz.

2°-x o s s a n i n g i s b o t i. Ikki xolni qaraylik:

a) $x + y > 0$ bo'lsin. U holda ta'rifga ko'ra

$$|x + y| = x + y$$

bo'ladi. Agar (*) munosabatga ko'ra $x \leq |x|$, $y \leq |y|$ ekanini e'tiborga olsak, unda

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y| \qquad \backslash$$

bo'lishini topamiz.

б) $x + y < 0$ bo'lsin. U holda

$$|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y).$$

Yana (*) munosabatdan foydalanib, $(-x) + (-y) \leq |x| + |y|$ va demak $|x + y| \leq |x| + |y|$ bo'lishini topamiz. Demak, har doim

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

bo'lar ekan.

M i s o l. $|2x - 3| < 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x ning qiymatlar to'plami topilsin.

Y e ch i sh. Yuqorida keltirilgan 1°- xossaga ko'ra berilgan tengsizlik $-1 < 2x - 3 < 1$ tengsizliklarga teng kuchli. Bu tengsizliklardan esa

$$2 < 2x < 4, \text{ ya'ni } 1 < x < 2$$

bo'lishi kelib chiqadi.

3-§. O'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar

Tabiatda turli qiymatlarni qabul qiladigan miqdorlarga duch kelamiz. Masalan, o'quvchilarga to'rtburchak chizishni aytilsa, ularning turli xil to'rtburchaklarni (kvadrat, romb, parallelogram, to'g'ri to'rtburchak, va h.k.) chizishini ko'ramiz.

Ravshanki, bu to'rtburchaklarning perimetrlari (tomonlar uzunliklarining yig'indisi) har xil bo'ladi. Demak, to'rtburchak perimetri turli qiymatlarni qabul qila oladigan miqdor ekan. Odatda bunday miqdorni *o'zgaruvchi miqdor* deb ataladi.

Endi har xil radiusli aylanalarni qaraylik. Bu aylanalar uzunliklarini mos diametrlariga nisbatini har doim bitta songa - d soniga teng bo'lishini aniqlaymiz. Demak, xar qanday aylana uzunligini uning diametriga nisbatini ifodalovchi miqdor bitta qiymatga π soniga teng bo'ladi. Bunday miqdor *o'zgarmas miqdor* deb ataladi.

Ko'pincha o'zgaruvchi miqdorlar x y, z, . . . harflari bilan belgilanadi. Agar o'zgaruvchi miqdorning qabul qila oladigan qiymatlaridan tashkil topgan to'plam ma'lum bo'lsa, u holda o'zgaruvchi miqdor berilgan deyiladi

Matematik analizda elementlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan to'plamlar qaraladi. Biz bundan keyin X to'plam deganda yo segment, yoki intervalni, yoki yarim intervalni— oraliqni tushunamiz

Matematikada ayrim so'z yoki iboralar tez-tez takrorlanib turadi. Odatda, yozuvni qisqartirish maqsadida bu so'z yoki iboralar o'rniga matematik belgilar (mantiqiy simvollar) ishlatiladi. Masalan, «ixtiyoriy, barchasi uchun so'zlari o'rniga «$\forall$» belgi, . . . bo'lsa, . . . bo'ladi» yoki «kelib chiqadi» iborasi o'rniga ushbu $\Rightarrow$ belgi ishlatiladi. Ikkita fakt ekvivalent bo'lsa, ular $\Leftrightarrow$ belgisi orqali yoziladi.

4-§. Funksiya tushunchasi

Ikkita X va Y haqiqiy sonlar to'plami berilgan bo'lsin. x o'zgaruvchi X to'plamda, y o'zgaruvchi Y to'plamda o'zgarsin.

10. 2-t a' r i f. Agar X to'plamdagi har bir x songa biror qoida yoki qonunga ko'ra Y to'plamdan bitta y son mos qo'yilgan bo'lsa, X to'plamda funksiya berilgan (aniqlangan) deb ataladi va u

$$y = f(x)$$

kabi belgilanadi.

Bu yerda X to'plam funksiyaning *aniqlanish sohasi,* Y esa funksiyaning *o'zgarish sohasi* deyiladi.

x *erkli o'zgaruvchi* yoki *funksiya argumenti,* y esa *erksiz o'zgaruvchi* yoki x *o'zgaruvchining funksiyasi* deb ataladi.

Demak, funksiya berilgan bo'lishi uchun:

1) X to'plam berilishi kerak (ko'p hollarda uni x bilan y o'zgaruvchilarning bog'lanishiga ko'ra topiladi).

2) x o'zgaruvchining X to'plamdan olingan har bir qiymatiga unga mos qo'yiladigan y uni aniqlab beradigan qoida yoki qonun berilishi kerak (ta'rifda uni f harfi bilan belgilanadi).

M i s o l l a r. 1. f $X = (-\infty; +\infty)$ to'plamga tegishli bo'lgan har bir x songa

uning kvadratini mos qo'yuvchi qoida bo'lsin. Bu holda $y = f(x) = x^2$ funsiya hosil bo'ladi. Bu funksiya (—∞; +∞) da aniqlangan.

2. f har bir $x \in [0; +\infty)$ songa u sondan olingan kvadrat ildiz сонга $\sqrt{x}$ ni mos qo'ysin. Bu holda ham funksiyaga ega bo'lamiz: $y = \sqrt{x}$. Uning aniqlanish sohasi $X = [0; +\infty)$ bo'ladi.

$y = f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan bo'lsin. X to'plamdan biror x_0 nuqtani olib, shu nuqtaga mos keluvchi y o'zgaruvchining qiymatini topamiz. Uni y_0 bilan belgilaymiz. Bu y_0 son $y = f(x)$ funksiyaning $x = x_0$ nuqtadagi *xususiy qiymati* deb ataladi va uni $f(x_0) = y_0$ kabi yoziladi. Masalan, $y = f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ funksiyaning $x = 1$ nuqtadagi xususiy qiymati $f(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 4$ bo'ladi. Demak, $f(1) = 4$.

M i s o l. Quyidagi funksiyaning aniqlanish sohasi topilsin:

$$y = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{2-x}}.$$

Y e c h i s h. Bu misolda x argumentning har bir qiymatga mos keladigan y ning qiymati haqiqiy bo'lishi uchun

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ 2 - x > 0 \end{cases}$$

bo'lishi kerak. Bu tengsizliklar sistemasini yechib, $1 \leq x < 2$ bo'lishini topamiz. Demak, berilgan funksiyaning aniqlaninsh sohasi $x = [1; 2)$ yarim intervaldan iborat bo'ladi.

5-§. Funksiyaning berilish usullari

Funksiya ta'rifida keltirilgan x o'zgaruvchining har bir qiymatiga mos qo'yiladigan y ni aniqlab beruvchi qoida yoki qonun turlicha bo'ladi. Binobarin, funksiyaning berilishi ham turlichadir. Quyida funksiyaning analitik, jadval va grafik usullarda berilishini qisqacha bayon etamiz.

1. Funksiyanin g analitik usulda berilshi. x o'zgaruvchining har bir qiymatiga ko'ra unga mos keladigan y ning qiymati x ustida analitik amallarning bajarilishi natijasida, ya'ni formulalar yordamida berilishi mumkin. Masalan,

$$y = x^2 + 1, \quad y = \frac{x+1}{x^2+1}, \quad y = \log_2(x+1).$$

Funksiyaning bunday berilishi *funksiyaning analitik usulda berilishi* deyiladi.

2. Funksiyaning jadval usulid a berilishi. Ba'zan x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'laninsh, ya'ni x o'zgaruvchining qiymatiga mos keladigan y o'zgaruvchining qiymatini ko'rsatish (topish) jadvak shaklida berilishi mumkin. Masalan, kuzatish natijasida, suvni (yopiq idishda) qizdirilganda P_1 bosim ostida uning qaynash harorati t_1, p_2 bosim ostida uning qaynash harorati t_2 va h.k.

bo'lishini topaylik. Natijada quyidagi jadvalga kelamiz:

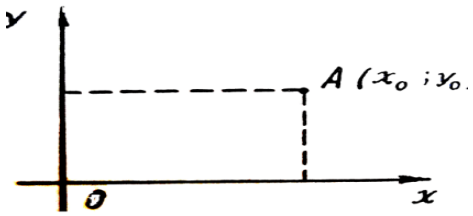
Bosim, p	p_1	p_2	...	p_n
Harorat, t	t_1	t_2	...	t_n

Ravshanki, bu holda p bosim bilan t harorat orasida bog'lanish bo'lib, p argument t funksiya bo'ladi. Odatda funksiyaning bunday berilishi funksiyaning jadval usulid a berilishi deyiladi.

3. Funksiyaning grafik usulida berilishi . Ba'zan x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish tekislikdagi chiziq (egri chiziq) yordamida amalga oshishi mumkin. Aytaylik, xOy tekislikda biror l chiziq berilgan bo'lsin. (71-chizma). Ox o'qida shunday x nuqtalarni qaraylikki, bu nuqtalardan Oy o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazilganda ular l chiziqni bitta nuqtada kessin. Ox o'qidagi bunday nuqtalar to'plamini X orqali belgilaymiz. Endi bu X to'plamdan biror x nuqtani olib, bu nuqtadan Ox o'qiga perpendikulyar chiqaramiz. Perpendikulyarni l chiziq bilan kesishgan A nuqtaning ordinatasini y bilan belgilab, olingan x ga shu y ni mos qo'yamiz. Ravshanki, bunday moslik l chiziq orqali bajariladi. Natijada X to'plamdan olingan har bir x ga ko'rsatilgan qoidaga ko'ra y mos qo'yilib, funksiya hosil bo'ladi. Funksiyaning bunday berilishi *funksiyaning grafik usulda berilishi* deyiladi.

6-§. Funksiyaning grafigi

Funksiyaning xususiyatlarini to'liqroq tasavvur etishda uning grafigini bilish ahamiyatlidir. Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya biror X oraliqda berilgan bo'lib $x_0 \in X$bo'lsin. Bu funksiyaning $x_0$nuqtadagi qiymatini topamiz: $f(x_0) = y_0$. Natijada $(x_0; y_0)$ juftik. hosil bo'ladi. Tekislikda Dekardkoordinata sistemasini olaylik. Yuqoridagi $(x_0; y_0)$ juftlik tekislikda biror A nuqtani tasvirlaydi (72-chizma).



72-chizma

Funksiya argument x ning X oraliqdan olingan har bir qiymatiga funksiyaning mos qiymati $f(x) = y$bo'lsin. Ular yordamida $(x; y)$ $(y = f(x))$ juftliklar hosil bo'ladi. Bu juftliklarni tekislikda nuqtalarsifatida tasvirlaymiz. Ushbu

$$\{(x; y): x_0 \in X, (y = f(x)\}$$

Nuqtalar to'plami berilgan $y = f(x)$ funksiyaning *grafigi* deb ataladi.

$y = f(x)$ funksiya X oraliqda berilgan bo'lsin. Bu funksiyaning grafigi quyidagicha yasaladi:

1) fuksiyaning aniqlanish sohasidan bir nechta $x_1, x_2 \ldots, x_n$qiymatlar olinadi;
2) argumentning shu qiymatlariga mos funksiyaning qiymatlari topiladi:

$$f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2,\ f(x_n) = y_n;$$

3)ushbu jadvalni tuzib olinadi:

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
$y= f(x)$	y_1	y_2	y_3	…	y_n

4) tekislikda $A_1 = A_1\ (x_1;\ y_1)$, $A_2 = A_2\ (x_2;\ y_2)$, . . , $A_n = A_n\ (x_n;\ y_n)$ nuqtalar yasaladi.

Бу $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nuqtalarni o'zaro tutashtirsak, hosil bo'lgan chiziq $y = f(x)$ funksiyaning grafigini (tartiban)tasvirlaydi.

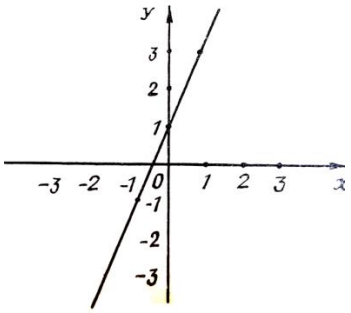
M i s o l l a r. 1. $y = f(x) = 2x + 1$ funksiyaning grafigi chizilsin.

Y e c h i s h .ravshanki, bu funksiya (—∞; +∞)da aniqlangan, x o'zgaruvchining —3, —2, — 1, 0, 1, 2, 3 qiymatlarini olib,funksiyaning ularga mos qiymatlarini topamiz: $f(-3) =- 5$, $f(-2) = -3$, $f(-1) = -1$, $f(0)=1$, $f(1) = 3$, $f(2) = 5$, $f(3) = 7$.

Natijada quyidagi jadvalni hosil qilamiz:

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y= f(x)$	-5	-3	-1	1	3	5	7

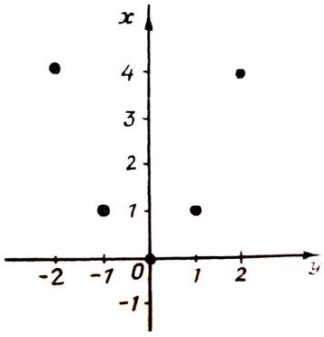
So'ng (-3; -5), (-2; -3), <-1;~1), (0; 1) (1; 3), (2; 5), (3; 7) nuqtalarni tekislikda belgilab va ularni o'zaro tutashtirib, berilgan funksiyaning grafigini yasaymiz. (73-chizma).



73-chizma

2. $y = f(x) = x^2$ funksiyaning grafigi chizilsin.

Bu funksiya (—∞; +∞)oraliqda berilgan. Funksiya argument x ning bir nechta qiymatlarini olib, ularga mos funksiya qiymatlarini topamiz va jadval tuzamiz. So'ng funksiya qiymatlarini chizamiz (74-chizma).

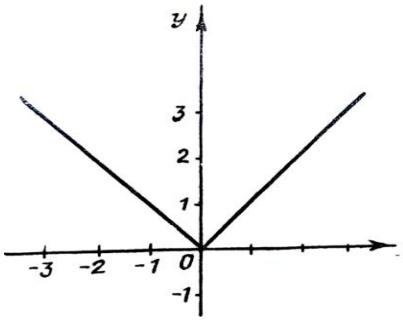


74-chizma

3. y = | x |funksiyaning qiymatlari chizilsin. absolyut qiymat ta'rifiga ko'ra

$$y = |x| = \begin{cases} x, & agar \quad x \geq 0 \quad bo'lsa, \\ -x, & agar \quad x < 0 \quad bo'lsa, \end{cases}$$

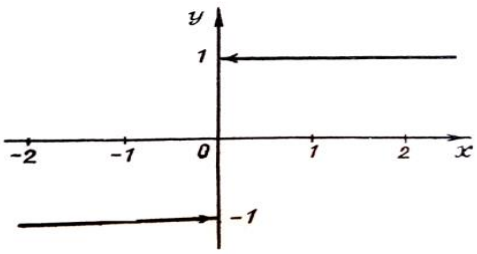
Bu funksiyaning grafigi 75-chizmada ko'rsatilgan



75-chizma

$$y = \begin{cases} 1, & agar \quad x > 0 \quad bo'lsa, \\ -0, & agar \quad x = 0 \quad bo'lsa, \\ -1, & agar \quad x < 0 \quad bo'lsa \end{cases}$$

funksiyaning grafigi 76-chizmada tasvirlangan.



76-chizma

7- §. Funksiyaning chegaralanganligi

$y = f(x)$ funksiya X oraliqda berilgan bo'lsin. Agar shunday o'zgarmas M $(M > 0)$ soni topilsaki, $\forall x \in X$ uchun $|f(x)| \leq M$ tengsizlik bajarilsa, u holda $y = f(x)$ funksiya X oraliqda *chegaralangan* deb ataladi, Masalan, $y = f(x) = x^2$ funksiya $X = (0, 1)$oraliqda chegaralangan bo'ladi, chunki $\forall x \in (0,1)$ uchun $|f(x)| \leq 1$ $(M = 1)$ Bo'ladi.

Ushbu $y = \frac{1}{x}$ funksiya (0,1)oraliqda berilgan, ammo bu funksiya shu oraliqda chegaralangan emas.

8- §. Juft va toq funksiyalar

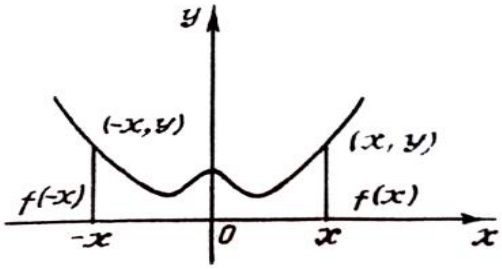
$y = f(x)$ funksiya Xoraliqda aniqlangan bo'lib, $\forall x \in X$ bo'lsin. (masalan, (— 1; 1), [— 3; 3] oraliqlar aytilgan hususiyatlarga ega bo'ladi.)

10.3-ta'rif . agar $\forall x \in X$ uchun $f(-x) = f(x)$ teglik batarilgan bo'lsa, u holda f (x) *juft funksiya*deb ataladi.

masalan, $y = x^2$, $y = |x|$, $y = \cos x$ funksiyalarjut funksiyalar bo'ladi, chunki

$$(-x)^2 = x^2, \quad |-x| = |x|, \cos(-x) = \cos x.$$

Juft funksiyaning grafigi ordinate o'qiga nisbatan simmetrik joylashga bo'ladi (77-chizma).



77-chizma

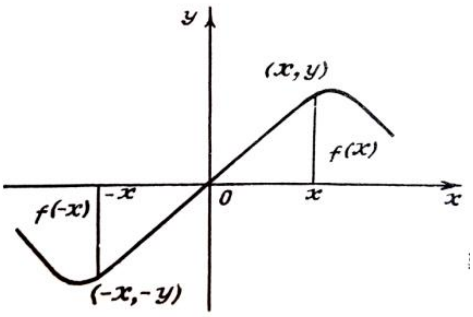
10.4-ta'rif. Agar $\forall x \in X$ uchun $f(-x) = -f(x)$

tenglik bajarilsa, u holda $f(x)$ toq funksiya deb ataladi.

Masalan, $y = x^3$, $y = \sin x$ funksiyalar toq funksiyalar bo'ladi, chunki

$$(-x)^3 = -x^3, \quad \sin(-x) = -\sin x.$$

Toq funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashgan bo'ladi (78-chizma).



78-chizma

10.2-eslatma. Funksiya har doim juft yoki toq bo'lavermaydi. Masalan, ushbu $y = x^2 - x$, $y = \sin x - \cos x$ funksiyalar juft ham toq ham emas.

9-§. Monoton funksiyalar

$y = f(x)$ funksiya X oraliqda berilgan bo'lsin.

10.5 –ta'rif. Agar argument x ning X oraliqdan olingan ixtiyoriy x_1 ва x_2 qiymatlari uchun $x_1 < x_2$ bo'lishidan $f(x_1) \le f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqsa , $f(x)$ funksiya X oraliqda *o'suvchi* deb ataladi.

Masalan, $f(x) = 2x + 1$ funksiya $X = (-\infty; +\infty)$ oraliqda o'suvchi bo'ladi. Haqiqtdan ham, $\forall x_1, x_2 \in X$ olinganda ham, $x_1 < x_2$ bo'lganda,

$$f(x_1) = 2x_1 + 1, \; f(x_2) = 2x_2 + 1$$

bo'lib,

$$f(x_2) - f(x_1) = (2x_2 + 1) - (2x_1 + 1) = 2(x_2 - x_1) > 0$$

bo'ladi. Demak, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

10.6 –t a ' r i f . agar argument x ning X oraliqdan olingan ixtiyoriy x_1 va x_2 qiymatlari uchun $x_1 < x_2$ bo'lishidan $f(x_1) \ge f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqsa, $f(x)$ funksiya X oraliqda *kamayuvchi* deb ataladi.Masalan, $f(x) = 3x + 1$ funksiya $X = (-\infty; +\infty)$ da kamayuvchi bo'ladi. Haqiqatdan, $\forall x_1, x_2 \in X$ olinganda ham,

$x_1 < x_2$ bo'lganda,

$$f(x_1) = -3x_1 + 1, \; f(x_2) = -3x_2 + 1$$

bo'lib,

$$f(x_2) - f(x_1) = -3x_2 + 1 - (-3x_1 + 1) = -3(x_2 - x_1) < 0$$

bo'ladi. Demak, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

10.7 –t a ' r i f . o'suvchi va kamayuvchi funksiyalar *monoton funksiyalar* deb ataladi.

M i s o l . $f(x) = x^3$ funksiya monotonlikka tekshirilsin.

Y e c h i s h . Bu funksiya $X = (-\infty; +\infty)$ oraliqda aniqlangan. Bu oraliqdan ixtiyoriy x_1, x_2 nuqtalarni olamiz. Ular uchun $x_1 < x_2$ bo'lsin. So'ng $f(x_2) - f(x_1)$ ayirmani qaraymiz:

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) =$$

$$(x_2 - x_1)\ (x_2^2 + 2\cdot\frac{1}{2}x_2x_1 + x_1^2 + \frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{4}x_1^2) = (x_2 - x_1)\ (x_2^2 + 2\cdot x_2 + \frac{x_1}{2} + \left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2) =$$

$$(x_2 - x_1)\left[\left(x_2 + \frac{x_1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2\right] > 0.$$

Demak, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ya'ni $f(x_1) < f(x_2)$. Shunday qilib $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) < f(x_2)$ bo'lar ekan. Bu esa berilgan funksiyaning $(-\infty; +\infty)$ da o'suvchi ekanini bildiradi.

10-§. Davriy funksiya

$f(x)$ funksiya X oraliqda aniqlangan bo'lsin.

10.8-ta'rif. Agar shunda o'zgarmas $T(T\neq 0)$ son topilsaki, ixtiyoriy $x\in X$ да $x - T\in X$, $x + T\in X$ bo'lib,

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T)$$

bo'lsa, u holda $f(x)$ *davriy funksiya*, T soni funksiyaning *davri* deyiladi.

Masalan, $y = \sin x$, $y = tg\ x$davriy funksiyalar bo'lib, $y = \sin x$ funksiyaning davri 2π га, $y = tg\ x$ funksiyaning davri esa π ga teng. Agar $f(x)$davriy funksiya bo'lib, $T(T\neq 0)$ soni uning davri bo'lsa, u holda nT $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ lar ham shu funksiyaning davri bo'ladi.

11-§. Murakkab funksiya

$y = f(x)$ funksiya X oraliqda aniqlangan bo'lsin. Argument x ning X oraliqda olingan har bir qiymatida funksiyaning mos qiymatini topib, bu funksiyaning qiymatlaridan Y to'plamni tuzamiz.

Endi shu Y to'plamda o'z navbatida $u = F(y)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. Natijada X to'plamdan olingan har bir x songa Y to'plamda bitta y soni ($y = f(x)$) va Y to'plamdan olingan bunday u songa bitta u sonni ($u = F(y)$) mos qo'yiladi.

Demak, X to'plamdan olingan har bir x songa bitta $u$soni mos qo'yiladi. Bu esa u ni x o'zgaruvchining funksiyasi bo'lishini bildiradi va bunday belgilanadi:

$$u = F(y) = F = (f(x)).$$

Odatda bunday funksiya *murakkab funksiya* deb ataladi.

Masalan, ushbu 1) $u=\sqrt{x_2-1}$; 2) $u = sin2x$; 3) $u = cos^2x$; funksiyalar murakkab funksiyalar bo'ladi.

1) $u=\sqrt{x_2-1}$ funksiya $u=\sqrt{y}$, $y = x^2 - 1$funksiyalar yordamida hosil bo'lgan. $y = x^2 - 1$ funksiya (—∞; +∞)oraliqda aniqlangan; $u=\sqrt{y}$ esa [0; +∞) oraliqda aniqlangan. Demak, funksiya $u=\sqrt{x_2-1}$ $x^2 - 1 \geq 0$ da, ya'ni $x^2 \geq 1$ bo'lgan qiymatlardaaniqlangan bo'ladi.

2) $u = sin2x$ funksiya $u = sin\ y$, $y = 2x$. funksiyalar yordamida hosil bo'lgan. Bu funksiya (—∞; +∞) da aniqlangan.

3) $u = cos^2x$ funksiya $u = y^2$, $y = cos\ x$ funksiyalar yordamida hosil bo'lgan. Bu funksiya (—∞; +∞) da aniqlangan.

12- §. Teskari funksiya

$y = f(x)$ funksiya X oraliqda aniqlangan bo'lib, Y esa shu funksiya qiymatlaridan iborat to'plam bo'lsin: $Y = \{f(x): x \in X\}$. Y to'plamdan biror y_0 sonni olaylik. Unda X to'plamda shunday x_0 ($x_0 \in X$) soni topiladiki, $f(x_0) = y_0$ bo'ladi . y_0 songa x_0 sonni qo'yamiz. Natijada Y to'plamdan olingan har bir y ga yuqorida ko'rsatilgandek bitta x son ($x \in X$) mos qo'yilib, funksiya hosil bo'ladi. Odatda bunday funksiya, berilgan $y = f(x)$ funksiyaga nisbatan *teskari funksiya* deb ataladi va

$$x= f^{-1}(y)$$

kabi belgilanadi.

M i s o l . $y = f(x) = 2x + 1$ ф funksiyani $X = [0; 1]$ oraliqda qaraylik.ravshanki, bu funksiya qiymatlaridan iborat to'plam $Y = [1; 3]$ bo'ladi . $Y = [1; 3]$ oraliqda berilgan $x = \frac{1}{2}(y - 1)$ funksiya qaralayotgan funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo'ladi:

$$x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y - 1).$$

10.3-e s l a t m a . biz yuqorida $y = f(x)$ funksiyaga nisbatan teskari bo'lgan $x = f^{-1}(y)$ funksiya tushunchasi bilan tanishdik. Bu teskari funksiyaning argument y bo'lib , x esa uning funksiyasidir. Demak, teskari funksiyaning grafigini yasashda abscissa o'qi sifatida Oy o'qini, ordinate o'qi sifatida Ox o'qni olish kerak bo'ladi. Bu hol ma'lum noqulaylik yug'diradi. Shuning uchun teskari funksiyani, masalan

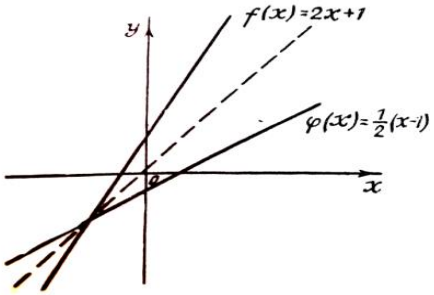
$$y = \varphi(x)$$

kabi belgilash maqsadga muvofiqdir.

Yuqoridagi misolda $y = f(x) = 2x + 1$ funksiyaga teskari funksiya

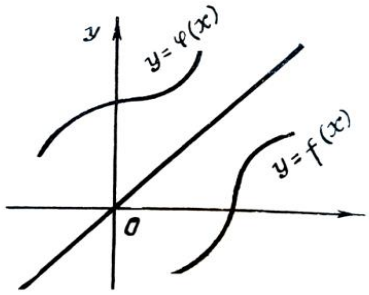
$$y = \varphi(x) = \frac{1}{2}(x - 1)$$

Bo'ladi. Bu funksiyalarning grafiklari 79-chizmada tasvirlangan.



79-chizma

Berilgan $y = f(x)$ funksiyaning grafigiga ko'ra bu funksiyaga $y = \varphi(x)$ funksiyaning grafigini aniqlash emas. $y = f(x)$ funksiya grafigini birinchi va uchinchi koordinata burchaklari bissektrissasiga nisbatan simmetrik ko'chirish natijasida hosil bo'lgan chiziq *teskari funksiyaning grafigi* bo'ladi (80-chizma).



80-chizma

13- §. Sodda(elementar) funksiyalar

Matematik analizda asosan analitik usulda berilgan funksiyalar bilan shug'ullanadi. Quyida *sodda funksiyalar* deb ataluvchi funksiyalarni keltiramiz. Bunday funksiyalar o'quvchiga o'rta maktab matematika kursidan ma'lumdir.

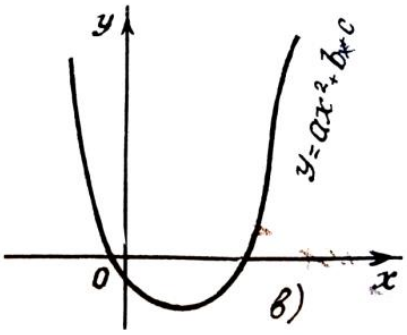
1, Chiziqli va kvadratik funksiyalar. Ushbu $y = ax + b$, $y = ax^2 + bx + c$ ko'rinishdagi funksiyalar mos ravishda *chiziqli va kvadratik funksiyalar*deb ataladi, bunda $a, b\ c$ —o'zgarmas haqiqiy sonlar.

$y = ax + b$ chiziqli funksiya $(-\infty; +\infty)$ da aniqlangan. Bu funksiya $a > 0$da

o'suvchi , $a < 0$ bo'lganda kamayuvchi funksiya bo'ladi. Uning grafigi tekislikda to'g'ri chiziqni tasvirlaydi. Shuning uchun ham $y = ax + b$ funksiyani *chiziqli funksiya* deb ataladi.

Masalan, $y = 3x + 1$, $y = 2 - 3x$ funksiyalar chiziqli funksiyalardir. Ularning grafiklari 81- *a* chizmada tasvirlangan.

$y = ax^2 + bx + c$ kvadratik funksiya (—∞; +∞)da aniqlangan. Bu funksiya $x > -\frac{b}{2a}$ $(a \neq 0)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamida o'suvchi, $x < -\frac{b}{2a}$ $(a \neq 0)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamida kamayuvchi bo'ladi. Kvadratik funksiyaning (kvadratik uchhadning) grafigi tekislikda parabolani ifodalaydi. Parabolaning holati *a* koeffit- sentning hamda diskriminant $d = b^2 - 4ac$ ning ishoralariga bog'liq bo'ladi (81-b chizma).



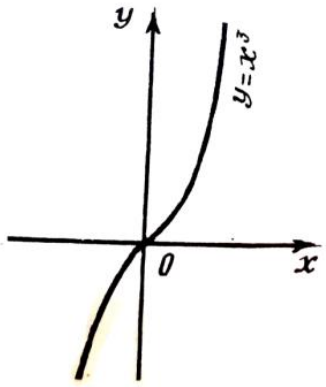
81-chizma

3. D a r a j a l i f u n k s i y a. Ushbu quyidagi funksiya

$$y = x^{\alpha} \quad (x>0)$$

darajali funksiya deb ataladi.

Darajali funksiyaning aniqlanish sohasi α songa bog'liq bo'ladi. Darajali funksiyaning grafigi $a > 0$ bo'lganda tekislikning (0; 0) va (1; 1) nuqtalardan o'tadi. 82-chizmada a $y = x^3$ funksiyaning grafigi tasvirlanadi.



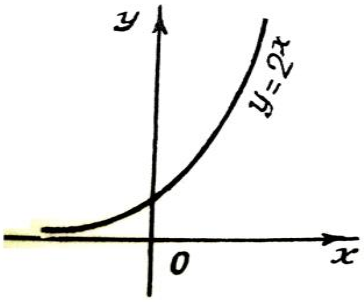
82-chizma

3.k o’ r s a t k I c h l i f u n k s i y a .Ushbu

$$y = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

*ko’rsatkichli funksiya*deb ataladi.

Ko’rsatkichli funksiya (—∞; +∞) oraliqda aniqlangan. Bu funksiya $0 < a < 1$bo’lganda kamayuvchi, $a > 1$ bo’lganda esa o’suvchi funksiya bo’ladi. ko’rsatkichli funksiyaning grafigi tekislikning Ox o’qidan yuqori tomonida joylashgan. $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ funksiyalarning grafiklari 83-chizmada tasvirlangan.

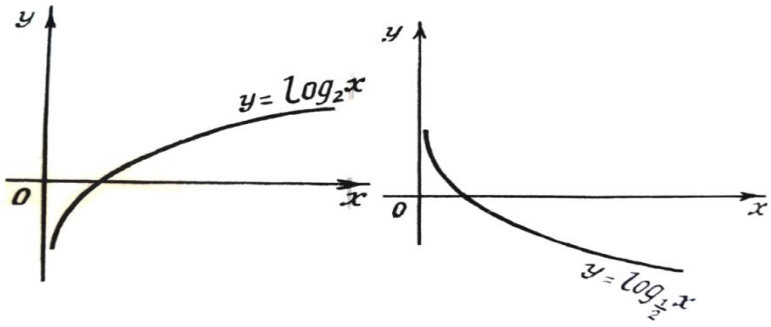


83-chizma

4.Logorifmik funksiya. Ushbu

$$y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

ko’rinishdagi funksiya *logorifmik funksiya*deb ataladi. Logorifmik funksiya (0; +∞)oraliqda aniqlangan. Bu funksiya $0 < a < 1$bo’lganda kamayuvchi, $a > 1$bo’lganda esa o’suvchi bo’ladi. Logorifmik funksiyaning grafigi tekislikda Oy o’qining o’ng tomonida joylashgan. $y = \log_a x$: va $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ funksiyalarning grafiklari 84-chizmada tasvirlangan.



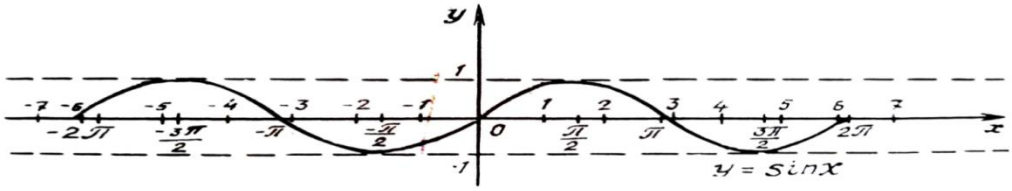
84-chizma

5.Trigonometrik funksiyalar . ushbu

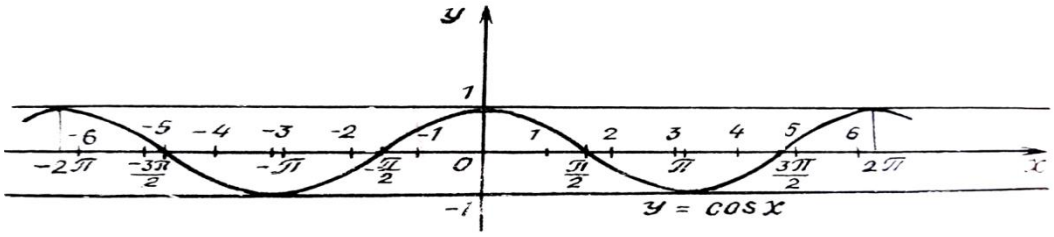
$$y = \sin x,\ \ y = \cos x,\ \ y = tg\ x,\ \ y = ctg\ x$$

funksiyalar *trigonometrik funksiyalar*deb ataladi.

$y = \sin x$, $y = \cos x$ funksiyalar (—∞; +∞) oraliqda aniqlangan . $y = \sin x$ toq funksiya. Demak, uning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi (85-chizma). $y = \cos x$ juft funksiya. Uning grafigi Oy o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi (86-chizma).

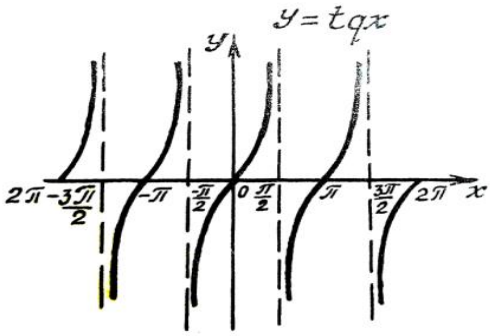


85-chizma



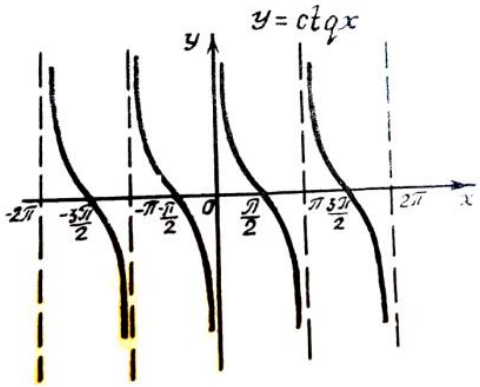
86-chizma

$y = tg\ x$ funksiya (—∞; +∞) ning $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ bo'lgan nuqtalarto'plamida aniqlangan. Bu funksiya uchun $tg(-x) = -\ ctg\ x$bo'ladi. Demak, , $y = tg\ x$toq funksiya. Uning grafigi 87-chizmada tasvirlangan.



87-chizma

$y = ctg\ x$ funksiya (—∞; +∞) ning $x \neq k\pi\ (k = 0)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ bo'lgan nuqtalar to'plamida aniqlangan. Ravshanki, bu funksiya uchun $ctg(-x)$bo'ladi. Demak, $y=ctg\ x$funktoq funksiya. uning grafigi 88-chizmada tasvirlangan.



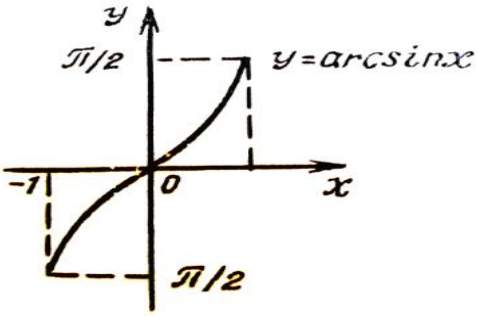
88-chizma

6.Teskari trigonometgik funksiyalar . Ushbu

y = arc sin x, y = arc cos x, y = arc tg x, y = arc ctg x

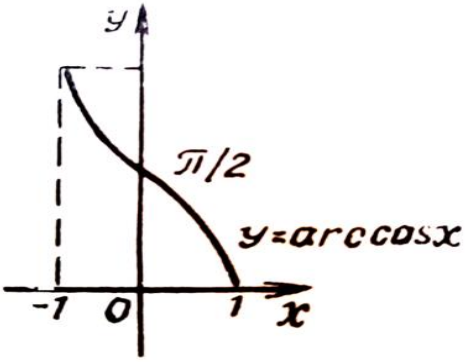
funksiyalar teskari *mtrigonometrik funksiyalar* deb ataladi.

y = arc sin x funksiya *y = sin x* funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo'lib, *X* = [-1; 1] segmentda aniqlangan. *y = arc sin x* funksiyaning qiymatlaridan iborat to'plam $Y = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ bo'ladi. Bu funksiyaning grafigi 89-chizmada tasvirlangan.



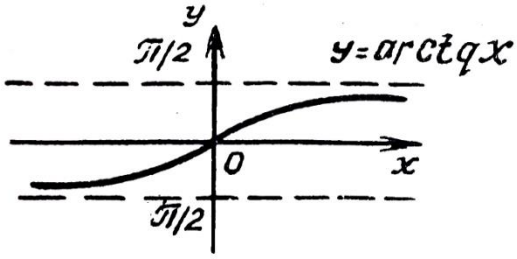
89-chizma

y = arc cos x funksiya *y = cos x* funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo'lib, *X* = [- 1; 1] segmentda aniqlangan. *y = arc cos x* funksiyaning qiymatlaridan iborat to'plam *Y* = [0; π] bo'ladi. Bu funksiyaning grafigi 90-chizmada keltirilgan.



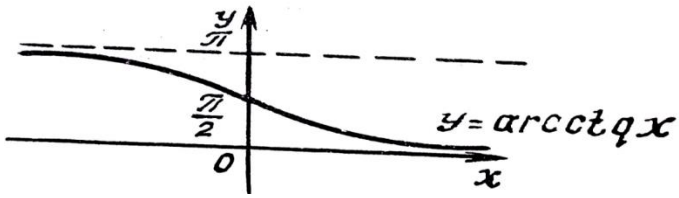
90-chizma

$y = arc\ tg\ x$ funksiya $y = tg\ x$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo'lib, X= (—∞; +∞) oraliqda aniqlangan bo'lib $y = arc\ tg\ x$ funksiyaningqiymatlaridan iborat to'plam $Y = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ bo'ladi. Bu funksiyaning grafigi 91-chizmada berilgan.



91-chizma

$y = arc\ ctg\ x$ funksiya $y = ctg\ x$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo'lib, X = (—∞; +∞) oraliqda aniqlangan. $y = arc\ ctg$ funksiyaningqiymatlaridan iborat to'plam $x\ Y = [0; \pi]$ bo'ladi. Bu funksiyaning grafigi 92- chizmada tasvirlangan.



92-chizma

14-§. Qishloq xo'jaligi va iqtisodiy jarayonlarni matematik modellashtirishga misolllar

Matematik model, ishlab chiqarish jarayonini aks ettiruvchi formal munosabatlar majmuidan iborat bo‘lganligidan, hayotda uchraydigan jarayonlarni muqobil matematik modelini yaratish o'ziga xos murakkablikka ega. Matematik model aniq bir hol uchun tuzilayotganda, qancha ko‘p ta'sir etuvchi omillar e'tiborga olinsa, shuncha tuzilgan model o'rganilayotgan jarayonni yaxshi ifodalaydi. Ushbu mavzuda qishloq xo'jaligidan tanlangan modelda, qatnashuvchi parametrlari o'tkazilgan tajriba natijalari asosida, eng kichik kvadratlar usuli bilan baholangan, ishlab chiqarish funksiyalariga misollar keltiramiz([9] − [15]).

1) Tuproqqa solingan o‘g‘it miqdori bilan, shu maydondan olingan ekin hosildorligi orasidagi bog‘lanishni chiziqli model shaklida $y = y_0 + ax$ qarash mumkin. Bu yerda y_0 - o‘g‘itsiz yetishtirilgan hosildorlik, a - tayin bir o‘g‘itni shu ekin hosildorligiga ta'sirini xarakterlovchi koeffisent, x - yerga solingan mineral o‘g‘itning miqdori, y – shu maydondan olingan hosildorlik.

2) Qoramollarga beriladigan 10% oqsilli makkajo'xori miqdori x (kg), uning vaznini o‘sishi y (kg) orasida quyidagi bog‘lanish mavjudligi aniqlangan

$$y = -0{,}0001x^2 + 0{,}335x - 0{,}48.$$

3) Ikki yoshli buzoqni tirik vazni taxminan quyidagi formula bilan baholanadi

$$y = 578{,}4 - 244e^{-0{,}00015x}$$

bu yerda x - beriladigan oziqa miqdori (kg).

4) Italiyalik iqtisodchi Pareto Italiyada aholi orasida daromadni taqsimlanishini o‘rgangan. Agar y bilan kamida x so‘m daromadga ega bo‘lgan odamlar sonini belgilasak, $y = \frac{a}{x^m}$. Bu yerda a ma’lum bir muddatda muomulada bo’lgan pul miqdori, m aniqlanadigan parametr. Tatqiqotlar shuni ko’rsatadiki, Pareto taklif etgan model o’ta boy odamlar sonini aniqroq baholar ekan.

6. Biror xo‘jalikning iqtisodiy rentabelligini aniqlash funktsiyasi quyidagicha:

$$R = \frac{x}{y} - 1$$

bu erda R-xo‘jalikni rentabelligi, x - har bir mahsulotning bahosi, y - har bir mahsulotni tannarxi. Oxirgi munosabatdan ko‘rinib turibdiki:

1) agar x > y bo‘lsa, ya’ni mahsulot bahosi tannarxidan katta bo‘lsa, R> 0 bo‘lib, xo‘jalik rentabelli;

2) agar x = y bo‘lsa, xo‘jalik o‘zini-o‘zi qoplaydigan R=0;

3) agar x< y bo‘lsa, zarar ko‘radigan (R<0) xo‘jalik bo‘ladi.

7) Mitcherlix-Spilman solingan o‘g‘it bilan, hosildorlik orasidagi bog‘lanishni chiziqli modelga qaraganda quyidagi bog‘lanish yaxshiroq xarakterlanishini ko‘rsatadi

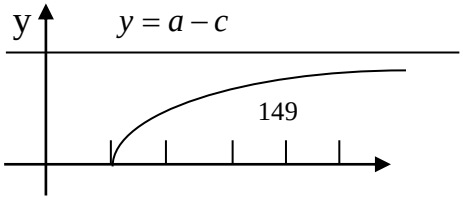
$$y = y_0 + a\,(1 - 10^{-kx})$$

Bu yerda y_0 -o‘g‘it solinmasdan olingan hosildorlik a -o‘simlikning shu o‘g‘itga bo‘lgan eng yuqori (maksimal) talabi, k-ma’lum bir o‘g‘itni ekin hosildorligiga ta’sirini xarakterlovchi o‘zgarmas miqdor. Masalan, bu son - fosfor uchun k=0,8, azot uchun k=1,1, mahalliy o‘g‘it uchun k=0,4 tengligi aniqlangan.

8)_ Boqilayotgan qoramolga beriladigan oziqa miqdori x kg bilan, uning tirik vazni y (kg) orasida quyidagicha boglanish mavjudligi aniqlangan

$$y = \frac{ax}{b + x} - c$$

bu yerda *a, b* boqilayotgan qoramolni zotiga qarab aniqlanuvchi parametrlar. Agar maksimal oziqa berib borilsa, ma’lum bir muddatdan so‘ng, qoramolni tirik vazni (*a-c*) maksimumga erishadi.



0 x_0 x

9). Kunlik sut sogib olish y- litr bilan, sigirning yoshi x- orasidagi bog‘lanish ishlab chiqarish funktsiyasi

$$Y = -0{,}5x^2 + 6{,}9\,x - 9{,}5 \qquad (x > 2)$$

10). Ekilgan bug‘doy hosildorligi y(s/ga) bilan, x- 1ga maydonga ekilgan bugdoy donasi orasidagi bog‘lanishni ishlab chiqarish funktsiyasi

$$y = -\,0{,}7x^2 + 8{,}1x + 5{,}6$$

x mln dona 1 ga maydonga ekiladigan bug‘doy soni, y s/ga –hosildorligi.

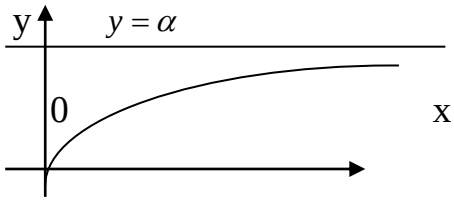
11). Talab va taklif funktsiyasi. Talab, bu ma’lum bir mahsulotga iste’mol-chilarning bo’lgan ehtiyoji. Bu jarayon mahsulot hajmiga, bahosiga hamda iste’molchilarning sotib olish imkoniyatlariga bog‘liq bo‘ladi. Taklif, bu ma’lum bir bahoda, bozorga sotish uchun chiqarilgan mahsulot miqdori. Agar taklif y, mahsulotni bahosi x so‘m bo‘lsa, y=f(x) funktsiyadan iborat bo‘ladi.

Mikroiqtisodiyotda talab va taklif funktsiyalarini kesishish nuqtasi muhim hisoblanadi. Bu (x_0, y_0) muvozanat nuqtasi bo‘lib, bu nuqtada ishlab chiqarilgan barcha mahsulotga talab mavjud, ya’ni zahirada mahsulot turib qolmaydi.

Zaruriy mahsulotlarga bo‘lgan talab funktsiyasini Tonkvist quyidagicha bog’lanishga ega deb o’rgangan

$$Y = \frac{\alpha x}{x + \beta}$$

bu yerda x -iste’molchining daromadi miqdori, y - iste’molchining zaruriy mahsulotlarga bo‘lgan talabi. Istemolchining daromadi x oshib borsa, y α ga intiladi.



Mavzu bo’yicha tekshirish uchun savollar:

1. Natural, butun, ratsoinal, irratsional, haqiqiy sonlar to’plamlari haqida tushuncha bering?
2. Segment, interval, yarim intervallarni geometric izohlab tushuntirib bering?
3. Sonning absolyut qiymati qanday aniqlanadi?
4. O’zgaruvchi va o’zgarmas miqdorlarga misollar keltiring?

5. Funksiyani ta'rifini aytib, aniqlanish va o'zgarish sohalari, berilish usullari haqida tushuncha bering?
6. Funksiyani xossalari, davriyligi tushunchalarini uning shaklini chizishdagi ahamiyatini ayting?
7. Qanday funksiyaga monoton funksiya deyiladi?
8. Sodda elementar funksiyalarni aniqlanish, o'zgarish sohalarini, muhim xossalarini aytib misollar keltiring?
9. Murakkab va teskari funksiyalar haqida nimalarni bilasiz?
10. Qishloq xo'jaligida qo'llaniladigan ishlab chiqarish funksiyalariga misollar keltiring?

Kalit so'zlar

Natural, butun, ratsoinal, irratsional, haqiqiy, segment, interval, yarim interval, absolyut qiymat, funksiya, aniqlanish, o'zgarish sohalari, xossalari, davriyligi, monoton, murakkab, teskari funksiya, ishlab chiqarish funksiyalari.

Xulosa

Natural, butun, ratsoinal, irratsional, haqiqiy sonlar sohalari, segment, interval, yarim intervallar, sonning absolyut qiymati, o'zgaruvchi, o'zgarmas miqdorlar, fnksiya, aniqlanish, o'zgarish sohalari, berilish usullari, xossalari, davriyligi, shakli, monoton funksiya, elementar funksiyalar, murakkab, teskari, qishloq xo'jaligidan olingan ishlab chiqarish funksiyalari o'rganilgan.

XI BOB. NATURAL ARGUMENTLI FUNKSIYA

1-§. Sonlar ketma-ketligi tushunchasi

Biz yuqorida funksiya tushunchasi bilan tanishdik. Endi, xususiy holni, ya'ni aniqlash sohasi natural sonlar to'plami *N* bo'lgan funksiyalarni qaraymiz.

Aytaylik, f(x) funksiya X = N to'plamda berilgan bo'lsin. Modomiki, bu funksiyaning argumenti natural son ekan, unda f(x) deyish o'rniga f(n) deb olamiz.

Bu funksiyaning n=1, 2, 3, … dagi qiymatlarini

$f(1) = x_1$, $f(2) = x_2$, $f(3) = x_3$, … , $f(n) = x_n$, … deb belgilaylik. Natijada f(n) funksiya qiymatlaridan tashkil topgan ushbu

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, .. \qquad (*)$$

to'plam hosil bo'ladi. Bu to'plam sonlar ketma-ketligi deb ataladi. (*) sonlar deyiladi x_n esa (*) ketma-ketlikning n-hadi yoki umumiy hadi deyiladi. (*) sonlar

ketma-ketligini (x_n) kabi belgilanadi.

Sonlar ketma-ketliklariga misollar keltiramiz.

1) $X_n = \frac{1}{n}$ bo'lsin. Bu sonlar ketma-ketligi

$$1,\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{n}, \dots,$$

bo'ladi.

2) $x_n = n^2$ bo'lsin. Bu sonlar ketma-ketligining ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots$$

3) $x_n = (-1)^n$ bo'lsin. Bu sonlar ketma-ketligi hadlari orqali ushbu ko'rinishda yoziladi:

$$-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$$

Biror (x_n): $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, ..$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

11.1-t a' r i f: *Agar shunday o'zgarmas M son mavjud bo'lsaki, (x_n) ketma-ketlikning har bir hadi shu sondan katta bo'lmasa, ya'ni $x_n \leq M$ bo'lsa, bu ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan deb ataladi.*

Masalan, ushbu

$$0, -1, -2, -3, \dots \quad , -n, \dots$$

ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan, chunki ketma-ketlikning har bir hadi 0 dan katta emas.

11.2-t a ' r i f: *Agar shunday o'zgarmas m son mavjud bo'lsaki, (x_n) ketma0ketlikning har bir hadi shu sondan kichik bo'lmasa, ya'ni $x_n \geq m$ bo'lsa, bu ketma-ketlik quyidan chegaralangan deb ataladi.*

Masalan, ushbu

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$$

ketma-ketlik quyidan chegaralangan, chunki ketma-ketlikning har bir hadi 0 dan kichik emas.

11.3-t a' r i f: *Agar (x_n) ketma-ketlik ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u chegaralangan deb ataladi.*

Masalan,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

ketma-ketlik chegaralangan ketma-ketlikdir.

2-§. Sonlar ketma-ketliklari ustida amallar

Ikkita ketma-ketlik berilgan bo'lsin:

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots; y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$$

Ushbu

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots, x_n + y_n, \dots$$

ketma-ketlik (x_n) va (y_n) ketma-ketliklar *yig'indisi* deb ataladi va $(x_n + y_n)$ kabi belgilanadi.

Ushbu

$$x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, \dots, x_n - y_n, \dots$$

ketma-ketlik (x_n) va (y_n) ketma-ketliklar *ayirmasi* deb ataladi va $(x_n - y_n)$ kabi belgilanadi.

Ushbu

$$x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, x_3 \cdot y_3, \dots, x_n \cdot y_n, \dots$$

ketma-ketlik (x_n) va (y_n) ketma-ketliklar *ko'paytmasi* deb ataladi va $(x_n \cdot y_n)$ kabi belgilanadi.

Ushbu

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \dots, \frac{x_n}{y_n}, \dots \qquad (y_k \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots)$$

ketma-ketlik (x_n) va (y_n) ketma-ketliklar *bo'linmasi* deb ataladi va $\frac{x_n}{y_n}$ kabi belgilanadi.

3-§. Sonlar ketma-ketligining limiti

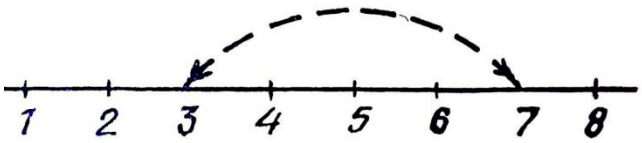
Avvalo nuqtaning atrofi tushunchasi bilan tanishamiz. Biror *a* nuqta (*a*-haqiqiy son) hamda musbat ε soni berilgan bo'lsin.

11.4-t a' r i f: *Berilgan a nuqtani o'z ichiga olgan*

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = (x: a-\varepsilon < x < a+\varepsilon)$$

interval *a* nuqtaning atrofi (*a* nuqtaning ε atrofi) deb ataladi.

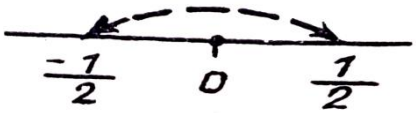
Nuqtaning atrofi sonlar o'qida kesmani ifodalaydi, kesmaning chetki nuqtalari esa shu kesmaga tegishli bo'lmaydi. Bu holni 93-chizmada chetki nuqtalariga strelkalar qo'yish bilan izohlangan.



93-chizma

M i s o l l a r: 1. a = 0 nuqtaning $\varepsilon = \frac{1}{2}$ atrofi quyidagi interval bo'ladi. (94-chizma)

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (x: -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}).$$



94-chizma

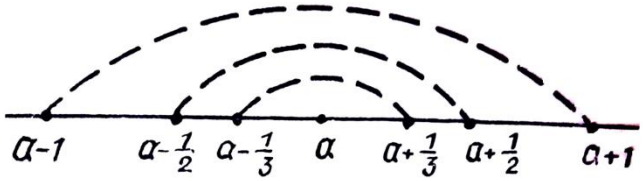
2. a=1 nuqtaning ε =0.1 atrofi ushbu intervaldan iboratdir (95-chizma):

$$(0,9\ ;\ 1,1) = (x:\ 0.9 < x < 1.1)$$

Shuni alohida ta'kidlaymizki, bitta a nuqtaning juda ko'p atroflari bo'ladi. Masalan, ushbu

$$(a-1,\ a+1),\ (a-\frac{1}{2},\ a+\frac{1}{2}),(a-\frac{1}{3},\ a+\frac{1}{3}),\ldots(a-\frac{1}{n},\ a+\frac{1}{n})$$

intervallarning har biri a nuqtaning atrofi bo'ladi. (96-chizma)

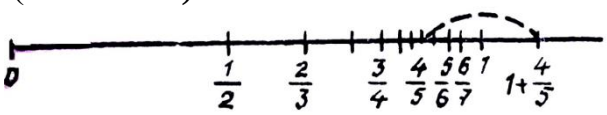


96-chizma

3. Ushbu $(x_n) = (\frac{n}{n+1})$:

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ldots,\frac{n}{n+1}\ldots$$

ketma-ketlikni qaraylik. $a=1$ nuqtaning $(1-\frac{1}{4},1+\frac{4}{5}) = \left(\frac{1}{5},\frac{9}{5}\right)$ $(\varepsilon = \frac{4}{5})$ atrofi olinsa, unda berilgan ketma-ketlikning 4-hadidan boshlab keyingi barcha hadlari shu atrofga tegishli bo'ladi (97-chizma)

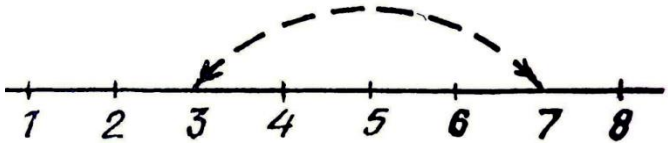


97-chizma

4. Quyidagi

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,n,\ \ldots$$

ketma-ketlikni qaraylik. $a=5$ nuqtaning (5-2, 5+2) = (3, 7) atrofi (ε = 2) olinsa, unda ketma-ketlikning 3 ta hadi (4, 5, 6-hadlari) shu atrofga tegishli bo'ladi. (98-chizma)



98-chizma

5. Ushbu

-1, 1, -1, 1, -1, …

Ketma-ketlikni qaraylik. a=1 nuqtaning $(a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ atrofiga berilgan ba'zi hadlari (juft nomerli o'rinda turgan hadlari) tegishli, ba'zi hadlari (toq nomerli o'rinda turgan hadlari) tegishli bo'lmaydi. (99-chizma)

99-chizma

Biror (x_n):

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$

sonlar ketma-ketligi hamda a nuqta (a-haqiqiy son) berilgan bo'lsin. Bu a nuqtaning

$(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ atrofini $(\varepsilon > 0)$ olaylik.

1°. (x_n) ketma-ketlikning biror hadidan boshlab keying barcha hadlari (xususan, ketma-ketlikning barcha hadlari) $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ atrofga tegishli bo'lishi mumkin. Bunday hol quyidagicha ham aytiladi: shunday N natural son topiladiki, $n > N$ bo'lgan barcha natural n sonlar uchun

$x_n \in (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ bo'ladi.

2°. (x_n) ketma-ketlikning biror hadidan boshlab keyingi hadlarining ba'zilari $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ atrofga tegishli, ba'zilari esa tegishli bo'lmasligi mumkin.

3°. (x_n) ketma-ketlikning chekli sondagi hadlarigina $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ atrofga tegishli bo'lishi yoki ketma-ketlikning birorta hadi shu atrofga tegishli bo'lmasligi mumkin.

11.5 - t a' r i f: *Agar* (x_n):

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$

Ketma-ketlikning biror hadidan boshlab keying barcha hadlari a nuqtaning ixtiyoriy $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ atrofiga tegishli bo'lsa, unda a son (x_n) ketma-ketlikning limiti deb ataladi va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

yoki $\lim x_n = a$, *yoki* $x_n \to a$ *kabi belgilanadi.*

Bu holda (x_n) ketma-ketlik *a ga intiladi* deb ham yuritiladi.

Aytaylik, biror (x_n) ketma-ketlik berilgan bo'lib, uning limiti *a* bo'lsin: $\lim x_n = a$. Yuqoridagi ta'rifga ko'ra berilgan ketma-ketlikning biror hadidan boshlab keyingi barcha hadlari *a* nuqtaning ixtiyoriy $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ atrofiga tegishli bo'ladi. Boshqacha aytganda, shunday natural n_0 son topiladiki, $n > n_0$ bo\lgan barcha *n* natural sonlar uchun

$$x_n \in (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$$

bo'ladi. Demak,

$$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon \qquad (n > n_0)$$

Keyingi tengsizlikdan esa

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \qquad (11.1)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu (10.1) tengsizlik esa ushbu

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad (11.2)$$

tengsizlikka ekvivalent bo'ladi. (qaralsin: bob, 2-§).

Bu hol ketma-ketlik limitini quyidagicha ta'riflash imkonini beradi.

11.6-t a' r i f: *Agar ixtiyoriy musbat $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday n_0 natural son topilsaki, $n > n_0$ bo'lgan barcha n natural sonlar uchun*

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, a son (x_n) ketma-ketlikning limiti deb ataladi va yuqoridagidek

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

kabi belgilanadi.

M i s o l l a r: 1. Ushbu

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots . \frac{1}{n}, \dots$$

ketma-ketlikning limiti 0 ga teng bo'ladi. Shuni isbotlaymiz. Ixtiyoriy musbat ε sonni olib unga ko'ra $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$* ni topamiz va bunday belgilaymiz: $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, u holda $n > n_0$ bo'lgan barcha natural *n* sonlar uchun

$$|x_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} \le \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon\varepsilon}} = \varepsilon\varepsilon\varepsilon$$

bo'ladi. Limit ta'rifiga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

bo'ladi.

2. Ushbu

$$1,\ -1,\ 1,\ -1\dots.$$

ketma-ketlik limitga ega emas.

Biror (x_n) : $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \dots \alpha_n, \dots$ sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin.

10.7-t a' r i f: *(Agar* (α_n) *ketma-ketlikning limiti nolga teng, ya'ni*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

Bo'lsa, u holda (α_n) *cheksiz kichik miqdor deb ataladi.* Masalan, $x_n = \frac{1}{n}$ cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

Biror (x_n) ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

11.1-t e o r e m a: *(x_n) ketma-ketlikning a limitga ega bo'lishi uchun* $\alpha_n = x_n - a$ *cheksiz kichik miqdor bo'lishi zarur va yetarli.*

Bu teoremaning isboti yuqorida keltirilgan ketma-ketlik limiti hamda cheksiz kichik miqdor ta'riflaridan kelib chiqadi.

Demak, (x_n) ketma-ketlikning limiti *a* bo'lsa, uning umumiy hadi x_n ni $x_n = a + \alpha_n$ ko'rinishda yozish mumkin, bunda α_n cheksiz kichik miqdor. Aksincha, (x_n) ketma-ketlikning umumiy hadi x_n o'zgarmas *a* soni bilan cheksiz kichik miqdorning yig'indisidan iborat, ya'ni

$$x_n = a - \alpha_n$$

bo'lsa, u holda *a* son (x_n) ketma-ketlikning limiti bo'ladi.

M i s o l: Ushbu $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$ ketma-ketlikni qaraylik. Uning umumiy hadi $x_n = \frac{n}{n+1}$ ni quyidagicha yozish mumkin:

$$x_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Ravshanki, $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$ cheksiz kichik miqdor. Demak, berilgan ketma-ketlikning limiti 1 ga teng:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

4-§. Cheksiz kichik hamda cheksiz katta miqdorlar orasidagi bog'lanish tushinchalar

Avvalo cheksiz kichik miqdorlar haqida ikkita lemma keltiramiz:

11.1-l e m m a: *Ikki cheksiz kichik miqdor yig'indisi yana cheksiz kichik miqdor bo'ladi.*

I s b o t: (x_n) va (β_n) cheksiz kichik miqdorlar bo'lsin: $\lim \alpha_n = 0$, $\lim \beta_n = 0$. Ta'rifiga ko'ra, $\forall \beta > 0$ olinganda ham $\varepsilon\varepsilon$ /2 ga ko'ra shunda n_0 natural son topiladiki, $n > n_0$ bo'lgan barcha natural *n* lar uchun

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

bo'ladi. Shuningdek,

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

bo'ladi. Natijada ushbu tengsizlikka ega bo'lamiz:

$$|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Bu esa

$$\lim(\alpha_n + \beta_n) = 0$$

bo'lishini bildiradi. Demak, $(\alpha_n + \beta_n)$-cheksiz kichik miqdor. Lemma isbot bo'ldi.

Ushbu lemma ham xuddi shunga o'xshash isbotlanadi.

11.2-l e m m a: *Chegaralangan ketma-ketlik bilan cheksiz kichik miqdor ko'paytmasi cheksiz kichik miqdor bo'ladi.*

Biror (x_n): $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

11.8-t a' r i f: *Agar har qanday musbat M son olinganda ham shunday natural n_0 soni topilsaki, $n > n_0$ bo'lgan barcha natural n lar uchun*

$$|x_n| > M$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, (x_n) cheksiz katta miqdor deb ataladi.

Masalan, $(x_n) = (n)$:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

ketma-ketlik cheksiz katta miqdor bo'ladi.

Cheksiz katta miqdorning limiti cheksiz deb olinadi va quyidagicha belgilanadi: $\lim x_n = \infty$

Endi cheksiz kichik hamda cheksiz katta miqdorlar orasidagi bog'lanishni keltiramiz.

Agar (x_n) $(x_n \neq 0,\ n=1, 2, \ldots)$ cheksiz kichik miqdor bo'lsa, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ cheksiz katta miqdor bo'ladi.

Agar (x_n) cheksiz katta miqdor bo'lsa, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

5-§. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari

Biror (x_n) ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

11.9-t a' r i f: *Agar (x_n) ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lsa, u holda (x_n) yaqinlashuvchi ketma-ketlik deb ataladi. Agar ketma-ketlikning limiti chekli bo'lmasa yoki ketma-ketlik limitga ega bo'lmasa, uni uzoqlashuvchi ketma-ketlik deb ataladi.*

Masalan,

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots.$$

ketma-ketlik yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo'ladi,

1, -1, 1, -1, ….,

1, 2, 3, …, n, …,

ketma-ketliklar esa uzoqlashuvchi ketma-ketliklar bo'ladi.

Endi yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning qator xossalarini keltiramiz. Bunday xossalarning isboti ketma-ketlikning limiti ta'rifiga hamda yuqorida keltirilgan lemmalar va teoremaga (qaralsin: 4, 5-§ lar) asoslanadi. Shuni e'tiborga olib, bu xossalarning ba'zilarini isbotlaymiz.

1°. *Agar (x_n) ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u chegaralangan bo'ladi.*

2°. *Agar (x_n) ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ls, uning limiti yagona bo'ladi.*

Aytaylik, ikkita (x_n) va (y_n) ketma-ketliklar berilgan bo'lsin.

3°. *Agar (x_n) va (y_n) ketma-ketliklarning har biri yaqinlashuvchi bo'lib,*

$$x_n = y_n (n = 1, 2, 3, \dots)$$

bo'lsa, u holda

$$lim x_n = lim y_n$$

bo'ladi.

4°. *Agar (x_n) va (y_n) ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib,*

$$x_n \leq y_n (n = 1, 2, 3, \dots)$$

bo'lsa, u holda

$$lim x_n \leq lim y_n$$

bo'ladi.

5°. *Agar (x_n) va (y_n) ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda ($x_n + y_n$) ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo'lib,*

$$lim\ (x_n + y_n) = lim x_n + lim y_n$$

bo'ladi.

5°-xossaning isboti. (x_n) va (y_n) ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib,

$$lim x_n = a, \qquad lim y_n = b$$

bo'lsin. U holda 11.1-teoremaga ko'ra

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n$$

bo'lib, α_n va β_n cheksiz kichik miqdorlar bo'ladi. Bu tengliklardan topamiz:

$$x_n + y_n = a + \alpha_n + b + \beta_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n).$$

Cheksiz kichik miqdorlar haqidagi 11.1-lemmaga asosan $\alpha_n + \beta_n$ ham cheksiz kichik miqdor bo'ladi. Uni γ_n orqali belgilaylik:

$$\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$$

Natijada

$$x_n + y_n = (a + b) + \gamma_n$$

bo'ladi.. Yana 11.1-teoremadan foydalanib, $(x_n + y_n)$ ketma-ketlik limitga ega bo'lishi va u $a+b$ ga teng bo'lishini topamiz:

$$\lim(x_n + y_n) = a + b = limx_n + limy_n$$

5°-xossa isbot bo'ldi.

6°. *Agar (x_n) va (y_n) ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda* $(x_n - y_n)$ *ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo'lib,*

$$\lim(x_n - y_n) = limx_n - limy_n$$

bo'ladi.

7°. *Agar (x_n) va (y_n) ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda ($x_n \cdot y_n$) ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo'lib,*

$$\lim(x_n \cdot y_n) = limx_n \cdot limy_n$$

bo'ladi.

8°. *Agar (x_n) va (y_n) ketma-ketliklar yaqinlashuvchi va lim $y_n \neq 0$ bo'lsa, u holda* $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ $(y_n \neq 0,\ n = 1, 2, \dots)$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\lim\frac{x_n}{y_n} = \frac{limx_n}{limy_n}\ (limy_n \neq 0)$$

bo'ladi.

M i s o l l a r:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+n}{3n^2+n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} =$

$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{(\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}-1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1} = 0;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}{1+\sqrt{n}+\sqrt{n^3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3}}+\frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt{n^3}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}+1}=\infty$

6-§. Monoton ketma-ketlik limitining mavjudligi haqida teoremalar

Ketma-ketlik limitining mavjudligi haqidagi masala muhim masalalar-dan biri. Bu masalani hal qilib beruvchi teoremalar mavjud. Biroq ular matematik analizning nozik faktlariga asoslanib isbotlanadi.

Biz quyida limitning mavjudligi haqidagi teoremalarni isbotsiz keltirish bilan kifoyalanamiz.

11.2-t e o r e m a: *Agar* (x_n) *ketma-ketlik o'suvchi bo'lib, yuqoridan chegaralangan bo'lsa ketma-ketlik chekli limitga ega (ya'ni yaqinlashuvchi) bo'ladi.*

11.3-t e o r e m a: *Agar* (x_n) *ketma-ketlik kamayuvchi bo'lib, quyidan chegaralangan bo'lsa ketma-ketlik chekli limitga ega (ya'ni yaqinlashuvchi) bo'ladi*

Odatda yuqorida keltirilgan teoremalarni monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teoremalar deb yuritiladi. Bu teoremalardan foydalanib, ba'zi bir ketma-ketliklarning limitga ega bo'lishini ko'rsatamiz.

e soni

Ushbu ketma-ketlikni qaraylik:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1,\left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\left(1+\frac{1}{3}\right)^3,\ldots,\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ \ldots$$

Uning umumiy hadi

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

bo'ladi. Maqsad shu (x_n) ketma-ketlikning chekli limitga ega bo'lishini ko'rsatishdan iborat. Bu ketma-ketlik bilan birga quyidagi ketma-ketlikni ham qaraymiz:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^2,\left(1+\frac{1}{2}\right)^3,\left(1+\frac{1}{3}\right)^4,\ldots,\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\ \ldots$$

Uning umumiy hadi

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

bo'ladi. Bu ketma-ketlikning y_n, y_{n+1}, hadlarini quyidagicha yozib olamiz:

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1}=$$
$$=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1};$$

$$y_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}.$$

U holda $\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(\frac{(n+1)(n+1)}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot$

$$\frac{n}{n+1} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(\frac{n(n+2)+(n+1)^2-n(n+2)}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(1 + \frac{n^2+2n+1-n^2-2n)}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1}$$

bo'ladi. Demak, $\frac{y_n}{y_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1}$.

Bernulli tengsizligidan* foydalanib topamiz:

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \geq 1 + (n+2) \cdot \frac{1}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n}$$

Natijada,

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \frac{n}{n+1} \geq 1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1$$

bo'ladi. Bu tengsizlikdan esa

$$y_n \geq y_{n+1} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ketma-ketlik kamayuvchi ketma-ketlik ekan.

Ravshanki, barcha n lar (n=1, 2, …) uchun

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > 0$$

Bu esa (y_n) ketma-ketlikning quyidan chegaralanganligini bildiradi.

Shunday qilib, $(y_n) = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ ketma-ketlik kamayuvchi va quyidan chegaralangan. Yuqoridagi 11.3-teoremaga ko'ra bu ketma-ketlik chekli limitga ega.

U holda $(x_n) = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ ketma-ketlik ham chekli limitga ega bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = x_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

bo'lib, undan esa

$$x_n = y_n \cdot \frac{n}{n+1}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(y_n \cdot \frac{n}{n+1}) = \lim_{n\to\infty} y_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} y_n \cdot 1 = \lim y_n$$

Modomiki, (y_n) ketma-ketlik chekli limitga ega ekan, unda (x_n) ketma-ketlik ham chekli limitga ega bo'ladi.

11.10-t a' r i f: *Ushbu*

$$\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

ketma-ketlikning limiti e soni deb ataladi.

Demak,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

e soni irratsional son. Uning qiymati taqriban 2,71 ga teng ($e \approx 2{,}718281 \ldots$) Asosi *e* bo'lgan logarifm *natural logarifm* deb ataladi.

XII. BOB. **FUNKSIYA LIMITI**

1-§. Funksiya limiti tushunchasi

Avvalo haqiqiy sonlar to'plami *X* ning (oraliqning) limit nuqtasi tushunchasi bilan tanishamiz.

Biror *X* haqiqiy sonlar to'plami (oraliq) hamda *a* nuqta (*a* – haqiqiy son) berilgan bo'lsin.

12. 1 – t a r i f. *Agar a nuqtaning ixtiyoriy (a — ε; a + ε) (ε > 0) atrofida X to'plamning cheksiz ko'p nuqtalari bo'lsa, a nuqta X to'plamning limit nuqtasi (quyuqlanish nuqtasi) deb ataladi.*

M i s o l l a r. 1. *X* = [0; 1] to'plamning har bir nuqtasi shu to'plamning limit nuqtasi bo'ladi.

2. *X* = (0; 1) to'plamnig har bir nuqtasi shu to'plamning limit nuqtasi bo'ladi va yana *x* = 0, *x* = 1 nuqtalar ham *X* = (0; 1) to'plamning limit nuqtalari bo'ladi.

3. *X* = {1, 2, 3, . . . } to'plam limit nuqtaga ega emas.

X biror sonlar to'plami bo'lib, *a* esa shu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. U holda *X* to'plam nuqtalaridan *a* ga intiluvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik hosil qilish mumkin. Bunday ketma-ketliklar juda ko'p bo'ladi.

Masalan, *X* = [0; 1] bo'lsin. Ravshanki, *a* = 0 nuqta shu to'plamning limit

nuqtasidir.

X = [0; 1] to'plam nuqtalaridan tashkil topgan quyidagi ketma-ketliklarning har birining a = 0 bo'ladi:

$$x_n = \frac{1}{n}: \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\ldots; \quad \lim \frac{1}{n} = 0,$$

$$y_n = \frac{1}{n^2}: \quad 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots\ldots; \quad \lim \frac{1}{n^2} = 0,$$

$$z_n = \frac{1}{n}: \quad 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots\ldots; \quad \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

$$u_n = \frac{1}{n+2}: \quad \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots, \frac{1}{n+2}, \ldots\ldots; \quad \lim \frac{1}{n+2} = 0.$$

Aytaylik shu X to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lganligi uchun X to'plam nuqtalarida tashkil topgan shunday

$$\{x_n\}: x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n \ldots \quad (x_n \in X, \ n = 1, 2, \ldots)$$
$$\{y_n\}: y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n \ldots \quad (y_n \in X, \ n = 1, 2, \ldots)$$
$$\{z_n\}: z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n \ldots \quad (z_n \in X, \ n = 1, 2, \ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ketma-ketliklar borki, ularning har birining limiti xuddi shu a ga teng bo'ladi:

$$\lim x_n = a, \ \lim y_n = a, \ \lim z_n = a, \ldots$$

$f(x)$ funksiyaning $x = x_n, x = y_n, x = z_n, \ldots$

(n = 1, 2, 3, . . .) nuqtalardagi qiymatlari ushbu ketma-ketliklarni hosil qiladi:

$$\{f(x_n)\}: \quad f(x_1), \ f(x_2), \ldots, \ f(x_n), \ldots$$
$$\{f(y_n)\}: \quad f(y_1), \ f(y_2), \ldots, \ f(y_n), \ldots$$
$$\{f(z_n)\}: \quad f(z_1), \ f(z_2), \ldots, \ f(z_n), \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Odatda $\{f(x)\}$ ketma-ketlik $\{x_n\}$ ketma-ketlikka mos funksiya qiymatlaridan iborat ketma-ketlik deb ataladi.

Masalan, X = [0; 1] to'plamda $y = f(x) = x^2 + 1$ funksiyani qaraylik. a = 0 nuqta shu X to'plamning limit nuqtasi. Yuqoridagi a = 0 ga intiluvchi

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}, \ \{y_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}, \ \{z_n\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}, \ \{u_n\} = \left\{\frac{1}{n+2}\right\}$$

ketma-ketliklarga mos $f(x) = x^2 + 1$ funksiya qiymatlaridan tashkiltopgan ketma-ketliklar quyidagicha bo'ladi:

$$\{f(x_n)\} = \left\{\frac{1}{n^2} + 1\right\}: \quad 1+1, \quad \frac{1}{2^2} + 1, \quad \frac{1}{3^2} + 1, \ldots\ldots, \frac{1}{n^2} + 1, \ldots$$

$$\{f(y_n)\} = \left\{\frac{1}{n^4} + 1\right\}: \quad 1+1, \quad \frac{1}{2^4} + 1, \quad \frac{1}{3^4} + 1, \ldots\ldots, \frac{1}{n^4} + 1, \ldots$$

$\{f(z_n)\} = \left\{\frac{1}{n}+1\right\}$: $1+1,\quad \frac{1}{2}+1,\quad \frac{1}{3}+1,\ldots\ldots,\frac{1}{n}+1,\ldots.$

$\{f(u_n)\} = \left\{\frac{1}{(n+2)^2}+1\right\}$: $\frac{1}{(1+2)^2}+1,\quad \frac{1}{(2+2)^2}+1,\ldots\ldots,\frac{1}{(n+2)^2}+1,\ldots.$

12.2-t a r i f. *Agar X to'plamning nuqtalaridan tuzilgan, a ga intiluvchi har qanday* $\{x_n\}$ *ketma-ketlik olinganda ham mos* $\{f(x_n)\}$ *ketma-ketlikhar doim yagona b ga intilsa, shu b son* $f(x)$ *funksiyaning a nuqtadagi (yoki* $x\to a$ *dagi) limiti deb ataladi va uni*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

kabi belgilanadi.

M i s o l l a r. 1. 1$f(x)$ = C — const funksiya har doim limitga ega bo'lib

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} C = C$$

bo'ladi. Bu funksiya limiti tarifidan bevosita kelib chiqadi.

2. $f(x) = x^2 + x + 1$ funksiyani X = [-1: 1] oraliqda qaraylik. Bu funksiyaning $x\to a$ dagi limitini topamiz.

X = [— 1; 1] to'plam nuqtalaridan 0 ga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik olaylik: $x_n\to 0$. Berilgan funksiyaning $x = x_n$ dagi qiymatlaridan iborat ketma-ketlik

$$\{f(x)\} = \{x^2{}_n + x_n + 1\}.$$

bo'ladi. $X_n\to 0$ da $f(x)$ ning limitini topamiz: $\lim_{x_n\to 0} f(x_n) = \lim_{x_n\to 0}(x_n^2 + x_n + 1) = \lim_{x_n\to 0} x_n^2 + \lim_{x_n\to 0} x_n + \lim_{x_n\to 0} 1 = 1.$

Demak,

$$\lim_{x_n\to 0} f(x) = \lim_{x_n\to 0}(x_n^2 + x_n + 1) = 1.$$

3. $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}(x\neq 1)$ funksiya $x\to 1$ da limitga egami?

Bu funksiyani $x\to 1$ da limitga egami yoki yo'qligini aniqlash uchun 1 ga intiladigan ushbu ikkita ketma-ketlikni olamiz:

$$\{x_n\} = \left\{1+\frac{1}{n}\right\}, \qquad \{y_n\} = \left\{1-\frac{1}{n}\right\}.$$

Bunda

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1.$$

berilgan funksiyaning qiymatlaridan iborat ketma-ketliklar quyidagicha

$$\{f(x_n)\} = \left\{\frac{1+\frac{1}{n}-1}{\left|1+\frac{1}{n}-1\right|}\right\} = \left\{\frac{\frac{1}{n}}{\left|\frac{1}{n}\right|}\right\} = \left\{\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right\} = \{1\},$$

$$\{f(y_n)\} = \left\{\frac{1-\frac{1}{n}-1}{\left|1-\frac{1}{n}-1\right|}\right\} = \left\{\frac{-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right\} = \{-1\}.$$

bo'lib, bunda

$$\lim x_n = \lim 1 = 1, \qquad \lim x_n = \lim (-1) = -1.$$

Shunday qilib, 1 ga intiladigan ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketlik olinganda berilgan funksiyaning qiymatlaridan iborat ketma-ketliklar bitta songa intilmaydi (ularning limitlari mos ravishda 1 va -1 ga teng). Demak $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$ funksiya $x \to a$ da limitga ega emas.

Funksiya limitini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

12.3-t a r i f. *Agar har qanday musbat e son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, x o'zgaruvchining $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida*

$$|f(x) - \delta| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi ($x \to a$ dagi) limiti deb ataladi va yuqoridagidek,

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

kabi belgilanadi.

$x \to \infty$ da f u n k s i y a l i m i t i. $f(x)$ funksiya $(-\infty; +\infty)$ da aniqlangan bo'lsin.

12.4 – ta'rif. *Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $|x| \le \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha hollarda*

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda b son f(x) funksiyaning $x \to \infty$ dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

kabi yoziladi.

Bir tomonli limitlar.

f(x) funksiya *(a; c)* da aniqlangan bo'lsin.

12.5-ta'rif. *Agar* $\forall\varepsilon>0$ *olinganda ham shunday* $\delta>0$ *son topilsaki, x ning* $a<x<a+\delta$ *tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida*

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

bo'lsa, u holda b son f(x) funksiyaning x=a dagi o'ng limiti deyiladi va

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$ *yoki* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=b$

kabi belgilanadi.

12.6-ta'rif. *Agar* $\forall\varepsilon>0$ *son olinganda ham shunday* $\delta>0$ *son topilsaki, x ning* $c-\delta<x<c$ *tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida*

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

bo'lsa, u holda b son f(x) funksiyaning x=c dagi chap limiti deyiladi va

$$\lim_{x\to c-0} f(x)=b \quad \text{yoki} \quad \lim_{\substack{x\to c\\ x<c}} f(x)=b$$

kabi belgilanadi.

Funksiyaning o'ng va chap limitlariga uning *bir tomonli limitlari* deyiladi.

2-§. Limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalari

Biz yuqorida funksiya limitini sonlar ketma- ketligining limiti orqali ta'rifladik. Limitga ega bo'lgan ketma-ketliklar (yaqinlashuvchi ketma-ketliklar) ma'lum xossalarga ega edi (qaralsin, X1 bob, 6-§). Shunga o'xshash xossalar limitga ega bo'lgan funksiyalar uchun xam o'rinli bo'ladi. Ularni keltirish bilan kifoyalanamiz.

Biror X to'plam berilgan bo'lib, *a* nuqta shu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. Bu to'plamda *f(x)* funksiya aniqlangan bo'lsin.

1°. Agar $x\to a$ da *f(x)* funksiya chekli limitga ega bo'lsa:

$$\lim_{x\to a} f(x)=b,$$

u holda *x* o'zgaruvchi *a* nuqtaning yetarli kichik atrofida *f(x)* funksiya chegaralangan bo'ladi.

2^0. Agar $x\to a$ da *f(x)* funksiya chekli limitga ega bo'lsa, u yagona bo'ladi.

X to'plamda *f(x)* bilan birga *g(x)* funksiya ham aniqlangan bo'lsin.

3^0. Agar $x\to a$ da *f(x)* va *g(x)* funksiyalar chekli limitga ega bo'lsa, u holda $f(x)\pm g(x)$ funksiya ham chekli limitga ega va

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$$

bo'ladi.

4°. Agar $x\to a$ da *f(x)* va *g(x)* funksiyalar chekli limitga ega bo'lsa, u holda $f(x)\bullet g(x)$ funksiya ham chekli limitga ega bo'lib,

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\bullet g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\bullet\lim_{x\to a} g(x)$$

bo'ladi.

5°. Agar $x\to a$ da *f(x)* va *g(x)* funksiyalar chekli limitga ega bo'lsa, u holda $\frac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$ funksiya ham chekli limitga ega bo'lib,

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}\ (\lim_{x\to a} g(x)\neq 0)$$

bo'ladi.

Yuqoridagi 4°-xossadan quyidagi natija kelib chiqadi.

12.1-natija. *Agar* $x\to a$ *da f(x) funksiya chekli limitga ega bo'lsa, u holda k • f(x) funksiya (k*-const) h*am limitga ega bo'lib,*

$$\lim_{x\to a}\left[k\cdot f(x)\right]=k\cdot\lim_{x\to a} f(x)$$

bo'ladi.

Misollar. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3-3x^2+x}{7x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(2x^2-3x+1)}{7x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{7}(2x^2-3x+1)=\frac{1}{7}(\lim_{x\to 0}2x^2-\lim_{x\to 0}3x+\lim_{x\to 0}1)=$$

$$=\frac{1}{7}(2\lim_{x\to 0}x^2-3\lim_{x\to 0}x+1)=\frac{1}{7}(2\cdot 0-3\cdot 0+1)=\frac{1}{7}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x})^2-1^2}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

3-§. Ajoyib limitlar

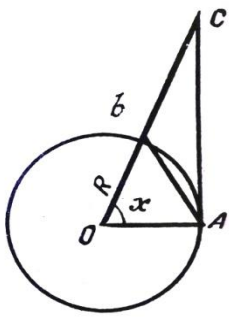
1. Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

munosabat o'rinlidir. Shuni isbotlaymiz.

Avvalo *x* o'zgaruvchining $0<x<\frac{\pi}{2}$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi qiymatlarida $\sin x<x<tgx$ (12.1) tengsizliklarning bajarilishini ko'rsatamiz.

Buning uchun tekislikda markazi (0;0) nuqtada, radiusi *R* ga teng bo'lgan doirani olamiz (qaralsin: 100 - chizma).



100 – chizma

Bu chizmadan ko'rinadiki, ΔAOB ning yuzi $S_1 = \frac{1}{2}R^2 \sin x$, AOB sektorning yuzi $S_2 = \frac{1}{2}R^2 x$, ΔAOC ning yuzi $S_3 = \frac{1}{2}R^2 tgx$ bo'ladi. Ravshanki, $S_1 < S_2 < S_3$.

Demak,

$$\frac{1}{2}R^2 \sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 tgx$$

Bu tengsizliklarning hamma tomonlarini $\frac{1}{2}R^2$ ga bo'lib topamiz:

$\sin x < x < tgx$

x o'zgaruvchining $0 < x < \frac{\pi}{2}$ bo'lishini e'tiborga olib, (12.1) tengsizliklarning hamma tomonini *sinx* ga bo'lamiz. Natijada

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

bo'ladi. Uni, avvalo

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

ko'rinishda, so'ng

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$$

ko'rinishda yozib olamiz. Agar

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} < 2\sin \frac{x}{2} < 2 \cdot \frac{x}{2} = x$$

munosabatni e'tiborga olsak, unda

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x$$

tengsizliklarga kelamiz. Ravshanki, bu tengsizlikdan

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < |x|$$

bo'lishi kelib chiqadi.

$\forall\varepsilon>0$ sonni olib, unga ko'ra $\delta>0$ sonni (uni olingan ε va $\frac{\pi}{2}$ sonlardan kichik qilib) olinsa, u xolda $|x-0|=|x|<\delta$ bo'lganda

$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<|x|<\varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

bo'lishini bildiradi.

2. Biz 11-bob, 7-§ da natural argumentli ushbu $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ funksiya $n\to\infty$ da limitga ega ekanini ko'rsatdik va bu limitni *e* deb atadik:

$$\lim_{n\to\infty} f(n)=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$$

Ko'rsatish mumkinki, ixtiyoriy argumentli ushbu $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ funksiya ham $x\to\infty$ da ($x\to 0$ da) limitga ega bo'ladi va bu limit xuddi *e* ga teng bo'ladi:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\right).$$

Misollar. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin ax}{ax}\cdot ax}{\frac{\sin bx}{bx}\cdot bx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a}{b}\cdot\frac{\frac{\sin ax}{ax}}{\frac{\sin bx}{bx}}==\frac{a}{b}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1}=\frac{a}{b}.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-1}-1\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1-x+1}{x-1}\right)^x=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot 2}\cdot\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\right]==\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\cdot\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)=e\cdot e=e^2$$

4-§. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar. Funksiyalarni solishtirish

Biror haqiqiy sonlar to'plami *X* berilgan bo'lib, *a* nuqta *X* to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. Bu to'plamda α *(x)* va β *(x)* funksiyalar aniqlangan bo'lsin.

12.7-ta'rif. *Agar* $x \to a$ *da* α *(x) funksiyaning limiti nolga teng bo'lsa:*

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$$

u holda $\alpha(x)$ *funksiya* $x \to a$ *da cheksiz kichik funksiya deb ataladi.*

Masalan, $\alpha(x) = \sin x, \alpha(x) = x^2$ funksiyalarning har biri $x \to 0$ da cheksiz kichik funksiyalar bo'ladi.

12.8-ta'rif. *Agar* $x \to a$ *da* $\beta(x)$ *funksiyaning limiti cheksiz bo'lsa:*

$$\lim_{x \to a} \beta(x) = \infty,$$

u holda $\beta(x)$ *funksiya* $x \to a$ *da cheksiz katta funksiya deb ataladi.*

Masalan, $\beta(x) = \frac{1}{x}$ funksiya $x \to 0$ da cheksiz katta funksiya bo'ladi.

Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar orasida bog'lanish bor.

1^0. Agar $\alpha(x)(\alpha(x) \neq 0)$ funksiya cheksiz kichik bo'lsa, $\frac{1}{\alpha(x)}$ cheksiz katta funksiya bo'ladi.

2°. Agar β (x) funksiya cheksiz katta bo'lsa, $\frac{1}{\beta(x)}$ cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

f(x) va *g(x)* fukksiyalar *X* to'plamda berilgan bo'lib, *a* nuqta *X* to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

12.9-ta'rif. *Agar f(x) va g(x) funksiyalar uchun shunday o'zgarmas C (C* > 0) *son topilsaki, a nuqtaning atrofidagi barcha x lar uchun*

$$|f(x)| \leq C \cdot |g(x)|$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $x \to a$ *da f(x) funksiya g(x) funksiyaga nisbatan chegaralangan deb ataladi va*

f(x)=O(g(x))

kabi belgilanadi.

Masalan, $x \to 0$ da $x^2=0(x)$ bo'ladi.

12.10-ta'rif. *Agar f(x) va g(x) cheksiz kichik funksiyalar uchun* $f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$ *bo'lib, bunda* $\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$ *bo'lsa, u holda* $x \to a$ *da f(x) funksiya g(x) funksiyaga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya deb ataladi va f(x)=o(g(x)) kabi belgilanadi.*

Masalan, $x \to 0$ da 1-cos*x=o(x)* bo'ladi.

Mavzu bo'yicha tekshirish uchun savollar

1. Ketma-ketlik limitining ta’rifini ayting?
2. Monoton chegaralangan ketma-ketlikning limitini mavjudligi haqidagi teoremani ayting?
3. Aniqmasliklarni ochishda limitlar nazriyasii qo’llnilishi.
4. Ketma-ketlik limitini hisoblashda qo’llaniladigan asosiy teoremalarni ayting?
5. Ikkinchi ajoyib limit .
6. Funksiya limitining ta’rifi.
7. Funksiya limitini hisoblashda qo’llaniladigan asosiy teoremalarni ayting?
8. Birinchi ajoyib limit.
9. Bir tomonli limitlar.
10. Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar nima ?

Kalit so’zlar

Ketma-ketlik, limit, monoton chegaralangan ketma-ketlik, aniqmasliklarni ochish, Ikkinchi ajoyib limit, funksiyani limiti, asosiy teoremalar, birinchi ajoyib limit, bir tomonli limit, cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar.

Xulosa

Ketma-ketlikning limitini, monoton chegaralangan ketma-ketlikning limitini mavjudligi haqidagi teorema, turli aniqmasliklarni ochishda limitlar nazriyasini qo’llnilishi, ketma-ketlikning limitini hisoblashda qo’llaniladigan asosiy teoremalar , ikkinchi ajoyib limit, funksiya limitini, funksiya limitini hisoblashda qo’llaniladigan asosiy teoremalar, birinchi ajoyib limit, bir tomonli limitlar, cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar o‘rganilgan.

XIII BOB. FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI

1-§. Funksiya uzluksizligi ta’riflari

Funksiyaning uzluksizligi tushunchasi funksiya limiti tushunchasi orqali kiritiladi[2].

f(x) funksiya biror *X* to’plamda berilgan bo’lib, $x_0\,(x_0 \in X)$ nuqta shu to’plamning limit nuqtasi bo’lsin.

13.1-ta’rif. *Agar* $x \to x_0$ *da f(x) funksiya chekli limitga ega bo‘lib,*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (13.1)$$

bo’lsa, f(x) funksiya x_0 *nuqtada uzluksiz deyiladi.*

Misollar. 1. $f(x)=x^2+5x+6$ funksiyani qaraylik. Ravshanki, bu funksiya $(-\infty,+\infty)$ da aniqlangan. Bu funksiya ixtiyoriy $x_0(x_0\in(-\infty,+\infty))$ nuqtada uzluksiz bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}(x^2+5x+6)=x_0^2+5x_0+6$$

bo'ladi va agar $x_0^2+5x_0+6=f(x_0)$ bo'lishini e'tiborga olsak, u holda berilgan funksiya uchun $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ ekanligini topamiz. Demak, *f(x) = x² + 5x+6* funksiya x_0 nuqtada $(x_0\in(-\infty,+\infty))$ uzluksiz.

Yuqoridagi (13.1) limit munosabatni quyidagicha ham yozish mumkin:

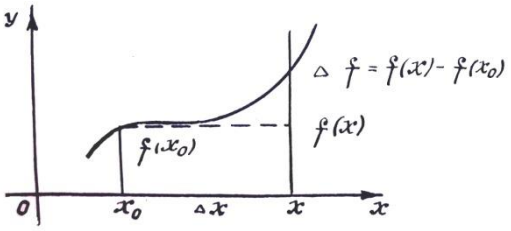
$$\lim_{x-x_0\to 0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0. \qquad (13.2)$$

Aytaylik, qaralayotgan *y=f(x)* funksiyaning grafigi 101-chizmada tasvirlangan egri chiziq bo'lsin.

x-x$_0$ ni Δx bilan belgilaylik: $x-x_0=\Delta x$. U holda $x=x_0+\Delta x$ bo'ladi. Odatda Δx *argument x ning x₀ nuqtadagi orttirmasi* deb ataladi. $x\to x_0$ da Δx nolga intiladi: $\Delta x\to 0$. Ravshanki

$$f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \qquad (13.3)$$

bo'ladi.



101-chizma.

Ushbu

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \qquad (13.3)$$

ayirma *y=f(x)* funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi deb ataladi va Δy yoki $\Delta f(x_0)$ kabi belgilanadi:

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0). \qquad (13.4)$$

Natijada (13.2), (13.3) va (13.4) munosabatlardan foydalanib,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

tenglikni quyidagicha ham yozish mumkinligini aniqlaymiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0.$$

Bu esa *y=f(x)* funksiyaning uzluksizligiga quyidagicha ham ta'rif berish mumkinligini ko'rsatadi.

13.2-ta'rif. *Agar argument orttirmasi* Δx *nolga intilganda funksiya orttirmasi* Δy *ham nolga intilsa, ya'ni*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

bo'lsa, u holda f(x) funksiya x_0 *nuqtada uzluksiz deyiladi.*

Misollar.

1. *f(x)=C (C-o'*zgarmas son) funksiyani qaraylik. Bu funksiya $(-\infty, +\infty)$ da aniqlangan. Argument *x* ga Δx orttirma berib, funksiyaning mos orttirmasini topamiz:

Unda $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$ bo'ladi. Demak, *f(x)=C* funksiya $x \in (-\infty, +\infty)$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

2. *f(x)=sinx* funksiyani qaraylik. Bu $(-\infty, +\infty)$ funksiyada aniqlangan. Argument *x ga* Δx orttirma berib, funksiyaning orttirmasini topamiz:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

Ma'lumki,

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

Unda

$$\Delta f = 2\sin\frac{x + \Delta x - x}{2}\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

bo'ladi. Bu tenglikda $\Delta x \to 0$ da limitga o'tamiz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 2\left[\lim_{\Delta x \to 0}\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] =$$

$$= 2 \cdot \sin\frac{0}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{0}{2}\right) = 2 \cdot 0 \cdot \cos x = 0.$$

Demak,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

bo'ladi. Bu esa *f(x)=sinx* funksiyaning $x \in (-\infty, +\infty)$ nuqtada uzluksiz ekanini bildiradi.

13.3-ta'rif. *Agar f(x) funksiya X to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u holda f(x) funksiya X to'plamda uzluksiz deb ataladi.*

Biz yuqorida $f(x)=x^2+5x+6$, *f(x) =C, f (x)=*sin *x* funksiyalarning ixtiyoriy $x \in (-\infty, +\infty)$ nuqtada uzluksiz bo'lishini ko'rsatgan edik.

Bu funksiyalar $(-\infty, +\infty)$da uzluksiz bo'ladi.

Pirovardida funksiya uzluksizligining yana bitta ta'rifini keltiramiz.

13.4-ta'rif. *Agar* $\forall\varepsilon > 0$ *son uchun shunday* $\partial > 0$ *son topilsaki, funksiya argumenti x ning* $|x - x_0| < \partial$ *tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, f(x) funksiya x_0 *nuqtada uzluksiz deb ataladi.*

2-§. Funksiyaning uzilishi

13.5-ta'rif. *Agar*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (13.5)$$

munosabat bajarilmasa, u holda f(x) funksiya x_0 *nuqtada uzilishga ega (uziladi) deb ataladi.*

Endi (13.5) munosabatning bajarilmaydigan hollarini aniqlashtiramiz.

1) $x \to x_0$ da *f(x)* funksiya chekli limitga (uni *b* deylik) ega bo'lib, bu limit $f(x_0)$ ga teng emas:

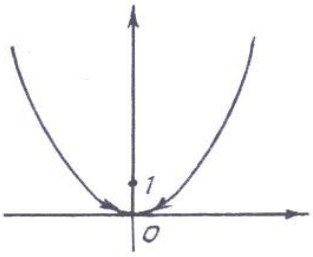
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b \neq f(x_0). \qquad (13.6)$$

Ravshanki, bu holda (13.5) munosabat bajarilmaydi. Demak, *f(x)* funksiya x_0 nuqtada uziladi.

Misol. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x^2, agar\ x \neq 0 \text{ bo'lsa} \\ 1, agar\ x = 0 \quad \text{bo'lsa} \end{cases}$$

funksiyani qaraylik. $x \to 0$ da funksiyaning limita 0 bo'ladi: $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Biroq, *f(x)* funksiyaning *x=0* nuqtadagi qiymati *f(0)=1* bo'lganligidan $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \neq f(0)$ bo'ladi. Qaralayotgan *f(x)* funksiya *x*=0 nuqtada uziladi (102-chizma).



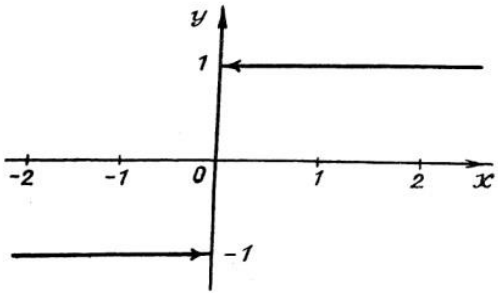
102-chizma.

2) $x \to x_0$ da *f(x)* funksiya limiti mavjud emas yoki u cheksiz. Bu holda ham (13.5) munosabat bajarilmaydi. Demak, *f(x)* funksiya x_0 nuqtada uziladi.

Misol. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x-1}, agar\ x\neq 1 & \text{bo'lsa}\\ 0, agar\ x=1 & \text{bo'lsa}\end{cases}$$

funksiyani qaraylik. Bu funksiya $x \to 1$ da limitga ega emas. Bu holda ham (13.5) munosabat bajarilmaydi. Demak, *f(x)* funksiya x_0=1 nuqtada uziladi (103-chizma).



103-chizma.

3-§. Uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar

f(x) va *g(x)* funksiyalar *X* to'plamda berilgan bo'lsin.

1°. *Agar f(x) va g(x) funksiyalar* $x_0(x_0 \in X)$ *nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda f(x)±g(x) funksiya ham shu* x_0 *nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

2°. *Agar f(x) va g(x) funksiyalar* $x_0(x_0 \in X)$ *nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda f(x)•g(x) funksiya ham shu* x_0 *nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

3°. Agar f(x) va g(x) funksiyalar $x_0(x_0 \in X)$ *nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda* $\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$ *funksiya ham shu* x_0 *nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

Bu xossalar sodda isbotlanadi. Biz ulardan birini, masalan, 2°- xossaning isbotini keltiramiz.

2°-xossaning isboti. Shartga ko'ra *f(x)* va *g(x)* funksiyalar nuqtada uzluksiz. Unda uzluksizlik ta'rifiga asosan

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\right] = 0,\quad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta g(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\left[g(x_0+\Delta x) - g(x_0)\right] = 0$$

bo'ladi. Endi $f(x)\cdot g(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi

$$\Delta\left[f(x_0)\cdot g(x_0)\right]=\left[f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x)\right]-\left[f(x_0)\cdot g\right](x_0)$$

ni olib, uni quyidagicha yozib olamiz:

$$\Delta\left[f(x_0)\cdot g(x_0)\right] = \left[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\right]g(x_0+\Delta x) + \\ + \left[g(x_0+\Delta x) - g(x_0)\right]f(x_0) = \Delta f(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x) + \Delta g(x_0)\cdot f(x_0) \quad (*)$$

Natijada

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta\left[f(x_0)\cdot g(x_0)\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[g(x_0+\Delta x)\cdot\Delta f(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta g(x_0)\right]=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[g(x_0+\Delta x)\cdot\Delta f(x_0)\right]+\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0)\cdot\Delta g(x_0)$$

bo'ladi. Yuqoridagi (13.6) munosabatlarni e'tiborga olib, $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta\left[f(x_0)\cdot g(x_0)\right]=0$ bo'lishini topamiz. Bu esa $f(x)\cdot g(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishini bildiradi.

Murakkab funksiyaning uzluksizligi. $y=\varphi(x)$ funksiya X to'plamda berilgan bo'lib, *u=f(y)* funksiya esa Y to'plamda $(Y=\{\varphi(x):x\in X\})$ berilgan bo'lsin. Ular yordamida $u=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya hosil qilingan bo'lsin.

Agar $y=\varphi(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada uzluksiz, u=f(y) funksiya esa mos* $y_0(y_0=\varphi(x_0))$ *nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda* $u=f(\varphi(x))$ *murakkab funksiya* x_0 *nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

Keltirilgan xossalar yordamida ko'pgina funksiyalarning uzluksizligi topiladi. Masalan, *f(x)=x, g(x)=sinx* funksiyalarning $(-\infty,+\infty)$ oraliqda uzluksiz bo'lishi ko'rsatilgan edi. Yuqoridagi 1°-3°- xossalarga asosan *y=x+sinx, y=x-sinx*, *y=xsinx* funksiyalar ham $(-\infty,+\infty)$ oraliqda uzluksiz.

4-§. Elementar funksiyalarning uzluksizligi

Mazkur kursning 11- bob, 13-§ ida elementar funksiyalarni qarab o'tgan edik. Barcha elementar funksiyalar o'z aniqlanish sohasida uzluksiz bo'ladi.

Ushbu bobning 1-§ ida *y=sinx* funksiyaning uzluksizligi ko'rsatildi. Endi $y=a^x\ (a\neq 1; a>0)$ funksiyaning $(-\infty,+\infty)$ oraliqda uzluksiz bo'lishini ko'rsatamiz.

Ma'lumki, $y=f(x)=a^x\ (a\neq 1; a>0)$ funksiya $(-\infty,+\infty)$ oraliqda aniqlangan. Shu oraliqdan ixtiyoriy $x_0(x_0\in(-\infty,+\infty))$ nuqtani olib, unga Δx orttirma beramiz. Natijada berilgan funksiya ham ortirma oladi:

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=a^{x_0+\Delta x}-a^{x_0}.$$

Uni quyidagicha yozib olamiz:

$$\Delta f(x_0)=a^{x_0+\Delta x}-a^{x_0}=a^{x_0}a^{\Delta x}-a^{x_0}=a^{x_0}(a^{\Delta x}-1).$$

Endi $\Delta x\to 0$da bu orttirmaning limitini xisoblaymiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}a^{x_0}(a^{\Delta x}-1)=a^{x_0}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}(a^{\Delta x}-1)=a^{x_0}\cdot 0=0$$

Demak, $$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0.$$

Funksiya uzluksizligi ta'rifiga binoan, $y = a^x$ berilgan funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi. Qaralayotgan x_0 nuqta $(-\infty, +\infty)$ oraliqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lganligidan $y = a^x$ funksiyaning $(-\infty, +\infty)$ da uzluksiz bo'lishi kelib chiqadi.

Boshqa elementar funksiyalarning o'z aniqlanish sohasida uzluksiz bo'lishi xuddi shu kabi ko'rsatiladi.

5-§. Funksiya uzluksizligidan foydalanib muhim limitlarni hisoblash

Aytaylik, *y=f(x)* funksiya X oraliqda aniqlangan va shu oraliqda uzluksiz bo'lsin. Ixtiyoriy $x_0 \in X$ nuqtani olaylik. Uzluksizlik ta'rifiga asosan

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

bo'ladi. Ravshanki, $\lim_{x \to x_0} x = x_0$. Demak,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) \qquad (13,7)$$

Bu munosabatdan funksiya limitlarini topishda foydalaniladi.

Misollar. 1. $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$ $(a \neq 1,\ a > 0)$ limit hisoblansin.

Logarifmik funksiyaning aniqlash sohasida uzluksizligidan va (13.7) munosabatni e'tiborga olib topamiz:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_0(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \log_a(1+x) = \lim_{x \to 0} \left[\log_a (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] =$$

$$= \log_a \left[\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \log_a e \quad (\text{×óíêè} \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e).$$

Demak, $$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

Xususan,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln e = 1.$$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$ $(a \neq 1, a > 0)$ limit hisoblansin.

Bu limitni hisoblash uchun $a^x - 1 = t$ deb belgilaymiz. Ravshanki, $x \to 0$ da $t \to 0$ va

$$a^x - 1 = t \Rightarrow a^x = 1 + t \Rightarrow \log_a a^x = \log(1+t) \Rightarrow$$

$\Rightarrow x\log_a a = \log_a(1+t) \Rightarrow x = \log_a(1+t)$.

Natijada ushbu tenglikka ega bo'lamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+t)}{t}}.$$

Agar

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+t)}{t}} = \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)}{t}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a$$

Bo'lishini hisobga olsak, u holda

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a \quad (a\neq 1, a>0)$$

ekanligini topamiz.

3. Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$ limit topilsin.

Yuqoridagiga o'xshash mulohaza bilan bu limitni α ga teng bo'lishini ko'rsatish mumkin:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha.$$

Odatda bu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \quad \left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1\right).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a \ (a\neq 1, a\geq 0),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$$

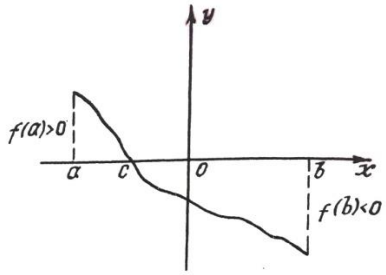
limitlar *ajoyib limitlar* deyiladi.

6-§. Uzluksiz funksiyalarning xossalari

Uzluksiz funksiyalar qator xossalarga ega. Quyida uzluksiz funksiyalarning xossasini ifodalovchi ikkita teoremani isbotsiz keltiramiz.

13. **1- teorema (Bolsano-Koshi teoremasi).** *Agar* $f(x)$ *funksiya* $[a,b]$ *yopiq oraliqdagi (segmentda) aniqlangan va uzluksiz bo'lib, segmentning chetki nuqtalarida turli ishorali qiymatlarga ega bo'lsa, u holda shunday c (a* < c < b*) nuqta topiladiki, u nuqtada funksiya nolga aylanadi: f (c)* = 0.

Bu teorema sodda geometrik ma'noga ega bo'lib, u uzluksiz funksiya (uzluksiz egri chiziq) *Ox* o'qining bir tomonidan ikkinchi tomoniga o'tishda, uni albatta kesib o'tishini ifodalaydi (104-chizma).



13. 2-teorema (Veyershtrass teoremasi). *Agar f (x) funksiya [a, b] segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u shu segmentda chegaralangan bo'ladi.*

7- §. Funksiyaning tekis uzluksizligi

f(x) funksiya *X* to'plamda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin.

13.6-ta'rif. *Agar* $\forall\varepsilon > 0$ *son uchun shunday* δ >0 *son topilsaki, X to'plamning* $|x_1 - x_2| < \delta$ *tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy* x_1 *va* x_2 *nuqtalarida*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, f(x) funksiya X *to'plamda tekis uzluksiz deyiladi.*

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, agar *f(x)* funksiya X da tekis uzluksiz bo'lsa, u shu X da uzluksiz ham bo'ladi.

Misollar. 1. *f(x)=*$\sqrt{x}$ funksiyani *x*=[1, 2] segmentda qaraylik. Ravshanki, bu funksiya $x \in [1,\ 2]$ da uzluksiz, $\forall\varepsilon > 0$ son uchun $\delta = \varepsilon$ deb olinsa, $|x_1 - x_2| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x_1, x_2 \in [1,\ 2]$ uchun

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}\right| =$$

$$= \left|\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}\right| \le \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} < |x_1 - x_2| < \delta = \varepsilon$$

bo'ladi. Demak, $\forall x_1, x_2 \in [1,\ 2]$ uchun

$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Bu esa $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyaning [1, 2] da tekis uzluksiz ekanini bildiradi.

2. $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya X=(0, 1) intervalda uzluksiz, biroq bu funksiya shu (0,1) da tekis uzluksiz emas.

Quyida funksiyaning tekis uzluksizligini ta'minlaydigan teoremani isbotsiz keltiramiz.

13. 3- teorema (Kantor teoremasi). *Agar f(x) funksiya [a, b] segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u shu segmentda tekis uzluksiz bo'ladi.*

Mavzu bo'yicha tekshirish uchun savollar:

1. Funksiya uzluksizligining ta'rifi.
2. Uzluksiz funksiyaning xossalari.
4. Elementar funksiyalarning uzluksizligi.
5. Funksiyaning uzilish nuqtalari, uzilish nuqtalarining turlari.
6. Uzluksiz funksiyalar uchun Veyershtrass teoremasi.
7. Funksiya tekis uzluksizligi.
8. Uzluksiz funksiyalar uchun Kantor teoremasi.

Kalit so'zlar

Funksiyani uzluksizligi, xossalari, uzilish nuqtalari, uzilish nuqtalari-ning turlari, Veyershtrass teoremasi, tekis uzluksizlik, Kantor teoremasi.

Xulosa

Funksiya uzluksizligi, uzluksiz funksiyaning xossalari, elementar funksiyalarning uzluksizligi, funksiyaning uzilish nuqtalari, uzilish nuqtalarining turlari, uzluksiz funksiyalar uchun Veyershtrass teorema-si, funksiyaning tekis uzluksizligi, uzluksiz funksiyalar uchun Kantor teoremalari o'rganilgan.

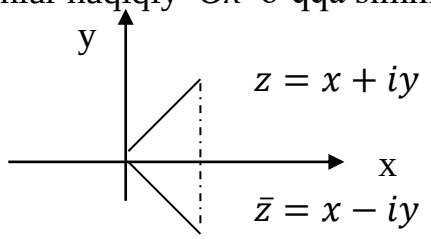
8-§. Kompleks sonlar

Maktab dasturidan ma'lumki, oddiy kvadrat tenglamaning $ax^2 + bx + c = 0$ diskriminanti $D = b^2 - 4ac < 0$ $kichik$ bo′lganda, tenglama haqiqiy ildizga ega bo'lmaydi. Bu holda tenglamaning ildizlari kompleks son bo'ladi.

Kompleks son deb $z = x + iy$ ifodaga aytiladi. Bu yerda x- kompleks soning haqiqiy qismi bo'lib u quyidagicha $x = Rez$, y - esa mavhum qismi $y = Imz$ belgilanadi. Demak, x , y haqiqiy sonlar, $i = \sqrt{-1}$ mavhum son.

Tekislikda Ox- haqiqiy sonlar o'qi, Oy- mavhum sonlar o'qi deyiladi. Kompleks sonlarni ifodalovchi tekestlik kompleks tekislik deyiladi. Kompleks sonning moduli $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Kompleks sonning moduli koordinatalar boshidan M(x; y) nuqtagach bo'lgan masofa bo'ladi.

$z = x + iy$ komplers songa qo'shma komplers son $\bar{z} = x - iy$ belgilanadi. Demak, z va $\bar{z}$ sonlar haqiqiy Ox o'qqa simmetrik nuqtalar bo'ladi



Ikkita algebraik shaklda $z_1 = x_1 + iy_1$ va $z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks sonlar berilgan bo'lsa, qo'shish, ayrish, ko'paytirish va bo'lish amallari quyidagichabajariladi:

1). $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$.

2). $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

Bu tenglikdan xususiy holda $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.

$z\bar{z} = (x - iy)(x + iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$ kelib chiqadi.

3) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2{}^2 + y_2{}^2}$, $(z_2 \neq 0)$

z nuqtani, kompleks sonni, qutub koordinatalar sistemasida ifodalaymiz:

$$cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad sin\varphi = \frac{y}{r}, \quad x = r\,cos\varphi, \quad y = r\,sin\varphi$$

Bu yerda φ , z- kompleks sonning argumenti deyiladi va quyidagicha yoziladi $\varphi = argz$. z- kompleks sonning argumentining bosh qismi $-\pi < argz \leq \pi$ bo'ladi. Ixtiyoriy kompleks sonni yuqoridagi ifodalashlar yordamida trigonometrik shaklda quidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$z = x + iy = r(cos\varphi + isin\varphi)$$

Trigonometrik shakldagi berilgan kompleks sonlar uchun

$z_1 = r_1\,(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)$, $z_2 = r_2\,(cos\,\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

amallar quyidagicha bajariladi:

1) $z_1\,z_2 = r_1r_2\,(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)(cos\,\varphi_2 + i\sin\varphi_2 =$

$$= r_1 r_2\ [(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\ \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)] =$$

$$= r_1 r_2\ (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Demak, trigonometrik shakldagi kompleks sonlarni ko'paytirganda modullari kopaytiriladi, argumentlari qo'shiladi.

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} \frac{(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cos\varphi_1)}{(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Trigonometrik shakldagi kompleks sonlarni bo'lganda, modullari bo'linadi, argumentlari ayriladi.

Muavr formulasi. Yuqorida keltirilgan trigonometrik shakldagi kompleks sonlarni ko'paytirish qoidasini ketma-ket qo'llab amaliy misollarni yechishda ko'p qo'llanadigan Muavr formulasiga ega bo'lamiz:

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), n \in Z$$

Trigonometrik shakldagi kompleks sonlarni darajaga ko'targanimizda, modullari shu darajaga ko'tarilib, argumentlari shu songa ko'paytiriladii.

Kompleks sondan ildiz chiqarish. Trigonometrik shakldagi kompleks son berilgan bo'lsin:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Faraz qilaylik quyidagi tenglik o'rinli bo'lsin

$$\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Yuqorida keltirilgan Muavr formulasiga asosan

$$z = \rho^n\ (\cos\psi + i\sin\psi)^n$$

$$\rho^n = r,\ \ \rho = \sqrt[n]{r}\ \ ,\qquad n\psi = \varphi + 2k\pi \qquad k = \pm1, \pm2, \pm3 \ldots$$

$$\rho = \sqrt[n]{r}\ ,\ \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3 \ldots$$

Kompleks sondan ildiz chiqarish formulsiga ega bo'lamiz

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,2,3,\ldots,(n-1).$$

Misollar yechishda quyidagi Eyler formulasidan ham foydalaniladi

$$exp(ix)=cosx + isinx.$$

Mavzuga doir namunaviy misollarning yechimi. Kompleks sonlar ustida arifmetik amallarni bajarish

Yuqorida keltirilgan kompleks sonlarda amallarni bajarish qoidalariga asosan formulalardan foydalanib ushbu misollarni yechamiz.

Misol-1. $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - 2i$,

1) $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (1 - 2i) = 3 + i.$

2) $z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (1 - 2i) = 1 + 5i.$

3) $z_1 z_2 = (2 + 3i)(1 - 2i) = 2 + 3i - 4i - 6i^2 = 8 - i.$

4) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{(2+3i)}{(1-i)}\frac{(1+i)}{(1+i)} = \frac{2+3i+2i-3i^2}{1^2-i^2} = \frac{5+5i}{1+1} = \frac{5}{2} + \frac{5i}{2}.$

Misol-2. 3+3i kompleks sonnii trigonometrik shaklda yozing.

x=3, y=3, $r = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

$\cos\varphi = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}$,

Demak, 3+3i = $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

Misol-3. Quyidagi kompleks sonlarda talab qilingan amallarni bajaring. Muavr formulasiga asosan

$\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{10}$, avval $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ni trigonometrik shaklida yozamiz. $x = \frac{3}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{10} = \left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\left(-\frac{4}{6}\right)\right)\right]^{10} = 3^5\left(\cos\left(10\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(10\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 3^5\left(\cos 5\frac{\pi}{3} - i\sin 5\frac{\pi}{3}\right) = 3^5\left(\cos\left(270 + \frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(270 + \frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 3^5\left(\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\right) = 3^5\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

Demak: $\left(\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10}=3^5\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Misol-4. $\sqrt{i}$ sonidan ildiz chiqaring. Avvalo berilgan kompleks sonni trigonometrik shaklda yozib, () formula bilan hisoblaymiz:

r =1, $tg\varphi=\frac{y}{x}$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, i= $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$,

$$\sqrt{i}=\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2} \qquad k=0,1$$

$$z_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_2=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)$$

$$=-\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Mustaqil yechish uchun misollar

Amallarni bajaring:

1) *a) (3+i)+(-3-8i) ; b) (1-i)-(7-3i)-(2+9i)+(6-2i), c) (3+4i)*$\cdot(3-4i)$;

d) $\frac{2}{2i},\frac{1+i}{1-i},\frac{2-3i}{4+5i},\frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-2i}$, *j) hisoblang* i^{102}, i^{2019}.

2). Quyidagi kompleks sonlarni modullarini hisoblang.

a) $z=4+3i$; b) $z=\cos\alpha-i\sin\alpha$; c) $z=-2+2\sqrt{3}i$.

3). Quyidagi kompleks sonlarni trigonometrik shaklda yozing.

a) $\sqrt{3}-i,\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$, b) $z=-1-i\sqrt{3}$; c) $z=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

4).Quyidagi sonlarni algebrik shakda yozing

$\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; $2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

5). Bo‘lish amalini bajaring $\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right):2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

6). Darajaga ko‘taring.

a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^6$, *b)* $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right]^8$, c) $(-1+i\sqrt{3})^{60}$.

d) $(\sqrt{3}-3i)^{60}$; e) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4$

7). Sonlardan ildiz chiqaring.

$a)\sqrt[3]{i}$, $b)\sqrt[4]{4}$, $c)\sqrt[4]{-2+2i\sqrt{3}}$. d) $\sqrt[4]{1-i}$; e) $\sqrt[4]{1}$.

8). Tengliklarini isbotlang. *a*) $z+\bar{z}=2\operatorname{Re} z$; b) $|\bar{z}|=|z|$.

9). Quyidagi tenglamalar bilan qanday egri chiziqlar berilgan.

a) $|z-z_0|=r,\ r>0,$ b) $|z+c|+|z-c|=2a,\quad a>c$ haqiqiy sonlar.

c) $\operatorname{Re}(1/\omega)=1/2,\quad \operatorname{Im}=1/4,\quad \omega=x+2yi$

g) $\operatorname{Im} z^2=2;$ d) $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{x^2}\right)=1?$

XIV BOB. FUNKSIYANING HOSILASI VA DIFFERENSIALI

Funksiyaning hosilasi tushunchasi matematik analizning asosiy tushunchalaridan biri. Bu tushuncha bilan batafsil tanishishdan avval unga olib keladigan bitta masalani qaraymiz.

1-§. Tezlik haqidagi masala

Moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab *S=f(t)* qonun bo'yicha harakat qilsin. Masala moddiy nuqtaning t_0 paytdagi tezligini (oniy tezligini) topishdan iborat. Moddiy nuqtaning t_0 vaqt davomida bosib o'tgan yo'li $f(t_0)$, $t_0+\Delta t(\Delta t>0)$ vaqt davomida bosib o'tgan yo'li esa $f(t_0+\Delta t)$ teng bo'ladi. Natijada vaqtning t_0 paytdan $t_0+\Delta t$ paytga o'tishida moddiy nuqta ΔS yo'lni bosib o'tadi (105-chizma). Bu masofa $\Delta S=f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$ ga teng. Demak, moddiy nuqta Δt vaqt ichida ΔS yo'lni bosib o'tadi.

105- чизма

Unda $$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$
nisbat o'*rtacha tezlikni* ifodalaydi. O'rtacha tezlik Δt ga bog'liq bo'lib, u qanchalik kichik bo'lsa, $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ o'rtacha tezlik moddiy nuqtaning t_0 paytdagi tezligiga shunchalik yaqin keladi. Boshqacha aytganda, Δt nolga intila borgan sari $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ miqdor biz izlayotgan moddiy nuqtaning t_0 paytdagi tezligini tobora aniqroq ifodalay boradi. Tabiiyki, ushbu
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$
limit moddiy nuktaning $t_?$ paytdagi *tezligi* buladi.

Shunday qilib, *izlanayotgan oniy tezlikni topish S=f(t) funksiya orttirmasi* ΔS*ni argument orttirmasi* Δt *ga bo'lgan nisbatining argument orttirmasi nolga intilgandagi limitini hisoblashga kelar ekan.* Umuman, juda ko'p masalalarning yechimi yuqoridagiga o'xshash nisbatning limitini topish bilan xal qilinadi. Bunday nisbatning limiti hosila tushunchasiga olib keladi.

2-§. Funksiya hosilasining ta'rifi

y = f(x) funksiya *(a, b)* intervalda berilgan bo'lib, $x_0 \in (a,b)$ bo'lsin. Bu x_0 nuqtaga shunday Δx orttirma beraylikki, $x_0 + \Delta x \in (a,b)$ bo'lsin. U holda ush bu $(\Delta x \lesseqgtr 0)$
$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$
orttirmaga ega bo'lamiz.

14.1-ta'rif. *Agar* $\Delta x \to 0$ *da*
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
nisbatning limiti mavjud va chekli bo'lsa, bu limit f(x) funksiyaning x_0 *nuqtadagi hosilasi deb ataladi va* $f'(x_0)$, *yoki* $y'_{x=x_0}$, *yoki* $\frac{dy}{dx}$ *kabi belgilanadi:*
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

1-§ da keltirilgan masalada *S f(t)* qonun bo'yicha harakatlanayotgan moddiy nuqtaning t_0 paytdagi oniy tezligi *f(t)* funksiyaning t_0 nuqtadagi hosilasidan iborat bo'lar ekan.

14. 1-eslatma. Agar $\Delta x \to 0$da

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ning limiti mavjud bo'lib, $y = +\infty$ (yoki $-\infty$) bo'lsa, uni ham *f(x)* funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deb ataladi. Bunday hosila cheksiz hosila deyiladi.

Misollar. 1. *y=f(x)=C (C = const)* funksiyaning hosilasi topilsin.

Argument *x* ga Δx orttirma berib, funksiyaning orttirmasini topamiz:

$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$

So'ng bu orttirmani argument orttirmasi Δx ga bo'lamiz. Natijada

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

bo'lib, undan

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, *y'=0.*

Shunday qilib, $y = C$ bo'lsa, $y' = 0$

2. *y=f(x)=x* funksiyaning hosilasi topilsin.

Argument *x* ga Δx orttirma berib, funksiya orttirmasini topamiz:

$$\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x) - x = \Delta x.$$

So'ng bu orttirmani argument orttirmasi Δx ga bo'lamiz. Natijada

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

bo'lib, undan

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, *y'*=1. Shunday qilib, *y=x* bo'lsa, *y'*=1 bo'ladi.

3. $y = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ funksiyaning hosilasi topilsin.

Argument *x ga* Δx orttirma berib, funksiya orttirmasini topamiz:

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}.$$

Bu Δy ni Δx ga bo'lamiz. Natijada

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{x(x + \Delta \mathbf{x})}}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)} \cdot \frac{1}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}$$

Endi $\Delta x \to 0$da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning limitini topamiz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(-\frac{1}{x(x + \Delta x)} \right) = -\frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

Demak, $y''=(y')'$, $f''(x)=(f'(x))'$.

Shunday qilib, $y=\frac{1}{x}$ bo'lsa, $y'=-\frac{1}{x^2}$ bo'ladi.

4. $y=\sin x$ funksiyaning hosilasi topilsin. Bu funksiya uchun

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x$$

bo'ladi. Ma'lumki, $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Bu formuladan foydalansak, unda Δy uchun

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}==2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

bo'lishini topamiz. U holda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$

Bundan $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]$$

bo'lishi kelib chiqadi. Agar

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1 \text{ (chunki } \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1\text{),}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})=\cos\left[\lim_{\Delta x\to 0}(x+\frac{\Delta x}{2})\right]=\cos x$$

bo'lishini e'tiborga olsak, u holda

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1\cdot\cos x$$

tenglikka ega bo'lamiz. Demak, $y'=\cos x$. Shunday qilib, $y=\sin x$ bo'lsa, $y'=\cos x$ bo'ladi.

14.3-eslatma. Har qanday uzluksiz funksiya ham hosilaga ega bo'lavermaydi. Masalan, ushbu $y=f(x)=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada hosilaga ega bo'lmaydi.

Haqiqatan ham, x=0 nuqtaga Δx orttirma berib, funksiyaning orttirmasini topamiz:

$$\Delta y=\Delta f(0)=f(0+\Delta x)-f(0)=|0+\Delta x|-|0|=|\Delta x|$$

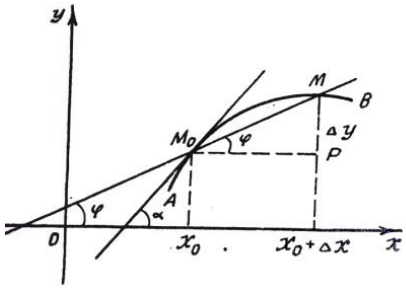
Unda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

bo'ladi. Biroq $\Delta x \to 0$da bu nisbatning limiti mavjud emas. Demak, $y = f(x) = |x|$ funksiya $x = 0$ nuqtada hosilaga ega emas.

3- §. Hosilaning geometrik ma'nosi

Aytaylik, *f(x)* funksiya (a, b) intervalda berilgan va uzluksiz bo'lsin. Bu funksiyaning grafigi 106-chizmada ko'rsatilgan *AB* egri chiziqni tasvirlasin. *AB* chiziqda $M_0\ (x_0, f\ (x_0))$ nuqta bilan birga ushbu $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ nuqtani olib, ular orqali M_0M kesuvchini o'tkazamiz. Bu kesuvchining *Ox o'q*ining musbat



106 - chizma

yo'nalishi bilan tashkil etgan burchakni φ bilan belgilaymiz.

14.2-ta'rif. *M_0M kesuvchining M nuqta AB egri chiziq bo'ylab M_0 ga intilgandagi limit Holati $\breve{A}B$ egri chiziqqa M_0 nuqtada o'tkazilgan urinma deb ataladi.*

Urinmaning *Ox o'q*ining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchakni α deylik.

106-chizma va ta'rifdan $\Delta x \to 0$da *M* nuqta M_0 ga intilishini ko'ramiz. Demak, $\Delta x \to 0$ da $\varphi \to \alpha$ bo'ladi.

Qaralayotgan *f(x)* funksiya x_0 nuqtada $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Ta'rifga ko'ra

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

ΔMM_0Pdan

$$tg\varphi = \frac{MP}{M_0P} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo'ladi. Bu tenglikdan esa

$$\varphi = arctg\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Endi $\Delta x \to 0$ da limitga o'tib topamiz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} arctg\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = arctg\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right] = arctgf'(x_0)$$

Demak, $\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi = arctgf'(x_0)$. Bundan esa

$$f'(x_0) = tg\alpha$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, *f(x)* funksiyaning x_0 nuqtadagi $f'(x_0)$ hosilasi shu funksiya grafigiga M_0 nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientidan iborat ekan.

Urinma va normalning tenglamasi. $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $f'(x_0)$ urinmaning burchak koeffitsienti bo'ladi. Unda *f(x)* funksiya grafigiga $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtadan o'tkazilgan urinmaning tenglamasi

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Ko'p hollarda egri chiziqqa $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtasida o'tkazilgan normalning tenglamasini ham bilish kerak bo'ladi. Ma'lumki, egri chiziqda $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtada o'tkazilgan normal shu nuqtadagi urinmaga perpendikulyar bo'lar edi.

Demak, normalning tenglamasi ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0).$$

4-§. Funksiyaning uzluksiz bo'lishi bilan uning hosilaga ega bo'lishi orasidagi bog'lanish

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, $x_0 (x_0 \in (a,b))$ nuqtada $f'(x_0)$ chekli hosilaga ega bo'lsin. Unda hosila ta'rifiga binoan

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ bo'lib, } \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)\right] = 0$$

bo'ladi. Ushbu $\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x)$ belgilash qilamiz. Bunda, ravshanki, $\Delta x \to 0$da $\alpha(\Delta x) \to 0$ bo'lib,

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \qquad (14.1)$$

bo'ladi.

Odatda, (14.1) formula *funksiya orttirmasining formulasi* deyiladi. Bu formuladan $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa *f(x)* funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishini bildiradi.

Shunday qilib, *f(x)* funksiya x_0 nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

14.4-eslatma. Uzluksiz funksiyalar ham doim hosilaga ega bo'lavermaydi. Masalan, $f(x) = |x|$ funksiya x=0 nuqtada uzluksiz, biroq bu funksiya shu nuqtada hosilaga ega emas.

5-§. Teskari funksiyaning hosilasi

y=f(x) funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, unga teskari $x = \varphi(y)$ funksiya mavjud bo'lsin.

Agar y=f(x) funksiya $x_0 (x_0 \in (a,b))$ *nuqtada f'(x₀) hosilaga ega bo'lib* $f'(x_0) \neq 0$ *bo'lsa, u holda bu funksiyaga teskari bo'lgan* $x = \varphi(y)$ *funksiya* $y_0 = f(x_0)$ *nuqtada hosilaga ega bo'ladi va*

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad (14.2)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

y_0 nuqtaga Δy orttirma beraylik. Unda $x = \varphi(y)$ orttirmaga ega bo'ladi. Endi

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} \ (\Delta y \neq 0 \Rightarrow \Delta x \neq 0)$$

tenglikda $\Delta y \to 0$da limitga o'tib ($\Delta y \to 0$ da Δx xam nolga intiladi) topamiz:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Agar

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \varphi'(y_0), \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Ekanini e'tiborga olsak, u holda yuqoridagi tenglikdan

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Shuni isbotlash kerak edi.

Misol. $y = \arcsin x \ (-1 < x < 1)$ funksiyaning hosilasi topilsin.

Ravshanki, *y=arcsinx* funksiya *x=siny* funksiyaga nisbatan teskari funksiyadir. (14.2) formulaga ko'ra $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ bo'ladi:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \Rightarrow y' = \frac{1}{(\sin y)'} \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Demak, *y=arcsinx* bo'lsa, $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ bo'ladi.

6-§. Murakkab funksiyaning hosilasi

$y = \varphi(x)$ funksiya X to'plamda, $u = f(y)$ funksiya esa $Y(Y = \{\varphi(x) : x \in X\})$ to'plamda berilgan bo'lib,

$$u = f(\varphi(x))$$

murakkab funksiyaga ega bo'laylik.

Agar $y = \varphi(x)$ funksiya x_0 nuqtada $\varphi'(x_0)$ hosilaga ega bo'lib, $u = f(y)$ funksiya $y_0(y_0 = \varphi(x_0))$ nuqtada $f'(y_0)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda $u = f(\varphi(x))$ murakkab funksiya ham x_0 nuqtada hosilaga ega bo'ladi va ushbu

$$[f(\varphi(x))]^1_{x=x_0} = f'(y_0)\cdot\varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0))\cdot\varphi'(x_0)$$

formula o'rinli bo'ladi.

x ga Δx orttirma beramiz. Unda $y = \varphi(x)$ funksiya $\Delta\varphi$ orttirmaga, $u = f(y)$ funksiya esa o'z navbatida Δu orttirmaga ega bo'ladi.

Funksiya orttirmasi formulasi (14.1) ga ko'ra

$\Delta u = f'(y_0)\cdot\Delta\varphi + \alpha\cdot\Delta\varphi$

bo'ladi. Bu tenglikning har ikki tomonini Δx ga bo'lamiz:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(y_0)\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} + \alpha\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}.$$

Bu tenglikda $\Delta x \to 0$ da limitga o'tib topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(y)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\alpha\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = f'(y_0)\cdot\varphi'(x_0).$$

Shunday qilib,

$$[f(\varphi()x)]_{x=x_0} = f'(\varphi(x_0))\cdot\varphi'(x_0).$$

Misol. $u = \sin^3 x$ funksiyaning hosilasi topilsin.

Agar $u = y^3$, $y=sinx$ deyilsa, unda (14.2) formulaga ko'ra

$u' = (y^3)'\cdot(\sin x)' = 3y^2\cdot\cos x = 3\cdot\sin^2 x\cdot\cos x.$

7-§. Hosila hisoblashdagi sodda qoidalar

f(x) va *g(x)* funksiyalari (a, b) oraliqda berilgan bo'lsin.

1^0. *Agar f(x) va g(x) hosilalarga ega bo'lsa, u holda* $f(x)\pm g(x)$ *funksiya ham hosilaga ega bo'lib,*

$$[f(x)\pm g(x)]^1 = f'(x)\pm g^1(x)$$

bo'ladi.

2^0. *Agar f(x) va g(x) hosilalarga ega bo'lsa, u holda* $f(x)\cdot g(x)$ *funksiya ham hosilaga ega bo'lib,*

$$[f(x)\cdot g(c)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

bo'ladi.

3^0. *Agar f(x) va g(x) (*$g(x) \neq 0$*) hosilalarga ega bo'lsa, u holda* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *funksiya ham hosilaga ega bo'lib,*

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

bo'ladi.

Bu tasdiqlarni isbotlash qiyin emas. Ulardan birini, masalan, 2^0 – tasdiqning isbotini keltiramiz.

2^0 – tasdiqning isboti. x argumentga Δx orttirma beramiz. Unda $f(x), g(x)$ va $f(x)\cdot g(x)$ funksiyalar ham Ushbu

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x), \quad \Delta g(x) = g(x+\Delta x) - g(x),$$
$$\Delta\left[f(x)\cdot g(x)\right] = f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)g(x)$$

Orttirmalarga ega bo'ladi. *f(x)* va *g(x)* funksiyalar $f'(x), g(x)$ hosilalarga ega. Demak,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x},\ g'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}.$$

13-bobning 3 - § ida keltirilgan (*) munosabat kabi

$$\Delta\left[f(x)g(x)\right] = \Delta f(x)\cdot g(x+\Delta x) + \Delta g(x)\cdot f(x)$$

bo'ladi. Bu tenglikning har ikkala tomonini Δx ga bo'lib, so'ngra $\Delta x \to 0$ da limitga o'tamiz:

$$\frac{\Delta\left[f(x)g(x)\right]}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)\cdot g(x+\Delta x) + \Delta g(x)\cdot f(x)}{\Delta x} =$$
$$= \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\cdot g(x+\Delta x) + f(x)\cdot\frac{\Delta g(x)}{\Delta x},$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\left[f(x)g(x)\right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\cdot g(x+\Delta x) + f(x)\cdot\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}\right] =$$
$$\lim_{\Delta x\to}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x} g(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x\to 0} f(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0} f(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} =$$
$$= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

Agar

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\left[f(x)g(x)\right]}{\Delta x} = \left[f(x)\cdot g(x)\right]'$$

Ekanini e'tiborga olsak, unda yuqoridagi tenglikdan

$$\left[f(x)\cdot g(c)\right]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

bo'lishi kelib chiqadi

Xususan, $g(x) = C - const$ bo'lsa, u holda

$[C\cdot f(x)]' = f'(x)\cdot C + f(x)\cdot C' = f'(x)\cdot C + f(x)\cdot 0 = C\cdot f'(x)$ bo'ladi. Demak,
$[C\cdot f(x)]' = C\cdot f'(x)$.

8-§. Elementar funksiyalarning hosilalari

Quyida elementar funksiyalarning hosilalarini hisoblaymiz.

1. Darajali funksiyaning hosilasi. $y = x^{\mu}$ $(x > 0)$ funksiyaning hosilasini topish uchun x argumentga Δx orttirma berib, funksiya orttirmasini hisoblaymiz:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^{\mu} - x^{\mu} \Rightarrow \Delta y = x^{\mu}\cdot\frac{(x+\Delta x)^{\mu}}{x^{\mu}} - x^{\mu} \Rightarrow$$

$$\Delta y = x^{\mu}\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{\mu} - x^{\mu} = x^{\mu}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1\right].$$

Endi bu Δy ni Δx ga bo'lib, $\Delta x \to 0$da limitga o'tamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^{\mu}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1\right]}{\Delta x} = x^{\mu-1}\cdot x\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu}}{\Delta x} = = x^{\mu-1}\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\frac{\Delta x}{x}},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[x^{\mu-1}\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\frac{\Delta x}{x}}\right] = x^{\mu-1}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu-1}}{\frac{\Delta x}{x}} = = x^{\mu-1}\cdot\mu$$

(chunki, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^{\mu} - 1}{\alpha} = \mu$). Demak, $y' = \mu\cdot x^{\mu-1}$. Shunday qilib, $y = x^{\mu}$ *bo'lsa, u holda* $y' = \mu\cdot x^{\mu-1}$ *bo'ladi.*

2. Ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi. $y = a^{x}$ $(a > 0, a \neq 1)$. Ko'rsatkichli funksiyaning hosilasini topish uchun x argumentga Δx orttirma berib, funksiya orttirmasini hisoblaymiz:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^{x} = a^{x}\cdot a^{\Delta x} - a^{x} = a^{x}(a^{\Delta x} - 1).$$

Endi uni Δx ga bo'lib, $\Delta x \to 0$da limitga o'tamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x}(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x}(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^{x}\cdot\ln a$$

(chunki $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{a^{\alpha} - 1}{\alpha} = \ln a$).

Demak, $y' = a^{x}\cdot\ln a$. Shunday qilib, $y = a^{x}$ *bo'lsa,* $y' = a^{x}\cdot\ln a$ *bo'ladi.*

3. Logarifmik funksiyaning hosilasi. $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1, x > 0)$ logarifmik funksiya argumenti x ga Δx orttirma berib, funksiya orttirmasini topamiz:

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x.$$

Bu orttirmani quyidagicha yozish mumkin:

$$\Delta y = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Funksiya orttirmasi Δy ni argument orttirmasi Δx ga bo'lib, so'ngra $\Delta x \to 0$ da limitga o'tib topamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \log_a (1 + \frac{\Delta x}{x}) =$$

$$= \frac{1}{x} \left[\frac{1}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \log_a (1 + \frac{\Delta x}{x}) \right] = \frac{1}{x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{1/\Delta x/x},$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\frac{\Delta x}{x}}} \right] = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \log_a (1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{1}{\frac{\Delta x}{x}}} =$$

$$= \frac{1}{x} \log_a \left[\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\frac{\Delta x}{x}}} \right] = \frac{1}{x} \log_a e$$

(chunki $\lim\limits_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$, qaralsin, X bob, 8- §).

Demak, $y' = \frac{1}{x} \log_a e$. Shunday qilib,

$y = \log_a x$ bo'lsa, $y' = \frac{1}{x} \log_a e$ bo'ladi.

Xususan,

$y = \ln x$ bo'lsa, $y' = \frac{1}{x} \log_e e = \frac{1}{x}$ bo'ladi.

4. Trigonometrik funksiyalarning hosilalari. Biz 2-§ da $y = \sin x$ funksiyaning Hosilasini topgan edik: *y=sinx* bo'lsa, *y' = cosx* bo'ladi. Xuddi o'sha yo'l bilan *y=cosx* funksiyaning hosilasi topiladi: bu hosila *y'=(cosx)'= - sinx* ga teng bo'ladi. Demak,

$y = \cos x$ bo'lsa, $y' = -\sin x$ bo'ladi

Endi *y=tgx* funksiyaning hosilasini hisoblaymiz. Ma'lumki,

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Demak, $y' = (tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^1$.

Ikki funksiya bo'linmasining hosilasi haqidagi qoidadan foydalanamiz:

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$\frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Demak, $y = tgx$ bo'lsa, $y' = (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ bo'ladi.

Xuddi shunga o'xshash,

$y = ctgx$ bo'lsa, $y' = (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ bo'ladi.

9 - §. Teskari trigonometrik funksiyalarning hosilalari

Biz 5-§ da *y=arcsinx* funksiyaning hosilasini topgan edik. Unda ko'rdikki,

$y = \arcsin x$ bo'lsa, $y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ bo'ladi.

Endi *y=arccosx*, *y=arctgx*, *y=arcctgx* funksiyalarning hosilalarini hisoblaymiz.

Ravshanki, *y=arccosx* funksiya *x=cosy* funksiyaga nisbatan teskari funksiyadir. (14.2) formulaga ko'ra $y'_x = \frac{1}{x'_y}$.

U holda

$$y' = (\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Demak,

$y = \arccos x$ bo'lsa, $y' = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ bo'ladi.

Endi *y=arctgx* funksiyani qaraylik. Bu *y=arctgx* funksiya *x=tgy* funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo'ladi. (14.2) formulaga ko'ra

$$y' = (arctgx)' = \frac{1}{(tgy)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} =$$

$$= \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Demak,

$y = arctgx$ bo'lsa, $y' = (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$ bo'ladi.

Xuddi shunga o'xshash,

$y = arcctgx$ bo'lsa, $y' = (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$ bo'ladi.

10-§. Hosilalar jadvali

Yuqorida keltirilgan elementar funksiyalarning hosilalarini jamlab, quyidagi hosilalar jadvalini tuzamiz:

1. $y=C=const$ bo'lsa, y'=(C)'=0 bo'ladi.
2. $y = x^{\mu}\ (x > 0), y' = (x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$.
3. $y = a^x\ (a > 0, a \neq 1), y' = (a^x)' = a^x \ln a$.
4. $y = \log_a x\,(a > 0, a \neq 1), y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$.
5. $y = \ln x\,(x > 0), y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.
6. $y = \sin x, y' = (\sin x)' = \cos x$.
7. $y = \cos x,\ y' = (\cos x)' = -\sin x$.
8. $y = tgx, y' = (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}\,(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$.
9. $y = ctgx, y'\,(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}\,(x \neq k\pi)$.
10. $y = \arcsin x, y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1 < x < 1)$.
11. $y = \arccos x,\ y' = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,(-1 < x < 1)$.
12. $y = arctgx,\ y' = (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$.
13. $y = arcctgx,\ y' = (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

11 - §. Funksiyaning differensiallanuvchiligi tushunchasi

$y=f(x)$ funksiya $(a,\ b)$ intervalda aniqlangan bo'lib, $x_0 \in (a,b)$ bo'lsin. Bu funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi

$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Δx ga bog'liq bo'ladi. Masalan, $y = f(x) = x^3 + x + 1$ funksiyaning x_0=1 nuqtadagi orttirmasi:

$$\Delta y = \Delta f(1) = f(1+\Delta x) - f(1) = \left[(1+\Delta x)^3 + (1+\Delta x) + 1\right] -$$
$$-(1^3 + 1 + 1) = 1 + 3\Delta x + 3\Delta x^2 + \Delta x^3 + \Delta x + 2 - 3 = = \Delta x^3 + 3\Delta x^2 + 4\Delta x.$$

Umuman, funksiya orttirmasi Δy bilan argument orttirmasi Δx orasidagi bog'lanish yetarli darajada murakkab bo'lishi mumkin.

14.3-ta'rif. *Agar y = f(x) funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi Δy ni ushbu*

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \Delta x \qquad (14.3)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, u holda y=f(x) funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi deb ataladi. Bunda A Δx ga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas, α esa Δx ga bog'liq va u nolga intiladi.

14.1-teorema. *Agar y=f(x) funksiya x_0 nuqtada chekli f(x_0)* h*osilaga ega bo'lsa, u holda bu funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi.*

Isbot. *f(x)* funksiya x_0 nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsin. Hosila ta'rifiga binoan

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

bo'ladi. Bundan quyidagi tenglik kelib chiqadi

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$$

$y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi (13.3) ko'rinishda ifodalandi. Demak, *y=f(x)* funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi.

14.2-teorema. *Agar y=f(x) funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya x_0 nuqtada chekli f(x_0)* hosilaga *ega bo'ladi.*

Isbot. *f(x)* funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda ta'rifga ko'ra *f(x)* funksiyaning x_0 nuqtadagi $\Delta y = \Delta f(x_0)$ orttirmasi uchun

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$$

bo'ladi. Bu tenglikdan esa

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = A + \alpha$$

bo'lishi kelib chiqadi. Keyingi tenglikda $\Delta x \to 0$ da limitga o'tsak, unda

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha) = \lim_{\Delta x \to 0} A + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = A + 0 = 0$$

bo'lishini topamiz. Demak,

$$y' = f'(x_0) = A.$$

Bu esa *f(x)* funksiyaning x_0 nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lishini bildiradi. Teorema isbot bo'ldi.

Shunday qilib, $y = f(x)$ *funksiyaning x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun uning shu nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lishi zarur va yetarli ekan.*

Shuning uchun ham funksiyaning hosilasini topishni uni *differensiallash* deb

yuritiladi.

Yuqoridagi teoremadan ko'rinadiki, agar *y=f(x) funksiya* x_0 *nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, uning ta'rifidagi A o'zgarmas* $f'(x_0)$ *ga teng bo'ladi:*

$A = f'(x_0)$

12- §. Funksiyaning differensiali ta'rifi

y=f(x) funksiya *(a,b)* intervalda berilgan bo'lib, x_0 nuqtada $(x_0 \in (a,b))$ differensiallanuvchi bo'lsin. Unda funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \qquad (14.4)$$

bo'ladi. Bunda $\Delta x \to 0$ da $f'(x_0) \cdot \Delta x$ va $\alpha \cdot \Delta x$ larning har biri nolga intilsa-da, $\alpha \cdot \Delta x$ had $f'(x_0) \cdot \Delta x$ ga qaraganda tezroq nolga intiladi.

14.4-ta'rif. *Yuqoridagi (14.4) tenglikdagi* $f'(x_0) \cdot \Delta x$ *H*ad *f(x) funksiyaning* x_0 *nuqtadagi differensiali deyiladi va dy yoki* $df(x_0)$ *kabi belgilanadi:*

$$dy = df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x \qquad (14.5)$$

Agar *y*=x bo'lganda $dy = x' \cdot \Delta x = \Delta x$, ya'ni $dx = \Delta x$ bo'lishini e'tiborga olsak, unda funksiyaning differensialini

$$dy = y' dx \text{ yoki } df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx \qquad (14.6)$$

deb ola olamiz.

y=f(x) funksiyaning grafigi 107-chizmada tasvirlangan egri chiziqni ifodalasin.

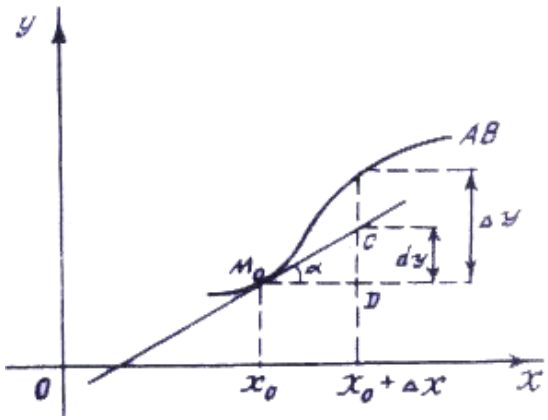
3- § da funksiya hosilasining geometrik ma'nosi *AB* egri chiziqqa M_0 nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientidan iborat ekanini ko'rgan edik. Demak, $f'(x_0) = tg\alpha$. ΔM_0CD dan topamiz:

$$\frac{CD}{M_0D} = tg\alpha$$

Agar $M_0D = \Delta x$ ekanini e'tiborga olsak, unda yuqoridagi tenglikdan

$$CD = M_0D \cdot tg\alpha = tg\alpha \cdot \Delta x$$

bo'lishi kelib chiqadi.



107-chizma.

Demak,

$$CD = tg\alpha \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x = dy.$$

Bundan funksiya differensialining ushbu geometrik ma'nosi kelib chiqadi: *y=f(x)* funksiyaning x_0 nuqtadagi bu differensiali funksiya grafigiga M_0 nuqtada o'tkazilgan urinma orttirmasidan iborat bo'ladi.

Misollar. Ushbu funksiyalarning differensiallari topilsin:

1) $y = x^2 + 2x + 1$; 2) $y = e^x + \sin 2x$

Funksiyaning differensiali funksiya hosilasining argument differensialiga ko'paytmasidan iborat ekanidan foydalanib, berilgan funksiyalarning differensiallarini topamiz.

1) $dy = y'dx = (x^2 + 2x + 1)'dx = 2(x+1)dx.$

2) $dy = y'dx = (e^x + \sin 2x)' = (e^x + 2\cos x)dx.$

13-§. Differensiallar jadvali

Endi 10-§ da keltirilgan hosilalar jadvalidan foydalanib, elementar funksiyalarning differensiallari jadvalini keltiramiz:

1. $y = C = const,\ dy = 0.$
2. $y = x^{\mu},\ dy = \mu x^{\mu-1}dx\ (x > 0).$
3. $y = a^x, dy = a^x \ln a dx\,(a > 0, a \neq 1).$
4. $y = \log_a x,\ dy = \dfrac{1}{x}\log_a e dx\ (a > 0, a \neq 1, x > 0).$

5. $y = \ln x,\ dy = \frac{1}{x}dx\ (x > 0).$

6. $y = \sin x,\ dy = \cos x dx.$

7. $y = \cos x,\ dy = -\sin x dx.$

8. $y = tgx,\ dy = \frac{1}{\cos^2 x}dx\ (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi).$

9. $y = ctgx,\ dy = -\frac{1}{\sin^2 x}dx\ (x \neq k\pi).$

10. $y = \arcsin x,\ dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\ (-1 < x < 1).$

11. $y = \arccos x,\ dy = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\ (-1 < x < 1).$

12. $y = arctgx,\ dy = \frac{1}{1+x^2}dx.$

13. $y = arcctgx,\ dy = -\frac{1}{1+x^2}dx.$

14-§. Funksiya differensialining sodda qoidalari

Endi differensiallashning sodda qoidalarini keltiramiz.

Aytaylik, *f(x)* va *g(x)* funksiyalar *(a,b)* da berilgan bo'lib, $x(x \in (a,b))$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda *f(x)±g(x), f(x)-g(x),* $f(x)\cdot g(x)$ hamda $\frac{f(x)}{g(x)}(g(x) \neq 0)$ funksiyalar ham differensiallanuvchi bo'lib,

a) $d[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x);$

á) $d(f(x)\cdot g(x)) = df(x)g(x) + f(x)dg(x);$

â) $d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{df(x)g(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}(g(x) \neq 0)$

bo'ladi. Bularning birortasini, masalan, a) holni isbotlaymiz.

a) Holning isboti. Yuqoridagi (13.6) formuladan foydalanib topamiz:

$$d[f(x) \pm g(x)] = (f(x) \pm g(x))'dx = [f'(x) \pm g'(x)]dx =$$
$$= f'(x)dx \pm g'(x)dx = df(x) \pm dg(x).$$

Demak,

$$d[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x).$$

$y = \varphi(x),\ u = f(y)$ bo'lib, ular yordamida $u = f(\varphi(x))$ murakkab funksiya tuzilgan bo'lsin. Murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$du = d[f(\varphi(x))] = [f(\varphi(x))]' dx = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx =$$
$$= f'(y) \cdot y' dx = f'(y)dy.$$

Demak,

$$d[f(\varphi(x))] = f'(\varphi(x))d\varphi = f'(y)dy. \qquad (14.7)$$

(14.6), (14.7) formulalarni solishtirib, quyidagi xulosaga kelamiz:

Funksiya murakkab bo'lgan holda ham *funksiya differensiali funksiya hosilasi* $f'(y)$ *bilan argument* $y = \varphi(x)$ *ning differensiali dy ko'paytmasiga teng* bo'lar ekan (bu holda *dy* erkli orttirma bo'lmasdan, balki u *x o'*zgaruvchining funksiyasi bo'ladi). (14.6), (14.7) formulalarning ko'rinishi bir xil. Odatda buni *differensial ko'rinishining invariantligi* deyiladi.

15-§. Yuqori tartibli hosila va differensiallar

Biz hosila tushunchasi bilan tanishganda va elementar funksiyalarning hosilalarini hisoblaganda ko'rdikki, funksiya hosilasining o'zi yana *x o'*zgaruvchining funksiyasi bo'lishi mumkin ekan. Demak, funksiya hosilasining hosilasi tushunchasini qarash mumkin. *y=f(x)* funksiya *(a, b)* da berilgan bo'lsin.

14.5-ta'rif. *Funksiya hosilasining hosilasi shu funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deb ataladi va* y'' *yoki* $f''(x)$ *kabi belgilanadi:*

$$y'' = (y')', \; f''(x) = (f'(x))'.$$

Masalan, *y=sinx* funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi *y' =(sinx)' = cosx, y''=(y¹)' = (cosx)' = - sinx. (sinx)'' = - sinx* bo'ladi.

Funksiyaning uchinchi, to'rtinchi va h.k. tartibdagi hosilalari yuqoridagidek ta'riflanadi:

$$y''' = (y'')', y^{IV} = (y''')', \ldots$$

Umuman, funksiyaning n-tartibli Hosilasi (n-1)-tartibli hosilasining hosilasidir:

$$y^n = (y^{n-1})'$$

Misollar. Ushbu funksiyalarning ikkinchi tartibli hosilalari topilsin:

a) $y = ax^2 + bx + c;$

b) $y = 2^{\sin x}$

v) $y = arctgx$

a) $y' = (ax^2 + bx + c)' = 2ax + b, \qquad y'' = (y')' = (2ax + b)' = 2a$

b) $y' = \left(2^{\sin x}\right)' = 2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x,$

$$y'' = (y')' = (\ln 2 \cdot 2^{\sin x} \cdot \cos x)' = \ln 2 \cdot (2^{\sin x} \cdot \cos x)' =$$
$$= \ln 2\left[\left(2^{\sin x}\right)' \cdot \cos x + 2^{\sin x} \cdot (\cos x)'\right] =$$
$$= \ln 2\left[2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x \cdot \cos x + 2^{\sin x}(-\sin x)\right] =$$
$$= \ln 2 \cdot 2^{\sin x}(\cos^2 x \cdot \ln 2 - \sin x).$$

v) $y' = (arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,

$$y'' = (y)' = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{(1)'\cdot(1+x^2) - 1\cdot(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = = \frac{0\cdot(1+x^2) - 2x}{(1+x^2)^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

14.6-ta'rif. *y = f(x) funksiya differensiali dy ning differensiali berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali deb ataladi va* d^2y *yoki* $d^2f(x)$ *kabi belgilanadi:*

$$\forall x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$$

Xuddi shunga o'xshash, funksiyaning uchinchi, to'rtinchi va x.k. tartibli differensiallari ta'riflanadi.

Umuman, funksiyaning n-tartibli differensiali uning (*p*-1)-tartibli differensialining differensialidan iboratdir:

$$d^n y = d(d^{n-1}y),\ d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x)).$$

Ma'lumki, funksiyaning differensiali uning hosilasi orqali ushbu $dy = y'\cdot dx$ formula bilan ifodalanar edi. Bunda *dx* argument x ning differensiali bo'lib, u Δx ga teng. Shu tenglikdan foydalanib topasiz:

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = dx\cdot d(y') = dx\cdot(y')'\cdot dx = y''dx^2.$$

Demak, *funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasining argument differensiali kvadratiga ko'paytmasiga teng.*

Misol. $y = \sin 2x$ funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali quyidagicha bo'ladi:

$$dy = y'dx = 2\cos 2x dx;\ d^2y = d(dy) = -4\sin 2x dx^2$$

16- §. Differensial hisobning asosiy teoremalari

Differensial hisobning asosiy teoremalarini keltirishdan avval ba'zi bir tushuncha va tasdiqni eslatib o'tamiz.

y=f(x) funksiya *X* oraliqda berilgan bo'lsin. Agar *X* oraliqda shunday x_0 nuqta (ichki nuqta) topilsaki,

$$\forall x \in X\,(x \neq x_0)\ \text{ó÷óí}\ f(x) < f(x_0)\ (f(x) > f(x_0))$$

bo'lsa, u holda *f(x)* funksiya *X* oraliqning ichki nuqtasi x_0 da o'zining *eng katta (eng kichik) qiymatiga erishadi* deb ataladi.

Agar f(x) *funksiya [a, b} segmentda uzluksiz bo'lsa, u holda funksiya shu segmentda o'zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishadi, ya'ni shunday* c_0 *nuqta* (c_1 *nuqta) (a* < c_0 < *b, a* < c_1 < *b) topiladiki,*

$$\forall x \in X\ \text{ó÷óí}\ f(x) < f(c_0)\quad (f(x) > f(c_1))$$

bo'ladi (bu uzluksiz funksiyaning xossasini ifodalovchi Veyershtrass teoremasidir).

14.3- teorema (Ferma teoremasi). *Agar f(x) funksiya X oraliqning ichki nuqtasi* x_0 *da uzining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishsa hamda shu* x_0 *nuqtada chekli hosilaga ega bo'lsa, u holda funksiya hosilasining* x_0 *nuqtadagi qiymati nolga teng bo'ladi:*

$$f'(x_0) = 0.$$

Isbot. *f(x)* funksiya x_0 nuqtada o'zining eng katta qiymatiga erishsin va shu nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsin. Demak,

$$\forall\, x \in X \quad (x \neq x_0)\ uchun\ \ f(x) < f(x_0).$$

x_0 nuqtaga shunday Δx orttirma beramizki, $x_0 + \Delta x \in X$ bo'lsin. Yuqoridagi aytilganga ko'ra, har doim

$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$,

binobarin

$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$

bo'ladi. U holda

a) $\Delta x > 0$ bo'lganda $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ *âà* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0,$

á) $\Delta x < 0$ bo'lganda $x \to a$

bo'lishini aniqlash qiyin emas. Agar

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$

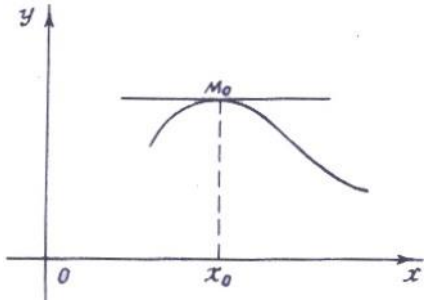
ekanligini e'tiborga olsak, $f'(x_0) \leq 0, f'(x_0) \geq 0$ bo'lib, undan

$f'(x_0) = 0$

bo'lishi kelib chiqadi.

Xuddi shunga o'xshash, x_0 nuqtada funksiya eng kichik qiymatga ega bo'lganda ham $f'(x_0) = 0$ bo'lishi isbotlanadi. Bu esa teoremani isbotlaydi.

Teorema sodda geometrik ma'noga ega: *y=f(x)* funksiya grafigiga $M_0(x_0; f(x_0))$ nuqtada o'tkazilgan urinma *Ox o'q*iga parallel bo'ladi (108-chizma).



108 – chizma

14.4-teorema (Roll teoremasi). *y=f(x) funksiya (a, b) segmentda berilgan bo'lsin. Agar*

1) *f(x) funksiya [a, b] da uzluksiz;*

2) *f(x) funksiya hech bo'lmaganda (a, b) intervalda chekli* $f'(x)$ *hosilaga ega;*

3) *[a, b] segmentning chetki a va b nuqtalarida f(a)=f(b) bo'lsa, u holda a va b nuqtalar orasida shunday c (a<c<b) nuqta topiladiki,*

$$f'(c) = 0$$

bo'ladi.

Isbot. Shartga ko'ra *f(x)* funksiya [a, b] segmentda uzluksiz. Unda, yuqorida aytilganiga asosan funksiya [*a*, b] segmentda o'zining eng katta va eng kichik qiymatiga erishadi. Aytaylik, funksiyaning eng katta qiymati *M*, eng kichik qiymati esa m bo'lsin.

Agar m = *M* bo'lsa, u holda *f(x)* funksiya *[a, b]* segmentda o'zgarmas bo'ladi: *f(x)=const*. Shuning uchun ixtiyoriy *x* nuqtada $f'(x) = 0$ bo'ladi.

Endi $m \neq M$, ya'ni m < *M* bo'lgan holni qaraylik.

Bu holda *f(a)=f(b)* bo'lganligi sababli funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatlarining xech bo'lmaganda birini *a* va *b* nuqtalar orasidagi biror *c (a<c<b)* nuqtada qabul qiladi. Shu nuqtada Ferma teoremasiga ko'ra

$$f'(c) = 0$$

bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

14.5-teorema (Lagranj teoremasi). *y=f(x) funksiya [a, b] segmentda berilgan bo'lsin. Agar*

1) *f(x) funksiya [a, b] da uzluksiz,*

2) *f(x) funksiya hech bo'lmaganda (a, b) intervalda chekli* $f'(x)$ *hosilaga ega bo'lsa, u holda a va b nuqtalar orasida shunday c (a* < *c* < b) *nuqta topiladiki,*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

bo'ladi.

Isbot. Teoremani isbotlash maqsadida ushbu

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad (14.8)$$

yordamchi funksiyani kiritamiz. Bu yordamchi funksiya:

1) *[a, b]* segmentda aniqlangan va uzluksiz. Chunki (14.8) tenglikning o'ng tomonidagi har bir had *[a, b]* segmentda uzluksiz, *F(x)* esa bunday uzluksiz funksiyalar yig'indisidan (ayirmasidan) iboratdir;

2) *F'(x)* hosilaga ega va u

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ga teng;

3) $F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0,$

$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(b) - f(a) -$

$[f(b) - f(a)] = 0$

va, demak, $F(a) = F(b)$.

Demak, *F(x)* funksiya *[a, b]* da Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantirar ekan. Unda Roll teoremasiga ko'ra *a* va *b* orasida shunday *c (a<c<b)* nuqta topiladiki, $F'(c) = 0$

bo'ladi. Yuqoridagi (14.9) tenglikni e'tiborga olib,

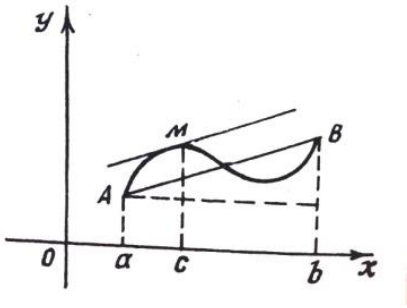
$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

bo'lishini topamiz. Keyingi tenglikdan esa

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Bu teorema sodda geometrik ma'noga ega. *y=f(x)* funksiyaning grafigi 109-chizmada tasvirlangan egri chiziqni ifodalasin.



ШАКЛ-109

AB egri chiziqda shunday *M* nuqta (uning koordinatalari *(c, f(c) bo'ladi)* mavjudki, bu nuqtadagi urinmaning burchak koeffitsienti $f'(c)$ ga, *AB* kesuvchining burchak koeffitsienti $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ga teng, ya'ni urinma bilan kesuvchi parallel bo'ladi.

Mavzu bo'yicha tekshirish uchun savollar:

1. Hosilaning ta'rifi, uning geometrik, fizik, biologic va iqtisodiy ma'nolari.
2. Elemetar funksialarning hosilalari jadvalini yozing.
3. Hosilani hisoblash qoidalari tushuntiring.
4. Teskari funksiyalarning hosilalasini hisoblash qoidasini tushuntiring.
5. Funksiyaning differensiali tushunchasi, hisoblash qoidalari.

6. Yuqori tartibli hosilalarni, differensiallarni hisoblash qoidalarini ayting?
7. Differensial hisobning asosiy teoremalari aytib, qo'llanishlarini tushuntiring?

Kalit so'zlar:

Hosila, geometrik, fizik, biologic, iqtisodiy ma'nolari, hosilalar jadvali, teskari funksiyalarning hosilalasi, differensial, yuqori tartibli hosilalar, asosiy teoremalar.

Xulosa

Hosilaning ta'rifi, uning geometrik, fizik, biologic va iqtisodiy ma'nolari, elemetar funksialarning hosilalari jadvali, hosilani hisoblash qoidalari, teskari funksiyalarning hosilalasini hisoblash, funksiyaning differensiali tushunchasi, hisoblash qoidalari, yuqori tartibli hosilalar, differensiallarni hisoblash qoidalari, Differensial hisobning asosiy teoremalari bayyon etilgan.

XV BOB. DIFFERENSIAL HISOBNING TATBIQLARI

Ushbu bobda funksiyaning hosilalaridan foydalanib uning o'zgarish xarakterini bayon etamiz.

1-§. Funksiyaning o'suvchi va kamayuvchi bo'lishi

15.1-teorema. *Agar f(x) funksiya (a, b) da aniqlangan va chekli* $f'(x)$ *hosilaga ega bo'lib,* $\forall x \in (a,b)$ *uchun* $f'(x) \geq 0$ *bo'lsa, u holda f(x) funksiya (a, b) da o'suvchi bo'ladi.*

15.2-teorema. *Agar f(x) funksiya (a, b) da aniqlangan va chekli* $f'(x)$ *hosilaga ega bo'lib,* $\forall x \in (a,b)$ *uchun* $f'(x) \leq 0$ *bo'lsa, u holda f(x) funksiya (a, b) da kamayuvchi bo'ladi.*

Bu keltirilgan teoremalar bir hil mulohaza yuritilishi bilan isbotlanadi. Shuning uchun ularning birini isbotlash bilan chegaralanamiz.

15.1-teoremaning isboti. Shartga ko'ra *f(x)* funksiya *(a, b)* da chekli $f'(x)$ hosilaga ega va $f'(x) \geq 0$. *(a, b)* oraliqda ixtiyoriy x_1 va x_2 ($x_1<x_2$) nuqtalarni olaylik. Unda $[x_1, x_2] \subset (a,b)$ bo'lib, $[x_1, x_2]$ da *f(x)* funksiya Lagranj teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Lagranj teoremasiga muvofiq, x_1 va x_2 nuqtalar orasida shunday *s* $(x_1<C< x_2)$ nuqta topiladiki,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c),$$

ya'ni

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\cdot(x_2 - x_1)$$

bo'ladi. Agar $x_1<x_2$ va $f'(c) \geq 0$ bo'lishini e'tiborga olsak, unda keyingi tenglikdan

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$

bo'lishini topamiz. Demak, $f(x_1) \leq f(x_2)$. Shunday qilib

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

bo'ladi. Bu esa *f(x)* funksiyaning *(a, b)* da o'suvchi ekanini bildiradi. Teorema isbot bo'ldi.

15.1-natija. *f(x) funksiya (a, b) da chekli* $f'(x)$ *hosilaga ega bo'lsin. U holda*

$f'(x) \geq 0$ *âà* $f'(x) \leq 0$

tengsizliklarni yechib, berilgan funksiyaning o'suvchi hamda kamayuvchi bo'ladigan oraliqlari topiladi.

Masalan, ushbu $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ funksiyani qaraylik. Bu funksiyaning hosilasini olib $\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \geq 0$ tengsizlikni yechamiz:

$$\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \geq 0 \Rightarrow 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow (1-x)(1+x) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0, \\ 1+x \geq 0 \end{cases} \text{va} \begin{cases} 1-x \leq 0, \\ 1+x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \text{va} \begin{cases} x \geq 1, \\ x \leq -1 \end{cases} \quad \begin{matrix} x \leq 1 \\ x \geq -1 \end{matrix} \Rightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Demak, berilgan *f(x)* funksiya *[-1, +1]* oraliqda o'suvchi bo'ladi. Ravshanki,

$$\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \leq 0 \Rightarrow 1-x^2 \leq 0 \Rightarrow \begin{matrix} -\infty < x \leq -1, \\ 1 \leq x < +\infty. \end{matrix}$$

Demak, berilgan *f(x)* funksiya $(-\infty; -1]$ va $[1; +\infty)$ oraliqlarda kamayuvchi bo'ladi.

2-§. Funksiyaning ekstremumlari

Aytaylik, *f(x)* funksiya *(a, b)* da berilgan bo'lib, $x_0 \in (a,b)$ bo'lsin.

15.1-ta'rif. *Agar* x_0 *nuqtaning shunday* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)(\delta > 0)$ *atrofi topilsaki,* $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *uchun* $f(x) \leq f(x_0)$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda f(x) funksiya x_0 *nuqtada maksimumga erishadi deyiladi. Bunda* x_0 *nuqta funsiyaga maksimum qiymat beradigan nuqta,* $f(x_0)$ *esa funksiyaning maksimum qiymati deyiladi.*

Funksiyaning maksimum qiymati quyidagicha belgilanadi:

$$f(x_0) = \max_x \{f(x)\}.$$

15.2-ta'rif. *Agar x_0 nuqtaning shunday* $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subset(a,b)(\delta>0)$ *atrofi topilsaki,* $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ *uchun* $f(x)\geq f(x_0)$
tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda f(x) funksiya x_0 nuqtada minimumga erishadi deyiladi. Bunda x_0 funksiyaga minimum qiymat beradigan nuqta, $f(x_0)$ esa funksiyaning minimum qiymati deyiladi.

Funksiyaning minimum qiymati quyidagicha belgilanadi: $f(x_0)=\min\limits_x\{f(x)\}$.

Funksiyaning maksimum va minimum qiymatlari umumiy nom bilan uning *ekstremum qiymatlari* deb ataladi.

Yuqorida keltirilgan ta'riflardan ko'rinadiki, funksiyaning maksimum va minimum qiymatlari, uning $(x_0-\delta, x_0+\delta)$dagi eng katta va eng kichik qiymatlari bo'ladi.

Misol. $f(x)=x^2$ funksiyani qaraylik. Bu funksiya $x=0$ nuqtada minimumga erishadi. Haqiqatan ham, $x=0$ nuqtaning $(0-\delta, 0+\delta)=(-\delta,\delta)(\delta>0)$ atrofidagi barcha x nuqtalar uchun
$f(x)\geq 0$, ya'ni $x^2\geq 0$
bo'ladi: $\forall x\in(-\delta,\delta)\Rightarrow f(x)\geq f(0)$

3-§. Funksiya ekstremumining zaruriy sharti

f(x) funksiya *(a; b)* da berilgan bo'lsin. *Bu funksiya: 1)* $x_0(x_0\in(a;b))$ *nuqtada maksimumga (minimumga) erishsin; 2) x_0 nuqtada chekli* $f'(x_0)$ *hosilaga ega bo'lsin. U holda*

$$f'(x_0)=0$$

bo'ladi.

Shuni isbotlaymiz. Birinchidan, *f(x)* funksiya x_0 nuqtada maksimumga (minimumga) erishganligi sababli shu x_0 nuqtaning $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ atrofidagi barcha x nuqtalar uchun

$$f(x)\leq f(x_0)\quad (f(x)\geq f(x_0))$$

bo'ladi. Demak, *f(x)* funksiya $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ da o'zining eng katta (eng kichik) qiymati $f(x_0)$ ga erishadi.

Ikkinchi tomondan, *f(x)* funksiya x_0 nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega. Unda Ferma teoremasiga ko'ra $f'(x_0)=0$ bo'ladi.

Biroq funksiyaning hosilasi nolga teng bo'lgan nuqtada berilgan funksiya har doim ham ekstremumga erishavermaydi. Masalan, $f(x)=x^3$ funksiyaning hosilasi

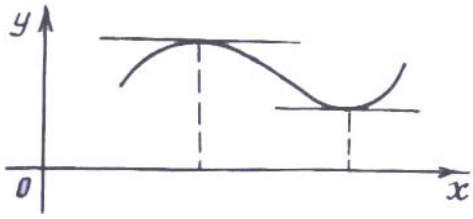
$f(x)=3x^2$ bo'lib, u x=0 nuqtada nolga teng: $f'(0) = 3\cdot 0 = 0.$ Lekin bu funksiya *x=0* nuqtada ekstremumga erishmaydi (chunki $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ bo'lib, u o'suvchidir).

Shunday qilib, funksiya hosilasining nolga aylanishi funksiya ekstremumga erishishining zaruriy sharti ekan.

Odatda funksiya hosilasini nolga aylantiradigan nuqta funksiyaning *statsionar nuqtasi* deyiladi.

15.2-eslatma. Funksiya hosilaga ega bo'lmagan nuqtada ham ekstremumga ega bo'lishi mumkin. Masalan, $f(x) = |x|$ *funksiya x=0 nuqtada hosilaga ega emas. Biroq, bu funksiya x=0 nuqtada minimumga erishadi.*

f(x) funksiya *(a, b)* da berilgan bo'lib, u shu oraliqda $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin va $x_0 \in (a,b)$ nuqtada ekstremumga erishsin. Funksiyaning grafigiga $(x_0,f(x_0))$ da o'tkazilgan urinma *Ox* o'qiga parallel bo'ladi (110- chizma).



110-chizma.

4-§. Funksiya ekstremumining yetarli shartlari

f(x) funksiya *(a; b)* da berilgan va uzluksiz bo'lsin. Bu funksiya shu oraliqda $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, $x_0(x_0 \in (a,b))$ nuqtada nolga aylansin: $f'(x_0) = 0.$

Masala *f(x)* funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishadimi yoki yo'qmi, agar ekstremumga erishsa, u x_0 nuqtada maksimumga erishadimi yoki minimumga erishadimi, shuni aniqlashdan iborat. Bu masalani hal qilish uchun avvalo x_0 nuqtaning $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ atrofinn olaylik, $((x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a,b))$

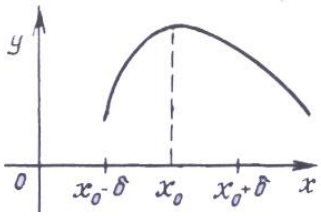
1) $\forall x \in (x_0-\delta, x_0)$ *uchun* $f'(x) > 0$ *bo'lsin. Bu holda 14.2-teoremaga ko'ra berilgan funksiya* $(x_0-\delta, x_0)$ *da o'suvchi bo'ladi:*

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\forall x \in (x_0-\delta, x_0)). \qquad (15.1)$$

2) $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$ *uchun* $f'(x) < 0$ *bo'lsin. Bu holda 14.3-teoremaga ko'ra berilgan funksiya* $(x_0, x_0+\delta)$ *da kamayuvchi bo'ladi:*

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (\forall x \in (x_0, x_0+\delta)) \qquad (15.2)$$

(15.1) va (15.2) munosabatlardan $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ uchun $f(x) \le f(x_0)$ bo'lishini topamiz. Demak, *f(x)* funksiya $x=x_0$ nuqtada maksimumga erishadi (111-chizma).



111 – chizma.

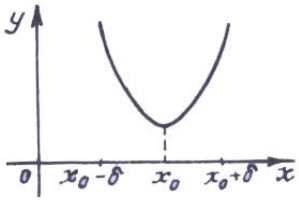
Endi 1) $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ *uchun* $f'(x) < 0$ *bo'lsin. Bu holda 14.3-teoremaga ko'ra berilgan funksiya* $x_0 - \delta, x_0$ *da kamayuvchi bo'ladi:*

$$f(x) \ge f(x_0)\,(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)). \qquad (15.3)$$

2) $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ *uchun* $f'(x) < 0$ *bo'lsin. Bu holda 14.2-teoremaga ko'ra berilgan funksiya* $(x_0, x_0 + \delta)$ *da o'suvchi bo'ladi:*

$$f(x_0) \le f(x) \quad (\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)). \qquad (15.4)$$

(15.3) va (15.4) munosabatlardan $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ uchun $f(x) \ge f(x_0)$ bo'lishini topamiz. Demak, *f(x)* funksiya $x=x_0$ nuqtada minimumga erishadi (112-chizma).



112 – chizma.

Shunday qilib, funksiya ekstremumini aniqlash uchun quyidagi qoidaga (birinchi qoidaga) kelamiz:

1) berilgan *f(x)* funksiyaning hosilasi $f'(x)$ ni topib, $f'(x) = 0$ tenglamani yechamiz. Aytaylik, bu tenglamaning yechimlaridan biri x_0 bo'lsin;

2) bu x_0 nuqtaning $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$ atrofini olamiz;

3) agar

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \ uchun \ f'(x) > 0$$
$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \ uchun \ f'(x) < 0$$

bo'lsa, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtani o'tishda o'z ishorasini «+» dan «-» ga o'zgartirsa, u holda *f(x)* funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi. Funksiyaning maksimum qiymati $f(x_0)$ bo'ladi;

4) agar

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \ uchun \ f'(x) < 0$$
$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \ uchun \ f'(x) > 0$$

bo'lsa, ya'ni $f'(x)$ *h*osila x_0 nuqtani o'tishda o'z ishorasini «-» dan «+» ga o'zgartirsa, u holda *f(x)* funksiya x_0 nuqtada minimumga erishadi. Funksiyaning minimum qiymati $f(x_0)$ bo'ladi;

5) agar

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \ uchun \ f'(x) > 0 \qquad (15.5)$$
$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \ uchun \ f'(x) > 0$$

yoki

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \ uchun \ f'(x) < 0 \qquad (15.6)$$
$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \ uchun \ f'(x) < 0$$

bo'lsa, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtani o'tishda o'z ishorasini o'zgartirmasa, unda *f(x)* funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishmaydi.

Misol. $f(x)=2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$

funksiyaning ekstremumlari topilsin.

Avvalo berilgan funksiyaning hosilasini hisoblaymiz:

$$f'(x) = (2x^3 - 9x^2 + 12x - 2)' = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2).$$

Funksiya ekstremumi mavjudligining zaruriy shartiga asosan ushbu $f'(x) = 0$ tenglamani yechamiz:

$$6(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2.$$

Demak, $x_1=1$, $x_2=2$ nuqtalar berilgan funksiyaning statsionar nuqtalari bo'ladi.

Endi funksiya hosilasini quyidagicha yozib olamiz:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2).$$

$x=1$, $x=2$ statsionar nuqtalarning atroflarini olib, unda funksiya hosilasi $f'(x)$ ning ishorasini tekshiramiz.

$x=1$ nuqtaning $(1-\delta, 1+\delta)$ $(0 < \delta < \frac{1}{2})$ atrofini olaylik. Unda $\forall x (1-\delta, 1)$ uchun $f'(x) = 6(x-1)(x-2)$ bo'ladi, chunki bunday x nuqtalar uchun x-1<0, x-2>0 bo'ladi.

$\forall x \in (1, 1+\delta)$ uchun $f'(x) = 6(x-1)(x-2) < 0$ bo'ladi, chunki bunday x nuqtalar uchun $x - 1 > 0$, $x - 2 < 0$ bo'ladi.

Shunday qilib, $f'(x)$ hosila x_1=1 nuqtani o'tishda o'z ishorasini «+» dan «-» ga o'zgartiradi. Demak, berilgan funksiya x=1 nuqtada maksimumga erishadi va funksiyaning maksimum qiymati

$\max\{f(x)\} = f(1) = 2\cdot 1^3 - 9\cdot 1^2 + 12\cdot 1 = 3.$

$x=2$ nuqtaning $(2-\delta,\ 2+\delta)$ $(0<\delta<\frac{1}{2})$ atrofini olaylik.

Unda

$\forall x\in(2-\delta,\ 2)$ uchun $f'(x) = 6(x-1)(x-2) < 0$

bo'ladi, chunki bunday x nuqtalar uchun x-1>0, x-2 < 0 bo'ladi.

$\forall x\in(2,\ 2+\delta)$ uchun $f'(x) = 6(x-1)(x-2) > 0$

bo'ladi, chunki bunday x nuqtalar uchun x -1>0, x- 2>0 bo'ladi.

Shunday qilib, $f'(x)$ hosila x_2 = 2 nuqtani o'tishda o'z ishorasini «-» dan «+» ga o'zgartiradi. Demak, berilgan funksiya x_2 = 2 nuqtada minimumga erishadi va funksiyaning minimum qiymati:

$\min\{f(x)\} = f(2) = 2\cdot 2^3 - 9\cdot 2^2 + 12\cdot 2 - 2 = 2.$

Funksiya ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lsa, unda berilgan funksiyaning ekstremumini topish birmuncha oson bo'ladi.

f(x) funksiya $(a,в)$ da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, $x_0\,(x_0\in(a,b))$ nuqtada nolga aylansin:

$$f'(x_0) = 0$$

Agar f(x) funksiyaning x_0 nuqtada ikkinchi tartibli hosilasi mavjud bo'lib, $f''(x_0) < 0$ bo'lsa, u holda f(x) funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi.

Agar f(x) funksiya uchun $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0$ bo'lsa, u holda f(x) funksiya $x=x_0$ nuqtada minimumga erishadi.

Shunday qilib, funksiya ekstremumini aniqlash uchun quyidagi qoidaga (ikkinchi qoidaga) kelamiz:

1) Berilgan *f(x)* funksiyaning hosilasi $f'(x)$ ni topib, tenglamani yechamiz. Aytaylik, bu tenglamaning yechimlaridan biri x_0 bo'lsin.

2) *f(x)* funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi *f''(x)* ni topib, uning x_0 nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz. Agar:

a) $f''(x_0) < 0$ bo'lsa, u holda *f(x)* funksiya $x=x_0$ nuqtada maksimumga;

b) $f''(x_0) > 0$ bo'lsa, u holda *f(x)* funksiya $x = x_0$ nuqtada minimumga erishadi.

Misol. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ funksiyaning ekstremumlari topilsin.

Avvalo berilgan funksiyaning hosilasini hisoblaymiz:

$f'(x) = (x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1)' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3).$

So'ngra

$f'(x) = 0,$ *яъни* $5x^2(x^2 - 4x + 3) = 0$

tenglamani yechamiz. Bu tenglamaning yechimlari $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$ bo'ladi. Demak, $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$ nuqtalar berilgan funksiyaning statsionar nuqtalaridir.

Endi funksiyaning ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz:

$$f''(x) = (f'(x))' = (5x^4 - 20x^3 + 15x^2)' = 20x^3 - 60x^2 + 30x =$$
$$= 10x(2x^2 - 6x + 3).$$

$x_1 = 0$ nuqtada $f''(0) = 10 \cdot 0(2 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 3) = 0,$

$x_2 = 1$ nuqtada $f''(1) = 10 \cdot 1(2 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 3) = -10 < 0,$

$x_3 = 3$ nuqtada $f''(3) = 10 \cdot 3(2 \cdot 3 - 6 \cdot 3 + 3) = 90 > 0,$

bo'ladi. Demak, berilgan funksiya x_2=1 nuqtada maksimumga, $x_3 = 3$ nuqtada minimumga erishadi va $\max\{f(x)\} = f(1) = 2,\ \min\{f(x)\} = f(2) = -26$ bo'ladi.

5-§. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari

f(x) funksiya *[a, b]* segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. U holda 13.2-teoremaga ko'ra funksiya shu segmentda o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga ham erishadi. Uni quyidagicha topiladi:

1) funksiyaning *(a, b)* dagi barcha maksimum va minimum qiymatlari topiladi;

2) funksiyaning *[a, b]* segmentning chetki *a* va *b* nuqtalaridagi qiymatlari *f(a)* va *f(b)* topiladi.

So'ngra funksiyaning barcha maksimum va minimum qiymatlari bilan *f(a)* va *f(b)* *q*iymatlar birgalikda qaraladi va taqqoslanadi. Bu qiymatlar orasida eng kattasi *f(x)* funksiyaning *[a, b]* segmentdagi eng katta qiymati, eng kichigi esa *f(x)* funksiyaning *[a, b]* segmentdagi eng kichik qiymati bo'ladi.

Misol. Perimetri $2p(p > 0)$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklar orasida eng katta yuzga ega bo'lgan to'g'ri to'rtburchak topilsin.

Aytaylik, bunday to'g'ri to'rtburchakning asosi *x* bo'lsin. Unda to'g'ri to'rtburchakning balandligi *r* — *x* ga, yuzi esa $S = S(x) = x \cdot (p - x)\ (0 < x < p)$ ga teng bo'ladi. Bu funksiyaning hosilasini topamiz:

$$S'(x) = (x \cdot (p - x))' = (xp - x^2)' = p - 2x, \qquad S'(x) = p - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{p}{2}.$$

Demak, $x = \frac{p}{2}$ berilgan *S(x)* funksiyaning statsionar nuqtasi.

$$S''(x) = (p - 2x)' = -2,\ S'(\frac{p}{2}) = -2 < 0.$$

Demak, *S(x)* funksiya $x=\frac{p}{2}$ nuqtada maksimumga erishadi va funksiyaning maksimum qiymati bo'ladi.

$$\max\{S(x)\}=S\left(\frac{p}{2}\right)=\frac{p}{2}\left(p-\frac{p}{2}\right)=\frac{p^2}{4}$$

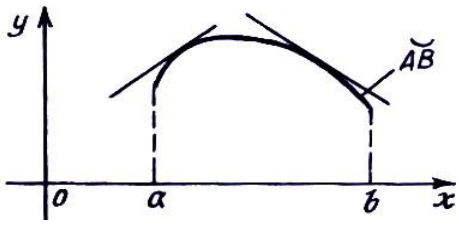
Demak, eng katta yuzga ega bo'lgan to'g'ri to'rtburchak tomoni $\frac{p}{2}$ ga teng bo'lgan kvadratdan iborat ekan.

6-§. Egri chiziqning qavariqligi va botiqligi. Bukilish (egilish) nuqtasi

f(x) funksiya *(a, b)* intervalda berilgan bo'lib, u shu intervalda $f'(x)$ *h*osilaga ega bo'lsin. Unda bu funksiya grafigini ifodalovchi egri chiziqning har bir nuqtasida urinma mavjud bo'ladi.

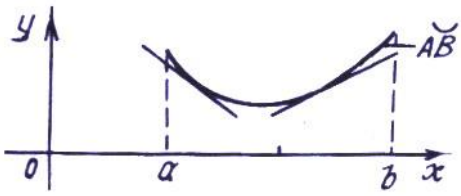
f(x) funksiya grafigi bo'lgan egri chiziqni (funksiya grafigini) $\breve{AB}$ bilan belgilaylik.

15.3-ta'rif. *Agar (a, b) intervalning barcha nuqtalarida* $\breve{AB}$ *egri chiziq har doim urinmadan pastda bo'lsa, u holda* $\breve{AB}$ *egri chiziq (a, b) da qavariq deb ataladi* (113-chizma).



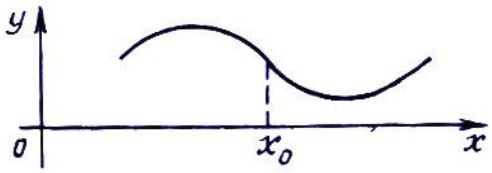
113-chizma.

15.4-ta'rif. *Agar (a, b) intervalning barcha nuqtalarida* $\breve{AB}$ *egri chiziq har doim urinmadan yuqorida bo'lsa, u holda* $\breve{AB}$ *egri chiziq (a, b) da botiq deb ataladi* (114-chizma).



114-chizma.

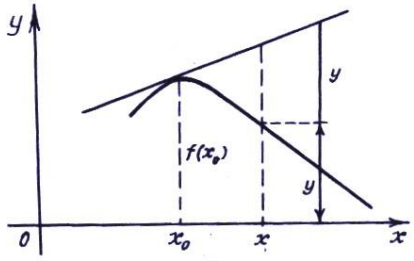
15.5-ta'rif. *Agar* x_0 *nuqtaning* $((x_0-\delta,\ x_0+\delta)\ (x_0-\delta,\ x_0+\delta)\subset(a,b),\ \delta>0)$ *atrofi olinganda* $(x_0-\delta, x_0)$ *da egri chiziq qavariq,* $x_0, x_0+\delta$ *da egri chiziq botiq yoki* $(x_0-\delta, x_0)$ *da egri chiziq* botiq, $(x_0,\ x_0+\delta)$ da egri chiziq qavariq bo'lsa, u holda egri chiziq x_0 nuqtada bukiladi (egiladi) deb ataladi. Egri chiziqning *(x_0, $f(x_0)$)* nuqtasi esa uning bukilish (egilish) nuqtasi deyiladi (115-chizma). Funksiya hosilalari yordamida uning grafigining qavariqligini, botiqligini hamda egilish nuqtalarini aniqlash mumkin.



115 – chizma.

15.6- teorema. *y= f(x) funksiya (a; b) da aniqlangan bo'lsin. Agar funksiya (a; b) da ikkinchi tartibli* $f''(x)$ *hosilaga ega bo'lib,* $\forall x\in(a,\ b)$ *uchun* $f''(x)<0$ *bo'lsa, u holda egri chiziq (funksiya grafigi) (a; b) da qavariq bo'ladi.*

Isbot. *y=f(x)* funksiya *(a; b)* da ikkinchi tartibli $f''(x)$ hosilaga ega bo'lib, *f''(x)<0* bo'lsin. *(a; b)* dan x_0 nuqta olib, *f(x)* funksiya grafigiga $(x_0;\ f(x_0))$ nuqtada urinma o'tkazamiz (116-chizma).



116-chizma.

Bu urinmaning tenglamasi

$$Y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0),$$

ya'ni

$$Y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0),$$

bo'ladi.

Egri chiziq nuqtalarining ordinatalara *y (y=f(x))* bilan urinma nuqtalarining ordinatalari Y $(Y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0))$ orasidagi ayirma $y-Y$ ni qaraymiz.

$$y-Y=f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\right]=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0). \qquad (15.8)$$

Endi *[x, x_0]* segmentni olaylik. Ravshanki, $[x; x_0] \subset (a,b)$. Bu *[x, x_0]* segmentda *f(x)* funksiya uchun Lagranj teoremasining barcha shartlari bajariladi. Unda Lagranj teoremasiga ko'ra

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c),$$

ya'ni

$$f(x)-f(x_0) = f'(c)(x-x_0) \qquad (c \in (x; x_0)).$$

Yuqoridagi (14.8) ayirma quyidagi ko'rinishga keladi:

$$y - Y = f'(c)(x-x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = [f'(c) - f'(x_0)](x-x_0).$$

Yana Lagranj teoremasidan foydalanib topamiz:

$$f'(c) - f'(x_0) = f''(c_1)(c-x_0).$$

Natijada

$$y - Y = f''(c_1)\cdot(x-x_0)(c-x_0) \qquad (15.9)$$

(a; b) intervalning x_0 va *x* nuqtalariga nisbatan ikki hol bo'lishi mumkin:

a) $x<x_0$ bo'lsin. Bunda $x < c < c_1 < x_0$ bo'lib,

$$x - x_0 < 0,\ c - x_0 < 0$$

bo'ladi.

Agar *(a, b)* da $f''(x)<0$ bo'lishini e'tiborga olsak, unda (14.9) munosabatdan

$$y-Y<0 \qquad (15.10)$$

bo'lishini topamiz.

b) $x_0 < x$ bo'lsin. Bunda $x_0 < c_1 < c < x$ bo'lib,

$$x - x_0 > 0,\ c - x_0 > 0$$

bo'ladi. Unda (15.9) dan

$$y-Y<0 \qquad (15.11)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

(15.10) va (15.11) munosabatlardan barcha *x* lar $(x \in (a,b))$ uchun $y-Y<0$, ya'ni $Y>y$ bo'lishini topamiz. Bu esa egri chiziq urinmadan har doim pastda bo'lishini bildiradi. Demak, egri chiziq qavariq bo'ladi.

Teorema isbot bo'ldi.

15.5-teorema. *f(x) funksiya (a; b) da aniqlangan bo'lsin. Agar funksiya (a; b) da ikkinchi tartibli f''(x) hosilaga ega bo'lib,* $\forall x \in (a,b)$ *uchun*

$$f''(x) > 0$$

bo'lsa, u holda egri chiziq (funksiya grafigi) (a; b) da botiq bo'ladi.

Bu teorema yuqorida keltirilgan teorema kabi isbotlanadi.

Faraz qilaylik, *y=f(x)* funksiya *(a; b)* oraliqda berilgan bo'lib, u shu oraliqda ikkinchi tartibli *f''(x)* hosilaga ega bo'lsin. x_0 nuqtaning $(x_0 \in (a,b))$ atrofi $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)((x_0-\delta,\ x_0+\delta) \subset (a,b))$ ni qaraymiz.

Aytaylik,

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \ \ учун \ \ f''(x) < 0,$$
$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \ \ учун \ \ f''(x) > 0$$

yoki

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \ \ учун \ \ f''(x) > 0,$$
$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \ \ учун \ \ f''(x) < 0$$

bo'lsin, ya'ni *f''(x)* ikkinchi tartibli hosila x_0 nuqtani o'tishda o'z ishorasini o'zgartirsin. Unda, yuqoridagi teoremalarga ko'ra *f(x)* funksiya grafigi $(x_0 - \delta, x_0)$ da qavariq (botiq), x_0, $x_0 + \delta$ da botiq (qavariq) bo'ladi.

Demak, x_0 nuqtada funksiya grafigi egiladi.

15.3-natija. *Egri chiziqning egilshi nuqtasini funksiya ikkinchi tartibli f''(x) hosilani nolga aylantiradigan nuqtalar orasida topiladi,*

Misol. $f(x)=x^4 - 6x^2 + 5$ funksiyani qavariqlikka va botiqlikka tekshirilib, egilish nuqtasi topilsin.

Avvalo berilgan funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini xisoblaymiz:

$$f'(x) = (x^4 - 6x^2 + 5)' = 4x^3 - 12x,$$
$$f''(x) = (4x^3 - 12x)' = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1).$$

Modomiki, berilgan funksiya barcha nuqtalarda birinchi tartibli hosilaga ega ekan, unda funksiya grafigining har bir nuqtasida urinma mavjud.

Endi funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini nolga tenglab, topamiz:

$$f''(x) = 12(x^2 - 1) = 12(x-1)(x+1) = 0, \quad x_1 = -1, x_2 = 1.$$

$x_1 = -1$ va $x_2 = 1$ nuqtalarning atroflarini olib, unda funksiya ikkinchi tartibli hosilasi *f''(x)* ning ishorasini tekshiramiz.

$x_1 = -1$ nuqtaning $-1-\delta, -1+\delta$ atrofini $(0 < \delta < \frac{1}{2})$ olaylik. Unda

$\forall x \in (-1-\delta, -1)$ uchun $f''(x) = 12(x-1)(x+1) > 0$ bo'ladi,
chunki bunday *x* lar uchun *x* - 1 < 0, *x* + 1 < 0 bo'ladi.
$\forall x \in (-1, -1+\delta)$ uchun $f''(x) = 12(x-1)(x+1) < 0$ bo'ladi,
chunki bunday *x* lar uchun *x* - 1 < 0, *x* + 1 > 0 bo'ladi.

$x_2 = 1$ nuqtaning $1-\delta, 1+\delta$ $(0 < \delta < \frac{1}{2})$ atrofini olaylik.

Unda $\forall x \in (1-\delta, 1)$ uchun $f''(x) = 12(x-1)(x+1) < 0$ bo'ladi,
chunki bunday *x* lar uchun *x* - 1 < 0, *x* + 1 > 0 bo'ladi.
$\forall x \in (1, 1+\delta)$ uchun $f''(x) = 12(x-1)(x+1) > 0$ bo'ladi,
chunki bunday x lar uchun *x* - 1 > 0, x+ 1 > 0 bo'ladi.

Shunday qilib, berilgan funksiyaning grafigi $(-\infty,-1)$ oraliqda botiq, (-1, 1) oraliqda qavariq, $(1,+\infty)$ oraliqda botiq bo'ladi. x= -1 va x= 1 nuqtalar egilish nuqtalari bo'ladi.

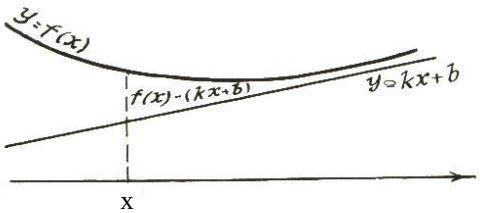
7- §. Egri chiziqning asimptotalari

$y=f(x)$ funksiyani qaraylik. Uning grafigi biror egri chiziqni tasvirlasin. Ba'zi hollarda funksiya grafigi egri chiziq shunday bo'ladiki, *x o'*zgaruvchi $+\infty\,(ёки -\infty)$ ga intila borganda, u biror to'g'ri chiziqga tobora yaqinlasha boradi. Odatda bunday to'g'ri chiziq qaralayotgan egri chiziqning *asimptotasi* deyiladi.

15.5-ta'rif. *Agar*

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=0$$

bo'lsa, u holda u=kx+b mo'g'ru chiziq f(x) funksiya grafigining asimptotasi (og'ma asimptotasi) deyiladi (117-chizma).

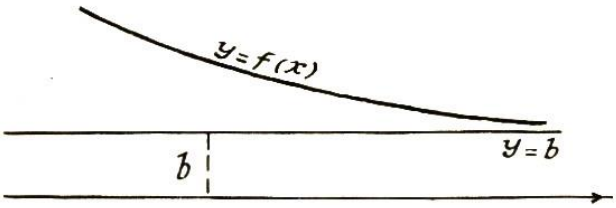


117-chizma.

15.6-ta'rif. *Agar*

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-b\right]=0,$$

bo'lsa, u holda y=b to'g'ri chiziq f(x) funksiya grafigining gorizontal asimptotasi deb ataladi (118-chizma).

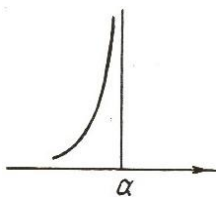


118-chizma.

15.7-ta'rif. *Agar*

$$\lim_{x\to a\pm 0} f(x)=\infty$$

bo'lsa, u holda x=a to'g'ri chiziq f(x} funksiya grafigining vertikal asimptotasi deb ataladi (119-chizma).



119-chizma.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

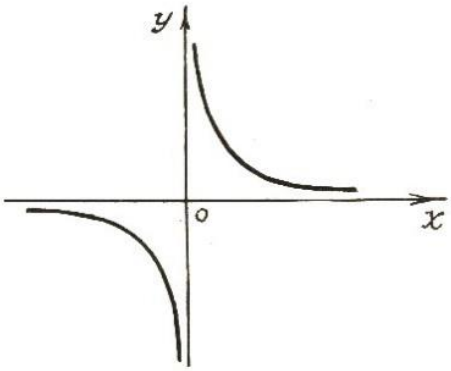
15.6-teorema. *f(x) funksiya grafigi y=kx+b og'ma asimptotaga ega bo'lishi uchun*

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\quad \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]-b$$

limitlarning o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

Misollar. 1. $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiya grafigi vertikal asimptotaga ega bo'ladi. Bu asimptota x=0 to'g'ri chiziqdan *(0y* o'qidan) iboratdir, chunki (120-chizma)

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm}\frac{1}{x}=0.$$

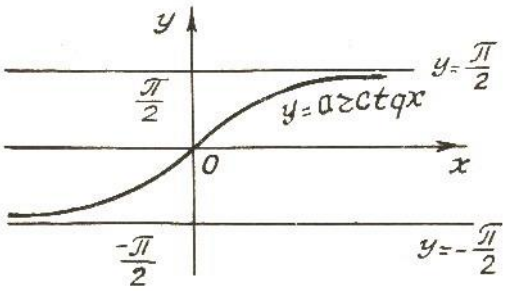


120-chizma.

2. $f(x)=arctgx$ funksiyaning grafigi gorizontal asimptotalarga ega bo'ladi. Bu asimptotalar $y=\frac{\pi}{2}, y=-\frac{\pi}{2}$ to'g'ri chiziqlardan iboratdir, chunki

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} arctgx=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} arctgx=-\frac{\pi}{2}$$

(121 - chizma).



121-chizma.

3. $f(x)=2\sqrt{x^2+4}$ funksiya grafigining asimptotasi topilsin.

Ma'lumki, funksiya grafigining asimptotasi $y = kx + b$ to'g'ri chiziqdan iborat bo'lib,

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]$$

bo'lar edi. Shu formulalardan foydalanib, topamiz:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x^2+4}}{x}=2\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}=2,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[2\sqrt{x^2+4}-2x\right]=$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)}{\sqrt{x^2+4}+x}=2\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+4)-x^2}{\sqrt{x^2+4}+x}=$$

$$=2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}=0.$$

Shunday qilib, berilgan funksiya grafigi asimptotaga (og'ma asimptotaga) ega va bu asimptota $y=2x$ to'g'ri chiziqdan iborat.

8-§. Funksiyani tekshirishning umumiy sxemasi

Funksiya haqida o'rganilgan ma'lumotlar berilgan u yoki bu funksiyani to'liqroq tasavvur etishga imkon beradi. Uni quyida keltiriladigan sxema bo'yicha tekshirishni tavsiya etamiz:

1) Funksiyaning aniqlanish sohasini topish;
2) Funksiyani uzluksizlikka tekshirish va uzilish nuqtalarini topish;
3) Funksiyaning juft, toq va davriyligini aniqlash;
4) Funksiyani monotonlikka tekshirish;
5) Funksiyani ekstremumga tekshirish;

6) Funksiya grafigining qavariq hamda botiqligini aniqlash, egilish nuqtalarini topish;

7) Funksiya grafigining asimptotalarini topish;

8) Funksiyaning haqiqiy ildizlarini – koordinata o'qlarini kesib o'tish nuqtasini topish (agar ular mavjud bo'lsa).

Misol, $f(x)=e^{-x^2}$ funksiya to'liq tekshirilsin.

Berilgan funksiya $(-\infty;+\infty)$ intervalda aniqlangan va uzluksiz.

Bu $f(x)=e^{-x^2}$ funksiya uchun

$$f(-x)=e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}=f(x)$$

bo'ladi. Demak, *f(x)* juft funksiya. Uning grafigi *Oy* o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

Funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz:

$$f'(x)=\left(e^{-x^2}\right)'=e^{-x^2}\cdot(-2x)=-2xe^{-x^2},$$

$$f''(x)=\left(-2xe^{-x^2}\right)'=-2\left[e^{-x^2}+xe^{-x^2}(-2x)\right]=$$

$$=-2e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)=2(2x^2-1)e^{-x^2}.$$

Birinchi tartibli hosilani nolga tenglab funksiyaning statsionar nuqtasini topamiz:

$$f'(x)=-2xe^{-x^2}=0\Rightarrow x=0.$$

Demak, $x=0$ funksiyaning statsionar nuqtasi.

Agar

$$f''(0)=2(2\cdot 0-1)e^{-0}=-2<0$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda berilgan funksiyani $x=0$ nuqtada maksimumga ega bo'lishini aniqlaymiz. Demak,

$$\max\{f(x)\}=\max\left\{e^{-x^2}\right\}=e^{-0}=1.$$

Ravshanki,

$\forall x<0$ uchun $f'(x)=-2xe^{-x^2}>0,$

$\forall x>0$ uchun $f'(x)=-2xe^{-x^2}<0$

bo'ladi. Demak, $(-\infty;0)$ da funksiya o'suvchi, $(0;+\infty)$ da kamayuvchi.

Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini nolga tenglab topamiz:

$$f''(x)=2(2x^2-1)e^{-x^2}=0\Rightarrow\ 2x^2-1=0\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$\forall x\in\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ uchun $f''(x)=2(2x^2-1)e^{-x^2}>0,$

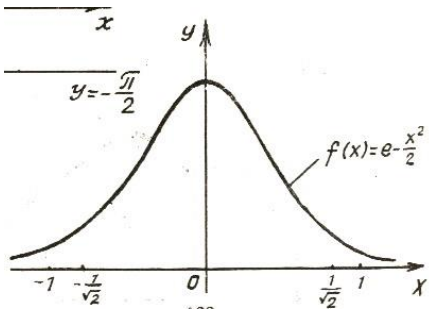
$\forall x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ uchun $f''(x)=2(2x^2-1)e^{-x^2}<0,$

$\forall x\in\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$ uchun $f''(x)=2(2x^2-1)e^{-x^2}>0.$

Demak, berilgan funksiyaning grafigi $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ va $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ oraliqlarda botiq, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ oraliqda qavariq bo'ladi. $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ va $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ nuqtalar funksiya grafigining egilish nuqtalari. So'ngra

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = 0.$$

Demak, *y=0* to'g'ri chiziq *(Ox* o'qi) berilgan funksiya grafigining gorizontal asimptotasi bo'ladi. $f(x) = e^{-x^2}$ funksiya grafigi 122-chizmada tasvirlangan.



122-chizma.

9-§. Aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidalari

f(x) va *g(x)* funksiyalar *(a, b)* da berilgan bo'lsin. Agar

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to a} g(x) = 0$$

bo'lsa, u holda $x \to a$ *da* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *nisbat* $\left(\frac{0}{0}\right)$ *ko'inishdagi aniqmaslik deb ataladi.*

Agar

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \ \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

bo'lsa, u holda $x \to a$ *da* $\frac{f(x)}{f(x)}$ *nisbat* $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ *ko'rinshidagi aniqmaslik deb ataladi.*

Agar

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \ \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

bo'lsa, u holda $x \to a$ *da f(x) g(x) ko'paytma* $(0 \cdot \infty)$ *ko'rinishdagi aniqmaslik deb ataladi.*

Agar

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty, \ \lim_{x\to a} g(x) = \mp\infty$$

bo'lsa, u holda $x \to a$ da f(x)+g(x) yig'indn $(\infty - \infty)$ ko'rinshidagi aniqmaslik deb ataladi.

15.3-eslatma. $(0 \cdot \infty)$ va $(\infty - \infty)$ ko'rinishdagi aniqmasliklar $\left(\frac{0}{0}\right)$ yoki $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ko'rinishdagi aniqmasliklarga keladi. Masalan,

$f(x) \cdot g(x) = \dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ yoki $f(x)\,g(x) = \dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$

deb olinishi bilan $(0.\infty)$ ko'rinishdagi aniqmaslik $\left(\frac{0}{0}\right)$ yoki $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ko'rinishdagi aniqmaslikka keladi.

Berilgan funksiyalar hosilalarga ega bo'lsa, ulardan foydalanib, aniqmasliklarni ochish mumkin. Bu yo'l bilan aniqmasliklarni ochish *Lopital qoidalari* deyiladi.

15.7a-teorema. *f(x)* va *g(x) funksiyalar (a, b) da aniqlangan va uzluksiz bo'lib, ular quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:*

1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0;$

2) (a,b) da chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega va $g'(x) \neq 0;$

3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = k$ (k chekli yoki cheksiz).

U holda

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$$

bo'ladi.

Isboti. Koshi teoremasiga asosan *(a, b)* oraliqda shunday $a < \xi < b$ nuqta mavjudki, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

$f(a) = g(a) = 0$ ekanligidan

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\ .$$

Faraz qilaylik $x \to a$ da $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ isbati biror chekli limitga intilsin, $a < \xi < x$ bo'lganligidan, $x \to a$ *dan,* $\xi \to a$ kelib chiqadi. Demak, bundan quyidagi nisbatning $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ *ham* shu limitga intilishi kelib chiqadi

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$$

Bundan teoremaning isboti kelib chiqadi. Xuddi shunday ($\frac{\infty}{\infty}$) aniqmaslik uchun ham Lopital teoremasi isbotlanadi.

Misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}$ limit hisoblansin.Yuqoridagi teoremadan foydalanib topamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(tgx-x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\cos^2 x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2.$$

Ba'zi hollarda Lopital qoidasini qo'llash natijasida $x\to a$ da

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

nisbatning o'zi ham $\left(\frac{0}{0}\right)$ ko'rinishdagi aniqmaslik bo'lib qoladi.

Agar *f'(x)* va *g'(x)* yuqoridagi teoremaning shartlarini qanoatlantirsa, unda

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

bo'ladi.

Misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}$ limit hisoblansin. Lopital qoidasini ikki marta ketma-ket qo'llab topamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}$$

10-§. **Differensial hisobining tatbiqlari.**

Bahoga nisbatan talabning egiluvchanligini aniqlash

Biz yuqorida hosilaning matematik, mexanik va fizik ma'nolari haqida tushunchalar bergan edik. Bu paragrifda differensial hisobini iqtisodiy va qishloq xo'jalik masalalarini yechishga qo'llanilishiga to'xtalib o'tamiz([9]- [11]).

Faraz qilaylik ishlab chiqarish xarajatlari, mahsulot miqdori x ning funksiyasidan iborat bo'lsin $y=k(x)$. Xarajat miqdori $x+\Delta x$ ortsa, unga mos keluvchi mahsulot miqdori $k(x+\Delta x)$ bo'ladi, ya'ni $\Delta k=k(x+\Delta x)-k(x)$. Bundan o'rtacha mahsulot ishlab chiqarishning o'zgarish tezligi

$$\frac{\Delta k}{\Delta x}=\frac{k(x+\Delta x)-k(x)}{\Delta x}$$

yoki, birlik xarajatiga mos keluvchi, ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorini me'yoriy chegarasi deyiladi.

1-Misol. Boqiladigan mollarni o'sish vazni y (kg), ularga beriladigan oziqa miqdori x- ga bog'liq bo'ladi. Berilayotgan makkajo'xori miqdori x (kg) (12 foiz oqsil saqlaganda) mollarni o'sish vazni y bilan quyidagicha funksional bog'lanishga ega bo'lishi talribada aniqlangan

$$y=-0.0001x^2+0.433x-3.062$$

$x=100$kg makkajo'xori berilganda, qoramol vaznini qanday o'sishini aniqlaymiz.

<u>Yechish.</u> $y+\Delta y=-0{,}0001(x+\Delta x)^2+0{,}433(x+\Delta x)-3{,}062$ bundan Δy ni topsak

$$\Delta y=0{,}433\Delta x-0{,}0002x\cdot\Delta x-0{,}0001\cdot\Delta x^2$$

bundan $\frac{\Delta y}{\Delta x}=0{,}433-0{,}0002x-0{,}0001\cdot\Delta x$, va $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0{,}433-0{,}0002x$

Natijada boqilayotgan molning vazni $x=100$kg oziqa berilganda

$y'(100)=0{,}433-0{,}0002\cdot 100=0{,}413$ kg. ga oshar ekan.

2-Misol. Faraz qilaylik, biror mahsulotning talab bahosi $y=20-x$ bog'lanishga ega bo'lsin, bu yerda x- talab, y - bahosi. Ushbu munosabatdan

$U=x\cdot y=x(20-x)$, $U'=20-2x$, $U'(8)=4$ ko'ramizki agar $x=8$ $bo'lsa,$ mahsulotni sotishdan keladigan daromad taqriban 4 birlikka ortadi.

$y=f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin, Δx - erkli o'zgaruvchi x ni orttirmasi bo'lsa, U holda erkli o'zgaruvchi x ning nisbiy orttirmasi $\frac{\Delta x}{x}$ bo'ladi. Erksiz o'zgaruvchini nisbiy orttirmasi esa $\frac{\Delta y}{y}$. Natajada bu ikki miqdorlarning nisbatlari $\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}$

Funksiyani x–erkli o'zgaruvchiga nisbatan egiluvchanligi $E_x(y)$, hosilaning ta'rifiga asosan quyidagicha aniqlanadi:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}\cdot y'$$

$$E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Demak, $y=f(x)$ funksiyani x erkli o'zgaruvchiga nisbatan egiluvchanligi, funksiyani erkli x o'zgaruvchining bir foiziga nisbatan o'sishini bildiradi.

3-Misol. $y=x-5$ funksiyani egiluvchanligini toping,

$$E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot y'=\frac{x}{x-5}\cdot 1=\frac{x}{x-5}.$$

Masalan, $x = 10$ bo‘lganda, funksiya egiluvchanligi $E_{10}(5) = \frac{10}{10-5} = \frac{10}{5} = 2$.
Demak, agar x erkli o‘zgaruvchi bir foizga ortsa, u holda funksiya y ikki foizga ortadi.

Biror mahsulotga bo’lgan talab U ni, shu mahsulot bahosi *v-ning* funksiyasidan iborat deb qarash mumkin: $U = f(v)$

Agar Δv baho orttirmasi, ΔU - talab orttirmasi bo‘lsa, bahoning nisbiy o‘zgaruvchanligi $\frac{\Delta v}{v}$, talabni nisbiy o‘zgaruvchanligi $\frac{\Delta u}{u}$ teng bo‘ladi. Natijada quyidagi nisbatni $\frac{\Delta u}{u} : \frac{\Delta v}{v}$ mahsulot narxi bir foizga oshganda, mahsulotga nisbatan talabni nisbiy o‘zgarishi deb qarash mumkin.
Bundan

$$\lim_{\Delta v \to 0}\left(\frac{\Delta u}{u} : \frac{\Delta v}{v}\right) = \frac{v}{u} \cdot \frac{du}{dv} = \frac{v}{u} \cdot u' \text{ ya’ni } E_T = E_v(u) = \frac{v}{u} \cdot \frac{du}{dv}$$

miqdorga mahsulotga talabni uning bahosi bir foizga oshgandagi egiluvchanligi deyiladi.

Ko‘pgina hollarda mahsulot narxi oshganida, unga talab kamayishi sababli $\frac{du}{dv} < 0$ bo‘ladi. Bunday hollarda manfiylikdan qutilish uchun, talabning egiluvchanligini $E_T = E_v(u) = -\frac{v}{u} \cdot \frac{du}{dv}$ deb olish mumkin.

Bundan quyidagi xulosalarni chiqarish mumrin:

1. Agar $E_v(u) > 1$ bo‘lsa, u holda mahsulot narxi 1 foizga oshsa, mos ravishda mahsulotga bo’lgan talabning 1 % dan ko‘p kamayishi kuzatiladi, ya’ni talab egiluvchan bo‘ladi;
2. Agar $E_v(u) = 1$ bo‘lsa, mahsulot narxining 1 foizga oshishi, talabni ham 1 foizga kamayishiga olib keladi, ya’ni talab bartaraf bo‘ladi;
3. Agar $0 < E_v(u) < 1$ bo‘lsa, u holda mahsulot narxining 1 foiz oshishi, mahsulotga bo’lgan talabni 1 foizdan kam kamayishiga olib keladi, ya’ni talab egiluvchan bo‘lmaydi.

4-misol. mahsulotga talab $y = 4 - x$ shaklida bo‘lsin. $\frac{dy}{dx} = -1 < 0$ bo‘lganligi uchun (funksiya) talabni egiluvchanligi
$E_x(y) = -\frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4-x}(-1) = \frac{x}{4-x}$ bo‘ladi. Agar $x = 2$ bo‘lsa $E_T = \frac{2}{4-2} = 1$ bo‘ladi.

Buning ma’nosi, agar s mahsulot narxi 2 so‘m bo‘lganda uning bahosini 1 foizga oshirilishi, unga talabni 1 foizga kamayishiga olib keladi.

Xuddi shunday, talabning daromadga nisbatan egiluvchanligi quyidagicha aniqlanadi.

Faraz qilaylik, r-daromad, q- talab miqdori bo‘lsin. Unda $q = f(r)$, Δr - daromadning o’sishi, Δq - mahsulotga bo’lgan talabni oshishi bo‘lib, mahsulotga nisbatan talabning egiluvchanligi quyidagicha bo‘ladi:

$E_r(q) = \frac{r}{q} \cdot \frac{dq}{qr}$ bu yerda $\lim\limits_{\Delta r \to 0} \left(\frac{\Delta q}{q} : \frac{\Delta r}{r} \right) = \frac{r}{q} \cdot \frac{dq}{qr}$.

11-§. Iqtisodiy jarayonlarni nisbiy o`zgaruvchanligini baholash

Matematik modellashtirish yordamida real jarayonlarni tub rivojlanish qonuniyatlarini ochishga yordam beradi.

Iqtisodiy tahlilda o`zgaruvchilarni absalyut o`zgaruvchanligi emas, balki ularni nisbiy yoki foizli o`zgaruvchanligi muhim ahamiyatga ega. Daromad va xarajatning farqi, foyda, ishlab-chiqarishda asosiy omil hisoblanadi. Foydani maksimum qilish uchun fermer ikki xil nisbiy ko`rsatkichdan o`rtacha va limitik qiymatdan foydalanadi. Agar o`rtacha daromad, o`rtacha xarajatdan yuqori bo`lsa fermer foyda ko`radi va mahsulot ishlab chiqarishini ko`paytiradi. Agar o`rtacha xarajat, o`rtacha daromaddan katta bo`lsa fermer xo`jaligi zarar ko`radi.

Iqtisodiy ko`rsatkichlarni tahlil qilishda o`rganilayotgan jarayonning nisbiy o`rganuvchanligini egiluvchanlik koeffitsienti ko`rsatadi. Differensial hisobining muhim tadbiqlaridan biri funksiya egiluvchanligini aniqlashga qo`llanilishidir x- mahsulotning bahosi, y- shu mahsulotga bo`lgan talab bo`lsa, ular orasidagi bog’lanishni y = f(x) shaklida ifodalash mumkin. Funksional bog’lanishda erkli o`zgaruvchi x ning $x + \Delta x$ o`zgarishi, funksiya y ni $y + \Delta y$ ga o`zgarishiga olib keladi. Bu jarayoning o`zgarish tezligini hosila yordamida baholash mumkin. Iqtisodiy jarayonlarni bu ko`rsatkich to`la xarakterlamaydi, u o`lchov birligiga bog’liq bo`ladi. Shu sababli, iqtisodiy tahlilda x va y o`zgaruvchilarni absalyut o`zgaruvchanligini $(\Delta x \text{ ва } \Delta y)$ emas, balki ularni nisbiy yoki foizli o`zgaruvchanligini o`rganish lozim.

Funksiyani y=f(x) egiluvchanligi deb , x va y o`zgaruvchilarning nisbiy o`zgaruvchanliklari nisbatining limitiga aytiladi([9]- [11]):

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} \div \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

x erkli o`zgaruvchi uzluksiz o`zgargan holda, funksiya egiluvchanligini Mf-limitik qiymat (x nuqtadagi) va Af-funksiyani x nuqtadagi o`rtacha qiymatlari yordamida quydagicha yozish mumkin:

$$E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot f'(x)=\frac{f'(x)}{\left(\frac{f(x)}{x}\right)}=\frac{Mf}{Af}$$

Bu erda $Mf = f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ ni masalani qo`yilishiga qarab turlicha talqin qilish mumkin. Masalan, uni limitik foyda $MR = R'$, MC- limitik sarf-xarajat, MQ- limitik mahsulot deb tushunish mumkin. $Af=\frac{f(x)}{x}$- o`rtacha qiymat, $AR=\frac{R(Q)}{Q}$- o`rtacha foyda, $AC=\frac{C(Q)}{Q}$- o`rtacha harajat, $AQ=\frac{Q(L)}{L}$- o`rtacha yetishtirilgan mahsulot miqdori;- deb qaralishi mumkin. Bu miqdorlar yordamida, umumiy o`rtacha qiymatlarni va limitik xarajatlarni o’zaro tafovutini aniqlanadi.

Yigindi bo`yicha, o`rtacha qiymatni topish uchun $Af(x)=\frac{f(x)}{x}$ funksiya grafigini $B(x;f(x))$ nuqtasini, koordinatalar boshi bilan birlashtiruvchi vektorni o`tkazamiz, bu $tg\beta=\frac{f(x)}{x}=Af(x)$ o`rtacha qiymatdan iborat bo`ladi.

Limitik qiymatni, yigindi qiymat orqali ifodalashda, koordinatalar sistemasida x erkli o`zga-ruvchi bilan AF(x)-o`rtacha qiymatni kesishish nuqtasi (x; AF(x)) hamda koordinatalar o`qlarini musbat yo`nalishlari bilan hosil qilgan to`g’ri to`rtburchak yuzasidan iborat bo`ladi .

Uzluksiz holda, limitik (marjinal) qiymatni, yigindi qiymat orqali topishda masalan, $F(x)=ax-вx^3$ bo`lsa, u $MF(x)=\left(ax-вx^3\right)'=a-3вx^2$ egri chiziqni (x; AF(x)) nuqtasiga o`tkazilgan urinmaga teng bo`ladi. Natijada, $MF(x)=F'(x)=tg\beta$ urinmaning burchak koeffitsienti, yig’indi miqdorning ixtiyoriy nuqtasiga o`tkazilgan urinma bo`lib, miqdoriy jihatdan yig’indi miqdorning, shu nuqtadagi hosilasiga teng bo`ladi.

Uzluksiz holda yigindi qiymatni limitik qiymat orqali topishda yuqoridagiga teskari masala yechiladi, ya’ni $F'(x)$ni boshlangich funksiyasini topishga keltiriladi. Masalan, $MF(x)=a-3вx^2$ bo`lsa, $F(x)=\int MF(x)dx=\int\left(a-3вx^2\right)dx$ bo`ladi, x erkli o`zgaruvchi o`zgarishi bilan, o`tkazilgan urinmaning burchak koeffitsenti ham o`zgaradi, bu limitik qiymatni o`zgarishini bildiradi. Agar limitik qiymat grafik holda berilgan bo`lsa, u aniqmas integralni geometrik izohlashga asosan, yuzani ifodalaydi $F(x)=S(x)+C$.

AF(x) o`rtacha va $MF(x)$ limitik o`rtacha qiymatlar orasidagi boglanishni topish uchun AF(x) berilgan holda, yigindi qiymat quydagicha bo`ladi:

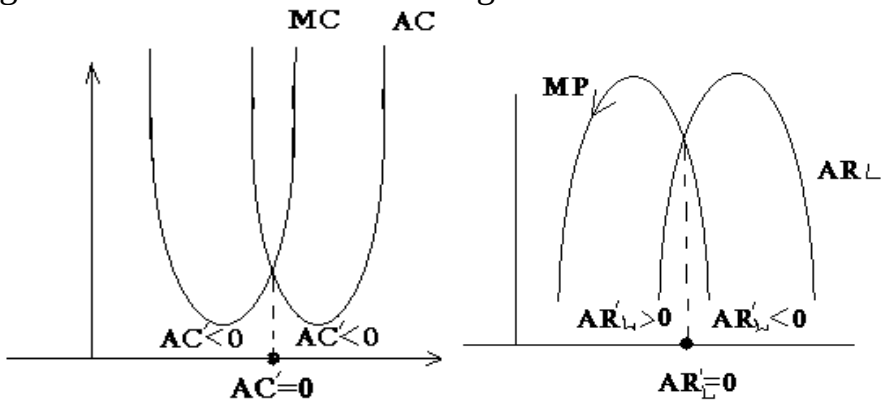
$MF(x)=F'(x)=\left(xAF(x)\right)'=AF(x)+xAF'(x)$.

Xudi shunday, o`rtacha qiymat, yigindi qiymat orqali quydagicha ifodalaniladi: $AF(x)=\frac{1}{x}\int MF(x)dx$, bu yerda $MF(x)=AF(x)+xAF'(x)$ bo`lib, oddiy talqin qilinishi mumkin, ya'ni ekstremum nuqtasidagi limitik qiymat, o`rtacha qiymat bilan bir xil bo`ladi.

O`rtacha qiymat AF bilan, limitik qiymat MF orasidagi bog'lanishni o`rganamiz $(x \geq 0)$:

a) AF(x) funksiyani o`sish sohasi $AF(x)' \geq 0$ bo`lganligidan $MF(x) \geq AF(x)$ bo`ladi. Limitik qiymat, o`rtacha qiymatdan katta bo`ladi.

b) Kamayish sohasi $AF(x)' \leq 0$ bo`lganligidan, $MF(x) \geq AF(x)$ limitik qiymat, o`rtacha qiymatdan kichik bo`ladi. Demak, bu hollarda limitik miqdorni grafigi, o`rtacha miqdorni grafigidan yuqorida joylashadi. AF(x) ni o`sish oraligida pastda grafigi bo`ladi va o`rta qiymati ekstremum nuqtasidan o`tadi. O`rtacha AC, limitik xarajat MC, hamda $AP_L$ o`rtacha va MP_L mehnatning limitik mahsuloti orasidagi boglanishni geometrik izohi shakl-1 da berilgan.



shakl-1

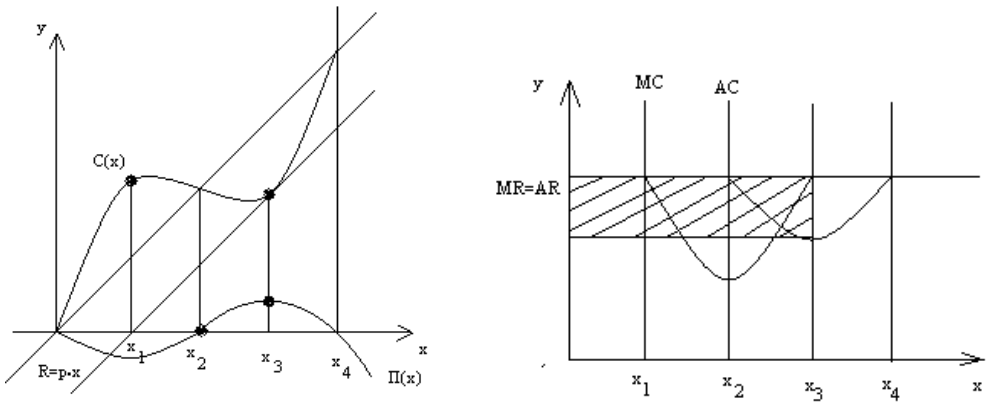
Bu masalalarni diskret holda yechish uchun a) hosila $\frac{\Delta F}{\Delta X}$ nisbat bilan, b) integral yigindi bilan $\sum MF(x)$, c) $F'(x)$ funksiya grafigiga urinma $(x; F(x))$ va $(x+\Delta x; F(x+\Delta x))$ ikki nuqtadan o`tuvchi to`gri chiziq bilan almashtiriladi.

Yigindi, o`rtacha qiymat, limitik foyda va xarajat funksiyalari orasidagi boglanishni qaraymiz.

Iqtisodiy ko`rsatkich sifatida, x- bilan fermer xo'jaligini yetishtirgan mahsuloti hajmini, R mahsulotning jami bahosi $R = p \cdot x$ ya'ni daromadi, C- xarajati bo`lsin, P=R-C foyda bo`ladi.

Bozor iqtisodi sharoitida fermer faoliyatini mukammal raqobatli, monopoliya hollari mavjud bo`lib, biz undan mukammal raqobatli holni qaraymiz. Bu holda fermer yetishtirgan mahsulotining bahosi, uning hajmiga bogliq bo`lmaydi va bahoni

bozor belgilaydi. Baho r = r(x), $R(x) = p \cdot x$ daromad mahsulot hajmining chiziqli funksiyasidan iborat bo`ladi. Xarajat, daromad, foyda orasidagi boglanish shakl-2 da berilgan. Bu shtrixlangan, to`g'ri to`rtburchakning uchlari $(x_3; p)$, $(x_3; AC(x_3))$, $(0; AC(x_3))$ nuqtalarda bo`ladi. Bundan $MR = (px)' = p = \frac{px}{x} = AR$. Demak, o`rtacha va limitik daromad teng bo`lib, ox o`qiga parallel to`g'ri chiziq bo`ladi. $C(x_1) = R(x_1)$, $C(x_4) = R(x_4)$ bilan ustma-ust tushadi. $x \le x_2$ bo`lganda $C(x) = R(x)$, $x_2 \le x \le x_4$ o`zgarganida $C(x) = R(x)$ bo`ladi. $C(x) \ge R(x)$ dan $AC(x) = \frac{C(x)}{x} \ge \frac{R(x)}{x} = MC(x)$ bo`lib, $C(x)$ni grafigi $R(x)$ni grafigidan yuqorida, $x_2 \le x \le x_4$ oraliqda bo'lganda quyida joylashadi, $x_3$ nuqtada o`rtacha xarajat eng kichik yani minimal bo`ladi.



shakl-2

Limitik xarajat grafigini $C(x)$ga o`tkazilgan urinmaning og'ish burchagini o`zgarishiga qarab qurish mumkin. $x_1$va x_3 nuqtalardan $C(x)$ga o`tkazilgan urinmalar $R(x)$ daromad grafigiga parallel bo`ladi. Demak x_1 nuqtalarda limitik xarajat, limitik daromad bilan usma-ust tushadi va eng kam daromadga ega bo`ladi(yani maksimum ziyonga). $x_3$ nuqtada $\Pi' = R' - C' = MR - MC = 0$ bo`lib, mahsulot hajmi $x_2 \le x \le x_4$ oralig'ida, o`zgarganida daromad musbat bo`ladi, mahsulot hajmi $x \le x_2$ va $x \le x_4$ bo`lganida daromad manfiy (zarar ko`radi) bo`ladi. Mahsulot ishlab chiqarish hajmi $x_3$ muqobil hajmda bo`lganida, daromad miqdori shakldagi shtrixlangan to`g'ri to`rt burchak yuzasidan iborat bo`ladi. Bu ko`rsatkich $MC(x)$ va $AC(x)$ orqali ifodalanadi. Shtrixlangan to`gri to`rtburchakning uchlari $(x_3; p)$, $(x_3; AC(x_3))$, $(0; AC(x_3))$, $(0; p)$ nuqtalarda yotadi.

Qishloq xo'jalik mahulotlarini yetishtiruvch fermer xo'jaligining iqtisodiy ko'rsatkichlarini matematik modellashtirish yordamida tahlil qilish korxonaning samaradorligini aniqlashda muhim rol o'ynaydi.

Mavzu bo'yicha tekshirish uchun savollar:

1. Differensial hisobning tatbiqlari yaqida ma'lumot bering.
2. Funksiyaning o'sish va kamayish oraliqlarinit topish qoidalarini tushuntiring?
3. Funksianing ekstremumini mavjudligining zarur va etarli shartlarini ayting?
4. Funksiyaning qavariq va botiqliyligi, bukulish, egilish nuqtalari, asimptotalari qanday topiladi ?
5. Funksiani to'la tekshirib shaklini chiish sxemasini tushuntiring?
6. Lopital teoremasing qo'llanilishiga limitlar nazariyasidan misollar keltiring?
7. Matematik modellashtirish yordamida, hosilani iqtisodiy masalalarni yechishga qo'llanilishi buyicha tushuncha bering?

Kalit so'zlar

Differensial, o'sish, kamayish, ekstremum, zarur , etarli, qavariq, botiq, bukulish, egilish, asimptota, Lopital qoidasi, baho, talab, egiluvchanlik.

Xulosa

Differensial hisobning tatbiqlari, funksiyaning o'sish, kamayish oraliqlarini topish qoidalari, ekstremum mavjudligining zarur va etarli shartlari, funksiyaning qavariq va botiqliyli, bukulish, egilish nuqtalari, asimptotalari, funksiani to'la tekshirib shaklini chiish sxemasi, Lopital teoremasining limitlar nazariyasiga tat'biqlari, hosilani iqtisodiy masalalarni yechishga qo'llanilishi mavzulari o'rganilgan.

XVI BOB. ANIQMAS INTEGRAL

Ma'lumki, harakat qonuniga ko'ra, harakatdagi jismning tezligini topish masalasi hosila tushunchasiga olib keldi.

Harakatdagi jismning tezligiga ko'ra harakat qonunining o'zini topish masalasi esa yuqorida aytilgan masalaga nisbatan teskari masala bo'lib, u aniqmas integral tushunchasiga olib keladi[2].

1-§. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral

f(x) funksiya *(a; b)* da berilgan bo'lib, *F(x)* esa shu oraliqda differensiallanuvchi funksiya bo'lsin.

16.1-ta'rif. *Agar F(x) funksiyaning hosilasi F'(x) berilgan f(x) funksiyaga teng bo'lsa, F'(x) = f(x) yoki df(x)=f(x)dx bo'lsa, u holda F(x) funksiya f(x) funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deb ataladi.*

Misollar. 1. $f(x)=x^2$ bo'lsin. Bu funksiyaning boshlang'ich funksiyasi $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ bo'ladi, chunki

$$F'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2=f(x)$$

2. $f(x)=\cos x$ bo'lsin. Bu funksiyaning boshlang'ich funksiyasi *F(x)*=sin*x* bo'ladi, chunki

$$F'(x)=(\sin x)'=\cos x=f(x)$$

Agar f(x) funksiya (a; b) da uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiya shu oraliqda boshlang'ich funksiyaga ega bo'ladi.

f(x) funksiya *(a; b)* da berilgan bo'lib, u shu oraliqda ikkita *F(x)* va *F(x)* boshlang'ich funksiyalarga ega bo'lsin. Ta'rifga binoan,

$$F'(x)=f(x),\quad \Phi'(x)=f(x)$$

bo'ladi. Demak, $F'(x)=\Phi'(x)$

U holda yuqorida keltirilgan natijaga ko'ra *F(x)* va *F(x)* funksiyalar bir-biridan o'zgarmas songa farq qiladi:

$$\Phi(x)=F(x)+C\ \ (C-const)$$

Demak, berilgan *f(x)* funksiyaning boshlang'ich funksiyalari cheksiz ko'p bo'lib, ular bir-biridan o'zgarmas songa farq qiladi. Agar *F(x)* funksiya *f(x)* funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, unda *f(x)*ning istalgan boshlang'ich funksiyasi

F(x) + C (C — const)

ko'rinishda bo'ladi.

16.2-ta'rif. *Ushbu ifoda* $F(x) + C$ *(C — const)shu f(x) funksiyaning aniqmas integrali deb ataladi va* $\int f(x)dx$ *kabi belgilanadi:*

bunda $\int$ *integral belgisi, f(x) integral ostidagi funksiya, f(x)dx integral ostidagi ifoda deyiladi.*

Demak, berilgan *f(x)* funksiyaning aniqmas integralini topish uchun uning boshlang'ich funksiyalaridan biri *F(x)*ni topib, *F(x) + C* ni aniqlash yetarli ekan.

Misollar. 1. $\int x^2 dx$ aniqmas integral topilsin. Ravshanki,

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3$$

funksiya uchun $$F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2$$

Demak,

$$\int x^2 dx = F(x) + C = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

2. $\int \cos x dx$ integral yechilsin.

Hosilasi *cosx* ga teng bo'lgan funksiya *sinx* ekanini e'tiborga olib, *F(x)=sinx* bo'lishini aniqlaymiz. Demak,

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

2-§. Aniqmas integralning xossalari

Quyida aniqmas integralning xossalarini keltiramiz.

1°. *f(x)* funksiya aniqmas integrali $\int f(x)dx$ ning differensiali *f(x)dx* ga teng bo'ladi:

$$d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx.$$

2°. Funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiya bilan o'zgarmas son yig'indisiga teng:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

3°. Ushbu formula o'rinli:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \quad (k - const, k \neq 0).$$

4°. Ushbu formula o'rinli:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Bu xossalarning isboti bevosita aniqmas integral ta'rifidan kelib chiqadi. Biz ulardan birini, masalan, 2°-xossaning isbotini keltiramiz.

2°-xossaning isboti. *F(x)* funksiya *f(x)* funksiyaning biror boshlang'ich funksiyasi bo'lsin. Ta'rifga ko'ra

$$F'(x) = f(x) \qquad (*)$$

bo'lib,

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (**)$$

bo'ladi. Yuqorida (*) tenglikdan foydalanib topamiz:

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x). \qquad (***)$$

Natijada (**) va (***) munosabatlardan

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa 2°-xossani isbotlaydi.

3-§. Asosiy integrallar jadvali

1. Sodda funksiyalarning aniqmas integrallari. Avvalo sodda funksiyalarning aniqmas integrallarini topamiz. Bunda boshlang'ich funksiya ta'rifidan hamda hosilalar jadvalidan foydalanamiz.

1) $f(x) = x^{\alpha}$ bo'lsin (x>0, α -haqiqiy son, $\alpha \neq -1$).

Unda

$$\int f(x)dx = \int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

bo'ladi, chunki

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\right)' = (\alpha+1)\cdot\frac{x^{\alpha}}{\alpha+1} = x^{\alpha}.$$

1') $f(x) = \frac{1}{x}$ bo'lsin ($x \neq 0$), unda

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

bo'ladi.

2) $f(x) = a^{x}$ bo'lsin ($a \neq 1, a > 0$). U holda

$$\int f(x)dx = \int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$$

bo'ladi, chunki

$$\left(\frac{a^{x}}{\ln a} + C\right)' = \frac{1}{\ln a}a^{x}\ln a = a^{x}.$$

Xususan, $f(x)=e^{x}$ bo'lsa,

$$\int f(x)dx = \int e^{x}dx = e^{x} + C.$$

3) $f(x) = \sin x$ bo'lsin. Unda

$$\int f(x)dx = \int \sin x dx = -\cos x + C$$

bo'ladi, chunki

$$(-\cos x + C)' = -(-\sin x) = \sin x.$$

4) $f(x) = \cos x$ bo'lsin. U holda

$$\int f(x)dx = \int \cos x dx = \sin x + C$$

bo'ladi, chunki

$$(\sin x + C)' = \cos x.$$

5) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ bo'lsin. Unda

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$$

bo'ladi, chunki

$$(tgx + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

6) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ bo'lsin. U holda

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$$

bo'ladi, chunki

$$(-ctgx + C)' = -\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

7) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ bo'lsin. U holda

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C$$

bo'ladi, chunki

$$(arctgx + C)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

8) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ bo'lsin. Unda

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

bo'ladi, chunki

$$(\arcsin x + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. *Integrallar jadvali.* Yuqorida keltirilgan formulalarni jamlab ushbu integrallar jadvalini hosil qilamiz:

1°. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$. 2°. $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$.

3°. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (x > 0, a \neq 1),$ 4°. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

$\int e^x dx = e^x + C.$

5°. $\int \cos x dx = \sin x + C.$ 6°. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C.$

7°. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C.$ 8°. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C.$

9°. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C.$

Misollar. 1. $\int x\sqrt{x}dx$ integral hisoblansin.

Avvalo integral ostidagi funksiyani quyidagicha yozib olamiz:

$x\sqrt{x} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}.$

Jadvaldagi 1°-formuladan foydalanib topamiz:

$\int x\sqrt{x}dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C.$ Demak, $\int x\sqrt{x}dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C.$

2°. $\int (x^2+1)^2 dx$ integral hisoblansin.

Ravshanki, $(x^2+1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1.$ Unda

$\int (x^2+1)^2 dx = \int (x^4 + 2x^2 + 1)dx = \int x^4 dx + 2\int x^2 dx + \int 1dx =$

$= \frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + x + C.$

bo'ladi. Demak,

$\int (x^2+1)^2 dx == \frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + x + C$

3. $\int tg^2 x dx$ integral hisoblansin.

$\int tg^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left[\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right] dx =$

$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = tgx - x + C$

Demak, $\int tg^2 x dx = tgx - x + C.$

4. $\int \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5}\right) dx$ integral hisoblansin.

5. $\int \left(\cos x - 2e^x + \frac{3}{\sin^2 x}\right) dx$ integral hisoblansin.

$$\int\left(\cos x-2e^x+\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx=\int\cos x dx-2\int e^x dx+3\int\frac{dx}{\sin^2 x}=$$
$$\sin x-2e^x-3ctgx+C.$$

4- §. Integrallash usullari

1°. O'zgaruvchilarni almashtirib integrallash usuli.

Ushbu $\int f(x)dx$ integralni hisoblash talab etilsin. Ba'zan *x o'zga*ruvchini boshqa o'zgaruvchiga almashtirish natijasida berilgan integral soddaroq hisoblash uchun qulayroq integralga keladi.

Aytaylik,

$$\int f(x)dx=F(x)+C \qquad (16.1)$$

bo'lsin. Bu integralda $x=\varphi(t)$ almashtirish bajaraylik. ($f(x),\varphi(t)$ va $\varphi'(t)$ lar uzluksiz funksiyalar).

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C \qquad (16.2)$$

bo'ladi. Haqiqatan ham, $F'(x)=f(x)$ bo'lishini e'tiborga olgan holda

$$[F(\varphi(t))+C]'=(F(\varphi(t)))'=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

bo'lishini topamiz. Bu esa (15.2) munosabatning to'g'riligini bildiradi.

(16.1), (16.2) tengliklardan topamiz:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (x=\varphi(t)).$$

Misollar. 1. $\int(2+3x)^5dx$ integral hisoblansin.

Bu integralda *2 + 3x=t* almashtirishni bajaramiz. Unda

$$2+3x=t\Rightarrow x=\frac{t-2}{3},\ dx=\frac{1}{3}dt.$$

Natijada berilgan integral ushbu integralga keladi:

$$\int(2+3x)^5dx=\int t^5\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\int t^5dt.$$

Bu integral esa tez hisoblanadi:

$$\int(2+3x)^5dx=\frac{1}{3}\int t^5dt=\tfrac{1}{18}t^6+C=\frac{1}{18}(2+3x)^6+C.$$

2. $\int\cos^2 x\sin xdx$ integral hisoblansin.

Bu integralda *cosx=t* deb almashtirishni bajaramiz. Unda

$$\cos^2 x\sin xdx\Rightarrow\cos^2 x(-d(\cos x))\Rightarrow -t^2dt$$

bo'lib,

$$\int \cos^2 x \sin x dx = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C = \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

bo'ladi.

3. $\int e^{ax} dx$ integral hisoblansin.

Bu integralda $ax = t$ deb olamiz. Unda

$$e^{ax} dx \Rightarrow e^t d(\frac{t}{a}) \Rightarrow \frac{1}{a} e^t dt$$

bo'lib,

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} \int e^t dt = \frac{1}{a} e^t + C = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

bo'ladi.

4. $\int \frac{x^3 dx}{\sin^2 x^4}$ integral hisoblansin.

Bu integralda $x^4 = t$ deymiz. Unda

$$\frac{x^3 dx}{\sin^2 x^4} \Rightarrow \frac{dx^4}{4 \sin^2 x^4} \Rightarrow \frac{dt}{4 \sin^2 t}$$

bo'lib,

$$\int \frac{x^3 dx}{\sin^2 x^4} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{4}(-ctgt) + C = -\frac{1}{4} ctgx^4 + C$$

bo'ladi.

5. $\int x\sqrt{x-5} dx$ integral hisoblansin.

Bu integralda

$\sqrt{x-5} = t$ deymiz. Unda

$x\sqrt{x-5} dx \Rightarrow (t^2+5)td(t^2+5) \Rightarrow (t^2+5)t \cdot 2tdt \Rightarrow \Rightarrow (2t^4 + 10t^2)dt$ bo'lib,

$$\int x\sqrt{x-5} dx = \int (2t^4 + 10t^2)dt = 2\frac{t^5}{5} + 10\frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5}\left(\sqrt{x-5}\right)^5 + \frac{10}{3}\left(\sqrt{x-5}\right)^3 + C.$$

2°. Bo'laklab integrallash usuli. *u=u(x), v=v(x)* funksiyalar uzluksiz *u'(x)* va *u'(x)* hosilalarga ega bo'lsin. Ma'lumki,

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Bu tenglikni integrallab topamiz:

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu.$$

Ravshanki, $\int d(uv) = u \cdot v$. Unda

$$u \cdot v = \int udv + \int vdu$$

bo'ladi. Natijada ushbu formulaga kelamiz:

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu \qquad (16.3)$$

Odatda bu formula *bo'laklab integrallash formulasi* deyiladi.

(16.3) formula $\int udv$ ni hisoblashni $\int vdu$ ni hisoblashga keltiradi.

Misollar. 1. $\int xe^x dx$ hisoblansin. Integral ostidagi $xe^x dx$ ifodani udv ko'rinishida yozib olishimiz kerak. Agar $u=x$, $dv=e^x dx$ deyilsa, unda $xe^x dx=udv$ bo'ladi. (16.3) formuladan foydalannsh uchun du va v larni topishamiz kerak bo'ladi:

$$u = x \Rightarrow du = dx,$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow \int dv = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

bo'ladi. (16.3) formuladan foydalanib topamiz:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

16.1-eslatma. Agar $\int xe^x dx$ integralni (16.3) formuladan foydalanib hisoblashda, $u=e^x$, $xdx=dv$ deyilganda, unda $du=e^x dx$, $v = \frac{x^2}{2}$ bo'lib,

$$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x dx$$

bo'lar edi. Natijada berilgan integralni hisoblash undan murakkabroq integralni hisoblashga olib keladi. Shuning uchun integral ostidagi ifodani u va dv larning ko'paytmasi sifatida yozib olinishiga alohida ahamiyat berish kerak.

2. $\int \ln x dx, \quad x > 0$ integral hisoblansin.

Bu integralda $u = \ln x, dv = dx$ deb olamiz. Unda $du = \frac{1}{x}dx, \ v = x$ bo'ladi. Demak, (16.3) formulaga ko'ra

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

3. $\int e^x \sin x dx$ integral hisoblansin. Bu integralda $u = e^x, dv = \sin x dx$ deb olamiz. Unda $du = e^x dx, v = -\cos x$ bo'lib, (16.3) formulaga ko'ra berilgan integral quyidagicha bo'ladi:

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi integral $\int e^x \cos x dx$ ga yana bo'laklab integrallash formulasini qo'llaymiz: $u=e^x$, $dv=\cos x dx$ deb olamiz. Unda $du = e^x dx, v = \sin x$ bo'lib,

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

bo'ladi. Natijada, ushbu tenglikka kelamiz:

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

Bu tenglikdan esa

$$2\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x,$$

ya'ni

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}\left(e^x \sin x - e^x \cos x\right) + C = \frac{e^x}{2}\left(\sin x - \cos x\right) + C$$

bo'lishi kelib chiqadi.

16.3-eslatma. Ushbu ko'rinishdagi integrallar bo'laklab integrallash usuli yordamida hisoblanadi:

1°. $\int x^m \sin x dx, \int x^m \cos x dx, \int x^m e^x dx.$

Bu integrallarda

$u = x^m, \quad dv = \sin x dx, \qquad dv = \cos x dx, \qquad dv = e^x dx$

deb olish qulaydir.

2°. $\int x^m \ln x dx, \int x^m \arcsin x dx, \int x^m \arccos x dx,$ bu integrallarda

$u = \ln x, \qquad dv = x^m dx,$

$u = \arcsin x, \qquad dv = x^m dx,$

$u = \arccos x, \qquad dv = x^m dx$

deb olish qulaydir.

3°. $\int e^{ax} \sin bx dx, \int e^{ax} \cos bx dx.$

Bu integrallarda

$u = e^{ax}, \qquad dv = \sin bx dx,$

$dv = \cos x dx$

deb olish qulaydir.

Misol: $I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n}$ $(n = 1, 2, 3, ...; a - const)$ integral hisoblansin. Bu integralda

$$u = \frac{1}{\left(x^2 + a^2\right)^n}, \quad dv = dx$$

deb olamiz. Unda

$$du = \left(\frac{1}{\left(x^2 + a^2\right)^n}\right)' dx = \left(\left(x^2 + a^2\right)^{-n}\right) dx = -n\left(x^2 + a^2\right)^{-n-1} \cdot 2x dx =$$

$$= -\frac{2nx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx,$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

bo'ladi. Bo'laklab integrallash formulasi (16.3) ga ko'ra topamiz:

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n} = x \cdot \frac{1}{\left(x^2 + a^2\right)^n} - \int x \cdot \left(-\frac{2nx}{\left(x^2 + a^2\right)^{n+1}}\right) dx =$$

$$= \frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^n} + 2n \int \frac{x^2}{\left(x^2 + a^2\right)^{n+1}} dx. \qquad (16.4)$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi

Error! Bookmark not defined.
integralni quyidagicha yozib olamiz:

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx = \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} -$$

$$-a^2\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = I_n - a^2 I_{n+1}$$

Unda berilgan (16.4) integral ushbu

$$I_n = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2n\cdot I_n - 2na^2 I_{n+1}$$

ko'rinishga keladi. Keyingi tenglikdan esa I_{n+1} ni topamiz:

$$2na^2 I_{n+1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - I_n = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + (2n-1)I_n$$

Error! Bookmark not defined. (16.5)

Bu rekurrent formuladan foydalanib, I_1 ni bilgan holda birin-ketin $I_2, I_3, ...$ larni topish mumkin. Ravshanki, n=1 bo'lganda

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$$

bo'ladi. Masalan, (16.5) formuladan foydalanib,

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$$

integral quyidagicha hisoblanadi:

$$I_2 = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2} \quad I_1 = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2}arctg\frac{x}{a} + C.$$

5 - §. Sodda kasr va ularni hisoblash

Ushbu

$$\frac{A}{x-a}, \frac{A}{(x-a)^m}, \frac{Bx+C}{x^2+px+q}, \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}, \quad (m>1)$$

ko'rinishdagi kasrlar sodda *kasrlar* deb ataladi. Bunda A, B, S, a,p,q – o'zgarmas haqiqiy sonlar, m - natural son, x^2+px+q - kvadrat uch had (haqiqiy ildizlarga ega emas).

1°. $\frac{A}{x-a}$ sodda kasrning aniqmas integralini hisoblaymiz:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

2°. $\frac{A}{(x-a)^m}$ (m > 1) soda kasrning aniqmas integralini hisoblaymiz:

$$\int \frac{A}{(x-a)^m} = A\int \frac{A}{(x-a)^m} = A\int (x-a)^{-m} d(x-a) =$$

$$= A\frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + C = \frac{A}{(1-m)(x-a)^{m-1}} + C.$$

3°. $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ sodda kasrning aniqmas integralini hisoblash uchun avvalo bu kasrning maxrajida turgan x^2+px+q kvadrat uchhadni o'zgartirib yozib olamiz:

$$x^2+px+q = x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2+q-\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4} =$$

$$= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2, \quad \left(a^2 = q-\frac{p^2}{4}\right),$$

u holda

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}dx$$

bo'ladi. Keyingi integralda o'zgaruvchini quyidagicha almashtiramiz: $x+\frac{p}{2} = t.$

Ravshanki, $dx = dt, \; x = t-\frac{p}{2}.$

Natijada

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}dx = \int \frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+C}{t^2+a^2}dt =$$

$$= \int \frac{Bt+C-\frac{p}{2}B}{t^2+a^2}dt = B\int \frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(C-\frac{p}{2}B\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2} = \frac{B}{2}\ln\left|t^2+a^2\right| +$$

$$+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{a}arctg\frac{t}{4}+C=\frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+$$

$$+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

4°. $\frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^m}$ $(m>1)$ sodda kasrning integralini hisoblashda x^2+rx+q kvadrat uchxadni 3ᵉ- holdagidek yozib, so'ng $x+\frac{p}{2}=t$ almashtirishni bajaramiz.

$$\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}dx=\int\frac{Bx+C}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^m}dx=\int\frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+C}{(t^2+a^2)^m}dt=$$

$$=B\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^m}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}=\frac{B}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{\left(t^2+a^2\right)^m}+$$

$$+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}=\frac{B}{2}\cdot\frac{1}{(1-m)\left(t^2+a^2\right)^{m-1}}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}.$$

Bu tenglikdagi $\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}$ integral 4 - § da keltirilgan rekurrent formula yordamida hisoblanadi.

6-§. Ratsional funksiyalarni integrallash

Ushbu

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$$

butun ratsional funksiyaning integrali oson hisoblanadi:

$$\int P_n(x)dx=\int\left[a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n\right]dx=a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+a_2\frac{x^3}{3}+...+a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+C.$$

Kasr ratsional funksiya

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx^m}$$

ni integrallash birmuncha murakkab bo'ladi.

Agar $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ noto'g'ri kasr $(n>m)$ bo'lsa, uning butun qismi ajratilib butun ratsional funksiya va to'g'ri kasr yig'indisi ko'rinishida yoziladi:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_n^{'}(x) + \frac{P_n^{''}(x)}{Q_m(x)}.$$

U holda

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \int P_n^{'}(x) + \int \frac{P_n^{''}(x)}{Q_m(x)}.$$

bo'ladi. Demak, yuqoridagi $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ni integrallash to'g'ri kasr $\frac{P_n^{''}(x)}{Q_m(x)}$ni integrallashga keladi. To'g'ri kasrni integrallash uchun, avvalo bu kasrlarni sodda kasrlar yig'indisi sifatida yozib olinadi, so'ng ularning integrallari topiladi.

1-misol. Quyidagi integral hisoblansin:

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x-2)^3}.$$

Bu integralni topish uchun integral ostidagi to'g'ri kasrni sodda kasrlarning yig'indisi shaklida yozib olamiz:

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3}.$$

Bu tenglikni qanoatlantiruvchi koeffitsientlarni topish uchun tenglikning ikki tomonini $(x-1)(x-2)^2$ ga ko'paytiramiz:

$$A(x-2)^3 + B(x-1)(x-2)^2 + C(x-1)(x-2) + D(x-1) = x$$

Undan

$$A(x^3 - 6x^2 - 12x - 8) + B(x^3 - 5x^2 + 8x - 4) + C(x^2 - 3x + 2) + + D(x-1) = x$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Endi x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarini tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ C - 6A - 5B = 0, \\ 12A + 8B - 3C + D = 1, \\ 2C - D - 8A - 4B = 0. \end{cases}$$

Bu sistemani yechib, *A=-1, B=1, C=-1* va *D=2* larni topamiz. Demak,

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)^3} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{(x-2)^3}.$$

Natija

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x-2)^3} = -\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{(x-2)^2} + 2\int \frac{dx}{(x-2)^3} =$$

$$= -\ln|x-1| + \ln|x-2| + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} + C = = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} + C$$

bo'ladi.

2-misol. Quyidagi integral topilsin:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

Integral ostidagi ratsional kasr sodda kasrga quyidagicha yoyiladi:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{x^2+4}.$$

Bundan

$$(Ax+B)(x^2+4)+(Dx+E)(x^2+1)=1.$$

Demak,

$$(A+D)x^3+(B+E)x^2+(4A+D)x+(4B+E)=1.$$

Bu tenglikdagi *x* ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarini tenglashtirib

$$\begin{cases} A+D=0, \\ 4A+D=0, \\ B+E=0, \\ 4B+E=1. \end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz. Bu sistemadan esa *A=0, D=0,* $B=\frac{1}{3}$, $E=-\frac{1}{3}$ kelib chiqadi. Shunday qilib,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}arctgx - \frac{1}{6}arctg\,\frac{x}{2} + C.$$

7-§. Ba’zi irratsional funksiyalarni integrallash

Ushbu $\int R(x, x^{\alpha}, x^{\beta}, ...)dx$ ko'rinishdagi integrallarni qaraymiz. Bunda $\int R(x, x^{\alpha}, x^{\beta}, ...)dx$ funksiya $(x, x^{\alpha}, x^{\beta}, ...)$ larning ratsional funksiyasi. Bu erda $\alpha = \frac{m_1}{n_1}$, $\beta = \frac{m_2}{n_2}, ...$ ratsional sonlar bo'lib, *k* ularning umumiy maxraji bo'lsa, u holda $x = t^k$ almashtirish yordamida yuqoridagi integral ratsional funksiyani integrallashga keladi.

Ushbu $\int R(x, (a\,x+b)^{\alpha}, (a\,x+b)^{\beta}, ...)dx$, $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}, ...\right)dx$

integrallar esa $ax+b=t^k$, $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$

almashtirishlar yordamida ratsional funksiyani integrallashga keladi.

1-misol. Quyidagi integrallar topilsin:

1) $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}$; 2) $\int \frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{x-2}{x}}dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x-3}+1}$; 4) $\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$; 5) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+2}}$

1) $x=t^6$ almashtirish bajaramiz. Bu holda $dx=6t^5dt$ bo'ladi.
Demak,

$$\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}=\int \frac{6t^5dt}{\left(1+t^2\right)t^3}=6\int \frac{t^2}{1+t^2}dt=6\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=$$

$$=6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=6\int dt-6\int \frac{dt}{1+t^2}=6(t-arctgt)+C=6\left(\sqrt[6]{x}-arctg\sqrt[6]{x}\right)+C.$$

2) $t^2=\frac{x-2}{x}$ almashtirishni bajaramiz. Bu holda $x=\frac{2}{1-t^2}$ va $dx=\frac{4tdt}{\left(1-t^2\right)^2}$ bo'ladi. Demak,

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}dx=\int \frac{1}{2}\left(1-t^2\right)t\frac{4tdt}{\left(1-t^2\right)^2}=2\int \frac{t^2dt}{1-t^2}=2\int \frac{1-(1-t^2)}{1-t^2}dt=$$

$$=2\int \frac{dt}{1-t^2}-2\int dt=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-2t+C=\ln\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}-2\sqrt{\frac{x-2}{x}}+C.$$

3) $t^3=2x-3$ almashtirishni bajaramiz. U holda $x=\frac{1}{2}(t^3+3)$ va $dx=\frac{3}{2}t^2dt$ bo'ladi. Demak,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x-3}+1}=\int \frac{\frac{3}{2}t^2dt}{t+1}=\frac{3}{2}\int \frac{t^2dt}{t+1}=\frac{3}{2}\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{3}{2}\int tdt-\frac{3}{2}\int dt+\int \frac{dt}{t+1}=\frac{4}{3}t^2-\frac{3}{2}t+\ln|t+1|+C=$$

4) Integral ostidagi ifoda x va $\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$ ga nisbatan ratsional funksiyadir. Shuning uchun $t^3=\frac{2-x}{2+x}$ almashtirishni bajaramiz.

Bundan

$$x=\frac{2-2t^3}{1+t^2};\ 2-x=\frac{4t^3}{1+t^3}\ dx=\frac{-12t^2}{\left(1+t^3\right)^2}dt$$

bo'ladi. Demak,

$$\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx = -\int \frac{2(1+t^3)t\cdot 12t^2}{16\cdot t^6(1+t^3)^2}dt =$$

$$= -\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{3}{4t^2} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C.$$

5) $t^2 = x^2 + 2$ almashtirishni bajaramiz. U holda $x^2 = t^2 - 2$ va $xdx = tdt$ bo'ladi. Demak,

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{(t^2-2)tdt}{t} = \int (t^2-2)dt = \int t^2dt - 2\int dt = \frac{1}{3}t^3 - 2t + C = = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+2)^3} - 2\sqrt{x^2+2} + C.$$

8-§. Trigonometrik funksiyalarni integrallash

I. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ ko'rinishdagi integralni qaraylik, bu erda $R(\sin x, \cos x)$ ifoda *sinx* va *cosx* larning ratsional funksiyasi

1) arap *cosx* ning ishorasi o'zgarishi bilan *R(sinx, cosx)* ning ishorasi o'zgarsa, unda *t=sinx* almashtirish yordamida *R(sinx, cosx)* funksiya *t* ning ratsional funksiyasiga keladi.

2) agar *sinx* ning ishorasi o'zgarishi bilan *R(sinx, cosx)* funksiyaning ishorasi o'zgarsa, unda *t=cosx* almashtirish orqali *R(sinx, cosx)* funksiya *t* ning ratsional funksiyasiga keladi.

3) agar *sinx, cosx* larning ishoralari bir vaqtda o'zgarganda *R(sinx,cosx)* funksiyaning ishorasi o'zgarmasa, *t=tgx* almashtirish yordamida *R(sinx, cosx)* funksiya *t* ning ratsional funksiyasiga keladi.

4) $t = tg\frac{x}{2}$ almashtirish yordamida *R(sinx, cosx)* funksiyaning ratsional funksiyasiga keladi.

II. $\int \sin^{2n} xdx, \int \cos^{2n} xdx, \int \sin^{2n} x\cdot\cos^{2n} xdx$ ko'rinishdagi integrallarni topishda

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x),\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),\ \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

formulalar yordamida integral ostidagi funksiyaning darajasi pasaytirib boriladi va oxiri *sinkx* va *coskx* funksiyalarning toq darajasiga keltiriladi.

III. $\int tg^n xdx, \int ctg^n xdx$ ko'rinishdagi integrallar *t=tgx* va *t=ctgx* almashtirishlar yordamida topiladi.

IV. $\int \sin ax\cos bxdx, \int \sin ax\sin bxdx, \int \cos ax\cos bxdx$ ko'rinishdagi integrallar

$$\sin ax\cos bx=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)x+\sin(a-b)\right],$$

$$\sin ax\cdot\sin bx=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x-\cos(a+b)x\right],$$

$$\cos ax\cos bx=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)x+\cos(a-b)x\right]$$

formulalar yordamida topiladi.

V. $\sqrt{a^2+x^2}$ ifodalar qatnashgan integralni topishda mos ravishda *x=atgt*, *x=asint* kabi belgilashdan foydalanish qulaydir .

1-misol. Quyidagi integrallarni toping.

1) $\int\sin^5 xdx$; 5) $\int\sin^3 x\cos^3$;

2) $\int\sin^4 x\cos xdx$; 6) $\int\sin 3x\sin 4xdx$;

3) $\cos^4 xdx$; 7) $\int\cos\frac{4}{3}x\cdot\cos 3x$;

4) $\int tg^2 xdx$; 8) $\int\sqrt{4-x^2}dx$.

1) $\int\sin^5 xdx$ integral I turdagi integralning ikkinchi xili bo'lgani uchun avval berilgan integralni

$$\int\sin^5 xdx=\int\sin^4 x\sin xdx=\int(1-\cos^2 x)^2\sin xdx$$

ko'rinishda yozib olib, keyin *t=cosx* deb belgilasak, berilgan integral

$$\int\sin^5 xdx=-\int\left(1-t^2\right)^2dt=-\int\left(1-2t^2+t^4\right)dt$$

ko'rinishga keladi. Demak,

$$\int\sin^5 xdx=-\int dt+2\int t^4dt=-t+\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5+C=-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x--\frac{1}{5}\cos^5 x+C$$

bo'lar ekan.

2) $\int\sin^4 x\cos xdx$ integralni topish uchun *t=sinx* almashtirishni bajaramiz. Bu holda *dt*=cos*xdx* bo'lgani uchun

$$\int\sin^4 x\cos xdx=\int t^4dt=\frac{1}{5}t^5+C=\frac{1}{5}\sin^5 x+C$$

bo'ladi.

3) $\int\cos^4 xdx$ integralni topish uchun II qoidani qo'llab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int\cos^4 xdx=\int\left(\cos^2 x\right)^2dx=\frac{1}{4}\int\left(1+\cos 2x\right)^2dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\int dx+\int\cos 2xd(2x)+\int\cos^2 2xdx\right]$$

Bu integrallardan birinchi ikkitasi jadvaldagi integrallardir, uchinchisi esa yana II qoidadan foydalanib topiladi:

$$\int \cos^2 2x dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x d(4x) =$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin 4x + C.$$

Bu ifodani yuqoridagi tenglikka qo'yib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4}\left(\left(x + \sin 2x + \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin 4x\right)\right) + C \equiv \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

4) $\int tg^2 x dx$ integralni topish uchun III qoidani qo'llaymiz. U holda *t=tgx, x=arcctgt* va $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ bo'ladi. Demak,

$$\int tg^2 x dx = \int t^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{(1+t^2)-1}{1+t^2}dt = \int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} =$$
$$= t - arctgt + C = tgx - x + C$$

bo'lar ekan.

5) $\int \sin^3 x \cos^3 x dx = \int \sin^3 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^3 x(1-\sin^2 x)\cos x dx$

Endi *t=sinx* almashtirishni bajarib topamiz:

$$\int \sin^3 x \cos^3 x dx = \int t^3(1-t^2)dt = \int t^3 dt - \int t^5 dt = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{6}t^6 + C =$$
$$= \frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x + C.$$

6) $\int \sin 3x \sin 4x dx$ integral IV qoida yordamida topiladi:

$$\int \sin 3x \sin 4x dx = \frac{1}{2}\int [\cos(3-4)x - \cos(3+4)x]dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \cos x dx - \frac{1}{2}\int \cos 7x dx = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{14}\sin 7x + C.$$

7) $\int \cos\frac{4}{3}x \cos 3x dx$ integral ham IV qoida yordamida topiladi:

$$\int \cos\frac{4}{3}x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int \left[\cos\left(\frac{4}{3}+3\right)x + \cos\left(\frac{4}{3}-3\right)x\right]dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \left[\cos\frac{13}{3}x + \cos\frac{5}{3}x\right]dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{13}\sin\frac{13}{3}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\sin\frac{5}{3}x + C =$$
$$= \frac{3}{26}\sin\frac{13}{3}x + \frac{3}{10}\sin\frac{5}{3}x + C.$$

8) $\int \sqrt{4-x^2}dx$ integralni topish uchun $x = 2\sin^2 t$ almashtirishni bajaramiz. U holda *dx=4sintcostdt* va $t = \arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}$ bo'ladi. Demak,

$$\int \sqrt{4-x^2}\,xdx = \int \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 4\sin t\cos tdt =$$
$$= 8\int \sqrt{1-\sin^2 x}\cdot \sin t\cos tdt = 8\int \cos^2 t\sin tdt =$$
$$= -8\int z^2 dz = -\frac{8}{3}z^3 + C = -\frac{8}{3}\cos^3 x + C =$$
$$= -\frac{8}{3}\cos^2\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}\right) + C = -\frac{8}{3}\left(\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)^3 + C.$$

Mavzu bo'yicha tekshirish uchun savollar:

1. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral haqida tushuncha bering?
2. Aniqmas integralning asosiy hossalarini ayting?
3. Asosiy integrallash usullarini sanab o'ting.
4. Aniqmas integralda o'zgaruvchini almashtirish usuli qachon qo'llaniladi?
5. Bo'laklab integrallash fo'rmulasi.
6. Irratsional ifodalarni integrallash.
7. Qanday funksiyalarni integrallashda aniqmas koeffitsentlar usulidan foydalaniladi?
8. Sodda tregonametrik funksiyalarni integrallash usullari haqida tushuncha bering?

Kalit so'zlar

Boshlang'ich funksiya, aniqmas integral, integrallash usullari, bevosita, o'zgaruvchini almashtirish, bo'laklab integrallash, binomial differensiall, Irratsional, tregonametrik funksiyalarni, ratsional kasrlarni integrallash.

Xulosa

Boshlang'ich funksiyaning ta'rifi, aniqmas integral, aniqmas integralning asosiy hossalari, integrallash usullari, bevosita, o'zgaruvchini almashtirish, bo'laklab integrallash, binomial differensialni, tregonametrik funksiyalarni, irratsional ifodalarni, ratsional kasrlarni integrallash mavzulari o'rganilgan.

XVII BOB. ANIQ INTEGRAL

Aniq integral matematikaning muhim tushunchalaridan biri. Bu tushunchani bayon etishdan avval, unga olib keladigan masalalardan birini keltiramiz.

1 - §. O'tilgan yo'l haqidagi masala

Moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab *v = v(t)* tezlik bilan harakat qilsin. Uning t_0 momentdan *T* momentgacha ketgan vaqtda bosib o'tgan yo'lini topish talab etilsin.

Ma'lumki, tezlik *v o'*zgarmas bo'lganda, o'tilgan yo'l $s = v(T - t_0)$ bo'ladi. Tezlik o'zgaruvchi bo'lganda, ya'ni u vaqtning funksiyasi bo'lganda *(v = v(t))* bu formula bilan moddiy nuqtaning $[t_0, T]$ vaqt oralig'ida bosib o'tgan yo'lini aniq hisoblab bo'lmaydi. O'tilgan yo'lni aniqroq hisoblash maqsadida $[t_0, T]$ vaqt oralig'ini

$$t_0, t_1, t_2, ..., t_n \quad (t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = T)$$

nuqtalar yordamida *n* ta bo'lakka bo'lamiz. Natijada $[t_0, T]$ segment ushbu

$$[t_0; t_1], [t_1; t_2], ..., [t_{n-1}; t_n] = [t_{n-1}; T]$$

bo'laklarga ajratiladi. Har bir $[t_k; t_{k+1}]$ $(k = 0,1,2...,n-1)$ bo'lakda ξ_k nuqta olib, so'ng shu $[t_k; t_{k+1}]$da nuqtaning tezligi o'zgarmas $v(\xi_k)$ bo'lsin deb o'tilgan yo'lni $v(\xi_k)(t_{k+1} - t_k) = v(\xi_k) \cdot \Delta t_k$ bo'lishini topamiz. Bu albatta, $[t_k; t_{k+1}]$ vaqt oralig'ida o'tilgan yo'lni taqriban ifodalaydi. Unda $[t_0, T]$ vaqt oralig'ida o'tilgan yo'l

$s \approx v(\xi_0)\Delta t_0 + v(\xi_1)\Delta t_1 + ... + v(\xi_k)\Delta t_k + ... + v(\xi_{n-1})\Delta t_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} v(\xi_k)\Delta t_k$ bo'ladi. Bunda $\sum$ yig'indi (summa) belgisi. Endi $[t_k; t_{k+1}](k = 0,1,2,...,n-1)$ segmentlar uzunliklari $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ ning eng kattasini $\lambda\,(\lambda = \max\{\Delta t_0, \Delta t_1, ..., \Delta t_{n-1}\})$ deylik. Unda λ nolga intilganda (ya'ni $[t_0, T]$ segmentning bo'laklarga bo'linishi soni *p* cheksizga intilganda) $\sum_{k=0}^{n-1} v(\xi_k)\Delta t$ yig'indi moddiy nuqtaning $[t_0, T]$ vaqt oralig'ida bosib o'tgan yo'lini ifodalaydi. Demak, o'tilgan s yo'l $\lambda \to 0$ da $\sum_{k=0}^{n-1} v(\xi_k)\Delta t_k$ yig'indining limitidan iborat bo'lar ekan.

Umuman, ko'p masalalarning yechimi yuqoridagi yig'indilarning limitini topish bilan hal qilinadi. Bu aniq integral tushunchasiga olib keladi.

2-§. Integral yig'indi

f(x) funksiya *[a; b]* segmentda berilgan bo'lsin. Bu *[a; b]* segmentni

$$x_0, x_1, x_2, ..., x_n \; (a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b)$$

nuqtalar yordamida *p* ta bo'lakka bo'lamiz:

$$[x_0; x_1], [x_1; x_2], ..., [x_{n-1}; x_n].$$

Har bir $[x_{k-1}; x_k]$ *(k = 0, 1, 2, ... , n-1)* bo'lakchada ixtiyoriy $\xi_k\,(\xi_k \in [x_k; x_{k+1}])$ nuqtani olamiz. So'ng funksiyaning shu nuqtadaga ko'paytirib, quyidagi yig'indini tuzamiz:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + ... + f(\xi_k)\Delta x_k + ... + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

Bu yig'indi *f(x)* ning *[a; b]* segment bo'yicha integral yig'indisi deyiladi va δ orqali belgilanadi:

$$\delta = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Masalan, $f(x)=x^2$ funksiyaning *[a; b]* segmentdagi integral yig'indisi (yuqoridagi bo'linishga nisbatan)

$$\delta = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^2 \Delta x_k$$

bo'ladi.

3 - §. Aniq integral ta'rifi

f(x) funksiya *[a; b]* segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Bu funksiyaning integral yig'indisi

$$\delta = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$$

ni tuzamiz. Masala $\lambda \to 0$ da shu yig'indining limitini topishdan iborat.

f(x) funksiya *[a; b]* segmentda Veyershtrass teoremasiga asosan chegaralangan bo'ladi, ya'ni

$$m \le f(x) \le M \; (\forall x \in [a,b]).$$

[a;b] segmentni $x_0, x_1, x_2, ..., x_n \; (a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b)$ nuqtalar yordamida *p* ta bo'lakka bo'lamiz. Unda *f(x)* funksiya har bir $[x_k; x_{k+1}]$ segmentda *(k*=0,1,2, ... , *p*-1) ham chegaralangan bo'ladi. Demak,

$$m_k = \inf\{f(x)\} \qquad x \in [x_k; x_{k+1}],$$

$$M_k = \sup\{f(x)\}^* \qquad x \in [x_k; x_{k+1}]$$

mavjud bo'ladi. Ravshanki,

$$m_k < M_k \quad (k = 0, 1, 2, ..., n-1).$$

Bu m_k va M_k *(k=0,1,2, ... , p*-1) yordamida quyidagi yig'indilarni tuzamiz:

$$\underline{S_n} = m_0\Delta x_0 + m_1\Delta x_1 + ... + m_k\Delta x_k + ... + m_{n-1}\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$$

$$\overline{S_n} = M_0\Delta x_0 + M_1\Delta x_1 + ... + M_k\Delta x_k + ... + M_{n-1}\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k.$$

Ravshanki, $\underline{S_n} \le \overline{S_n}$.

$\xi \in [x_k x_{k+1}]$ uchun $m_k \le f(\xi_k) \le M_k$ bo'ladi. Bu tengsizliklarni Δx_k ga ko'paytirib, hosil bo'lgan tengsizliklarni *k* ning barcha qiymatlari *(k = 0,1,2, ... , p*-1) bo'yicha yozib, so'ng ularni hadlab qo'shib topamiz:

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k .$$

Demak, $\underline{s_n} \le \delta \le S_n$.

Ko'rsatish mumkinki,

$$m \cdot (b-a) \le \underline{s_n} \le \overline{S_n} \le M \cdot (b-a)$$

va

$$\overline{S_n} \ge \overline{S}_{n+1} \ge \overline{S}_{n+2} \ge ... \qquad s_n \le s_{n+1} \le s_{n+2} \le ...$$

bo'ladi. Demak, $\overline{S}_n$ ketma-ketlik chegaralangan va kamayuvchi, $\overline{S}_n$ ketma-ketlik esa chegaralangan va o'suvchi bo'ladi. Monoton ketma-ketlikning limiti mavjudligi haqidagi teoremaga muvofiq $\overline{S}_n$ va $\overline{S}_n$ ketma-ketliklar chekli limitga ega bo'ladi. Biz ularni mos ravishda $\overline{I}$ va $\underline{I}$ orqali belgilaylik:

$$\lim_{\lambda \to 0} \overline{S}_n = \overline{I}, \qquad \lim \underline{s_n} = \underline{I}$$

Endi bu $\overline{I}$ va $\underline{I}$ sonlarning tengligini ko'rsatamiz. Shu maqsadda $\overline{I}$ - $\underline{I}$ ayirmani qaraymiz. Uni quyidagicha yozish mumkin:

$$\overline{I} - \underline{I} = \lim_{\lambda \to 0} \overline{S}_n - \lim_{\lambda \to 0} \underline{s_n} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k - \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\Delta x_k .$$

Demak,

$$\overline{I} - \underline{I} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\Delta x_k . \qquad (17.1)$$

f(x) funksiya *[a, b]* segmentda uzluksiz. Kantor teoremasiga ko'ra, u shu segmentda tekis uzluksiz bo'ladi. Unda $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ topiladiki, $\lambda < \delta$ bo'lgan *[a; b]* oraliqning har bir $[x_k; x_{k+1}]$ bo'lagida $M_k - m_k < \varepsilon$ bo'lishini topamiz. Unda

$$\sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\Delta x_k < \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon \Delta x_k = \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \varepsilon (b-a)$$

bo'lib,

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\Delta x_k = 0 \qquad (17.2)$$

bo'ladi. (16.1) va 16.2) munosabatlardan

$$\overline{I} = \underline{I}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Ularni *I* bilan belgilaylik: $I = \overline{I} \geq \underline{I}$.

Shunday qilib,

$$\lim_{\lambda \to 0} \overline{S}_n = \lim_{\lambda \to 0} \underline{s}_n = I.$$

Har doim

$$\underline{s_n} \leq \delta \leq \overline{S_n}$$

bo'lgani uchun integral yig'indi δ ham $\lambda \to 0$ da shu *I* songa intiladi:

$$\lim_{\lambda \to 0} \delta = I.$$

bo'lgani uchun integral yig'indi δ ham $\lambda \to 0$ da shu *I* songa intiladi:

$$\lim_{\lambda \to 0} \delta = I.$$

Demak, *f(x)* funksiya *[a, b]* segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiyaning integral yig'indisi

$$\delta = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$$

$\lambda \to 0$ da chekli *I* songa intilar ekan:

$$\lim_{\lambda \to 0} \delta = I.$$

17.1-ta'rif. $\lambda \to 0$ da *f(x) funksiya integral yig'indisi* δ *ning chekli limiti shu f(x) funksiyaning aniq integrali deyiladi va*

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (17.3)$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \delta = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Bu holda *f(x) funksiya [a, b] da integrallanuvchi deyiladi. a - integralning quyi chegarasi, b - integralning yuqori chegarasi, f(x) integral ostidagi funksiya, f(x)dx integral ostidagi ifoda deyiladi.*

Misol. $I = \int_0^1 xdx$ integral topilsin.

Bu integral ostidagi *f(x)=x* funksiya *[0; 1]* segmentda uzluksiz. Demak, funksiyaning integrali $\int_0^1 xdx$ mavjud. Ta'rifga ko'ra

$$\int_0^1 xdx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \quad (f(x) = x)$$

bo'ladi. Yuqoridagi integral yig'indini quyidagicha tuzamiz:

1) [0; 1] segmentni

$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$

nuqtalar yordamida *p* ta teng bo'lakka bo'lamiz;

$\left[0; \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}; \frac{2}{n}\right], \ldots, \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n-1}{n}; \frac{n}{n}\right].$

Bu holda $\Delta x_k = \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}$ bo'ladi.

2) Har bir $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right] (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ bo'lakda ξ_k nuqta sifatida $\frac{k+1}{n}$ ni olamiz. $\left(\xi_k = \frac{k+1}{n}\right)$. Berilgan *f(x)=x* funksiyaning bu nuqtadagi qiymati

$f(\xi_k) = \frac{k+1}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$

bo'ladi.

f(x)=x funksiyaning [0; 1] dagi integral yig'indisi quyidagicha bo'lishini topamiz:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) =$$

$$= \frac{1}{n^2}(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Demak,

$\int_0^1 x dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} \left[\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})\right] = \frac{1}{2}$. Shunday qilib, $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$

17.1-eslatma. $f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda aniqlangan bo'lib, u shu segmentda integrallanuvchi bo'lsin. Unda

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \qquad \int_a^a f(x)dx = 0 \qquad (17.4)$$

deb qaraymiz.

17.2 - eslatma. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentning chekli sondagi nuqtalarida uzilishga (sakrashga) ega bo'lib, qolgan barcha nuqtalarida uzluksiz bo'lsa, funksiya $[a;b]$ segmentda integrallanuvchi bo'ladi.

4 - §. Aniq integrallarni hossalari

$f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Uning aniq integrali $\int_a^b f(x)dx$ har doim mavjud. Ushbu

1^0 $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx (c = const)$ formula o'rinli.

Isbot. Ta'rifga ko'ra

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_k^{n-1} f(\xi_k)\ \Delta x_k$$

$c\cdot f(x)$ funksiyaning integral yig'indisi $\sum_{k=0}^{n-1} cf(\xi_k)\ \Delta x_k$ bo'ladi.

Ravshanki, $\sum_{k=0}^{n-1} cf(\xi_k)\ \Delta x_k = c\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\ \Delta x_k$

bu tenglikda $\lambda\to 0$ da limitga o'tib,

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

bo'lishini topamiz.

2^0. Agar $f(x)$ bilan birga $g(x)$ funksiya ham $[a;b]$segmentda uzluksiz bo'lsa,u holda

$$\int_a^b [f(x) = g(x)]dx = \int_a^b f(x)da = \int_a^b g(x)dx$$

bo'ladi.

Isbot. Ta'rifga ko'ra

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$$

$$\int_a^b g(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k)\Delta x_k$$

bo'ladi. $f(x) = g(x)$ funksiyaning $[a;b]$ segmentdagi integral yig'indisi

$$\sum_{k=0}^{n-1}[f(\xi_k) = g(\xi_k)]\Delta x_k$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\sum_{k=0}^{n-1}[f(\xi_k) = g(\xi_k)]\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k)\Delta x_k$$

Bu tenglikda $\lambda\to 0$ da limitga o'tib topamiz:

$$\int_a^b [f(x) = g(x)]dx = \int_a^b f(x)da = \int_a^b g(x)dx$$

Aniq integralning keyingi bir nechta xossasini isbotsiz keltiramiz.

3^0. Agar $[a;b]$ segment ikkita $[a;c]$ va $[c;b]$ $(a \le c \le b)$ segmentlardan iborat bo'lsa,u holda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

bo'ladi.

4^0. Agar $f(x)$ funksiya uchun $\forall x[a;b]$ da $f(x) \geq 0$ bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

bo'ladi.

5^0. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun $\forall x[a;b]$ da $f(x) \leq g(x)$ bo'lsa, u holda.

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \qquad (17.5)$$

bo'ladi.

6^0. O'rta qiymat haqidagi teorema. *Agar* $f(x)$ *funksiya* $[a;b]$ *segmentda berilgan va uzluksiz bo'lsa, u holda a va b orasida shunday* $\xi(a \leq \xi \leq b)$ *nuqta topiladiki,*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \qquad (17.6)$$

bo'ladi.

Isbot. Teoremaning shartidan *f(x)* funksiyaning *[a;b]* segmentda chegaralanganligi kelib chiqadi:

$m \leq f(x) \leq M \ (\forall x \in [a;b])$.

Aniq integralning yuqorida keltirilgan xossalaridan foydalanib topamiz:

$$m \leq f(x) \leq M \Rightarrow \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx \Rightarrow m\int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq$$

$$\leq M\int_a^b dx \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

$$\left(чунки \int_a^b dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} 1 \cdot \Delta x_k = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \lim_{\lambda \to 0} (b-a) = (b-a) \right).$$

Demak,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Bu tengsizliklarni *b* - *a* ga bo'lsak, unda ushbu

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$$

tengsizlik hosil bo'ladi. Yana *f(x)* funksiyaning *[a; b]* segmentda uzluksiz bo'lganligidan, *a* va *b* orasida shunday $\xi(a<\xi<b)$topiladiki,

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}=f(\xi)$$

bo'ladi. Bu tenglikdan esa

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

7°. *f(x)* funksiya *[a; b]* segmentda berilgan va uzluksiz bo'lsin. Ravshanki, bu funksiya *[a, x]* $(a\le x\le b)$ da ham uzluksiz bo'ladi. Demak,

$$\int_a^x f(t)dt$$

mavjud. Agar *[a; b]* segmentdan olingan har bir *x* ga $\int_a^x f(t)dt$ ni mos qo'ysak:

$$F: x\to\int_a^x f(t)dt$$

unda funksiya hosil bo'ladi. Uni *F (x)* orqali belgilaylik:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \qquad (17.7)$$

Bu *F(x)* funksiyaning hosilasi berilgan *f(x)* ga teng bo'ladi: *F'(x)= f(x).* Shuni ko'rsatamiz. Argument *x va* Δx orttirma berib, *F(x)* funksiyaning mos orttirmasini topamiz:

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt.$$

Aniq integralning 3°- xossasiga ko'ra

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

bo'ladi. Unda

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

bo'ladi. Demak,

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$ integralga o'rta qiymat haqidagi

teoremani qo'llasak,

$$\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)(x+\Delta x - x) = f(\xi)\Delta x$$

$(\xi \in (x, x+\Delta x))$ bo'ladi va natijada F(x) funksiya orttirmasi uchun ushbu

$$F(x+\Delta x) - F(x) = f(\xi)\Delta x \quad (\xi \in (x, x+\Delta x))$$

tenglikka kelamiz. Bu tenglikdan esa

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(\xi) \qquad (17.8)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Ma'lumki, $\Delta x \to 0$ da

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

nisbatning limiti *F'(x)* bo'ladi (hosila ta'rifini eslang):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

$\Delta x \to 0$ da $\xi \in (x, x+\Delta x)$ bo'lganligi sababli $\xi \to x$. Berilishiga ko'ra $f(x)$ funksiya uzluksiz. Demak, $\xi \to x$ da

$$f(\xi) \to f(x).$$

Yuqoridagi (17.8) tenglikda $\Delta x \to 0$ da limitga o'tib,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi)$$

ushbu

$$F'(x) = f(x)$$

tenglikka kelamiz. Demak,

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$$

funksiyaning hosilasi integral ostidagi funksiyaning *x* nuqtadagi qiymati *f(x)* ga teng bo'lar ekan:

$$F'(x) = \left(\int_{a}^{x} f(t)dt \right)' = f(x).$$

Bu uzluksiz funksiyalar uchun har doim boshlang'ich funksiya mavjud bo'lishini bildiradi.

5-§. Aniq integrallarni hisoblash

1^0. Aniq integralni ta'rifga ko'ra hisoblash. Ma'lumki,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi)\Delta x_k .$$

Demak, $\lambda \to 0$ $\left(\lambda = \max_k \{\Delta x_k\}\right)$ da

$$\delta = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$$

yig'indining limitini topish bilan berilgan *f(x)* funksiyaning aniq integrali $\int_a^b f(x)dx$ ni hisoblash mumkin.

Misol. $\int_a^b \sin x dx$ integral hisoblansin. Bu integral uchun integral yig'indi δ ni tuzamiz. *[a; b]* segmentni ushbu

$$a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, ..., a + k\frac{b-a}{n}, ..., a + n\frac{b-a}{n} = b$$

nuqtalar yordamida *n* ta teng bo'lakka bo'lib, har bir

$$\left[a + k\frac{b-a}{n}; a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right] (k = 0,1,2,...,n-1)$$

bo'lakda ξ_k nuqtani

$$\xi_k = a + (k+1)\frac{b-a}{n} \ (x = 0,1,2,...,n-1)$$

deb olamiz. Berilgan funksiyaning integral yig'indisini tuzamiz:

$$\delta = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left[a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right]\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left[a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right].$$

Ma'lumki,

$$2\sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta).$$

Bu formuladan foydalanib topamiz:

$$\sin\left[a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right] = \frac{1}{2\sin\frac{b-a}{2n}} 2\sin\frac{b-a}{2n} \cdot \sin\left[a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{b-a}{2n}}\left\{\cos\left[a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right] - \cos\left[a + \left(k + \frac{3}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right]\right\}.$$

U holda $\delta = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left[a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right] =$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\sin\frac{b-a}{n}}\left\{\cos\left[a+\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right]-\cos\left[a+\left(k+\frac{3}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right]\right\} =$$

$$= \frac{b-a}{n}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{b-a}{2n}}[\cos\left(a+\frac{1}{2}\frac{b-a}{n}\right)-\cos\left(a+\frac{3}{2}\cdot\frac{b-a}{n}\right)+$$

$$+\cos\left(a+\frac{3}{2}\frac{b-a}{n}\right)-\cos\left(a+\frac{5}{2}\frac{b-a}{n}\right)+\ldots+\cos\left(a+\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)-$$

$$-\cos\left(a+\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)] =$$

$$= \frac{\frac{b-a}{2n}}{\sin\frac{b-a}{2n}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}\frac{b-a}{n}\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}\frac{b-a}{n}\right)\right]$$

bo‘ladi. Bu tenglikda $\lambda = \frac{b-a}{n} \to 0$ da limitga o’tib topamiz:

$$\lim_{\lambda\to 0}\delta = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\frac{b-a}{2n}}{\sin\frac{b-a}{2n}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}\frac{b-a}{n}\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}\frac{b-a}{n}\right)\right] = \ = \cos a - \cos b$$

(bunda $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ va *y=cosx* funksiyaning uzluksizligidan foydalandik). Demak,

$$\int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b.$$

2°. Nyuton - Leybnits formulasi. *f(x)* funksiya *[a, b]* segmentda berilgan va uzluksiz bo’lsin. Bunday *f(x)* funksiya ushbu boshlang’ich

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

funksiyaga ega. Ma’lumki, *f(x)* funksiyaning ixtiyoriy boshlang’ich *F(x)* funksiyasi berilgan boshlang’ich *F(x)* funksiyadan o’zgarmas qo’shiluvchiga farq qilar edi (qaralsin, 16- bob, 1-§)

$\Phi(x) = F(x) + C$ (C – o’zgarmas son).

Demak,

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Bu tenglikda, $x=a$ da

$$\Phi(a)=\int_a^a f(t)dt+C=C. \qquad (17.9)$$

$x=b$ da

$$\Phi(b)=\int_a^b f(t)dt+C \qquad (17.10)$$

bo'lishini topamiz. Natijada (17.9) va (17.10) tengliklardan

$$\int_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a) \qquad (17.11)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu *Nyuton - Leybnits formulasi* deyiladi.

(17.11) tenglikning o'ng tomonidan *F(b)-F(a)* ayirmani $\Phi(x)\Big|_a^b$ kabi yoziladi. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a)=\Phi(x)\Big|_a^b.$$

Nyuton - Leybnits formulasi yordamida $\int_a^b f(x)dx$ aniq integrallar quyidagicha hisoblanadi:

Avvalo *f(x)* funksiyaning aniqmas integrali

$\int f(x)dx$

topiladi. Aytaylik, bu integral topilib, *F(x)* ga teng bo'lsin:

$\int f(x)dx=\Phi(x).$

So'ng bu funksiyaning *a* va *b* nuqtalardagi qiymatlari hisoblanib, *F(b) – F(a)* ayirma topiladi. Bu qiymat Nyuton - Leybnits formulasiga ko'ra $\int_a^b f(x)dx$ integralning qiymati bo'ladi.

Misollar. 1. $\int_0^{\pi/2}\cos x dx$ integral hisoblansin.

Avvalo bu *f(x)=cosx* funksiyaning aniqmas integralini hisoblaymiz:

$\int \cos x dx=\sin x+C$

Demak, *F(x) = sinx.*

Nyuton - Leybnits formulasiga ko'ra

$$\int_a^b \cos x dx=\sin x\Big|_0^{\pi/2}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1.$$

2. $\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3+x}}$ integral hisoblansin.

Bu $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3+x}}$ funksiyaning aniqmas integrali

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3+x}} = \int (3+x)^{-\frac{1}{2}} d(3+x) = \frac{(3+x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} C =$$

$$= \frac{(3+x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{3+x} + C$$

bo'ladi. Nyuton - Leybnits formulasidan foydalanib topamiz:

$$\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3+x}} = 2\cdot\sqrt{3+x}\Big|_1^6 = 2\left(\sqrt{3+6}-\sqrt{3+1}\right) = 2(3-2) = 2/$$

3. $\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2}$ integral hisoblansin.

Ravshanki,

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C.$$

Unda

$$\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a}\Big|_a^{a\sqrt{3}} = \frac{1}{a}\left(arctg\frac{a\sqrt{3}}{a} - arctg\frac{a}{a}\right) =$$

$$= \frac{1}{a}\left(arctg\sqrt{3} - arctg1\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12a}$$

bo'ladi.

4. $\int_0^1 xe^{-x^2}$ integral hisoblansin.

Bu integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int_0^1 xe^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)d\left(-x^2\right) = -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2}d(-x^2) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-1}-e^0\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}-1\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

6-§. Aniq integralni hisoblash usullari

1°. Bo'laklab integrallash usuli. Aytaylik, *u=u(x)* va *v=v(x)* funksiyalar *[a; b]* segmentda aniqlangan, uzluksiz *u'(x)* va *v'(x) h*osilalarga ega bo'lsin. Ravshanki, $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Demak, *u(x) v(x)* funksiya *u'(x)v(x)+u(x)v'(x)* funksiyaning boshlang'ich funksiyasi. Nyuton - Leybnits formulasiga binoan

$$\int [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]dx = (u(x)v(x))_a^b$$

bo'ladi. Agar

$$\int_a^b [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]dx = \int_a^b v(x)u'(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx = = \int_a^b v(x)du(x) + \int_a^b u(x)dx(x)$$

bo'lishini e'tiborga olsak, u holda

$$\int_a^b v(x)du(x) + \int_a^b u(x)dv(x) = [u(x)v(x)]_a^b$$

bo'lib, bundan esa

$$\int_a^b u(x)dv(x) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)du(x) \qquad (17.12)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu tenglik *aniq integralni bo'laklab integrallash formulasi* deyiladi.

Misol. Ushbu $\int_e^{e^2} x\ln x dx$ integral hisoblansin.

Bu integralni hisoblashda (17.12) formuladan foydalanamiz. *u=lnx, dv=xdx* deb topamiz: $du = \frac{1}{x}dx,\ v = \frac{x^2}{2}$. Unda (17.12) formulaga ko'ra

$$\int_e^{e^2} x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_e^{e^2} - \frac{1}{2}\int_e^{e^2} x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^4\ln e^2 - e^2\ln e - \frac{x^2}{2}\Big|_e^{e^2}\right] = \frac{1}{2}\left[2e^4 - e^2 - \frac{e^4}{2} + \frac{e^2}{2}\right] = \frac{1}{4}(3e^2 - 1)e^2$$

bo'ladi. Demak,

$$\int_e^{e^2} x\ln x dx = \frac{1}{4}(3e^2 - 1)e^2.$$

2°. O'zgaruvchilarni almashtirish usuli. *f(x)* funksiya *[a; b]* segmentda berilgan va uzluksiz bo'lsin. Ushbu

$$\int_a^b f(x)dx$$

integralni hisoblash talab etilsin. Bu integralda $x=\varphi(t)$ deymiz. $\varphi(t)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha,\ \beta]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz;

2) $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b;$

3) $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha,\ \beta]$ segmentda uzluksiz $\varphi'(t)$ *h*osilaga ega bo'lsin. U holda

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

bo'ladi.

Misol. Ushbu integral hisoblansin:

$$\int_{\pi/2}^{\pi/3}\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx.$$

Bu integralda *sinx=t* deb olamiz. Natijada *cosxdx=dt* ni va

t o'zgaruvchi $\left[\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ da o'zgarishini topamiz. Demak,

$$\int_{\pi/2}^{\pi/3}\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx=\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2}\frac{dt}{t^3}=\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2}t^{-3}dt=\left.\frac{t^{-3+1}}{-3+1}\right|_{1/2}^{\sqrt{3}/2}=-\left.\frac{1}{2t^2}\right|_{1/2}^{\sqrt{3}/2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}-4\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{-8}{3}=\frac{4}{3}.$$

7-§. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash

f(x) funksiya murakkab bo'lsa (tabiiyki, uning boshlang'ich funksiyasini topish qiyin bo'ladi), unda berilgan funksiyaning integralini taqribiy hisoblashga to'g'ri keladi.

1^0. To'g'ri to'rtburchaklar formulasi. *f(x)* funksiya *[a; b]* segmentda berilgan va uzluksiz bo'lsin. Bu funksiyaning aniq integrali

$$\int_a^b f(x)dx$$

ni taqribiy ifodalovchi formulani keltiramiz.

$[a,b]$ segmentni $x_0=a<x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n=b$

nuqtalar yordamida *n* ta teng bo'lakka bo'lamiz. Ravshanki, bu holda

$$\Delta x_k=x_{k+1}-x_k=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\frac{b-a}{n}\quad (k=0,1,2,...,n)$$

bo'ladi. Berilgan *f(x)* funksiyaning x_k nuqtadagi qiymati $f(x_k)$ ni hisoblab, *f(x)* ning $[x_k, x_{k+1}]$ segment bo'yicha aniq integralini quyidagicha

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx f(x_k)\Delta x_k = f(x_k)\frac{b-a}{n}$$

taqribiy ifodalaymiz. Bunday taqribiy formulani har bir $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$ segmentga nisbatan yozib, so'ng ularni hadlab qo'shib topamiz:

$$\int_a^{x_1} f(x)dx \approx f(x_0)\frac{b-a}{n}, \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \approx f(x_1)\frac{b-a}{n}, \quad \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx \approx f(x_2)\frac{b-a}{n},$$

…… ……. …… …….

$$\int_{x_{n-1}}^{b} f(x)dx \approx f(x_{n-1})\frac{b-a}{n}, \quad \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{n}\left[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right].$$

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right] = = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k). \qquad (17.13)$$

Bu (17.13) formula *to'g'ri to'rtburchaklar formulasi* deyiladi.

2°. Trapetsiyalar formulasi. *[a; b]* segmentni yuqoridagidek *n* ta teng bo'lakka bo'lib, *f(x)* funksiyaning segment bo'yicha olingan aniq integralini quyidagicha

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}\Delta x = \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}\frac{b-a}{n}$$

taqribiy ifodalaymiz. Bunday taqribiy formulani har bir $[x_k;\ x_{k+l}]$ (k=0, 1, 2, ... , p - 1) segmentga nisbatan yozib, so'ng ularni hadlab qo'shib topamiz:

$$\int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{n}\left[\left(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)\right] =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right].$$

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]. \qquad (17.14)$$

Bu (17.14) formula *trapetsiyalar formulasi* deb ataladi.

3°. Parabolalar (Simpson) formulasi. *f(x)* funksiya *[a; b]* segmentda berilgan va uzluksiz bo'lsin. *[a; b]* segmentni

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b$$

nuqtalar yordamida *2p* ta teng bo'lakka bo'lamiz. *f(x)* funksiyaning $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ segment bo'yicha aniq integralini quyidagicha

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})\right]$$

taqribiy ifodalaymiz. Bunday taqribiy formulalarni har bir $[x_{2k}, x_{2k+1}]$ (k = 0, 1, 2, ... , n - 1) segmentga nisbatan yozib, so'ng ularni hadlab qo'shib topamiz:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \int_{x_4}^{x_6} f(x)dx + ... + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{6n}[\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right) + \left(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right) +$$

$$+\left(f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)\right) + ... + \left(f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\right)] =$$

$$= \frac{b-a}{6n}[f(x_0) + f(x_{2n}) + 4\left(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + ... + f(x_{2n-1})\right) +$$

$$+2\left(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + ... + f(x_{2n-2})\right)].$$

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}[(f(x_0) + f(x_{2n}) + 4(f(x_1) + f(x_3) + ... + f(x_{2n-1})) +$$

$$+2(f(x_2) + f(x_4) + ... + f(x_{2n-2}))]. \qquad (17.16)$$

Bu (16.15) formula *parabolalar (Simpson) formulasi* deyiladi.

Misol. $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ aniq integral taqribiy hisoblansin.

[0; 1] segmentni ushbu $x_0 = 0, x_1 = 0{,}2,\ x_2 = 0{,}4,\ x_{03} = 0{,}6,\quad x_4 = 0{,}8,\ x_5 = 1{,}0$ nuqtalar yordamida 5 ta teng bo'lakka bo'lamiz. So'ng $f(x) = e^{-x^2}$ funksiyaning shu nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(x_0) = f(0) = e^0 = 1{,}00000,$$
$$f(x_1) = f(0{,}2) \approx 0{,}96079,$$

$$f(x_2) = f(0{,}4) \approx 0{,}85214,$$
$$f(x_3) = f(0{,}6) \approx 0{,}69768,$$
$$f(x_4) = f(0{,}8) \approx 0{,}52769,$$
$$f(x_5) = f(1) \approx 0{,}36788.$$

Berilgan $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ integralni to'g'ri to'rtburchaklar, trapetsiya hamda Simpson formulalari bo'yicha taqribiy hisoblaymiz.

a) to'g'ri to'rtburchaklar formulasi bo'yicha

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1+0}{5}\left[f(0)+f(0{,}2)+f(0{,}4)+f(0{,}6)+f(0{,}8)+f(1)\right]=$$

$$=\frac{1}{5}\left(1{,}00000+0{,}96079+0{,}85214+0{,}69768+0{,}52729\right)==\frac{1}{5}\left(4{,}03790\right)=0{,}80758$$

bo'ladi. Demak, $\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0{,}80758$

b) trapetsiyalar formulasi bo'yicha

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \frac{1-0}{2\cdot 5}\left[f(0)+f(0{,}2)+f(0{,}4)+f(0{,}6)+f(0{,}8)+f(1)\right]=$$

$$=\frac{1}{10}\left[1{,}00000+2\cdot 0{,}96079+2\cdot 0{,}85214+2\cdot 0{,}69768+0{,}52729\right]==0{,}74805$$

bo'ladi. Demak, $\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0{,}74805;$

v) Simpson formulasi bo'yicha $\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0{,}74682$ bo'ladi.

Mavzu bo'yicha tekshirish uchun savollar:

1. Aniq integral qanday amaliy masalalarni yechish zarurati tufayli kelib chiqqan?
2. Aniq integralning asosiy xossalarini ayting?
3. Aniq integralning geometric ma'nosini tushuntiring?
4. Nyuton – Leybines formulasini keltirib chiqaring?
5. Aniq integralni hisoblashning asosiy usullari aytib bering?
6. Aniq integrallarni taqribiy hisoblashlarda qo'llanilishi to'rtburchaklar, trapetsiya, Simpson formulalarini aytib, ularni bir-biridan afzlallik, aniqlik tomonlarini tushuntiring?

Kalit so'zlar

Aniq integral, xossalari, Nyuton – Leybines, hisoblash usullari, taqribiy hisoblash-da qo'llanilishi, to'rtburchak, trapetsiya, Simpson.

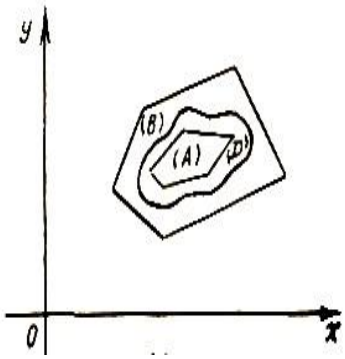
Xulosa

Aniq integral, aniq integralning xossalari, egri chiziqli trapetsiya yuzasini hisoblash, Darbu yig'indisi, Nyuton – Leybines formulasi, aniq integralni hisoblash usullari, aniq integrallarni taqribiy hisoblashlarda qo'llanilishi, to'rtburchaklar, trapetsiya, Simpson formulalari o'rganilgan.

XVIII BOB. ANIQ INTEGRALNING BA'ZI TATBIQLARI

1-§. Tekis shaklning yuzi va uning aniq integral orqali ifodalanishi.

Tekislikda biror yopiq chiziq bilan chegaralangan *(D)* shakl berilgan bo‘lsin (123-chizma). Bunday shaklning yuzi tushunchasi bilan tanishamiz. Bu tushuncha o‘rta maktab matematika kursidan ma'lum bo‘lgan faktlar - ko‘pburchaklarning yuzga ega bo‘lishi va ularning yuzining hisoblanishiga asoslangan. Berilgan *(D)* shaklning ichiga *(A)* ko‘pburchak chizamiz. Bu ko‘pburchakning yuzi *A* bo‘lsin. Bunday ko‘pburchaklar yuzlaridan iborat to‘plam *{A}* bo‘lsin[2].



123 – chizma.

Xuddi shunga o‘xshash, *(D)* shaklni o‘z ichiga olgan *(B)* ko‘pburchakni (tashqi chizilgan ko‘pburchakni) chizamiz. Uning yuzi *B* bo‘lsin. Bunday ko‘pburchak yuzlaridan iborat to‘plam *{B}* bo‘lsin.

Natijada *{A}* va *{B}* — musbat sonlar to‘plamlari hosil bo‘ladi. *{A}* to‘plam yuqoridan, *{B}* to‘plam esa quyidan chegaralangan bo‘ladi. Unda *{A}* to‘plamning aniq yuqori chegarasi sup *{A}*, *{B}* to‘plamning aniq quyi chegarasi inf *{B}* mavjud.

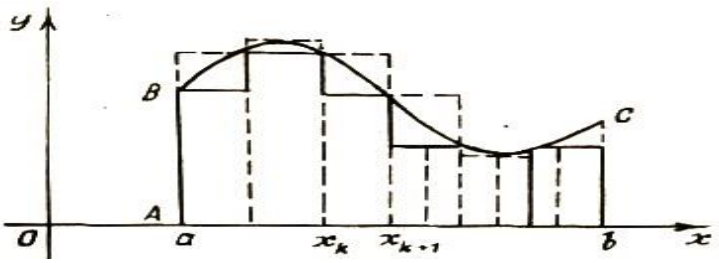
18.1-ta'rif. *Agar*

$$\sup\{A\} = \inf\{B\}$$

bo‘lsa, u holda (D) shakl yuzga ega deb ataladi va D=sup(A)=inf{B} miqdor (D) shaklning yuzi deyiladi.

y=f(x) funksiya *[a; b]* segmentda aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, $\forall x \in [a, b]$da $f(x) \geq 0$ bo‘lsin.

(D) shakl yuqoridan *f(x)* funksiya grafigi, yon tomonlardan *x=a, x=b* to‘g‘ri chiziqlar, pastdan *Ox* o‘qi bilan chegaralangan shakl *ABCE* egri chiziqli trapetsiyadan iborat bo‘lsin (124-chizma).



124-chizma.

Shu *ABCE* egri chiziqli trapetsiya yuzga ega. *[a; b]* segmentni

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n \div a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < x_{k+1} < x_n = b$ nuqtalar bilan *p* ta bo‘lakka bo‘lamiz. Berilgan *f(x)* funksiyaning $[x_k; x_{k+1}]$ dagi eng katta qiymati M_k, eng kichik kiymati esa m_k bo‘lsin. Ravshanki,

$\zeta_k \in [x_k; x_{k+1}]$ uchun

$$m_k \le f(\xi_k) \le M_k \qquad (18.1)$$

bo‘ladi.

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ nuqtalardan *Oy o‘q*iga parallel chiziqlar o‘tkazib, ularni *f(x)* funksiya grafigi bilan kesishguncha davom ettiramiz. Natijada *ABCD* egri chiziqli trapetsiya egri chiziqli trapetsiyalarga ajraladi (124-chizmaga qarang).

Har bir bo‘lakchada asosi $[x_k; x_{k+1}]$, balandliklari esa m_k va M_k bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklar yasaymiz.

Balandliklari m_k bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklar *(D)* shakl -*ABCE* egri chiziqli trapetsiya ichiga chizilgan ko‘pburchak bo‘lib, uning yuzi

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \quad (\Delta x_k = x_{k+1} - x_k) \qquad (18.2)$$

bo‘ladi. Balandliklari M_k bo‘lgan barcha to‘g‘ri to‘rtburchaklar *ABCE* egri chiziqli trapetsiyani o‘z ichiga olgan ko‘pburchak bo‘ladi. Uning yuzi esa

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k \qquad (18.3)$$

ga teng. Yuqoridagi (18.1), (18.2) va (18.3) munosabatlardan

$$s \le \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \le S$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Agar *[a; b]* segmentning turli usullar bilan *p* ta bo‘lakka bo‘linishlari olinsa, unda yuqoridagidek mos *s va S* yig‘indilarni tuzish mumkin va ulardan {s} va *{S}* to‘plamlarni hosil qilish mumkin. Bu to‘plamlar uchun sup {s}, inf *{S}* mavjud bo‘ladi.

Ko‘rsatish mumkinki, inf *{S}* = sup {s} bo‘lib,

$$\int_a^b f(x)dx = \inf\{S\} = \sup\{s\}$$

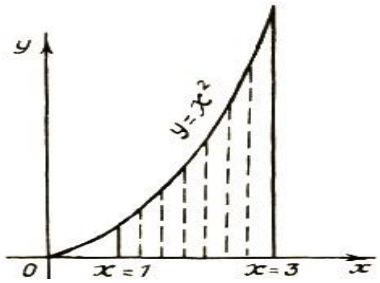
bo‘ladi.

Demak, *(D)* shakl - *ABCE* egri chiziqli trapetsiyaning yuzi

$$D = \int_a^b f(x)dx \qquad (18.4)$$

bo‘ladi.

Misol. Yuqoridan $y=x^2$ parabola, yon tomonlardan $x=1$, $x=3$ vertikal to‘g‘ri chiziqlar va pastdan *Ox* o‘qi bilan chegaralangan shaklning yuzi topilsin (125-chizma).



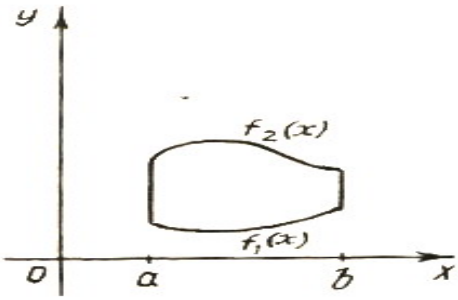
125 – chizma.

Yuqorida keltirilgan (18.4) formuladan foydalanib topamiz:

$$D = \int_1^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1}{3} = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}$$ kv. birlik.

Tekislikdagi *(D)* shakl - yuqoridan $f_2(x)$ funksiya grafigi, yon tomonlardan $x=a$, $x=b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan, pastdan $f_1(x)$ funksiya grafigi bilan chegaralangan shakl bo‘lsin. Bunda $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalar *[a; b]* segmentda uzluksiz va $\forall x \in [a;b]$ uchun

$f_1(x) \geq 0$ $f_2(x) \geq 0$ $f_1(x) \geq f_2(x)$ (126-chizma).

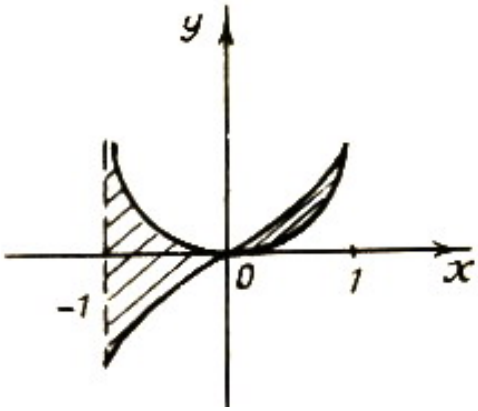


126 – chizma.

Bunday shaklning yuzi ushbu formula bilan topiladi:

$$D=\int_a^b f_2(x)dx-\int_a^b f_1(x)dx=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx. \qquad (18.5)$$

Misol. Pastdan $f_1(x)=x^3$ funksiya grafigi, yon tomonlardan x= -1, x= 1 vertikal to‘g‘ri chiziqlar, yuqoridan $f_2(x)=x^2$ funksiya grafigi bilan chegaralangan shaklning yuzi topilsin (127-chizma).



127 – chizma.

Bu shaklning yuzi (18.5) formulaga ko‘ra

$$D=\int_{-1}^{1}\left(x^2-x^3dx\right)$$

bo‘ladi.

Integralni hisoblaymiz:

$$D=\int_{-1}^{1}\left(x^2-x^3\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^2\right)dx-\int_{-1}^{1}\left(x^3\right)dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1}-\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1}=$$

▼

$$=\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{3}$$ kv. birlik.

2-§. Yoy uzunligi va uning aniq integral orqali ifodalanishi

Biror $y = f(x)$ funksiya $[a; b]$ segmentda berilgan va uzluksiz bo‘lsin.

Bu funksiya grafigi 128–chizmada(barcha shakllar darslikning 450-470 betlarida berilgan) tasvirlangan $\breve{AB}$ egri chiziq - yoyni ifodalasin. Egri chiziq uzunligi tushunchasi bizga ma'lum bo‘lgan faktlar - siniq chiziqning uzunlikka (perimetrga) ega bo‘lishi hamda uni hisoblay olinishiga asoslanadi.

[a; b] segmentni x_0, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < < x_n = b)$ nuqtalar bilan n ta bo‘lakka bo‘lamiz. Bu nuqtalardan *Oy o‘q*iga parallel chiziqlar o‘tkazib, ularni

$\breve{A}B$ egri chizig‘i bilan kesishguncha davom ettiramiz. Kesishish nuqtalari A_k $(k=0, 1, 2, \ldots, n-1, p;\ A_0 = A,\ A_n = B)$ bo‘lsin. Ravshanki, bu nuqtalarning koordinatalari $(x_k, f(x_k))$ bo‘ladi: $A_k(x_k, f(x_k))$. $\breve{A}B$ yoyidagi bu nuqtalarni bir-biri bilan to‘g‘ri chiziq kesmalari yordamida birlashtiramiz. Natijada $\breve{A}B$ yoyiga chizilgan siniq chiziq hosil bo‘ladi. Mazkur kursning 11-bob, 2-§ida keltirilgan ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasidan foydalanib siniq chiziq perimetrini hisoblaymiz:

$$L = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (f(x_1) - f(x_0))^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (f(x_2) - f(x_1))^2} +$$
$$+ \ldots + \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2} + \ldots +$$
$$+ \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + (f(x_n) - f(x_{n-1}))^2} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2}$$

Demak, $\breve{A}B$ yoyiga chizilgan siniq chiziq perimetri

$$L = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2} \qquad (x_0 = a,\ x_n = b)$$

bo‘ladi. Avvaldagidek $\lambda = \max_k \{\Delta x_k\}$ deymiz.

17.2-ta'rif. $\breve{A}B$ *yoyga chizilgan siniq chiziq perimetri*

$$L = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2} \qquad (18.6)$$

$\lambda \to 0$ *da chekli limitga ega bo‘lsa,* $\breve{A}B$ *yoy uzunlikka ega deyiladi va bu limit*

$$\lim_{\lambda \to 0} L = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2} = l \qquad (18.7)$$

$\breve{A}B$ *yoyning uzunligi deyiladi.*

Yuqorida aytilgan *f(x)* funksiya *[a; b]* segmentda uzluksiz *f(x) h*osilaga ega bo‘lsin. Unda har bir $[x_k, x_{k+1}]$ segmentda *f(x)* funksiya Lagranj teoremasining shartlarini qanoatlantiradi.

Lagranj teoremasiga ko‘ra

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\eta_k)(x_{k+1} - x_k) \quad (x_k < \eta_k < x_{k+1})$$

bo‘ladi.

Natijada $\breve{A}B$ yoyga chizilgan siniq chiziq perimetri quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$L = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2} = = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + f'^2(\eta_k)(x_{k+1} - x_k)^2} =$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2\left[1+f'^2(\eta_k)\right]}=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\left[1+f'^2(\eta_k)\right]}(x_{k+1}-x_k)==\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\left[1+f'^2(\eta_k)\right]}\Delta x_k. \qquad (18.8)$$

Qaralayotgan *f(x)* funksiya *[a; b]* segmentda uzluksiz *f(x)* *ho*silaga ega bo‘lganligi sababli ushbu

$$\sqrt{1+f'^2(x)}$$

funksiya ham uzluksiz bo‘ladi. Shuning uchun $\sqrt{1+f'^2(x)}$ funksiyaning integral yig‘indisi

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\left[1+f'^2(\eta_k)\right]}\Delta x_k$$

$\lambda\to 0$ da

$$\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

ga intiladi:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\left[1+f'^2(\eta_k)\right]}\Delta x_k=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx. \qquad (18.9)$$

Natijada (18.7), (18.8) va (18.9) munosabatlardan

$$l=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, $\breve{A}B$ yoyning uzunligi aniq integral yordamida quyidagi formula bilan topiladi:

$$l=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx \qquad (18.10)$$

Misol. $f(x)=e^x$ $(0\le x\le 1)$ funksiya grafigi tasvirlangan yoy uzunligi topilsin.

Yuqoridagi (18.10) formulaga ko‘ra izlanayotgan yoy uzunligi

$$l=\int_0^1 e^x dx$$

bo‘ladi. Bu integralni hisoblab topamiz:

$$l=\int_0^1 e^x dx=e^x\Big|_0^1=e-1.$$

Mavzu bo’yicha tekshirish uchun savollar:

1. Tekis shaklning yuzini aniq integral orqali hisoblash bo’yicha tushuncha bering?
2. Aniq integral yordamida yuzalarni hisoblash formulalarini yozing?
3. Yoy uzinligini hisoblash formulalarini yozing?

Kalit so'zlar:

Tekis shakl, segmentd, yuza, yoy uzinligi.

Xulosa

Tekis shaklning yuzalarini , yoy uzinligini hisoblash formulalari isbotlanib, ularga doir misollar yechib ko'rsatilgan.

XIX BOB. XOSMAS INTEGRALLAR

1-§. Chegaralari cheksiz xosmas integrallar

f(x) funksiya $[a;+\infty]$ oraliqda berilgan va uzluksiz bo'lsin. Bu funksiyaning $[a;+\infty]$ oraliqning istalgan chekli $[a;+\infty]$ $(a < y < +\infty$ qismidagi

$$\int_a^y f(x)dx$$

integral y *ga* bog'liq bo'ladi:

$$F(y) = \int_a^y f(x)dx$$

Shunday qilib, berilgan *f(x)* funksiya yordamida *F(y)* funksiya hosil bo'ladi.

18.1-ta'rif. *Agar* $y \to +\infty$ *da F(u) funksiyaning limiti mavjud bo'lsa, bu limit f(x) funksiyaning* $[a;+\infty]$ *oraliqdagi xosmas integrala deb ataladi va*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

kabi belgilanadi:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{y\to+\infty} F(y) = \lim_{y\to+\infty}\int_a^y f(x)dx.$$

Bunday $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral *chegarasi cheksiz xosmas integral* deb ham aytiladi.

Agar $y \to +\infty$ *da* $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ *funksiyaning limiti mavjud va chekli bo'lsa, u holda* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi.*

Agar $y \to +\infty$ *da F(x) funksiyaning limita cheksiz bo'lsa, u holda f(x)dx xosmas integral uzoqlashuvchi deb ataladi.*

Aytaylik, *f(x)* funksiya $(-\infty;a]$ $yoki$ $(-\infty;+\infty)$ oraliqda berilgan va uzluksiz bo'lsin. Bu funksiyaning $(-\infty;a]$ va $(-\infty;+\infty)$ oraliqlar bo'yicha xosmas integral-

lari ham yuqoridagi kabi ta'riflanadi:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{y\to-\infty}\int_{y}^{a} f(x)dx(-\infty < y < a);$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{y\to-\infty\\ t\to+\infty}}\int_{y}^{t} f(x)dx(-\infty < y < t < +\infty).$$

Misollar. 1. $\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx$ xosmas integral hisoblansin.

Chegarasi cheksiz xosmas integral ta'rifidan foydalanib topamiz:

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx = \lim_{y\to+\infty}\int_0^{y} e^{-2x}dx = \lim_{y\to+\infty}\frac{-1}{2}\int_0^{y} e^{-2x}d(-2x) = -\frac{1}{2}\lim_{y\to+\infty} e^{-2x}\Big|_0^{y} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{y\to+\infty}\left(e^{-2y} - e^{0}\right) = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}.$$

Demak, berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi va

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx = \frac{1}{2}.$$

2. $I = \int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}(\alpha > 0, a > 0$ integral hisoblansin.

Agar $\alpha > 1$ bo‘lsa, u holda $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim\limits_{y\to+\infty}\int_0^{y} x^{-\alpha}\,dx$

$$\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)\Bigg|_a^{y} = \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right) = \frac{-1}{1-\alpha}a^{1-\alpha}$$

bo‘ladi. Bu esa $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ xosmas integralning yaqinlashuvchiligini bildiradi.

Agar $\alpha < 1$ $\alpha < 1$ bo‘lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{y\to+\infty}\int_a^{y} x^{-\alpha}dx = \lim_{y\to+\infty}\left(y^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right)\frac{1}{1-\alpha} = +\infty$$

bo‘ladi. Xosmas integral uzoqlashuvchi. Agar $\alpha = 1$ bo‘lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{y\to+\infty}\int_a^{y}\frac{dx}{x} = \lim_{y\to+\infty}(\ln y - \ln a) = +\infty$$

bo‘ladi. Bu integral uzoqlashuvchi.

Shunday qilib, berilgan $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}(\alpha > 0, a > 0$ xosmas integral $\alpha > 1$ bo‘lganda yaqinlashuvchi, $\alpha < 1$ bo‘lganda uzoqlashuvchi bo‘ladi.

2-§. Yaqinlashuvchi xosmas integralning xossalari

Xosmas integrallar ham aniq integrallarga o‘xshash xossalarga ega. Biz ularni isbotsiz keltiramiz.

1°. *Agar f*(x) *funksiyaning* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *xosmas integrali yaqinlashuvchi bo'lsa, bu funksiyaning* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ $(a < v < +\infty$ *xosmas integrali ham yaqinlashuvchi bo'ladi va aksincha. Bunda*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx$$

bo'ladi.

2°. *Agar* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *yaqinlashuvchi va k o'zgarmas son bo'lsa, unda* $\int_a^{+\infty} kf(x)dx$ *ham yaqinlashuvchi bo'ladi va*

$$\int_a^{+\infty} kf(x)dx = k\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

3°. Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *va* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *integrallar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda* $\int_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)dx$ *integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi va*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

4°. Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *yaqinlashuvchi bo'lib,*$\forall x \in [a; +\infty]$ *uchun f(x)≥0 bo'lsa, u holda*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \geq 0$$

bo'ladi.

5°. *Agar* ,$\forall x \in [a; +\infty]$ *uchun f(x)≤g(x)* bo'lib $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *va* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *integrallar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

bo'ladi.

f(x) va *g(x)* funksiyalar $[a; +\infty]$ oraliqda berilgan va uzluksiz bo'lib, ,$\forall x \in [a; +\infty]$ uchun *f(x)*>0, *g(x)*>0 va *f(x)<g(x)* bo'lsin. U holda $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ integralning yaqinlashuvchi bo'lishidan $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integralning yaqinlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.

Misol. $\int_a^{+\infty} e^{-x^2}dx$ xosmas integral yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

Ixtiyoriy $x \geq 1$ bo'lganda

$$e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

integral yaqinlashuvchi. Unda yuqorida aytilganiga ko‘ra

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

integral ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Ma'lumki,

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

integral mavjud. Unda integralning 1^0-xossasidan foydalanib,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

quyidagi

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

xosmas integralning yaqinlashuvchi bo‘lishini topamiz.

3-§. Chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrallari

f(x) funksiya *[a; b)* yarim intervalda berilgan va uzluksiz bo‘lib, *(t, b)* da *(a<t<b)* chegaralanmagan bo‘lsin. Bu funksiyaning *[a; b)* ning istalgan *[a; t]* qismidagi *(a<t<b)* $\int_a^t g(x)dx$ integrali *t* ga bog‘liq bo‘ladi:

$$\Phi(t) = \int_a^t f(x)dx.$$

18.2-ta'rif. *Agar* $t \to b-0$ *da F(t)* funksiyaning *limiti mavjud bo‘lsa, bu limit chegaralanmagan f(x) funksiyaning [a; b) oraliqdagi xosmas integral deb ataladi va*

$$\int_a^b f(x)dx$$

kabi belgilanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b-0} \Phi(t) = \lim_{t \to b-0} \int_a^t f(x)dx.$$

Agar $t \to b-0$ *da* $F(t) = \int_a^t g(x)dx$ *ning limiti mavjud va chekli bo‘lsa, u holda* $\int_a^t g(x)dx$ *xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi.*

Agar $t \to b-0$ *da F(t) funksiyaning limiti cheksiz bo‘lsa, u holda* $\int_a^t g(x)dx$ *xosmas integral uzoqlshiuvchi deyiladi.*

Chegaralanmagan *f(x)* funksiyaning *(a; b]* (yoki *(a; b))* oraliq bo‘yicha xosmas integrali ham yuqoridagidek ta'riflanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a+0}\int_t^b f(x)dx \qquad (a<t<b);$$

$$\left(\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{y\to b-0\\ t\to a+0}}\int_t^y f(x)dx\right) \qquad (a<t<b);$$

Misollar. 1. Ushbu $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ integral yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

x=1 nuqta atrofida $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ funksiya chegaralanmagan. Demak, berilgan integral chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali. Ta'rifga ko‘ra

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to l-0}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

bo‘ladi. Agar

$$\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\int_0^t (1-x)^{-\frac{1}{3}}d(1-x) = -\left[\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_0^t =$$

$$= -2\left[(1-t)^{\frac{1}{2}} - (1-0)^{\frac{1}{2}}\right] = 2-2\sqrt{1-t}$$

bo‘lishini e'tiborga olsak, unda

$$\lim_{t\to l-0}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to l-0}(2-2\sqrt{1-t}) = 2$$

bo‘lib,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2$$

ekanligini topamiz. Demak, berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi va u 2 ga teng.

2. $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ integralni qaraylik.

x=0 nuqta $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiyaning mahsus nuqtasi. Xosmas integral ta'rifiga ko‘ra

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to+0}\int_t^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to+0}[\ln 1 - \ln t] = +\infty$$

bo‘ladi. Demak, berilgan xosmas integral uzoqlashuvchi.

3. Ushbu

$$A=\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \quad B=\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha>0)$$

integrallar yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

Bu chegaralanmagan funksiyalarning xosmas integralaridir.

a) $\alpha \neq 1$ bo‘lsin. Bu holda

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{t\to a-0}\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{t\to a+0}\int_t^b (x-a)^{-\alpha} d(x-a) =$$

$$= \lim_{t\to a+0}\left[\frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_t^b = \lim_{t\to a+0}\frac{1}{1-\alpha}\left[(b-a)^{1-\alpha}-(t-a)^{1-\alpha}\right]$$

bo‘lib, bu limit α<0 bo‘lganda chekli, α>1 bo‘lganda esa cheksiz bo‘ladi.

b) α =1 bo‘lsin. Bu holda

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{t\to a+0}\int_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{t\to a+0}\int_t^b \frac{d(x-a)}{x-a} = \lim_{t\to a+0}\left[\ln(t-a)\right]_t^b = \infty$$

bo‘ladi. Demak,

$$A=\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \quad (\alpha>0)$$

integral α>1 bo‘lganda yaqinlashuvchi, α ≥ 1 bo‘lganda esa uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Xuddi shunga o‘xshash,

$$B=\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha>0)$$

xosmas integral α<1 bo‘lganda yaqinlashuvchi, α>1 bo‘lganda esa uzoqlashuvchi bo‘lishi ko‘rsatiladi.

Chegaralanmagan funksiya xosmas integrallari ham ushbu bobning 1, 2-§ da bayon etilgan chegaralari cheksiz xosmas integrallarning xossalari kabi xossalarga ega bo‘ladi.

Mavzu bo’yicha tekshirish uchun savollar:

1. Chegaralari cheksiz(Ⅰ-chi tur) xosmas integrallar va Ⅱ-chi tur chegaralanmagan (Ⅲ-chi tur) funksiyalarning xosmas integrallari haqida tushuncha bering?
2. Chegaralari cheksiz Ⅰ-chi tur xosmas integrallar qachon yaqinlashuvch bo’ladi?
3. Yaqinlashuvchi xosmas integralning xossalarini ayting?
4. Chegaralanmagan Ⅱ-chi tur xosmas integrallarni yaqinlashuvchiligini tekshirish usullarini ayting?

Kalit so’zlar:

Chegaralari cheksiz, Ⅰ-chi tur xosmas integral, chegaralanmagan funksiyalar, Ⅱ-chi tur xosmas integral, yaqinlashuvchi, xossalari, usullari.

Xulosa

Chegaralari cheksiz xosmas integrallarni va chegaralanmagan funksiyalarning xosmas integrallarini yaqinlashuvchi bo'lishini tekshirish usullari bayyon etilgan, ularga doir misollar yechib ko'rsatlgan.

XX BOB. IKKI ARGUMENTLI FUNKSIYALAR

1-§. Ikki argumentli funksiya tushunchasi

Mazkur kursning **X - X|X** boblarida *y=f(x)* funksiya, uning differensial va integral hisobi o‘rganildi. Bu funksiya bitta *x* argumentgagina bog‘liq edi. Odatda bunday funksiyalar bir argumentli funksiyalar deyiladi.

Tabiatda, fan tarmoqlarida uchraydigan ko‘pchilik funksiyalar bitta argumentga bog‘liq bo‘lmay, balki ko‘p argumentlarga bog‘liq bo‘ladi. Misol qaraylik.

Misol. Tomonlari *x va y (x≥ 0;y≥ 0) ga* teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi

$$S = x \cdot y \qquad (20.1)$$

bo‘ladi. Ravshanki, S yuz *x* va y *o‘*zgaruvchilarga bog‘liq. Bu *x* va y ning turli qiymatlariga ko‘ra (20.1) formula yordamida ularga mos S ning qiymatlari topiladi.

Shunga o‘xshash misollarni ko‘plab keltirish mumkin. Ikki argumentli funksiyalarni o‘rganishni R^2 to‘plam va uning ba'zi bir qism to‘plamlari tushunchalarini keltirishdan boshlaymiz.

Barcha haqiqiy sonlar to‘plami *R* ni olaylik. Bu to‘plamdan ixtiyoriy ikki *x* va y sonlarni olib, ular yordamida *(x,y)* juftlikni tuzamiz. Barcha shunday juftliklar to‘plamini, ya'ni

$$\{(x, y): x \in R,\ y \in R\}$$

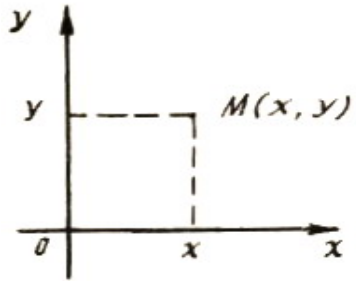
to‘plamni R^2 orqali belgilaymiz: $R^2 = \{(x, y): x \in R,\ y \in R\}$

R^2 to‘plamning elementi (juftlikni) shu to‘plamning *nuqtasi* deb ataladi.

Aytaylik, $(x_1; y_1) \in R^2$, $(x_2; y_2) \in R^2$ bo‘lsin. Agar $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ bo‘lsa, u holda R^2 to‘plamning $(x_1; y_1)$ va $(x_2; y_2)$ nuqtalari bir-biriga teng deb ataladi:

$(x_1; y_1)=(x_2; y_2)$

Tekislikda to‘g‘ri burchakli *Oxu* Dekart koordinatalar sistemasini olib, *Ox o‘q*i bo‘yicha *x o‘*zgaruvchining qiymatlarini $(x \in R)$, *Oy o‘q*i bo‘yicha y *o‘*zgaruvchining qiymatlarini $(y \in R)$ joylashtiramiz. Unda $(x; y)((x; y) \in R^2)$ juftlik tekislikda bitta *M=M(x;y)* nuqtani aniqlaydi (129-chizma). Bunda *x-M* nuqtaning *birinchi koordinatasi (abssissasi)*, *y-M* nuqtaning *ikkinchi koordinatasi (ordinatasi)* bo‘ladi.



129 – chizma.

Yuqorida aytilganlarni hamda ushbu kursning «Analitik geometriya» deb nomlangan bo‘limidagi ma'lumotlarni e'tiborga olib, R^2 to‘plam geometrik nuqtai nazardan tekislikni ifodalashini payqaymiz.

R^2 to‘plamning ixtiyoriy ikki $(x_1; y_1)$ va $(x_2; y_2)$ nuqtalarini olaylik. Ma'lumki, ushbu

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

miqdor $(x_1; y_1)$ va $(x_2; y_2)$ nuqtalar orasidagi *masofa* deyilar edi. Uni $d((x_1; y_1), (x_2; y_2))$ kabi belgilaymiz.

$$d((x_1; y_1), (x_2; y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(qarang, 1-bob, 2-§). Masofa uchun quyidagi xossalar o‘rinlidir.

1^0. $d((x_1; y_1), x_2; y_2) \geq 0$ va

$d((x_1; y_1), (x_2; y_2)) = 0 \Leftrightarrow (x_1; y_1) = (x_2; y_2)$,

2^0. $d((x_1; y_1), (x_2; y_2)) = d(x_2; y_2), (x_1; y_1)$,

3^0. $d((x_1; y_1), (x_3; y_3)) \leq d((x_1; y_1), (x_2; y_2)) + d((x_2; y_2), (x_3; y_3))$, $((x_3; y_3) \in R^2)$

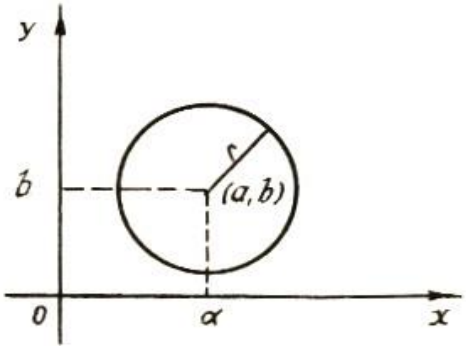
Endi R^2 to‘plamning ba'zi bir qism to‘plamlariga misollar keltiramiz.

Tekislikning, ya'ni R^2 to‘plamning *(a; b)* nuqtasini hamda *r>0* sonni olaylik.

1. Tekislikning shunday *(x;y)* nuqtalari to‘plamini qaraymizki, ularning *x va y* koordinatalari $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2$ tengsizlikni qanoatlantirsin. Bunday nuqtalar to‘plami *yopiq doira* deb ataladi va quyidagicha belgilanadi(130-chizma):

$$\{(x, y) \in R^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2\} \qquad (20.2)$$

$(a;b)$ Bunda nuqta *doira markazi, r* esa *radius* deb ataladi.



130 – chizma.

2. Tekislikning shunday *(x,y)* nuqtalari to‘plamini qaraylikki, ularning *x* va *y* koordinatalari

$$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$$

tengsizlikni qanoatlantirsin. Bunday nuqtalar to‘plami *ochiq doira* deb ataladi va

$$\{(x,y)\in R^2:(x-a)^2+(y-b)^2<r^2\} \qquad (20.3)$$

kabi belgilanadi.

3. Ushbu

$$\{(x,y)\in R^2:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\}$$

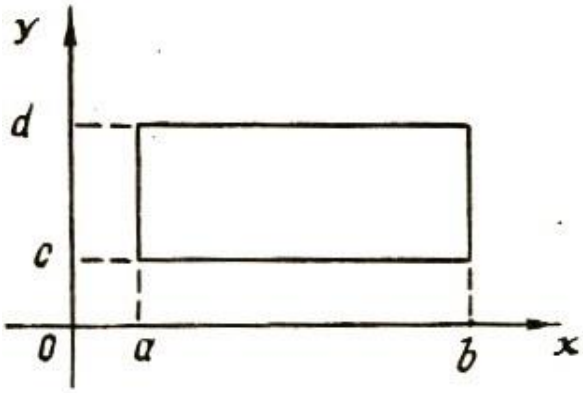
to‘plam markazi *(a; b)* nuqtada, radiusi *r* ga teng bo‘lgan *aylana* deb ataladi (qarang, 4-bob, 1-§). Bu aylana (20.2) va (20.3) doiralarning chegarasi bo‘ladi.

4. Tekislikning shunday *(x;y)* nuqtalari to‘plamini qaraylikki, ularning *x* va y koordinatalari

a≤x≤b, c≤y≤d (a, b, c, d - haqiqiy sonlar), tengsizliklarni qanoatlantirsin. Bunday nuqtalar to‘plami *yopiq to‘g‘ri to‘rtburchak* deb ataladi va

$$\{(x,y)\in R^2: a\le x\le b,\quad c\le y\le d\}$$

kabi belgilanadi (131-chizma).



131 – chizma.

5. Tekislikning shunday *(x;y)* nuqtalari to‘plamini qaraylikki, ularning *x* va y koordinatalari

$$a<x<b, \quad c<y<d$$

tengsizliklarni qanoatlantirsin. Bunday nuqtalar to‘plami *ochiq to’g’ri to‘rtburchak* deb ataladi va

$$\{(x, y) \in R^2 : a < x < b, \quad c < y < d\}$$

kabi belgilanadi.

2-§. Tekislik nuqtalaridan iborat ketma-ketlik va uning limiti

Har bir natural *n* songa tekislikda bitta $(x_n; y_n)$ nuqtani mos qo‘yuvchi qoidaga ega bo‘laylik. Shu qoidaga binoan:

$$(x_1; y_1), (x_2; y_2), (x_3; y_3), ..., (x_n; y_n), ...$$

to‘plamga kelamiz. Bu to‘plam *tekislik nuqtalaridan iborat ketma-ketlik* deb ataladi va $\{(x_n; y_n)\}$ kabi belgilanadi. Har bir $(x_n; y_n)$ $(n.= 1, 2, 3, ...)$ nuqta ketma-ketlikning hadi deb ataladi.

Misollar.

1. $(1;1), \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right), ..., \left(\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right), ...$

2. $(1;1), (1;2), (1;3), ..., (1, n), ...$

3. $(1;1), (-1;-1), , (1;1), ...$

Tekislik nuqtalaridan iborat biror $\{(x_n; y_n)\}::(x_1; y_1), (x_2; y_2), (x_3; y_3), ..., (x_n; y_n)$ ketma-ketlik hamda biror *(a; b)* nuqta berilgan bo‘lsin.

20.1-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday natural n_0 soni topilsaki, barcha uchun $n > n_0$

$$d((x_n; y_n), (a;b)) < \varepsilon \qquad (20.4)$$

tengsizlik bajarilsa, *(a; b)* $(x_n; y_n)$ nuqta ketma-ketlikning *limiti* deb ataladi va

$$\lim_{n\to\infty}(x_n; y_n) = (a; b)$$

kabi yoziladi.

Bu ta'rifdagi (20.4) tengsizlikni quyidagicha

$$\sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \varepsilon$$

ham yozish mumkin.

Misol. Ushbu $\left\{\left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right)\right\} : (1;1), \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right), ..., \left(\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right), ...$ ketma-ketlikning limiti (0; 0) bo‘ladi. $\forall \varepsilon > 0$ songa ko‘ra Haqiqatan deyilsa, unda $n_0 = \left[\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\right] + 1$ ham $\forall n > n_0$ uchun

$$d((x_n, y_n), (a;b)) = d\left(\left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right), (0, 0)\right) =$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{n}-0\right)^2+\left(\frac{1}{n}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\sqrt{2}}{n}<\frac{\sqrt{2}}{n_0}=\frac{\sqrt{2}}{\left[\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\right]+1}<\varepsilon$$

bo‘ladi. Bu esa berilgan ketma-ketlikning limiti (0; 0) ekanini bildiradi.

Aytaylik, $\{(x_n;\, y_n)\}:(x_1;\, y_1),(x_2;\, y_2),(x_3;\, y_3),\ldots,(x_n;\, y_n),\ldots$ ketma-ketlikning limiti *(a; b)* bo‘lsin:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n)=(a;\ b).$$

Ketma-ketlik limiti ta'rifiga ko‘ra $\forall\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday natural n_0 soni topiladiki, barcha $p > p_0$ uchun

$$d((x_n;\, y_n),(a;\, b))<\varepsilon,$$

ya'ni

$$\sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-a)^2}<\varepsilon$$

bo‘ladi. Ravshanki, bu tengsizlikdan quyidagi

$$|x_n-a|<\varepsilon,\ |y_n-b|<\varepsilon$$

tengsizliklar kelib chiqadi. Bu esa 10-bob, 3-§ da keltirilgan sonlar ketma-ketligining limiti ta'rifiga binoan

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\ \lim_{n\to\infty}y_n=b$$

bo‘lishini bildiradi.

Shunday qilib, tekislik nuqtalaridan iborat $\{(x_n;\, y_n)\}$ ketma-ketlikning limiti *(a, b)* bo‘lsa, u holda bu ketma- ketlikning koordinatalaridan iborat $\{x_p\}$ va $\{y_p\}$ sonlar ketma-ketligi ham limitga ega bo‘ladi. Ularning limiti *(a; b)* nuqtaning mos koordinatalariga teng bo‘ladi:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n;y_n)=(a;b)\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\\ \lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\end{cases}$$

Endi tekislik nuqtalaridan iborat $\{(x_n;\, y_n)\}$ ketma- ketlik berilgan bo‘lib, uning koordinatalaridan tuzilgan $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketliklari mos ravishda *a* va *b* limitlarga ega bo‘lsin:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\ \lim_{n\to\infty}y_n=b\ . \qquad (20.5)$$

Sonlar ketma-ketligi limiti ta'rifiga ko‘ra $\forall\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday natural n_0 son topiladiki, $\forall\varepsilon>0$ $n>n_0$ uchun bo‘ladi.

Shuningdek, son olinganda ham shunday natural son $|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ $n_0^{'}$ topiladiki, $n>n'_0$ uchun $|y_n-b|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ bo‘ladi. Agar n_0 va n_0 natural sonlarning kattasini n_0^* deyilsa, unda barcha uchun bir yo’la

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

tengsizliklar bajariladi. Bu tengsizliklardan fondalanib topamiz:

$$\sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2 \bullet \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon$$

Demak,

$$d((x_n,\ y_n),\quad (a,\ b)) = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \varepsilon$$

Bundan, limit ta'rifiga binoan

$$\lim_{n\to\infty}(x_n;\ y_n) = (a,\ \mathbf{b})$$

bo’lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, tekislik nuqtalaridan iborat *{(*x_n*; *y_n*)}* ketma-ketlikning koordinatalaridan tuzilgan *{*x_n*}* va *{*y_n*}* sonlar ketma-ketliklarining limiti *(a; b)* nuqtaning mos koordinatalariga teng bo’lsa, u holda *{(*x_n*;*y_n*)}* ketma- ketlikning limiti *(a, b)* bo’ladi:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$
$$\lim_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n; y_n) = (a,\ b) \qquad (20.6)$$

20.1-natija. Yuqoridagi (20.5) va (20.6) munosabatlardan

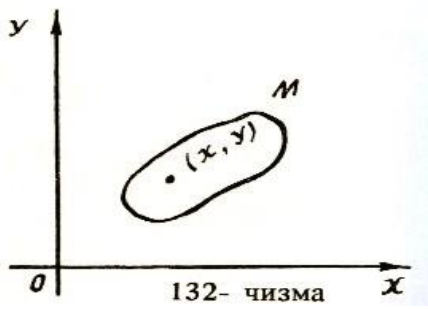
$$\lim_{n\to\infty}(x_n;\ y_n) = (a,\ b) \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \end{array}$$

bo’lishi kelib chiqadi.

Bu holat tekislik nuqtalaridan tuzilgan *{(*x_n*; *y_n*)}* ketma-ketlik limitini o’rganishni uning koordinatalaridan iborat *{*x_n*}* va *{*y_n*}* sonlar ketma-ketliklarining limitini o’rganishga kelishini ko’rsatadi. Biz sonlar ketma-ketliklarining limitini 10-bob, 3-§ da batafsil o’rgangan edik.

3-§. Ikki argumentli funksiya va uning limiti

Tekislikda biror *M* to‘plam berilgan bulsin (132-chizma).



132- чизма

20.2-ta'rif. Agar *M* to'plamdan olingan har bir *(x;y)* nuqtaga biror qoida yoki qonunga ko'ra bitta haqiqiy *z* soni mos qo'yilgan bo'lsa, u holda *M* to'plamda *ikki argumentli funksiya* berilgan deb ataladi. Uni

$$z = f(x; y)$$

kabi yoziladi. Odatda *M* to'plam funksiyaning *aniqlanish sohasi* deb ataladi. *x* va *y* (erkli o'zgaruvchilar) *funksiya argumentlari*, *z* esa *x* va *y* ning *funksiyasi* deyiladi.

Misollar. 1. Tekislikdagi har bir *(x; y)* nuqtaga shu nuqta koordinatalari *x* va *y* ning k¢paytmasini mos qo'yadigan qoida berilgan bo'lsin.

Natijada

$$z = f(x, y) = x \cdot y$$

funksiyaga ega bo'lamiz.

2. Quyidagi funksiyalar ikki argumentli funksiyalarga misoldir:

3.

$$z = x^2 + y^2,\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Tekislikdagi *M* to'plamda biror *z=f(x,y)* funksiya berilgan b¢lsin. *M* to'plamdan $(x_0; y_0)$ nuqtani olamiz. Funksiya shu $(x_0;y_0)$ nuqtaga bitta z_0 sonni mos qo'yadi. Bu z_0 son *z = f(x, y)* funksiyaning $(x_0;y_0)$ nuqtadagi q*iymati* deb ataladi va $z_0=f(x_0,y_0)$ kabi yoziladi.

Koordinatalari x_0, y_0, z_0 bo'lgan (x_0, y_0, z_0) nuqta fazodagi nuqtani ifodalaydi (qarang 6-bob, 1-§).

Barcha *(x, y, z)* nuqtalardan iborat to'plam *z = f(x, y)* funksiyaning *grafigi* deb ataladi.

Misollar. $z = x^2 + y^2$ funksiya R^2 to'plamda yani XOY tekislikdagi barcha nuqtalarda aniqlangan.

2. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ funksiyani qaraylik. Bu funksiyaning aniqlanish sohasini topamiz:

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1^2$$

Demak, barilgan funksiya markazi (0, 0) nuqtada, radiusi 1 ga teng yopiq doirada aniqlangan.

$z=f(x, y)$ funksiya M to'plamda berilgan bo'lib, x va y o'zgaruvchilarning har biri (α, β) intervalda berilgan funksiyalar bo'lsin:

$$x=\varphi(t),$$
$$y=\psi(t) \qquad (t\in(\alpha, \beta)).$$

Bunda t o'zgaruvchi (α, β) oraliqda o'zgarganda mos x va y lardan tuzilgan (x, y) juftliklar M to'plamga tegishli bo'lsin. Natijada ushbu

$$z=f(x, y)=f(\varphi(t), \psi(t))$$

funksiyaga ega bo'lamiz. Bu holda 2 o'zgaruvchi t o'zgaruvchining *murakkab funksiyasi* deb ataladi.

20.3-ta'rif. Markazi (x_0, y_0) nuqtada, radiusi $\varepsilon(\forall\varepsilon>0)$ ga teng bo'lgan ochiq doira $(x_0; y_0)$ nuqtaning *atrofi (doiraviy atrofi)* deb ataladi va $U_2(x_0, y_a))$ kabi belgilanadi:

$$U_\varepsilon=((x_0, y_0))=\{(x,y)\in R^2:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\varepsilon^2\}.$$

Agar $(x_a; y_0)$ nuqtaning har bir atrofida M to'plamning $(x_0; y_0)$ nuqtadan farqli kamida bitta nuqtasi bo'lsa, u holda $(x_0; y_a)$ nuqta M to'plamning *limit nuqtasi* deb ataladi.

Misollar. 1 . $M=\{(x,y)\in R^2: x^2+y^2\le 1\}$ to'plamning har bir nuqtasi shu to'plamning limit nuqtasi bo'ladi.

2. $P=\{(x;y)\in R^2: x^2+y^2<1\}$ to'plamni qaraylik. Bu to'plamning barcha nuqtalari $\{(x;y)\in R^2: x^2+y^2=1\}$ hamda to'plamning ham barcha nuqtalari berilgan R to'plamning limit nuqtalari bo'ladi.

Agar $(x_0; y_0)$ nuqta M to'plamning limit nuqtasi bo'lsa, u holda

1) nuqtaning $(x_0;y_0)$ har bir atrofida M to'plamning cheksiz ko'p nuqtalari bo'ladi,

2) M to'plamning nuqtalaridan (x_0, y_0) nuqtaga intiluvchi $\{(x_n;y_n)\}$ $((x_n;y_n)\,ketma-ketliklarni\ \ n=1,2,3,...)$ ajratish mumkin:

$$\lim_{x\to\infty}(x_n;y_n)=(x_0;y_0).$$

Tekislikda biror M to'plam berilgan bo'lib, $(x_0; y_0)$ nuqta M to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. Shu to'plamda $z=f(x, y)$ funksiya aniqlangan.

20.4-ta'rif. Agar M to'plamning nuqtalaridan tuzilgan $(x_0; y_0)$ ga intiluvchi har qanday $\{(x_p; y_p)\}$ ketma-ketlik olinganda ham mos $\{f(x_n, y_n)\}$ ketma-ketlik har doim bitta A songa intilsa, bu A son $f(x,y)$ funksiyaning $(x_0; y_0)$ nuktadagi *limita* deb ataladi va

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \qquad (20.7)$$

kabi yoziladi.

Funksiya limitini quyidagicha ta'riflasa ham bo'ladi.

20.5-ta'rif. Arap $\forall\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $\delta>0$ son topilsaki, $d((x;y),\ (x_0;y_0))<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $(x,y)\in M$ barcha nuqtalar uchun

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

bo'lsa, u holda *A* son *f(x, y)* funksiyaning *(x_0; y_0)* nuqtadagi *limiti* deb ataladi va yuqoridagi (19.7) kabi belgilanadi.

Misol. $f(x, y)=x^2+y^2$ funksiyaning (0; 0) nuqtadagi limiti topilsin.

(0; 0) nuqtaga intiluvchi $\{(x_p;\ y_p)\}$ ketma-ketlikni olamiz:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(0,0)$$

Yukorida aytilganiga ko'ra, bu holda

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0,\qquad \lim_{n\to\infty}y_n=0$$

bo'ladi.

Berilgan funksiyaning (x_n, y_n) dagi qiymatlaridan tuzilgan ketma-ketlik

$$\{f(x_n,y_n)\}=\{x_n^2+y_n^2\}$$

bo'lib,

$$x_n\to 0,\ y_n\to 0\ \partial a\ \ f(x_n,y_n)=x_n^2+y_n^2\to 0$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x^2+y^2)=0$$

Limitga ega bo'lgan funksiyalar qator xossalarga ega.

1°. *Agar limit* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ *mavjud va chekli bo'lsa, u holda f(x, y) funksiya (x_0; y_0) nuqtaning yetarlicha kichik atrofida chegaralangan bo'ladi.*

2°. *Agar* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A,\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}g(x,y)=B$ *limitlar mavjud b¢lsa, u holda f(x,y)±g(x,y) funksiyaning ham limiti mavjud va*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\left[f(x,y)\pm g(x,y)\right]=A\pm B$$

bo'ladi.

3°. *Agar* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A,\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}g(x,y)=B$ *limitlar mavjud bo'lsa, u holda* $f(x,y)\cdot g(x,y)$ *funksiyaning ham limiti mavjud va*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)\cdot\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}g(x,y)=A\cdot B$$

bo'ladi.

4°. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A,\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}g(x,y)=B$ *Agar limitlar mavjud bo'lsa, u h*olda

$\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ *funksiya ham limitga ega va*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{A}{B}$$

bo‘ladi.

4- §. Ikki argumentli funksiyaning uzluksizligi

z=f(x,y) funksiya *M* to’plamda berilgan bo’lib, (x_0, y_0) $((x_0, y_0)\in M)$ nuqta shu *M* to’plamning limit nuqtasi bo’lsin.

20.6-ta'rif. *Agar*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = x_0, y_0 \qquad (20.8)$$

b¢lsa, u holda *f(x, y) funksiya* $(x_0; u_0)$ *nuqtada uzluksiz* deb ataladi.

Funksiya limiti ta'rifini e'tiborga olib, funksiyaning $(x_0;y_0)$ nuqtadagi uzluksizligini quyidagicha ta'riflash mumkin.

20.7-ta'rif. Agar $\forall\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday δ>0 son topilsaki, $d((x;y),(x_0;y_0)) < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $(x,y)\in M$ nuqtalar uchun

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$$

bo’lsa, u holda *f(x,y)* funksiya $(x_0; y_0)$ nuqtada *uzluksiz* deb ataladi.

Funksiya uzluksizligi uning orttirmasi yordamida ham ta'riflanishi mumkin.

M to’plamda $(x_0; y_0)$ nuqta bilan birga $(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y)$ nuqtani $((x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y)\in M)$ olib, bu nuqtalardagi funksiyaning qiymatlari $f(x_0,y_0),\ f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$ ni topamiz. Ushbu

$$\Delta f(x_0,\ y_0) = f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

ayirma *f(x,y)* funksiyaning $(x_0; y_0)$ nuqtadagi *to’liq orttirmasi* deb ataladi.

20.8-ta'rif. Agar argument Δx orttirmalari va Δy nolga intilganda funksiyaning $\Delta f(x_0,y_0)$ to’liq orttirmasi ham nolga intilsa, ya'ni

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x\to 0}} (\Delta f(x_0,\ y_0)) = 0$$

bo’lsa, u holda *f(x,y)* $(x_0;y_0)$ funksiya nuqtada *uzluksiz* deb ataladi.

Agar *f(x,y)* funksiya *M* to’plamning har bir nuqtasida uzluksiz b¢lsa, u holda funksiya shu *M* to’plamda *uzluksiz* deb ataladi.

Misol. funksiyani qaraylik. $f(x,y) = x^2 + y^2$

Ixtiyoriy $(x_0,\ y_0)\in R^2$ nuqtani hamda $(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)$ ni olib, funksiyaning to‘liq orttirmasini hisoblaymiz:

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=(x_0+\Delta x)^2+(y_0+\Delta y)^2-$$
$$-(x_0^2+y_0^2)=x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2+y_0^2+2y_0\Delta y+\Delta y^2-x_0^2-y_0^2=$$
$$=(2x_0+\Delta x)\Delta x+(2y_0+\Delta y)\Delta y.$$

Bundan esa

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta f(x_0,y_0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[(2x_0+\Delta x)\Delta x+(2y_0+\Delta y)\Delta y\right]=0$$

bo‘lishini topamiz. Demak, $f(x,y) = x^2 + y^2$ funksiya R^2 to‘plamda uzluksiz.

20.1-eslatma. Agar yuqoridagi (20.8) munosabat bajarilmasa, u holda *f(x, y)* funksiya (x_0, y_0) nuqtada uzilishga ega deb ataladi. *M* to‘plamda berilgan *f(x, y)* funksiya to‘plamning biror nuqtasida yoki to‘plamdagi biror chiziqda uzilishga ega bo‘lishi mumkin.

Misol. $f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2, \ агар\ ((x,y)\neq(0,0))\ бўлса, \\ 1,\ агар\ ((x,y)=(0,0))\ бўлса \end{cases}$ funksiya (0, 0) nuqtada uzilishga ega bo‘ladi. Haqiqatan ham

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)=0$$

bo‘lib, bu limit berilgan funksiyaning (0; 0) nuqtadagi qiymati *f(0, 0) = 1* ga teng emas:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)\neq f(0,0).$$

Endi ikki argumentli uzluksiz funksiyalarning ba'zi bir xossalarini keltiramiz.

f(x, y) va *g(x, y)* funksiyalar *M* to‘plamda berilgan $(x_0;y_0)\in M$ bo‘lib, bo‘lsin.

1°. *Agar f(x, y) va g(x, y) funksiyalarning har biri* $(x_0; y_0)$ *nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda f(x, y) ± g(x, y) funksiya ham shu* $(x_0; y_0)$ *nuqtada uzluksiz bo‘ladi.*

2°. *Agar f(x, y) va g(x, y) funksiyalarning har biri* $(x_0; y_0)$ *nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda f(x, y).g(x, y) funksiya ham shu* (x_0, y_0) *nuqtada uzluksiz bo‘ladi.*

3°. *Agar f(x, y) va g(x, y) funksiyalarning har biri* (x_0, y_0) *nuqtada uzluksiz bo‘lib, bo‘lsa,* $g(x_0,y_0)\neq 0$ *u holda* $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ *funksiya ham* $g(x_0,y_0)\neq 0$ *shu* $(x_0; y_0)$ *nuqtada uzluksiz bo‘ladi.*

4°. *Agar f(x, y) funksiya chegaralangan yopiq M to‘plamda uzluksiz bo‘lsa, u holda funksiya shu to‘plamda chegaralangan bo‘ladi.*

z=f (x, y) funksiya *M* to‘plamda berilgan bo‘lsin.

20.9-ta'rif. Agar $\forall\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday δ>0 son topilsaki, *M* to‘plamning

$$d((x';y'),(x'';y''))<\delta$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi (x',y') ixtiyoriy va *(x″, y″)* nuqtalari uchun

$$|f(x',y')-f(x'',y'')|<\varepsilon$$

bo‘lsa, *f(x, y)* funksiya *M* to‘plamda *tekis uzluksiz funksiya* deb ataladi.

Ravshanki, *f(x, y)* funksiya *M* to‘plamda tekis uzluksiz bo‘lsa, u shu to‘plamda uzluksiz bo‘ladi.

20.1-teorema (Kantor teoremasi). *Agar f(x, y) funksiya chegaralangan yopiq M to‘plamda berilgan va uzluksiz bo‘lsa, u holda funksiya shu to‘plamda tekis uzluksiz bo‘ladi.*

5-§. Ikki argumentli funksiyaning hosilasi va differensiallari

1. Funksiyaning xususiy hosilalari

z=f(x, y) funksiya $M\subset R^2$ to‘plamda berilgan bo‘lsin. Bu *M* to‘plamda $(x_0; y_0)$ nuqta bilan $(x_0+\Delta x; y_0)$ birga nuqtani olib bu nuqtalarda funksiyaning qiymatlarini hisoblaymiz. So‘ng ushbu

$$f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)$$

ayirmani qaraymiz. Odatda bu ayirma *f(x, y)* funksiyannng $(x_0;y_0)$ *nuqtadagi x o‘zgaruvchi* (argument) *bo‘yicha xususiy orttirmasi* deyiladi va $\Delta_x f(x_0,y_0)$ kabi belgilanadi:

$$\Delta_x f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0).$$

Huddi shunga o‘xshash,

$$\Delta_y f(x_0,y_0)=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

ayirma *f(x, y)* funksiyaning $(x_0; y_0)$ *nuqtadagi y argument bo‘yicha hususiy orttirmasi* deyiladi.

Misollar. 1. *f(x,y)=xy* funksiyaning *x* va y argumentlari bo‘yicha hususiy orttirmalari , $\Delta_x f(x,y)$ ni topilsin. $\Delta_y f(x,y)$ Ta'rifga ko‘ra

$$\Delta_x f(x,y)=f(x+\Delta x,y)-f(x,y),$$
$$\Delta_y f(x,y)=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

bo‘ladi. Bu munosabatlardan foydalanib topamiz:

$$\Delta_x f(x,y)=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=(x+\Delta x)y-xy=xy+y\Delta x-$$
$$-xy=y\Delta x,$$
$$\Delta_y f(x,y)=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=x(y+\Delta y)-xy=$$
$$=xy+x\Delta y-xy=x\Delta y.$$

Demak,

$$\Delta_x f(x,y) = y\Delta x,$$
$$\Delta_y f(x,y) = x\Delta y.$$

2. $f(x,y)=x^2+y^2$ funksiyaning $\Delta_x f$, hususiy orttirmalari

$$\Delta_x f = (x+\Delta x)^2 + y^2 - (x^2+y^2) = 2x\Delta x + \Delta x^2,$$
$$\Delta_y f = x^2 + (y+\Delta y)^2 - (x^2+y^2) = 2y\Delta y + \Delta y^2$$

bo‘ladi

$z=f(x,y)$ funksiya M to‘plamda berilgan bo‘lsin. M to‘plamda (x_0, y_0) nuqta bilan birga $(x_0+\Delta x; y_0)$ va $x_0; y_0+\Delta y$ nuqtalarni ham qaraylik. So‘ng berilgan funksiyaning $(x_0; y_0)$ nuqtadagi hususiy orttirmalarini topamiz:

$$\Delta_x f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0),$$
$$\Delta_y f(x_0,y_0) = f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0).$$

19.10-ta'rif. Agar $\Delta x \to 0$ da

$$\frac{\Delta_x f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

nisbatning limita mavjud bo‘lsa, bu limit $f(x, y)$ funksiyaning (x_0, y_0) *nuqtadagi x argumenta bo‘yicha hususiy hosilasi* deb ataladi va yoki $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ $f'_x(x_0,y_0)$ (qisqacha yoki) kabi belgiladi:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = f'(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f(x_0,y_0)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

Huddi shunga o‘xshash agar $\Delta y \to 0$ da

$$\frac{\Delta_y f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

nisbatning limitn mavjud bo‘lsa, bu limit $f(x, y)$ *funksiyaning* $(x_0; y_0)$ *nuqtadagi u argumenta bo‘yicha hususiy hosilasi* deb ataladi va $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ yoki $f'_y(x_0,y_0)$ (qisqacha yoki) kabi $\frac{\partial f}{\partial y}$ belgilanadi:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = f'_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f(x_0,y_0)}{\Delta y} =$$
$$= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

Keltirilgan ta'rifdan ko‘rinadiki, $z=f(x,y)$ funksiyaning x argumenti bo‘yicha xususiy hosilasini hisoblashda bu funksiyaning y argumentini o‘zgarmas, y argumenti bo‘yicha hususiy hosilasini hisoblashda esa x argumentni o‘zgarmas deb qarash kerak ekan. Demak, $z=f(x,y)$ funksiyaning hususiy hosilalarini hisoblashda mazkur kursning

14-bob, 7-10-§ dagi funksiya hosilasi jadvali hamda hosila hisoblashdagi mazkur qoidalardan foydalanish mumkin.

Misollar. 1. $f(x,y)=x^2+y^2$ funksiyaning hususiy hosilalari quyidagicha bo‘ladi:

$$f_x'(x,y)=\left(x^2+y^2\right)_x'=2x,$$
$$f_y'(x,y)=\left(x^2+y^2\right)_y'=2y.$$

2. $f(x,y)=x^y\ (x>0)$ funksiyaning hususiy hosilalari

$$\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1},\ \frac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x$$

bo‘ladi.

3. $z=arctg\dfrac{x}{y}$ funksiyaning hususiy hosilalari

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{\dfrac{x^2+y^2}{y^2}y^2}=-\frac{x}{x^2+y^2}$$

bo‘ladi.

6-§. Funksiyaning to‘liq orttirmasi formulasi

z=f(x,y) funksiya M to‘plamda berilgan bo‘lsin. *M* to‘plamdagi *(x_0;y_0)* nuqtaning biror atrofida $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ va $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ hususiy hosilalar mavjud bo‘lib, ular *(x_0; y_0)* nuqtada uzluksiz bo‘lsin. Berilgan *z=f(x,y)* funksiyaning *(x_0; u_0)* nuqtadagi orttirmasi ni quyidagicha $\Delta f(x_0,y_0)$ yozib olamiz:

$$\Delta f(x_0,y_0)=\left[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)\right]++\left[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\right]. \qquad (20.9)$$

Lagranj teoremasidan foydalanib topamiz:

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)=f_x'(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x,$$
$$f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0+\theta_1\Delta y)\Delta y$$

$(0<\theta,\theta_1<1)$. Natijada (20.9) tenglik ushbu ko‘rinishga keladi:

$$\Delta f(x_0,y_0)=f_x'(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x++f_y'(x_0,y_0+\theta_1\Delta y)\Delta y. \qquad (20.10)$$

Shartga ko‘ra funksiyaning $f_x^{'}$ va $f_y^{'}$ hususiy hosilalari *(x_0; y_0)* nuqtada uzluksiz. Demak,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_x^{'}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\Delta y)= f_x^{'}(x_0, y_0),$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_y^{'}(x_0, y_0+\theta_1\Delta y)= f_y^{'}(x_0, y_0).$$

Shunday qilib,

$$f_x^{'}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\Delta y)= f_x^{'}(x_0, y_0)+\alpha,$$

$$f_y^{'}(x_0, y_0+\theta_1\Delta y)= f_y^{'}(x_0, y_0)+\beta \qquad (20.11)$$

deb yozish mumkin. Bunda α va β lar Δx va Δy *ga* bog‘liq hamda $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$ da $\alpha\to 0, \beta\to 0$ (20.10) va (20.11) munosabatlardan

$$\Delta f(x_0, y_0)=\left[f_x^{'}(x_0, y_0)+\alpha\right]\Delta x+\left[f_y^{'}(x_0, y_0)+\beta\right]\Delta y=$$

$$= f_x^{'}(x_0, y_0)\Delta x+ f_y^{'}(x_0, y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$$

bo‘lishi kelib chiqqadi. Demak,

$$\Delta f(x_0, y_0)= f_x^{'}(x_0, y_0)\Delta x+ f_y^{'}(x_0, y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y. \qquad (20.12)$$

Bu *funksiya orttirmasining formulasi* deb ataladi.

20.2-natija. Agar *f(x,y)* funksiya *(x_0;y_0)*nuqtada uzluksiz hususiy $f_x^{'}, f_y^{'}$hosilalarga ega bo‘lsa, u holda funksiya shu *(x_0,y_0)* nuqtada uzluksiz bo‘ladi. Haqiqatan ham (20.12) formuladan foydalanib,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta f(x_0, y_0)= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[f_x^{'}(x_0, y_0)\Delta x+ f_y^{'}(x_0, y_0)\Delta y\right]+\alpha\Delta x+\beta\Delta y=0$$

bo‘lishini topamiz. Bu esa *f(x, y)* funksiyaning *(x_0; y_0)* nuqtada uzluksiz ekanini bildiradi.

7-§. Ikki argumentli funksiyaning differensiali

z=f(x, y) funksiya *M* to‘plamda berilgan bo‘lsin. Bu M to‘plamda *(x_0; y_0)* va $(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)$ nuqtalarni olib, funksiya orttirmasini topamiz:

$$\Delta f(x_0, y_0)= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)- f(x_0, y_0).$$

20.11-ta'rif. Agar *f(x, y)* funksiyaning *(x_0, y_0)* nuqtadagi orttirmasi ushbu

$$\Delta f(x_0, y_0)= A\Delta x_0+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$$

ko‘rinishda ifodalansa, u holda funksiya (x_0, y_0) nuqtada *differensiallanuvchi* deb ataladi, bunda *A*, *B* - o‘zgarmas, α va β esa Δx va Δy ga bog‘liq hamda $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$ da α va β lar ham nolga intiladi.

Misol. *f(x,y)=-xy* funksiyani qaraylik. Bu funksiyaning *(x_0; y_0)* nuqtadagi orttirmasi

$$\Delta f(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) - x_0 y_0$$

bo‘ladi. Uni quyidagicha yozish mumkin:

$$\Delta f(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) - x_0 y_0 = x_0 y_0 + y_0 \Delta x + x_0 \Delta y + \Delta x \Delta y -$$
$$- x_0 y_0 = y_0 \Delta x + x_0 \Delta y + \Delta x \Delta y = A\Delta x + B\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

bu yerda

$$A = y_0,\ B = x_0,\ \alpha = \Delta y, \beta = 0.$$

Demak, berilgan funksiya *(x_0,y_0)* nuqtada differensiallanuvchi *f(x,y)* funksiya (x_0,y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. Ta'rifga ko‘ra

$$\Delta f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\ \Delta x + \beta\ \Delta y \qquad (20.13)$$

bo‘ladi. Bu tenglikda $\Delta x \neq 0,\ \Delta y = 0$ deb topamiz:

$$\Delta_x f(x_0, y_0) = A\Delta x + \alpha\ \Delta x$$

Keyingi tenglikning har ikki tomonini Δx ga bo‘lib,

$$\frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = A + \alpha$$

tenglikka kelamiz. Bundan esa

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha) = A$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak,

$$f'_x(x_0, y_0) = \mathrm{A}$$

Huddi shunga o‘xshash, (20.13) tenglikda $\Delta x = 0,\ \Delta y \neq 0$ deb

$$\Delta'_y f(x_0, y_0) = B\Delta y + \beta\ \Delta y,$$

$$\frac{\Delta_y f(x_0, y_0)}{\Delta y} = B + \beta$$

tengliklarni, so‘ngra

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} (B + \beta) = B$$

$$f'_y(x_0, y_0) = B$$

bo‘lishini topamaz.

Shunday qilib, quyidagi hulosaga kelamiz. Agar *f(x,y)* funksiya *(x_0; y_0)* nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda funksiya shu nuqtada f'_x va f'_y xususiy hosilalarga ega bo‘ladi. Funksiya orttirmasi esa ushbu ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

Agar *f(x,y)* funksiya *(x_0;y_0)* nuqtaning atrofida $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ hususiy hosilalarga ega bo‘lib, bu xususiy hosilalar (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda

f(x,y) funksiya (x_0,y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo‘ladi. Haqiqatan ham yuqoridagi shartlarda *f(x,y)* funksiyaning to‘liq orttirmasi uchun (20.13) formula o‘rinli bo‘ladi. Undan esa funksiyaning differensnallanuvchi bo‘lishi kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, *z=f(x,y)* funksiya $(x_0;\ y_0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. U holda

$$\Delta f(x_0,\ y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y$$

bo‘ladi. Bu ifodadagi

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

yig‘indi *f(x,y)* funksiyaning $(x_0;y_0)$ nuqtadagi *differensiali* deb ataladi va u $df(x_0,\ y_0)$ yoki *dz* kabi belgilanadi:

$$df(x_0,y_0)=dz=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y.$$

Demak, funksiya differensiali funksiya orttirmasining Δx va Δy ga nisbatan chiziqli bosh qismi. Agar $\Delta x=dx,\ \Delta y=dy$ bo‘lishini e'tiborga olsak, u holda funksiya differensiali ushbu ko‘rinishni
oladi: $dz=df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$

Misol: *z=xy* funksiyaning differensiali

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=ydx+xdy$$

bo‘ladi.

f(x, y) va *g(x, y)* funksiyalar *M* to‘plamda berilgan bo‘lib, $(x_0;\ y_0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. U holda

$$f(x,y)\pm g(x,y)$$
$$f(x,y)\cdot g(x,y)$$
$$\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\ \ (g(x,y)\neq 0)$$

funksiyalar xam shu $(x_0;\ y_0)$ nuqtada differensiallanuvchi va ushbu formulalar o‘rinli bo‘ladi:

$$d[f(x,y)\pm g(x,y)]=df(x,y)\pm dg(x,y),$$
$$d[f(x,y)\cdot g(x,y)]=f(x,y)\cdot dg(x,y)+df(x,y)\cdot g(x,y),$$
$$d\left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right]=\frac{df(x,y)\cdot g(x,y)-f(x,y)\cdot dg(x,y)}{g^2(x,y)}$$

Shuningdek:

$$d[cf(x,y)]=cdf(x,y)\qquad (c-const)$$

bo‘ladi.

8-§. Ikki argumentli funksiyaning yuqori tartibli hususiy hosilalari va differensiallari

z=f(x,y) funksiya *M* to‘plamda berilgan va u $(x,y)\in M$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. Ravshanki, berilgan funksiya *(x; y)* nuqtada $f_x^{'}(x,y),\ f_y^{'}(x,y)$ hususiy hosilalarga ega bo‘ladi. Bu $f(x,y)=x^2y^2$ hususiy hosilalar o‘z navbatida *x* va y *o* ‘zgaruvchilarning funksiyasi bo‘lishi mumkin.

Masalan, funksiyaning hususiy hosilalari

$$f_x^{'}(x,y)=2xy^2,\quad f_y^{'}(x,y)=2x^2y$$

bo‘lib, ular *x* va y *o* ‘zgaruvchilarning funksiyasidir.

19.12- ta'rif. *z=f(x,y)* funksiya hususiy hosilalari $f_x^{'}(x,y)$ va $f_y^{'}(x,y)$ ning hususiy hosilalari berilgan funksiyaning *ikkinchi tartibli hususiy hosilalari* deyiladi va $f_{x^2}^{''},\ f_{xy}^{''},\ f_{y^2}^{''}$ *ёки* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ kabi belgilanadi. Demak,

$$f_{x^2}^{''}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\left(f_x^{'}(x,y)\right)_x^{'}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$f_{xy}^{''}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\left(f_x^{'}(x,y)\right)_y^{'}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$f_{yx}^{''}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\left(f_y^{'}(x,y)\right)_x^{'}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$f_{y^2}^{''}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\left(f_y^{'}(x,y)\right)_y^{'}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

20.2-eslatma. Odatda $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ hususiy hosilalar *aralash hosilalar* deb ataladi. Bu aralash hosilalar *(x; y)* nuqtada uzluksiz bo‘lsa, bir-biriga teng bo‘ladi.

Xuddi yuqoridagidek, *z=f(x,y)* funksiyaning uchinchi, to‘rtinchi va hakazo tartibli hususiy hosilalari ta'riflanadi.

Misol. $f(x,y)=x^2+y^2+x^2y^2$ funksiyaning ikkinchi tartibli hususiy hosilalari topilsin.

Avvalo berilgan funksiyaning hususiy hosilalarini topamiz:

$$\frac{\partial lf}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+x^2y^2\right)=2x+2xy^2,$$

$$\frac{\partial tf}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+x^2y^2\right)=2y+2x^2y.$$

Funksiyaning ikkinchi tartibli hususiy hosilalari quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2x+2xy^2\right)=2+2y^2=2\left(1+y^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(2y+2x^2y\right)=2+2x^2=2\left(1+x^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(2x+2xy^2\right)=4xy.$$

Faraz qilaylik, *z=f(x, y)* funksiya *M* to‘plamda berilgan bo‘lib, $(x,y)\in M$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. Ma'lumki, funksiyaning differensiali

$$df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad (20.14)$$

bo‘ladi.

20.13-ta'rif. *z=f(x,y)* funksiyaning *(x; y)* nuqtadagi differensiali *df(x,y)* ning differensiali berilgan funksiyaning *ikkinchi tartibli differensiali* deb ataladi va kabi $d^2 f(x,y)$ belgilanadi.

Demak,

$$d^2 f(x,y)=d(df(x,y)).$$

Endi *f(x,y)* funksiya differensialining (20.14) ifodasidan foydalanib, *f(x,y)* funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali ifodasini topamiz:

$$d^2 f(x,y)=d(df(x,y))=d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)=$$

$$=d\left(\frac{df}{\partial x}\right)dx+d\left(\frac{df}{\partial y}\right)dy.$$

Agar

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dy=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dy,$$

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy,$$

va

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

bo‘lishini e'tiborga olsak, u holda

$$d^2 f(x,y)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dy\right)dx+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial yx}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)dy=$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2=$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

bo‘ladi. Demak,

$$d^2 f(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

Huddi yuqoridagidek, *z=f(x,y)* funksiyaning uchinchi, to‘rtinchi va hakazo tartibli differensiallari ta'riflanadi va ularning ifodalari topiladi.

Ikki argumentli funksiya uchun ham Teylor formulasini yozish mumkin. Quyida bunday formulani kelgirish bilangina kifoyalanamiz.

z=f (x, y) funksiya $(x_0; y_0)$ nuqtaning

$$U_\delta((x_0,y_0))=\{(x,y)\in R^2 : d((x,y),(x_0,y_0))<\delta\}$$

atrofida berilgan bo‘lib, unda funksiya birinchi, ikkinchya va hokazo *(n+1)*-tartibli uzluksiz hususiy hosilalarga ega bo‘lsin. U holda

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)+$$

$$+\frac{1}{2}[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0)+$$

$$+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2]+...+\frac{1}{n!}[\frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial x^n}(x-x_0)^n+$$

$$+C_n^1\frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial x^{n-1}\partial y}(x-x_0)^{n-1}(y-y_0)+...+\frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial y^n}(y-y_0)^n]+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}[\frac{\partial^{n+1} f(x_0+\theta_1(x-x_0),y_0+\theta_2(y-y_0))}{\partial x^{n+1}}(x-x_0)^{n+1}+$$

$$+...+\frac{\partial^{n+1} f(x_0+\theta_1(x-x_0),y_0+\theta_2(y-y_0))}{\partial y^{n+1}}(y-y_0)^{n+1}]$$

$$(0<\theta_1,\theta_2<1)$$

bo‘ladi. Bu formula *ikki argumentli funksiyaning Teylor formulasi* deb ataladi.

9-§. Ikki argumentli funksiyaning ekstremum qiymatlari

z=f(x,y) funksiya M to‘plamda berilgan $(x_0,y_0)\in M$ bo‘lib, bo‘lsin.

20.14-ta'rif. Agar $(x_0; y_0)$ nuqtaning M to‘plamga tegishli shunday

$$U_\delta((x_0,y_0))=\{(x,y)\in R^2 : d((x,y),\ (x_0,y_0))<\delta\}$$

atrofi topilsaki,

$$\forall(x,y)\le U_\delta(x_0,y_0)$$

uchun

$$f(x,y)\le f(x_0,y_0)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda *f(x,y)* funksiya *(x_0;y_0)* nuqtada *maksimum qiymatga erishadi* deyiladi. *(x_0;y_0)* nuqta funksiyaga *maksimum qiymat beradigan nuqta, f(x_0,y_0)* esa *funksiyaning maksimum qiymati* deyiladi. Uni

$$\max\{f(x,y)\}((x,y)\in U_\delta(x_0,y_0))$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$f(x_0,y_0)=\max\{f(x,y)\}.$$

20.15-ta'rif. Agar *(x_0;y_0)* nuqtaning *M* to‘plamga tegishli bo‘lgan shunday

$$U_\delta((x_0,y_0))=\{(x,y)\in R^2 : d((x,y),\ (x_0,y_0))<\delta\}$$

atrofi topilsaki,

$$\forall(x,y)\le U_\delta(x_0,y_0)$$

uchun

$$f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda *f(x,y) funksiya (x_0,y_0) nuqtada minimum qiymatga erishadi* deb ataladi. *(x_0; y_0) nuqta funksiyaga minimum qiymat beradigan nuqta, f(x_0,y_0)* esa *funksiyaning minimum qiymati* deyiladi. Uni

$$\min\{f(x,y)\}((x,y)\in U_\delta(x_0,y_0))$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$f(x_0,y_0)=\min\{f(x,y)\}.$$

Funksiyaning maksimum va minimumi umumiy nom bilan uning *ekstremumi* deyiladi.

10-§. Funksiya ekstremumining zaruriy sharti

z=f(x,y) funksiya *M* to‘plamda berilgan bo‘lib, (x_0; y_0) nuqtada ekstremumga, aytaylik maksimumga erishsin. Unda *(x_0;y_0)* nuqtaning $U_\delta(x_0,y_0)$ atrofidagi ixtiyoriy *(x;y)* nuqtalar uchun $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$ bo‘ladi. Jumladan, $(x;y_0)\in U_\delta(x_0,y_0)$ uchun ham $f(x,y_0)\le f(x_0,y_0)$ bo‘ladi. Bu hol bir argumentli *f(x,y_0)* funksiyaning (bunda *x* argument) x_0 nuqtada o‘zining eng katta qiymatiga erishishini bildiradi. Agar *f(x,y)* funksiya *(x_0;y_0)* nuqtada *x* argumenta bo‘yicha f'_x *h*ususiy hosilaga ega bo‘lsa, u holda Ferma teoremasiga $f'_x(x_0,y_0)=0$ ko‘ra bo‘ladi.

Yuqoridagidek, *(x_0; y_0)* nuqtaning $U_\delta(x_0,y_0)$ atrofidagi ixtiyoriy nuqtada, $(x_0,y)\in U_\delta(x_0,y_0)$ jumladan, uchun

$$f(x_0,y)\le f(x_0,y_0)$$

bo‘ladi. Bu esa bir argumentli $f(x_0,y)$ funksiyani (bunda y argument) y_0 nuqtada o‘zining eng katta qiymatiga erishishini bildiradi. Agar $f(x,y)$ funksiya $(x_0;\ y_0)$ nuqtada y argument bo‘yicha $f_y^{'}$ hususiy hosilaga ega bo‘lsa, u holda yana Ferma teoremasiga $f_y^{'}(x_0,y_0)=0$ ko‘ra bo‘ladi.

$z=f(x,y)$ funksiya $(x_0;y_0)$ nuqtada minimumga erishganda ham huddi shu hol yuz beradi.

20.3-eslatma. $f(x,y)=xy$ funksiyani qaraylik. Bu $f_x^{'}(x,y)=y,\ f_y^{'}(x,y)=x$ funksiya hususiy hosilalarga ega va bu hususiy hosilalar $(0;\ 0)$ nuqtada nolga teng:

$$f_x^{'}(0,0)=0,\ f_y^{'}(0,0)=0.$$

Biroq, bu $f(x,u)=xy$ funksiya $(0;\ 0)$ nuqtada ekstremumga erishmaydi.

Shunday qilib, $z=f(x,y)$ funksiya $(x_0,y_0)\in M$ nuqtada ekstremumga erishsa va shu nuqtada funksiya $f_x^{'}, f_y^{'}$ hususiy horsilalarga ega bo‘lsa, u holda

$$f_x^{'}(x,y)=0,\ f_y^{'}(x,y)=0$$

bo‘ladi. Bu *funksiyaning ekstremumga erishishining zaruriy shartini* ifodalaydi.

Funksiya hususiy hosilalarining nolga aylantiradigan nuqtalar uning *statsionar (turg‘un) nuqtalari* deyiladi.

11-§. Funksiya ekstremumining yetarlilik sharti

Endi $z=f(x,y)$ funksiyaning statsionar nuqtada ekstremumga erishishini ta'minlaydigan shartlarni topish bilan shug‘ullanamiz.

$z=f(x,y)$ funksiya M to‘plamda $(x_0,y_0)\in M$ berilgan bo‘lsin. $U_\delta(x_0,y_0)$ nuqtaning atrofi shu M to‘plamga tegishli bo‘lsin.

Agar $(x,y)\in U_\delta(x_0,y_0)$ nuqtada har doim

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)>0$$

bo‘lsa, unda $f(x,y)$ funksiya $(x_0;y_0)$ nuqtada minimumga erishadi.

Aga $(x,y)\in U_\delta(x_0,y_0)$ r nuqtada har doim

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)<0$$

bo‘lsa, unda $f(x,y)$ funksiya $(x_0;y_0)$ nuqtada maksimumga erishadi. Demak, biz $(x_0;y_0)$ nuqtaning atrofidagi $(x;y)$ nuqtalarda

$$f(x,y)-f(x_0,y_0) \qquad (20.15)$$

ayirmaning har doim musbat yoki manfiy bo‘lishini aniqlashimiz kerak ekan. Bu masalani hal qilishda $f(x,y)$ funksiyaga ma'lum shartlar qo‘yiladi. $z=f(x,y)$ funksiya:

1) $(x_0;y_0)$ nuqtaning $U_\delta((x_0,y_0))$atrofida *x va y* argumentlari bo‘yicha birinchi $f_x^{'}$ va $f_y^{'}$ hamda ikkinchi tartibli $f_{x^2}^{''},\ f_{xy}^{''},\ f_{y^2}^{''}$ *h*ususiy hosilalarga ega bo‘lib, ular uzluksiz bo‘lsin;

2) $(x_0;y_0)$ nuqta $f(x,y)$ funksiyaning statsionar nuqtasi bo‘lsin: $f_x'(x,y)=0,\ f_y'(x,y)=0$

Teylor formulasidan foydalanib topamiz:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right],$$

bunda ikkinchi tartibli hususiy hosilalar $(x_0+\theta_1(x-x_0),y_0+\theta_2(y-y_0))$ nuqtada hisoblangan $(0<\theta_1,\theta_2<1)$.

Agar $(x_0;y_0)$ ning statsionar nuqta ekanini e'tiborga olsak, unda

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right]$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Endi $f(x,y)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hususiy hosilalarining $(x_0;y_0)$ nuqtadagi qiymatlarini quyidagicha belgilaylik:

$$f_{x^2}''(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}=a_{11},$$

$$f_{xy}''(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}=a_{12},$$

$$f_{y^2}''(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}=a_{22}.$$

Shartga ko‘ra berilgan ikkinchi tartibli hususiy hosilalar $(x_0;y_0)$ nuqtada uzluksiz. Shuni e'tiborga olib topamiz:

$$f_{x^2}''(x_0+\theta_1(x-x_0),y_0+\theta_2(y-y_0))=f_{x^2}''(x_0,y_0)+\alpha_{11}=a_{11}+\alpha_{11},$$

$$f_{xy}''(x_0+\theta_1(x-x_0),y_0+\theta_2(y-y_0))=f_{xy}''(x_0,y_0)+\alpha_{12}=a_{12}+\alpha_{12},$$

$$f_{y^2}''(x_0+\theta_1(x-x_0),y_0+\theta_2(y-y_0))=f_{y^2}''(x_0,y_0)+\alpha_{22}=a_{22}+\alpha_{22}$$

Bunda $x-x_0\to 0, y-y_0\to 0$ da $\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{22}$ ning har biri nolga intiladi.

Natijada (20.15) ayirma ushbu

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}\left[a_{11}(x-x_0)^2+2a_{12}(x-x_0)(y-y_0)\right]+$$

$$+\left[a_{22}(y-y_0)^2\right]+\frac{1}{2}\left[\alpha_{11}(x-x_0)^2+2\alpha_{12}(x-x_0)(y-y_0)+\alpha_{22}(y-y_0)^2\right]$$ ko‘rinishga keladi. Demak,

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)$$

ayirmaning ishorasi quyidagi

$$a_{11}(x-x_0)^2+2a_{12}(x-x_0)(y-y_0)+a_{22}(y-y_0)^2$$

kvadratik formaning ishorasiga bog‘liq bo‘ladi.

1°. Agar $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2>0$ va $a_{11}>0$ bo‘lsa, u holda

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)>0$$

bo‘lib, *f(x,u)* funksiya *(x₀;y₀)* nuqtada minimumga erishadi.

2°. Agar $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2>0$ va $a_{11}<0$ bo‘lsa, u holda

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)<0$$

bo‘lib, *f(x,y)* funksiya *(x₀;y₀)* nuqtada maksimumga erishadi.

3°. Agar $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2<0$ bo‘lsa, u xolda

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)$$

ayirma ishora saqlamaydi. Bu holda *f(x,y)* funksiya *(x₀;y₀)* nuqtada ekstremumga erishmaydi.

4°. Agar $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2=0$ bo‘lsa, u holda

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)$$

ayirma musbat ham, manfiy ham bo‘lishi mumkin, ya'ni bu holda *f(x,y)* funksiya *(x₀;y₀)* nuqtada minimumga yoki maksimumga erishishi mumkin. Uni qo‘shimcha tekshirish yordamida aniqlanadi.

Shunday qilib, ikki argumentli *f(x,y)* funksiyaning ekstremumi quyidagi qoidaga ko‘ra topiladi:

1) *f(x,y)* funksiyaning hususiy $f_x'(x,y), f_y'(x,y)$ hocilalari topiladi;

2) Bu hususiy hosilalarni nolga tenglab, ushbu sistema hosil qilinadi:

$$\begin{cases} f_x'(x,y)=0, \\ f_y'(x,y)=0; \end{cases} \qquad (20.16)$$

3) (20.16) sistemani yechib, berilgan funksiyaning statsionar nuqtalari topiladi. Aytaylik, *f(x,y)* funksiyaning statsionar nuqtalaridan biri *(x₀;y₀)* bo‘lsin $\left(f_x'(x,y)=0,\ f_y'(x,y)=0\right)$;

4) *f(x,y)* funksiyaning ikkinchi $f_{x^2}''(x,y), f_{xy}''(x,y), f_{y^2}''(x,y)$ tartibli hususiy hosilalari topiladi;

5) $f_{x^2}''(x,y), f_{xy}''(x,y), f_{y^2}''(x,y)$ ning statsionar nuqtadagi qiymatlari $a_{11}=f_{x^2}''(x,y), a_{12}=f_{xy}''(x,y),\ a_{22}=f_{y^2}''(x,y)$ hisoblanadi;

6) $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=f_{x^2}''(x_0,y_0)\cdot f_{y^2}''(x_0,y_0)-\left(f_{xy}''(x_0,y_0)\right)^2$ ifodaning qiymati topiladi;

7) Natijada,

a) $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$ va $a_{11}>0$ bo‘lganda *f(x,y)* funksiya *(x₀,y₀)* nuqtada minimumga erishishini;

b) $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$ va $a_{11}<0$ bo‘lganda *f(x,y)* funksiya *(x₀,y₀)* nuqtada maksimumga erishishini;

v) $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$ bo‘lganda *f(x,y)* funksiya *(x₀,y₀)* nuqtada ekmtremumga erishmasligini topiladi.

Misol. $z = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x + 6y + 10$ funksiyaning ekstremumi topilsin.

Berilgan funksiyaning hususiy hosilalarini topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 4, \frac{\partial z}{\partial x} = -2x + 4y + 6.$$

Bu hususiy hosilalarni nolga tenglab, ushbu

$$\begin{cases} 2x - 2y - 4 = 0, \\ -2x + 4y + 6 = 0 \end{cases}$$

sistemani yechamiz.

$$\begin{cases} 2x - 2y - 4 = 0 \\ -2x + 4y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ -x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 1 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1, \\ x = 1. \end{cases}$$

demak, (1, -1) nuqta berilgan funksiyaning statsionar nuqtasi.

Funksiyaning ikkinchi tartibli hususiy hosilalarini topib, ularning statsionar (1, -1) nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2x - 2y - 4) = 2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(-2x + 4y + 6) = 4,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x - 2y - 4) = -2.$$

Demak, a_{11}=2, a_{12}= -2, a_{22}=4.

Endi $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ ni hisoblaymiz:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 2 \cdot 4 - (-2)^2 = 8 - 4 = 4.$$

Demak $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ >0 va a_{11}=2>0. Yuqorida aytilganiga ko‘ra berilgan funksiya (1, -1) nuqtada minimumga erishadi. Funksiyaning minimum qiymati esa

$$\min z = \min\left(x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x + 6y + 10\right) = 5$$

ga teng.

12-§. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarni qishlo xo’jalik va iqtisodiy masalalani yechishga qo‘llanilish

Darslikning **XV** - bobida bir o’zgaruvchili funksiyalarni iqtisodiy va qishloq xo’jalik masalalarini yechishga qo’llanilishini o’rgangan edik. Matematik modellashtirish yordamida, murakkab jarayonlarni ham iqtisodiy ko‘rsatkichlarini tahlil qilish mumkin([9]- [11]). Umumiy holda, mahsulot ishlab-chiqarish jarayoni, juda ko‘p omillarining funksiyasidan iborat bo‘ladi. Masalan, paxta etishtirish jarayoni urug‘ning sifatiga, tuproq unimdorligiga, o‘tkazilgan agrotexnik tadbirlarga,

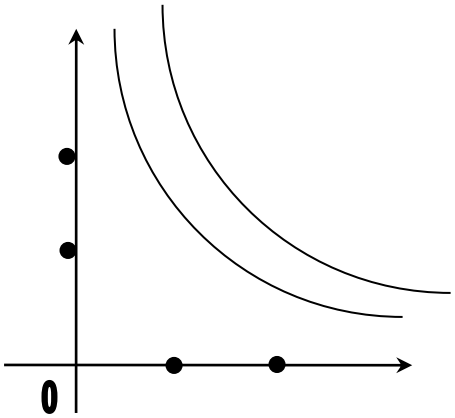
ob-havoga va boshqa ko‘plab omillarga bog‘liq bo‘lgan murakkab tasodifiy jarayondir.

Misol-1. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilasi yordamida tahlil qilish va ularning iqtisodiy ko‘rsatkichlarini baholash masalalarini o‘rganamiz.

Matematik modellashtirish yordamida, murakkab jarayonlarni ham iqtisodiy ko‘rsatkichlarini tahlil qilish mumkin. Ma’lum bir mahsulotlarni ishlab chiqaruvchi fermer xo‘jaligining iqtisodiy faoliyati o‘rganilayotgan bo‘lsin.

Vektor $x=(x_1;x_2;.....;x_m)$, $(m \geq 3)$ fermer xo‘jaligining o‘z mahsulotini ishlab chiqarish jarayonida, foydalanayotgan sohalarining turlari bo‘lsa, $y=f(x)$ funksiya fermer xo‘jaligi ishlab chiqargan yalpi mahsulotning hajmi bo‘ladi.

$y=f(x)$ funksiyani $f(x)=q$ tayin bir mahsulot hajmiga teng bo‘lgan qiymatini izohlovchi chiziq izokvanta deyiladi. Umumiy holda $f(x)=q$ $m-$ o‘lchovli fazoda, imkoniyatlar sirtining izokvantasini ifodalaydi. $x=(x_1;x_2;.....;x_m)$, vektorning barcha elementlari musbat bo‘lganligidan, sirtlar izokvantasi $m-$o‘lchovli fazoning 1-chi oktantasida tasvirlanadi, $q-$ning har-xil qiymatlarida o‘zaro kesishmaydi va koordinatalar o‘qlarini kesib o‘tmaydi. $q-$ning katta qiymatlarida, ya’ni mahsulot hajmi katta bo‘lganda, izokvanta ham koordinatalar boshidan uzoqda joylashadi.



135-shakl

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya uchun, $y=f(x)$ mahsulot ishlab chiqarishga mos, mehnat resurslarini egiluvchanligini aniqlaymiz.

Egiluvchanlik koeffitsienti quyidagicha aniqlanadi:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x_i}{x_i}} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta y}{x_i} * \frac{x_i}{y} = \frac{\partial y}{\partial x_i} * \frac{x_i}{y} \qquad (20.17)$$

Yuqorida o‘rgangan bir o‘zgaruvchili funksiyalardagidek, ko‘p o‘zgaruvchili holda ham olingan xususiy hosilalar quyidagicha ma’nolarni bildiradi:

a). $\frac{\partial y}{\partial x_i} - x_i$ ishlab chiqarish omilining limitik effektivligi;

v). $\frac{x_i}{y} * \frac{\partial y}{\partial x_i} - x_i$ ga nisbatan, mahsulot hajmining egiluvchanligi;

s). $\frac{\partial y}{\partial x_i} : \frac{\partial y}{\partial x_j}$ x_i resursni, x_j ga nisbatining limitik o‘lchov normasi;

d). $\frac{d\left(\frac{x_i}{x_j}\right)}{d\left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \div \frac{\partial y}{\partial x_j}\right)} * \frac{\frac{\partial y}{\partial x_i} \div \frac{\partial y}{\partial x_j}}{\frac{x_i}{x_j}} - x_j$ resursni, x_i resurs bilan almashtirganda ishlab chiqarish funksiyasini egiluvchanligini bildiradi.

$y = f(x)$ ko‘p o‘zgaruvchili ishlab chiqarish funksiyasining $\mu_i = \frac{f(x)}{x_i}$ qiymati, $i-$resursni o‘rtacha samaradorligini $i = 1, \overline{m}$ bildiradi. Uning limitik samaradorligi $v_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ bo‘lib, u $i-$resur xarajatini kichik birlikka o‘sishidan, limitik mahsulot miqdorini unga mos ravishda o‘sishini bildiradi.

Qisqa muddatda ishlab chiqarish texnalogiyasini katta o‘zgarmaganligi sababli yuqorida keltirilgan ishlab-chiqarish jarayonlari qishloq xo‘jaligini turli sohalarida ko‘p uchraydi.

$i-$ resursni o‘rtacha va limitik samaradorligi, boshqa resurslarga sarf xarajatlarni oshish bilan, o‘zgaradi bu munosbat quyidagicha yoziladi:

$i-$

$$\begin{cases} v_{ik} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} > 0 \\ \frac{\partial \mu_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f(x)}{x_i \partial x_k} > 0 \end{cases} \qquad (i \neq k) \qquad (20.18)$$

Malumki, mehnat unumdorligi ishni sifatli bajarilgan tashqari, ishlab chiqarish vositalarining yangilanishiga ham bog‘liq bo‘ladi.

Bir-nechta resurslarda, xarajatni kichik miqdorda o‘zgarishiga mos keluvchi, mahsulot hajmining o‘zgarishi quyidagi to‘la differensial yordamida ifodalanadi:

$$dy = \sum_{i \in M} v_i dx_i \qquad (20.19)$$

Ikki xil k va ℓ resurslarni ekvivalent almashish formulasi

$$v_{ke} = \frac{\partial x_k}{\partial x_e} = -\frac{v_e(x^0)}{v_k(x^0)} \le 0 \qquad (20.20)$$

Bir resursni boshqa unga ekvivalenti bilan almashtirish jarayoni izokvantaga yondoshib harakatlanishdir. Shu sababli izokvanta ba’zan almashtiruvchi egri chiziq deyiladi. Agar $k-$resursga xarajat oshsa, mahsulot hajmini avvalgi miqdorda saqlab qolish uchun, $\ell-$resursni xarajatlarini mos ravishda kamaytirishga to‘g‘ri keladi.

Bundan kelib chiqadiki, izokvanta har bir o‘qqa nisbatan kamayuvchi funksiya bo‘ladi, ya’ni manfiy og‘ishga ega bo‘ladi. Bu holda izokvantani har bir nuqtasiga o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti manfiy son bo‘ladi, ya’ni urinmani tashkil qilgan burchagi o‘tmas burchakdan iborat bo‘ladi.

Ko‘p o‘zgaruvchili $y = f(x)$ ishlab chiqarish funksiyasi, barcha argumentlari bo‘yicha bir jinsli funksiyadan iborat bo‘ladi: $f(\lambda x) = \lambda^n f(x)$. Bu tenlikning iqtisodiy ma’nosini quyidagicha talqin qilish mumkin:

1) barcha ishlab chiqarish sohalarining turlarida, xarajatni $\lambda-$marta oshishidan, jami ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini λ^n marta oshishi kelib chiqadi. Xususan $n = 1$ bo‘lsa mehnat unimdorligi o‘zgarmas, 2) $n < 1$ bo‘lsa mehnat unimdorligi kamayadi, 3) $n > 1$ bo‘lsa mexnat unimdorligi oshadi.

Misol-2. Faraz qilaylik, ishlab chiqarish korxonalarining iqtisodiy faoliyati faqat ikkita parametrga x-ish resurslari va y-ishlab chiqarish fondiga bog‘liq bo‘lsin. Natijada, korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotning hajmi Z, o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan x va y o‘zgaruvchilarning funksiyasi, sifatida makroiqtisodiyotda o‘rganilishi mumkin([9]- [11])

$$Z = f(x, y) \qquad (20.21)$$

Makro va mikroiqtisodiyotda $Z = f(x, y)$ funksiyada x va y o‘zgaruvchilardan birortasini qatnashmasligidan, korxonada ishlab chiqarish jarayoni ro‘y bermasligi tushuniladi, ya’ni quyidagi tenglik o’rinli bo’ladi:

$$\begin{cases} f(0, y) = 0 \\ f(x, 0) = 0 \end{cases} \qquad 20.22)$$

Bundan tashqari x va y o‘zgaruvchilarning proporsional ravishda ortishidan, korxonaning ishlab chiqargan mahsulotining hajmi ham unga proporsional ravishda ortadi:

$$f(mx, my) = mf(x, y) \qquad (20.23)$$

Bu tenglikdan xususan m=3 bo‘lganda, ishlab chiqarish resurslari va ishlab chiqarish fondining 3 marta ortishidan, korxonaning ishlab chiqargan mahsuloti hajmi ham 3 marta ortishi kutiladi. (20.23) tenglik bu funksiyani chiziqli, bir jinsli ekanligini bildiradi.

Amerikalik olimlar Charlz Kobb va Pol Govard Duglas 1920-1930 yillarda, AQSHning iqtisodiy rivojlanishini, statistik ma’lumotlar bo‘yicha tahlil qilib, milliy daromadning o‘sish dinamikasi, ishlab chiqarishga sarflangan kapital va mehnat orasidagi bog‘lanishning matematik modelini yaratishdi. Bu bog‘lanish Kobba-Duglas funksiyasi nomini oldi:

$$Z = C_0 x^{\alpha} y^{1-\alpha}, \quad 0 \prec \alpha \prec 1 \qquad (20.24)$$

Kobba-Duglas funksiyasi yuqorida keltirilgan (20.22) va (20.23) shartlarni qanoatlantiradi:

1) Haqiqatdan ham x=0 bo‘lishidan, y=0 kelib chiqadi, ya’ni mehnat resurslari mavjud bo‘lmasa, ishlab chiqarish ham bo‘lmaydi.

2) $Z(mx;my) = C_0 (mx)^{\alpha} (my)^{1-\alpha} = C_0 m^{\alpha} m^{1-\alpha} x^{\alpha} y^{1-\alpha} = mZ(x,y)$,

ya’ni Kobba-Duglas funksiyasi chiziqli, bir jinsli funksiya.

Funksiyani differensiallashuvchanligidan foydalanib $Z = f(x,y)$ funksiyaning o‘sish oralg‘ini aniqlash mumkin.

Agar y - o‘zgarmas bo‘lib $Z_x^1 \succ 0$ bo‘lsa va x-o‘zgarmas bo‘lib $Z_y^1 \succ 0$ bo‘lsa, $Z = f(x,y)$ funksiya mos ravishda x va y o‘zgaruvchilar bo‘yicha o‘suvchi bo‘ladi.

Kobba-Duglas funksiyasini xususiy hosilalarini topamiz:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial x} &= C_0 \alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha} \\ \frac{\partial Z}{\partial y} &= C_0 (1-\alpha) x^{\alpha} y^{-\alpha} \end{aligned}\right\} \qquad (20.25)$$

Haqiqatdan ham masala shartiga asosan x>0, y>0, 0<α<1 bo‘lganligidan

$$\frac{\partial Z}{\partial x} \succ 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} \succ 0 \qquad (20.26)$$

musbatligi kelib chiqadi, ya’ni Kobba-Duglas funksiyasi o‘suvchi funksiya.

Demak, x mehnat resurslarini va y ishlab chiqarish fondining o’sishi, milliy daromadni o’sishiga olib keladi.

Kobba-Duglas funksiyasini ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini hisoblaymiz:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} &= C_0\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^{1-\alpha} \\
\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} &= C_0(1-\alpha)(-\alpha)x^{\alpha}y^{-\alpha-1} \\
\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y} &= C_0\alpha(1-\alpha)x^{\alpha-1}y^{-\alpha} \\
\frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial x} &= C_0\alpha(1-\alpha)x^{\alpha-1}y^{-\alpha}
\end{aligned}\right\} \qquad (20.27)$$

Bu yerda ham x>0, y>0, 0<α<1, (α-1)<0 va (-α)<0 bo‘lganligidan quyidagi tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \prec 0, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \prec 0 \qquad (20.28)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial x} \succ 0 \qquad (20.29)$$

Demak, Kobba-Duglas funksiyasi har bir o‘zgaruvchi bo‘yicha qavariq (20.28) funksiya bo‘ladi.

Huddi shunday (20.19) munosabatdan ikkala resurslarni mehnat resurslari va ishlab chiqarish fondini bir vaqtda o‘sishidan, korxona ishlab chiqaradigan jami mahsulotning hajmini ham o‘sishi kuzatiladi.

Kobba-Duglas funksiyasidan, masalani qo‘yilishiga qarab, turli iqtisodiy masalalarni yechishda foydalanish mumkin.

Sobiq SSSRning 1960-1985 yillardagi iqtisodiy ko‘rsatkichlarini statistik tahlil qilib, Kobba-Duglas funksiyasida qatnashuvchi parametrlarni taqriban quyidagicha ekanligi baholangan: S_0=1,022; α=0,5382. Natijada, sobiq Sovet ittifoqining milliy daromadnini Kobba-Duglas funksiyasi quyidagicha bo‘lishligi aniqlangan:

$$Z = 1,022 \quad x^{0,5382}y^{0,4618} \qquad (20.30)$$

(20.30) formulada prognoz qilishning xatosi 3% dan oshmasligi ko’rsatilgan.

Hozirgi makroiqtisodiy jarayonlarni tahlil qilishda, quyidagi takomillashgan Solou funksiyasidan ko‘proq foydalaniladi:

$$Z_1 = C_0(\alpha x^{-p} + (1-\alpha)y^{-p})^{\frac{n}{p}} \qquad (20.31)$$

Solou funksiyasining sobiq Sovet ittifoqini milliy daromadini aniqlovchi parametrlari quyidagicha: S_0=0,99; α=0,257; p=1,994.

Mavzu bo’yicha tekshirish uchun savollar:

1. Ko’p o’zgaruvchili, xususan ikki o’zgaruvchili funksiya haqida tushuncha bering?
2. Ikki o’zgaruvchili funksiya funksiyaning limiti, uzluksizligi.
3. Ikki o’zgaruvchili funksiayaning birinchi tartibli hususiy hosilasi.
4. Ikki o’zgaruvchili funksiyaning to’la diferensiali.
5. Ikki o’zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli hosilalari va diferensiallari qanday hisoblanadi ?
6. Ikki o’zgaruvchili funksiyaning ekstremumi mavjudligining zaruriy shartini ayting?
7. Ikki o’zgaruvchili funksiyaning ekstremumi mavjudligini yetarli shartini aytib misollar keltiring?
8. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarni qishlo xo’jalik va iqtisodiy masalalani yechishga qo‘llanilishi haqida nimalarni bilasiz?
9. Charlz Kobb va Pol Govard Duglas AQSH ning iqtisodiy rivojlanishini, statistik ma’lumotlar bo‘yicha tahlil qilib, milliy daromadning o‘sish dinamikasi, ishlab chiqarishga sarflangan kapital va mehnat orasidagi bog‘lanishning qannday matematik modelini yaratishgan?

Kalit so’zlar:

Ko’p o’zgaruvchili, Ikki o’zgaruvchili, funksiya, limit, uzluksizlik, hususiy hosila, diferensial, yuqori, ekstremum, zaruriy, yetarli shartlar, qishloq xo’jalik, iqtisod, qo‘llash, Kobba-Duglas, funksiya, makroiqtisod, milliy daromad, parametr.

Xulosa

Ko’p o’zgaruvchilik funksiya haqida tushuncha berilib, xususan ikki o’zgaruvchili funksiyaning limiti, uzluksizligi, hususiy hosilalari, diferensiali, yuqori tartibli xususiy hosilalari va diferensiallari, ekstremumi mavjudligini zaruriy va yetarli shartlari, ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarni qishlo xo’jalik va iqtisodiy masalalani yechishga qo‘llash mavzulari bayyon etilgan. Jumladan, Charlz Kobb va Pol Govard Duglas AQSH da mehnat resurslari va ishlab chiqarish fondini bir vaqtda o‘sishidan, korxonani ishlab chiqaradigan jami mahsulotning hajmini ham o‘sishini aniqlagan.

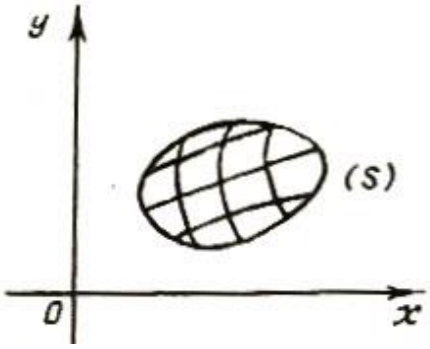
XX|- BOB. IKKI ARGUMENTLI FUNKSIYANING INTEGRALI

Ushbu bobda ikki argumentli funksiya integrali tushunchasini o‘rganamiz.

Ikki argumentli funksiyaning integrali aniq integralga o‘xshash bo‘ladi. Shuni e'tiborga olib, quyida ikki argumentli funksiya integrallari tushunchasini kiritib, ular haqidagi asosiy faktlarni isbotsiz keltirish bilan kifoyalanamiz.

1-§. Ikki karrali integral

1. Ikki karrali integral ta'rifi va uning mavjudligi. Tekislikda biror chegaralangan yopiq *(S)* soha berilgan bo‘lib, uning yuzi S ga teng bo‘lsin (135-chizma).



135-chizma.

Bu *(S)* sohada $z=f(x,y)$ funksiya aniqlangan bo‘lsin. (S) sohani chiziqlar yordamida p ta (S_1), (S_2), ... , (S_n) sohalarga ajratamiz. Ularning yuzlari mos ravishda S_1, S_2, ... , S_n bo‘lsin. (S_k) $(k= 1, 2, ... , p)$ sohada ixtiyoriy $M_k(x_k,y_k)$ nuqta olib, bu nuqtada berilgan funksiyaning qiymatini hisoblaymiz: $f(x_k,y_k)$. So‘ng uni (S_k) sohaning yuzi S_k ga ko‘paytirib, quyidagi

$$\delta = \sum_{k=0}^{n} f(x_k, y_k) \cdot S_k \qquad (21.1)$$

yig‘indini tuzamiz. Bu (21.1) yig‘indi $f(x,u)$ funksiyaning *(S)* bo‘yicha *integral yig‘indisi* deb ataladi.

Odatdagidek, (S_k) $\left(k=\overline{1,n}\right)$ sohalar diametrlarining eng kattasini K deb olamiz.

21.1-ta'rif. Agar $\lambda \to 0$ da (21.1) integral yig‘indi chekli limitga ega bo‘lsa, u holda *f(x,y) funksiya (S) soha bo‘yicha integrallanuvchi* deyilib, bu limit esa *f(x,y) funksiyaning (S) soha bo‘yicha ikki karrali integrali* deb ataladi. Uni

$$\iint_{(S)} f(x, y) dS \qquad (21.2)$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)S_k.$$

Agar *z=f(x,y)* funksiya chegaralangan yopiq *(S)* sohada berilgan va uzluksiz bo‘lsa, u $\iint\limits_{(S)} f(x,y)dS$ holda integral mavjud bo‘ladi.

1. Ikki karrali integralning xossalari

z=f(x,y) funksiya *{S)* sohada berilgan va uzluksiz bo‘lsin.

1°. Agar $(S)=(S_1)\cup(S_2)$ bo‘lsa, u holda bo‘ladi.

bo‘ladi.

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)dS = \iint\limits_{(S_1)} f(x,y)dS + \iint\limits_{(S_2)} f(x,y)dS$$

bo‘ladi.

2°. Quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\iint\limits_{(S)} kf(x,y)dS = k\iint\limits_{(S)} f(x,y)dS \quad (k = const).$$

3°. *f(x,y)* funksiya bilan birga *g(x,y)* funkskya ham *(S)* da uzluksiz bo‘lsin. U holda

$$\iint\limits_{(S)} [f(x,y)\pm g(x,y)]dS = \iint\limits_{(S)} f(x,y)dS \pm \iint\limits_{(S)} g(x,y)dS.$$

4°. Agar *(S)* $f(x,y)\geq 0$ da bo‘lsa, u holda

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)dS \geq 0$$

bo‘ladi.

5°. Agar $f(x,y)\leq g(x,y)$ bo‘lsa, u holda

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)dS \leq \iint\limits_{(S)} g(x,y)dS$$

bo‘ladi.

6°. $|f(x,y)|$ funksiya ham *(S)* da integrallanuvchi bo‘lib,

$$\left|\iint\limits_{(S)} f(x,y)dS\right| \leq \iint\limits_{(S)} |f(x,y)|dS$$

bo‘ladi.

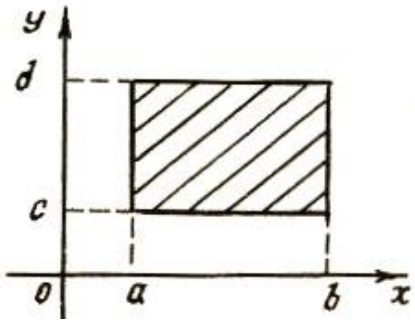
7°. *(S)* sohada shunday (ξ,η) nuqta topiladiki,

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)dS = f(\xi,\eta)S.$$

(*S* - *(S)* ning yuzi) bo‘ladi.

2. Ikki karrali integrallarni hisoblash

Tekislikdagi *(S)* soha ushbu $(S)=\{(x,y)=R^2 : a\le x\le b, c\le y\le d\}$ to‘g‘ri to‘rtburchak sohadan iborat bo‘lsin (136-chizma).



136-chizma.

z=f(x,y) funksiya shu *(S)* sohada berilgan va uzluksiz bo‘lsin. U holda funksiyaning *(S)* soha bo‘yicha ikki karrali integrali

$$\iint_{(S)} f(x,y)dS=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy,$$

$$\iint_{(S)} f(x,y)dS=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dx\right]dy \qquad (21.3)$$

bo‘ladi.

Demak, ikki argumentli *f(x,y)* funksiyaning ko‘rsatilgan *(S)* soha bo‘yicha ikki karrali integrali, avval bir argumenti bo‘yicha, so‘ng ikkinchi argumenti bo‘yicha olingan integrallarni hisoblash bilan hisoblanar ekan.

Misol. $\iint_{(S)}\frac{x}{y}dS$ integral hisoblansin, bunda

$$(S)=\{(x,y)\in R^2 : 3\le x\le 5, 1\le y\le 2\}$$

to‘g‘ri to‘rtburchak.

(21.3) formuladan foydalanamiz:

$$\iint_{(S)}\frac{x}{y}dS=\int_1^2\left[\int_3^5\frac{x}{y}dx\right]dy.$$

Avval $\int_3^5\frac{x}{y}dS$ integralni hisoblaymiz. Unda y uni o‘zgarmas deb qaraymiz:

$$\int_3^5\frac{x}{y}dS=\frac{1}{y}\int_3^5 xdx=\frac{1}{y}\frac{x^2}{5}\Big|_3^5=\frac{1}{2y}\left(5^2-3^2\right)=\frac{8}{y}.$$

Natijada

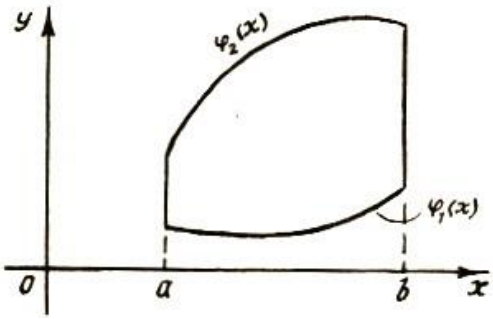
$$\iint_{(S)}\frac{x}{y}dS=\int_1^2\left[\int_3^5\frac{8}{y}dx\right]dy=\int_1^2\frac{8}{y}dy=8\int_1^2\frac{dy}{y}=8\ln y\Big|_1^2=$$

$$=8(\ln 2-\ln 1)=8\ln 2$$

bo‘ladi. Demak,

$$\iint\limits_{(S)} \frac{x}{y}dS=8\ln 2.$$

Endi *(S)* soha yuqoridan $y=\varphi_2(x)$ funksiya grafigi, pastdan $y=\varphi_1(x)$ funksiya grafigi, yon tomonlaridan *x=a, x=b* vertikal chiziqlar bilan chegaralangan soha bo‘lsin (137-chizma).



137-chizma.

z=f(x,y) funksiya shu *(S)* sohada berilgan va uzluksiz bo‘lib, $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(x)$ funksiyalar *[a; b]* da uzluksiz bo‘lsin. U holda *z=f(x,y)* funksiyaning *(S)* soha bo‘yicha ikki karrali integrali mavjud bo‘lib,

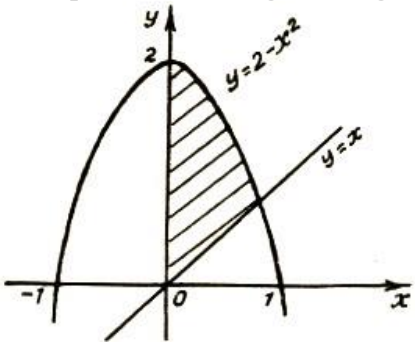
$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)dS=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx \qquad (21.4)$$

bo‘ladi.

Misol. $\iint\limits_{(S)}(x+y)dS$ integral hisoblansin, bunda

$$(S)=\{(x,y)\in R^2: 0\le x\le 1, x\le y\le 2-x^2\}.$$

Berilgan integralni hisoblash uchun avvalo *(S)* sohani aniqlab olamiz, Bu *(S)* soha yuqoridan parabola, $y=2-x^2$ pastdan y=*x* to‘g‘ri chiziq, yon tomonlaridan esa *x=0, x=1* vertikal chiziqlar bilan chegaralangan sohani ifodalaydi



138-chizma.

Yuqoridagi (21.4) formulaga ko‘ra

$$\iint\limits_{(S)} (x+y)dS = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_x^{2-x^2} (x+y)dy \right] dx$$

bo‘ladi. Ravshanki,

$$\int\limits_x^{2-x^2} (x+y)dy = \int\limits_x^{2-x^2} xdy + \int\limits_x^{2-x^2} ydy = x \cdot \int\limits_x^{2-x^2} dy + \int\limits_x^{2-x^2} ydy =$$

$$= xy\Big|_x^{2-x^2} + \frac{y^2}{2}\Big|_x^{2-x^2} = x\left(2-x^2-x\right) + \frac{1}{2}\left[\left(2-x^2\right)^2 - x^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}x^4 - x^3 - x^2 + 2 - 2x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 =$$

$$= \frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x + 2.$$

U holda

$$\iint\limits_{(S)} (x+y)dS = \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x + 2 \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 - \frac{7}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + 2 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 2x\Big|_0^1 = \frac{1}{10} - \frac{1}{4} - \frac{7}{6} + 1 + 2 = \frac{101}{60}$$

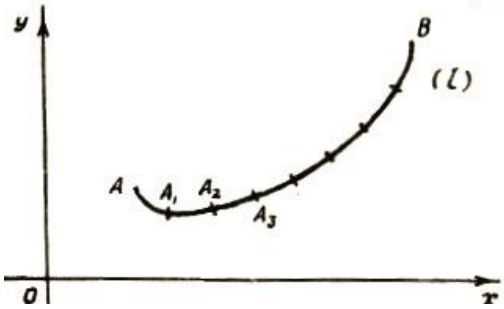
bo‘ladi. Demak,

$$\iint\limits_{(S)} (x+y)dS = \frac{101}{60}.$$

Ikki karrali integralning tatbiq doirasi kengdir. Ular yordamida tekis shaklning yuzini, massani, statistik momentini topish mumkin.

2-§. Egri chiziqli integrallar

1. Birinchi tur egri chiziqli integral. Tekislikda biror egri chiziq (yoy) berilgan bo‘lsin. Uni $\breve{AB}$ yoki *(l)* bilan belgilaymiz (139-chizma).



139-chizma.

Bu egri chiziq uzunlikka ega va uning uzunligi *l* bo‘lsin. Shu *AB* egri chiziqda

$$(x, y) \in (l).$$

z=f(x,y) funksiya berilgan (bunda *AV* egri chiziqni $A_0 = A, A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n = B$ nuqtalar yordamida *p* ta bo‘lakka bo‘lib, har bir $\breve{A}_k \breve{A}_{k+1}$

bo‘lakchada ixtiyoriy $(\xi_k, \eta_k)((\xi_k, \eta_k) \in \breve{A}_k \breve{A}_{k+1})$ nuqta olamiz. Bu nuqtada *f(x,y)* funksiyaning qiymatini hisoblab, uni mos ko‘paytiramiz va nihoyat

$$\delta = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \Delta S_k$$

yig‘indini tuzamiz. Bu ham *integral yig‘indi* $\breve{A}_k \breve{A}_{k+1}$ deyiladi. Uning limiti xuddi 16-bob, 2-§ da keltirilgan yig‘indilarning limiti kabi ta'riflanadi.

21.2-ta'rif. Agar $\lambda = \max_k \{\Delta S_k\} \to 0$ da yig‘indi chekli limitga ega bo‘lsa, u holda *f(x,y) funksiya* $\breve{A}\breve{B}$ *egri chiziq bo‘yicha integrallanuvchi* deyilib, bu limit esa *f(x,y)* funksiyaning $\breve{A}\breve{B}$ egri chiziq bo‘yicha *birinchi tur egri chiziqli integrali* deyiladi. Uni

$$\int_{\breve{A}\breve{B}} f(x, y) dS$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\int_{\breve{A}\breve{B}} f(x, y) dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k) \Delta S_k.$$

1°. *(AB)* egri chiziq ushbu

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\} (\alpha \le t \le \beta)$$

sistema bilan berilgan bo‘lib, bunda $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar $[\alpha, \beta]$ da uzluksiz hamda uzluksiz $\varphi'(t), \psi'(t)$ $(\varphi(\alpha) = A, \psi(\beta) = B)$ hosilalarga ega bo‘lsin. *f(x,u)* funksiya esa shu egri chiziqda berilgan va uzluksiz bo‘lsin. U holda

$$\int_{\breve{A}\breve{B}} f(x, y) dS$$

egri chiziqli integral mavjud bo‘lib,

$$\int_{\breve{A}\breve{B}} f(x, y) dS = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(\varphi(t), \psi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt\right) \tag{21.5}$$

bo‘ladi:

2°. $\breve{A}B$ egri chiziq ushbu

$$y = y(x) \quad (a \le x \le b)$$

tenglama bilan berilgan bo‘lib, y*(a)=A, y(b)=B* bo‘lsin. y=*y(x)* funksiya esa *[a, b]* segmentda uzluksiz hamda uzluksiz y*'(x)* hosilaga ega.

Agar *f(x,y)* funksiya $\breve{AB}$ egri chiziqda berilgan va uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiyaning $\breve{AB}$ egri chiziq bo‘yicha egri chiziqli integrali mavjud bo‘lib,

$$\int_{\breve{AB}} f(x,y)dS = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx \qquad (21.6)$$

bo‘ladi.

Yuqorida keltirilgan faktlar *f(x,y)* funksiya egri chiziqli integralining mavjudligini ifodalabgina qolmay, balki uni hisoblash imkonini ham beradi.

(21.5) va (21.6) formulalar ko‘rsatadiki, egri chiziqli integrallar aniq integralga keltiriladi. Aniq integralni hisoblashni esa XVII bob, 6-§ da batafsil o‘rgangan edik.

Misol: Quyidagi

$$\int_{\breve{AB}} \sqrt{x^2+y^2}\, dS$$

birinchi tur egri chiziqli integral hisoblansin, bunda $\breve{AB}$- markazi *(0,0)* nuqtada, radiusi *r=2* bo‘lgan aylananing birinchi kvadrantdagi qismidan iborat.

Analitik geometriyadan ma'lumki, markazi *(0,0)* nuqtada, radiusi *r=2* bo‘lgan aylananing tenglamasi

$$x^2+y^2=2^2=4$$

bo‘ladi. Bu aylananing birinchi kvadrantdagi qismi

$$y=\sqrt{4-x^2} \qquad (0\le x\le 2)$$

bo‘ladi. (21.6) formuladan foydalanib topamiz.

$$\int_{\breve{AB}} \sqrt{x^2+y^2}dS = \int_0^2 \sqrt{x^2+4-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\right)^2}dx =$$

$$= \int_0^2 2\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}dx = 2\int_0^2 \sqrt{\frac{4-x^2+x^2}{4-x^2}}dx = 2\int_0^2 \frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= 2\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = 4\int_0^2 \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = 4\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^2 = 4\cdot\frac{\pi}{2} = 4\pi.$$

Egri chiziqli integrallar ham aniq integral xossalari kabi xossalarga ega. Ularning ba'zi birlarini keltirish bilan kifoyalanamiz.

$\breve{AB}$ egri chiziqda *z=f(x,y)* rilgan va uzluksiz bo‘lsin.

1°. Agar $\breve{AB}=\breve{AC}+\breve{CB}$ bo‘lsa, u holda

$$\int_{\breve{AB}} f(x,y)dS = \int_{\breve{AC}} f(x,y)dS + \int_{\breve{CB}} f(x,y)dS$$

bo‘ladi.

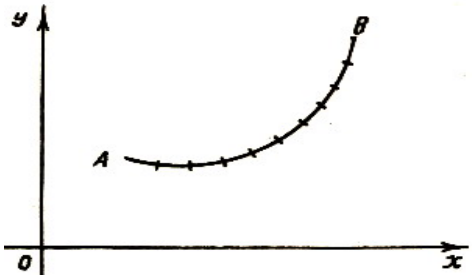
2°. $\int\limits_{\breve{A}B} kf(x,y)dS = k\int\limits_{\breve{A}B} f(x,y)dS$ (*k*-const).

3°. $\breve{A}B$ egri chiziqda *g(x,y)* funksiya ham berilgan va uzluksiz bo‘lsin. *U h*olda

$$\int\limits_{\breve{A}B}[f(x,y)\pm g(x,y)]dS = \int\limits_{\breve{A}B} f(x,y)dS \pm \int\limits_{\breve{A}B} g(x,y)dS$$

bo‘ladi.

2. Ikkinchi tur egri chiziqli integrallar. Tekislikda $\breve{A}\breve{B}$ egri chiziq berilgan bo‘lib, bu egri chiziqda *z=f(x,y)* funksiya aniqlangan bo‘lsin (140-chizma).



140-chizma.

$\breve{A}\breve{B}$ egri chiziqni $A_0, A_1\ A_2, ..., A_n$ $(A_0=A,\ V_p=V)$ nuqtalar yordamida *p* ta bo‘lakka bo‘lib, har bir $\breve{A}_k\breve{A}_{k+l}$ $(k = 0, 1, 2, ..., p)$ bo‘lakchada ixtiyoriy nuqta (ξ_k, η_k) olamiz. Bu nuqtadagi funksiyaning qiymati $f(\xi_k, \eta_k)$ ni $\breve{A}_k\breve{A}_{k+1}$ yoyining *Ox* o‘qidagi proeksiyasi ga, Δx_k so‘ng *Ou* o‘qidagi proeksiyasi ga Δy_k ko‘paytirib, ushbu yig‘indilarni tuzamiz:

$$\delta_1 = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k,\ \delta_2 = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k. \qquad (20.7)$$

(20.7) ham *integral yig‘indilar* deb ataladi.

20.3- ta'rif. *Agar* $\lambda_1 = \max\{\Delta x_k\} \to 0$ *da* δ_1 *yig‘indi,* $\lambda_2 = \max\{\Delta y_k\} \to 0$ *da* δ_2 *yig‘indi chekli limitga ega bo‘lsa, u holda f(x,u) uzluksiz* $\breve{A}\breve{B}$ *egri chiziq bo‘yicha shtegrallanuvchi deyiladi, bu limitlar esa f(x,y) funksiyaning ikkinchi tur egri chiziqli integrallari deyiladi.*

Ular mos ravishda quyidagicha

$$\int\limits_{\breve{A}B} f(x,y)dx,\ \int\limits_{\breve{A}B} f(x,y)dy$$

kabi belgilanadi.

Demak,

$$\int_{AB} f(x,y)dx = \lim_{\lambda_1 \to 0} \delta_1 = \lim_{\lambda_1 \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k,$$

$$\int_{AB} f(x,y)dy = \lim_{\lambda_2 \to 0} \delta_2 = \lim_{\lambda_2 \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k.$$

Ushbu

$$\int_{AB} f(x,y)dx + \int_{AB} g(x,y)dy$$

yig'indi ikkinchi tur egri chiziqli integralning umumiy ko'rinishi deyiladi va

$$\int_{AB} f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

kabi belgilanadi:

$$\int_{AB} f(x,y)dx + g(x,y)dy = \int_{AB} f(x,y)dx + \int_{AB} g(x,y)dy.$$

Ikkinchi tur egri chiziqli integrallarning mavjudligi, ularni hisoblash, bunday egri chiziqli integrallarning xossalari yuqorida keltirilgan birinchi tur egri chiziqli integrallar kabi bo'ladi.

3- § Parametrlarga bog'liq integrallar

1. Parametrga bog'liq funksiya tushunchasi va uning xossalari.

z=f(x,y) funksiya tekislikdagi to'g'ri to'rtburchakli sohada aniqlangan va $(D)=\{(x,y)\in R^2 : a\le x\le b, c\le y\le d\}$ uzluksiz bo'lsin. Berilgan *f(x,y)* funksiyaning *u* argumenti *[s;d]* oraliqda o'zgaradi.

Endi shu oraliqdagi biror tayin y_0 qiymatni olib, $f(x,y_0)$ ni qaraymiz. Ravshanki, $f(x,y_0)$ faqat *x* gagina bog'liq. Demak, $f(x, y_0)$ funksiya *[a;b]* da uzluksiz funksiya bo'ladi. U *[a;b]* da integrallanuvchi, ya'ni

$$I_0 = \int_a^b f(x, y_0)dx \qquad (21.8)$$

mavjud.

Endi *f(x,y)* funksiya *u* argumentining *[s;d]* oraliqdagi boshqa bir tayin y_1 qiymatini olib, $f(x,y_1)$ ni qaraymiz. Bu ham *x* gagina bog'liq bo'lib, *x* uning *[a;b]* dagi uzluksiz funksiyasi bo'ladi. Demak, $f(x,y_1)$ ham *[a;b]* oraliqda integrallanuvchi, ya'ni

$$I_1 = \int_a^b f(x, y_1)dx \qquad (21.9)$$

mavjud. (21.8) va (21.9) integrallarning qiymatlari umuman aytganda turlicha bo'ladi.

Misol. Ushbu *f(x,y)=xy* funksiyani $(D)=\{(x,y)\in R^2 : 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$ da qaraylik. Bu funksiya *(D)* da uzluksiz. Berilgan funksiya $y_0 = \frac{1}{2}$ da $f(x, y_0) = x\cdot\frac{1}{2}$

bo‘lib, uning integrali

$$I_0 = \int_0^1 x \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

bo‘ladi. Qaralayotgan funksiya da $y_1 = \frac{1}{4} \in [0;1]$ $f(x, y_1) = x \cdot \frac{1}{4}$ bo‘lib, uning integrali

$$I_1 = \int_0^1 x \cdot \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{8}$$

bo‘ladi.

Yuqorida aytilganlardan hamda keltirilgan misoldan ko‘rinadiki, *z=f(x,y)* funksiyaning *[a,b]* oraliq bo‘yicha integrali

$$\int_a^b f(x, y)dx$$

*y o‘*zgaruvchining *[s;d]* oraliqdan olingan qiymatiga bog‘liq bo‘ladi:

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)dx \qquad (21.10)$$

(21.10) integral ikki argumentli *f(x,y)* funksiyani *x* argumenta bo‘yicha *[a;b]* oraliqdagi aniq integralidir. Demak, *f(x,y)* funksiyaning (21.10) ko‘rinishdagi integralini qarashda *u* ni o’zgarmas deb hisoblanadi. Shuning uchun ham uni *parametr* deyilib, (21.10) integralni esa *parametrga bog‘liq integral* deyiladi. Berilgan *z=f(x,y)* funksiyaga ko‘ra (21.10) munosabat yordamida yangi *I(y)* funksiya hosil bo‘ladi.

Parametrga bog‘liq integrallarda o‘rganiladigan asosiy masala *f(x,y)* funksiyaning xossalariga binoan *I(y)* funksiyaning xossalarini topishdan iboratdir. Quyida shu xossalarning ba'zilarini keltiramiz.

1°. *f(x,y)* funksiya $(D) = \{(x, y) \in R^2 : a \le x \le b, c \le y \le d\}$ sohada berilgan va uzluksiz bo‘lsin. U holda

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$$

funksiya ham *[s;d]* oraliqda uzluksiz bo‘ladi.

2°. *f(x, y)* funksiya (D) sohada berilgan va uzluksiz bo‘lib, u shu sohada uzluksiz $f_y^{'}(x, y)$ xususiy hosilaga ega bo‘lsin. U holda *f(y)* funksiya ham *[s;d)* da hosilaga ega bo‘lib,

$$I'(y) = \int_a^b f'(x, y)dx$$

bo‘ladi.

3°. *f(x,y)* funksiya *(D)* sohada berilgan va uzluksiz bo‘lsin. U holda *f(y)* funksiya *[s;d]* oraliqda integrallanuvchi bo‘lib,

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx$$

bo‘ladi.

2. Parametrlarga bog‘liq xosmas integrallar. **Eyler integrallari.** Biz mazkur kursning XIX bobida chegaralari cheksiz hamda chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrallari bilan tanishgan edik. Parametrga bog‘liq xosmas integrallarni ham qarash mumkin Masalan, *f(x,u)* funksiya ushbu

$$\{(x,y) \in R^2 : a \le x < +\infty, c \le y \le d\}$$

sohada berilgan bo‘lib, u o‘zgaruvchining *[s;d]* oraliqdan olingan har bir tayin qiymatida *x* argumenti bo‘yicha $[a; +\infty)$ oraliqda integrallanuvchi bo‘lsin. Unda

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

integral parametrga bog‘liq bo‘lgan xosmas (chegarasi cheksiz) integral bo‘ladi.

Xuddi shunga o‘xshash parametrga bog‘liq chegaralanmagan funksiya xosmas integrali tushunchasi kiritiladi.

Parametrga bog‘liq xosmas integrallarda ham yuqoridagidek berilgan *f(x,y)* funksiyaning xossalariga ko‘ra parametrga bog‘liq xosmas integrallarning mos xossalari o‘rganiladi.

Ular matematik analizning nozik tushunchalariga asoslanadi

Biz quyida parametrga bog‘liq xosmas integrallarning maxsus turini - Eyler integrallarini qaraymiz va ularning xossalarini keltiramiz. Ushbu

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt. \qquad (21.11)$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \qquad (21.12)$$

integrallar *Eyler integrallari* deyiladi. (21.11) integral *Beta-funksiya,* (21.12) integral *Gamma-funksiya* deb ataladi.

Demak, Beta- va Gamma-funksiyalar parametrga bog‘liq xosmas integrallardir.

Beta-funksiya *x* va y *o‘*zgaruvchilarning *x*>0, y>0 bo‘lgan qiymatlarida aniqlangan (mavjud bo‘ladi).

Gamma-funksiya

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

esa *x o‘*zgaruvchining *x*>0 bo‘lgan qiymatlarida aniqlangan (mavjud bo‘ladi).

B(x,y) va *G(x)* funksiyalar bir qator muhim xossalarga ega.

1°. Barcha *(x,y)* (*x*>0, y>0) uchun

$$B(x,y)=B(y,x)$$

bo‘ladi.

2°. *B(x,y)* funksiyani quyidagicha ham yozish mumkin:

$$B(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$$

3°. Barcha *(x,y)* uchun *(x>0, y>1)*

$$B(x,y)=\frac{y-1}{x+y-1}B(x,y-1)$$

bo‘ladi

4°. Agar y=*1-x* *(0<x<1)* bo‘lsa, u holda

$$B(x,y)=B(x,1-x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{t+1}dt=\frac{\pi}{\sin\pi x}$$

bo‘ladi.

Xususan, $x=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{2}$ bo‘lganda

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{1}{2}\pi} \qquad (21.13)$$

bo‘ladi.

5°. Barcha *x*>0 uchun

$$G(x+1)=G(x)$$

bo‘ladi.

6°. Barcha x>0, y>0 uchun

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad (21.14)$$

bo‘ladi.

21.1-natija. (21.13) va (21.14) munosabatlardan 0<x<1 uchun

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Xususan, $x=\frac{1}{2}$ bo‘lganda

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{1}{2}\pi}$$

Yoki

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \pi, \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

bo‘ladi.

Mavzu bo’yicha tekshirish uchun savollar:

1. Berilgan funksiyadan berilgan soha bo’yicha olingan ikki o’lchovli integral deb nimaga aytiladi ? Uning geometric va mexanik manolarini tushintiring?
2. Yassi shakil yuzini ikki o’lchovli integral yordamida hisoblash fo’rmula-sini asoslang ?
3. Ikki o’lchovli integralning xossalarini aytib bering .
4. Egri chiziqli integrallar. Birinchi va ikkinchi tur egri chiziqli integrallar-ni hisoblash.
5. Parametrlarga bog‘liq integrallar .
6. Parametrlarga bog‘liq xosmas integrallar. Eyler integrallari. Beta va Gamma funksiyalar.

Kalit suzlar

Funksiyadan, soha bo’yicha olingan, ikki o’lchovli integral, geometric, mexanik, yassi shakil, yuzi, hisoblash, xossalari, egri chiziqli, birinchi, ikkinchi tur, parametrli, xosmas integral, Eyler, Beta, Gamma funksiyalar.

Xulosa

Berilgan funksiyadan berilgan soha bo’yicha olingan ikki o’lchovli integral, uning geometric, mexanik manolari, yassi shakil yuzini ikki o’lchovli integral yordamida hisoblash fo’rmulasi, ikki o’lchovli integralning xossalari, egri chiziqli integrallar, **b**irinchi va ikkinchi tur egri chiziqli integrallarni hisoblash, parametrlarga bog‘liq integrallar, parametrlarga bog‘liq xosmas integrallar, Eyler integrallari, beta, Gamma funksiyalar o’rganilgan.

XXII BOB. QATORLAR

1-§. Sonli qatorlar

Biror

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...,\ a_n,\ ....$$

sonlar ketma-ketligi berilgan bo‘lib, uning yordamida ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (22.1)$$

ifodani hosil qilingan. Odatda bu (22.1) ifoda cheksiz qator (qisqacha qator) deb ataladi. $a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ ...)$ sonlar qatorning hadlari *(a_l* - birinchi hadi, a_2 - ikkinchi hadi, ... a_n-n hadi, yoki umumiy hadi, ...) deyiladi. (22.1) qatorni qisqacha yig‘indi belgisi orqali $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kabi yoziladi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

Berilgan qator hadlari yordamida quyidagi

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$.....$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \qquad (22.2)$$

yig‘indilarni tuzamiz. Bu yig‘indilar (22.1) qatorning qismiy yig‘indilari deb ataladi. Bu yig‘indilar

$$S_1,\ S_2, S_3,\ ...,\ S_n...$$

ketma-ketlikni hosil qiladi. U ni $\{S_n\}$ kabi belgilaymiz.

Shunday qilib, (22.1) qator berilgan bo‘lsa, har doim bu qatorning qismiy yig‘indilaridan iborat $\{S_n\}$ ketma-ketlikni hosil qilish mumkin.

22.1-ta'rif. Agar $n \to \infty$ da (22.1) qatorning qismiy yig‘indilaridan iborat (S_n) sonlar ketma-ketligi chekli limitga ega

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

bo‘lsa, u holda (22.1) qator yaqinlashuvchi, S esa qatorning yig‘indisi deyiladi:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

22.2-ta'rif. Agar $n \to \infty$ da (22.1) qatorning qismiy yig‘indilaridan iborat $\{S_n\}$ sonlar ketma-ketligining limiti cheksiz bo‘lsa yoki bu limit mavjud bo‘lmasa, u holda (22.1) qator uzoqlashuvchi deyiladi.

Misollar. 1. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$ qatorni qaraymiz. Bu qatorning birinchi hadi $a_1=\frac{1}{1\cdot 2}$, ikkinchi hadi $a_2=\frac{1}{2\cdot 3}$, uchinchi hadi $a_3=\frac{1}{3\cdot 4}$ va h.k., n - hadi $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$ va h.k. Qaralayotgan qatorning qismiy yig‘indilarini topamiz:

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},$$

$$S_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{3},$$

$$S_3=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=1-\frac{1}{4};$$

……..

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Shunday qilib, berilgan qatorning qismiy yig‘indilaridan iborat $\{S_n\}$ ketma-ketlik quyidagicha bo‘ladi:

$$1-\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{3},\ 1-\frac{1}{4},\ ...,\ 1-\frac{1}{n+1}....$$

Bu ketma-ketlikning limiti

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

ga teng. Demak, berilgan qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi 1 ga teng:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...=1$$

2. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}+...$ qatorni qaraymiz.

Uning qismiy yig‘indilari

$$S_1 = 1,$$
$$S_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$S_3 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}},$$
.....
$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}},$$
.....

bo‘lib, bu qismiy yig‘indilardan iborat $\{S_n\}$ ketma-ketlik 1, $1+\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}, ..., 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}+.....$ bo‘ladi. Agar $n>1$ bo‘lganda

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

bo‘lishini e'tiborga olsak, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ ekanligini topamiz. Demak, berilgan qator uzoqlashuvchi.

3. $1-1+1-1+...+(-1)^{n+1}+...$ qatorni qaraymiz. Bu qatorning qismiy yig‘indilari

$$S_1 = 1,$$
$$S_2 = 1-1 = 0,$$
$$S_3 = 1-1+1 = 1,$$
$$S_4 = 1-1+1-1 = 0,$$
.....

$$\begin{cases} 1, \text{ agar } n-\text{toq son}, \\ 0, \textit{agar } n-\text{juft } \textit{son} \end{cases}$$

$$S_n = 1-1+1-1+...+(-1)H^{n+1} =$$

bo‘lib, bu qismiy yig‘indilardan iborat $\{S_n\}$ ketma-ketlik 1, 0, 1, 0, 1, 0, ... bo‘ladi.

Ravshanki, bu ketma-ketlik limitga ega emas. Demak, berilgan qator uzoqlashuvchi.

4. $a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ...$ qatorni qaraymiz. Bu qatorning hadlari geometrik progressiya tashkil qiladi. Shuning uchun uni geometrik qator deyiladi. Uning qismiy yig‘indilari $(q \neq 1)$

o‘lib, ulardan tuzilgan ketma-ketlik

$$\{S_n\} = \left\{ \frac{aq^n - a}{q-1} \right\}$$

bo‘ladi. Bu ketma-ketlikning limiti q ga bog‘liq bo‘ladi.

a) $|q|<1$ bo‘lsin. Ravshanki, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0.$

Unda $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{aq^n - a}{q-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}q^n\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^n = \frac{a}{1-q}$$

bo‘ladi. Demak, bu holda geometrik qator yaqinlashuvchi bo‘lib, uning yig‘indisi $S = \frac{a}{1-q}$ bo‘ladi.

b) $q>1$ bo‘lsin. Bu holda

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}q^n\right) = \infty$$

bo‘ladi. Demak, $q>1$ bo‘lganda geometrik qator uzoqlashuvchi.

v) $q=1$ bo‘lsin. Bu holda $S_n = a + a + a + ... + a = n\cdot a$ bo‘lib,

$$\lim_{n\to\infty} = \begin{cases} +\infty, \text{ агар } a>0, \\ -\infty, \text{ агара} < 0 \end{cases}$$

bo‘ladi. Demak, $q=1$ bo‘lganda qator uzoqlashuvchi.

g) $q<-1$ bo‘lsin. Bu holda $\{S_n\}$ ketma-ketlikning limiti mavjud bo‘lmaydi.

Shuningdek, $q= -1$ bo‘lganda ham $\{S_n\}$ ketma-ketlikning limiti mavjud emas. Chunki bu holda $\{S_n\}$ ketma-ketlik ushbu *a, 0, a, 0, ...* ko‘rinishga ega bo‘lib, u limitga ega emas $(a \neq 0)$. Demak, $q \le 1$ bo‘lganda qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Shunday qilib,

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ...$$

geometrik qator $|q|<1$ bo‘lganda yaqinlashuvchi (yig‘indisi $S = \frac{a}{1-q}$ ga teng), $|q| \ge 1$ bo‘lganda uzoqlashuvchi bo‘ladi.

2-§. Yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari

Biz quyida yaqinlashuvchi qatorlarning ba'zi xossalarini keltiramiz.

1°. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (22.1)$$

qator yaqinlashuvchi bo‘lib, uning yig‘indisi S ga teng bo‘lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = ca_1 + ca_2 + ca_3 + ... + ca_n + ... \qquad (22.3)$$

qator ham yaqinlashuvchi bo‘lib, uning yig‘indisi $c \cdot S$ ga teng bo‘ladi, bunda *s* - o‘zgarmas son.

Isbot. Shartga ko‘ra (22.1) qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi *S* ga teng. Demak,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + ... + a_n) = S.$$

(22.3) qatorning qismiy yig‘indisini $S_n^{'}$ bilan belgilaymiz:

$$S_n^{'} = ca_1 + ca_2 + ca_3 + ... + ca_n.$$

Ravshanki,

$$S_n^{'} = ca_1 + ca_2 + ca_3 + ... + ca_n = c(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) = cS_n.$$

Natijada

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{'} = \lim_{n\to\infty} cS_n = c\lim_{n\to\infty} S_n = c \cdot S$$

bo‘lishini topamiz. Demak, (22.3) qatorning qismiy yig‘indilaridan iborat $\{S_n^{'}\}$ ketma-ketlik *cS* limitga ega ekan. Bu esa (22.3) qatorning yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi *sS* ga teng ekanligini bildiradi.

2°. Ikkita qator berilgan bo‘lsin:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ..., \qquad (22.1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ..., \qquad (22.4)$$

Ushbu

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + ... + (a_n + b_n) + ...$$

qator berilgan qatorlar yig‘indisi deyiladi. va $\sum(a_n + в_n)$ kabi belgilanadi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + ... + (a_n + b_n) + ...$$

Ushbu $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + ... + (a_n - b_n) + ...$

qator berilgan qatorlar ayirmasi deyiladi va

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$$

kabi belgilanadi, ya'ni

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + ... + (a_n - b_n) + ...$$

Agar (22.1) va (22.4) qatorlar yaqinlashuvchi bo‘lib, ularning yig‘indisi mos ravishda S' va S'' bo‘lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+...+(a_n+b_n)+... \qquad (22.5)$$

qator ham yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi $S' + S''$ ga teng bo‘ladi.

Isbot. (22.1) va (22.4) qatorlarning qismiy yig‘indilarini mos ravishda $S_n^{'}$ va $S_n^{''}$ bilan belgilaylik:

$$S_n^{'} = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n,$$
$$S_n^{''} = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n.$$

U holda

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{'} = S', \ \lim_{n\to\infty} S_n^{''} = S''$$

bo‘ladi.

(22.5) qatorning qismiy $\bar{S}_n$ bo‘lsin:

$$\bar{S}_n = (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+...+(a_n+b_n).$$

Ravshanki,

$$\bar{S}_n = (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+...+(a_n+b_n)=$$
$$=(a_1+a_2+...+a_n)+(b_1+b_2+...+b_n)=S_n^{'}+S_n^{''}$$

Natijada

$$\lim_{n\to\infty}\bar{S}_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n^{'}+S_n^{''}\right)$$

bo‘ladi. Demak, (22.5) qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi $S'+S''$ ga teng.

3°. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $n\to\infty$ da bu qatorning umumiy hadi a_p nolga intiladi: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

Isbot. Berilgan qator yaqinlashuvchi bo‘lib, uning yig‘indisi S ga teng bo‘lsin. Ta'rifga binoan $\lim_{n\to\infty} S_n = S,$ bunda

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

Ravshanki, $S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1}$ bo‘lib, $a_n = S_n - S_{n-1}$ bo‘ladi. Keyingi tenglikda $n\to\infty$ da limitga o‘tib topamiz:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Bu esa 3°-xossani isbotlaydi.

22.1-eslatma. Biror qatorning umumiy hadi $n\to\infty$ da nolga intilishidan qatorning yaqinlashuvchi bo‘lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

Masalan, ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}+...$$

qatorning umumiy hadi $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ bo‘lib, $n\to\infty$ da nolga intiladi: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$

Ammo bu qatorning uzoqlashuvchi bo‘lishini ko‘rgan edik.

Demak, yuqorida keltirilgan 3°-xossa qator yaqinlashishining zaruriy shartini ifodalaydi.

3-§. Qatorlarning yaqinlashuvchiligi

Biror

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+...+a_n+... \qquad (22.1)$$

qator berilgan bo‘lib, uning har bir hadi manfiy bo‘lmasin, ya'ni

$$a_n\geq 0\ \ (\forall n\in N) \qquad (22.6)$$

bo‘lsin (odatda bunday qatorlarni musbat hadli qatorlar deyiladi).

22.1-teorema. Agar (22.1) qatorning qismiy yig‘indilaridan iborat $\{S_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, u holda (22.1) qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Isbot. Berilgan (22.1) qatorning qismiy yig‘indilaridan iborat $\{S_n\}$ ketma-ketlikni olamiz. Bu ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo‘lsin, ya'ni

$$S_n\leq M\ \ (\forall n\in N).$$

Ikkinchi tomondan, berilgan qatorning hadlari (21.6) shartni qanoatlantirishini e'tiborga olib topamiz:

$$S_{n+1}=a_1+a_2+a_3+...+a_n+a_{n+1}=S_n+a_{n+1}\geq S_n$$

Demak, $\forall n\in N$ uchun $S_n\leq S_{n+1}$ bo‘ladi. Bu $\{S_n\}$ ketma- ketlikning o‘suvchi ekanini bildiradi. Shunday qilib, $\{S_n\}$ ketma-ketlik o‘suvchi va u yuqoridan chegaralangan. U holda bu $\{S_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo‘ladi: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S.$

Demak, berilgan qator yaqinlashuvchi. Teorema isbot bo‘ldi.

22.2-eslatma. Agar (22.1) qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, uning qismiy yig‘indilaridan iborat $\{S_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo‘ladi.

Haqiqatan ham, (22.1) qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, uning qismiy yig‘indilaridan iborat $\{S_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo‘ladi. Ma'lumki, chekli limitga ega bo‘lgan ketma-ketlik chegaralangan, jumladan yuqoridan chegaralangan bo‘ladi.

22.1-natija. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \geq 0,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ ...)$ qatorning qismiy yig‘indilaridan iborat $\{S_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ...$$

qatorlar berilgan bo‘lib, $a_n \geq 0,\ b_n \geq 0\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ ...)$ bo‘lsin.

22.2-teorema. Agar

$$a_n \leq b_n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ ...) \qquad (22.7)$$

bo‘lib, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Agar $a_n \leq b_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ ...)$ bo‘lib, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator ham uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Isbot. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorlar hadlari orasida (22.7) munosabat o‘rinli bo‘lsin. U holda bu qatorlarning qismiy yig‘indilari

$$S_n^{'} = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n,\ S_n^{''} = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n$$

uchun

$$S_n^{'} \leq S_n^{''} \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ ...) \qquad (22.8)$$

bo‘ladi. Shartga ko‘ra qator yaqinlashuvchi. U holda bu qatorning qismiy yig‘indilaridan iborat $S_n^{''}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo‘ladi $S_n^{''} \leq M\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ ...)$. Unda (21.8) munosabatdan foydalanib topamiz:

$$S_n^{'} \leq M$$

Demak, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning qismiy yig‘indilaridan iborat $\{S'_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan. 22.1-teoremaga ko‘ra qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Xuddi shunga o‘xshash, (22.7) munosabat o‘rinli bo‘lganda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning uzoqlashuvchi bo‘lishidan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorning ham uzoqlashuvchi bo‘lishi kelib chiqishi isbotlanadi. Teorema isbot bo‘ldi.

22.3-teorema (Koshi alomati). Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

$$(a_n \geq 0,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ ...)$$

qator berilgan bo‘lsin.

Agar

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q$$

bo‘lib, $q < 1$ bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Agar

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1$$

bo‘lsa, u holda qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Isbot. Berilgan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uchun $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ bo‘lsin. Keyingi tengsizlikning har ikki tomonini *n*-darajaga ko‘tarib topamiz:

$$a_n \leq q^n \text{ (n = 1,2,3,...)} \qquad (22.9)$$

Berilgan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator bilan birga yaqinlashuvchi bo‘lgan geometrik qator $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ni qaraydigan bo‘lsak, unda (22.9) munosabatni e'tiborga olgan holda 22.2-teoremadan foydalanib, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashuvchi bo‘lishini topamiz.

Endi

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1$$

bo‘lsin. Bu tengsizlikning har ikki tomonini *n*-darajaga ko‘tarsak, unda

$$a_n \geq 1 \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ ...) \qquad (22.10)$$

bo‘ladi. Berilgan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator bilan birga uzoqlashuvchi

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + ...$$

qatorni qaraydigan bo‘lsak, unda (22.10) munosabatni e'tiborga olgan holda, 22.2-teoremadan foydalanib, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning uzoqlashuvchi bo‘lishini topamiz. Teorema isbot bo‘ldi.

Yuqorida keltirilgan teoremani (Koshi alomatini) limit ko‘rinishida ham ifodalash mumkin. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \ (a_n \geq 0,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

qatorda

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

bo‘lib, $k < 1$ bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo‘ladi, k>1 bo‘lsa, qator uzoqlashuvchi bo‘ladi. Bundan misollarni yechishda keng foydalaniladi.

Misol. Ushbu

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + \frac{1}{\ln^3 4} + \ldots + \frac{1}{\ln^n (n+1)} + \ldots$$

qatorni qaraymiz. Bu qatorning $n \to \infty$ hadi $a_n = \frac{1}{\ln^n (n+1)}$ bo‘lib,

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n (n+1)}} = \frac{1}{\ln(n+1)}$$

bo‘ladi. Bundan

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$$

bo‘lishini topamiz. Demak, berilgan qator yaqinlashuvchi.

22.4-teorema (Dalamber alomati). Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

$$a_n \geq 0,\ n = 1,\ 2,\ 3, \ldots \qquad (22.1)$$

qator berilgan bo‘lsin. Agar

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

bo‘lib, q<1 bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Agar

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Bu teoremaning isboti yuqorida keltirilgan teoremaning isboti kabidir. Teoremaning isbotini o‘quvchiga havola etamiz.

22.4-teoremaning (Dalamber alomatining) quyida ifodalanadigan limit ko‘rinishidan ko‘pgina misollarni yechishda foydalaniladi.

Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

$$a_n \geq 0,\ n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

qatorda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$$

bo‘lib, $d < 1$ bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo‘ladi, $d > 1$ bo‘lsa, qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Misol. Ushbu qatorni qaraymiz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} = 1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \ldots + \frac{n!}{n^n} + \ldots$$

Bu qatorda

$$a_n = \frac{n!}{n^n},\ a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

bo‘lib,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = (n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$= \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

bo‘ladi. Limitga o‘tib topamiz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Ravshanki, $\frac{1}{e} < 1$. Demak, berilgan qator yaqinlashuvchi.

4-§. Hadlarining ishoralari almashinib keladigan qatorlar. Leybnits teoremasi

Ushbu

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^n a_n + ... \qquad (22.11)$$

qator bunda $a_p > 0$ (p = 1, 2, 3, . . .) hadlarining ishoralari almashinib keladigan qatorlar deyiladi.

Masalan, ushbu

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + ...$$

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} + ...$$

qatorlar hadlarining ishoralari almashinib keladigan qatorlardir.

22.5- teorema. (Leybnits teoremasi). Ushbu

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^n a_n + ... \ (a_n > 0)$$

qator hadlarining ishoralari almashinib keladigan qator bo‘lsin. Agar bu qatorning hadlari uchun

$$1)\ a_1 > a_2 > ... > a_n > ...$$

va

$$2)\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

bo‘lsa, u holda (22.11) qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Isbot. Berilgan (22.11) qatorning quyidagi qismiy yig‘indilarini yozamiz:

$$S_2 = a_1 - a_2,$$

$$S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4),$$

$$S_6 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6)$$

.....

$$S_{2k} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2k-1} - a_{2k} = (a_1 - a_2) +$$
$$+ (a_3 - a_4) + ... + (a_{2k-1} - a_{2k})$$

.....

Shartga ko‘ra,

$$a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_n > ...$$

Demak,

$$a_1 - a_2 > 0,\ a_3 - a_4 > 0,\ ...,\ a_{2k-1} - a_{2k} > 0, ...$$

Unda, ravshanki, qatorning qismiy yig‘indilaridan iborat $S_2, S_4, S_6, ..., S_{2k}, ...$ ketma-ketlik o‘suvchi bo‘ladi:

$$S_{2k+2} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2k-1} - a_{2k}) + (a_{2k+1} - a_{2k+2}) =$$
$$= S_{2k} + (a_{2k+1} - a_{2k+2}) > S_{2k}.$$

Ikkinchi tomondan,

$$S_{2k} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2k-1} - a_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \\ - ... - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k}$$

bo‘lib,

$$a_2 - a_3 > 0,\ a_4 - a_5 > 0,\ ...,\ a_{2k-2} - a_{2k-1} > 0$$

bo‘lganligi sababli $S_{2k} < a_1$ bo‘ladi. Demak, *{S2k}* ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan.

Shunday qilib, *{S2k}* ketma-ketlik o‘suvchi va yuqoridan chegaralangan. Demak, bu *{S2k}* ketma-ketlik chekli limitga ega bo‘ladi:

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k} = S.$$

Endi berilgan (22.11) qatorning ushbu

$$S_1 = a_1,$$
$$S_3 = a_1 - a_2 + a_3 = (a_1 - a_2) + a_3,$$
$$S_5 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + a_5$$
$$.....$$
$$S_{2k+1} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2k-1} - a_{2k} = (a_1 - a_2) + \\ + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2k-1} - a_{2k}) + a_{2k+1}$$
$$.....$$

qismiy yig‘indilaridan $S_1,\ S_3,\ S_5, ...,\ S_{2k+1}, \cdots$ ketma-ketlikni hosil qilamiz. Ravshanki,

$$S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1}. \qquad (22.12)$$

Agar teoremaning ikkinchi sharti $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0$ bo‘lishini e'tiborga olib, (22.12) tenglikda limitga o‘tsak,

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to\infty}(S_{2k} + a_{2k+1}) = \lim_{k\to\infty} S_{2k} + \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = S$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, berilgan qatorning qismiy yig‘indilaridan iborat *{Sn}* ketma-ketlik chekli limitga ega bo‘lishi ko‘rsatildi. Bu esa (22.11) qatorning yaqinlashuvchi ekanligini bildiradi. Teorema isbot bo‘ldi.

Misol. Yuqorida keltirilgan

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + ...$$

qator uchun

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > ... > \frac{1}{n} > ...$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Demak, Leybnits teoremasiga ko‘ra, bu qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.

5-§. Ixtiyoriy hadli qator.
Qatorning absolyut yaqinlashuvchiligi

Biror

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

qator berilgan bo‘lsin. Qismiy yig‘indilardan $\{S_n\}$:

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ ...,S_n,...$$

ketma-ketlik tuzamiz. Ma'lumki, agar $n \to \infty$ da $\{S_n\}$ ketma- ketlik chekli limitga ega bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi deyilar edi. Demak, berilgan qatorning yaqinlashuvchi bo‘lishini ko‘rsatish uning qismiy yig‘indilaridan iborat $\{S_n\}$ ketma-ketlikning chekli limitga ega bo‘lishini ko‘rsatishdan iborat.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashuvchiligi haqida ushbu teoremaga kelamiz:

22.6-teorema. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday natural p_0 son topilsaki, barcha $p > p_0$ va $t = 1, 2, 3, . . .$ lar uchun

$$|S_{n+m} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + ... + a_{n+m}| < \varepsilon \qquad (22.13)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.

22.3-eslatma. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda shunday natural p_0 son topiladiki, $p > p_0$, $t = 1, 2, 3, ...$ uchun

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+m}| < \varepsilon$$

bo‘ladi.

Biror

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (22.1)$$

qator berilgan bo‘lsin. Bu qatorning absolyut qiymatlaridan ushbu qatorni tuzamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_n| + ... \qquad (22.14)$$

Yuqoridagi mulohazalardan foydalanib quyidagi teoremani isbotlash qiyin emas.

22.7-teorema. Agar (22.14) qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda (22.1) qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.

22.4-eslatma. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

qatorning yaqinlashuvchi bo‘lishidan

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_n| + ...$$

qatorning yaqinlashuvchi bo‘lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

22.3-ta'rif. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_n| + ...$$

qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

qator absolyut yaqinlashuvchi qator deb ataladi.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo‘lib, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator shartli yaqinlashuvchi qator deyiladi.

6-§. Funksional qatorlar

Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ... + f_n(x) + ... \qquad (22.15)$$

qator funksional qator deb ataladi.

Masalan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} + ... \qquad (22.16)$$

funksional qator bo‘ladi.

(22.15) qatorning har bir hadi X da aniqlangan bo‘lsin.

X to‘plamda x_0 nuqtani olib, (22.15) funksional qator hadlarining shu nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz. Natijada (22.15) funksional qator ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + f_3(x_0) + ... + f_n(x_0) + ...$$

sonli qatorga aylanadi.

Masalan, yuqorida keltirilgan (22.16) funksional $x_0 = \frac{1}{2}$ da quyidagi sonli qatorga aylanadi:

$$\sum \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} + ...$$

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ funksional qator x_0 nuqtada yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ sonli qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ funksional qator x_0 nuqtada uzoqlashuvchi deyiladi.

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ funksional qator *X* to‘plamning har bir nuqtasida yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda berilgan funksional qator *X* to‘plamda (sohada) yaqinlashuvchi deyiladi.

Biror

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + ...$$

funksional qator berilgan bo‘lib, u *X* to‘plamda (sohada) yaqinlashuvchi bo‘lsin. Unda

$$\lim_{n\to\infty}[f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)]$$

limit olingan *x* ga bog‘liq. Uni *S(x)* bilan belgilaylik:

$$\lim_{n\to\infty}[f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)] = S(x).$$

Bu *S(x)* berilgan funksional qatorning yig‘indisi deyiladi. Sonli qatorlardagiga o‘xshash, ushbu

$$S_1(x) = f_1(x),$$
$$S_2(x) = f_1(x) + f_2(x),$$
$$.....$$
$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x),$$
$$.....$$

yig‘indilar $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ funksional qatorning qismiy yig‘indilari deyiladi. Yuqorida keltirilganlardan ko‘rinadiki, qator yig‘indisi

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

bo‘lar ekan.

Misollar. 1. Ushbu funksional qatorni qaraymiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} + ...$$

Bu qatorning qismiy yig‘indilari $(x \neq 1)$

$$S_1(x) = 1,$$

$$S_2(x) = 1 + x = \frac{(1+x)(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x},$$

$$S_3(x) = 1 + x + x^2 = \frac{(1+x+x^2)(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^3}{1-x},$$

.....

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x},$$

.....

bo‘ladi.

Ravshanki, x=1 da $S_n(x) = 1 + 1 + . . . + 1 = p$.

Demak,

$$S_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^n}{1-x}, \ агар\ x \neq 1, \\ n, \ агар\ x = 1 \end{cases}$$

bo‘ladi.

Aytaylik, $x \in (-1,1)$ bo‘lsin. Bu holda

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-x} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-x} \cdot x^n = \frac{1}{1-x}$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, berilgan funksional qator X=(-1, 1) da yaqinlashuvchi bo‘lib, uning yig‘indisi

$$S(x) = \frac{1}{1-x}$$

ga teng.

2. Ushbu funksional qatorni qaraymiz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+x+1)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + ... +$$

$$+ \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} + ... \ (x \neq -n,\ n = 1,\ 2,\ ...)$$

Bu funksional qatorning qismiy yig‘indisini topamiz:

$$S_n(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+...+\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}=$$
$$=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)+...+\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+n+1}.$$

Unda

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)= f_1(x)+ f_2(x)+...+ f_n(x)+...$$

bo‘ladi.

Demak, berilgan funksional qator $X = R\setminus\{1,2,3,...\}$ to‘plamda yaqinlashuvchi, uning yig‘indisi esa $S(x)=\frac{1}{x+1}$ ga teng.

Biror

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)= f_1(x)+ f_2(x)+...+ f_n(x)+... \qquad (22.15)$$

funksional qator berilgan bo‘lsin. Bu qator *X* to‘plamda yaqinlashuvchi bo‘lib, uning yig‘indisi *S(x)* bo‘lsin. Unda

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)$$

bo‘ladi. Limit ta'rifiga ko‘ra, $\forall\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday natural n_0 son topiladiki, barcha $p > p_0$ uchun

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Ravshanki, *X* to‘plamdan olingan *x* ning qiymatiga qarab $\{S_n(x)\}$ ketma-ketlik turlicha bo‘ladi. Binobarin, yuqorida eslatib o‘tilgan limit ta'rifidagi n_0 natural son olingan *x* ga ham bog‘liq bo‘ladi. Agar bordiyu ta'rifdagi p_0 natural son faqat e ga bog‘liq bo‘lib, qaralayotgan *x* nuqtaga bog‘liq bo‘lmasa, u holda $\{S_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik *X* to‘plamda *S(x)* ga tekis yaqinlashuvchi deyiladi.

22.4-ta'rif. Agar $\forall\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday natural p_0 son topilsaki, barcha $p > n_0$ va ixtiyoriy *x* nuqtalar uchun bir vaqtda

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ funksional qator X to‘plamda *S(x)* ga tekis yaqinlashadi deyiladi.

Tekis yaqinlashish tushunchasi funksional qator nazariyasida muhim rol o‘ynaydi. Quyida funksional qatorlarning tekis yaqinlashishini aniqlashda ishlatiladigan Veyershtrass alomatini isbotsiz keltiramiz.

Veyershtrass alomati. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

funksional qatorning har bir $f_n(x)$ hadi X to‘plamda ushbu

$$|f_n(x)| \le C_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

tengsizlikni qanoatlantirsa va

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = C_1 + C_2 + \ldots + C_n + \ldots$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ funksional qator X to‘plamda tekis yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n^2} + \ldots$$

funksional qator $X = (-\infty, +\infty)$ da tekis yaqinlashuvchi bo‘ladi, chunki

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$$

bo‘lib,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

sonli qator yaqinlashuvchi.

7-§. Tekis yaqinlashuvchi funksional qatorning xossalari

Tekis yaqinlashuvchi funksional qatorlarning xossalarini isbotsiz keltiramiz. Biror

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

funksional qator berilgan bo‘lsin. Bu qator X to‘plamda yaqinlashuvchi bo‘lib, uning yig‘indisi $S(x)$ bo‘lsin.

1°. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ funksional qatorning har bir $f_n(x)$ hadi $(p=1,2,3,\ \ldots)$ X to‘plamda uzluksiz bo‘lib, bu funksional qator X to‘plamda tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda qatorning yig‘indisi $S(x)$ ham X to‘plamda uzluksiz bo‘ladi.

2°. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ funksional qatorning har bir $f_n(x)$ hadi $(p=1,2,3,...)$ $[a;b]$ segmentda uzluksiz bo‘lib, bu funksional qator shu segmentda tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda qator hadlarining integrallaridan tuzilgan

$$\int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + ... + \int_a^b f_n(x)dx + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

qator yaqinlashuvchi bo‘ladi, uning yig‘indisi esa

$$\int_a^b S(x)dx$$

ga teng bo‘ladi:

3°. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ funksional qatorning har bir $f_n(x)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ ...)$ hadi $[a,\ b]$ segmentda uzluksiz $f'_n(x)$ hosilaga ega bo‘lib, bu hosilalardan tuzilgan

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{'}(x) = f_1^{'}(x) + f_2^{'}(x) + ... + f_n^{'}(x) + ...$$

funksional qator $[a,\ b]$ da tekis yaqindashuvchi bo‘lsa, u holda funksional qator yig‘indisi $S(x)$ shu $[a,\ b]$ segmentda $S'(x)$ hosilaga ega va quyidagicha bo’ladi

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{'}(x)$$

8-§. Darajali qatorlar

Ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... \qquad (22.16)$$

ko‘rinishdagi qator darajali qator deb ataladi, bunda a_0, a_1, a_2, ..., a_p, ... lar o‘zgarmas sonlar bo‘lib, ular darajali qatorning koeffitsientlari deyiladi.

Demak, darajali qatorlar funksional qatorlarning xususiy holidan iborat.

Misollar. Ushbu

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... \qquad (0! = 1)$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n\ln(n+1)}$

qatorlar darajali qatorlardir.

Har qanday darajali qator $x=0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo‘ladi, chunki bu holda (22.17) qator ushbu

$$a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + ... + a_n \cdot 0 + ...$$

ya'ni

$$a_0 + 0 + 0 + 0 + ... + 0 + ...$$

ko‘rinishdagi sonli qatorga aylanadi va

$$\lim_{n\to\infty} S_n(0) = \lim_{n\to\infty}(a_0 + 0 + 0 + 0 + ... + 0) = \lim_{n\to\infty} a_0 = a_0$$

bo‘ladi.

22.8-teorema (Abel teoremasi). Agar

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... \qquad (22.17)$$

darajali qator x ning $x=x_0$ ($x_0 \neq 0$) qiymatida yaqinlashuvchi bo‘lsa, X ning

$$|x| < |x_0| \qquad (22.18)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida (22.17) darajali qator absolyut yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Isbot. Berilgan (2.17) darajali qator $x=x_0$ da yaqinlashuvchi bo‘lsin. Bu esa ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$$

sonli qatorning yaqinlashuvchi bo‘lishini bildiradi. Ma'lumki, sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, uning umumiy hadi $n \to \infty$ da nolga intilar edi:

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0.$$

Demak, $\{a_n x_0^n\}$ sonlar ketma-ketligi yaqinlashuvchi. Unda bu ketma-ketlik chegaralangan, ya'ni

$$|a_n x_0^n| \le M \quad (n = 0, 1, 2, ...) \qquad (22.19)$$

*(M - o‘*zgarmas son) bo‘ladi.

Endi berilgan qatorni quyidagicha

$$a_0 + a_1 x_0 \cdot \frac{x}{x_0} + a_2 x_0^2 \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + ... + a_n x_0^n \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + ...$$

yozib, uning hadlarining absolyut qiymatlaridan ushbu

$$|a_0| + |a_1 x_0| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2 x_0^2| \cdot \left|\left(\frac{x}{x_0}\right)\right|^2 + ... + |a_n x_0^n| \cdot \left|\left(\frac{x}{x_0}\right)\right|^n + ...$$

qatorni tuzamiz. Ushbu qator

$$M + M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right| + M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + ... + M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + ... \qquad (22.20)$$

geometrik qator bo‘lib, yaqinlashuvchidir.

$|a_n x_0^n| \cdot \left|\left(\frac{x}{x_0}\right)\right|^n \le M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ bo‘lganligidan solishtirish teoremasiga ko‘ra

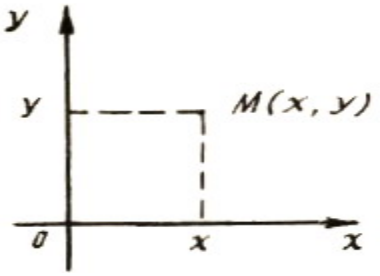
$$|a_0|+|a_1x_0|\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|+|a_2x_0^2|\cdot\left|\left(\frac{x}{x_0}\right)\right|^2+...+|a_nx_0^n|\cdot\left|\left(\frac{x}{x_0}\right)\right|^n+...$$

qator yaqinlashuvchi bo‘ladi. Demak, berilgan qator x ning $|x|<|x_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida absolyut yaqinlashuvchi bo‘ladi. Teorema isbot bo‘ldi.

21.1-natija. Ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$$

darajali qator $x=x_0$ $(x\neq 0)$ nuqtada yaqinlashuvchi, $x=x_1$ da esa uzoqlashuvchi bo‘lsin. Ravshanki, $|x_0|<|x_1|$ bo‘ladi. Unda yuqorida aytilganlarga ko‘ra x ning $|x|<|x_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida yaqinlashuvchi, $|x|>|x_1|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida uzoqlashuchi bo‘ladi (129-chizma).



129-chizma.

(22.17) darajali qatorning yaqinlashadigan nuqtalardan iborat to‘plam *{x}* bo‘lsin (ya'ni shu *{x}* to‘plamning har bir nuqtasida (22.17) qator yaqinlashuvchi). Bu *{x}* to‘plam yuqoridan chegaralangan bo‘ladi. U holda *{x}* to‘plamning aniq yuqori chegarasi mavjud. Uni *R* bilan belgilaylik:

$$R=\sup\{x\}.$$

Ko‘rsatish mumkinki, x ning ushbu $|x|<R$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida (22.17) qator yaqinlashuzchi, x ning $|x|>R$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida (22.17) qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Ushbu $(-R, R)$ interval (22.17) darajali qatorning yaqinlashish intervali, R esa yaqinlashish radiusi deb ataladi.

Agar darajali qator $x=0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo‘lib, boshqa barcha nuqtalarda uzoqlashuvchi bo‘lsa, u holda yaqinlashish radiusi $R=0$ deb olinadi. Agar darajali qator barcha nuqtalarda yaqinlashuvchi bo‘lsa, $R=+\infty$ deb olinadi.

22.5-eslatma. Darajali qator $x=-R$, $x=R$ nuqtalarda yaqinlashuvchi bo‘lishi ham mumkin, uzoqlashuvchi bo‘lishi ham mumkin.

Ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... \qquad (22.17)$$

darajali qator berilgan bo‘lsin. Bu darajali qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan ushbu qatorni qaraylik:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n x^n\right| = \left|a_0\right| + \left|a_1 x\right| + \left|a_2 x^2\right| + ... + \left|a_n x^n\right| + ...$$

Dalamber alomatini qo‘llab topamiz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|a_{n+1} x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot \left|x\right| = \left|x\right| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ (a_n \neq 0).$$

Aytaylik, ushbu

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l \ (a_n \neq 0)$$

limit mavjud bo‘lsin. Unda (22.17) qator $|x|l < 1$, ya'ni $|x| < \frac{1}{l}$ bo‘lganda yaqinlashuvchi, $|x|l > 1$, ya'ni $|x| > \frac{1}{l}$ bo‘lganda uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Demak, berilgan darajali qatorning yaqinlashish intervali $\left(-\frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$, radiusi esa bo‘ladi $R = \frac{1}{l}$.

Shunday qilib, (22.17) darajali qatorning yaqinlashish radiusini topish uchun quyidagi formulaga ega bo‘lamiz:

$$R = \frac{1}{l} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad (22.21)$$

Misollar. 1 . Ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusi va yaqinlashish intervali topilsin.

Yuqoridagi formulaga ko‘ra

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{1}\right| = 1.$$

Demak, berilgan darajali qatorning yaqinlashish radiusi *R=1*, yaqinlashish intervali (-1, 1) bo‘ladi.

Bu darajali qator *R*=-1, *R*=1 nuqtalarda uzoqlashuvchidir (chunki 1+1+1+…+1+.. va 1-1+1-1+1-1+…+$(-1)^{n-1}$+… sonli qatorlar uzoqlashuvchi).

2. $1+\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+...+\frac{x^n}{n^2}+...$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi va yaqinlashish intervali topilsin.

(22.21) formuladan foydalanib topamiz:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n+1)^2}{1}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=1$$

Demak, darajali qatorning yaqinlashish radiusi *R*=1, yaqinlashish intervali esa (-1, 1) bo‘ladi. Berilgan darajali qator *R* = -1, *R* = 1 nuqtalarda yaqinlashuvchi bo‘ladi (chunki $1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+...$ va $1-\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+...+(-1)^n\frac{1}{n^2}+...$ sonli qatorlar yaqinlashunchidir).

Demak, berilgan darajali qatorning yaqinlashish sohasi [-1, 1] segmentdan iborat ekan.

9-§. Darajali qatorning xossalari

1°. Agar $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi *R (R>0)* bo‘lsa, darajali qator $[-\alpha,\alpha]$ segmentda $(0<\alpha<R)$ tekis yaqinlashuvchi bo‘ladi.

2°. Agar $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi *R (R>0)* bo‘lsa, darajali qatorning yig‘indisi *S(x):*

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$$

(-R,R) intervalda uzluksiz bo‘ladi.

3^0.Agar darajali qatorning yaqinlashish radiusi *R (R>0)* bo‘lib $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n$, yig‘indisi

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+....$$

bo‘lsa, u holda bu qatorni $[a,b]\subset(-R,R)$da hadlab, integrallash mumkin, ya'ni

$$\int_a^b S(x)dx=\int_a^b\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right]dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_a^b a_nx^ndx\right]$$

bo‘ladi.

4°. Agar

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusi *R (R>0)* bo‘lib, yig‘indisi

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$$

bo‘lsa, u holda bu qatorni *(-R, R)* da hadlab differensiallash mumkin, ya'ni

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n x^n\right)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ... + na_n x^{n-1} + ...$$

bo‘ladi.

10-§. Teylor va Makloren qatorlari. Funktsiyalarni Makloren qatoriga yoyish va ularni taqribiy hisoblaslarga tadbiqlari

Agar *y=f(x)* funktsiya $x = x_0$ ($x_0 - \delta < x < x_0 + \delta,\ \delta > 0$ nuqtaning biror atrofida, istalgan tartibli chekli hosilalarga ega bo’lsa, bu holda berilgan funksiyani quyidagi (darajali) Teylor qatoriga yoyib yozish mumkin:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \cdots$$
$$+a_n (x - x_0)^n + r_n (x) \qquad (22.22)$$

bu yerda $r_n(x)$ qatorning qoldiq hadi.

Darajali qatorlarni $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta,\ \delta > 0$ yaqinlashish oralig’ida hadlab differensiallash mumkenligidan, (22.22) qatordan ketva-ket n marta hosila olib quyidagiga ega bolamiz:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots$$
$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - x_0)^1 + \cdots + n(n-1)(x - x_0)^{n-2} + \cdots$$

.....

$$f^n(x) = n!\, a_n + \cdots$$

Hosil bo’lgan tengliklarni $x = x_0$ nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(x_0) = a_0, \qquad f'(x_0) = 1!\, a_1, \quad f''(x_0) = 2!\, a_2, \ldots\ldots, f^n(x_0) = n!\, a_n,$$

Bundan $a_0 = f(x_0),\ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \ldots\ldots, a_n = \frac{f^n(x_0)}{n!}$

$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n, \ldots$.. Teylor koeffisientlari deyiladi. Bu koeffisientlarni (22.22) ga qo’yib quyidagi f(x) funksiyani Teylor qatoriga ega bo’lamiz:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$
$$+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x) \qquad (22.23)$$

(22.23) *f(x)* funksiyani Teylor qatoriga yoyilmasidan, $x_0 = 0$ bo’lganga *f(x)* funksiyaning Makloren qatoriga yoyilmasi hosil bo’ladi:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x) \qquad (22.24)$$

bunda *r(x)* qoldiq had. Shuni e'tiborga olish kerakki, (22.22) qatorning koeffitsientlari bilan (22.23) formuladagi koeffitsientlar bir xil bo‘ladi.

(22.22) darajali qatorning qismiy yig‘indisi

$$S_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

bo‘lsa, unda (22.24) formula ushbu

$$f(x)=S_n(x)+r_n(x) \qquad (22.25)$$

ko‘rinishga keladi.

(22.22) darajali qator (*-R, R)* yaqinlashuvchi bo‘lsin. Unda

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=f(x) \quad (\forall x\in(-R,R))$$

bo‘lib, (22.25) munosabatdan

$$\lim_{n\to\infty}[f(x)-S_n(x)]=\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Aksincha, $\forall x\in(-R,\ R)$ da $\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$ bo‘lsa, ya'ni (22.25) munosabatdan

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=f(x)$$

bo‘lishi, demak, (*-R,R)* da (22.22) darajali qator yaqinlashuvchi, uning yig‘indisi *f(x)* ga teng bo‘lishi kelib chiqadi:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+... \qquad (22.25)$$

Shunday qilib, (22.24) munosabatning o‘rinli bo‘lishi uchun $\forall x\in(-R,\ R)$ da

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$$

bo‘lishi zarur va yetarli ekan.

Agar *f(x)* funksiya uchun (22.25) munosabat o‘rinli bo‘lsa, *f(x)* funksiya Makloren qatoriga yoyilgan deb ataladi.

Agar $r_n(x)$ yetarli darajada kichik bo‘lsa, u holda yuqoridagi (22.25) munosabatdan ushbu

$$f(x)\approx f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+... \qquad (22.26)$$

taqribiy formulaga ega bo‘lamiz.

Endi

$$f(x)=e^x$$

funksiyani Makloren qatoriga yoyamiz. Ma'lumki, $f(x)=e^x$ funksiya ixtiyoriy $[-r,\ r]$ $(r>0)$ segmentda istalgan tartibdagi hosilaga ega bo‘lib,

$$f^{(n)}(x)=e^x \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ ...)$$

bo‘ladi. Ravshanki,

$$f^{(n)}(0)=1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ ...)$$

Bu funksiyaning Makloren formulasi

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+r_n(x)$$

bo‘ladi. Qoldiq had $r_n(x)$ esa Lagranj ko‘rinishida quyidagicha bo‘ladi:

$$r_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \quad (0<\theta<1)$$

Agar $\forall x\in[-r,\ r]$ uchun

$$|r_n(x)|=\left|\frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}\right|\le\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}e^r$$

va $n\to\infty$ da

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

bo‘lishini e'tiborga olsak, unda

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$$

bo‘lishini topamiz. Bu $f(x)=e^x$ funksiyaning Makloren qatoridir. Xuddi shu yo‘l bilan $f(x)=sinx$, $f(x)=cosx$, $f(x)=In(1+x)$, $f(x)=(1+x)^\alpha$ funksiyalarning Makloren qatorlari topiladi. Quyida ularni keltirish bilan kifoyalanamiz.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}+...$$

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+..$$

Bu keltirilgan funksiyalar uchun (22.26) taqribiy formula quyidagicha bo‘ladi:

$$e^x\approx1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$\cos x\approx=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},$$

$$(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

Teylor va Makloren qatorlaridan foydalanib, istalgan tartibli chekli hosilalarga ega bo'lgan murakkab funksiyani, sodda butun ko'rsatkichli ko'phad bilan almashtirib yozish mumkin.

Agar *f(x)* funktsiya yoki uning hosilalari *x=0* nuqtada mavjud bo'lmasa, bunday funktsiyani Makloren qatoriga yoyib bo'lmaydi. Masalan *lnx, ctgx, 1/x* funktsiyalarni Makloren qatoriga *x=0* nuqtada yoyib bo'lmaydi. Bunday hollarda berilgan funktsiyani Teylor qatoriga yoyish mumkin.

Funksiyalarni qatorlaga yoyilmasidan foydalanib ularni taqribiy qiymatlarini hisoblash mumkin.

Misol-1. Yuqorida keltirilgan funksiyalarning Makloren qatoridira yoyilmalari-dan foydalanib quyidagilarni 1) e sonini, 2) $sin1^0$ *ni*, 3) $\ln 2$, 4) $\sqrt{37}$, 5) $\sqrt[3]{30}$ *ni* 0,001 gacha aniqlikda hisoblang?

Yechish. 1) $f(x) = e^x$ funksiyaning Makloren qatoriga yoyilmasidan foydalanamiz x=1 qiymatida

$$e^1 = e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx 1 + 1 + 0{,}5 + 0{,}1667 + 0{,}0417 + 0{,}0083 + 0{,}0014 = 2{,}7181.$$

1) $sin1^0$ ni taqribiy giqiymatini, yuqorida keltirilgan darajali qatorga yoyilmasidan foydalanib $x = 1^0 = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}0175$ qiymatida taqribiy hisoblaymiz

2) $sin1^0 \approx 0{,}0175 - \frac{0{,}0175^3}{3!} + \frac{0{,}0175^5}{5!} \approx 0{,}0174.$

3) $f(x) = \ln(1+x)$ logorifmik funrsiyani Makloren qatoriga yoyilmasiga $x = 1$ qiymat quyib hisoblaymiz

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} \approx 0{,}6581.$$

4) $\sqrt{37}$ dan taqribiy ildiz chiqarish uchun $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ funksiyani darajali qatorga yoyilmasida $\alpha = \frac{1}{2}$ qo'yib quyidagi taqribiy kvadrat ildiz chiqarish formulasiga ega bo'lamiz:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

$$\sqrt{37} = \sqrt{36+1} = 6\sqrt{1+\frac{1}{36}} \approx 6\left(1 + \frac{1}{2\cdot 3\,6} - \frac{1}{8\cdot 36^2}\right) \approx$$

$$\approx 6(1 + 0{,}0139 - 0{,}0001) = 6{,}0828.$$

5) 6) $\sqrt[3]{30}$ dan taqribiy ildiz chiqarish uchun $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ funksiyani darajali qatorga yoyilmasiga $\alpha = \frac{1}{3}$ qo'yib, kubinchi taqribiy ildiz chiqarish formulasiga ega bo'lamiz:

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$$

Bizni misolda

$(30)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3+27} = 3\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}} \approx 3(1+\frac{1}{27}-\frac{1}{729}) \approx$

$\approx 3(1+0{,}037-0{,}0014) = 3{,}1068.$

Mavzu bo'yicha tekshirish uchun savollar:

1. Yaqinlashuvchi sonly qatorning yig'indisi deb nimaga aytiladi ?
2. Yaqinlashuvchi qatorlarning asosiy hossalarini sanab o'ting.
3. Qator yaqinlashishining zaruruy sharti qanday?
4. Musbat hadli qator yaqinlashishining yetarli shartlari qanday ?
5. Ishorasi almashunuvchi qatorlarning yaqinlashishi qanday tekshiriladi ?
6. Qanday sonliy qatorlar absalyut yaqinlashuvchi, shartli yaqinlashuvchi deyiladi ?
7. Funksional qator deganda qanday qatorni tushunasiz ?
8. Funksional qatorning yaqinlashishi qanday tekshiriladi ?
9. Qanday qator darajali qator deyiladi ?
10. Darajali qatorning yaqinlashish sohasi qanday topiladi ?
11. Funksiyalarni darajali qatorga yoyilish uchun qanday shartni qanoatlantirishi kerak ?
12. Teylor va Makloren qatorlarini yozib tushuncha bering?
13. Elementar funksiyalarni Makloren qatoriga yoyilmasini formulalarini yozing?
14. Makloren qatorini taqribiy hisoblashlarga qo'llanishiga misollar keltiring?

Kalit so'zlar:

Sonly qator, yig'indi, yaqinlashuvchi qator, hossalari, zaruruy, yetarli shartlar, ishorasi almashunuvchi qator, Leybenis, absalyut, shartli yaqinlashuvchi, funksional qator, darajali qator, yaqinlashish sohasi, funksiya, darajali qatorga yoyilish, Teylor , Makloren qatorlari, elementar funksiyalar, Makloren, taqribiy.

Xulosa

Yaqinlashuvchi sonly qatorning yig'indisi, yaqinlashuvchi qatorlarning asosiy hossalari, qator yaqinlashishining zaruruy sharti, musbat hadli qator yaqinlashishining yetarli shartlari, ishorasi almashunuvchi qatorlarning yaqinlashishi, qatorlarni absalyut, shartli yaqinlashuvchiligini tekshirish, funksional qator, funksional qatorning yaqinlashishi, darajali qator, darajali qatorning yaqinlashish sohasi, funksiyalarni darajali qatorga yoyilish, Teylor va Makloren qatorlari, elementar funksiyalarni Makloren qatoriga yoyish mavzulari o'rganilgan. Makloren qatorini taqribiy hisoblashlarga qo'llanishiga misollar yechilgan.

XXIII BOB. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

l-§. Differensial tenglama tushunchasi

Erkli o'zgaruvchi *x*, noma'lum funksiya y=*y(x)* va bu funksiyaning hosilalarini bog'lovchi tenglama *differensial tenglama* deyiladi.

Bunday tenglama umumiy holda quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0. \qquad (23.1)$$

(23.1) tenglamada qatnashgan noma'lum funksiya hosilalarining eng yuqori tartibi differensial tenglamaning *tartibi* deyiladi. Demak, (23.1) tenglama n-tartibli differensial tenglamadir.

Agar $y = \varphi(x)$ funksiya va uning hosilalarini (23.1) tenglamaga qo'yilganda uni ayniyatga aylantirsa, ya'ni

$$F\left[x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n)}(x)\right] = 0 \qquad (23.2)$$

bo'lsa, unda $y = \varphi(x)$ funksiya (23.1) tenglamaning yechimi deyiladi.

Differensial tenglamaning yechimi cheksiz ko'p bo'ladi. Barcha yechimlarni o'z ichiga olgan yechim differensial tenglamaning umumiy yechimi deyiladi.

Misol. Ushbu

$$y'' - x = 0$$

tenglamani qaraylik. Bu 2-tartibli differensial tenglamadir.

$\varphi(x) = \frac{1}{6}x^3 + x$ funksiya uning yechimi bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$\varphi'(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 + x\right)' = \frac{1}{2}x^2 + 1, \ \varphi''(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)' = x$$

bo'lib, $\varphi''(x)$ ni berilgan tenglamaga qo'ysak, bu tenglama ayniyatga aylanadi:

$$\varphi''(x) - x = x - x = 0.$$

Demak, berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$f(x)=\frac{1}{6}x^3+C_1x+C_2$$

bo‘ladi, bunda S_1, S_2 - ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar. (Xususan, S_1=1, S_2=0 bo‘lganda, umumiy yechimdan yuqoridagi yechim kelib chiqadi).

2-§. Birinchi tartibli differensial tenglamalar

Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$F(x,y,y')=0.$$

Agar bu tenglama y′ ga nisbatan yechiladigan bo‘lsa, unda

$$y'=f(x,y) \qquad (23.3)$$

tenglamaga kelamiz. Odatda, (22.3) tenglama h*osilaga nisbatan yechilgan differensial tenglama* deyiladi.

Endi (23.3) tenglamaning xususiy hollarini qaraymiz.

1°. (23.3) tenglamaning o‘ng tomoni faqat *x o‘*zgaruvchiga bog‘liq bo‘lsin:

$$y'=f(x) \qquad (23.4)$$

Bu tenglikni integrallab topamiz:

$$y=\int f(x)dx+C$$ (*C-o‘*zgarmas son).

Demak, (23.4) tenglamaning umumiy yechimi

$$y=\int f(x)dx+C \qquad (23.5)$$

bo‘ladi.

Misol. $y'=2x^2$ tenglamani yeching.

yechish. Tenglamaning yechimini (23.5) formuladan foydalanib topamiz:

$$y=\int 2x^2dx+C=\frac{2}{3}x^3+C.$$

2°. (23.3) tenglamaning o‘ng tomoni faqat y *o‘*zgaruvchiga bog‘liq bo‘lsin:

Avvalo, $y'=\frac{dy}{dx}$ ekanini e'tiborga olamiz. So‘ngra bu tenglamada y ni erkli o‘zgaruvchi, *x* ni esa y ning funksiyasi bo‘lsin deymiz.

Unda

$$\frac{dy}{dx}=f(y)\Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x)}$$

bo‘lib, yuqoridagi 1°- holga kelamiz. Keyingi tenglamaning yechimi

$$x=\int\frac{1}{f(y)}dy+C$$

bo‘ladi.

Misol. $y'=7y^2$ tenglamani yeching.

yechish. Bu tenglamani ushbu ko‘rinishda yozib olamiz:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{7y^2}.$$

Bu tenglikdan esa

$$dx=\frac{1}{7}\cdot\frac{dy}{y^2}.$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Uni integrallab topamiz:

$$x=\int\frac{1}{7}\frac{dy}{y^2}+C=\frac{1}{7}\int y^{-2}dy+C=\frac{1}{7}\cdot\frac{-1}{y}+C=-\frac{1}{7y}+C.$$

Demak,

$$y=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{C-x}.$$

3°. (23.3) tenglamaning o‘ng tomoni faqat *x o‘*zgaruvchining hamda faqat y *o‘*zgaruvchining funksiyalari ko‘paytmasidan iborat bo‘lsin:

$$y'=f(x)\cdot g(y).$$

Bu tenglamani o‘*zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama* deyiladi. Yana $y'=\frac{dy}{dx}$ ekanligini e'tiborga olsak, u holda

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y)$$

bo‘ladi. Bu tenglikning ikkala tomonini *dx* ga ko‘paytirib va *g(y)* ga bo‘lib, ushbu tenglikka kelamiz:

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx.$$

Uni integrallab topamiz:

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C.$$

Bu integrallar hisoblanib, so‘ng *u* ni *x* orqali ifodalab berilgan tenglamaning yechimiga kelamiz.

Misol. $y'=xy+x+y+1$tenglamani yeching.

yechish. Bu tenglamaning o‘ng tomoni uchun

$$xy+x+y+1=x(y+1)+(y+1)=(x+1)(y+1)$$

bo‘ladi. Demak,

$$\frac{dy}{dx}=(x+1)(y+1).$$

Bu tenglikning ikkala tomonini *dx* ga ko‘paytirsak va y+*1* ga bo‘lsak, unda

$$\frac{dy}{y+1}=(x+1)dx$$

tenglikka kelamiz. Integrallab topamiz:

$$\frac{dy}{y+1}=(x+1)dx$$

tenglikka kelamiz. Intergallab topamiz:

$$\int\frac{dy}{y+1}=\int(x+1)dx+\ln C,\quad \ln(y+1)=\frac{(x+1)^2}{2}+\ln C,\ \frac{y+1}{C}=e^{\frac{(x+1)^2}{2}},\ y=C\cdot e^{\frac{(x+1)^2}{2}}-1.$$

3-§. Bir jinsli tenglamalar

Ikki o‘zgaruvchili *f(x,y)* funksiya uchun ixtiyoriy *t* da

$$f(tx,ty)=tf(x,y)$$

tenglik bajarilsa, unda *f(x,y) bir jinsli* (aniqrog‘i, nolinchi tartibli bir jinsli) *funksiya* deyiladi. Agar

$$y'=f(x,y) \qquad (23.6)$$

differensial tenglamaning o‘ng tomonidagi *f(x,u)* ifoda bir jinsli funksiya bo‘lsa, u holda (23.6) tenglama *bir jinsli differensial tenglama* deyiladi.

f(x,u) bir jinsli funksiya bo‘lsa, u holda ixtiyoriy *t* uchun

$$f(tx, ty) = f(x,y)$$

buladi. Xususan, $t=\frac{1}{x}$ bo‘lganda

$$f\left(1,\frac{y}{x}\right)=f(x,y)$$

bo‘ladi va bu holda (23.6) tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$y'=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=f(x,y) \qquad (23.7)$$

Bu tenglamani yechish uchun $\frac{y}{x}=x$ deb olamiz. Unda

$$y=ux,\ y'=(ux)'=u'x+ux'=u'x+u$$

bo‘ladi. Bularni (23.7) tenglikka quyib topamiz:

$$u'x+u=\varphi(u).$$

$$u'x=\varphi(u)-u,\ x\cdot\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u.$$

Natijada o‘zgaruvchilari ajraladigan ushbu tenglamaga kelamiz:

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}$$

Uni integrallaymiz:

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+\ln C,\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\ln x+\ln C.$$

$$\ln Cx = \int \frac{du}{\varphi(u) - u}.$$

Misol. Ushbu $y' = \frac{y}{y+x}$ tenglamani yeching.

yechish. Bu tenglamaning o‘ng tomonidagi $f(x, y) = \frac{y}{y+x}$ funksiya bir jinsli funksiya. Haqiqatan ham,

$$f(tx, ty) = \frac{tx}{tx + ty} = \frac{tx}{t(x + y)} = \frac{x}{x + y}.$$

Demak, berilgan tenglama bir jinsli differensial tenglama. Bu tenglamani quyidagicha

$$y' = \frac{y}{x + y} = \frac{\frac{y}{x}}{\frac{x + y}{x}} = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}} \qquad (23.8)$$

yozib, so‘ng

$\frac{y}{x} = u$ deb olamiz.

U holda

$$y = ux, y' = (ux)' = u'x + ux' = u'x + u$$

bo‘lib, bularni (23.8) ga qo‘yamiz.

$$u'x + u = \frac{u}{1+u}, u'x = \frac{u}{1+u} - u = -\frac{u^2}{1+u.}$$

Natijada

$$x\frac{du}{dx} = -\frac{u^2}{1+u}, \text{ ya'ni } -\frac{1+u}{u^2}du = \frac{dx}{x}$$

tenglamaga kelamiz.

Bundan

$$\int\left(-\frac{1+u}{u^2}\right)du = \int \frac{dx}{x} + \ln C$$

$$\frac{1}{u} - \ln u = \ln x + \ln C, \; x = y \ln Cy$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Bu esa berilgan tenglamaning umumiy yechimidir.

4-§. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar

Noma'lum funksiya va uning hosilalariga nisbatan chiziqli bo‘lgan ushbu

$$y' + p(x) \cdot y + q(x) = 0 \qquad (23.9)$$

ko‘rinishdagi tenglama birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deyiladi, bunda *p(x)* va *q(x)* uzluksiz funksiyalar.

(23.9) tenglamaning yechimini

$$y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$$

ko‘rinishda izlaymiz: *y=uv* va $y' = (u \cdot v)' = u'v + v'u$ larni tenglamaga qo‘yib topamiz:

$$u'v + uv' + p(x) \cdot uv + q(x) = 0$$

$$u'v + u(v' + p \cdot v) + q = 0. \qquad (23.10)$$

Endi *v* ni shunday tanlaymizki, $y' + pv = 0$ bo‘lsin, ya'ni

$$\frac{dv}{dx} + p \cdot v = 0. \frac{dv}{v} = -p(x)dx,$$

$$\ln v = -\int p(x)dx.$$

$$v = e^{-\int p(x)dx}$$

bo‘lsin. Bu topilgan *v* ni (23.10) tenglamaga qo‘yamiz va hosil bo‘lgan tenglamani yechamiz:

$$u' \cdot e^{-\int p(x)dx} + q = 0, \frac{du}{dx} = -qe^{\int pdx},$$

$$u = -\int q(x)e^{pdx}dx + C.$$

Natijada

$$y = u \cdot v = e^{-\int pdx}\left(c - \int qe^{\int pdx}dx\right).$$

Demak, berilgan (23.9) tenglamaning umumiy yechimi bunday bo‘ladi:

$$y = e^{-\int pdx}\left(c - \int qe^{\int pdx}dx\right). \qquad (23.11)$$

Misol. Ushbu $y' + xy - x^3 = 0$ tenglamani yeching.

yechish. Bu birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamadir. Uning yechimini (22.11) formuladan foydalanib topamiz (bunda $p(x) = x, q(x) = -x^3$);

$$y = e^{-\int xdx}\left(C - \int \left(-x^3\right)e^{\int xdx}dx\right) = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(C + \int x^3 e^{\frac{x^2}{2}}dx\right) =$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}}\left(C + x^2 e^{\frac{x^2}{2}} - 2e^{\frac{x^2}{2}}\right) = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 - 2.$$

5-§. Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar

Ushbu

$$y''+p(x)y'+q(x)y = f(x) \qquad (23.12)$$

ko‘rinishdagi tenglama *ikkinchi tartibli chiziqqli differensial tenglama* deyiladi, bunda *r(x), q(x)* va *f(x)* - uzluksiz funksiyalar.

Agar (23.12) da *f(x)*=0 bo‘lsa, unda (23.12) tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$y''+p(x)y'+q(x)y = 0. \qquad (23.13)$$

Bu tenglama *ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglama* deyiladi.

(23.12) va (23.13) differensial tenglamalarni yechishni o‘rganishdan avval chiziqli bog‘liq hamda chiziqli erkli funksiyalar tushunchasini keltiramiz.

$u_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar *[a;b]* segmentda berilgan bo‘lsin. Agar shunday o‘zgarmas α_1 va α_2 sonlar topilsaki, ulardan hech bo‘lmaganda bittasi noldan farqli bo‘lganda

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0 \qquad (23.14)$$

ayniyat o‘rinli bo‘lsa, u holda $y_1(x]$ va $y_2(x)$ funksiyalar *chiziqli bog‘liq funksiyalar* deyiladi. Agar (23.14) ayniyat faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ bo‘lgandagina o‘rinli bo‘lsa, u holda $u_1(x)$ va $u_2(x)$ funksiyalar *chiziqli erkli funksiyalar* deyiladi.

Misol. Ushbu $u_1(x)=1$, $u_2(x)=x$ funksiyalar chiziqli erkli funksiyalar bo‘ladi, chunki

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x = 0$$

ayniyat $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ faqat bo‘lgandagina o‘rinli bo‘ladi.

Agar $u_1(x)$ va $u_2(x)$ funksiyalar chiziqli erkli funksiyalar bo‘lsa, ulardan hech biri aynan nolga teng bo‘lmaydi.

Endi (23.12) va (23.13) differensial tenglamalarni yechish bilan shug‘ullanamiz. Avvalo,

$$y'' + p(x)y'+q(x)y=0 \qquad (22.13)$$

ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamani qqaraymiz.

23.1-teorema. Agar $u_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar (23.13) tenglamaning chiziqli erkli xususiy yechimlari bo‘lsa, u holda (23.13) tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad (23.14)$$

bo‘ladi, bunda S_1, S_2 - ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar.

Isbot. Modomiki, $u_1(x)$ va $u_2(x)$ (23.13) tenglamaning xususiy yechimlari ekan, unda bu funksiyalar (23.13) tenglamani qanoatlantiradi:

$$y_1'' + p(x) \cdot y_1'(x) + q(x) \cdot y_1(x) = 0. \qquad (23.15)$$

$$y_2'' + p(x)\cdot y_2'(x) + q(x)\cdot y_2(x) = 0.$$

Quyidagi

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

funksiya ham (23.13) tenglamaning yechimi bo‘ladi. Haqiqatan ham, bu funksiya hamda uning hosilalari

$$\left[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)\right] = C_1y'_1(x) + C_2y'_2(x),$$
$$\left[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)\right]'' = C_1y''_1(x) + C_2y''_2(x)$$

uchun

$$C_1y''_1(x) + C_2y''_2(x) + p(x)\left[C_1y'_1(x) + C_2y'_2(x)\right] +$$
$$+ q(x)\left[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)\right] = C_1y''_1(x) + p(x)C_1y'_1(x) +$$
$$+ q(x)C_1y_1(x) + C_2y''_2(x) + p(x)C_2y'_2(x) + q(x)C_2y_2(x) =$$
$$= C_1\left[y''_1(x) + p(x)y'_1(x) + q(x)y_1(x)\right] +$$
$$+ C_2\left[y''_2(x) + p(x)y'_2(x) + q(x)y_2(x)\right]$$

bo‘lib, (23.15) munosabatga ko‘ra

$$\left[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)\right]'' + p(x)\left[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)\right]' +$$
$$+ q(x)\left[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)\right] = 0$$

bo‘ladi. Bu esa

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

ning (23.13) tenglamaning yechimi ekanini bildiradi.

Ko‘rsatish mumkinki, $u(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ yechim berilgan

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

Ikkinchi tartibli

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (23.12)$$

tenglamaning umumiy yechimi haqida ushbu teorema o‘rinli.

23.2-teorema. (23.12) tenglamaning umumiy yechimi shu tenglama xususiy yechimi bilan (23.13) tenglamaning umumiy yechimi yig‘indisiga teng bo‘ladi.

6-§. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsientli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar

23.1-ta'rif. O‘*zgarmas koeffitsientli bir jinsli differensial tenglama* deb

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (23.16)$$

ko‘rshishdagi tenglamaga aytiladi, bunda p va *q* - *o*‘zgarmas haqiqiy sonlar.

Yuqoridagi teoremalarga asosan bu tenglamaning umumiy yechimini topish uchun uning ikkita chiziqli erkli xususiy yechimini topish yetarlidir.

Tenglamani yechish uchun $y = e^{kx}$ deb faraz qilamiz, bu yerda *k* - nolga teng bo‘lmagan o‘zgarmas son.

Hosilalarni topamiz:

$$y' = ke^{kx},\ y'' = k^2 e^{kx}$$

Bularni (23.16) tenglamaga keltirib quyamiz:

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0. \qquad (23.17)$$

bo‘lgani uchun (23.17) tenglamadan

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (23.18)$$

hosil bo‘ladi. Demak, k (23.18) tenglamani qanoatlantirsa, e^{kx} tenglamaning yechimi bo‘ladi. (23.18) tenglama (23.16) tenglamaning *xarakteristik tenglamasi* deyiladi. (23.18) tenglama ikkita ildizga ega bo‘ladi, ularni k_1 va k_2 bilan belgilaymiz:

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},\quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Bu yerda quyidagi hollar bo‘lishi mumkin:

1) k_1 va k_2 haqiqiy va bir-biriga teng emas ($k_1 \neq k_2$);

2) k_1 va k_2 haqiqiy va bir-biriga teng ($k_1 = k_2$);

3) k_1 va k_2 kompleks sonlar.

Har bir holni alohida-alohida ko‘rib chiqamiz.

a) Xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va har xil ($k_1 \neq k_2$). Bu holda

$$y_1 = e^{k_1 x},\quad y_2 = e^{k_2 x}$$

funksiyalar xususiy yechimlar bo‘lib, tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \qquad (23.19)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Haqiqatan ham, u' va u'' ni topamiz:

$$y' = C_1 k_1 e^{k_1 x} + C_2 k_2 e^{k_2 x},\qquad y'' = C_1 k_1^2 e^{k_1 x} + C_2 k_2^2 e^{k_2 x};$$

bo‘larni (23.16) tenglamaga qo‘yamiz:

$$C_1 k_1^2 e^{k_1 x} + C_2 k_2^2 e^{k_2 x} + p\left(C_1 k_1 e^{k_1 x} + C_2 k_2 e^{k_2 x}\right) + q\left(C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}\right) = 0$$

Chap tomondagi qavslarni ochib, guruhlaymiz:

$$\left(C_1 k_1^2 e^{k_1 x} + pC_1 k_1 e^{k_1 x} + qC_1 e^{k_1 x}\right) + C_2 k_2^2 e^{k_2 x} + pC_2 k_2 e^{k_2 x} + qC_2 e^{k_2 x} = 0$$

yoki

$$C_1 e^{k_1 x}\left(k_1^2 + pk_1 + q\right) + C_2 e^{k_2 x}\left(k_2^2 + pk_2 + q\right) = 0 \qquad (23.20)$$

k_1 va k_2 lar (23.18) tenglamaning ildizlari bo‘lganligi uchun, (23.20) ning chap tomonidagi qavs ichidagi ifodalar nolga teng va umuman chap tomoni ham nolga teng bo‘ladi. Demak, $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ funksiya berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

Misol. $y''+8y'+15y=0$ tenglamaning xarakteristik tenglamasi $k^2+8k+15=0$ bo‘lib, u $k_1=5, k_2=3$ ildizlarga ega. Demak, tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$y=C_1e^{5x}+C_2e^{3x}.$$

b) Xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va teng $(k_1=k_2)$.

Bu $k_1=k_2=-\frac{p}{2}$ holda bo‘lib, $2k_1=-p$ yoki $2k_1+p=0$ bo‘ladi.

Bitta xususiy yechim $y=e^{k_1x}$ ma'lumdir. Ikkinchi xususiy yechimni $y_2=u(x)e^{k_1x}$ ko‘rinishda izlaymiz. Bu yerda *i(x)=i* aniqlanishi kerak bo‘lgan noma'lum funksiya. *i(x)* ni aniqlash uchun y_2' va y_2'' ni topamiz:

$$y_2'=u'e^{k_1x}+uk_1e^{k_1x}=e^{k_1x}(u'+uk_1),$$

$$y_2''=u''e^{k_1x}+u'k_1e^{k_1x}+u'k_1e^{k_1x}+uk_1^2e^{k_1x}=$$

$$=e^{k_1x}(u''+2k_1u'+uk_1^2).$$

Bularni (22.16) tenglamaga qo‘yamiz:

$$e^{k_1x}\left[(u''+2k_1u')+k_1^2u\right]+pe^{k_1x}(u'+uk_1)+que^{k_1x}=0$$

yoki

$$e^{k_1x}\left[u''+(2k_1+p)u'+(k_1^2+k_1p+q)u\right]=0.$$

k xarakteristik tenglamaning karrali ildizi va $2k_{\ell}+r=0$ bo‘lgani uchun *ye"i*=0 yoki *i"* =0 bo‘lishi kerak. Uni integrallab,

$$u(x)=Ax+B$$

ni topamiz. Xususiy holda *V=0*, A=1 deb olsak, *i(x)=x* bo‘ladi.

Shunday qilib, ikkinchi xususiy yechim kabi

$$y_2=xe^{k_1x}$$

bo‘ladi. Bularni nazarda tutsak, umumiy yechimni

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2xe^{k_1k}=e^{k_1x}(C_1+C_2x)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Misol. $4y''-12y'+9y=0$ tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$$4k^2-12k+9=0$$

bo‘lib, uning ildizlari $k_1=k_2=\frac{3}{2}$ dir. Demak, tenglamaning umumiy yechimi:

$$y=(C_1+C_2x)e^{\frac{3}{2}x}.$$

v) xarakteristik tenglamaning ildizlari kompleks sonlar bo‘lgan hol.

Ildizlar $k_1=\alpha+i\beta,\ k_2=\alpha-i\beta$ ko‘rinishda bo‘lsin. U holda differensial tenglamaning xususiy yechimlari

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x},\ y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. y_1 va y_2 lar (23.16) tenglamani qanoatlantiradi. Biz quyidagi natijadan foydalanamiz: agar haqiqiy koeffisientli bir jinsli chiziqli tenglamaning xususiy yechimi kompleks sonlardan iborat bo‘lsa, u holda uning haqiqiy va mavhum qismlari ham shu tenglamaning yechimi bo‘ladi.

Binobarin, xususiy yechim

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

bo‘lgani uchun $e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x$ lar ham (23.16) tenglamaning yechimi bo‘ladi. Shunday qilib, (23.16) differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Misol. $y''-4y'+7y=0$ tenglamaning xarakteristik tenglamasi $k^2-4k+7=0$ bo‘lib, uning ildizlari $k_1 2+i\sqrt{3}, k_2 = 2-i\sqrt{3}$ dan iborat. Tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo‘ladi:

7-§. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsientli bir jinsli bo’lmagan chiziqli differensial tenglamalar

Endi

$$y''+py'+qy = f(x) \qquad (23.21)$$

ko‘rinishdagi differensial tenglamaning yechimini topish bilan shug‘ullanamiz, bu yerdap *p* , *q h*aqiqiy sonlar. *f(x)* funksiya ning berilishiga qarab quyidagi hollarni ko‘rib chiqamiz:

1) (23.21) tenglamaning o‘ng tomoni ko‘rsatkichli funksiya bilan ko‘phad ko‘paytmasidan iborat:

$$f(x) = P_m(x)e^{\alpha x},$$

bu $P_m(x)$ yerda $-m-$ darajali ko‘phad, ya'ni

$$P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + ... + a_m.$$

(23.21) tenglamaning umumiy yechimini topishda quyidagi faktdan foydalanamiz:

$$y''+py'+qy = f(x)$$

tenglama berilgan bo‘lsin. Agar

$$y''+py'+qy = 0$$

bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimi $\bar{y}$ bo‘lib, u (23.21) tenglamaning ixtiyoriy xususiy yechimi bo‘lsa, u holda (23.21) ning umumiy yechimi

$$y = \bar{y} + u$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Biz bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimi $k^2+kp+q=0$

xarakteristik tenglamaning ildizlari bilan bog‘lab topishni bilamiz. Xususiy yechimini esa quyidagi hollarga muvofiq topamiz:

a) α soni $k^2+kp+q=0$ xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lmagan hol. Bu holda biz xususiy yechimni

$$u=\left(A_0x^m+A_1x^{m-1}+...+A_m\right)e^{\alpha x}=Q_m(x)e^{\alpha x} \qquad (23.22)$$

ko‘rinishda izlaymiz. Bu yerda $Q_m(x)$ – m-darajali ko‘phad.

(23.22) dan u', u'' ni topamiz:

$$u'=\left(A_0mx^{m-1}+A_1(m-1)x^{m-2}+...+A_{m-1}\right)e^{\alpha x}+\left(A_0x^m+A_1x^{m-1}+...+A_m\right)\alpha e^{\alpha x}.$$

$$u''=\left(A_0m(m-1)x^{m-2}+A_1(m-1)(m-2)x^{m-3}+...+A_{m-2}\right)e^{\alpha x}+$$
$$+\left(A_0mx^{m-1}+A_1(m-1)x^{m-2}+...+A_{m-1}\right)\alpha e^{\alpha x}+\left(A_0mx^{m-1}+A_1(m-1)x^{m-2}+...+A_{m-1}\right)e^{\alpha x}+$$
$$+\left(A_0x^m+A_1x^{m-1}+...+A_m\right)\alpha^2e^{\alpha x}.$$

Bularni (23.21) tenglamaga qo‘yamiz va tenglamani soddalashtirib, natijada quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$Q_m''(x)+(2\alpha+p)Q_m''(x)+\left(\alpha^2+p\alpha+q\right)Q_m(x)=P_m(x), \qquad (23.23)$$

bu yerda Q_m'' $-(m-2)$-darajali ko‘pxad, Q_m' $-(m-1)$-darajali ko‘pxad.

(23.23) tenglamaning chap va o‘ng tomonlari m-darajali ko‘pxadlardan iborat. Bir xil darajali x lar oldidagi koeffitsientlarni bir-biriga tenglab, noma'lum $A_0, A_1, ..., A_m$ koeffitsientlarni topamiz;

b) α $k^2+pk+q=0$ *soni xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lgan hol.*

Bu holda xususiy yechimni (23.22) tenglama ko‘rinishida olib bo‘lmaydi, chunki (23.23) tenglamaning chap tomonida *(t*-1)-darajali ko‘pxad hosil qilingan bo‘lib, o‘ng tomoni *m*- darajali ko‘pxaddir. ni topishda $A_0, A_1, ..., A_m$ t noma'lumli *(t*-1) ta tenglama sistemasi hosil qilingan bo‘lib, ularni topish qiyindir. Shuning uchun bu holda xususiy yechim $u=xQ_m(x)e^{\alpha x}$ ko‘rinishda izlanadi;

v) α *soni xarakteristik tenglamaning ikki karrali ildizi bo‘lgan hol.* Bu holda xususiy yechimni yuqorida bayon qilinganidek mulohaza yuritib, quyidagicha izlaymiz:

$$u=x^2Q_m(x)e^{\alpha x}$$

1- $y''-7y'+12y=x$ misol. tenglamani yeching.

yechish. Avval bir jinsli $y''-7y'+12y=0$ tenglamani yechamiz. Xarakteristik tenglama $k^2-7k+12=0$ bo‘lib, uning ildizlari: $k_1=3, k_2=4$. Berilgan tenglamaning o‘ng tomonidagi funksiyani $P_n(x)e^{\alpha x}=xe^{\alpha x}$ deb qarasak, $\alpha=0$ bo‘lib, $k_1\neq k_2$. Shuning uchun uning xususiy yechimini

$$u=\left(A_0x+A_1\right)e^{0x}=A_0x+A_1$$

ko‘rinishda izlaymiz. u' va u'' ni topib, o‘rniga qo‘yamiz:

$$-7A_1+12A_0x+12A_1=x$$

Bu yerdan A_0, A_1 ni topamiz:

$$12A_0 = 1;\ A_0 = \frac{1}{12}, -7A_1 + 12A_1 = x$$

Demak, xususiy yechim

$$u = \frac{1}{12}x + \frac{7}{144}$$

ko‘rinishda, umumiy yechimi esa

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x} + \frac{1}{12}x + \frac{7}{144}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

2- misol. $y'' - 5y' + 6y = 3e^{2x}$

yechish. Bir jinsli tenglamaning xarakteristik tenglamasi ildizlari $k_1 = 3, k_2 = 2.$ Bu yerda α xarakteristik tenglama ildizlaridan biriga teng: $\alpha = 2$. Shuning uchun, berilgan tenglamaning xususiy yechimini

$$u = x \cdot A_0e^{2x}$$

ko‘rinishda izlaymiz. i' va i'' ni topib, tenglamaga qo‘yamiz:

$$2A_0e^{2x} + 2A_0e^{2x} + 4A_0xe^{2x} - 5A_0e^{2x} - 10A_0xe^{2x} + 6A_0xe^{2x} = 3e^{2x}$$

Soddalashtiramiz:

$$-A_0e^{2x} = 3e^{2x}.$$

Bu yerdan: $A_0 = -3.$ Demak, umumiy yechim

$$y = \left(C_2e^{2x} + C_1e^{3x}\right) - 3xe^{2x}$$

yoki

$$y = C_1e^{3x} + e^{2x}\left(C_2 - 3x\right)$$

bo‘ladi.

3- misol. $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}.$

yechish. Bir jinsli tenglamaning xarakteristik tenglamasi $k_1 = k_2 = 2$ ildizlarga ega bo‘lib, α ning qiymatiga tengdir ($\alpha = 2$); v) holiga ko‘ra xususiy yechimni $u = x^2A_0e^{2x}$ ko‘rinishda izlaymiz. So‘ngra:

$u' = 2xA_0e^{2x} + A_0 2x^2e^{2x}, \quad u'' = 2A_0e^{2x} + 4A_0xe^{2x} + 4A_0x^2e^{2x}.$

Bularni tenglamaga qo‘yamiz:

$2A_0e^{2x} + 4A_0xe^{2x} + 4A_0xe^{2x} + 4A_{0.}x^2e^{2x} - 8A_0xe^{2x} - 8A_0x^2e^{2x} + 4A_0x^2e^{2x} = 3e^{2x}$

$2A_0e^{2x} = 3e^{2x}$ bo‘lib, $A_0 = \frac{3}{2}$ ga tengdir. Bu yerdan xususiy yechim: $u = \frac{3}{2}x^2e^{2x}.$

Umumiy yechim:

$$y = \left(C_1 + C_2x\right)e^{2x} + \frac{3}{2}x^2e^{2x}$$

yoki

$$y=\left(C_1+C_2x+\frac{3}{2}x^2\right)e^{2x}.$$

2) O‘ng tomon $f(x)=P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ ko‘rinishda berilgan bo‘lsin, bu yerda *R(x)* va *Q(x)* ko‘phadlar. Quyidagi ikki hol bo‘lishi mumkin:

agar $\alpha+i\beta$ son xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lmasa, u holda (23.18) tenglamaning xususiy yechimini

$$u=M(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+N(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

ko‘rinishda izlaymiz, bu yerda *M(x)* va *N(x)* darajasi *R(x)* va *Q(x)* ko‘phadlarning eng yuqori darajasiga teng bo‘lgan ko‘phadlardir;

b) agar $\alpha+i\beta$ son xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lsa, u holda xususiy yechimni

$$u=x\left[M(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+N(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right]$$

ko‘rinishda izlaymiz.

Yuqorida aytilgan mulohazalar *R(x)=0* yoki *Q(x)=0* bo‘lgan hollar uchun ham to‘g‘ridir, ya'ni o‘ng tomon $P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ yoki $Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ lardan birontasi bo‘lganda ham o‘rinlidir.

2) O‘ng tomon $f(x)=a\cos\beta x+b\sin\beta x$ ko‘rinishda beralgan bo‘lsin, bu yerda *a, b* - o‘zgarmas sonlar. Yuqoridagidek, bu yerda ham ikki hol bo‘lishi mumkin:

3) a) $i\beta$ son xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lmagan hol. Bu holda xususiy yechimni *u=Acosx+Bsinx* ko‘rinishda izlash kerak. *A* va *V* sonlarini yuqorida ko‘rsatilgan aniqmas koeffitsientlar usuli bilan topiladi;

b) $i\beta$ son xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lgan hol, bu holda xususiy yechimni $u=x(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$ ko‘rinishda izlash kerak.

8-§. Qishloq xo‘jalik ekinlarini o‘sish jarayonini matematik modellashtirish yordamida o‘rganish

Tabiatda mavjud barcha tirik organizm o‘ziga xos ma’lum bir qonuniyat bilan rivojlanadi. Xususan, insoniyat uchun foydali bo‘lgan o‘simliklar dunyosini rivojlanish qonuniyatlarini o‘rganish, dolzarb muammolardan biridir. Qishloq xo‘jalik ekinlarini o‘sish davrini matematik madellashtirib o‘rganishga bag‘ishlangan ko‘plpb ilmiy tadqiqotlar ishlari mavjud ([8]- [13]).

Gompers [10] o‘simliklarni o‘sish jarayonini quyidagi shartlar asosida o‘rganadi: 1) o‘sish jarayonini ta’minlovchi omillar etarli mavjud; 2) o‘sish tezligi o‘simlikning quruq massasi miqdoiri W ga to‘g‘ri proporsional (uning proporsionallik koeffitsienti μ_0 o‘zgarmas); 3) t vaqt o‘tishi bilan o‘simlikning o‘sish jarayoni

susayib boradi. Yuqorida keltirilgan shartlar asosida quyidagi differensial tenglamaga ega bo‘lamiz

$$dW/dt = \mu_0 W \qquad (23.24)$$

Masala shartiga asosan μ_0 o‘sish koeffitsientining, vaqt o‘tishi bilan o‘sishni kamayib borishidan

$$d\mu/dt = -\lambda\mu \qquad (23.25)$$

Bu erda λ- vaqt o‘tishi bilan o‘sishni kamayib borishini bildiruvchi yangi parametr (22.23) differensial tenglamani integrallab quyidagi yechimga ega bo‘lamiz

$$d\mu = -\lambda\mu\, dt, \quad d\mu/\mu = -\lambda\, dt, \quad \int d\mu/\mu = -\lambda\int dt,$$

$\mathrm{Ln}\,\mu = -\lambda t + \mathrm{Ln}S$, $\mu = S\, e^{-\lambda t}$, $\mu_0 = S$, $t = 0$ vaqtdagi μ- ning qiymati bo‘lganligidan

$$\mu = \mu_0\, e^{-\lambda t} \qquad (23.26)$$

(23.26) ga asosan (23.24) tenglamaning yechimi quyidagicha bo‘ladi

$$dW/dt = \mu_0 W e^{-\lambda t} \qquad (23.27)$$

(23.27) tenglamani integrallab quyidagi echimga ega bo‘lami

$$\int_w^w dW/W = \mu_0 \int_0^t e^{-\lambda t}\, dt, \qquad \mathrm{Ln}(w/w_0) = (\mu_0/\lambda)(1 - e^{-\lambda t}),$$

$$W = W_0 \exp(\mu_0 (1 - e^{-\lambda t})/\lambda) \qquad (23.28)$$

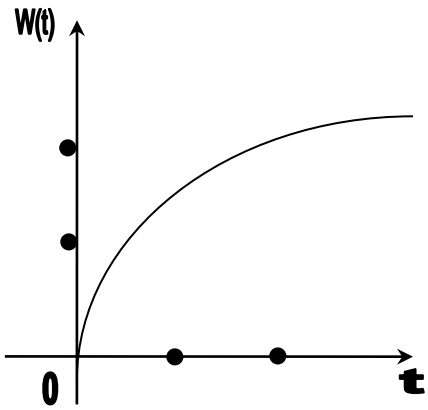
Bundan, xususan t- kichik bo‘lganda, Teylor formulasidan foydalanib, avval isbotlangan o‘simliklar o‘sishining eksponensional qonuniga ega bo‘lamiz

$$W = W_0 \exp(\mu_0 t) \qquad (23.29)$$

Har bir o‘simlikni yashash davri oxirlashgan sari, uning quriq vazni $W \to W_f$ ma’lum bir o‘zgarmas miqdorga intilib boradi

$$W_f = W_0\, e^{\mu 0/\lambda} \qquad (23.30)$$

(23.23) tenglamani differensiallab, o‘sish jarayonini xarakterlovchi funksiyaning egilish va bukilish nuqtasi topiladi, bu nuqta o‘sish jarayonini sekinlashishini boshlanish nuqtasi bo‘ladi.



YUqoridagilarni inobatga olgan holda o‘simliklarni o‘sish jarayoni-ni xarakterlovchi Gompers tenglamasini quyidagicha yozish mumkin

$$dW/dt = \lambda W \, Ln(w_f / w) \qquad (23.31)$$

Gomprets tenglamasida qatnashuvchi o‘sish jarayoning xarakteritikalarini statistik baholarini paxta va boshqa qishloq xo‘jalik ekinlari uchun tajriba natijasida aniqlab, o‘rganilayotgan o‘simliklar uchun tenglamalar hosil qilish mumkin. Bu mazkur qishloq xo‘jalik ekinlarini eng muqobil muddatda etishtirish texnalogiyasini ishlab chiqishga olib keladi. Xususan, xorijdagi parandachilik sohasida ishlab chiqilgan bunday texnalogiyalar Respublikamizga ham kirib keldi.

Gomprets tenglamasidan foydalanib, daraxt yoki o‘simlik barglarini o‘sish jarayonini tenglamasini tuzish mumkin. Doirasimon shakldagi o‘simlik bargini, o‘sish jarayoni, bargni aylana uzunligi va unga tushuvchi quyosh nuri miqdoriga to‘g‘ri proporsional ravishda rivojlanishi isbotlangan. Erning quyosh va o‘z o‘qi atrofida aylanishi tufayli, o‘simlik bargiga tushayotgan quyosh nuri, barg tekisligi va tushayotgan quyosh nuri orasidagi burchakka bog‘liq bo‘ladi.

Agar t vaqtda o‘simlik bargining yuzasi S(t) bo‘lsa, uning o‘sish tezligi quyidagicha tenglama yordamida yozish mumkin

$$d\,S(t) / d\,t = 2\pi\, k\, Q\, r \qquad (23.32)$$

bu erda $L=2\pi r$ - bargning aylana uzunligi, Q-tushgan quyosh nurining miqdori, k- proporsionallik koeffitsienti.. $S= \pi r^2$ -doira yuzasini hisoblash formulasiga asosan, $r =(S/ \pi)^{1/2}$ bo‘lganligidan (23.32) formulani quyidagicha yozish mumkin

$$d\,S(t) / d\,t = 2\, k\, (\pi\, S)^{1/2}\, Q \qquad (23.33)$$

$Q = k_1\, S\, Sos\alpha$, α- quyosh nuri yo‘nalishi bilan, barg tekilligini tashkil qilgan burchagi. Albatta bu burchak vaqtga bog‘liq ravishda o‘zgarganligidan uni quyidagicha yozish mumkin $\alpha = k_3 t + b$. Agar $t = 6$ da $\alpha = -\pi/2$, $t = 12$ da α

$= 0$ va $t = 18$ da $\alpha = \pi/2$ bo‘lishini e’tiborga olsak $\alpha = k_3 t + b$ tenglamadan quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$12k_3 + b = 0$

$18k_3t + b = \pi/2$

Bundan $k_3 = \pi/12$ va $b = -\pi$ ekanligidan $\alpha = \pi/12(t-12)$ va

$Q = k_1 S \, Sos(\pi/12(t-12))$ bo‘ladi, natijada (10) tenglamani quyidagicha yozish mumkin

$$d S(t) / d t = 2 k (\pi S)^{1/2} S \, Sos(\pi/12(t-12)) \qquad (23.34)$$

Hosil bo‘lgan differensial tenglamani o‘zgaruvchilarga ajratib quyidagicha yozamiz $d S(t) /((S)^{1/2} S) = 2 k (\pi)^{1/2} Sos(\pi/12(t-12)) \, d t$

Integrallab, $-2/(S)^{1/2} = 24k (\pi)^{1/2} Sin(\pi/12(t-12)) + c$.

Ayrim soddalashtirishlardan keyin biz o‘rgangan hol uchun o‘simlik bargining vaqtga bog‘liq ravishda o‘sish jarayoni quyidagicha qonuniyatga ega bo‘lishini aniqlaymiz:

$$S(t) = 1/ (12k (\pi)^{1/2} Sin(\pi/12(t-12)) + s_1)^2 \qquad (23.35)$$

Oxirgi (23.35) formuladan t-vaqtdagi o‘simlik bargining yuzasi ma’lum bo‘lsa, undan keyin istalgan vaqtdagi barg yuzasi kattaligini hisoblash mumkin.

Masalan, o‘simlik bargining yuzasi ertalab soat $t = 6$ da $S(6) = 144$ sm^2 va kechqurin $t = 18$ da $S(18) = 169$ sm^2 bo‘lsa , t-vaqtdagi o‘simlik bargining yuzasini quyidagi formula bilan hisoblash mumkin

$$S(t) = 1/ (12k (\pi)^{1/2} Sin(\pi/12(t-12)) + s_1)^2$$

Inson ucun foydali bo’lgan o‘simliklar dunyosini rivojlanish qonuniyatlarini yuqorida keltirilgan modellashtirishdan foydalanib o’rganish mumkin.

9-§. Daraxtlarning o‘sish jarayonini differensial tenglamalar yordamida o‘rganish

Qishloq xo‘jalik ekinlari, turli mevali daraxtlari o‘ziga xos qonuniyat bilan o‘sib rivojlanadi. Bu jarayonni atroflicha tahlil qilishda, tub har biriga xos qonuniyatlarini o‘rganishda matematik modellashtirishning ahamiyati katta. Bu sohaga bag‘ishlangan ko‘plab ilmiy va amaliy adabiyotlar mavjud [1], [2], [13].

Ushbu uslubiy qo‘llanmada o‘tkazilgan ilmiy tadqiqot natijalarini matematik statistika usullari bilan tahlil qilishni qishloq xo‘jalik misollarida ko‘rsatib berishni asosiy maqsad qilib qo‘ydik. Matematikadan etarli bilimga ega bo‘lgan magistr, doktarant, ilmiy tadqiqotchi, bakalavr ushbu qo‘llanmadan foydalanib o‘zlari o‘tkazgan tajriba natijalarini kafolatli statistik tahlil qilishlari mumkin.

Respublikamizda ta’lim sohasida amalga oshirilayotgan ulkan ishlar, xar bir oliy o‘quv yurti professor-o‘qituvchisi oldiga yuksak ma’suliyatlarni yuklaydi. Jahon standartlariga javob beradigan kadrlarni tayyorlash uchun, xar birimiz o‘qitish

jarayonini takomillashtirib, yangi innavatsion ta'lim texnalogiyalari asosida ta'lim berishimiz zarur. Talabalarga o'qitilayotgan xar-bir fan, ularning o'z mutaxassisliklarini yaxshi o'zlashtirishlariga yordam berishga qaratilishi kerak.

Mavzuda Respublikamizning qishloq xo'jalik oliy o'quv yurtlarida "Oliy matematika" fanining differensial tenglamalar mavzusini o'tishda talabalarning kasbiy tayyorgarliklarini kuchaytirish uchun ma'lum bir daraxtning o'sish jarayonini o'rganishga qo'llanilishi bayon etilgan.

Real jarayonlarni matematik modellashtirishdan asosiy maqsad, uning tub rivojlanish qonuniyatlarini o'rganishdan iboratdir. O'rganilayotgan jarayonni matematik modellashtirish, bu jarayonni to'liq xarakterli xususiyatlarini imkon qadar to'liq inobatga olib, ma'lum bir shartlar asosida tuziladi.

Daraxtlarning o'sish jarayonini uning tanasi, shox-shabasi, bargi va ildizining rivojlanishi tashkil etadi. Daraxtlar asosan, fotosintez tufayli hosil bo'lgan va ildizidan olgan quvvatlar hisobiga o'sadi. Daraxtning tanasi katta bo'lgan sari, quvvatga bo'lgan talabi ham oshib boradi. Bu talabni qondirish imkoni kamayib borishi bilan, daraxtning o'sish jarayoni ham sekinlashib boradi, ta'minlash quvvati etishmay qolganidan keyin o'sishdan to'xtaydi.

Biz har-bir daraxt ma'lum bir o'lchamlarga ega, uning sirti yuzasiga tushuvchi quyosh nuri tufayli hosil bo'lgan o'sish quvvati(fotosintez jarayoni) va tuproqdan ildizlari orqali olgan quvvatlarini uzoq vaqt davomida bir xil o'zgarmas bo'lishini inobatga olib, daraxtning o'sish jarayonini matematik molelini, quvvatning balans tenglamasi yordamida tuzish mumkin.

Agar daraxtning uzunlik o'lchov birligi X bo'lsa, uning sirti yuzasi X^2 hajmi X^3 bo'lib, bu miqdor X(t) vaqtga bog'liq ravishda o'zgarib turadi, albatta boshlang'ich vaqtda $X(t_0)= 0$ bo'ladi. Quvvatning balans tenglamasini daraxtning asosiy o'lchov belgisi X miqdor orqali ifodalaymiz. O'simlik birinchi navbatda o'sishi uchun zarur bo'lgan oziqa quvvatini barglari orqali fotosintez jarayonidan olganlidan, ya'ni oziqa quvvati uning sirtini o'rab turgan barglari yuzasi miqdori X^2. ga to'g'ri proporsional $E = \alpha X^2$ bo'ladi. Bu erda, α -proporsionallik koeffitsienti bo'lib, uning qiymati daraxt bargining shakliga, o'lchoviga, fotosintez jarayonining tezligiga, quvvatni olish miqdoriga bog'liq bo'ladi.

Fotosintez jarayonida olingan daraxtning o'sish quvvati $E = \alpha X^2$ quyidagilarga sarflanadi: 1) fotosintez jarayoniga; 2). daraxtning sirti yuzasiga βX^2 $(0 < \beta < \alpha)$); 3). daraxtning barcha qismiga quvvatni etkazib berishga(daraxtning hajmi qancha katta bo'lsa,unga shuncha ko'p quvvat sarf bo'ladi); 4).Erni tortib turuvchi kuchini engib, daraxtning eng yuqori qismiga quvvatni etkazib berishga; va xokazo. Quvvat daraxtning hajmi X^3 va balandligi X ga $\gamma X^3 \cdot X = \gamma X^4$ to'g'ri proporsional ravishda sarflanadi.

Daraxtning hajmini o'sishiga sarflanadigan quvvat miqdori quyidagicha bo'ladi:

$$\delta \frac{d}{dt}(\rho X^3) = 3\rho\delta X^2 \frac{dX}{dt} \qquad (23.36)$$

Bu erda ρ −daraxtning o‘rtacha zichligi.

Quvvatning saqlanish qonuniga asosan, fotosintez jarayonida olingan jami daraxtning o‘sish quvvati $E = \alpha X^2$, yuqorida keltirilgan omillarga sarflangan quvvat miqdoriga teng bo‘ladi, ya’ni quyidagi differensial tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$\alpha X^2 = \beta X^2 + \gamma X^4 + 3\rho\delta X^2 \frac{dX}{dt} \qquad (23.37)$$

Bu tenglikni $X(t) \neq 0$ ekanligidan foydalanib $3\rho\delta X^2$ ga bo‘lib, uni quyidagicha yozish mumkin: $\frac{dX}{dt} = \frac{\alpha-\beta}{3\rho\delta} - \frac{\gamma X^2}{3\rho\delta}$

Bu erda $\frac{\alpha-\beta}{3\rho\delta} = a$ va $\frac{\gamma}{3\rho\delta} = b$ deb belgilash yordamida

$$\frac{dX}{dt} = a - bX^2$$

$a > b > 0$ va daraxtning o‘sishidan, uning birinchi tartibli hosilasi musbat bo‘ladi $\frac{dX}{dt} > 0$, bundan $a - bX^2 > 0$, $a > bX^2$

va $X^2 < \frac{a}{b}$, $0 < X < \sqrt{\frac{a}{b}}$ bo‘lishini e’tiborga olib, o‘zgaruvchilarga ajraladigan sodda differensial tenglamani quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$\frac{dX}{a - bX^2} = dt\,, \quad -\frac{dX}{bX^2 - a} = dt\,, \quad -\frac{dX}{b(X^2 - \frac{a}{b})} = dt$$

Hosil bo‘lgan o‘zgaruvchilarga ajralgan differensial tenglamani integrallab

$$-\int \frac{dX}{b(X^2 - \frac{a}{b})} = \int dt \qquad (23.38)$$

Quyidagi umumiy echimga ega bo‘lamiz:

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}}\, ln \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + X}{\sqrt{\frac{a}{b}} - X} = t + c \qquad (23.39)$$

$X(t_0) = 0$ boshlang‘ich shartdan foydalanib, $C = t_0$ va

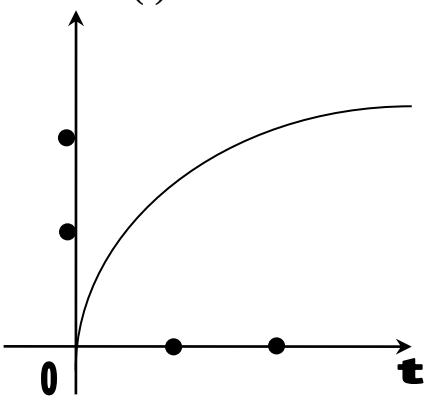
$$\frac{1}{2\sqrt{ab}}\, ln \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + X}{\sqrt{\frac{a}{b}} - X} = t - t_0 \qquad (23.40)$$

Potensirlab, daraxtning o‘sish jarayonini xarakterlovchi quyidagi echim kelib chiqadi: $X(t) = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \frac{1-\ell^{-2\sqrt{ab}(t-t_0)}}{1+\ell^{-2\sqrt{ab}(t-t_0)}}$ (23.41)

Ma’lumki, vaqt o‘tishi bilan daraxtning o‘sishi sekinlashib boradi va uning qiymati quydagi o‘zgarmas miqdorga yaqinlashib boradi:

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = \sqrt{\frac{a}{b}} \qquad (23.42)$$

(23.42) tenglamaga $X(t)$ ni tajriba natijasida olingan qiymatlarini quyib har bir daraxtni kattaligini xarakterlovchi a, b- parametrlarning qiymatlarini aniqlash mumkin .



Mavzu bo’yicha tekshirish uchun savollar:

1. Qanday tenglama diffrensial tenglama deyiladi?
2. Diffrensial tenglamaning yechimi deb nimaga aytiladi ?
3. Diffrensial tenglamaning qanday yechimi umummiy, qanday yechimi xususiy yechimi deyiladi ?
4. Qanday tenglama o’zgaruvchilarga ajraladigan diffrensial tenglama deyiladi ?
5. Qanday tenglama birjinsli diffrensial tenglama deyiladi ?
6. Qanday tenglama chiziqli diffrensial tenglama deyiladi ?
7. O’zgarmasni variatsiyalash usuli nima?
8. O‘zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli diffrensial tenglama.
9. O‘zgarmas koeffitsientli bir jinsli bo’lmagan chiziqli differensial tenglamalarni yechish?
10. Qishloq xo‘jalik ekinlarinig o‘sish jarayonini differensial tenglamalar yordamida o‘rganish?

11. Daraxtlarning o‘sish jarayonlari differensial tenglamalar yordamida qanday o‘rganiladi.

Kalit so’zlar

Diffrensial, tenglama, umummiy, xususiy, yechim, o’zgaruvchi, ajraladigan, chiziqli, variatsiyalash, o‘zgarmas, koeffitsientli, ikkinchi, bir jinsli, bo’lmagan, ekinlar, daraxtlar, o‘sish.

Xulosa

Diffrensial tenglama vauning umumiy, xususiy yechimlari, o’zgaruvchilarga ajraladigan, chiziqli, o’zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli bir jinsli va bir jinsli bo’lmagan differensial tenglamalarni yechish va ularni qishloq xo‘jalik ekinlarini, daraxtlarni o‘sish jarayonini tahlil qilishga qo’llanishi o’rganilgan.

IV QISM.

XX IV BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASI

1-§. Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalari

Kundalik hayotda turli hodisalarga duch kelamiz. Ularga masalan, quyoshning chiqish va botish hodisasi, havo o‘zgarib, yomg‘ir yoki qor yog‘ish hodisasi misol bo‘ladi([2] − [4]).

Albatta, hodisalar ma'lum shart-sharoitlar (shartlar majmui), bajarilish yoki biror tajriba (sinash) o‘tkazish natijasida ro‘y beradi.

Masalan, bir dona to‘liq mag‘izli chigitni yetarli haroratga, namlikka ega bo‘lgan tuproqqa yetarli chuqurlikka (shartlar majmuasi) ekkanda unib chiqish yoki chiqmaslik hodisalaridan biri ro‘y berishi mumkin.

Tajriba natijasida biror shartlar majmui bajarilganda albatta ro‘y beradigan hodisa *muqarrar hodisa* deyiladi.

Tajriba natijasida shartlar majmui bajarilganda mutlaqo ro‘y bermaydigan hodisa *mumkin bo‘lmagan* (muqarrar bo‘lmagan) hodisa deyiladi.

Ammo amaliyotda natijasini to‘la ishonch bilan bashorat qilish mumkin bo‘lmagan tajribalar (sinovlar) bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Masalan, tangani tashlashdan iborat tajribada u yoki bu tomonini tushishini to‘la ishonch bilan oldindan aytish mumkin emas yoki ekilgan chigit urug‘ini unib chiqish yoki chiqmasligini aytish qiyindir. Bunga o‘xshash barcha hollarda tajribaning natijasini tasodifga bog‘liq deb hisoblaymiz va uni tasodifiy hodisa sifatida qaraymiz.

Shunday qilib tasodifiy hodisaga quyidagicha ta'rif berish mumkin.

Tajriba natijasida (biror shartlar majmui bajarilganda) ro‘y berishi ham, ro‘y bermasligi ham mumkin bo‘lgan hodisa tasodifiy hoduca dab ataladi.

Masalan, tanga tashlash tajribasida yo gerbli tomon tushishi, yoki raqamli tomon tushishi hodisasi tasodifiy hodisa bo‘ladi. Tasodifiy hodisalar lotin alfavitining bosh harflari *A, B,C, D* ... bilan belgilanadi.

Muqarrar hodisani *U* harfi bilan, mumkin bo‘lmagan hodisani esa *V h*arfi bilan belgilaymiz. Biror tajriba o‘tkazilayotgan bo‘lsin. Bu tajribaning har bir natijasini ifodalovchi hodisa *elementar hodisa* deb ataladi va ω (omega) bilan belgilanadi. Elementar hodisalar to‘plami Ω bilan belgilanadi, ya'ni $\Omega=(\omega)$.

Elementar hodisalarga ajratish mumkin bo‘lgan hodisa *murakkab hodisa* deb ataladi.

Ko‘pincha amaliyotda bir xil shartlar majmui bajarilganda ko‘p marta kuzatilishi mumkin bo‘lgan hodisalar, ya'ni ommaviy bir jinsli hodisalar bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Ehtimollar nazariyasi yetarlicha ko‘p sondagi bir jinsli tasodifiy hodisalar bo‘yunadigan qonuniyatlarni aniqlash bilan shug‘ullanadi.

Demak, ehtimollar nazariyasi predmeti ommaviy bir jinsli tasodifiy hodisalarning ehtimoliy qonuniyatlarini o‘rganuvchi fandir.

Misollar. 1. Tangani bir marta tashlashdan iborat tajribani qaraylik. Bu tajriba natijasi ikkita elementar hodisadan:

ω_1 - tanganing gerbli tomoni tushishi hodisasi (Γ) va

ω_2 - tanganing raqamli tomoni tushishi hodisasidan *(P)* iborat bo‘ladi. Demak, bu holda elementar hodisalar to‘plami $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}=(\Gamma,P)$ bo‘ladi.

2. Tangani ikki marta tashlashdan iborat tajribani qaraylik. Bu tajriba natijalari quyidagicha bo‘ladi:

ГГ - ikki marta ham tanganing gerbli tomoni tushishi hodisasi;

ГР - birinchi marta gerbli, ikkinchi marta raqamli tomoni tushish hodisasi;

РГ - birinchi marta raqamli, ikkinchi marta esa gerbli tomoni tushishi hodisasi;

РР - ikki marta ham tanganing raqamli tomoni tushishi hodisasi.

Bu holda elementar hodisalar *ГГ, ГР, РГ, РР* bo‘lib, ularning to‘plami

Ω={*ГГ,ГР,РГ,РР,*} bo‘ladi.

2-§. Tasodifiy hodisalar ustida amallar

Biror tajriba o‘tkazilgan bo‘lib, uning natijasida *A* va *B* hodisalar ro‘y bergan bo‘lsin. Ko‘pgina hollarda ehtimolni hisoblash jarayonida o‘rganilayotgan hodisalar orasidagi bog‘lanishni aniqlash lozim bo‘ladi. Shu maqsadda quyida hodisalar tengligi, yig‘indisi va ko‘paytmasi tushunchalari bilan tanishamiz.

23.1-ta'rif. *Agar tajriba natijasida A hodisa ro‘y berganda hamma vaqt B hodisa ham ro‘y bersa, A hodisa B ni ergashtiradi deb ataladi va* $A \subset B$ *kabi yoziladi.*

Masalan, tajriba 3 dona yangi nav urug‘ni ekishdan iborat bo‘lsin. Bu tajriba natijasidan quyidagi hodisalarni tuzamiz:

A_0 - birorta ham urug‘ unib chiqmaganligi hodisasi,

A_1 - 1 dona urug‘ning unib chiqish hodisasi,

A_2 - ikki dona urug‘ning unib chiqish hodisasi,

A - unib chiqqan urug‘lar soni ikkitadan ortiq bo‘lmaganlik hodisasi. Ravshanki, bu holda

$$A_0 \subset A_1,\ A_1 \subset A,\ A_2 \subset A$$

bo‘ladi.

23.2-ta'rif. *Agar A hodisa B hodisani ergashtirsa va o‘z navbatida B hodisa A hodisani ergashtirsa, u holda A va B teng kuchli hodisalar deyiladi va A=B kabi yoziladi.*

23.3-ta'rif. *Tajriba natijasida yo A hodisa, yoki B hodisa, yoki ham A ham B hodisalar ro‘y berishidan iborat hodisa A va B hodisalarning yig‘indisi deb ataladi va A + B kabi belgilanadi.*

23.4-ta'rif. *Tajriba natijasida ham A hodisa, xam B hodisaning (bir vaqtda) birgalikda ro‘y berishidan iborat hodisa A va B hodisalar ko‘paytmasi deb ataladi va AB kabi belgilanadi.*

23.5-ta'rif. *Agar A va B hodisalar bir paytda ro‘y berishi mumkin bo‘lmagan hodisalar, ya'ni* $A \cdot B = V$ *bo‘lsa, u holda A va B birgalikda bo‘lmagan hodisalar deyiladi. Aks holda birgalikda hodisalar deyiladi.*

Masalan, tangani tashlash natijasida bir vaqtda gerbli va raqamli tomonlar tushish hodisalari birgalikda bo‘lmagan hodisalar bo‘ladi.

23.6-ta'rif. *Agar A va B hodisalar yig‘indisi muqarrar hodisa, ko‘paytmasi esa mumkin bo‘lmagan hodisa, ya'ni* $A + B = U$, $A \cdot B = V$ *bo‘lsa, u holda A va B hodisalar o‘zaro qarama-qarshi hodisalar deyiladi.*

Odatda *A* hodisaga qarama-qarshi hodisaga $\bar{A}$ kabi belgilanadi. Demak, $A + \bar{A} = U$, $A \cdot \bar{A} = V$

23.7-ta'rif. *Tajriba natijasida A hodisaning ro‘y berishidan, B hodisaning esa ro‘y bermasligidan iborat hodisa A va B hodisalar ayirmasi deb ataladi va A - B kabi belgilanadi.*

23.1-eslatma. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *hodisalarning yig‘indisi va ko‘paytmasi yuqoridagidek ta'riflanadi.*

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalarni qaraylik. Agar bu hodisalar yig‘indisi muqarrar hodisa bo‘lsa, ya'ni

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = U$$

bo‘lsa, u holda $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalar hodisalarning to‘la gruppasini tashkil etadi deyiladi. Agar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalar uchun

1^0. $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = U$;

2^0. $A_i A_j = V,\ i \neq j \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$

bo‘lsa, ya'ni istalgan ikkita A_j va A_j $(i \neq j)(i, j = \overline{1, n}$ hodisalar bir vaqtda ro‘y berishi mumkin bo‘lmasa, u holda $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalar juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan hodisalarning to‘la gruppasini tashkil etadi deyiladi.

Agarda bir necha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalardan istalgan birini sinash natijasida ro‘y berishi boshqalariga qaraganda kattaroq imkoniyatga (qulaylikka) ega deyishga asos bo‘lmasa, bunday hodisalar *teng imkoniyatli hodisalar* deyiladi.

3-§. Hodisa ehtimolining ta'riflari

Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchasi bo‘lgan tasodifiy hodisaning ehtimoli tushunchasini keltiramiz.

Hodisaning ehtimoli ma'nosini anglash uchun bitta sodda misol keltiramiz.

Bitta yashikda 10 dona bir xil shar bo‘lib, ularning ikkitasi qizil rangli, 8 tasi esa ko‘k rangli bo‘lsin. Yashikdagi bu sharlarni yaxshilab aralashtirib, so‘ng bu yashikdan qaramasdan tavakkaliga shar olish tajribasini o‘tkazaylik. Ravshanki, yashikdan olingan sharning ko‘k rangli bo‘lish imkoniyati qizil rangli bo‘lishi imkoniyatiga qaraganda ko‘proq bo‘ladi.

Odatda imkoniyatlarni sonlar bilan xarakterlab, ular solishtiriladi. Natijada ko‘p imkoniyatli, kam imkoniyatli umuman, ma'lum miqdordagi imkoniyatli kabi hodisalarning sonli o‘lchovlari to‘g‘risida gapirish mumkin bo‘ladi.

Bu hodisaning ehtimoli tushunchasiga olib keladi.

1. Hodisa ehtimolining klassik ta'rifi. Biror tajriba natijasida chekli sondagi $e_1, e_2, \ldots, e_n$ elementar hodisalardan birortasi ro‘y berishi mumkin bo‘lsin.

Bu $e_1, e_2, \ldots, e_n$ elementar hodisalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) hodisalar juft-jufti bilan birgalikda emas, ya'ni istalgan ikkita e_i va $e_j (i \neq j)$ hodisa birgalikda ro‘y bermaydi;

2) $e_1, e_2, \ldots, e_n$ hodisalardan birortasi albatta ro‘y beradi;

3) $e_1, e_2, \ldots, e_n$ hodisalar teng imkoniyatli.k_1

Biror A hodisa $e_1, e_2, \ldots, e_n$ elementar hodisalar ichidan $e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_m}$ lar ro‘y berganda ro‘y bersin. Bu holda $e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_m}$ elementar hodisalar (ya'ni A hodisasining ro‘y berishiga olib keladigan hodisalar) A hodisaga qulaylik tug‘diradigan hodisalar deyiladi.

Masalan, tangani ikki marta tashlash tajribasini qaraylik. Bu tajriba natijasida *ГГ*, *ГР*, *РГ*, *РР* elementar hodisalar ro‘y beradi.

A hodisa tangani ikki marta tashlaganda ikkala holda ham gerbli tomoni tushishi hodisasi (*ГГ* hodisasi) bo‘lsin. Bu holda A hodisaga qulaylik tug‘diradigan elementar hodisa faqat bitta bo‘ladi (*ГГ* hodisa).

Faraz qilaylik, n ta $e_1, e_2, \ldots, e_n$ elementar hodisalardan t tasi A hodisaning ro‘y berishiga qulaylik tug‘dirsin.

23.8-ta'rif. Ushbu $\frac{m}{n}$ son *A hodisaning ehtimoli* deb ataladi va uni *P(A)* kabi yoziladi:

$$P(A) = \frac{m}{n} \qquad (24.1)$$

Demak, A hodisaning ehtimoli A hodisaning ro‘y berishiga qulaylik tug‘diruvchi hodisalar sonining teng imkoniyatli barcha elementar hodisalar soniga nisbatiga teng.

Misollar. 1. Yashikda yaxshilab aralashtirilgan 25 ta bir xil shar bo‘lib, ulardan 5 tasi ko‘k, 11 tasi qizil va 9 tasi oq shar bo‘lsin. Yashikdan tavakkaliga bitta shar olinganda uning ko‘k shar bo‘lishi, qizil shar bo‘lishi va oq shar bo‘lishi ehtimollari topilsin.

Ravshanki, jami elementar hodisalar soni n = 25 (5+11+9=25) bo‘ladi. Aytaylik, A, B va C mos ravishda ko‘k, qizil va oq shar (chiqishidan iborat hodisalarni ifodalasin. m_1, m_2 va m_3 esa mos ravishda bu hodisalarga qulaylik tug‘diruvchi elementar hodisalar soni bo‘lsin. U holda masala shartiga ko‘ra $m_1 = 5, m_2 = 11$ $m_3 = 9$ bo‘ladi.

Ehtimolning klassik ta'rifiga ko‘ra

$$P(A)=\frac{5}{25}=0{,}2,\ P(B)=\frac{11}{25}=0{,}44,\ \ P(C)=\frac{9}{25}=0{,}36$$

bo‘ladi. Demak, tavakkaliga olingan sharning ko‘k shar bo‘lish ehtimoli 0,2 ga, qizil shar bo‘lish ehtimoli esa 0,44 ga va oq shar bo‘lish ehtimoli 0,36 ga teng.

2. O‘tkazilayotgan tajriba, simmetrik, bir jinsli tangani uch marta tashlashdan iborat bo‘lsin. Tajriba natijasida 2 marta gerbli tomoni tushish hodisasining ehtimoli topilsin.

Tangani uch marta tashlashda ro‘y berishi mumkin bo‘lgan barcha elementar hodisalar to‘plamini tuzamiz:

$$\Omega=\{e_1=(ГГГ),\ e_2=(ГГР),\ e_3=(ГРР),\ e_4=(РРР),$$

$$e_5=(РГР),\ e_6=(РРГ),\ e_7=(ГРГ),\ e_8=(РГГ)$$

bo‘lib, bu to‘plam elementlarining soni $n=8$.

Aytaylik, A hodisa tangani uch marta tashlaganda 2 marta gerbli tomoni tushishi hodisasi bo‘lsin.

Elementar hodisalar to‘plami Ω dan ko‘ramizki, barcha elementar imkoniyatlar soni

$n=2^3=8$, ulardan A hodisaga qulaylik tug‘diruvchi elementar hodisalar soni $m=3$ bo‘ladi.

Hodisa ehtimolining ta'rifiga ko‘ra qaralayotgan A hodisaning ehtimoli

$$P(A)=\frac{3}{8}=0{,}375$$

bo‘ladi.

Hodisa ehtimolining ta'rifidan bevosita quyidagi xossalar kelib chiqadi.

1°. H*ar qanday A hodisaning ehtimoli P(A)≥0 va P(A)≤1, ya'ni 0≤P(A)≤1 bo‘ladi.*

2°. Muqarrar hodisaning ehtimoli 1 ga teng bo‘ladi, ya'ni P(Ω)=1.

3°. *Mumkin bo‘lmagan hodisaning ehtimoli nolga teng bo‘ladi: P(V)*=0.

2. *Hodisa ehtimolining geometrik va statistik ta'riflari.*

Biz yuqorida o‘rgangan ehtimolning klassik ta'rifidan unda bayon etilgan barcha elementar imkoniyatlar soni chekli bo‘lgan holdagina foydalanish mumkin, aks holda bu ta'rifdan foydalanib bo‘lmaydi.

Bunday holda hodisa ehtimoliga boshqacha ta'rif berishga to‘g‘ri keladi. Quyida hodisa ehtimolining geometrik va statistik ta'riflarini keltiramiz.

Hodisa ehtimolining geometrik ta'rifi. Faraz qilaylik, tekislikda biror Q soha berilgan bo‘lib, bu Q soha boshqa bir G sohani o‘z ichiga olsin: $G\supset Q$. Q sohaga tavakkal qilib nuqta tashlanadi. Bu nuqtaning G sohaga tushishi ehtimolini ta'riflaymiz. Bu yerda barcha elementar hodisalar to‘plami Q sohadan iborat bo‘ladi. Ravshanki, Q- cheksiz to‘plam. Binobarin, bu holda ehtimolning klassik ta'rifidan foydalanib bo‘lmaydi. Q sohaga tashlangan nuqta shu sohaning istalgan qismiga

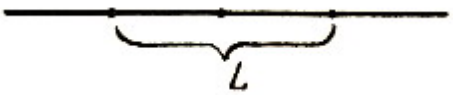
tushishi mumkin va nuqtaning *Q* sohaning biror *G* qismiga tushish ehtimoli *G* ning o‘lchoviga proporsional bo‘lib, u *G* ning shakliga ham, *G*ning *Q* sohaning qayeriga joylashishiga ham bog‘liq bo‘lmasin. Shu shartlarda ushbu

$$P = \frac{mesG}{mesQ} \qquad (24.2)$$

miqdor qaralayotgan hodisaning geometrik ehtimoli deb ataladi. Bunda *mes-Q* va *G* sohalarning o‘lchovini bildiradi.

Misol. *L* uzunlikka ega bo‘lgan kesmaga tavakkal qilib nuqta tashlangan bo‘lsin. Tashlangan nuqtaning kesma o‘rtasidan uzog‘i bilan *l* masofada ($2l < L$) yotishi hodisasining ehtimoli topilsin.

Yechish. Umumiylikka ziyon keltirmasdan kesmaning o‘rtasini sanoq boshi deb qaraylik (141-chizma).



141-chizma.

Masalaning shartini qanoatlantiradigan nuqtalar to‘plami *[-l; l]* segmentdan iborat bo‘ladi. Bu segmentning uzunligi *2l* ga teng. Yuqoridagi ta'rifga ko‘ra qaralayotgan hodisaning ehtimoli

$$P = \frac{2l}{L}$$

ga teng bo‘ladi.

Hodisa ehtimolinnig statistik ta'rifi. Yuqorida aytib o‘tganimizdek, hodisa ehtimolining klassik ta'rifi tajriba natijasida ro‘y beradigan elementar hodisalarning teng imkoniyatli bo‘lishiga asoslangandir.

Ko‘p hollarda elementar hodisalarning teng imkoniyatli bo‘lishini ko‘rsata olmaymiz. Shu sababli ham hodisa ehtimolining amalda qulay bo‘lgan ta'rifini keltirish zaruriyati tug‘iladi. Bunday ta'riflardan biri hodisa ehtimolining statistik ta'rifidir. Bu ta'rifni keltirishdan avval nisbiy chastota tushunchasi bilan tanishamiz.

Tabiatda, texnikada ko‘p marta takrorlanadigan voqealarga duch kelamiz. Bu tajriba natijasida biror *A* hodisa ro‘y berishi ham mumkin, ro‘y bermasligi ham mumkin. Aytaylik, *N* marta tajriba o‘tkazilgan bo‘lib, unda *A* hodisa $\mu(A)$ marta ro‘y bergan bo‘lsin.

Ushbu

$$W(A) = \frac{\mu(A)}{N} \qquad (24.3)$$

nisbat hodisaning nisbiy chastotasi yoki ststistik ehtimollik deb ataladi.

Demak, *A* hodisaning nisbiy chastotasi shu hodisa ro‘y bergan tajribalar sonini o‘tkazilgan jami tajribalar soniga bo‘lgan nisbatiga teng.

Ko‘p kuzatishlar shuni ko‘rsatadiki, bir xil shart-sharoitda ko‘p marta takrorlanadigan tajriba o‘tkazilganda nisbiy chastota biror o‘zgarmas son atrofida tebranib turadi (odatda buni *nisbiy chastotaning turg‘unligi* deyiladi). Masalan, tanga tashlash tajribasini ko‘p marta takrorlaganda, tanganing gerbli tomonining tushish chastotasi quyidagicha bo‘lgan.

Tajribalar soni (W)	Gerbli tomoni bilan tushish soni (μ_r)	Nisbiy chastota W_r
4040	2048	0,5080
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Bundan nisbiy chastotaning 0,5 soni atrofida tebranib turishini ko‘ramiz. Tajribalar sonini yanada orttira borganda nisbiy chastota 0,5 soniga borgan sari yaqin kelaveradi.

Shunday qilib, hodisaning nisbiy chastotasi tajribalar soni orta borgan sari bitta o‘zgarmas son atrofida bo‘lar ekan. Odatda shu son hodisaning ehtimoli deyiladi. Hodisa ehtimoliga berilgan bu ta'rif *ehtimolning statistik ta'rifi* deyiladi.

Misol. Ekilgan 30 tup olma ko‘chatidan kelgusi yili 25 tupi ko‘kargan bo‘lsa, ekilgan olma ko‘chatining ko‘karish *(N) h*odisasining nisbiy chastotasi topilsin.

Yechish. Ehtimolning statistik ta'rifiga asosan $N = 30$, $\mu_A=25$

Bundan $W(A)= \frac{\mu_A}{N} = \frac{25}{30}= \frac{5}{6} \approx 0.83$

4-§. Ehtimollarni qo‘shish teoremalari

Biz XXIV bob, 1-§ da birgalikda bo‘lgan va birgalikda bo‘lmagan hodisalar hamda ikki hodisa yig‘indisi tushunchalari bilan bunday hodisalar yig‘indisiga doir teoremalarni keltiramiz.

Faraz qilarlik, *A* va *B* hodisalar birgalikda bo‘lmagan P*(A)* va P*(B)* mos ravishda ularning ehtimollari bo‘lsin.

24.1-teorema. *Ikkita birgalikda bo‘lmagan A va B hodisalar yig‘indisining ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yig‘indisiga teng:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (24.4)$$

Isbot. Bu teoremani hodisa ehtimolining klassik ta'rifidan foydalanib isbotlaymiz.

Aytaylik, tajriba natijasi p ta elementar hodisalar bo‘lib, bulardan m_1 tasi A hodisaga, m_2 tasi esa B hodisaga qulaylik tug‘dirsin.

U holda

$$P(A)=\frac{m_1}{n},\ \ P(B)=\frac{m_2}{n} \qquad (24.5)$$

bo‘ladi.

Shartga ko‘ra A va B birgalikda bo‘lmagan hodisalar. Shuning uchun yo A hodisa, yoki B hodisa ro‘y berishiga qulaylik tug‘diruvchi hodisalar soni m_1+m_2 ga teng bo‘ladi. Demak, $A+B$ hodisaning ehtimoli

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}$$

bo‘ladi. Agar

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}$$

bo‘lishini e'tiborga olsak, unda (24.5) munosabatdan foydalanib,

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

ga ega bo‘lamiz. Teorema isbotlandi.

24.1-natija. *A hodisaga qarama-qarshi* $\overline{A}$ *hodisaning ehtimoli*

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

ga teng bo‘ladi.

Isbot. Haqiqatan ham, A va $\overline{A}$ qarama-qarshi bo‘lganligidan (2-§ ga qarang)

$$P(A+\overline{A})=P(U)=1. \qquad (24.6)$$

Yuqorida keltirilgan birgalikda bo‘lmagan hodisalar uchun ehtimollarni qo‘shish teoremasiga asosan

$$P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}). \qquad (24.7)$$

(24.6), (24.7) munosabatlarda esa

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Misol. Yashikda 30 ta shar bor, ulardan 10 tasi qizil, 5 tasi ko‘k va 15 tasi oq. Tavakkaliga olingan sharning rangli bo‘lish ehtimoli topilsin.

Yechish. Rangli shar chiqishi deganda yo qizil shar, yoki ko‘k shar chiqishini tushunamiz. Olingan sharning qizil shar chiqishi hodisasini *A*, ko‘k shar chiqishi hodisasini *B* deylik. Unda ehtimolning klassik ta'rifiga ko‘ra

$$P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$$

bo‘ladi. Ravshanki, $A+V$ olingan sharning rangli shar chiqishidan iborat bo‘lgan hodisa. A va V hodisalari birgalikda emas. Shuning uchun yuqoridagi teoremaga ko‘ra $P(A+B)=P(A)+P(B)$ bo‘ladi. Demak, izlanayotgan ehtimol:

$$P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

Faraz qilaylik, $A_1, A_2, \ldots A_n$ hodisalar juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan hodisalar bo‘lsin. Yuqoridagi kabi ko‘rsatish mumkinki, bu holda ham

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

bo‘ladi.

Xususan, bu $A_1, A_2, \ldots A_n$ hodisalar hodisalarning to‘la gruppasini tashkil etsa $A_1+A_2+\ldots+A_n=U$, u holda

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1$$

bo‘ladi.

Endi birgalikda bo‘lgan hodisalar uchun qo‘shish teoremasini keltiramiz.

Ma'lumki, tajriba natijasida ro‘y beradigan ikkita hodisadan birining ro‘y berishi ikkinchisining ro‘y berishini inkor etmasa, bu hodisalar *birgalikda bo‘lgan hodisalar* deyiladi.

24.2-teorema. *Ikkita birgalikda bo‘lgan A va B hodisadan hech bo‘lmaganda birining ro‘y berish ehtimsli bu hodisalar ehtimollari yig‘indisidan ularning birgalikda ro‘y berish hodisasi ehtimolining ayirmasiga teng bo‘ladi:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Isbot. Shartga ko‘ra A va B birgalikda bo‘lgan hodisalar. Ravshanki, $A\bar{B}$, $\bar{A}B$ va AB hodisalar o‘zaro birgalikda emas va

$$A+B=A\bar{B}+\bar{A}B+AB$$

bo‘ladi. Unda 24.1-teoremaga ko‘ra

$$P(A)+P(B)=P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)+P(AB) \qquad (24.8)$$

bo‘ladi.

A hodisa hamda B hodisaning ro‘y berishi uchun AB hamda AB hodisalardan bittasi ro‘y berishi kerak. Yana 24.1-teoremaga ko‘ra, shuningdek

$$P(A)=P(A\bar{B})+P(AB), \qquad (249)$$

$$P(A)=P(\bar{A}B)+P(AB) \qquad (24.10)$$

bo‘ladi. (24.9), (24.10) munosabatlardan

$$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB),$$

$$P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Natijada (22.8) tenglikdagi $P(A\bar{B})$ va $P(\bar{A}B)$ ning o‘rniga ularning topilgan qiymatlarini qo‘ysak,

$$P(A+B)=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)+P(AB)=$$
$$=P(A)+P(B)-P(AB)$$

hosil bo‘ladi. $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

Demak,*P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).* Teorema isbotlandi.

Misol. Ikki mergan bittadan o‘q uzdi. Birinchi merganning nishonga tekkizish (*A* hodisa) ehtimoli 0,8 ga, ikkinchisiniki (*B* hodisa) 0,9 ga teng bo‘lsa, merganlardan aqalli bittasining (*C* hodisa) nishonga tekkizganligi ehtimoli topilsin.

Yechish. Masala shartiga asosan *P(A)=0,8, P(B)=0,9, C=A+B* bo‘lganligi uchun birgalikda bo‘lgan hodisalar uchun ehtimollarni qo‘shish teoremasiga asosan

$$P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)==0{,}8+0{,}9-0{,}8\cdot 0{,}9=1{,}7-0{,}72=0{,}98.$$

5-§. Ehtimollarni ko‘paytirish teoremalari

Agar ikkita *A* va *B* hodisalardan birining ro‘y berishi ikkinchisining ro‘y berish yoki ro‘y bermasligiga bog‘liq bo‘lmasa, u holda bu hodisalar *erkli hodisalar* deyiladi. Yuqoridagi mulohazalarimizdan ravshanki, bu mavzuda faqatgina birgalikda bo‘lgan hodisalar haqida fikr yuritiladi, chunkn birgalikda bo‘lmagan hodisalarning birgalikda ro‘y berish (ko‘paytmasini) ehtimoli nolga teng. *A* va *B* hodisalar erkli hodisalar bo‘lab, *P(A)* va *P(B)* ularning mos ehtimollari bo‘lsin.

23.3-teorema. *Ikkita erkli A va B hodisaning birgalikda ro‘y berish ehtimoli shu hodisalarning ehtimollari ko‘paytmasiga teng:*

$$P(AB)=P(A)\cdot(P(B).$$

Isbot. Shartga ko‘ra *A* va *B* erkli hodisalar. Tajriba natijasida *n* ta elementar hodisaga ega bo‘laylik. Bulardan n_1 tasi *A* hodisaga qulaylik tug‘dirsin.

Tajriba natijasida *m* ta elementar hodisaga ega bo‘laylik. Bulardan m_1 tasi *B* hodisaga qulaylik tug‘dirsin.

Ravshanki,

$$P(A)=\frac{n_1}{n},\quad P(B)=\frac{m_1}{m}. \qquad (24.11)$$

Tajribalar natijasida ro‘y beradigan barcha elementar hodisalar soni *nm* ta bo‘ladi. Bulardan n_1m_1 tasi *A* va *B* hodisalarning birgalikda ro‘y berishiga qulaylik tug‘diradi.

Demak,

$$P(AB)=\frac{n_1m_1}{nm}$$

bo‘ladi. Bundan esa, yuqoridagi (24.11) munosabatni e'tiborga olib,

$$P(A\cdot B)=\frac{n_1}{m}\cdot\frac{m_1}{m}=P(A)\cdot P(B)$$

bo‘lishini topamiz.

24.2-natija. *$A_1, A_2, \ldots A_n$ birgalikda bog‘liq bo‘lmagan hodisalar bo‘lsin. U holda*

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$$

bo‘ladi.

Misol. Ikki yashikning har birida 10 tadan detal bor. Birinchi yashikda 8 ta, ikkinchi yashikda 7 ta standart detal bor. Har bir yashikdan tavakkaliga bittadan detal olinadi. Olingan ikkala detalning standart bo‘lish ehtimoli topilsin.

Yechish. Birinchi yashikdan olingan detal standart detal bo‘lishi hodisasini *A*, ikkinchi yashikdan olingani standart detal bo‘lishi hodisasini *B* deylik. Unda $P(A)=\frac{8}{10}=0.8$, $P(B)=\frac{7}{10}=0,7$ bo‘ladi. Ravshanki, olingan ikkala detalning standart detal bo‘lishi hodisasi esa *AB* hodisa bo‘ladi.

A, B birgalikda bo‘lmagan hodisalardir. Shuning uchun 24.3-teoremaga ko‘ra

$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$ bo‘ladi. Demak,

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}56$$

bo‘ladi.

Bog‘liq hodisalar ehtimollarini ko‘paytirish teoremasini keltirishdan avval hodisaning shartli ehtimoli tushunchasi bilan tanishamiz.

Biror *A* hodisa berilgan bo‘lsin. Odatda bu hodisa ma'lum shartlar majmui *C* bajarilganda ro‘y beradi. Agar *A* hodisaning ehtimoli P*(A)* ni hisoblaganda *C* shartlar majmuidan boshqa hech qanday shart talab qilinmasa, bunday ehtimol *shartsiz* ehtimol deyiladi. Ko‘p hollarda *A* hodisaning ehtimolini biror *B* hodisa (P(*B*)>0) ro‘y bergan degan shartda hisoblashga to‘g‘ri keladi.

A hodisaning bunday ehtimoli *shartli ehtimol* deyiladi va *P(A/B)* kabi belgilanadi.

Misol. Tangani 3 marta tashlash tajribasini qaraylik. Tajriba natijasida ro‘y beradigan elementar hodisalar to‘plami quyidagicha bo‘ladi:

Q={ГГГ, ГГР, ГРГ, РГГ, РРР, РРГ, РГР, ГРР}.

Bu to‘plam 8 ta elementdan iborat.

Tanganing gerbli tomoni faqat bir marta tushish hodisasi A va kamida bir marta gerbli tomoni tushish hodisasi *B* bo‘lsa, u holda ehtimolning klassik ta'rifiga asosan:

$$P(A)=\frac{3}{8},\ P(B)=\frac{7}{8}$$

bo‘ladi. P*(A/B)* shartli ehtimol esa

$$P(A/B)=\frac{3}{7}$$

ga teng bo‘ladi.

Endi bog‘liq hodisalar ehtimollarini ko‘paytirish teoremasini keltiramiz.

23.4-teorema. *Ikkita bog‘liq hodisaning birgalikda ro‘y berish. ehtimoli ulardan birining ehtimolini shu hodisa ro‘y berdi degan farazda hisoblangan ikkinchi hodisaning shartli ehtimoliga ko‘paytmasiga teng:*

$$P(AB) = P(A)P(B/A).$$

Isbot. *A* va *B* bog‘liq hodisalar bo‘lsin. Aytaylik, tajriba natijasida *n* ta elementar hodisaga ega bo‘laylik. Bulardan n_1 tasi *A* hodisaning ro‘y berishiga qulaylik tug‘dirsin. Ravshanki, bu holda

$$P(A)= \frac{n_1}{n} \qquad (24.12)$$

bo‘ladi.

A hodisa ro‘y berdi degan shartda *B* hodisa ro‘y berishiga qulaylik tug‘dirgan elementar hodisalar soni *m* ta bo‘lsin. Bu *m* ta hol tajriba natijasida *AB* hodisa ro‘y berishiga qulaylik tug‘dirdi. Demak,

$$P(AB)= \frac{m}{n} \qquad (24.13)$$

A hodisa ro‘y berdi degan shartda *B* hodisaning ro‘y berish ehtimoli (shartli ehtimoli)

$$P(B/A) = \frac{m}{n_1}$$

ga teng. Endi

$$P(AB) = \frac{m}{n} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{m}{n_1}$$

bo‘lishini e'tiborga olib, yuqoridagi (24.12) va (24.13) munosabatlardan foydalanib topamiz: $P(AB) = P(A)P(B/A).$

Teorema isbotlandi.

Misol. Yashikda 5 ta oq, 4 ta qora shar bor. Yashikdan qaytarib joyiga qo‘ymasdan, bittalab shar olish tajribasi o‘tkazilayotgan bo‘lsin. Birinchi galda oq shar, ikkinchi galda qora shar chiqishi ehtimoli topilsin.

Yechish. Birinchi galda oq shar chiqish hodisasini *A,* ikkinchi galda qora shar chiqish hodisasini *B* deb olaylik. Bu hodisalar bog‘liq bo‘ladi. Hodisa ehtimoli ta'rifiga ko‘ra *P(A)*=5/9.

Birinchi galda oq shar chiqqan holda, ikkinchi galda qora shar chiqishi ehtimoli (shartli ehtimoli) *P(B/A)*=4/9 bo‘ladi.

Ravshanki, birinchi galda oq shar, ikkinchi galda qora shar chiqishi hodisasi *A-B* bo‘ladi. Bu hodisaning ehtimolini yuqorida keltirilgan teoremadan foydalanib topamiz:

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{81}.$$

24.2-eslatma. Agar *A, B, C* bog‘liq hodisalar bo‘lsa, u holda

$$P(ABC)= P(A)P(B/A)P(C/AB)$$

munosabatning o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatish mumkin.

Umuman, $A_1,\ A_2\ ,\ldots.,A_n$ bog‘liq hodisalar uchun quyidagi formula o‘rinli bo‘ladi:

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1}).$$

6-§. To‘la ehtimol formulasi. Bayes formulasi

Biror *A* hodisa *n* ta juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan $H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_n$ hodisalarning (gipotezalarning) bittasi va faqat bittasi bilangina ro‘y berishi mumkin bo‘lsin. Demak, birinchidan

$$A=AH_1+AH_2+...+AH_n,$$

ikkinchidan esa

$$AH_i\cap AH_j=V\ \ (i\neq j)$$

bo‘ladi.

Ehtimollarni qo‘shish teoremasidan foydalanib topamiz:

$$P(A)=P(AH_1+AH_2+...+AH_n)==P(AH_1)+P(AH_2)+...+P(AH_n).$$

Agar

$$P(AH_1)=P(H_1)P(A/H_1),$$
$$P(AH_2)=P(H_2)P(A/H_2),$$
$$.....$$
$$P(AH_n)=P(H_n)P(A/H_n)$$

bo‘lishini e'tiborga olsak, u holda ushbu tenglikka kelamiz:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+...+$$
$$+P(H_n)P(A/H_n)=\sum_{k=1}^{n}P(H_k)P(A/H_k).$$

Demak,

$$P(A)=\sum_{k=}^{n}P(H_k)P(A/H_k). \qquad (24.14)$$

Odatda (24.14) formula *to‘la ehtimol formulasi* deb ataladi. To‘la ehtimol formulasidan murakkab hodisalarning ehtimollarini hisoblashda foydalaniladi.

Misol. Omborga 360 ta mahsulot keltirildi. Bulardan:

300 tasi bir korxonada tayyorlangan bo‘lib, 250 tasi yaroqli mahsulot,

40 tasi 2-korxonada tayyorlangan bo‘lib, 30 tasi yaroqli mahsulot,

20 tasi 3-korxonada tayyorlangan bo‘lib, 10 tasi yaroqli mahsulot.

Ombordan tavakkaliga olingan mahsulotntshg yaroqli bo‘lish ehtimoli topilsin.

Yechish. Tavakkaliga olingan mahsulot uchun quyidagi gipotezalar o‘rinli bo‘ladi:

H_1 – mahsulotning 1-korxonada tayyorlangan bo‘lishi,

H_2 – mahsulotning 2- korxonada tayyorlangan bo‘lishi,

H_3 – mahsulotning 3-korxonada tayyorlangan bo‘lishi.

Ularning ehtimollari mos ravishda quyidagicha bo‘ladi:

$$P(H_1)=\frac{300}{360}=\frac{5}{6};\ P(H_2)=\frac{40}{360}=\frac{1}{9};\ P(H_3)=\frac{20}{360}=\frac{1}{18}.$$

Agar olingan mahsulotning yaroqli bo‘lishini A hodisa deb belgilasak, u holda bu hodisaning turli gipotezalar shartlari ostidagi ehtimollari quyidagicha bo‘ladi:

$$P(A/H_1)=\frac{5}{6};P(A/H_2)=\frac{3}{4};\ P(A/H)=\frac{1}{2}.$$

Yuqorida topilganlarni to‘la ehtimol formulasi (23.10) ga qo‘yamiz:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=$$

$$=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{2}=\frac{29}{36}.$$

Aytaylik, birgalikda bo‘lmagan N_1, N_2, ..., N_n hodisalarning to‘la gruppasi berilgan bo‘lib, tajribani o‘tkazishga qadar ularning har birining $P(H_i),\ i=\overline{1,n}$ ehtimollari tayin qiymatga ega bo‘lsin. Tajriba natijasida A hodisa ro‘y berdi degan shart ostida $H_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ hodisalarning ehtimollari tajribadan so‘ng qanday bo‘lishligi quyidagicha topilldi: H_i va A hodisalarning ko‘paytmasi uchun ushbu

$$P(AH_i)=P(A)P(H_i/A)=P(H_i)P(A/H_i)$$

formuladan

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)} \qquad (24.15)$$

munosabatga ega bo‘lamiz. Bu munosabatga to‘la ehtimol formulasini qo‘llanib, quyidagini topamiz:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(H_1)P(A/H_1)+...+P(H_n)P(A/H_n)}=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)}.$$

Bu formula *Bayes formulasi* deyiladi.

Misol. Yuqoridagi misolda tavakkaliga olingan mahsulotning yaroqli ekanligi ma'lum bo‘lsa, uning birinchi korxonada tayyorlangan bo‘lish ehtimolini toping.

Yechish. Masalada *P(H/A)* shartli ehtimolni topish talab qilinmoqda. Bu ehtimolni Bayes formulasidan (24.15) foydalanib topamiz:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}.$$

Endi $P(A) = \frac{29}{36}$, $P(H_1) = \frac{5}{6}$ va $P(A/H_1) = \frac{5}{6}$ bo‘lganligidan talab qilinayotgan ehtimollik quyidagiga teng:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}}{\frac{29}{36}} = \frac{25}{29}.$$

7- §. O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tajribalar ketma-ketligi. Bernulli formulasi

Amaliy masalalarni hal etishda tajribalar odatda bir necha bor takrorlanadi. Buning natijasida tajribalar ketma-ketligi hosil bo‘ladi. Masalan, yangi paxta navi yaratilganligini ma'lum kafolat bilan tasdiqlash uchun shu nav bilan bir necha yil tajribalar o‘tkazilib, ular asosida yangi navning o‘rtacha hosildorligi, tola chiqishligi, tez pisharligi, sifatliligi kabi muhim belgilari avvalgi navlarga qaraganda yuqori ekanligi ko‘rsatiladi([2] – [4]).

Ma'lumki, tajribalar o‘tkazilishi natijasida tasodifiy hodisalar ro‘y beradi. Agar tajriba natijasida biror tasodifiy hodisa ro‘y berish ehtimoli boshqa tajriba natijasida qanday tasodifiy hodisa ro‘y berganiga bog‘liq bo‘lmasa, bunday tajribalar ketma-ketligi o‘*zaro bog‘liq bo‘lmagan tajribalar* deyiladi.

Aytaylik, n ta tajriba o‘tkazilgan bo‘lib, ular quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) tajribalar o‘zaro bog‘liq bo‘lmasin;

2) har bir tajriba natijasida yo A hodisa, yoki unga qarama-qarshi $\bar{A}$ hodisalardan biri ro‘y bersin;

3) har bir tajribada A hodisaning ro‘y berishi ehtimoli o‘zgarmas bo‘lib, u $P(A)=p$ ga teng bo‘lsin. U holda A hodisaning ro‘y bermaslik ehtimoli, ya'ni qarama-qarshi hodisaning ro‘y berish ehtimoli $P(\bar{A})=q=1-p$ bo‘ladi.

Bunday, ya'ni har bir bog‘liqmas tajriba natijasida to‘la gruppa tashkil qiladigan ikkita A va $\bar{A}$ hodisalardan faqat bittasi albatta ro‘y beradi deb qaraladigan tajribalar ketma- ketligi Bernulli sxemasi deyiladi.

Ravshanki,

$$P(\bar{A}) = q = 1 - p$$

Demak, har bir tajriba natijasida A hodisaning ro‘y berish ehtimoli $P(A)= p$, unga qarama-qarshi A hodisaning ro‘y berish ehtimoli $P(\bar{A})= q=1-p$ bo‘lsin. Asosiy masala n ta erkli tajribada A hodisasining rosa k marta ro‘y berishi ehtimolini topishdan iborat. Bu ehtimolni $P_n(k)$ bilan belgilaylik.

24.5-teorema. n ta erkli tajribada A hodisaning rosa k marta ro‘y berish ehtimoli quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad (24.16)$$

bunda

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Bu teorema quyidagicha mulohaza bilan isbotlanadi:

Bog‘liq bo‘lmagan *p* ta tajribaning har birida kuzatilayotgan *A* hodisaning ro‘y berish ehtimoli *p*, ro‘y bermaslik ($\bar{A}$ – hodisaning ro‘y berishi) ehtimoli *q* (*q*=1-*p*) bo‘lsin.

Aytaylik, *p* ta tajribada $\bar{A}$ hodisa biror marta ham ro‘y bermasin. Demak, birinchi tajribada $\bar{A}$ hodisa, ikkinchi tajribada ham $\bar{A}$ hodisa va hokazo *p*-tajribada ham $\bar{A}$ hodisa ro‘y bergan. Natijada ushbu

$$\underbrace{\bar{A}\bar{A}\,\bar{A}\ldots\bar{A}}_{nma}$$

murakkab hodisaga ega bo‘lamiz. Uning ehtimoli erkli hodisalar uchun ehtimollarni ko‘paytirish teoremasiga asosan:

$$P(\underbrace{\bar{A}\bar{A}\,\bar{A}\ldots\bar{A}}_{nma}) = P(\underbrace{\bar{A})\,P(\bar{A})\,P(\bar{A})\ldots P(\bar{A})}_{nma} = \underbrace{q\;q\;q\;\ldots\;q}_{nma} = q^n.$$

Bu holda, ya'ni *n* ta tajrkbada *A* hodisaning biror marta ham ro‘y bermaslik ehtimoli

$$P_n(0) = q^n$$

bo‘ladi.

Aytaylik, *p* ta tajribada *A* hodisa faqat bir marta ro‘y bergan bo‘lsin. Bunda quyidagi *n* ta murakkab hodisaga ega bo‘lamiz:

$\underbrace{\bar{A}\;\;\bar{A}\ldots\bar{A}}_{nma}$ (birinchi tajribada *A* ro‘y berdi),

(ikkinchi tajribada *A* ro‘y berdi) $\underbrace{\bar{A}\;\;\bar{A}\ldots\bar{A}}_{nma}$ (uchinchi tajribada *A* ro‘y berdi), $\bar{A}\;\;\bar{A}\ldots\bar{A}\,A$ (*n*-tajribada *A* ro‘y berdi).

Bu murakkab erkli hodisalarning ehtimollarni ko‘paytirish teoremasiga asosan

$$P(A\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}) = P(A)P(\bar{A})\ldots P(\bar{A}) = pq \cdot q \ldots q = pq^{n-1}$$

.....

$$P(\bar{A}\;\bar{A}\ldots.\bar{A}\;A) = P(\bar{A})\,p(\bar{A})\ldots P(\bar{A})\,P(A) = pq^{n-1}$$

n ta tajribada *A* hodisaning bir marta ro‘y berish ehtimoli birgalikda bo‘lmagan hodisalar uchun ehtimollarni qo‘shish teoremasiga asosan

$$P_n(1) = P(A\bar{A}\,\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A} + \bar{A}A\bar{A}\ldots\bar{A} + \bar{A}\bar{A}A\bar{A}\ldots\bar{A} + \ldots + \bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}A =$$

$$= P(A\bar{A}\ldots\bar{A}) + P(\bar{A}A\bar{A}\ldots\bar{A}) + \ldots + P(\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}A) =$$

$$= pq^{n-1} + pq^{n-1} + ... + pq^{n-1} = npq^{n-1} = C_n^1 pq^{n-1}$$

bo‘ladi. Demak,

$$P_n(1) = C_n^1 pq^{n-1}.$$

Aytaylik, n ta tajribada A hodisasi ikki marta ro‘y bersin. Bu holda quyidagi

$$AA\overline{A}...\overline{A}, A\overline{A}A\overline{A}...\overline{A}, ..., \overline{A}\overline{A}...\overline{A}AA$$

murakkab hodisalardan biri ro‘y berdi. Ularning soni

$$\frac{n(n-1)}{2} = C_n^2$$

bo‘lib, har birining ehtimoli $p^2\ q^{n-2}$ ga teng bo‘ladi. Yuqoridagidek, p ta tajribada A hodisaning k marta ro‘y berish ehtimoli

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (24.16)$$

ga teng bo‘lishi ko‘rsatiladi.

(24.16) formula Bernulli formulasi deb ataladi.

p ta tajribada A hodisa ro‘y bermasligi mumkin, bir marta, ikki marta va h.k, p marta ro‘y berishi mumkin. Bunday hodisalar yig‘indisi albatta muqarrar hodisa bo‘ladi. Shuning uchun ularning ehtimollari yig‘indisi 1 ga teng bo‘ladi. Demak,

$$P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + ... + P_n(n) = 1$$

ya'ni

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1.$$

Misol. Har bir olma ko’chatini ko‘karish (A hodisa) ehtimoli 0,8 ga teng. Ekilgan 5 olma ko’chatidan 3 tasining ko‘karish ehtimoli topilsin.

yechish. Masala shartiga binoan

$$n = 5,\ k = 3,\ P(A) = p = 0{,}8,\ P(\overline{A}) = q = 1 - p = 0{,}2$$

bo‘lishini aniqlaymiz. Unda (23.11) Bernulli formulasiga ko‘ra

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 = \frac{5!}{3!\cdot(5-3)} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}2048.$$

24.3-eslatma. Endi erkin tajribalar ketma-ketligida hodisaning ro‘y berish sonini μ bilan belgilab, quyidagi hodisalarni kiritamiz va ularning ehtimollarini yozamiz:

1) hodisaning k dan kam marta ro‘y berish hodisasini $\{0 \le \mu \le k-1\}$ desak, uning ehtimoli quyedagicha bo‘ladi:

$$P\{0 \le \mu \le k-1\} = \sum_{m=0}^{k-1} P_n(m)$$

2) hodisaning k dan ko‘p marta ro‘y berish hodisasini $\{k+1 \le \mu \le n\}$ desak, uning ehtimoli quyedagicha bo‘ladi

$$P\{k+1 \le \mu \le n\} = \sum_{m=k+1}^{n} P_n(m)$$

3) hodisaning kamida *k* marta ro‘y berish hodisasining ehtimoli quyedagicha bo‘ladi

$$P\{k \le \mu \le n\} = \sum_{m=k}^{n} P_n(m)$$

4) hodisaning ko‘pi bilan *k* marta ro‘y berish ehtimoli quyedagicha bo‘ladi

$$P\{0 \le \mu \le k\} = \sum_{m=0}^{k} P_n(m)$$

5) hodisaning kami bilan k_1 marta, ko‘pi bilan k_2 marta ro‘y berish hodisasini $\{k_1 \le \mu \le k_2\}$ desak, uning ehtimoli

$$P\{k_1 \le \mu \le k_2\} = \sum_{m=k_1}^{k_2} P_n(m)$$

bo‘ladi.

Misollar. 1) chigitning unuvchanligi 80% bo‘lsa, ekilgan 4 ta chigitdan: a) uchtasining unib chiqishi; b) hech bo‘lmaganda ikkitasining unib chiqish ehtimolini toping.

Yechish. a) shartga ko‘ra *n=4, k=3, p=0,8, q=0,2.* Bernulli (24.16) formulasiga ko‘ra

$$P_4(3) = C_4^3(0{,}8)^3 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096;$$

b) *A* hodisa ekilgan 4 ta chigitdan hech bo‘lmaganda ikkitasining unib chiqishini, ya'ni 2 tasi, yoki 3 tasi, yoki 4 tasi unib chiqishini bildirsin. Ehtimollarni qo‘shish teoremasiga ko‘ra:

$$P(A)=P_4\ (yoki\ 2, yoki\ 3, yoki\ 4)= P_4(2)+ P_4(3)+ P_4(4).$$

$P_4(3)$ ehtimol a) bandda hisoblangan;

$$P_4(2) = C_4^2(0{,}8)^2 \cdot (0{,}2)^2 = 0{,}1536;$$

$$P_4(4) = C_4^4(0{,}8)^4 \cdot (0{,}2)^0 = 0{,}4096.$$

Demak, *P(A)*=0,9728.

Endi (24.16) Bernulli formulasining tahlili bilan shug‘ullanamiz.

Ravshanki, berilgan tayin *n* va *p* da

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n)$$

ning qiymati *k* ga bog‘liq, ya'ni *k* ning funksiyasi bo‘ladi. Bunda *k o‘*zgaruvchining *k*=0, *k=1, k=2, ... , k= n* qiymatlarida $P_n(k)$ funksiyaning qiymatlari ushbu

$$P_n(0),\ P_n(1),\ P_n(2),\ ...,\ P_n(n) \qquad (24.17)$$

sonlar ketma-ketligidan iborat bo‘ladi. Bu (24.17) dagi sonlardan tayinlangan *n* uchun qaysi biri eng katta bo‘ladi, ya'ni *A* hodisa *n* ta erkli sinashda ro‘y berishlar

sonining qanday qiymatlarida $P_n(k)$ eng katta ehtimolga ega bo‘ladi, degan savolga javob berish masalasini o‘rganamiz.

Shu maqsadda ushbu $\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)}$ nisbatni qaraymiz. Ravshanki,

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k},$$

$$P_n(k+1) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{(k+1)(n-k-1)!} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}.$$

U holda

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{n!\, p^{k+1}(1-p)^{n-k-1} \cdot k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!n!\, p^k (1-p)^{n-k}} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p}$$

bo‘ladi. Agar

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} > 1,$$

ya'ni

$$\frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p} > 1 \qquad (24.18)$$

bo‘lsa, u holda $P_n(k+1)>P_n(k)$ bo‘ladi.

k ning qanday qiymatlarida $P_n(k + 1) > P_n(k)$ bo‘lishini bilish uchun (24.18) tengsizlikni k ga nisbatan yechamiz:

$$\frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p} > 1 \Rightarrow (n-k)p > (k+1)(1-p) \Rightarrow np - kp > k(1-p) +$$
$$+ (1-p) \Rightarrow -kp - k(1-p) > (1-p) - np \Rightarrow -k > (1-p) - np \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k < np - (1-p).$$

Demak,

$$k < np - (1-p)$$

bo‘lganda

$$P_n(k+1) > P_n(k)$$

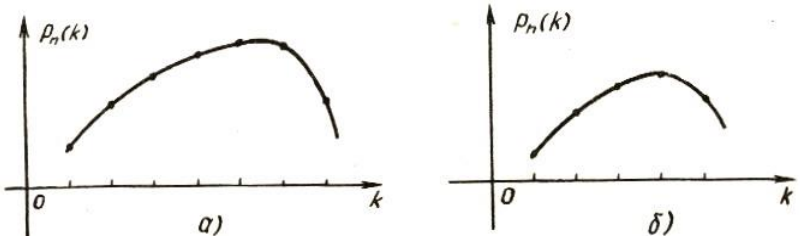
bo‘ladi.

Shunday qilib, k o‘zgaruvchining qiymatlari $np -(1-p)$ sondan kichik bo‘lganda $P_n(k)$ ehtimol o‘sib bordi (ya'ni $P_n(k)$ funksiya o‘suvchi bo‘ladi).

Xuddi shunga o‘xshash, $k \geq np-(1-p)$ bo‘lganda $P_1(k+1)>P_n(k)$ bo‘lishini kursatish mumkin.

Shunday qilib, k o‘zgaruvchining qiymatlari $np-(1-p)= n\,p-q$ sondan katta bo‘lib borganda $P_n(k)$ ehtimol kichiklashib boradi (ya'ni $P_n(k)$ funksiya kamayuvchi bo‘ladi). k o‘zgaruvchining qiymati $k= n\,p-(1-p)= n\,p -q$ bo‘lganda esa $P_n(k+1) = P_n(k)$ bo‘ladi.

Shunday qilib, *k* o‘zgaruvchi 0, 1, 2, ... , *p* qiymatlarni qabul qila borib, uning qiymati *n p-(1-p)* songa yetguncha $P_n(k)$ ning qiymati o‘sa boradi, *k* ning qiymati *n p -(1p)* sondan oshganda esa $P_n(k)$ ehtimol kamaya boradi. Bu holni chizma bilan tasvirlash mumkin (142-a, chizma).



142-chizma.

Endi *n* ta tajribada *A* hodisa ro‘y berishining eng katta ehtimolli sonini topamiz. Aytaylik, bu eng katta ehtimol *k* o‘zgaruvchining k_0 qiymatida bo‘lsin. Unda yuqorida aytilganlarga ko‘ra, bir tomondan,

$$P_n(k_0+1) \le P_n(k_0), \qquad (24.19)$$

ikkinchi tomondan esa

$$P_n(k_0-1) \le P_n(k_0) \qquad (24.20)$$

bo‘ladi.

(24.19) munosabat $k_0 \ge np-(1-p)$, (24.20) munosabat esa $k_0-1 \le np-(1-p)$ bo‘lganda bajarilishini yuqoridagidek ko‘rsatish mumkin.

Demak, ehtimolli k_0 eng katta son ushbu engsizliklarni

$$np-(1-p) \le k_0 \le np+p \qquad (24.21\ )$$

tqanoatlantirar ekan. Bu tengsizlikni qanoatlantiradigan butun sonlar *np-(1-p)=np -q* songa bog‘liq bo‘ladi:

1) Agar *np-(1-p)* kasr son bo‘lsa, u holda (24.21) tengsizlikni qanoatlantiradigan k_0 son bitta bo‘ladi (142-, chizma). δ

2) agar *np-(1-p)* butun son bo‘lsa, u holda (24.21) tengsiz-liklarni qanoatlantiradigan sonlar ikkita bo‘ladi. Demak, bu holda eng katta ehtimolli son ikkita bo‘ladi.

1-misol. Texnik nazorat bo‘limi 24 ta detaldan iborat guruhni tekshirmoqda. Detalning yaroqli standartga muvofiq bo‘lish ehtimoli 0,6 ga teng. Yaroqli deb tan olinadigan detalning eng katta ehtimolli soni topilsin.

Yechish. Shartga ko‘ra *n=24, p = 0,6* bo‘ladi. Unda

$$np-(1-p) = 24\cdot 0{,}6-(1-0{,}6) = 14{,}4-0{,}4 = 14,$$
$$np+p = 24\cdot 0{,}6+0{,}6 = 14{,}4+0{,}6 = 15$$

bo‘lib, eng katta ehtimolli k_0 son (24.21) munosabatga ko‘ra $14 \le k_0 \le 15$

tengsizliklarni qanoatlantirishi kerak. Demak, bu munosabatdan ko‘rinadiki, eng katta ehtimolli son ikkita bo‘ladi:

$$k_0 = 14, k_0 + 1 = 15.$$

\

8- §. Puasson teoremasi

Biz yuqorida o‘rgangan Bernulli sxemasida n ta erkli tajribada A hodisaning k marta ro‘y berishi ehtimoli Bernulli formulasi bilan hisoblanishini ko‘rdik. Bernulli formulasini keltirib chiqarishda A hodisaning har bir tajribada ro‘y berish ehtimoli o‘zgarmas va u p ga teng bo‘lsin deb olindi *(0<p< 1]*.

Ko‘pgina masalalarda hodisaning ro‘y berish ehtimoli p tajribalar soni n ga bog‘liq bo‘lib, n ning ortib borishi bilan p ning kamayib borishiga bog‘langan bo‘ladi. Bunday holda Bernulli sxemasi uchun quyidagi teorema o‘rinli bo‘ladi.

24.6-teorema. (Puasson teoremasi). *Agar Bernulli sxemasida* $n \to \infty$ da $p \to 0$ va $np \to \lambda < 10$ $(\lambda > 0)$ bo‘lsa, u holda $n \to \infty$ da ushbu munosabat o‘rinli bo‘ladi:

$$P_n(k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{yoki} \quad P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Bu taqribiy formulani Puasson formulasi deyiladi.

Isbot. Ma'lumki, n ta o‘zaro erkli tajribada A hodisaning k marta ro‘y berish ehtimoli $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ bo‘ladi, bunda $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Keyingi tenglikni quyidagicha yozib olamiz:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-k)(n-k+1) \ldots n}{k! 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-k)} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n \cdot n\left(1-\frac{1}{n}\right) n\left(1-\frac{2}{n}\right) \ldots n\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!} =$$

$$= \frac{n^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Bu tenglikdan esa

$$\frac{k!}{n^k} C_n^k = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \qquad (24.22)$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Endi $0 \le a_k \le 1$ $(1 \le k \le n,\ n \ge 1)$ sonlar uchun o‘rinli bo‘lgan ushbu

$$(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n) \ge 1-(a_1+a_2+\ldots+a_n)$$

sodda tengsizlikdan foydalanib topamiz.

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\geq 1-\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+...+\frac{k-1}{n}\right).$$

Ravshanki,

$$\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+...+\frac{k-1}{n}=\frac{1}{n}\left(1+2+...+(k-1)\right)=\frac{1}{n}\ \frac{(k-1)k}{2}=\frac{k(k-1)}{2n}.$$

Demak,

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\geq 1-\frac{k(k-1)}{2n}. \qquad (24.23)$$

Natijada (24.22), (24.23) munosabatlardan

$$\frac{k!}{n^k}C_n^k\geq 1-\frac{k(k-1)}{2n}$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Agar $\frac{k!}{n^k}C_n^k\leq 1$ ekanligini e'tiborga olsak, u holda

$$1-\frac{k(k-1)}{2n}\leq\frac{k!}{n^k}C_n^k\leq 1$$

bo‘lishini, ya'ni

$$\frac{n^k}{k!}\left(1-\frac{k(k-1)}{2n}\right)\leq C_n^k\leq\frac{n^k}{k!}$$

bo‘lishini topamiz. Bu tengsizlikni $p^k q^{n-k}$ ga ko‘paytirsak, unda quyidagi tengsizliklar hosil bo‘ladi:

$$\left(1-\frac{k(k-1)}{2n}\right)\frac{n^k}{k!}p^k(1-p)^{n-k}\leq C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\leq\frac{n^k}{k!}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Demak,

$$\left(1-\frac{k(k-1)}{2n}\right)\frac{n^k}{k!}p^k(1-p)^{n-k}\leq P_n(k)\leq\frac{n^k}{k!}p^k(1-p)^{n-k}. \qquad (24.24)$$

Endi shu tengsizlikda qatnashuvchi $\frac{n^k}{k!}p^k(1-p)^{n-k}$ ifodani quyidagicha yozamiz:

$$\frac{n^k}{k!}p^k(1-p)^{n-k}=\frac{(np)^k}{k!}(1-p)^{-k}(1-p)^n=$$

$$=\frac{(np)^k}{k!}(1-p)^{-k}\left(1-\frac{np}{n}\right)^n=\frac{(np)^k}{k!}(1-p)^{-k}\left[\left(1-\frac{np}{n}\right)^{-\frac{n}{np}}\right]^{-np}.$$

Agar $n\to\infty$ da $np\to\lambda,\ 1-\frac{k(k-1)}{2n}\to 1,\ (1-p)^{-k}\to 1\ (p\to 0)$ va

$$\frac{(np)^k}{k!}(1-p)^{-k}\left[\left(1-\frac{np}{n}\right)^{-\frac{n}{np}}\right]^{-np}\to\frac{\lambda^k}{k!}e^{-k}$$

bo‘lishini e'tiborga olsak, unda (24.24) munosabatdan

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

bo‘lishini topamiz. Teorema isbotlandi.

Puasson formulasi tajribalar soni yetarlicha katta bo‘lib, har bir tajribada hodisaning ro‘y berish ehtimoli p yetarlicha kichik bo‘lganda $P_n(k)$ ehtimolni taqribiy hisoblashga imkon beradi.

Misol. Har bir to‘p g‘o‘zani vilt kasaliga chalinish ehtimoli $P(A) = p = 0{,}002$ bo‘lsa, tavakkaliga olingan $n = 500$ to‘p g‘o‘za ichida vilt bilan kasallanganlar soni ko‘pi bilan bitta bo‘lish ehtimolini toping?

Yechish. $n = 500,\ p = 0{,}002,\ P_{500}(k \le 1) = ?$,

$\lambda = np = 500 \cdot 0{,}002 = 1 < 10$, demak talab qilingan ehtimolni (4) Puasson formulasi bilan taqriban hisoblash mumkin: $P_n(k) \approx \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$,

$$P_{500}(k \le 1) = P_{500}(0) + P_{500}(1) \approx \frac{1^0 e^{-1}}{0!} + \frac{1^1 e^{-1}}{1!} = \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \approx \frac{2}{2{,}718} = 0{,}73$$

Natijada talab qilingan ehtimollik $P_{500}(k \le 1) = 0{,}73$.

9-§. Muavr - Laplasning lokal va integral teoremalari

Bernulli sxemasida $P_n(k)$ ehtimolni topish uchun ushbu

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

formulaga ega bo‘lgan edik. Bu formula sodda bo‘lsa ham undan, ayniqsa, tajribalar soni katta bo‘lganda foydalanish ancha qiyin bo‘ladi. Natijada bu ifodani o‘ziga qaraganda soddaroq va ayni paytda hisoblash uchun oson bo‘lgan ifoa bilan taqribiy ifodalash masalasi tug‘iladi. Bu masala ba'zi hollar uchun Muavr - Laplasning lokal va integral teoremasi yordamida hal etiladi. Quyida ularni isbotsiz keltiramiz.

24.7-teorema. (Muavr - Laplasning lokal teoremasi). Agar Bernulli sxemasida n yetarlicha katta bo‘lib, har bir sinashda A hodisaning ro‘y berish ehtimoli p $(0 < p < 1)$ o‘zgarmas bo‘lsa $np > 10$ bo′lganda, u $P_n(k)$ ehtimol uchun ushbu

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}} \qquad (24.25)$$

taqribiy formula o‘rinli bo‘ladi. Agar

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

deyilsa, u holda

$$\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}=\frac{x^2}{2}$$

bo‘lib, yuqoridagi (24.25) formula quyidagi ko‘rinishga keladi.

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Ushbu $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ belgilash kiritsak, u holda

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\varphi(x). \qquad (24.26)$$

Bu yerda φ(x) juft funksiya bo‘lib, uning qiymatlari uchun jadvallar tuzilgan (Ilovadagi 1-jadval).

Misol. Har bir ekilgan chigitni unib chiqish *(A* hodisa) ehtimoli o‘zgarmas bo‘lib, $P(A)=p=0{,}8$ ga teng bo‘lsa, ekilgan 100 ta chigitdan unib chiqqanlar soni 85 ta bo‘lish ehtimolini toping.

Yechish. Masala shartiga ko‘ra $n=100$, $p=P(A)=0{,}8$, $q=1-p=0{,}2$, $k=85$.

Ravshanki, talab qilingan $P_{100}(85)$ ehtimolni Bernulli formulasi bilan $P_{100}(85)=\frac{100!}{85!85!}(o.8)^{85}\cdot(0.2)^{15}$ aniq hisoblash *(n* – katta bo‘lgan holda) juda qiyin, bunday holda *p* - o‘zgarmas $(0<p<1)$ bo‘lganda Muavr - Laplasning lokal teoremasidan (24.26) foydalanish maqsadga muvofiqdir. Bizni misolda bu taqribiy formuladan foydalanish uchun avvalo quyidagi miqdorni hisoblaymiz:

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{85-100\cdot0{,}8}{\sqrt{100\cdot0{,}8\cdot0{,}2}}=\frac{85-80}{\sqrt{16}}=\frac{5}{4}=1{,}25.$$

Muavr - Laplasning lokal teoremasiga asosan

$$P_{100}(85)\approx\frac{1}{\sqrt{100\cdot0{,}8\cdot0{,}2}}\cdot\varphi(1{,}25)=\frac{1}{4}\varphi(1{,}25).$$

Ilovadagi jadvaldan $\varphi(1.25)\approx0.1826$ ekanligidan, talab qilingan ehtimollik $P_{100}(85)\approx\frac{1}{4}\cdot0{,}1826=0{,}0456$ bo‘ladi.

Mazkur bobning 7-§ da *p* ta erkli tajribada *A* hodisaning kami bilan k_1 marta va ko‘pi bilan k_2 marta ro‘y berish hodisasi $\{k_1\le\mu\le k_2\}$ ning ehtimoli bo‘lishini ko‘rgan edik.

$$P_n\{k_1\le\mu\le k_2\}=\sum_{m=k_1}^{k_2}P_n(m)$$

Muavr - Laplasning integral teoremasi n yetarlicha katta bo‘lganda $P_n\{k_1 \le \mu \le k_2\}$ ehtimolni taqribiy ifodalovchi formulani beradi.

24.8-teorema. Bernulli sxemasida lokal teorema shartlari ehtimol uchun ushbu

$$P_n\{k_1 \le \mu \le k_2\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{k_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}}^{\frac{k_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad (24.27)$$

taqribiy formula o‘rinli bo‘ladi, bu yerda $0<p<1$,
ushbu

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (24.28)$$

Laplas funksiyasi toq funksiya bo‘lib, x ning turli qiymatlariga integralning mos qiymatlari jadvali tuzilgan (Ilova, 2-jadval).

Isbot. Haqiqatan ham, aniq integralning xossasiga ko‘ra

$$P_n\{k_1 \le \mu \le k_2\} \approx \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_{x'}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_{0}^{x''} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \int_0^{x''} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_0^{x'} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

bo‘ladi. Bu yerda

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}, \; x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

(24.28) ni hisobga olsak

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x'') - \Phi(x') \qquad (24.29)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Ilovadagi 2-jadvalda $\Phi(x)$ Laplas funksiyasining qiymatlari $0 \le x \le 5$ uchun berilgan bo‘lsa, $\Phi(x)$ ning qiymatini taqriban 0,5 deb olish mumkin.

Misol. Tavakkaliga olingan pillaning yaroqsiz chiqish ehtimoli 0,2 ga teng. Tasodifan olingan 400 ta pilladan 70 tadan 130 tagacha yaroqsiz bo‘lish ehtimoli topilsin.

Yechish. Shartga ko‘ra $n = 400$, $k_1=70$, $k_2=130$, $p=0,2$, $q = 1-p = 0,8$ bo‘ladi. Ravshanki,

$$x'' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2(1-0,2)(1-0,2}} = -\frac{10}{8} = -1,25;$$

$$x'' = 6,25.$$

Yuqorida keltirilgan (24.29) formulaga muvofiq izlanayotgan ehtimol tahminan

$$P_n\{k_1 \le \mu \le k_2\} = P_{400}\{70 \le \mu \le 130\} \approx \Phi(6,25) - \Phi(-1,25)$$

bo‘ladi. Jadvaldan hamda *Φ(x)* ning toq funksiyaligini e'tiborga olib quyidagilarni topamiz:

$$\Phi(-1{,}25)=-0{,}39435,\ \Phi(6{,}25)=0{,}5$$

(2-ilovaga qaralsin), u holda

$$P_{400}\{70 \le \mu \le 130\} \approx 0{,}5-(-0{,}39435)=0{,}89435$$

bo‘ladi. Demak, izlanayotgan ehtimollik

$$P_{400}\{70 \le \mu \le 130\} \approx 0{,}89435$$

Faraz qilaylik, *n* ta erkli tajribada *A* hodisa μ marta ro‘y bersin. Har bir tajribada *A* hodisaning ro‘y berish ehtimoli *p (0<p<1)* bo‘lsin. Ma'lumki, $\frac{\mu}{n}$ miqdor *A* hodisaning nisbiy chastotasi bo‘ladi.

Yuqorida keltirilgan Muavr - Laplasning integral teoremasidan foydalanib, nisbiy chastota $\frac{\mu}{n}$ ning o‘zgarmas ehtimol *r* dan chetlanish ehtimolini topish mumkin:

$\forall\varepsilon > 0$ olinganda ham ushbu $\left|\frac{\mu}{n}-p\right| < \varepsilon$ tengsizlik orqali ifodalanadigan hodisaning ehtimoli uchun

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right)$$

taqribiy formula o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatamiz.

Ravshanki,

$$\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<\frac{\mu}{n}-p<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}<$$

$$<\frac{\mu-np}{n}\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}<\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}} \Leftrightarrow -\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}<<\frac{\mu-np}{\sqrt{np(1-p)}}<\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}.$$

Demak,

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=P\left\{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}<\frac{\mu-np}{\sqrt{np(1-p)}}<\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right\}. \qquad (24.30)$$

Muavr-Laplasning integral teoremasidan foydalanib topamiz:

$$P\left\{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}<\frac{\mu-np}{\sqrt{np(1-p)}}<\varepsilon\right.$$

$$\left.<\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right\}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}} e^{-x^2/2}$$

$$\times 2\int_0^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}} e^{-x^2/2}\,dx = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right)$$

Bu holda (24.30) munosabatdan

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}\approx 2\Phi\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) \qquad (24.31)$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Bu ε, n formuladan va ehtimol qiymatlarini topish mumkin.

Misol. A - tangani tashlash tajribasida tanganing gerbli tomoni bilan tushish hodisasi bo‘lsin. Tangani 400 marta tashlanganda A hodisa nisbiy chastotasi $\frac{\mu}{400}$ ning 0,5 ehtimoldan absolyut qiymat bo‘yicha chetlanishi 0,08 dan kichik bo‘lish ehtimolini toping.

Yechish. Shartga ko‘ra n=400, p=0,5, ε=0.08 (24.31) formulaga asosan:

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{400}-0{,}5\right|<0{,}08\right\}\approx 2\Phi\left(0{,}08\cdot\sqrt{\frac{400}{0{,}5\cdot 0{,}5}}\right)=2\Phi(3{,}2).$$

Jadvaldan $\Phi(3{,}2)$ = 0,49931 ni olsak, quyidagicha bo’ladi:

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{400}-0{,}5\right|<0{,}08\right\}\approx 0{,}99862$$

10-§. Markov zanjiri. Asosiy tushunchalar va teoremalar.

Biz o’tgan mavzularda bog‘liq bo‘lmagan(erkli) tajribalar ketma-ketligi mavzusini o’rgangan edik. Bevosita, bu mavzuning umumlashmasi, Markov zanjiri tashkel qiluvchi tasodifiy jarayondir. Bu nazariyaga XX-asr boshida ulug’ rus olimi A.A.Markov asos solgan. Biz Markov zanjiridirni boshlang‘ich tushunchalari bilan qisqacha tanishamiz([2] − [4]).

Har biri $\Omega=\{1,2,\dots\dots,S\}$ $(S\geq 2)$ qiymatlardan birini qabul qiluvchi $x_0, x_1, \dots\dots, x_n, \dots\dots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo`lsin.

**Ta`rif:** Agar $X_n$ tasodifiy miqdorni $X_n=j$ qiymat qabul qilish ehtimoli, o`zidan oldingi $X_{n-1}=i$ tasodifiy miqdorni i qiymat qiymatni qabul qilishga bog`liq bo`lib, undan oldingi $X_{n-2}, X_{n-3}, \dots\dots$ tasodifiy miqdorlarning qanday qiymat qabul qilishiga bog`liq bo`lmasa,bu tasodifiy miqdorlar ketma-keltigi oddiy –Markov zanjirini tashkil etadi

$$P(x_n=j/x_0=l, x_1=m,\dots,x_{n-2}=k, x_{n-1}=i)=P(x_n=j/x_{n-1}=i)=P_{ij}(n) \qquad (24.32)$$

Agar bir qadamga o`tish ehtimolli $P_{ij}(n)$ $n$ ga bog`liq bo`lmasa, ya`ni quyidagicha bo`lsa

$$P|x_n=j/x_{n-1}=i)=P_{ij}$$

bu $x_0, x_1, \dots\dots, x_n, \dots..$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bir jinsli oddiy Markov zanjiri tashkel qiladi. S holatli, bir jinsli oddiy Markov zanjiri tashkil qiluvchi tasodifiy jarayonning, boshlang`ich holatdagi taqsimoti

$P(x_0 = i) = p_i(0)$, $i = 1,2,3,\dots, S$. $\sum_{i=1}^{S} p_i(0) = 1$. $\overline{\pi}(p_1(0), p_2(0),\dots., p_s(0))$,

bir qadamga o`tish matritsasi quyidagicha bo'ladi

$$P = (P_{ij}) = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{21} & \dots. & P_{1S} \\ P_{21} & P_{22} & \dots. & P_{2S} \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ P_{S1} & P_{S2} & \dots. & P_{SS} \end{pmatrix} \qquad (24.33)$$

Bir qadamga o`tish matritsasi quyidagi xossalarga ega:

1) $P_{ij} \geq 0$ barcha i, j lar uchun.

2) $\sum P_{ij} = 1$ har bir satr bo`yicha ehtimollar yig`indisi 1 ga teng.Ya`ni $i$ holatdan j holatga j= $1,2, \dots., S$ o`tishi muqarrar hodisadir.

Bu ikki xossaga ega bo`lgan matritsa stoxastik(ehtimolli) matritsa deyiladi.

Bir jinisli oddiy Markov zanjiri tashkil etuvchi jarayon, boshlang`ich taqsimot $\overline{\pi}$ va bir qadamga o`tish matritsasi $P = (P_{ij})$ orqali to`liq aniqlanadi. Bu yerda

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{21} & \dots. & P_{1S} \\ P_{21} & P_{22} & \dots. & P_{2S} \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ P_{S1} & P_{S2} & & P_{SS} \end{pmatrix}.$$

$P(x_{n+m} = j / x_m = i) = p_{ij}^{(n)}$-bilan bir jinisli oddiy Markov zanjiri tashkel qiluvchi tasodifiy jarayonni i holatdan j holatga n qadamda o'tish ehtimolini belgilaymiz. Mos ravishda jarajonning n-qadamga o`tish matritsasi to`la ehtimol formulasiga asosan quyidagi bo'ladi (Kolmogorov-Cherman tenglamasi) :

$$P(n) = P(k)P(n-k) = P^n \qquad (24.34)$$

Demak, bir jinsli Markov zanjiri tashkil qiluvchi tasodifiy jarayonni n qadamga o`tish matritsasi, bir qadamga o`tish matritsasining n darajasiga teng.

Ko'p hollarda quyidagi ehtimolni $P(x_{n+m} = j / x_m = i) = p_{ij}^{(n)}$ ya`ni $i$ holatdan $n$ qadamga $j$ holatga o`tish ehtimolini boholash lozim bo'ladi.

Markov teoremasi. Agar shunday n_0 son mavjud bo`lib, bir jinisli oddiy Markov zanjiri tashkel qiluvchi tasodifiy jarajonning $n$-qadamga o`tish matritsasini P^n barcha elementlari musbat $p_{ij}^{(n)} > 0$ bo`lsa, boshlang'ich $i$ holatga bog`liq bo`lmagan holda quyidagi limit mavjud bo'ladi

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n) = P_j \qquad (24.35)$$

P_j −final ehtimollik deyiladi, $\sum_{j=1}^{s} P_j = 1$.

Final ehtimolliklar P_j quyidagi tenglamalar sistemasini yechib topiladi:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{S} P_i = 1 \\ \sum_{i=1}^{S} P_i P_{ij} = P_j j = 1, \bar{S} \end{cases} \quad yoki \quad (24.36) \quad \begin{cases} P_1 + P_2 + \cdots . + P_S = 1 \\ P_1 P_{1j} + P_2 P_{2j} + \cdots .. + P_S P_{Sj} = P_j \end{cases}$$

Bu teoremadan foydalanib quyidagi miqdorlarni aniqlash mumkin:

a) T vaqtda i holatda o`rtacha qaytishlari soni $T \cdot p_i$; (24.37)

b) i holatdan i holatga o`rtacha qaytishlari soni $m_{ii} = \frac{1}{P_i}$. (24.38)

11-§. Markov zanjirini qishloq xo‘jalik masalalarini yechishga qo‘llanilishi.

Misol -1. Ikki holatli bir jinisli oddiy Markov zanjiri tashkelm qiluvchi tasodifiy jarajonning bir qadamga o‘tish matritsasi quyidagicha bo‘lsa

$$P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

1) P^8=? to’rt qadamga o‘tish matritsasini aniqlang, **2)** Final ehtimolliklarni hisoblang , 3) Harbir holatga o‘rtacha birinchi marta qaytish qadamini toping.

Yechish. 1). Matrisani, matrisaga ko’paytirish qoidasiga asosan

$$P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,52 & 0,48 \\ 0,36 & 0,64 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = P^2 \cdot P^2 = \begin{pmatrix} 0,52 & 0,48 \\ 0,36 & 0,64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,52 & 0,48 \\ 0,36 & 0,64 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,443 & 0,557 \\ 0,417 & 0,583 \end{pmatrix}$$

2). Final ehtimollarni (1) sistemani yechibtopamiz

$$\begin{cases} 0,2p_1+0,6p_2=p_1 \\ 0,8p_1+0,4p_2=p_2 \end{cases}, \quad p_1+p_2=1, \; 3p_2/4+p_2=1, \; 7p_2=4, \; p_2=4/7\approx 0,57, \; p_1=3/4/7=0,43$$

Hisoblangan final ehtimollarni P^4 ning elementlari bilan solishtirsak, ikkalasini o‘zaro juda yaqin ekanligini $p_1 \approx 0,43$, $p_2 \approx 0,57$ ko’ramiz.

3). O‘rtacha 11 holatgava 22 holatga o‘tish qadami (24.36) formulaga asosan mos ravishda quyidagicha bo‘ladi:

$m_{11}=1/p_1\approx 2,33$ qadamda, $m_{22}=1/p_2=7/4=1,75$ qadamda.

Misol-2. Olma yetishtiruvchi bog'dorchilik xo'jaligini hosildorligi, har yili quyidagi ikki holatdan birida bo'ladi $\Omega = [E_1, E_2]$, $\boldsymbol{E_1}$ −olma hosildorligining yaxshi(serhosil yil) bo`lish hodisasi, $\boldsymbol{E_2}$ −olma hosildorligining yomon(kam hosilli yil) bo`lish hodisalari. Fermer xo'jaligini olma yetishtirish jarayonini quyidagi bir qadamga o'tish matrisasiga ega bo'lgan

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

ikki holatli , bir jinisli, oddiy Markov zanjiri tashkil qiladi degan shartda, uning final ehtimolliklarini hisoblang.

Yechish. Bu yerda P_{11} −o`tgan yili hosildorlik yaxshi bo`lgan bo`lsa,bu xo'jalik yilida ham hosildorlikni yaxshi bo`lish ehtimoli; P_{12}-o`tgan yili hosildorlik yaxshi bo`lgan bo`lsa, bu yilda hosildorlik yomon bo`lish ehtimoli; P_{21} −o`tgan yilda hosildorlik yomon bo`lgan bo`lsa, bu yilda hosil yaxshi bo`lish ehtimoli; P_{22} −o`tgan yilda olma hosildorligi yomon bo`lgan bo`lsa,bu yilda ham hosildorlik yomon bo`lish ehtimoli.

Ko'p yillar davomida kuzatishlar shuni ko`rsatadiki olma uchun $P_{12}$ va $P_{21}$ehtimollar doimo $P_{11}$ va $P_{22}$ ga qaraganda katta bo`ladi.

Formula (24.36) yordamida final ehtimollarini chiziqli tenglamalar sistemasini yechib hisoblaymiz:

$$\begin{cases} P_1P_{11} + P_2P_{12} = P_1 \\ P_1P_{21} + P_2P_{22} = P_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.3P_1 + 0.7P_2 = P_1 \\ 0.8P_1 + 0.2P_2 = P_2 \\ P_1 + P_2 = 1 \end{cases} dan$$

$0.7P_2 = 0.7P_1 \Rightarrow P_1 = P_2$ kelib chiqadi.

$P_1 + P_2 = 1$ dan $2P_1 = 1$, final ehtimollar $P_1 = P_2 = \frac{1}{2}$ ekanligi kelib chiqadi.

Formula (23.31) ga asosan, olma uchun o`rtacha serhosil yil $m_{11} = \left(\frac{1}{P}\right) = 2$ yil ekanligi kelib chiqadi. Demak,olmaning hosildorligini 2 yillik davriylikka ega bo`lgan, bir jinsli oddiy Markov zanjiri tashkil etadi deb qarash mumkin.

Misol-3. Daryo suvlarining yillik oqimi miqdorini o'zgarib turishini to'rtta holatli Ω={1,2,3,4}, 1-chi holat qurgochilik kelgan yil (eng kam suvli yil), 2-chi holat kam miqdorda suvli yil, 3 –chi holat o'rtacha suvli yil, 4-chi holat ser suvli yil bo'lish hodisasi bo'lsin. Daryo suvlarining yillik oqim miqdori, $P = (P_{ij})$ matrisali bir jinsli oddiy Markov zanjiri tashkil etuvchi tasodifiy jarayon deb qarab

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Quyigagi holatlarni baholang:

1) o‘rtacha necha yilda qurgoqchilik bo’lishini; 2) necha yilda ser yogin yil bo’lishini ?

Yechish. Bir qadamga o’tish matrisasidan, o‘tgan yilda daryoda eng kam suv bo‘lgan bo‘lsa, bu yil ham eng kam suv bo‘lish ehtimoli $p_{11}=0,2$, o‘tgan yili eng kam suv bo‘lgan bo‘lsa, bu yil etarli miqdorda suv bo‘lish ehtimoli $p_{12}=0,4$, o‘tgan yili eng kam suv bo‘lgan bo‘lsa, bu yil eng ko‘p suv bo‘lishi ehtimoli $p_{14}=0$. Avalo, bu hol uchun (24.36) sistemani yechib, final ehtimollarni hisoblaymiz.

Yuqorida keltirilgan nazariy ma’lumotdan i holatdan i holatga o`rtacha qaytishlari soni $m_{ii}=\frac{1}{P_i}$ bo‘lganligidan, qurgoqchilik kelishi p_i - final ehtimollik orqali topiladi.

Demak, (24.37) va (24.38) asosan o‘rtacha qurg‘oqchilik takrorlanishi 6 - 7 yilda, seryog‘in yil bo‘lishi 12-13 yilda bo‘ladi.

Misol - 4. O‘simliklarga solinadigan fosfor o‘g‘iti molekulasini «Ekologik sistema» jarayonida o‘tishini bir jinsli oddiy Markov zanjiri tashkil etadi, - deb o‘rganamiz.To‘rt holatli: E_1- tuproq, E_2 - o‘simlik, E_3 - o‘simlikni iste’mol qiluvchi hayvonlar, E_4 - sotish uchun tayyorlangan barcha mahsulotlar.Natijada quyidagicha o‘tish matritsasi aniqlangan

$$P=\begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 0,6 & 0,3 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 & 0 \\ 0,75 & 0 & 0,2 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \end{array}$$

P^2, P^3 va P^4 larni hisoblaymiz:

$$P^2=\begin{Vmatrix} 0,390 & 0,300 & 0,150 & 0,160 \\ 0,475 & 0,190 & 0,300 & 0,035 \\ 0,600 & 0,225 & 0,040 & 0,135 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},\ P^4=\begin{Vmatrix} 0,34600 & 0,207750 & 0,154500 & 0,253150 \\ 0,455500 & 0,246100 & 0,140250 & 0,158150 \\ 0,364875 & 0,231750 & 0,159100 & 0,244275 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Fosfor molekulasining E_1 holatdan 4 qadamda E_4 holatga o‘tish ehtimoli 0,25315. Agar fosfor molekulasini qaysi holatdan boshlanishi noma’lum bo‘lsa, ya’ni tasodifiy bo‘lsa, P_0 – boshlangich taqsimoti $P^0=\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$ teng imko-niyatli bo‘lib, Markov teoremasiga asosan 4 qadamga o‘tish ehtimoli quyidagicha bo’ladi:

$$\pi = P^0 \cdot P^4 = (0{,}3012; 0{,}1714; 0{,}1135; 0{,}4139)$$

Demak,fosfor molekulasining o'rganilayotgan eko sistemasidan 4 qadamda chiqish ehtimoli quyidagicha ekan $P^{(4)}(4) = 0{,}4139$.

12-§. Tuproq unumdorligini saqlashning muqobil strategiyasini aniqlashda Markov zanjirini qo'llanilishi

Qishloq xo'jalik ekinlarining hosildorligi tuproq unimdorligiga, urug'ning sifatiga, agrotexnik tadbirlarga, ob-havo va boshqa ko'p omillarga bog'liq bo'lgan murakkab tasodifiy jarayondir.

Ushbu maqolada, hosildorlikda muhim faktor bo'lgan, tuproq unimdorligini saqlash strategiyasini bir jinsli Markov zanjiri modeli yordamida tahlil qilish masalasini o'rganamiz([1] − [5], [17]).

Tuproqning unimdorligi quyidagi uch holatdan birida bo'lishi mumkin:
1-yaxshi, 2- qoniqarli, 3-yomon(qoniqarsiz). Bu holatlarni Ω={1,2,3} shaklida yozish mumkin.

Fermer har yili turg'un hosil olish uchun, tuproq unimdorligini saqlashi kerak bo'ladi. Butun er sharida bu muammoni echishda, asosan mineral va mahalliy o'g'itlardan foydalanib kelmoqda.

Dehqonchilik qilinadigan tuproqning Ω={1,2,3} holati, har xo'jalik yilida ximiyaviy tahlil asosida aniqlanadi. Agar bu xo'jalik yilidagi tuproqning holati, faqat o'tgan yilgi tuproqning holatiga bog'liq;- deb o'rganilsa, bu jarayonni uch holatli bir jinsli oddiy Markov zanjiri shaklida tahlil qilish mumkin. Aslida, tuproqning unimdorligi yillar davomida o'zgarib turadi va u faqat o'tgan yilgi holatiga emas, balki undan avvalgi yillardagi holatiga ham bog'liq bo'ladi, ya'ni murakkab Markov zanjirini tashkil etadi. Biz soddalik uchun, yillar davomida tuproqning holatini o'zgarib borishini, faqat o'tgan yilgi holatiga bog'liq bo'lgan tasodifiy, uch holatli Ω={1,2,3} oddiy Markov zanjiri shaklida o'rganamiz.

Faraz qilaylik, tuproqning mazkur xo'jalik yilidagi holati Ω={1,2,3} uch holatli, bir jinsli oddiy Markov zanjiridan iborat bo'lib, uning bir qadamga o'tish matritsasi quyidagicha bo'lsin:

$$R = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0{,}3 & 0.6 & 0.1 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \end{bmatrix} \end{array} = (p_{ij})$$

Bu erda $p_{11} = 0{,}5$ o'tgan xo'jalik yilida tuproqning unimdorligi yaxshi bo'lgan bo'lsa, mazkur xo'jalik yilida ham yaxshi bo'lish ehtimoli, $p_{12} = 0{,}4$ o'tgan xo'jalik yilida tuproqning unimdorligi yaxshi bo'lgan bo'lsa, mazkur xo'jalik yilida qoniqarli (o'rtacha) bo'lish ehtimoli, $p_{13} = 0{,}1$ o'tgan xo'jalik yilida tuproqning

unimdorligi yaxshi bo‘lgan bo‘lsa, mazkur xo‘jalik yilida yomon bo‘lish ehtimoli, p_{21} = 0,3 o‘tgan xo‘jalik yilida tuproqning unimdorligi o‘rtacha bo‘lgan bo‘lsa, mazkur xo‘jalik yilida yaxshi bo‘lish ehtimoli, p_{22} = 0,6 o‘tgan xo‘jalik yilida tuproqning unimdorligi o‘rtacha bo‘lgan bo‘lsa, mazkur xo‘jalik yilida ham o‘rtacha bo‘lish ehtimoli, p_{23} = 0,1 o‘tgan xo‘jalik yilida tuproqning unimdorligi o‘rtacha bo‘lgan bo‘lsa, mazkur xo‘jalik yilida yomon bo‘lish ehtimoli, p_{31} = 0,1 o‘tgan xo‘jalik yilida tuproqning unimdorligi yomon yomon bo‘lgan bo‘lsa, mazkur xo‘jalik yilida yaxshi bo‘lish ehtimoli, p_{32} = 0,7 o‘tgan xo‘jalik yilida tuproqning unimdorligi yomon bo‘lgan bo‘lsa, mazkur xo‘jalik yilida o‘rtacha bo‘lish ehtimoli, p_{33} = 0,2 o‘tgan xo‘jalik yilida tuproqning unimdorligi yomon bo‘lgan bo‘lsa, mazkur xo‘jalik yilida ham yomon bo‘lish ehtimolini bildiradi.

Tuproq unimdorligini imkon qadar turg‘un saqlash uchun, fermer mineral va mahaliy o‘g‘itlardan foydalanadi. Qanday strategiyani fermer qo‘llasa yuqori hosil oladi, daromadi maksimum bo‘ladi?

Agar bir jinsli oddiy Markov zanjiri tashkil qilgan jarayonning n qadamdan keyin i holatda bo‘lish ehtimolini $\bar{\pi}_i(n)$ bilan belgilasak, bu jarayon uchun quyidagi tengliklar o‘rinli bo‘ladi[1], [5] :

$$\sum_{i=1}^{s} \bar{\pi}_i(n) = 1$$

$$\bar{\pi}_1(n+1) = \pi(n)\mathrm{P} = \pi(n)\left(p_{ij}\right), \quad n = 0,1,2,3, \dots..$$

Boshlang‘ich holatda, tuproqning unimdorligi $i = 1$ ya’ni 1-yaxshi bo‘lsa $\bar{\pi} = (1; 0; 0)$, ushbu tenglik o‘rinli bo‘lib $\bar{\pi}_1(n+1) = \pi(n)P$ bundan

$$\bar{\pi}_1(1) = \pi(0)P\,, \bar{\pi}_1(n) = \pi(0)P^2, \bar{\pi}_1(n) = \pi(0)P^3, \dots, \bar{\pi}_1(n) = \pi(0)P^{\mathrm{n}} \quad (1)$$

Demak, $\bar{\pi}_1(n) = \pi(0)P^{\mathrm{n}}$ *kelib chiqadi.*

$$\bar{\pi}_1(1) = \pi(0)\mathrm{P} = (1,0,0)\begin{Vmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{Vmatrix} = \|0,5 \quad 0,4 \quad 0,1\|$$

$(*)$ formulaga $n = 1,2,3, \dots$ qiymatlarni qo‘yib, matritsani matritsaga ko‘paytirish qoidasiga asosan, tuproqning unimdorligi boshlang‘ich 1-yaxshi holatda $\bar{\pi} = (1; 0; 0)$ bo‘lsa, undan boshqa holatlarga 1, 2, 3, 4 qadamda o‘tish ehtimollari quyidagicha bo‘ladi:

n	0	1	2	3	4
1	0,5	0,38	0,354	0,3486	0,34750

0	0,4	0,51	0,535	0,5403	0,54139
0	0,1	0,11	0,111	0,1111	0,11111

Xuddi shunday boshlang‘ich $\bar{\pi} = (0; 1; 0)$ holatda $i = 2$ bo‘lsa, ya’ni tuproqning unimdorligi 2- qoniqarli holatda bo‘lsa, boshqa holatlarga 1, 2, 3, 4 qadamda o‘tish ehtimollari quyidagicha bo‘ladi:

n	0	1	2	3	4
0	0,3	0,34	0,346	0,3470	0,34718
1	0,6	0,55	0,543	0,5419	0,54171
0	0,1	0,11	0,111	0,1111	0,11111

Agar tuproqning unimdorligi 3- yomon holatda bo‘lsa $\bar{\pi} = (0; 0; 1)$, undan boshqa holatlarga 1, 2, 3, 4 qadamda o‘tish ehtimollari quyidagicha bo‘ladi:

n	0	1	2	3	4
0	0,1	0,28	0,332	0,3440	0,34656
0	0,7	0,60	0,556	0,5448	0,54232
1	0,2	0,12	0,112	0,1112	0,11112

YUqorida hisoblangan jadvallarning oxirgi ustinidagi qiymatlari, qariyib bir xil ekanligini ko‘ramiz. Ya ’ni, 3-4 yildan keyin, tuproq boshlang‘ich qanday holatda bo‘lmasin, bir xil holatga kelishini ko‘ramiz.

Bu fikrni to‘g‘rilligini, oddiy bir jinsli Markov zanjiri tashkil etuvchi tasodifiy jarayonni, final ehtimollarini ushbu tenglamalar sistemasini echib, yuqoridagi ehtimollar bilan taqqoslab ham ko‘rishimiz mumkin:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{s} p_i \, p_{ij} = p_j \\ \sum_{j=1}^{s} p_j = 1 \end{cases} \qquad (2)$$

Bizni misolda tenglamalar sistemasi (2) ni echib, final ehtimollarni aniqlab ularni avvalgi qiymatlarga yaqinligini ko‘ramiz:

$$p_1 = 0{,}3521,\ p_2 = 0{,}4648, \qquad p_3 = 0{,}1831.$$

Biz o‘rganayotgan tuproqning uchta holati bo‘yicha Ω={1,2,3}, oddiy bir jinsli Markov zanjiri tashkil etuvchi tasodifiy jarayonni, quyidagicha z-almashtirishlar yordamida ham o‘rganib:

$$P(z) = \pi(0)\,(I - zP)^{-1} \qquad (3)$$

Bu erda $I = \|\delta_{ij}\|$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & agar \quad i = j, \\ 0, & agar \quad i \neq j. \end{cases}$ Kroneker simvoli.

(3) ni asimptotik yoyilmasidan, final ehtimolliklarni aniq-laganimizda ham $\bar{\pi} = (0{,}3521; 0{,}4648; 0{,}1831)$ bo‘lishini ko‘rdik.

Faraz qilaylik, tuproqning uchta holati bo‘yicha Ω={1,2,3} oddiy bir jinsli Markov zanjiri tashkil etuvchi tasodifiy jarayonni $i\ holatdan\ j\ holatga$ o‘tishidan keladigan daromad r_{ij} bo‘lsin. Barcha qilingan daromadlar matritsasini $R = \|r_{ij}\|$ bilan belgilaymiz.

Natijada, Markov zanjiri tashkil etuvchi tasodifiy jarayonni n qadamda keyin, $i\ holatda$ bo‘lishidan keladigan fermer xo‘jaligining jami daromadi $v_i(n)$, quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$v_i(n) = \sum_{i=1}^{s} p_{ij} r_{ij} + \sum_{i=1}^{s} p_{ij} v_j\,(n-1) \qquad (4)$$

Asosiy maqsad daromadning maksimum qiymatini $\max v_i(n+1)$ topish:

$$\max v_i(n+1) = \max\ \left(\sum_{i=1}^{s} p_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}} r_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}} + \sum_{i=1}^{s} p_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}} v_j\,(n)\right)$$

$\mathrm{v}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{k}}(n+1) = \max\ (\mathrm{v}_i^{\mathrm{k}} + \sum_{i=1}^{s} p_{ij} v_j\,(n))$, bu erda $\mathrm{v}_i^{\mathrm{k}} = \sum_{i=1}^{s} p_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}} r_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}}$,

$i\ \ holatda$ k strategiyani qo‘llashdan kelgan daromad miqdori.

Fermer xo‘jaligini uch xo‘jalik yilida, tuprog‘ining o‘zgarishi, uch holatli Ω={1,2,3} oddiy bir jinsli Markov zanjiri tashkil etuvchi tasodifiy jarayondan iborat bo‘lsin. Quyidagi strategiyalardan qaysi birini tanlaganda, fermer tuproq unimdorligini saqlagan holda, yuqori daromad olishga erishadi:

a). Tuproqqa mineral va mahalliy o‘g‘it solmagan holda, bir qadamga o‘tish matritsasi R_1 va 1 ga maydondan olgan daromadi R_1 bo‘lgandami?

$$\mathrm{P}_1 = \begin{Vmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad \mathrm{R}_1 = \begin{Vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{Vmatrix}$$

b). Yoki , mineral va mahalliy o‘g‘itlardan foydalangan holda, bir qadamga o‘tish matritsasi R_2 va 1 ga maydondan olgan daromadi R_2 bo‘lgandami?

$$\mathrm{P}_2 = \begin{Vmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \end{Vmatrix}, \qquad \mathrm{R}_2 = \begin{Vmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & -2 \end{Vmatrix}$$

Bu holatlarni tahlil qilamiz. YUqorida keltirilgan formulalardan foydalanib, fermer o‘g‘itlardan foydalanmagan k=1 holda , fermer xo‘jaligini 1 ga erdan oladigan daromadi quyidagicha bo‘ladi:

$$v_1^1 = 0{,}4 \cdot 5 + 0{,}5 \cdot 4 + 0{,}1 \cdot 3 = 4{,}3 \ \ mln.so'm,$$
$$v_2^1 = 0 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot 3 + 0{,}6 \cdot 1 = 1{,}8 \ \ mln.so'm\ ,$$
$$v_3^1 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot (-2) = -2 \ \ mln.so'm.$$

i	v_i^1	v_i^2	Muqobil echim	k
1	4,3	6,3	6,3	2
2	1,8	4,9	4,9	2
3	-2,0	2,9	2,9	2

k=2 bo‘lganda, ya’ni fermer o‘g‘itlardan foydalangan holda , fermer xo‘jaligini 1 ga erdan oladigan daromadi quyidagicha bo‘ladi:

$$v_1^2 = 0{,}5 \cdot 7 + 0{,}4 \cdot 6 + 0{,}1 \cdot 4 = 6{,}3 \ \ mln.so'm,$$
$$v_2^2 = 0{,}3 \cdot 6 + 0{,}6 \cdot 5 + 0{,}1 \cdot 1 = 4{,}9 \ \ mln.so'm\ ,$$
$$v_3^2 = 0{,}1 \cdot 5 + 0{,}7 \cdot 4 + 0{,}2 \cdot (-2) = 2{,}9 \ \ mln.so'm$$

$$\mathrm{v}_\mathrm{i}^\mathrm{k}(n+1) = \max\ \ (\mathrm{v}_i^\mathrm{k} + \sum_{i=1}^{s} p_{ij} v_j\,(n))$$

i	K=1	K=2	Muqobil echim	k
1	4,3+0,4· $6{,}3 + 0{,}5 \cdot 4{,}9 + +0{,}1 \cdot 2{,}9 = 9{,}56$	6,3+0,5· $6{,}3 + 0{,}4 \cdot 4{,}9 + +0{,}1 \cdot 2{,}9 = 11{,}7$	11,7	2
2	1,8+0· $6{,}3 + 0{,}4 \cdot 4{,}9 + 0{,}6 \cdot 2{,}9 = 5{,}5$	4,9+0,3· $6{,}3 + 0{,}6 \cdot 4{,}9 + 0{,}1 \cdot 2{,}9 = 10{,}02$	10,02	2
3	-2+0· $6{,}3 + 0 \cdot 4{,}9 + +1 \cdot 2{,}9 = 0{,}9$	2,9+0,1· $6{,}3 + 0{,}7 \cdot 4{,}9 + +0{,}2 \cdot 2{,}9 = 7{,}54$	7,54	2

$$\mathrm{v}_\mathrm{i}^\mathrm{k}(n+1) = \max\ \ (\mathrm{v}_i^\mathrm{k} + \sum_{i=1}^{s} p_{ij} v_j\,(n))$$

i	K=1	K=2	Muqobil echim	k
1	4,3+0,4· $11{,}7 + 0{,}5 \cdot 10{,}02 + +0{,}1 \cdot 7{,}54 = 14{,}844$	6,3+0,5· $11{,}7 + 0{,}4 \cdot 10{,}02 + +0{,}1 \cdot 7{,}54 = 16{,}912$	16,912	2
2	1,8+0· $11{,}7 + 0{,}4 \cdot 10{,}02 + +0{,}6 \cdot 7{,}54 = 10{,}332$	4,9+0,3· $11{,}7 + 0{,}6 \cdot 10{,}02 + +0{,}1 \cdot 7{,}54 = 15{,}176$	15,176	2
3	-2+0· $11{,}7 + 0 \cdot 10{,}02 + +1 \cdot 7{,}54 = 5{,}54$	2,9+0,1· $11{,}7 + 0{,}7 \cdot 10{,}02 + +0{,}2 \cdot 7{,}54 = 12{,}592$	12,592	2

Tahlillardan ko‘rinadiki, fermer b) strategiyani qo‘llasa, tuproqning unimdorligini saqlagan holda yaxshi daromad qiladi.

Xulosa

Yuqorida keltirilgan tahlillar shuni ko‘rsatadiki, fermer tuproq unimdorligini saqlab qolishi hamda yuqori daromad olishi uchun, birinchi va ikkinchi yillarda tuproqning holati qanday bo‘lishidan qat’iy nazar, mineral o‘g‘itlardan foydalanishi kerak, uchunchi yilda tuproqning holati 2-qoniqarli va 3-yomon bo‘lgan maydonlarda mineral o‘g‘itlardan foydalanish strategiyasini qo‘llashi lozim bo‘ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi misollarda chekli holatli oddiy bir jinsli Markov zanjiri tashkil qiluvchi jarayonlarning bir qadamga o‘tish matritsasi berilgan $P=||p_{ij}||$. Talab qilingan: 1) To‘rt qadamga o‘tish matritsasini topish $P^4=?$; 2) Final ehtimolliklarni hisoblash:

1). $P=\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\ 0,2 & 0,8\end{pmatrix}$, 2) $P=\begin{pmatrix}0,1 & 0,9\\ 0,7 & 0,3\end{pmatrix}$. 3) $P=\begin{pmatrix}0,2 & 0,8\\ 0,6 & 0,4\end{pmatrix}$,

4). $P=\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\ 0,5 & 0,5\end{pmatrix}$, 5) $P=\begin{pmatrix}0,3 & 0,7\\ 0,6 & 0,4\end{pmatrix}$, 6) $P=\begin{pmatrix}0,2 & 0,8\\ 0,8 & 0,2\end{pmatrix}$,

Mavzu bo’yicha tekshirish uchun savollar:

1. Qanday hodisalar tasodifiy, muqarrar va mumkin bo’lagan hodisalar deyiladi?
2. Hodisalarning to’la guruhini tarifini aytib bering va misollar keltiring .
3. Hodisalarning yig’ndisi va ko’paytmasi deb nimaga aytiladi va ular Vyenn diogrammasida qanday ifodalanadi?
4. Ehtimolning klassik ta’rifini, asosiy hossalarini ayting?
5. Geometric ehtimollik ta’rifini aytib bering.
6. Hodisaning nisbiy chastotasi dep nimaga aytiladi ? Misol keltiring ?
7. Statistik extimollik tushunchasi qanday kiritiladi ?
8. O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tajribalar ketma-ketligi. Bernulli formulasini yozing?
9. Ehg katta ehtimolli son qanday aniqlanadi?
10. Puasson teoremasidan qanday hollarda foydalanish mumkin?
11. Muavr - Laplasning lokal va integral teoremalaridan qanday shartda foydalanish mumkin?
12. Markov zanjiriga ta’rif bering va uning o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tajribalar ketma-ketligidan farqini, mohiyatini tushuntiring?

13. Markov zanjiri tashkel qiluvchi tasodifiy jarayonning bir qadamga o'tish matrisasini yozib, xossalarini keltiring?
14. Chkli holatli, bir jinisli oddiy Markov zanjri tashkel qiluvchi tasodifiy jarayonning n- qadamga o'tish ehtimoli va final ehtimollik qanday hisoblanadi. Markov teoremasini aytib mohiyatini tushuntiring?
15. Markov zanjri tashkel qiluvchi tasodifiy jarayonning qishloq xo'jalik masalalarini yechishga qo'llanilisiga misollar keltiring?

Kalit so'zlar:

Tasodifiy, muqarrar, mumkin bo'lagan, hodisalarning to'la guruhi, yig'ndisi, ko'paytmasi, Vyenn diogrammasi, klassik, geometric, nisbiy chastota, bog'liq bo'lmagan, Bernulli, ehtimolli son, Puasson, Muavr – Laplas, local, integral, Markov, zanjiri, matritsa, n- qadam, final ehtimollik.

Xulosa

Tasodifiy, muqarrar, mumkin bo'lagan hodisalar, hodisalarning to'la guruhi, yig'ndisi, ko'paytmasi, Vyenn diogrammasi, ehtimolning klassik, geometric, statistic ta'riflari, o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligi, ehg katta ehtimolli son, Bernulli, Puasson, Muavr - Laplasning local, integral teoremalari, Markov zanjiri, bir qadamga o'tish matrisasi, chekli holatli, bir jinisli oddiy Markov zanjri tashkel qiluvchi tasodifiy jarayonning n- qadamga o'tish ehtimoli, final ehtimollik, Markov teoremasi, Markov zanjri tashkel qiluvchi tasodifiy jarayonning qishloq xo'jalik masalalarini yechishga qo'llanilishi masalalari o'rganilgan.

XXV BOB. TASODIFIY MIQDORLAR

1-§. Tasodifiy miqdorlar turlari

Tabiatdagi hodisalarni kuzatish jarayonida (yoki tajriba natijalarini kuzatishda) turli xarakterdagi miqdorlarga duch kelamiz. Masalan, bitta g'o'za tupidagi ko'saklar soni, mo'ljalga qarab otilgan o'qning mo'ljallangan nuqtadan chetlanish miqdori va h.k. Shunga o'xshash miqdorlarni juda ko'plab keltirish mumkin.

Masalan, Samarqand shahrida 2022 yilning may oyida tug‘iladigan o‘g‘il bolalar sonini avvaldan aytib bo‘lmaydi, bu son turli tasodifiy holatlarga bog‘liq bo‘lib, u avvaldan aniq aytib bo‘lmaydigan ma'lum bir qiymatlardan birini qabul qiladi.

Demak, shunday miqdorlar bo‘lar ekanki, ularning qiymatlari turli tasodifiy holatlar ta'sirida bo‘lib, ularni avvaldan qanday qiymatga teng bo‘lishini aniq aytib bo‘lmas ekan.

Berilgan shart-sharoitlarda tasodifiy holatga bog‘liq ravishda u yoki bu son qiymatlardan birini qabul qiladigan o‘zgaruvchi miqdor *tasodifiy miqdor* deyiladi.

Odatda tasodifiy miqdorlar ζ (yoki η) (yoki *X, Y, Z,* ...) harfi bilan belgilanadi.

Misollar- 1. O‘yin soqqasini tashlash tajribasini qaraylik. Bu tajriba natijasida soqqaning 1, 2, 3, 4, 5, 6 raqamli (ochkolar) tomonlari tushishi mumkin. Bunda chiqadigan yoqlar (ochkolar) sonini avvaldan aytib bo‘lmaydi. Demak, ochkolar soni tasodifiy miqdorlar bo‘ladi. Uni ζ bilan belgilaylik. Bu ζ tasodifiy miqdorning qobul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari 1, 2, 3, 4, 5 va 6 sonlari bo‘ladi.

Misollar- 2. To‘pdan otilgan snaryadning uchib o‘tgan masofasini qaraylik. Bu masofa bir qancha holatlarga: nishonga oluvchi asbobning o‘rnatilishiga, shuningdek, avvaldan to‘la-to‘kis hisobga olib bo‘lmaydigan bir qancha boshqa sabablarga (shamolning kuchi va yo‘nalishi, harorat va boshqalarga) bog‘liq bo‘ladi. Shu sababli ham bu masofani avvaldan aytib bo‘lmaydi, u tasodifiy miqdor bo‘ladi.

Bu ζ tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari cheksiz bo‘lib, ular biror *(a; b)* oraliqda joylashgan bo‘ladi (143-chizma).

143-chizma.

Chekli yoki sanoqli sondagi qiymatlarni qabul qiladigan tasodifiy miqdor *diskret tasodifiy miqdor* deyiladi.

Masalan, yuqorida keltirilgan misollarning birinchisidagi tasodifiy miqdor diskret tasodifiy miqdor bo‘ladi.

Demak, diskret tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlar soni chekli yoki sanoqli bo‘ladi. Odatda tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari bunday belgilanadi:

$$\xi : x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\ \ (\text{ёки}\ \ X : x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n).$$

Biror oraliqdagi barcha qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo‘lgan miqdor uzluksiz tasodifiy miqdor deyiladi. Masalan yuqorida keltirilgan misollardan ikkinchisidagi tasodifiy miqdor uzluksiz tasodifiy miqdor bo‘ladi. (Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning aniq ta'rifini keyinroq keltiramiz.)

2-§. Tasodifiy miqdor ehtimollarining taqsimot qonuni

Yuqorida ko‘rdikki, tasodifiy miqdorni o‘rganish uchun avvalo bu miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlarini bilish lozim. Biroq, bu qiymatlarnigina bilish tasodifiy miqdorni to‘la tavsiflab bermaydi. Quyida tasodifiy miqdorni to‘la tavsiflaydigan tushuncha bilan tanishamiz.

1. Diskret tasodifiy miqdor ehtimollarining taqsimot qonuni.

ζ diskret tasodifiy miqdor bo‘lib, uning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari $x_1, x_2, \dots, x_p$ bo‘lsin.

Agar ζ tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlarining ehtimollari ma'lum bo‘lsa, ζ *diskret tasodifiy miqdorning taqsimoti berilgan* deyiladi.

Aytaylik, ζ diskret tasodifiy miqdor $x_1, x_2, \dots, x_p$ qiymatlarni mos ravishda $p_1, p_2, \dots, p_n$ ehtimollar bilan qabul qilsin:

$$P(\xi = x_1) = p_1,\ P(\xi = x_2) = p_2,\ \dots,\ P(\xi = x_n) = p_n.$$

Bu ma'lumotlardan foydalanib quyidagi jadvalni tuzamiz:

ξ	x_1	x_2	…	x_n
$P(\xi = x_k)$	p_1	p_2	…	p_n

Bu jadvalning birinchi satrida ξ tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari, ikkinchi satrida esa ularga mos ehtimollari yozilgan.

Ravshanki:

$$\{\xi = x_1\},\ \{\xi = x_2\},\ \dots,\ \{\xi = x_n\}$$

hodisalar bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan hodisalar bo‘lib, tasodifiy miqdor, albatta bitta qiymatni qabul qilishi kerak bo‘lgani uchun

$$\{\xi = x_1\} \cup \{\xi = x_2\} \cup \dots \cup \{\xi = x_n\} = U$$

bo‘ladi *(U* - muqarrar hodisa).

Qo‘shish teoremasidan foydalanib topamiz:

$$P\{\xi = x_1\} + P\{\xi = x_2\} + \dots + P\{\xi = x_n\} = P\{U\}.$$

Natijada $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, ya'ni $\sum_{k-1}^{n} p_k = 1$ tenglikka kelamiz. Bu esa ξ tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan barcha qiymatlari ehtimollarining yig‘indisi 1 ga teng bo‘lishini bildiradi.

Diskret tasodifiy miqdor uchun kiritilgan yuqoridagi (25.1) jadval tasodifiy miqdorni to‘la tavsiflab beradi. Shuning uchun ham (25.1) jadval ξ diskret *tasodifiy miqdor ehtimollarining taqsimot qonuni* deb ataladi.

Diskret tasodifiy miqdorning ba'zi muhim taqsimot qonunlarini keltiramiz.

n ta o‘zaro erkin tajriba o‘tkazilgan bo‘lib, har bir tajribada *A* hodisaning ro‘y berish ehtimoli o‘zgarmas *p* ga teng bo‘lsin. Bunday tajribada *A* hodisaning *k* marta ro‘y berish ehtimoli $P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ ga teng edi: Bu holda diskret tasodifiy miqdor ξ ning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari ζ: 0, 1, 2, ..., *p* bo‘ladi: Ravshanki, tasodifiy miqdor bu qiymatlarni mos ravishda ushbu

$$P_n(k)=P_n(\xi=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ k=\overline{0,n}$$

ehtimollar bilan qabul qiladi hamda $\sum_{k=0}^{n} P_n(k)=(p+q)^n=1.$

Natijada ushbu

$(\xi)=k$	0	1	2		k		n
$P_k(k)=P_n(\xi=k)$	$(1-p)^n$	$C_n^1 p(1-p)^{n-1}$	$C_n^2 p^2(1-p)^{n-2}$	$\cdots$	$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$	$\cdots$	p^n

jadvalga ega bo‘lamiz. Odatda bu jadval *binomial taqsimot* deb ataladi.

Misol. Ekilgan har bir chigitning unib chiqish ehtimoli 0,8 ga teng bo‘lsa, ekilgan 3 ta chigitdan unib chiqqan chigitlar sonining taqsimoti qonuni tuzilsin.

Yechish. Ekilgan har bir chigit unib chiqishi ham, unib chiqmasligi ham mumkin. Ekilgan 3 ta chigitdan unib chiqishlar soni tasodifiy miqdor bo‘lib, u 0,1,2,3 qiymatlarni qabul qilishi mumkin. Bu qiymatlarni qabul qilish ehtimoli Bernulli formulasi yordamida topiladi:

$$P_3(\xi=0)=C_3^0 p^0(1-p)^3=(0{,}8)^0\cdot(0{,}2)^3=0{,}008,$$
$$P_3(\xi=1)=C_3^1 p(1-p)^2=^3(0{,}8)\cdot(0{,}2)^2=0{,}096,$$
$$P_3(\xi=2)=C_3^2 p^2(1-p)=^3(0{,}8)^2\cdot(0{,}2)=0{,}384,$$
$$P_3(\xi=3)=C_3^3 p^3(1-p)^0=(0{,}8)^3\cdot(0{,}2)^0=0{,}512.$$

Demak, ekilgan 3 ta chigitdan unib chiqishlar soni ξ tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo‘ladi:

ξ	0	1	2	3
r	0,008	0,096	0,384	0,512

Ravshanki, bu ehtimollar yig‘indisi:

$$0{,}008 + 0{,}096 + 0{,}384 + 0{,}512 = 1.$$

25.1-eslatma. ζ tasodifiy miqdor 0,1,2,3, ... qiymatlarni ushbu

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

ehtimollar bilan qabul qilsin.

Natijada quyidagi taqsimot jadvali hosil bo‘ladi.

ξ	0	1	2	…
$P(\xi = k)$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	…

Bu jadval *Puasson taqsimoti* deb ataladi. Bu yerda

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = e^0 = 1;$$

chunki qatorlar nazariyasidan:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$$

ekanligi ma'lum.

3-§. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Taqsimot funksiyasi.

Biz yuqorida diskret tasodifiy miqdor va uning taqsimot qonunini o‘rgandik. Agar tasodifiy miqdor uzluksiz bo‘lsa, bu tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari biror *(a, b)* oraliqni tashkil etadi. Binobarin bu holda tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini yuqoridagi o‘xshash jadval shaklida yozib bo‘lmaydi.

Faraz qilaylik, ξ ixtiyoriy tasodifiy miqdor, *x* esa biror haqiqiy son bo‘lsin. Qaralayotgan tasodifiy miqdor uchun ushbu { ζ < *x*} hodisani qaraylik. Bu tajriba natijasida ro‘y bergan miqdorning *x* sondan kichik bo‘lish hodisasini bildiradi. Endi shu hodisaning ehtimoli

$$P\{\zeta < x\}$$

ni qaraylik. Ravshanki, bu ehtimol olingan haqiqiy songa bog‘liq, ya'ni *x* ning funksiyasi bo‘ladi. Odatda *P*{ ζ < *x*}

ehtimol bilan aniqlangan funksiya ζ tasodifiy miqdorning *taqsimot funksiyasi* deb ataladi va *F(x)* kabi belgilanadi:

$$F(x) = P\{\zeta < x\} \qquad (25.2)$$

Misol. Ushbu jadval bilan berilgan ζ diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonunining taqsimot funksiyasi topilsin:

ξ	-1	0	2	2,5
$P\{\xi < x\}$	0,2	0,3	0,4	0,1

Jadvaldan ko‘rinadiki, ζ tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari - 1, 0, 2, 2,5 bo‘ladi. Bu sonlarni son o‘qida yasaymiz.

-1, 0 1 2; 2,5

Aytaylik, $x \leq -1$ bo‘lsin. Unda { ζ < x} hodisasi mumkin bo‘lmagan hodisa bo‘ladi. { ζ < x}=*V*. Chunki bu holda tasodifiy miqdorning { ζ < x} tengsizlikni qanoatlantiruvchi bitta ham qiymati yo‘q. Demak,

$$F(x)=P\{\zeta < x\}=P(V)=0$$

bo‘ladi. Endi $-1 < x \leq 0$ bo‘lsin. Bu holda { ζ < x} hodisasi { ζ < x}={ζ=-1 bo‘ladi. Bundan esa

$$F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = -1\} = 0{,}2$$

kelib chiqadi.

Endi $0 < x \leq 2$ bo‘lsin.

Bu holda { ζ < x} hodisasi

$$\{\xi < x\} = \{\xi = -1\} \cup \{\xi = 0\}$$

bo‘lib,

$$F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = -1\} + P\{\xi = 0\} = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$$

bo‘ladi.

Faraz qilaylik, $2 < x \leq 2.5$ bo‘lsin. Bu holda hodisa

$$\{\xi < x\} = \{\xi = 1\} \cup \{\xi = 0\} \cup \{\xi = 2\}$$

bo‘lib,

$$F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = -1\} + P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 2\} =$$
$$= 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}9$$

bo‘ladi.

Va, nihoyat, $x>2{,}5$ bo‘lganda { ζ < x} hodisasi muqarrar hodisa bo‘lib,

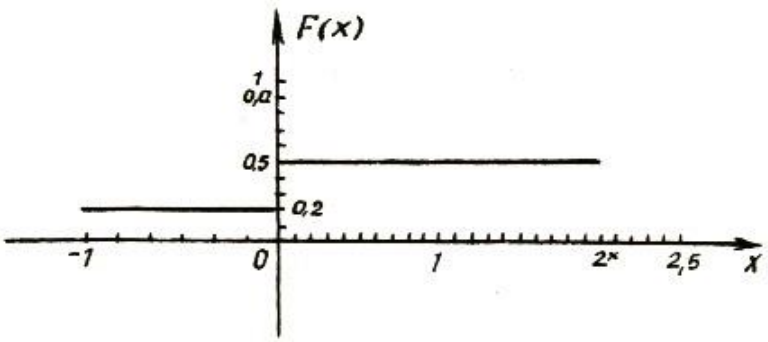
$$F(x) = P\{\xi < x\} = P\{U\} = 1$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, qaralayotgan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ агар\ x \leq -1, \\ 0{,}2, \ агар\ -1 < x \leq 0, \\ 0{,}5, \ агар\ 0 < x \leq 2, \\ 0{,}9, \ агар\ 2 < x \leq 2{,}5, \\ 1, \ агар\ x > 2{,}5 \end{cases}$$

bo‘ladi. Uning grafigi 144-chizmada tasvirlangan.



144-chizma.

4-§. Taqsimot funksiyasining xossalari

Ushbu paragrafda tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasining xossalarini keltiramiz.

Faraz qilaylik, ζ-tasodifiy miqdor berilgan bo‘lib, *F(x)* esa uning taqsimot funksiyasi bo‘lsin.

2°. *Taqsimot funksiyasi F(x) uchun ushbu munosabat o‘rinli bo‘ladi:*

$$0 \le F(x) \le 1. \qquad (25.3)$$

Bu xossa taqsimot funksiyasi ta'rifidan hamda hodisa ehtimolining 0 bilan 1 orasida bo‘lishidan bevosita kelib chiqadi:

$$F(x) = P(\xi < x) \Rightarrow 0 \le F(x) \le 1.$$

$$0 \le P(\xi < x) \le 1$$

2°. *Taqsimot funksiyasi F(x) o‘suvchi funksiya bo‘ladi.*

Isbot. Ixtiyoriy ikkita x_1 va x_2 sonni olaylik. Bu sonlar uchun $x_1 < x_2$ bo‘lsin:

Ravshanki, $\{\zeta < x_2\}$ hodisasi $\{\zeta < x_1\}$ va $\{x_1 \le \zeta < x_2\}$ hodisalar yig‘indisiga teng:

$$\{\xi < x_2\} - \{\xi < x_1\} \cup \{x_1 \le \xi < x_1\}.$$

Qo‘shish teoremasiga asosan

$$P\{\xi < x_2\} = P\{\xi < x_1\} + P\{x_1 \le \xi < x_2\}. \qquad (25.4)$$

Ma'lumki, $P\{\zeta < x_2\} = F(x_2)$, $P\{\zeta < x_1\} = F(x_1)$ Unda (24.4) munosabatdan

$$F(x_2) = F(x_1) + P\{x_1 \le \xi < x_2\} \qquad (25.5)$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Agar $P\{x_1 \le \zeta < x_2\} \ge 0$ ekanligini e'tiborga olsak, unda so‘nggi tenglikdan $F(x_2) \ge F(x_1)$ bo‘lishini topamiz. Demak,

$$\forall x_1, x_2, x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2).$$

Bu esa taqsimot funksiya *F(x)*ning o‘suvchi ekanini bildiradi.

25.1-natija. *Tasodifiy miqdorning $[x_1,x_2)$ oraliqqa tushish ehtimoli*

$$P\{x_1 \le \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

bo‘ladi.

Bu tenglik yuqoridagi (25.5) munosabatdan kelib chiqadi. Taqsimot funksiyasining navbatdagi xossalarini isbotsiz keltiramiz.

3°. *Agar F(x) taqsimot funksiyasi bo‘lsa, u holda*

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$$

bo‘ladi.

4°. *Agar x_1 nuqta ζ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi F(x) ning uzluksizlik nuqtasi bo‘lsa, u holda*

$$P\{\xi = x_1\} = 0$$

bo‘lib,

$$P\{x_1 \le \xi < x_2\} = P\{x_1 < \xi < x_2\},$$
$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1) \qquad (25.6)$$

bo‘ladi.

Endi uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi bilan bog‘liq bo‘lgan ehtimol zichligi tushunchasini keltiramiz.

Agar ζ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi *F(x)* differensiallanuvchi funksiya bo‘lsa, uning hosilasi tasodifiy miqdorning ehtimol zichligi (differensial funksiyasi) deb ataladi va *p(x)* kabi belgilanadi:

$$p(x) = F'(x) \qquad (25.7)$$

Endi *p(x)* ning xossalarini keltiramiz:

2°. *$\forall x$ uchun p(x) > 0 bo‘lib,*

$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$$

bo‘ladi.

Isbot. Ta'rifga ko‘ra

$$p(x) = F'(x)$$

bo‘ladi. *F(x)* taqsimot funksiyasi o‘suvchi funksiya bo‘lganligi sababli

$$F'(x) \ge 0$$

bo‘ladi. Demak, *p(x)≥ 0*

Yuqoridagi (25.6) hamda Nyuton - Leybnits formulasidan foydalanib topamiz:

$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1); F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} F'(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\{x_1 < \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} F'(x)dx \Rightarrow P\{x_1 < \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx.$$

2°. *Agar p(x) tasodifiy miqdorning ehtimol zichligi bo‘lsa, u holda*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

bo‘ladi.

Isbot. Xosmas integral ta'rifiga ko‘ra

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \lim_{\substack{u\to+\infty \\ v\to-\infty}} \int_{v}^{u} p(x)dx \qquad (25.8)$$

bo‘ladi.

Agar

$$\int_{v}^{u} p(x)dx = F(u) - F(v)$$

hamda $\lim\limits_{u-\infty} F(u) = 1, \lim\limits_{u-\infty} F(v) = 0$ bo‘lishini e'tiborga olsak, unda (25.8) munosabatdan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \lim_{\substack{u\to+\infty. \\ v\to-\infty}} \int_{v}^{u} p(x)dx = \lim_{\substack{u\to+\infty. \\ v\to-\infty}} \left[F(u) - F(v)\right] =$$

$$= \lim_{u\to+\infty.} F(u) - \lim_{v\to-\infty.} F(v) = 1 - 0 = 1$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$$

3°. *Agar tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi F(x), ehtimol zichligi esa p(x) bo‘lsa, u holda*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$$

bo‘ladi.

Isbot. Xosmas integral ta'rifiga ko‘ra

$$\int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \lim_{v\to-\infty} \int_{v}^{x} p(t)dt$$

bo‘ladi. Yuqorida isbot etilgan 1°-xossadan foydalanib,

$$\int_{v}^{x} p(t)dt = F(x) - F(v)$$

bo‘lishini topamiz. Demak,

$$\int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \lim_{v\to\infty} \int_{v}^{x} p(t)dt = \lim_{v\to\infty} \big(F(x) - F(v)\big) =$$

$= F(x)$ - $\lim_{v\to\infty} F(v)$.

Agar $\lim_{v-\infty} F(v) = 0$ bo‘lishini e'tiborga olsak, u holda

$$\int_{-\infty}^{x} p(t)dt = F(x) \qquad (25.9)$$

ga ega bo‘lamiz. Bu esa 3° xossani isbotlaydi. Bu xossa tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasi bilan uning ehtimol zichligi orasidagi bog‘lanishni ifodalaydi.

Misol. Tasodifiy miqdorning ehtimol zichligi

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

bo‘lsa, shu tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi topilsin.

Yechish. Yuqorida keltirilgan (24.9) formuladan foydalanib topamiz:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+t^2)}dt = \frac{1}{\pi} arctgt\Big|_{-\infty}^{x} =$$

$$= \frac{1}{\pi} arctgx - \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} arctgx + \frac{1}{2}.$$

Demak, $F(x)=\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctgx$

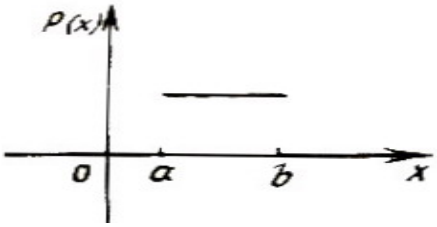
5- §. Tekis taqsimot

Biror ζ tasodifiy miqdor berilgan bo‘lsin. Agar bu tasodifiy miqdorning *p(x)* ehtimol zichligi biror oraliqda o‘zgarmas funksiya bo‘lib, oraliqdan tashqarida esa nolga teng bo‘lsa, u holda tasodifiy miqdor shu oraliqda *tekis taqsimlangan* deb ataladi.

Demak, ζ tasodifiy miqdor tekis taqsimlangan bo‘lsa, uning ehtimol zichligi

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, \text{ агар } a \le x < b, \\ 0, \text{ агар } x < a \text{ ва } x > b \end{cases}$$

bo‘ladi (145-chizma).



145-chizma.

Haqiqatan ham,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^{a} p(x)dx + \int_{a}^{b} p(x)dx + \int_{b}^{+\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot dx +$$

$$+\int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} dx + \int_{b}^{+\infty} 0 \cdot dx = \frac{1}{b-a} \cdot x\Big|_{a}^{b} = \frac{1}{b-a}(b-a) = 1$$

bo‘lib, undan yuqoridagi 2°-xossaning o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi. Agar $a<x<b$ bo‘lsa, u holda

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx = \int_{-\infty}^{a} p(x)dx + \int_{a}^{x} p(x)dx = \; = \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot dx + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}(x-a)$$

bo‘ladi.

Agar $x \geq b$ bo‘lsa, u holda

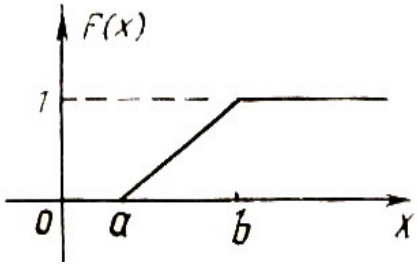
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx = \int_{-\infty}^{a} p(x)dx + \int_{a}^{b} p(x)dx + \int_{b}^{x} p(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot dx + \; + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} dx + \int_{b}^{x} 0 \cdot dx = \frac{1}{(b-a)}(b-a) = 1$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, yuqoridagi tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{агар } x \leq a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{агар } a < x < b, \\ 1, \text{ агар } x \geq b \end{cases}$$

bo‘ladi. Uning grafigi 146-chizmada tasvirlangan.



146-chizma.

6-§. Normal taqsimot

Agar ζ uzluksiz tasodifiy miqdorning ehtimol zichligi p(x) (differensial funksiyasi)ushbu

$$p(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\delta^2}} \qquad (25.10)$$

ko‘rinishda bo‘lsa (bunda a va δ o‘zgarmas sonlar, δ >0), u holda tasodifiy miqdor *normal taqsimlangan* deb ataladi.

Odatda quyidagi

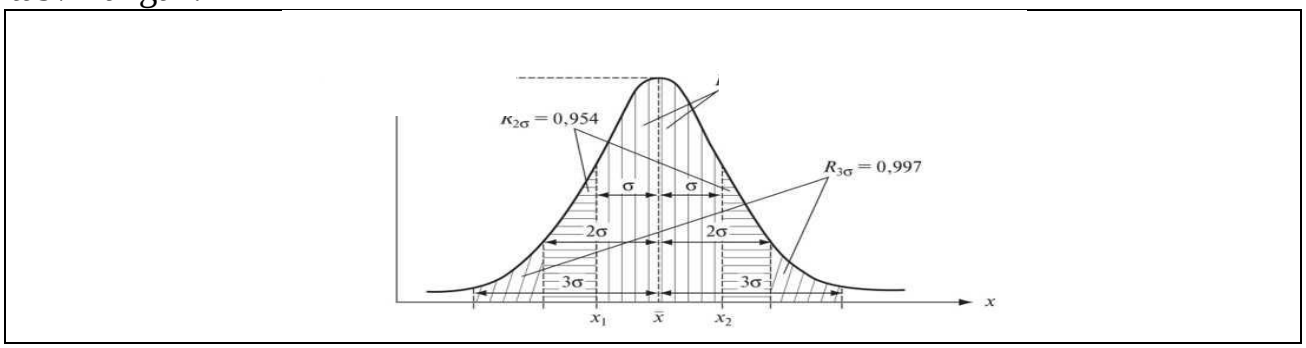
$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (25.11)$$

belgilash kiritiladi. Bu belgilash yordamida tasodifiy miqdorning ehtimol zichligi ushbu

$$p(x)=\frac{1}{\delta}\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right) \qquad (25.11^{/})$$

ko‘rinishda yoziladi.

(25.11$^{/}$) formulada keltirilgan φ(x) funksiyaning qiymatlari jadvallari tuzilgan (kitob oxiridagi ilovaga qaralsin). Bu funksiyaning grafigi 147-chizmada tasvirlangan.



147-chizma.

Endi yuqoridagi normal qonun bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini topamiz. Buning uchun quyidagi belgilashni kilamiz:

$$\Phi(x)=\int_0^x \varphi(t)dt. \qquad (25.12)$$

Ravshanki, *Φ(x)* funksiya φ(x) ga bog‘liq bo‘ladi. (24.12) munosabat bilan aniqlangan *Φ(x)* funksiya quyidagi xossalarga ega bo‘ladi:

1) *Φ(x)* funksiya toq funksiya bo‘ladi: *Φ(-x)=-Φ(x).*

Haqiqatan ham, ta'rifga ko‘ra $F(-x)=\int_0^{-x}\varphi(t)dt$ bo‘ladi. Bu integralda *t=-y* almashtirish kiritamiz. Unda

$$\int_0^{-x}\varphi(t)dt=\int_0^{x}\varphi(-y)d(-y)=-\int_0^{x}\varphi(-y)dy=-\Phi(x)$$

bo‘ladi. Agar φ(-y)=φ(y) bo‘lishini e'tiborga olsak, unda

$$\int_0^{-x}\varphi(t)dt=-\int_0^{x}\varphi(y)dy$$

bo‘lishini topamiz. Natijada

$$\Phi(-x) = -\int_0^x \varphi(y)dy = -\Phi(x).$$

2. Ushbu limit munosabat o‘rinli bo‘ladi:

$$\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \frac{1}{2}.$$

Haqiqatan ham,

$$\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \varphi(t)dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Yuqorida aytilganlardan foydalanib, normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini topamiz:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\delta}\varphi(\frac{x-a}{\delta})dx = \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\delta}} \varphi(t)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \varphi(t)dt + \int_{0}^{\frac{x-a}{\delta}} \varphi(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt + \Phi\left(\frac{x-a}{\delta}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\delta}\right).$$

Shunday qilib, normal qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo’ladi:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\delta}\right)$$

XXV| BOB. TASODIFIY MIQDORNING SONLI XARAKTERISTIKALARI

Tasodifiy miqdor taqsimot qonunining berilishi shu tasodifiy miqdor haqida to‘liq ma'lumot beradi. Ammo ba'zi hollarda tasodifiy miqdor to‘g‘risida ayrim, yig‘ma ma'lumotlarni bilish lozim bo‘ladi. Bunda tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari-tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasi tushunchalari muhim rol o‘ynaydi. Biz quyida shu tushunchalar bilan tanishamiz([2] – [4]).

1-§. Tasodifiy miqdorning matematik kutilishi

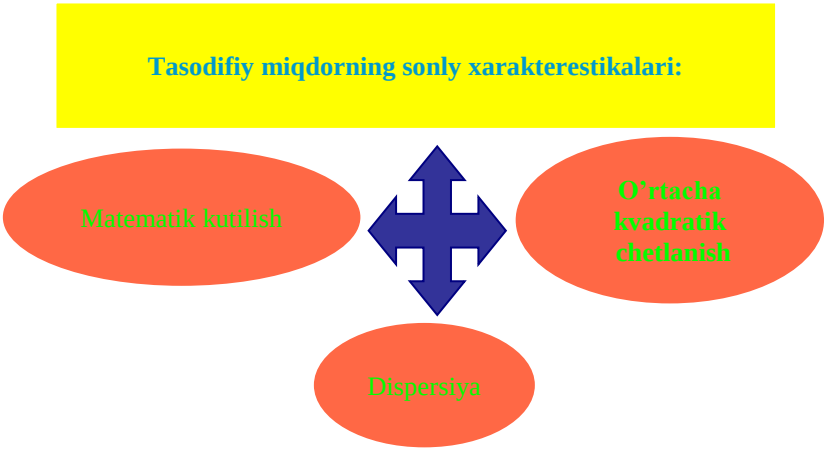
Biror ζ diskret tasodifiy miqdor berilgan bo‘lib, u x_1, x_2, ..., x_n qiymatlarni mos ravishda p_1, p_2, ..., p_n ehtimollar bilan qabul qilsin:

24.1-ta'rif. Ushbu

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$$

yig‘indi ζ diskret *tasodifiy miqdorning matematik kutilishi* deb ataladi va $M\zeta$ kabi belgilanadi:

$$M\xi = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \quad . \qquad (26.1)$$



Demak, diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi bu tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan barcha qiymatlarini ularning mos ehtimollariga ko‘paytmalari yig‘indisidan iborat.

Tasodifiy miqdor matematik kutilishining ma'nosini anglash uchun bitta masalani qaraymiz.

Faraz qilaylik, p ta tajriba o‘tkazilgan bo‘lib, bunda ζ tasodifiy miqdor x_1, x_2, ..., x_k qiymatlarni mos ravishda m_1, m_2, ..., m_k martadan qabul qilgan bo‘lsin. Ravshanki, m_1, m_2, ..., $m_k = n$

Qaralayotgan ξ tasodifiy miqdor qabul qilgan qiymatlarining o‘rta arifmetik qiymati (uni $\bar{x}$ bilan belgilaylik)

$$\frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n}$$

ga teng bo‘ladi. Bu miqdorni quyidagicha yozish mumkin:

$$\bar{x} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n} = x_1 \cdot \frac{m_1}{n} + x_2 \cdot \frac{m_2}{n} + \ldots + x_k \cdot \frac{m_k}{n}.$$

Agar $\frac{m_1}{n} (i = 1,2,\ldots,k)$ ni $\{\zeta = x_i\}$ hodisaning nisbiy chastotasi W_i ekanini hamda bu nisbiy chastota $\{\zeta = x_i\}$ hodisasining ehtimoli $P_i\{p\{\zeta = x_i\}=p_i\}$ dan kam farq qilishini $W_i \equiv p_i$ e'tiborga olsak, unda

$$\bar{x} = x_1 \cdot \frac{m_1}{n} + x_2 \cdot \frac{m_2}{n} + \ldots + x_k \cdot \frac{m_k}{n} \approx x_1 W_1 + x_2 W_2 + \ldots + x_k W_k =$$
$$= x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k = M\xi$$

ekanini topamiz. Demak, $\bar{x} = M\zeta$.

Bu munosabat ζ tasodifiy miqdorning matematik kutilishi shu tasodifiy miqdor kuzatilayotgan qiymatlarining o‘rta arifmetik qiymatiga taqriban teng ekanini ko‘rsatadi (shuning uchun ham $M\zeta$, ni ko‘pincha ζ tasodifiy miqdorning o‘*rtacha qiymati* deb yuritiladi).

Misollar. 1. Binomial qonun bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilishi topilsin.

yechish. Bu holda, ma'lumki, ζ diskret tasodifiy miqdor 0, 1, 2, ..., *k*, ..., *p* qiymatlarni mos ravishda

$$C_n^0 p^0 (1-p)^{n-0}, C_n^{'} p(1-p)^{n-1}, ..., C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, ...,$$
$$C_n^{n-1} p^{n-1}(1-p), C_n^n p^n (1-p)^0$$

ehtimollar bilan qabul qiladi.

ζ diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi ta'rifga binoan

$$M\xi = 0 \cdot C_n^0 p^0 (1-p)^{n-0} + 1 \cdot C_n^1 p(1-p)^{n-1} + ... + k \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k} +$$
$$+ ... + n \cdot C_n^n p^n (1-p)^{n-n} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

bo‘ladi.

Endi bu tenglikning o‘ng tomonidagi yig‘indini hisoblaymiz.

$$\sum_{k=1}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{np(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} =$$
$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k}. \qquad (26.2)$$

(26.2) tenglikda *k-1* ni *m* bilan almashtiramiz. Unda

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

yig‘indi quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{m!(n-m+1)!} p^m (1-p)^{n-1-m} =$$
$$= \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m p^m (1-p)^{n-1-m} = \left[p + (1-p)\right]^{n-1} = 1^{n-1} = 1 \qquad (26.3)$$

(26.2) va (26.3) munosabatlardan $\sum_{k-1}^{n} k \cdot C_n^k p^k \ (1-p)^{n-k} = n \cdot p$ bo‘lishini topamiz. Natijada

$$M\xi = \sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = n \cdot p$$

kelib chiqadi.

Demak, binomial qonun bilan taqsimlangan ζ diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi

$$M\xi = n \cdot p$$

ga teng bo‘ladi.

2. Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilishi topilsin.

yechish. Bu holda, ma'lumki, ζ tasodifiy miqdor 0, 1, 2, ..., *p*, ... qiymatlarni mos ravishda $\frac{\lambda}{0!}e^{-\lambda}, \frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda}, \dots, \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$, ehtimollar bilan qabul qiladi. Matematik kutilish

ta'rifiga ko‘ra

$$M\xi = 0 \cdot \frac{\lambda^0}{0!}\ell^{-\lambda} + 1 \cdot \frac{\lambda}{1!}\ell^{-\lambda} + 2 \cdot \frac{\lambda^2}{2!}\ell^{-\lambda} + .. + n \cdot \frac{\lambda^n}{n!}\ell^{-\lambda} + \dots$$

bo‘ladi. Uni quyidagicha

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

yozib olamiz. Qatorlar nazariyasidan, ma'lumki,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{\lambda}.$$

Natijada

$$M\xi = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda \qquad (26.4)$$

bo‘ladi.

Endi uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilishi tushunchasi bilan tanishamiz.

Faraz qilaylik, ζ uzluksiz tasodifiy miqdorning ehtimol zichligi *p(x)* bo‘lsin.

26.1-ta'rif. Ushbu

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \qquad (26.5)$$

miqdor ξ uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilishi $M\xi$ deb ataladi

Demak, uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilishi mavjud bo‘lishi uchun (26.5) xosmas integral absolyut yaqinlashuvchi bo‘lishi kerak.

Misollar. 1. Tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilishi topilsin.

yechish. Tekis taqsimlangan ζ tasodifiy miqdorning ehtimol zichligi ifodasini (5-§ ga qarang) matematik kutilish ifodasi $M\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$ ga qo‘yib, hisoblaymiz:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{a} xp(x)dx + \int_{a}^{b} xp(x)dx + \int_{b}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{a} x \cdot 0dx +$$

$$+\int_a^b \frac{1}{b-a}xdx+\int_b^{+\infty} x\cdot 0dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx=\frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Bigg|_a^b=$$

$$=\frac{1}{2(b-a)}\left(b^2-a^2\right)=\frac{b+a}{2}.$$

Demak, tekis taksimlangan ζ tasodifiy miqdorning matematik kutilishi: $M\xi=\frac{a+b}{2}$.

2. Normal qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilishi topilsin.

Yechish. Normal qonun bo‘yicha taqsimlangan ζ tasodifiy miqdorning ehtimol zichligi ifodasini (6-§ ga qarang) matematik kutilish ifodasiga quysak,bo‘ladi. Endi bu integralni hisoblaymiz. $t=\frac{x-a}{\delta}$ almashtirish bajaramiz.

$$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\delta}\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(\delta t+a)\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta t\varphi(t)dt+\int_{-\infty}^{+\infty}a\varphi(t)dt=\delta\int_{-\infty}^{+\infty}t\varphi(t)dt+a\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dt.$$

Demak,

$$M\xi=\delta\int_{-\infty}^{+\infty}t\varphi(t)dt+a\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dt.$$

Agar

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1,\ \int_{-\infty}^{+\infty}t\varphi(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0}te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\int_{0}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\int_{0}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\int_{0}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}\right]=0$$

bo‘lishini e'tiborga olsak, unda $M\zeta=\delta\cdot 0+a\cdot 1=a$ bo‘lishini topamiz.

Shunday qilib, normal qonun bo‘yicha taqsimlangan ζ tasodifiy miqdorning matematik kutilishi $M\zeta=a$ bo‘ladi.

Xulosa qilib bunday aytish mumkin: tasodifiy miqdorning matematatik kutilishi shunday sonni ifodalaydiki, bu son tasodifiy miqdor qiymatlarining o‘rta arifmetigi bo‘lib, uning atrofida tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari joylashgan bo‘ladi.

Endi tasodifiy miqdor matematik kutilishining xossalarini keltiramiz:

1°. *Agar C o‘zgarmas son bo‘lsa, MC = C bo‘ladi.*

2°. ξ *tasodifiy miqdor, C -* o‘*zgarmas son bo‘lsa, u holda M(Cζ)=CMζ bo‘ladi.*

3°. ζ va η *tasodifiy miqdorlar berilgan bo‘lsin. Unda M(ζ±η)=Mζ±M(η) bo‘ladi.*

4°. *Agar a va b o‘zgarmas sonlar bo‘lsa, u holda M(αζ+b)=αMζ+b bo‘ladi.*

5°. *Agar ζ va η o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar bo‘lsa, u holda M(ζ·η)=Mζ·Mη bo‘ladi.*

Endi keltirilgan xossalardan ayrimlarining isbotini keltiramiz:

2°-xossaning isboti. ζ tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari $x_1, x_2, ..., x_p$ va ularning extimollari mos ravishda $p_1, p_2, ..., p_n$ bo‘lsin. U holda Cζ tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari $Cx_1, Cx_2, ..., Cx_p$ va Cζ ning mumkin bo‘lgan qiymatlarining ehtimollari ζ ning mumkin bo‘lgan tegishli qiymatlarining ehtimollariga tengligini hisobga olsak, Cζ ning taqsimot qonuni quyidagicha bo‘ladi:

$C\xi$	Cx_1	Cx_2	…	Cx_n
p	p_1	p_2		p_n

Matematik kutilishning ta'rifiga ko‘ra

$$M(C\xi) = Cx_1 \cdot P_1 + Cx_2 \cdot P_2 + ... + Cx_n \cdot P_n =$$
$$= C(x_1 \cdot P_1 + x_2 \cdot P_2 + ... + x_n \cdot P_n) = CM\xi$$

bo‘ladi. Demak, $M(C\zeta)=CM\zeta$ bo‘lib, 2°- xossa isbot bo‘ladi.

3°-xossaning isboti. ζ va η tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlari berilgan bo‘lsin (soddalik uchun ular ikkitadan qiymatlar qabul qilsin):

ξ	x_1	x_2
r	r_1	r_2

η	y_1	y_2
q	q_1	q_2

ζ+η tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlarini tuzamiz. ζ ning qabul qiladigan qiymatlarini η ning qabul qiladigan qiymatlariga qo‘shib, ζ+η tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari

$$x_1 + y_1,\ x_1 + y_2, x_2 + y_1,\ x_2 + y_2$$

ni hosil qilamiz. Ularning ehtimollarini mos ravishda $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$ kabi belgilasak, matematik kutilishning ta'rifiga asosan

$$M(\xi + \eta) = (x_1 + y_1)p_{11} + (x_1 + y_2)p_{12} + (x_2 + y_1)p_{21} + (x_2 + y_2)p_{22}$$

bo‘ladi.

Agar

$$p_{11} + p_{12} = p_1,\ p_{21} + p_{22} = p_2,\ p_{11} + p_{21} = q_1,\ p_{12} + p_{22} = q_2$$

ekanligini hisobga olsak,

$$M(\xi + \eta) = x_1(p_{11} + p_{12}) + x_2(p_{21} + p_{22}) + y_1(p_{11} + p_{21}) +$$
$$+ y_2(p_{12} + p_{22}) = (x_1 p_1 + x_2 p_2) + (y_1 q_1 + y_2 q_2).$$

Bundan esa

$$M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$$

ekanligi hosil bo‘ladi.

$M(\zeta-\eta)=M\zeta-M\eta$ ni ham xuddi shu yo‘l bilan isbotlash mumkin.

4°-xossaning isboti 1°-3°-xosssalardan kelib chiqadi. Haqiqatan ham

$$M(a\xi+b)=M(a\xi)+b.=M(\xi)+в$$

5°- xossaning isbotini keltirishda biz quyidagi mulohazadan foydalanamiz: ζ va η o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlarning ko‘paytmasi deb, shunday ζ·η tasodifiy miqdorga aytamizki, uning mumkin bo‘lgan qiymatlari ζ ning mumkin bo‘lgan har bir qiymatini η ning mumkin bo‘lgan har bir qiymatiga ko‘paytirilganiga teng, ζ·η ko‘paytmaning mumkin bo‘lgan qiymatlarining ehtimollari ko‘paytuvchilarning mumkin bo‘lgan qiymatlarining ehtimollari ko‘paytmasiga teng. U holda ζ·η ko‘paytmaning taqsimot qonuni quyidagicha bo‘ladi:

$\xi\cdot\eta$	x_1y_1	x_2y_1	x_1y_2	x_2y_2
R	p_1q_1	p_2q_1	p_1q_2	p_2q_2

Matematik kutilishning ta'rifiga ko‘ra

$$M(\xi\cdot\eta)=x_1y_1\cdot p_1q_1+x_2y_1\cdot p_2q_1+x_1y_2\cdot p_1q_2+x_2y_2\cdot p_2q_2=$$
$$=y_1q_1(x_1y_1+x_2y_2)+y_2q_2(x_1y_1+x_2y_2)=M\xi\cdot M\eta$$

Demak, $$M(\xi\cdot\eta)=M(\xi)\cdot M\eta.$$

2-§. Tasodifiy miqdorning dispersiyasi

Tasodifiy miqdorning dispersiyasi uning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlarining o‘rtacha qiymat atrofida tarqoqlanish (yechilish) darajasini xarakterlovchi son bo‘ladi.

ζ tasodifiy miqdor berilgan bo‘lsin.

25.3-ta'rif. $M(\zeta-M\zeta)^2$ miqdor ζ tasodifiy miqdorning *dispersiyasi* deb ataladi va Dζ kabi belgilaiadi:

$$D\xi=M[\xi-M\xi]^2.$$

Yuqorida keltirilgan tasodifiy miqdorning matematik kutilishining xossalaridan foydalanib, Dζ uchun boshqa ifoda topamiz:

$$D\xi=M[\xi-M\xi]^2=M\left[\xi^2-2\xi M(\xi)+M(\xi)^2\right]=M(\xi^2)-$$
$$-2M(\xi)M(\xi)+(M\xi)^2=M(\xi^2)-2(M(\xi))^2+(M(\xi))^2=M(\xi^2)-(M(\xi))^2.$$

Demak,

$$D\xi=M(\xi^2)-(M(\xi))^2. \qquad (26.6)$$

Misollar-1. Binomial qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.

Yechish. Ma'lumki, bu tasodifiy miqdor 0, 1, 2, ..., *n* qiymatlarni mos ravishda $C_n^0p^0(1-p)^{n-0}, C_{n,}^1p(1-p)^{n-1},\dots,C_n^np^n(1-p)^{n-n}$ ehtimollar bilan qabul qiladi, uning matematik kutilishi $M\zeta=np$.

Yuqoridagi (26.6) formuladan foydalanish maqsadida $M\zeta^2$ ni topamiz. Ta'rifga ko‘ra

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

bo‘ladi. Bu tenglikning o‘ng tomonidagi yig‘indini hisoblaymiz:

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} =$$

$$= np\sum_{k=1}^{n} \frac{[(k-1)+1](n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} \cdot p^{k-1} \cdot q^{n-1-(k-1)} = np\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)(n-1)(n-2)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} \cdot p^{k-1} \cdot q^{n-1-(k-1)} +$$

$$+ np\sum_{k=1}^{n} \frac{kn(n-1)!}{(k-1)![n-1-(k-1)]!} p^{k-1} \cdot q^{n-1-(k-1)} = n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} + np(p+q)^{n-1} =$$

$$= n^2 p^2 - np^2 + np = np(1-p) + n^2 p^2,$$

(chunki $(p+q)^{n-2}=1$, $(p+q)^{n-1}=1$).

Demak,

$$M\xi^2 = np(1-p) + n^2 p^2.$$

(25.6) munosabatdan foydalanib topamiz:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = np(1-p) + n^2 p^2 - (np)^2 = np(1-p).$$

Demak, binomial qonun bilan taqsimlangan ζ tasodifiy miqdorning dispersiyasi

$$D\xi = np(1-p)$$

bo‘ladi.

2. Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan ζ tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.

yechish. Ma'lumki, bunday tasodifiy miqdorning matematik kutilishi

$$M\xi = \lambda$$

ga teng. ζ^2 tasodifiy miqdorning matematik kutilishini topamiz:

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}(k-1+1) =$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right] = \lambda e^{-\lambda}\left(\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}\right) =$$

$$= \lambda(\lambda+1) = \lambda^2 + \lambda$$

(26.6) formulaga binoan

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

bo‘ladi.

Demak, Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan ζ tasodifiy miqdorning dispersiyasi $D\zeta=\lambda$ ga teng.

Aytaylik, uzluksiz tasodifiy miqdor, *r(x)* esa uning ehtimol zichligi bo‘lsin.

26.4-ta'rif. Ushbu

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 p(x)dx \qquad (26.7)$$

miqdor ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb ataladi. Bu ifodani boshqacha ham yozish mumkin:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 p(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x^2 - 2xM\xi + (M\xi)^2\right)p(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx - 2M\xi \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx + (M\xi)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx - 2(M\xi)^2 + (M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx - (M\xi)^2.$$

Demak,

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx - (M\xi)^2. \qquad (26.8)$$

Ko‘p hollarda ζ tasodifiy miqdorning dispersiyasini (26.8) formula yordamida topiladi.

Misol. Normal qonun bo‘yicha taqsimlangan ζ tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.

Yechish. Bu tasodifiy miqdorning dispersiyasini (26.8) formula yordamida topamiz. Ravshanki, bu holda

$$p(x) = \frac{1}{\delta}\varphi\left(\frac{x-a}{\delta}\right) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\delta^2}}$$

bo‘lib, Mζ=α ga teng bo‘ladi.

(26.8) formulaga ko‘ra

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx - (M\xi)^2 = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\delta^2}} dx - a^2.$$

Bu tenglikdagi integralni hisoblash uchun avvalo o‘zgaruvchini quyidagicha almashtiramiz: $t=\frac{x-a}{\delta}$. Unda $x=\delta t+a$, $dx=\zeta dt$ bo‘lib,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\delta^2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta t + a)^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \delta dt = \delta \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta t + a)^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \delta^3 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + 2\delta^2 a \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt + \delta a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \delta^3 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + 2a\delta^2 \cdot 0 + a^2\delta\sqrt{2\pi} = \delta^3 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + a^2\delta\sqrt{2\pi} \qquad (26.9)$$

bo‘ladi. Keyingi integralni bo‘laklab integrallaymiz:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}. \qquad (26.10)$$

Shunday qilib, (26.9) va (26.10) munosabatlarga ko‘ra

$$D\xi = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\delta^2}} dx - a^2 = \quad = \frac{1}{\delta\sqrt{2\eta}} \left(\delta^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + a^2\delta\sqrt{2\pi} \right) - a^2 =$$

$$= \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \left(\delta^3\sqrt{2\pi} + \sqrt{2\pi} a^2 \delta \right) - a^2 = \delta^2 + a^2 - a^2 = \delta^2$$

bo‘ladi.

Demak, normal qonun bo‘yicha taqsimlangan ζ tasodifiy miqdorning dispersiyasi $D\zeta=\delta^2$ ga teng bo‘ladi.

Endi tasodifiy miqdor dispersiyasining xossalarini keltiramiz.

2°. *Agar C o‘zgarmas son bo‘lsa, D(C) = 0 bo‘ladi.*

2°. *ζ tasodifiy miqdor, C o‘zgarmas son bo‘lsa, u holda* $D(C\zeta)=C^2D(\zeta)$ *bo‘ladi.*

3°. *Agar ζ va η o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdor lar bo‘lsa, u holda*

$$D(\xi \pm \eta) = D\xi \pm D\eta$$

bo‘ladi.

4°. *Agar a va b o‘zgarmas sonlar bo‘lsa, u holda*

$$D(a\xi + b) = a^2 D\xi$$

bo‘ladi.

Normal taqsimot va uning tatbiqlari

Qishloq xo‘jaligi, meditsina va boshqa sohalarga doir amaliy masalalarni yechishda, keng qo‘llaniladigan taqsimot funksiyalardan biri normal taqsimotdir.

Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorni matematik kutilishi $M(X) = a$, o‘rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma = \sqrt{D(x)}$ bo‘lsa(24-bob, §6 ga qarang), quyidagicha yoziladi:

1) $X \in N(a,\sigma)$ tasodifiy miqdorni (α,β) oraliqda yotuvchi qiytmat qabul qilish ehtimolli quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$P\{\alpha \le X \le \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \qquad (26.11)$$

2) $X \in N(a,\sigma)$ tasodifiy miqdorni, matematik kutilishidan farqini absalut qiymat bo’yicha, δ musbat sondan kichik bo‘lish ehtimollini hisoblash formulasi

$$P\{|X-a|\le\delta\}=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \qquad (26.12)$$

3) (5) formuladan xususiy holda $\delta = 3\sigma$ bo‘lsa, amaliyotda keng qo‘llaniladigan “uch sigma” qoidasi kelib chiqadi

$$P\{|x-a|\le 3\sigma\}=2\Phi(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973$$

Xususan, mahsulot ishlab chiqaruvchi barch stanoklar, texnika voitalari shunday yaratilganki, ularni ishlab chiqargan mahsulotlarining hajmi $\delta = 3\sigma$ “uch sigma” qoidasiga bo’y sunadi.

O’z-o’zini tekshirish uchun savollar

1. Tasodifiy miqdor va uning turlari haqida tushuncha bering?
2. Diskret tasodifiy miqdorga ta’rif berib, Binomial, Puasson, geometric taqsimotlar-ning taqsimot qonunlarini yozing?
3. Diskret tasodifiy miqdorning hisoblash matematik kutilishi, dispersiyasi va o’rtacha kvadratik chetlanishlarini formulalarini yozing?
4. Taqsimot funksiya va uning xossalarini ayting?
5. Uzluksiz tasodifiy miqdorga ta’rif berib unga tipik misollar keltiring?
6. Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilishi, dispersiyasi, o’rtacha kvadratik chetlanish qanday formulalar bilan hisoblanadi?
7. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot, differensial funksiyalarini yozing , matematik kutilishi, dispersiyasi va o’rtacha kvadratik chetlanishlarini hisoblang?
8. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning berilgan oraliqqa tushush, chetlanish ehtimolini, “3σ” qoidasini hisoblash formulalarini yozing, amaliyotda qo’llanishini tushuntiring?

Kalit so’zlar:

Tasodifiy miqdor, diskret, Benomil, Puasson, geometric, matematik kutilish, dispersiya, chetlanish, taqsimot funksiya, xossalari, uzluksiz, normal taqsimot, differensial funksiya, berilgan oraliqqa tushush, chetlanish ehtimoli.

Xulosa

Tasodifiy miqdor, diskret tasodifiy miqdor, Benomial, Puasson, geometric taqsimotlarning taqsimot qonunlari, diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi, dispersiyasi, o’rtacha kvadratik chetlanishi. Taqsimot funksiya, uning

xossalari, uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi va uning xossalari, matematik kutilishi, dispersiyasini, o'rtacha kvadretik chetlanishini hisoblash formulalari, normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot, differensial funksiyalari, berilgan oraliqqa tushushi, chetlanishi va "3σ" qoidasi ehtimollarini hisoblash formullari o'rganilgan.

3-§. Ehtimollar nazariyasining limit teoremalari

Biz ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchasi - tasodifiy miqdor bilan tanishdik. Ma'lumki, tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatini avvaldan aytib bo‘lmaydi. Chunki bu qiymatni qabul qilish oldindan aytib bo‘lmaydigan turli tasodifiy holatlarga bog‘liq. Ayni paytda yetarlicha ko‘p tasodifiy miqdorlar yig‘indisi tasodifiylik xususiyatini yo‘qotib, u ma'lum darajada o‘zgarmas bo‘lish holatiga o‘ta boradi. Quyida shu holatni o‘rganamiz. Bunda tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasi muhim rol o‘ynaydi([2] − [4]).

Chebishev tengsizligi. Ma'lumki, tasodifiy miqdorning matematik kutilishi o‘zgarmas son bo‘ladi. Tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlarini uning matematik kutilishi atrofida bo‘lishi darajasini quyidagi teorema ko‘rsatadi.

Teorema. *Chekli dispersiyaga ega bo‘lgan ixtiyoriy tasodifiy miqdor va ixtiyoriy musbat* ε *son uchun ushbu tengsizlik o‘rinli bo‘ladi:*

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Isbot. Bu teoremani ζ – uzluksiz tasodifiy miqdor bo‘lgan hol uchun isbotlaymiz. Aytaylik, ζ uzluksiz tasodifiy miqdor, *r(x)* esa uning extimol zichligi bo‘lsin.

Ravshanki, $\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \cup \{|\xi - M\xi| < \varepsilon$ muqarrar hodisa bo‘ladi. Demak,

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} + P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} = 1$$

bo‘ladi. Bundan

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} = 1 - P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} \qquad (26.13)$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Agar

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx$$

va

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} = P\{-\varepsilon < \xi - M\xi < \varepsilon\} = P\{M\xi - \varepsilon < \xi < M\xi + \varepsilon\} =$$

$$= \int_{M\xi-\varepsilon}^{M\xi+\varepsilon} p(x)dx$$

bo‘lishini e'tiborga olsak, u holda (26.13) tenglik ushbu ko‘rinishga keladi:

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx - \int_{M\xi-\varepsilon}^{M\xi+\varepsilon} p(x)dx.$$

Ravshanki;

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} = \int_{-\infty}^{M\xi-\varepsilon} p(x)dx + \int_{M\xi-\varepsilon}^{M\xi+\varepsilon} p(x)dx + \int_{M\xi-\varepsilon}^{\infty} p(x)dx - \int_{M\xi-\varepsilon}^{M\xi+\varepsilon} p(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{M\xi-\varepsilon} p(x)dx + \int_{M\xi+\varepsilon}^{+\infty} p(x)dx. \qquad (26.14)$$

Endi $\int_{-\infty}^{M\zeta-\varepsilon} p(x)dx$ integralni qaraylik. Bunda $-\infty < x < M\zeta-\varepsilon$ bo‘lganligi sababli $x - M\zeta < -\varepsilon$ $x - M\xi < -\varepsilon$ bo‘lib,

$$\left(\frac{x - M\xi}{\varepsilon}\right)^2 > 1$$

bo‘ladi. Natijada quyidagi tengsizlikka kelamiz:

$$\int_{-\infty}^{M\xi-\varepsilon} p(x)dx < \int_{-\infty}^{M\xi-\varepsilon} \left(\frac{x - M\xi}{\varepsilon}\right)^2 p(x)dx. \qquad (26.15)$$

Xuddi shunga o‘xshash,

$$\int_{-\infty}^{M\xi-\varepsilon} p(x)dx < \int_{-\infty}^{M\xi-\varepsilon} \left(\frac{x - M\xi}{\varepsilon}\right)^2 p(x)dx. \qquad (26.16)$$

bo‘ladi.

(26.13), (26.14) va (26.15) munosabatlardan hamda

$$\int_{M\xi-\varepsilon}^{M\xi+\varepsilon} \left(\frac{x - M\xi}{\varepsilon}\right)^2 p(x)dx > 0$$

bo‘lishidan foydalanib topamiz:

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} < \int_{-\infty}^{M\xi-\varepsilon} \left(\frac{x - M\xi}{\varepsilon}\right)^2 p(x)dx + \int_{M\xi+\varepsilon}^{+\infty} \left(\frac{x - M\xi}{\varepsilon}\right)^2 p(x)dx \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{M\xi-\varepsilon} \left(\frac{x - M\xi}{\varepsilon}\right)^2 p(x)dx + \int_{M\xi-\varepsilon}^{M\xi+\varepsilon} \left(\frac{x - M\xi}{\varepsilon}\right)^2 p(x)dx + \int_{M\xi+\varepsilon}^{+\infty} \left(\frac{x - M\xi}{\varepsilon}\right)^2 p(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x - M\xi}{\varepsilon}\right)^2 p(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 p(x)dx.$$

Natijada

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 p(x)dx$$

bo‘ladi. Agar

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M\xi)^2\,p(x)dx = D\xi$$

ekanligini hisobga olsak, keyingi tengsizlikdan

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq D\xi \qquad (26.17)$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Teorema isbot qilindi.

Tasodifiy miqdor diskret bo‘lgan holda ham (26.17) munosabatning to‘g‘riligi yuqoridagidek isbotlanadi.

Odatda (26.17) *Chebishev tengsizligi* deb ataladi.

Chebishev teoremasi. Endi Chebishev tengsizligidan foydalanib, quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema (Chebishev teoremasi). *Agar*

$$\xi_1,\ \xi_2, \ldots,\ \xi_n,\ \ldots \qquad (26.18)$$

o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi chekli dispersiyaga ega bo‘lib, ular bitta o‘zgarmas son bilan chegaralangan, ya'ni

$$D\xi_1 \leq C,\ D\xi_2 \leq C,\ \ldots,\ D\xi_n \leq C,\ \ldots$$

bo‘lsa, u holda $\forall\varepsilon > 0$ *uchun*

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

bo‘ladi.

Isbot. Modomiki, (26.18) o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar ekan, unda dispersiyaning xossalaridan foydalanib

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$$

bo‘lishini topamiz. Teoremaning shartiga ko‘ra $D\zeta_k \leq C$ *(k=1,2,3, ...)* Demak,

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) \leq \frac{1}{n^2}\sum_{1}^{n}C = \frac{C}{n^2}\cdot n = \frac{C}{n} \qquad (26.19)$$

bo‘ladi. Ravshanki,

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi\right| < \varepsilon\right\} = = 1 - P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi\right| \geq \varepsilon\right\}. \qquad (26.20)$$

Chebishev tengsizligiga muvofiq,

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{D\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right|\right)}{\varepsilon^2}$$

bo‘ladi. Yuqoridagi (26.17) tengsizlikni e'tiborga olsak, unda

$$\frac{D\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right|\right)}{\varepsilon^2} \le \frac{C}{n\varepsilon^2}$$

bo‘lib,

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right| \ge \varepsilon\right\} \le \frac{C}{n\varepsilon^2} \qquad (26.21)$$

bo‘ladi.

Natijada (26.18), (26.21) munosabatlardan

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right| < \varepsilon\right\} \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Bu munosabatdan esa $n \to \infty$ da

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right| < \varepsilon\right\} \ge 1$$

bo‘lishini topamiz. Birok, hodisaning ehtimoli har doim birdan katta bo‘la olmasligi sababli

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

bo‘ladi. Bu esa teoremani isbotlaydi.

Odatda ehtimoli birga yaqin bo‘lgan hodisani deyarli muqarrar hodisa deb qaraladi. Yuqorida isbot etilgan teorema *p* ning yetarlicha katta qiymatlarida ushbu

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi deyarli muqarrar hodisaligini ko‘rsatadi. Bu hol quyidagi taqribiy formulaga olib keladi:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k$$

Demak, Chebishev teoremasi n ning yetarlicha katta qiymatlarida (26.20) taqribiy formula yetarli aniqlikda teng bo‘lishini tasdiqlaydi, ya'ni o‘rganilgan tasodifiy miqdorlarning o‘rta arifmetigi deyarli o‘zgarmas miqdorga teng bo‘lar ekan.

Markaziy limit teorema. Faraz qilaylik,

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots \qquad (26.22)$$

o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo‘lib, har bir ζ_k *(k=1,2,3, ...)* tasodifiy miqdor chekli dispersiya $D\zeta_k$ ga ega bo‘lsin.

Qaralayotgan tasodifiy miqdorlar yordamida ushbu tasodifiy miqdorlarni hosil qilamiz:

$$\eta_k = \frac{1}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)}}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k = \frac{1}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)}}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - M\xi_k).$$

Aytaylik, η_k tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyasi

$$F_\eta(x) = P\left\{\frac{1}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)}}\sum_{k=1}^{0}(\xi_k - M\xi_k)\right\}$$

bo‘lsin. Quyida keltiriladigan teorema ζ_k tasodifiy miqdorlar ma'lum shartni qanoatlantirganda yuqoridagi taqsimot funksiyasi normal qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasiga intilishini ko‘rsatadi. Biz bu teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema. *Agar o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \ldots$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{n}D\xi_k\right)^{\frac{3}{2}}}\sum_{k=1}^{n}M\left|\xi_k - M\xi_k\right|^3 = 0$$

bo‘lsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{n}D\xi_k\right)^{\frac{3}{2}}}\sum_{k=1}^{n}M(\xi_k - M\xi_k) < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

bo‘ladi.

Bu teorema Chebishev teoremasini kengroq talqin etadigan teoremadir. Odatda uni ehtimollar nazariyasining *markaziy limit teoremasi* deb yuritiladi.

Ehtimollar nazariyasini keyingi tadqiqotlari shuni ko‘rsatadiki, bir-biridan katta farq qilmaydigan tasodifiy miqdorlar yigindisi yanada umumiyroq shartda normal taqsimotga ega bo‘ladi. Ma’lumki, qishloq xo‘jalik ekinlari paxta, bug’doy, sholi, katta maydonlarda ekilib, ular qariyib bir xil sharoitda o’stiriladi. Bu ekinlarni ekish sxemalari do’yicha qalinliklari, barcha agrotexnik ishlovlar, parvarish qilish jarayonlari bir vaqtda, bir xil sharoitda amalga oshiriladi. Shu sababli, o‘rganilayotgan qishloq xo’jalik ekinlarini o’rtacha bo’yini uzunligi, shoxlari va barglari soni, o’rtacha hosildorligi ehtimollar nazariyasining markaziy limit teoremasiga asosan, normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deb olinishi mumkin.

4. §. Markaziy limit teoremani qishloq xo‘jalik masalalarini yechishga qo‘llanilishi

Ma’lumki, qishloq xo‘jalik ekinlari paxta, bug’doy, sholi,.. katta maydonlarda ekilib, ular qariyib bir xil sharoitda o’stiriladi. Bu ekinlarni ekish sxemalari do’yicha qalinliklari, barcha agrotexnik ishlovlar, parvarish qilish jarayonlari bir vaqtda, bir xil sharoitda amalga oshiriladi. Shu sababli, o‘rganilayotgan qishloq xo’jalik ekinlarini o’rtacha bo’yini uzunligi, shoxlari, barglari soni, o’rtacha hosildorligi ehtimollar nazariyasining markaziy limit teoremasiga asosan, normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deb olinishi mumkin. Bunga qishloq xo‘jaligidan misollar keltiramiz([2] – [4]).

Misol -1. Norma bo‘yicha 1 ga yerga 45 kg tuksiz chigit ekiladi. O‘rtacha kvadratik chetlanishi 5 kg bo‘lsa, xo‘jalikni 100 ga yeriga 97% li kafolat bilan ketadigan chigit miqdorini aniqlang?

Yechish. Aslida 1 ga maydonga ketadigan chigit miqdori, tasodifiy miqdor bo‘lib, tuproqning mayinligiga, namligiga, texnika vositasining ish faoliyatiga va boshqa ko’plab omillarga bog’liq boladi. $X_i -$ tasodifiy miqdor bilan i^{chi} ga yerga ketadigan chigit miqdorini beliglaymiz, masala shartiga asosan seyalka (nazariy) har bir ga yerga 45 kg dan chigit tashlaydi. Ekishga ketadigan chigit miqdori $X_i -$ barcha maydon uchun bir hil taqsimlangan tasodifiy miqdor bo’lib, matematik kutilishi $M(X_i) = a = 45kg$ va o’rtacha kvadratik chetlanishi $б = \sqrt{D(x_i)} = 5кг$ (i= $\overline{1,n}$) bo’ladi.

Agar X tasodifiy miqdor bilan, 100 ga yerga ketadigan chigit miqdorini belgilasak, u quyidagicha bo’ladi

$$X=X_1+X_2+...+X_{100}= \sum_{i=1}^{100} x_i ,$$

bu yerda $X_1, X_2, ..., X_{100}$ o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlardir. Ehtimollar nazariyasini markaziy limit teoremasi shartlari bajariladi. Demak, X ni quyidagicha parametrli normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deb olishimiz mumkin:

$$M(X)= \sum_{i=1}^{100} M(x_i)=100 \cdot 45=4500 \text{ kg} = 4,5\text{t}.$$

$$D(X)= \sum_{1}^{100} D(X_i)=100 \cdot 5^2=100 \cdot 25=2500,$$

o‘rtacha kvadratik chetlanishi

$$б = \sqrt{D(x)} = \sqrt{2500} = 50кг = 0,05\,\text{t}$$

β bilan 100 ga yerni kamida 97% ga etadigan chigit miqdorini belgilaymiz. Masala shartiga asosan P{X<β }=0,97, n=100 etarli katta bo‘lganligidan X-tasodifiy

miqdorni N(4,5; 0,05) parametrli normal taqsimlangan miqdor deb qarashimiz mumkin. Normal taqsimlangan X ~ N(a;*б*) tasodifiy miqdorni (α;β) oraliqda yotuvchi qiymat qabul qilish ehtimoli formulasidan foydalanamiz:

$$P\{\alpha < x < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{б}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{б}\right) \quad , \quad P\{-\infty < x \le \beta\} \approx \Phi\left(\frac{\beta - 4{,}5}{0{,}05}\right) - \Phi(-\infty) = 0{,}97 ,$$

$$\Phi\left(\frac{\beta - 4{,}5}{0{,}05}\right) + \Phi(\infty) = 0{,}97$$

Bu yerda $\Phi(x)$ - Laplas funksiyasi $\Phi(\infty) = 0{,}5$ $\Phi\left(\frac{\beta - 4{,}5}{0{,}05}\right) = 0{,}47$.

$\Phi(x)$ -normal taqsimot funksiya jadvalidan(Ilova-1) $\Phi(1{,}88) = 0{,}47$ bo‘lganligidan

$$\frac{\beta - 4{,}5}{0{,}05} = 1{,}88 \ , \quad \beta = 4{,}5 + 0{,}05 \cdot 1{,}88 = 4{,}594\text{t} = 4594\text{kg}.$$

Demak, 100 ga maydoni kamida 97% ga, ya’ni kamida 97 ga yerga etadigan chigit miqdori 4594 kg ekan.

Turli qishloq xo’jalik ekinlarini ekish normasi $M(X_i) = a$ va o’rtacha kvadra-tik chetlanishi $б = \sqrt{D(x_i)}$ berilgan holda, n ga maydonga 97% li kafolat bilan ketadigan urug’ miqdori β ni quyidagi formuladan foydalanib aniqlash mumkin:

$$\frac{\beta - MS_n}{\sqrt{DS_n}} = 1{,}88 \ , \quad \beta = MS_n + 1{,}88\sqrt{DS_n} = na + 1{,}88\sqrt{n}б$$

Misol-2. Ekilgan paxtani terish oldidan tekshirilganda har bir to‘pida o‘rtacha 6 ta ochilgan chanoq borligi va uni o‘rtacha kvadratik chetlanishi bir ekanligi aniqlandi. Har bir to‘p guzadagi ochilgan chanoqlar soni normal taqsimlangan. X~N(10;1) tasodifiy miqdor deb quyidagilar baholansin:

1) Paxtazordan ixtiyoriy olingan go‘zada ochilgan chanoqlar soni $P\{8 < x < 12\}$ oraligida bo‘lish ehtimoli hisoblansin.

Yechish: Normal taqsimlangan X~N(a,*б*) tasodifiy miqdorni (α, β) oraliqda yotuvchi qiymat qabul qilish ehtimolini hisoblash formulasiga asosan, talab qilingan ehtimollik a=10, *б*=1, α=8, β= 12

$$P\{8 < x < 12\} \approx \Phi\left(\frac{12 - 10}{1}\right) - \Phi\left(\frac{8 - 10}{1}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) + \Phi(2) = 2\Phi(2)$$

Laplas funksiyasi qiymatlar jadvalidan $\Phi(2) = 0{,}4772$,

$P\{8 < x < 12\}$ =2 $\times$0,4772=0,9544$\approx$0,95,

Demak, paxtazordagi go‘zalarni kamida 95% da ochilgan chanoqlar soni (8;12) oraligida bo‘ladi.

Xulosa qilib shuni aytish mumkinki, ehtimollar nazariyasini markaziy limit teoremasini barcha qishloq xo‘jalik masalalariga qo‘llab, amaliy, iqtisodiy xulosalar chiqarish, hosildorliklarini etarli kafolat bilan avvaldan bashorat qilish mumkin.

O’z-o’zini tekshirish uchun savollar

1. Katta sonlar qonunining mohiyati nimalardan iborat ?
2. Chebishev tengsizligini yozing.
3. Chebishev teoremasini aytib uni amaliyotda, ehtimollar nariyasidagi asosiy mohiyatini tushuntiring?
4. Ehtimollar naariyasining markaziy limit teoremaning mazmuni nimadan iborat ? Uning eng sodda shaklini aytib bering.
5. Ehtimollar nariyasining markaziy limit teoremasini qishloq xo’jalik masalalarini yechishga qo’llanilishiga misollar keltiring?

Kalit so’zlar

Katta sonlar qonuni, Chebishev tengsizligi, Chebishev teoremasi, mohiyati, markaziy, limit, teorema.

Xulosa

Katta sonlar qonuni, Chebishev tengsizligi, Chebishev teoremasi va uni mohiyatini, ehtimollar nariyasining markaziy limit teoremasi, ehtimollar nariyasining markaziy limit teoremasini qishloq- xo’jalik masalalarini yechishga qo’llanilishi o’rganilgan.

XXVII bob. MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI

Biz mazkur kitobning XXIV - XXVI boblarida tasodifiy hodisa, tasodifiy hodisaning ehtimoli, tasodifiy miqdorlar va ularning sonli xarakteristikalari, tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni, taqsimot funksiyasi hamda ehtimol zichligi (differensial funksiyasi) kabi tushunchalar bilan tanishdik. Bu tushunchalar, asosida amaliyotda uchraydigan hayotiy masalalarni yechishni o‘rgandik. Ehtimollar nazariyasining muhim tushunchalaridan biri tasodifiy miqdor va uning taqsimot funksiyasi tushunchalaridir. Bizga ma'lumki, tasodifiy miqdorlar o‘zlarining taqsimot funksiyasi bilan to‘la aniqlanadi. Tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini bilgan holda, biz u miqdor bilan bog‘langan jarayonni to‘la o‘rganish imkoniyatiga ega bo‘lamiz. Ammo amaliyotda bizni qiziqtirayotgan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi noma'lum yoki taqsimot funksiyaning ko‘rinishi ma'lum, uning parametrlari noma'lum bo‘ladi. Bunday hollarda tasodi fiy miqdorning taqsimot funksiyasini yoki uning ayrim sonli xarakteristikalarini (taqriban) baholash zaruriyati tug‘iladi. Bu kabi masalalarni

oliy matematikaning bo‘limlaridan biri – matematik statistika fani tajriba (kuzatish) yordamida tahlil qilish yo‘li bilan o‘rganadi([2] − [4]).

Umumiy qilib aytganda, matematik statistikada statistik ma'lumotlar va bu ma'lumotlarni tahlil qilish bilan ilmiy va amaliy xulosalar chiqarishning matematik usullari o‘rganiladi. Shunday qilib, matematik statistika quyidagi ikki asosiy vazifani hal qiladi:

1. Barcha statistik ma'lumotlarni to‘plash, lozim bo‘lsa, guruhlash.

2. To‘plangan ma'lumotlarni maqsadga muvofiq ravishda ehtimollar nazariyasi qonuniyatlari asosida tahlil qilish.

1-§. Tanlanma usul

Aytaylik, biror korxona katta sonda mahsulot ishlab chiqargan bo‘lib, bu mahsulotni sifat yoki son belgilari bo‘yicha tekshirilishi talab etilsin. Ishlab chiqarilgan mahsulotning soni juda ko‘p, binobarin, ularning har birini aytilgan belgi bo‘yicha tekshirish qiyin bo‘ladi. Bunday holda quyidagicha ish tutiladi: barcha mahsulotlardan tavakkal qilib ma'lum sondagisi olinadi, ularni tekshirib, korxonaning barcha mahsulotlari to‘g‘risida xulosa chiqariladi. Tekshirishning bunday usuli *tanlanma usul* deyiladi. Quyida bu usulni batafsilroq o‘rganamiz.

O‘rganilishi lozim bo‘lgan barcha ob'ektlar to‘plami *bosh to‘plam* deb ataladi.

Bosh to‘plamdan tasodifiy ravishda tanlab olingan ob'ektlar to‘plami *tanlanma to‘plam* yoki, qisqacha, *tanlanma* deb ataladi. Bunday to‘plamdagi ob'ektlar soni shu to‘plamning h*ajmi* deb ataladi. Bosh to‘plamning hajmi N, tanlanma to‘plamning hajmi p bilan belgilanadi.

Masalan, korxonada ishlab chiqarilgan 10000 mahsulotdan 100 tasi tekshirish uchun olingan bo‘lsa, u holda bosh to‘plamning hajmi $N=10000$, tanlanma to‘plamning hajmi esa $n=100$ bo‘ladi.

Bosh to‘plamdan tekshirish uchun tavakkaliga bitta element, keyin ikkinchi element ajratib olinadi va shu jarayonni davom ettirib, so‘ng ajratib olingan elementlardan tanlanma tuziladi.

Agar tanlanma elementlarini bosh to‘plamga qaytarmasdan, uning elementlari bosh to‘plamdan ajratilsa, bunday tanlanma *takrormas tanlanma* deb ataladi.

Agar tanlanmaning elementlari (bosh to‘plamdan tanlangan elementni yana) bosh to‘plamga qaytarish yo‘li bilan ajratilsa, bunday tanlanma *takror tanlanma* deb ataladi.

Modomiki, masala bosh to‘plam elementlarining son yoki sifat belgisi to‘g‘risida kerakli ma'lumotlarni bilishdan iborat ekan, undan o‘rganish uchun ajratilgan tanlanma (uning elementlari) vakolatli bo‘lishi lozim. Ya'ni tanlanma to‘plam bosh to‘plamdan shunday ajratilishi lozimki, natijada ajratilgan tanlanma to‘plam bosh

to‘plamni to‘la xarakterlaydigan, boshqacha aytganda bosh to‘plamning muhim xususiyatlarini o‘zida saqlagan bo‘lishi kerak. Buni odatda tanlanmaning *reprezentativligi* deyiladi.

2-§. Tanlanmaning statistik taqsimoti

Aytaylik, bosh to‘plam sifatida korxonada tayyorlangan bir xil silindrik detallar olingan bo‘lsin. Bu detallar diametrlarining uzunligini hisoblash talab etilsin. Ravshanki, turli inobatga olib bo‘lmaydigan holatlar ta'sirida detallar diametrlarining uzunliklarini o‘lchash natijalari turlicha bo‘ladi. Bu detallar diametrining uzunligini ξ tasodifiy miqdor deb qarash mumkin. Bunda har bir detalning diametri aniq son bo‘lib, u ξ tasodifiy miqdorning aniq qiymati bo‘ladi.

Korxonada tayyorlangan barcha detallar to‘plamini bosh to‘plam deylik. Uning hajmi N bo‘lsin. Bosh to‘plamdan hajmi n bo‘lgan tanlanma to‘plamni ajratamiz. Natijada tanlanma to‘plam elementlari silindrik detallarning diametrlarini ifodalovchi $x_1, x_2, ..., x_n$ sonlar hosil bo‘ladi. Masala, shu sonlar yordamida yuqorida aytilgan ξ tasodifiy miqdorni (taxminan bo‘lsa ham) tavsiflashdan, ya'ni tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni, taqsimot funksiyasini boshqa sonli xarakteristikalarini baholash va ular yordamida muhim amaliy xulosalar chiqarishdan iborat bo‘ladi.

Umumiy holda ham ish shunga o‘xshash bo‘ladi.

Faraz qilaylik, bosh to‘plamni o‘rganish uchun hajmi n ga teng tanlanma to‘plam olingan bo‘lsin. Bunda x_1 qiymat n_1 marta, x_2 qiymat n_2 marta, va hakazo, x_k qiymat n_k marta kuzatilgan bo‘lsin. Ravshanki, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Odatda kuzatilgan x_i qiymatlar variantalar, kuzatishlar soni n_i lar esa chastota-lar deyiladi. Variantalarning o‘sib borish tartibida yozilgan ketma-ketlik variatsion qator deyiladi. Variatsion qator va ularning mos chastotalarini ushbu jadval orqali yozish qulay bo‘ladi:

ξ	x_1	x_2	…	x_k
n	n_1	n_2	…	n_k

Masalan, ma'lum bir paxta maydonidan tasodifiy ravishda 100 tup g‘o‘za olinib, shu olingan g‘o‘zalarning har bir tupida ochilgan chanoqlar sonini hisoblaylik. Bunda barcha g‘o‘za tuplari soni $n=100$ tanlanma hajm bo‘lib, varianta x_k ochilgan chanoqlar sonini, n_k g‘o‘zalar sonini bildiradi.

Ushbu $\frac{n_1}{n}$ $(i = 1,2, \ldots, k)$ miqdor nisbiy chastotalar deb ataladi(statistik ehtimollik) va W_i kabi belgilanadi:

$$W_i = \frac{n_i}{n} \ (i = 1, 2, ..., k).$$

Natijada $x_1, x_2, \ldots, x_k$ variantalarga mos $W_1, W_2, \ldots, W_k$ nisbiy chastotalarga ega bo‘lamiz.

Variantalar va ulrga mos nisbiy chastotalardan tuzilgan jadval statistik yoki empirik taqsimot (jadval) deyiladi.

x_i	x_1	x_2	…	x_k
W_i	W_1	W_2	…	W_k

Bunda nisbiy chastotalar yig‘indisi birga teng bo‘ladi:

$$W_1 + W_2 + \ldots + W_k = 1.$$

Haqiqatan ham, nisbiy chastotaning ta'rifidan foydalanib topamiz:

$$W_1 + W_2 + \ldots + W_k = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \ldots + \frac{n_k}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Misol. Tanlanma chastotalar taqsimoti ko‘rinishida berilgan.

x_i	5	7	12
n_i	2	5	3

Nisbiy chastotalar taqsimoti (statistik taqsimot) topilsin.

yechish. Tanlanmaning hajmi n=2+5+3=10. Har bir chastotani tanlanmaning hajmiga bo‘laib, nisbiy chastotalarni topamiz:

$$W_1 = \frac{2}{10} = 0{,}2;\ W_2 = \frac{5}{10} = 0{,}5;\ W_n = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

Demak, nisbiy chastotalar statistik taqsimoti quyidagicha bo‘ladi:

x_i	5	7	12
W_i	0,2	0,5	0,3

Biz yuqoridagi misolda tanlanmaa hajmi kichik bo‘lganda uning statistik taqsimotini tuzishni ko‘rib chiqdik. Agar o‘rganilayotgan belgi uzluksiz o‘zgaruvchi variantadan iborat bo‘lsa yoki diskret bo‘lib qabul qiladigan qiymatlari soni ko‘p bo‘lsa, bunday holda statistik taqsimotning intervali (guruhlarga ajratilgan) variatsion qatorini tuzish maqsadga muvofiq bo‘ladi. Bosh to‘plamning ob'ektiv statistik qonuniyatini ochishda tanlanma to‘plamni k ta intervalga (guruhga) bo‘lishni Sterdjes taklif qilgan ushbu formula bo‘yicha tahlil qilish mumkin(n – tanlanma hajmi)

$$k = 1 + 3{,}322 \ln n,$$

Agar buerda *k* ning qiymati kasr son bo‘lsa, u yaxlitlab olinadi. Foydalanishga qulay bo‘lishi uchun Sterdjes formulasidan tanlanma hajmiga bog‘liq ravishda intervallar sonining aniqlanuvchi jadvalni keltiramiz:

Tanlanma hajmi (*n*)	Olinadigan intervallar soni (*k*)
25-40	5-6
40-60	6-8
60-100	7-10
100-200	8-12
200-	10-15

Intervallar uzunligi (guruhlar kengligi) *h* ni topishda

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$$

formuladan foydalanish mumkin, bu yerda x_{max},x_{min} variatsion qatorning eng kata va eng kichik qiymatlaridir. U holda uzunliklari *h* bo‘lgan intervallar (guruhlar) ketma-ketligini quyidagi tartibda olish mumkin:

$\left[x_{\min} - \frac{h}{2}; x_{\min} + \frac{h}{2}\right]$ - birinchi interval, $\left[x_{\min} + \frac{h}{2}; x_{\min} + \frac{3h}{2}\right]$ - ikkinchi interval.

$\left[x_{\min} + \frac{3h}{2}; x_{\min} + \frac{5h}{2}\right]$ - uchinchi inerval va hakazo.

Albatta, intervallarni har bir varianta faqat bitta intervalga tegishli bo‘ladigan qilib olish lozim.

Misol. Paxta maydonidan tasodifiy ravishda olingan n=50 tup g‘o‘zaning har biridan terib olingan paxtaning og‘irligi (gramm hisobida) quyidagicha bo‘ldi:

38,0	51,5	48,3	33,2	40,2	49,2	34,6	32,0	27,5	30,0
41,3	43,2	42,0	30,3	48,0	43,0	36,6	39,6	38,2	56,0
47,4	53,8	45,6	33,2	38,2	39,0	35,0	40,5	45,0	44,4
30,0	35,7	43,5	42,1	42,0	37,7	42,8	50,3	44,6	46,3
59,0	46,0	37,8	45,0	36,1	44,3	51,7	44,5	48,5	36,4

Shu tanlanma to‘plamning statistik taqsimoti tuzilsin.

Yechish. Tanlanma hajmi *n* = 50. Sterdej formulasiga asosan intervallar (guruhlar) sonini topamiz:

$$k = 1 + 3{,}322 \lg 50 = 1 + 3{,}322 \lg 10 + 3{,}322 \lg 5 = 1 + 3{,}322 + 3{,}322 \cdot 0{,}699 = 6{,}64$$

Demak, intervallar (guruhlar) sonini ortig‘i bilan yaxlitlab $k=7$ deb olamiz. Tanlanma to‘plam qiymatlari jadvalidan x_{min}=27,5 va x_{max}=59 bo‘lganligidan intervallar (guruhlar) uzunligi quyidagicha bo‘ladi:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{59 - 27{,}5}{6{,}64} = 4{,}74.$$

Bu misolda uzunligi h=4,47 bo‘lgan intervallar quyidagicha bo‘ladi:

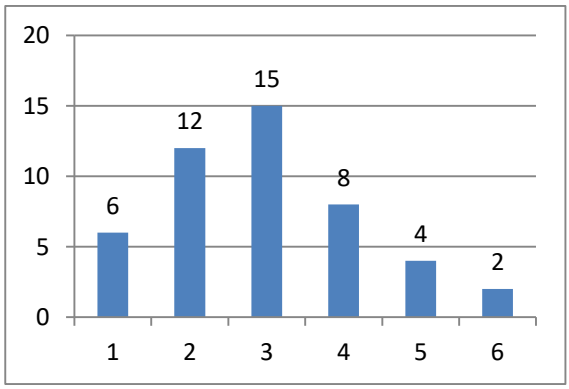
[26,50-31,24], [31,24-35,98], [35,98-40,72], [40,72-45,46], [45,46-50,20], [50,20-54,94], [54,94-59,68].

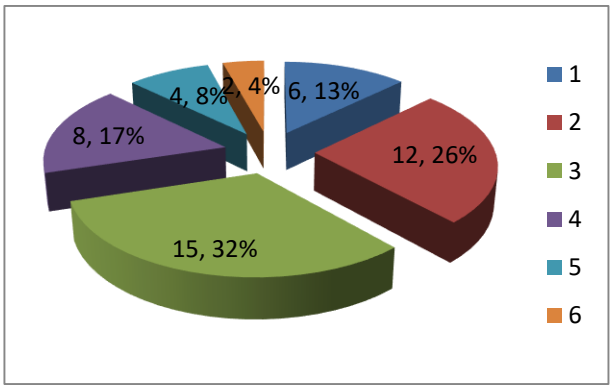
Endi xar bir intervalga tushuvchi variantalar (sonini) chastotalarini topamiz. Masalan, [26,50-31,24] birinchi intervalga 3 ta varianta tegishli, ular 27,5; 30,0; 30,3 bo‘lib, intervalning o‘rtacha qiymati 28,27 ga teng, nisbiy chastotasi W_t=0,06. Xuddi shunday, ikkinchi interval [31,24-35,98] ga tegishli variantalar soni (chastotasi) 6 ta, ya'ni ular 34,6; 33,2; 32,0; 33,2; 35,0; 35,7. Intervalning o‘rtacha qiymati 33,6 bo‘lib, intervalga tushuvchi variantalar nisbiy chastotasi W_2=0,12 va hokazo.

Yuqoridagi hisoblashlarga asosan tanlanma to‘plamning tuzilgan variatsion qatori quyidagicha bo‘ladi:

Varianta intervallari (g)	Intervalga tegishli variantalar soni (chastotasi), n_i	Interval o‘rtasi	Nisbiy chastota (W_1)
26,50-31,24	3	28,87	0,06
31,24-35,98	6	33,61	0,12
35,98-40,72	12	38,35	0.24
40,72-45,46	15	43,09	0,30
45,46-50,20	8	47,83	0,16
50,20-54,94	4	52,57	0,08
54,94-59,68	2	57,31	0,04

Shunday qilib, bu jadval berilgan 50 ta ma'lumotning statistik taqsimoti bo‘ladi.





3-§. Empirik taqsimot funksiyasi

Bosh to‘plamni o‘rganish maqsadida undan hajmi *p* ga teng tanlanma ajratilgan bo‘lib, uning chastotalar taqsimoti quyidagicha bo‘lsin:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

(27.1)

Ixtiyoriy *x* haqiqiy sonni olaylik. Ravshanki, (26.1)dagi har bir x_i *(i* = 1, 2, ..., *k)* varianta *yo x* dan katta bo‘ladi, yo *x* dan kichik bo‘ladi, yoki shu *x* ga teng bo‘ladi. Olingan *x* dan kichik bo‘lgan, ya'ni $x_i < x$ tengsizlikni qanoatlantiradigan variantalar sonini *n(x) bilan* belgilaylik. Masalan, tanlanma natijasi quyidagicha bo‘lsin: -2, 1, +3, 5, 7, 8. Agar *x*=3,5 olingan bo‘lsa, unda shu *x* dan kichik bo‘lgan variantalar 3 ta (-2, 1, +3) bo‘ladi. Demak, bu holda *n*(3,5)=3.

Agar *x=0* olingan bo‘lsa, unda *n*(0)=1,

agar *x*=10 olingan bo‘lsa, unda *n*(10)=6,

agar *x*=- 3 olingan bo‘lsa, unda *n* (- 3)=0 bo‘ladi.

Shunday qilib, yuqorida aytilgan yo‘l bilan *n(x)* funksiyani hosil qilinadi.

Ushbu $\frac{n(x)}{n}$ funksiya *tanlanmaning taqsimot funksiyasi* yoki *empirik taqsimot funksiyasi* deb ataladi va $F_n(x)$ kabi belgilanadi:

$$F_n(x) = \frac{n(x)}{n}.$$

Demak, tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasi {ζ<x} hodisasining chastotasidan iborat.

Misol. Tanlanmaning ushbu taqsimoti bo‘yicha, uning empirik taqsimot funksiyasi topilsin:

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

Yechish. Tanlanmaning hajmi n=1+3+2+4=10 bo‘ladi. Eng kichik varianta 2 ga teng. Shuning uchun *x*<2 bo‘lganda *F(x)*=0 bo‘ladi. *x<5* qiymat, ya'ni x_1=2 qiymat *p*(5)=1 marta ku-zatilgan, demak, 2<x≤5 bo‘lganda $F_n(x)$ = 0,1.

x<7 qiymatlar, chunonchi x_1= 2, x_2=5 qiymatlar n(7)=1+3=4 marta kuzatilgan, demak, 5<x<7 bo‘lganda $F_n(x)$=0,4 bo‘ladi.

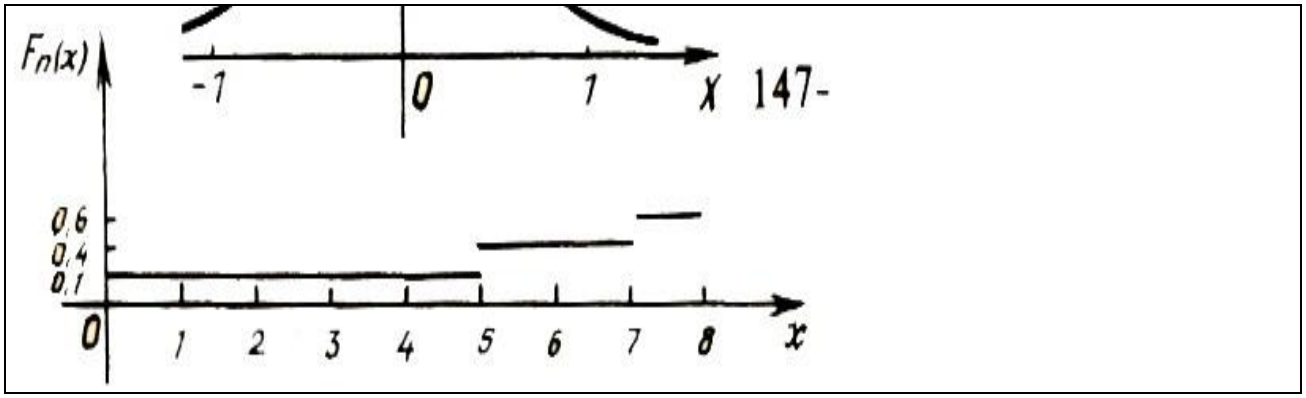
x<8 qiymatlar, chunonchi x_1 = 2, x_2 = 5, x_3=*7* qiymatlar *p*(8)=1+3+2=6 marta kuzatilgan, demak, 7<*x<8* bo‘lganda $F_n(x) = \frac{6}{10} = 0.6$ bo‘ladi.

x_4=8 eng katta varianta bo‘lganligi sababli *x*>8 bo‘lganda $F_n(x)$=1 bo‘ladi.

Demak, izlanayotgan empirik taqsimot funksiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$F_n(x)=\begin{cases}0, \text{ агар } x\le 2,\\ 0{,}1, \text{ агар } 2<x\le 5,\\ 0{,}4, \text{ агар } 5<x\le 7,\\ 0{,}6, \text{ агар } 7<x\le 8,\\ 1, \text{ агар } x>8\end{cases}$$

Uning grafigi 148-chizmada tasvirlangan.



148-chizma.

ζ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi *F(x)* ushbu {ζ<x} hodisaning ehtimoli P{ζ<x} bilan ta'riflanar edi. Empirik taqsimot funksiya $F_n(x)$ esa *p* ta bog‘liq bo‘lmagan tajribada shu hodisaning nisbiy chastotasini ifodalaydi.

Hodisaning nisbiy chastotasi shu hodisaning ehtimoliga taqriban tengligini e'tiborga olsak, unda empirik taqsimot funksiya *F (x)* ni taqriban ifodalashini ko‘ramiz.

4- §. Poligon va gistogramma

Statistik taqsimotning grafigini bilish uning xarakterini yaqqolroq tasavvur etishda qo‘l keladi. Biz quyida taqsimog grafigini yasash usullaridan poligon va gistogrammani yasashni keltiramiz.

Hajmi n bo‘lgan tanlanma statistik taqsimot bilan berilgan bo‘lsin:

x	x_1	x_2	…	x_k
n	n_1	n_2	…	n_k
W	W_1	W_2	…	W_k

bu yerda x_i-variantalar, n_t-moc chastotalar; W_t-moc nisbiy chastotalar, $i=\overline{1,k}$

(x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_k, n_k) nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziq tekislikda *chastotalar poligona* deb ataladi.

(x_1, W_1), (x_2, W_2), ..., (x_k, W_k) nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziq *nisbiy chastotalar poligona* deb ataladi.

Bu chiziqlarning grafiklarini yasash uchun variantlar qiymatlari abssissalar o‘qiga, chastotalar qiymatlari ordinatalar o‘qiga qo‘yiladi.

Statistik taqsimotning gistogrammasini yasash uchun avval barcha kuzatilgan qiymatlarni uzunligi *h* bo‘lgan ketma-ket qismiy intervallarga (guruhlarga) bo‘linadi va har bir intervalga tushgan variantalarning chastotalari topiladi.

Asoslari *h* uzunlikdagi intervallar, balandliklari $\frac{n_i}{h}$ nisbatga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onaviy figura *chastotalar gistogrammasi* deb ataladi. Bu yerda $\frac{n_i}{h}$ nisbat *chastota zichligi* deyiladi.

Asoslari *h* uzunlikdagi intervallar, balandliklari $\frac{W_i}{h}$ nisbatga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onaviy figura *nisbiy chastotalar gistogrammasi* deb aytiladi.

Chastotalar gistogrammasining yuzi tanlanma hajmi *p* ga, nisbiy chastotalar gistogrammasining yuzi esa birga teng bo‘ladi.

1-misol. Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo‘yicha chastotalar poligonini yasang:

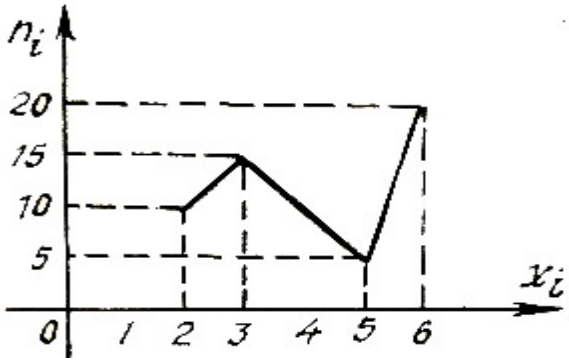
1)

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

2)

x_i	12	17	22	16	30	34	38
n_i	2	5	9	12	8	8	4

Yechish. 1) abssissalar o‘qida 2, 3, 5, 6 sonlarini, ordinatalar o‘qida esa ularga mos 10, 15, 5, 20 sonlarini belgilaymiz, ya'ni koordinatalari (2;10), (3;15), (5;5), (6;20) bo‘lgan nuqtalarni yasab, ularni siniq chiziqlar bilan tutashtiramiz (149-chizmaga karang).



149-chizma.

2) Yuqoridagi misol kabi yechiladi.

2-misol. Juhori donidan 100 dona olindi va ularning har birini tortib ko‘rib, quyidagi statistik taqsimot olindi (gramm hisobida):

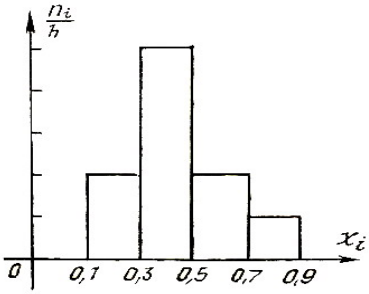
Juxori og‘irliklari	0,1-0,3	0,3-0,5	0,5-0,7	0,7-0,9
Juxorilar soni	18	52	18	12

Shu taqsimotning gistogrammasini tuzing.

Yechish. Intervallar uzunligi h=0,2 ga teng bo‘lgani uchun to‘g‘ri to‘rtburchak balandliklarining nisbati mos ravishda quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{n_1}{h}=\frac{18}{0,2}=90;\ \frac{n_2}{h}=260;\ \frac{n_3}{h}=60.$$

Intervallarni abssissalar o‘qida, balandliklarini ordinatalar o‘qida qo‘yib pog‘onaviy to‘g‘ri to‘rtburchaklar hosil qilamiz (150-chizmaga qarang).



150-chizma.

3-misol. Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo‘yicha nisbiy chastotalar gistogrammasini yasang. Bu yerda p = 20.

Intervallar	Chastotalar yig‘indisi
10—15	2

15—20	4
20—25	8
25—30	4
30—35	2

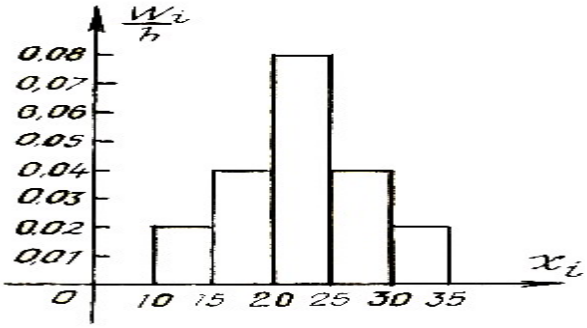
yechish. Nisbiy chastotalarni topamiz:

$$W_1 = \frac{2}{20} = 0{,}1;\ W_2 = 0{,}2;\ W_3 = 0{,}4;\ W_5 = 0{,}1.$$

Nisbiy chastotalar zichligini topamiz:

$$\frac{W_1}{h} = \frac{0{,}1}{5} = 0{,}02;\ \frac{W_2}{h} = 0{,}04;\ \frac{W_3}{h} = 0{,}08;\ \frac{W_4}{h} = 0{,}04,\ \frac{W_5}{h} = 0{,}02.$$

Abssissalar o‘qida berilgan qismiy intervallarni belgilaymiz. Nisbiy chastotalar zichliklarini ordinatalar o‘qida belgilaymiz va har bir interval ustida kesmalar o‘tkazamiz, masalan, (10, 15) interval ustida abssissalar o‘qiga parallel va undan 0,02 masofada yotadigan kesma o‘tkazamiz va hakazo (151-chizmaga qarang).



151-chizma.

O’z-o’zini tekshirish uchun savollar

1. Matematik statistika faninig asosiy vazifalari nimalardan iborat?
2. Bosh to’plam nima ?
3. Tanlanmaga to’plamga ta’rif bering.
4. Qanday tanlanma to’plam reprezentativ tanlanma to’plam bo’ladi?
5. Variotsion qatorga misol keltiring.
6. Statistik taqsimot.
7. Empirik taqsimot funksiyaga tarif bering.
8. Empirik taqsimot funksiyaning grafigi qanday chiziladi ?
9. Statistik taqsimotning polygon va gistogrammasi qanday yasaladi ?

Kalit so’zlar

Bosh to’plam, tanlanma to’plam, reprezentativ tanlanma, variatsion qator, empirik taqsimot funksiya, grafik, polygon, gistogramma.

Xulosa

Matematik statistika faninig asosiy vazifalari, bosh to’plam, tanlanma to’plama, reprezentativ tanlanma to’plam, variotsion qator, empirik taqsimot funksiya, grafigi, statistik taqsimotning polygon va gistogrammasi mavzulari o’rganilgan.

5- §. Taqsimot parametrlarining statistak baholari

Yuqorida aytib o‘tganimizdek, matematik statistikaning asosiy masalasi bosh to‘plamni o‘rganish, ya'ni uning belgisi taqsimot qonunini topishdir.

Aytaylik, biror yo‘l bilan bunday taqsimot qonuni topilgan bo‘lsin (masalan, u binomial qonuni yoki Puasson qonuni yoki normal qonun bo‘lsin). U holda uning noma'lum parametrlarining statistik baholarini ko‘rish masalasi yuzaga keladi. (Masalan, normal qonun bo‘lganda a va δ ni, Puasson qonuni bo‘lganda λ ni aniqlash). Va aksincha, parametrlar ma'lum bo‘lsa uning taqdimot qonunini aniqlash lozim. Umumiy holda bu ikkala vazifa ham noma'lum bo‘lishi mumkin.

Umuman taqsimot qonunining noma'lum parametrlarini yoki empirik taqsimot qonunini kuzatishlar natijasidan, ya'ni bosh to‘plamdan ajratilgan tanlanmadan foydalanib topish lozim bo‘ladi. Noma'lum parametrlarni aniqlashda turli xatoliklarga (statistik xatolarga) duch kelamiz. Avvalo shuni aytish kerakki, bosh to‘plamdan olingan turli tanlanmalar bo‘yicha topilgan parametrlarning qiymatlari umuman aytganda, turlicha bo‘ladi.

Odatda bosh to‘plamdan tanlanma to‘plam elementlarini tasodifiy tanlash usuli bilan ajratma hosil bo‘lgan tanlanma to‘plamda reprezentativlik yaxshi saqlanadi.

Ma'lumki, tanlanma to‘plam bosh to‘plamning biror qismi. Binobarin, tanlanma to‘plam to‘g‘risidagi fikrlar bosh to‘plamni to‘liq xarakterlamasa, bu hol statistik xatoga olib keladi.

Ravshanki, tanlanma to‘plamdagi kuzatishlar soni ham bosh to‘plamni xarakterlashga bog‘liq. Tanlanma to‘plamning tashkil etgan elementlar soni qancha ko‘p bo‘lsa, statistik xato shuncha kam bo‘ladi.

Demak, tanlanmadan foydalanib taqsimot qonunining parametrlarini shunday aniqlash lozimki, bunda statistik xatolar imkon boricha kam bo‘lsin.

Biror taqsimot qonunining parametri θ ni tajriba asosida topilgan $x_1, x_2, ..., x_n$ sonlar, ya'ni tanlanma ma'lumotlar yordamida hosil qilingan $\bar{\theta}$ bilan baholansin. Odatda $\bar{\theta}$, θ uchun *baho* deyiladi.

Ravshanki, bunda $\bar{\theta}$ baho $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanmaga bog‘liq bo‘ladi:

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Modomiki, x_1, x_2, ..., x_p lar tasodifiy miqdor ekan, unda $\bar{\theta}$ tasodifiy miqdor bo‘ladi.

Agar $\bar{\theta}$ bahoning matematik kutilishi θ ga teng, ya'ni $M\bar{\theta} = \theta$ bo‘lsa, $\bar{\theta}$ ni *siljimaydigan baho* deyiladi.

Agar $\forall\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\bar{\theta} - \theta\right| > a\right\} = 0$$

bo‘lsa, u holdat $\bar{\theta}$ baho θ ning *asosli bahosi* deyiladi.

Faraz qlaylik, θ parametr uchun $\overline{\theta_1}$ va $\overline{\theta_2}$ baholar bo‘lsin.

Agar $M(\overline{\theta_1} - \theta)^2 \leq M(\overline{\theta_2} - \theta)^2$ bo‘lsa, $\overline{\theta_1}$ *baho* $\overline{\theta_2}$ bohoga qaraganda effektivroq baho deyiladi.

Statistik taqsimot qonunlarining parametrlarini baholashda, ularning siljimaydigan, asosli hamda effektiv baho bo‘lishi kabi xususiyatlarga egaligi talab qilinadi.

6-§. Tanlanma o‘rtacha qiymat va tanlanma dispersiya

Faraz qilaylik, ζ tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor bo‘lsin. Uning noma'lum parametrlari — matematik kutilishi $M\zeta$, dispersiyasi esa $D\zeta$ bo‘lsin.

Berilgan ζ tasodifiy miqdorni kuzatish natijasida

$$x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_n \qquad (27.2)$$

qiymatlarga ega bo‘laylik. Ravshanki, bu kuzatilgan qiymatlarning o‘zlari ham tasodifiy miqdor bo‘lib, u ζ tasodifiy miqdor qanday qiymatlarni qabul qilsa, shu qiymatlardan birini qabul qiladi. Demak,

$$Mx_k = M\xi,\ Dx_k = D\xi \quad (k = 1, 2, ..., n)$$

bo‘ladi. Endi (27.2) kuzatishlar natijasidan foydalanib, ushbu

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

qiymatlarni hosil qilamiz. Uni ζ tasodifiy miqdorning matematik kutilishi (o‘rta qiymati) $M\zeta$ ning taqribiy ifodasi sifatida qabul qilamiz:

$$M\xi \approx \bar{x}. \qquad (27.3)$$

$\bar{x}$ ni (27.3) tanlanma bo‘yicha o‘*rtacha qiymati* yoki *empirik o‘rtacha qiymati* deyiladi. Quyidagi

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \bar{x}\right)^2$$

miqdorni tasodifiy miqdorning disperiyasi Dζ ning statistik siljimagan statistik bahosi sifatida qabul qilamiz:

$$D\xi = s^2. \qquad (27.4)$$

Odatda s^2 ni (27.4) tanlanma bo‘yicha *dispersiya* yoki *empirik dispersiya* deyiladi.

Bu $M\zeta \approx \bar{x},\ D\zeta \approx s^2$ munosabatlardagi $\bar{x}$ va s^2lar ζ tasodifiy miqdorning parametrlari $M\zeta$ va $D\zeta$ lar uchun *nuqtaviy baholar* deyiladi.

Tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasi uchun keltirilgan baholar siljimaydigan, asosli hamda effektiv baholar bo‘ladi. Shularni ko‘rsatamiz.

1. (27.3), (27.4) baholarning siljimaydigan baholar ekanligini isbotlash uchun

$$M\bar{x} = M\xi \qquad (27.5)$$

$$Ms^2 = D\xi \qquad (27.6)$$

bo‘lishini ko‘rsatish kerak bo‘ladi. Hakiqatdan ham,

$$M\bar{x} = M\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\left(Mx_1 + Mx_2 + ... + Mx_n\right) = \frac{1}{n}M\xi \cdot n = M\xi$$

bo‘lib, bu (27.5) munosabatning to‘g‘riligini isbotlaydi. Endi (27.6) tenglikni isbotlaymiz:

$$Ms^2 = M\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}M(x_k - \bar{x})^2$$

Dispersiyani hisoblash formulasi $D\eta = M\eta^2 - (M\eta)^2$ dan topamiz:

$$M\eta^2 = D\eta + (M\eta)^2.$$

Shunga ko‘ra

$$M\left(x_k - \bar{x}\right)^2 = D\left(x_k - \bar{x}\right) + \left[M\left(x_k - \bar{x}\right)\right]^2$$

bo‘ladi. Natijada ushbu

$$Ms^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left\{D\left(x_k - \bar{x}\right) + \left[M\left(x_k - \bar{x}\right)\right]^2\right\} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}D\left(x_k - \bar{x}\right) + \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left[M\left(x_k - \bar{x}\right)\right]^2$$

tenglikka kelamiz. Endi

$$D\left(x_k - \bar{x}\right) = D\left[x_k - \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right)\right] = D\left[x_k - \frac{1}{n}x_k - \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + ... + x_{k-1} + x_{k+1} + ... + x_n\right)\right] =$$

$$= D\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)x_k - \frac{1}{n}\sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} x_i\right] = \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 Dx_k + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} Dx_i$$

bo‘lishini e'tiborga olib, topamiz

$$Ms^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)Dx_k + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1,\, i\approx k}^{n} Dx_i\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 D\xi + \frac{n-1}{n^2}D\xi\right] =$$

$$= D\xi\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \frac{n-1}{n^2}\right] = D\xi\cdot n\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n^2}(n-1+1) = D\xi.$$

Demak, $Ms^2=D\zeta$. Bu esa (27.6) tenglikning to‘g‘riligini isbotlaydi. Shunday qilib, s^2 ning $D\zeta$ uchun siljimaydigan baho ekani ko‘rsatildi.

2. Yuqorida keltirilgan

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(x_k - \bar{x}\right)^2$$

baholar mos ravishda $M\zeta$ va $D\zeta$ uchun asosli baholar bo‘ladi.

Buning uchun $\forall a > 0$ da ushbu limit munosabatlarning o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatish kerak.

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|M\xi - \bar{x}\right| > a\right\} = 0,\ \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|D\xi - s^2\right| > a\right\} = 0$$

Ulardan birining isbotini keltiramiz.

Agar $M\bar{x} = M\zeta$ bo‘lishinn e'tiborga olsak, unda

$$P\left\{\left|M\xi - \bar{x}\right| > a\right\} = P\left\{\left|\bar{x} - M\bar{x}\right| > a\right\}$$

ekanini topamiz. Mazkur kursning 26-bobida keltirilgan Chebishev tengsizligidan foydalanib, quyidagi $P\{|\bar{x} - M\bar{x}| > a\} < \frac{D\bar{x}}{a^2}$ tengsizlikka ega bo‘lamiz. Demak,

$$P\left\{\left|M\xi - \bar{x}\right| > a\right\} < \frac{D\bar{x}}{a^2}$$

Ravshanki,

$$D\bar{x} = D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} Dx_k = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D\xi = \frac{1}{n^2}D\xi\cdot n = \frac{D\xi}{n}.$$

Natijada

$$P\left\{\left|M\xi - \bar{x}\right| < a\right\} < \frac{D\xi}{a^2 n}$$

tengsizlikka kelamiz. Bunda esa $n\to\infty$ da $\frac{D\zeta}{n} \to 0$ bo‘lganligi sababli $\lim_{n\to\infty} P\{|M\zeta - \bar{x}| > a\} = 0$ bo‘lishi kelib chiqadi. Bu esa $\bar{x}$ baho $M\zeta$ uchun asosli baho ekanini bildiradi.

Tasodifiy miqdor ma'lum shartlarni qanoatlantirganda s^2 baho $D\zeta$ uchun asosli baho, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|D\xi - s^2\right| > a\right\} = 0$$

bo‘lishi ko‘rsatiladi.

7-§. Bahoning aniqligi, ishonchlilik ehtimoli, ishonchlilik intervali

Aytaylik, bosh to‘plamning k son belgisi ma'lum taqsimotga ega bo‘lsin. Bu taqsimotning noma'lum parametrlarini tanlanma hajmi kichik bo‘lganda nuqtaviy baholar yordamida baholash qo‘pol hatoliklarga olib kelishi mumkin.

Bunday holda intervalli bahodan foydalanish maqsadga muvofiq bo‘ladi. Ikkita son — intervalning oxirlari bilan aniqlangan baho *intervalli baho* deb ataladi.

θ - noma'lum parametr, $\bar{\theta}$ esa tanlanma ma'lumotlari bo‘yicha topilgan statistik xarakteristika, ya'ni θ ning bahosi bo‘lsin.

Ravshanki, $\left|\theta - \bar{\theta}\right|$ qancha kichik bo‘lsa, ya'ni $\left|\theta - \bar{\theta}\right| < \delta$ shartda δ qancha kichik bo‘lsa, $\bar{\theta}$ baho shuncha aniq bo‘ladi. Bunda δ son θ bahoning *aniqligi* deyiladi.

$\left|\theta - \bar{\theta}\right| < \delta$ tengsizlikning amalga oshish γ ehtimoli θ bahoniig $\bar{\theta}$ bo‘yicha *ishonchliligi (ishonchlilik ehtimoli)* deb aytiladi, ya'ni

$$P\left\{\left|\theta - \bar{\theta}\right| < \delta\right\} = \gamma$$

Noma'lum parametrni berilgan γ ishonchlilik bilan qoplaydigan $(\bar{\theta} - \delta, \bar{\theta} + \delta)$ interval *ishonchlilik intervali* deb aytiladi.

Misol tariqasida normal taqsimotning parametrlaridan biri - taqsimotning dispersiyasi δ ma'lum bo‘lgan holda noma'lum matematik kutilishi uchun ishonchli intervalni topamiz.

Faraz qilaylik, ζ tasodifiy miqdor normal taqsimlangan, uning dispersiyasi $D\zeta=\delta^2$ ma'lum bo‘lsin, $M\zeta=a$ noma'lum matematik kutilishi bo‘lsin. Qaralayotgan tasodifiy miqdorni kuzatish natijasida

$$x_1,\ \ x_2,\ \ldots,\ x_n \qquad (27.7)$$

ga ega bo‘laylik. Bu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lar ham tasodifiy miqdor bo‘lib, ular uchun ham

$$Mx_i = a,\ Dx_i = \delta^2,\ \ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

bo‘ladi.

Biz yuqorida (27.7) tanlanma bo‘yicha olingan $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ning matematik kutilishi $M\bar{x} = a$ dispersiyasi esa $D\bar{x} = \frac{\delta^2}{n}$ bo‘lishini ko‘rgan edik.

Ravshanki, bu $\bar{x}$ ham normal qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor bo‘lib, uning parametrlari

$$M\bar{x} = a, \qquad D\bar{x} = \frac{\delta^2}{n}$$

ga teng. Bu tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\delta}\sqrt{n}\right) \tag{27.8}$$

bo‘ladi.

Endi γ ga ko‘ra δ(δ>0) ni aniqlashda ushbu

$$P\left\{\left|\bar{x} - a\right| < \delta\right\} = \gamma \tag{27.9}$$

tenglikdan foydalanamiz. Agar

$$P\left\{\left|\bar{x} - a\right| < \delta\right\} = P\left\{-\delta < \bar{x} - a < \delta\right\} = P\left\{a - \delta < \bar{x} < a + \delta\right\} =$$

$$= P\left\{a - \delta < \bar{x} < a + \delta\right\} = F(a+\delta) - F(a-\delta) \tag{27.10}$$

bo‘lishini e'tiborga olsak, u holda

$$P\left\{\left|\bar{x} - a\right| < \delta\right\} = \gamma \Rightarrow F(a+\delta) - F(a-\delta) = \gamma$$

ga ega bo‘lamiz.

(27.10) munosabatdan foydalanib topamiz:

$$F(a+\delta) - F(a-\delta) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\delta\sqrt{\pi}}{\sigma}\right) - \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{-\delta\sqrt{\pi}}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{\pi}}{\sigma}\right).$$

Demak, $2F\left(\frac{\delta\sqrt{\pi}}{\sigma}\right) = \gamma$, ya'ni $F\left(\frac{\delta\sqrt{\pi}}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}\gamma$

F(x) funksiyaning xususiyati hamda γ uchun 0< γ <1 bo‘lishini e'tiborga olib, shunday *a* mavjudligini ko‘rsatish mumkinki, unda

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{2}\gamma$$

bo‘ladi. Odatda *a* kvantil deb ataladi. (*a* ni F(x) funksiya uchun tuzilgan jadvaldan topilada).

Shunday qilib, $a = \frac{\delta\sqrt{\pi}}{\sigma}$ bo‘lib, undan

$$\delta = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\alpha$$

ekanligi kelib chiqadi. Natijada $P\{a - \delta < \bar{x} < a - \delta\} = \gamma$ munosabat ushbu ko‘rinishni oladi:

$$P\left\{a - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\alpha < \bar{x} < a - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\alpha\right\} = \gamma.$$

Shunday qilib, normal taqsimotning noma'lum a parametri (matematik kutilishi) quyidagi ishonchlilik intervali bilan qoplanadi:

$$\left(\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\alpha,\ \bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\alpha\right).$$

Bunda bahoning aniqligi $\delta=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\alpha$ ga teng bo‘ladi.

Tanlanma aniqligini baholashda quyidagi uch hol bo‘lishi mumkin:

1) bahoning aniqligi δ beriladi, $P\{|\bar{x}-a|\leq\ \delta\}$ ehtimolni topish kerak bo‘ladi;

2) $P\{|\bar{x}-a|\leq\ \delta\}$ ehtimol beriladi, δ ni topish kerak bo‘ladi;

3) bahoning aniqligi δ *va* $P\{|\bar{x}-a|\leq\ \delta\}$ ehtimoli berilgan bo‘lib, tanlanma hajmi p ni topish kerak bo‘ladi.

Normal taqsimlangan ζ miqdoriy belgining σ o‘rtacha kvadratik chetlanishini, s *tuzatilgan tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanish*[1] bo‘yicha γ ishonchlilik bilan baholash uchun quyidagi ishonchlik intervallaridan foydalaniladi:

$$s(1-q)<\sigma<s(1+q)\ \ (q<1),$$

$$0<\sigma<s(1+q)\ \ (q>1)$$

bu yerda q ni ilovadagi 4-jadvalda berilgan p va γ bo‘yicha topiladi.

1-Misol. Normal taqsimlangan ζ belgining o‘rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma=2$, tanlanma o‘rtacha qiymati $\bar{x}$=5,4 va tanlanma hajmi n=10. Uning noma'lum a matematik kutilishi uchun γ=0.95 ishonchlilik bilan ishonchli intervalini tuzamiz.

yechish. Avval 2Φ*(t)*=0,95 tenglikdan Φ*(t)*=0,475 ni hosil qilamiz. Kitob oxiridagi 2-jadvaldan $t_{0,95}$=1,96 ni topamiz. Endi bahoning aniqligi δ ni $\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{10}}$ formuladan topamiz:

$$\delta=\frac{1{,}96\cdot 2}{\sqrt{10}}\approx 1{,}24,$$

Ishonchlilik intervali $\bar{x}-1.24<a<\bar{x}+1.24$ yoki 5,4-1,24< a <5,4+1,24, ya'ni 4,16< a <6,64 bo‘ladi.

Demak, 95 % ishonch bilan (4,16; 6,64) ishonchlilik intervali noma'lum a parametrni to‘la qoplaydi deb aytish mumkin. Bahoning aniqligi δ=1.24

2-Misol. Ekilgan kanopdan 100 tup tanlab olinib, poyalarining uzunliklarini hisoblab chiqilganda quyidagi ma'lumotlar olindi (sm):

Variantalar, x_i	45	55	65	75	85	95	105	115
Chastotalar, n_i	1	5	11	26	33	16	7	1

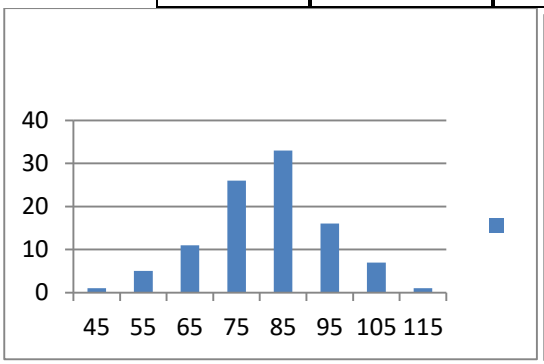
[*] O’rtacha kvadratik chetlanish deb, dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi: $\sigma=\sqrt{D\xi}$.

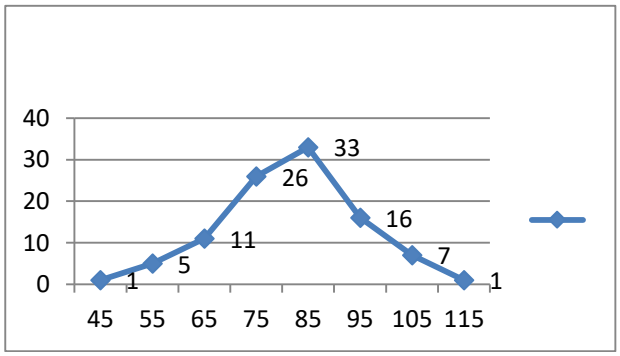
Bosh to‘plam o‘rtacha qiymati uchun ishonchlilik intervalini toping ($\gamma = 0.95$).

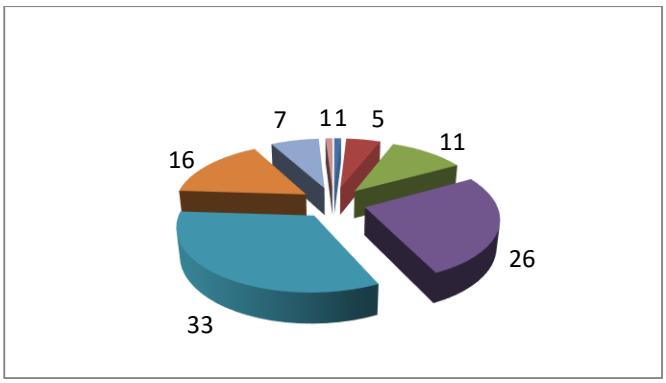
Yechish. Avval statistik xarakteristikani hisoblaymiz. Buning uchun hisoblash jadvalini quyidagicha tuzamiz:

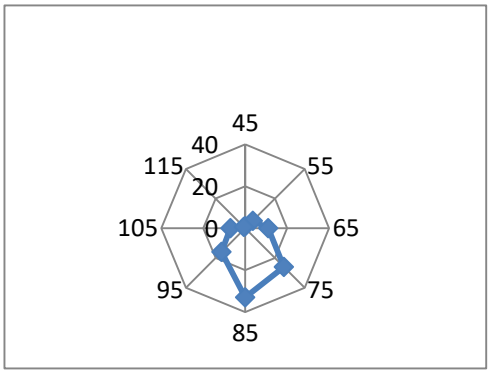
1) birinchi ustunda variantalarni;
2) ikkinchi ustunda chastotalarni;
3) uchinchi ustunda chastotalar bilan variantalar ko‘paytmasini;
4) to‘rtinchi ustunda variantalar kvadratlarini;
5) beshinchi ustunda variantalar kvadratlarining mos chastotalarga ko‘paytmasini joylashtiramiz;
6) jadval ostiga mos ustunlardagi raqamlar yig‘indisini yozamiz.

x_i	n_i	$x_i n_i$	x_i^2	$x_i^2 n_i$
45	1	45	2025	2025
55	5	275	3025	15125
65	11	315	4225	46475
75	26	1950	5625	146250
85	33	2805	7225	238425
95	16	1520	9025	144400
105	7	735	11025	77125
115	1	115	13225	13225
$\sum$	100	8160	-	683100









7) tanlanma o‘rtacha qiymatini

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i n_i$$

formula orqali hisoblaymiz. Jadvaldagi qiymatlarni o‘rniga qo‘yib hisoblaymiz:

$$\bar{x} = \frac{8160}{100} = 81{,}6 \qquad \bar{x} = 81{,}6.$$

8) dispersiyani

$$D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i\right)^2$$

formuladan foydalanib hisoblaymiz. Jadvaldagi qiymatlarni qo‘yamiz:

$$D = 6831 - (81{,}60)^2 = 180{,}44;$$

9) o‘rta kvadratik chetlanishni topamiz:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{180{,}44} \approx 13{,}4;$$

10) variatsiya koeffitsientini topamiz:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\,\% = \frac{13{,}4}{81{,}6} \cdot 100\,\% = 16{,}3\%;$$

11) tanlanma o‘rtacha qiymatining absolyut xatosi quyidagicha:

$$\theta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{13{,}4}{10} = 1{,}34;$$

12) bosh to‘plam o‘rtacha qiymatining ishonchlilik intervalini topamiz. Bunda

$\bar{x}$=81,6; γ=0,95; p=100; a=13,4.

Ishonchlilik intervalini

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (27.11)$$

tengsizlikdan topamiz.

t_γ ni 3-jadvalda berilgan p va bo‘yicha γ topamiz: (n =100, γ =0,95) $t_\gamma(100;\,0.95)$ =1,984.

Bu qiymatlarni (27.11) tengsizlikka quyamiz:

$$81{,}6-1{,}984\cdot\frac{13{,}4}{\sqrt{100}}<a<81{,}6-1{,}984\cdot\frac{13{,}4}{10};78{,}9<a<84{,}3$$

3-misol. Tanlanmaning shunday minimal hajmini topingki, normal taqsimlangan bosh to‘plam matematik kutilishining tanlanma o‘rtacha qiymati bo‘yicha bahosining aniqligi 0,925 ishonchlilik bilan 0,2 ga teng bo‘lsin. Bosh to‘plamning o‘rta kvadratik chetlanishi ma'lum: $\sigma = 1.5$

Yechish. Misol shartida quyidagilar berilgan:

$$\gamma = 0{,}925;\ \sigma = 1{,}5;\ \delta = 0{,}2;\ 2\Phi(x) = 0{,}925.$$

Bulardan foydalanib *F(x)* ni topimiz

$$\Phi(x) = \frac{0{,}925}{2} = 0{,}4625.$$

Ilovadagi 2-jadvalda F*(x)*=0,4625 ga *x* ning *x*=1,78 qiyma-ti mos keladi.

Bosh to‘plam matematik kutilishining tanlanma o‘rtacha qiymat bo‘yicha bahosining aniqligini ifodalaydigan $\delta = x\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ formuladan foydalanamiz:

$$\sqrt{n} = \frac{x\sigma}{\delta} \quad ёки \quad n = \frac{x^2\sigma^2}{\delta^2}.$$

Bu yerda x, σ, δ ning qiymatlarini qo‘yamiz:

$$n = \frac{(1{,}78)^2\cdot(1{,}5)^2}{(0{,}2)^2} = 177,\ \ n = 177.$$

4-misol. Bosh to‘plamning ζ son belgisi normal taqsimlangan *p* hajmli tanlanma bo‘yicha tuzatilgan o‘rtacha kvadratik chetlanish *σ* topilgan.

Agar a) n=10, s=5,1; b) *n* =50, s=14 bo‘lsa, *σ* o‘rtacha kvadratik chetlanishni 0,999 ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchlilik intervalini toping.

yechish. a) $\gamma = 0.999$ va *p*=10 bo‘yicha ilovadagi 4-jadvaldan *q*=1,80 ni topamiz.

Ma'lumki, ishonchlilik intervalini topish uchun quyidagi formuladan foydalaniladi:

$$s(1-q)<\sigma<s(1+q) \qquad (q<1)$$

$$0<\sigma<s(1+q) \qquad (q>1)$$

q=1,80>1 bo‘lgani uchun ikkinchi formuladan foydalanamiz:

$$0<\sigma<5{,}1(1+1{,}8)\ ёки\ 0<\sigma<14{,}28.$$

b) Ilovadagi 4-jadvaldan *q*=0,43 ni topamiz. q < 1 bo‘lgani uchun

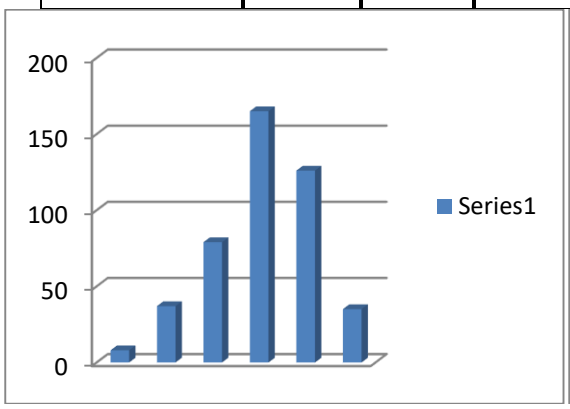
$$s(1-q)<\sigma<s(1+q) \qquad (q<1)$$

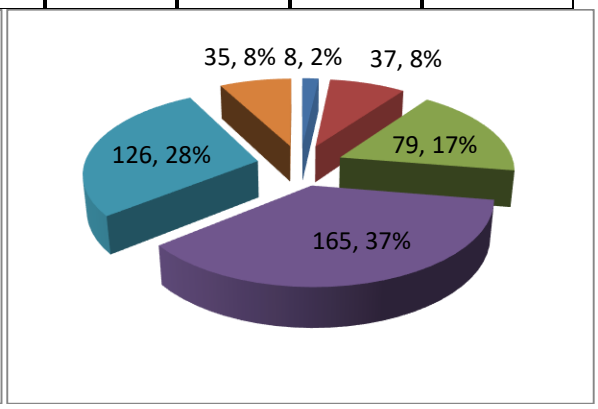
formuladan foydalanamiz:

$$7{,}98 < \sigma < 20{,}02.$$

5-misol. 10000 gektar maydonda tanlab olish yo‘li bilan 500 gektar olingan va undagi ekinning hosildorligi o‘lchanganda quyidagi ma'lumot olingan (takrorlanmagan tasodifiy tanlanma):

1 ga dagi hosildorligi, s	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	Jami
Gektar soni	8	37	79	165	126	35	n=500





Taqsimotni normal deb faraz qilib:

1) butun maydondagi hosildorlikning tanlab olingan uchastkasidagi o‘rtacha hosildorlikdan 0,2 s ga ortmaslik ehtimolini toping;

2) o‘rtacha hosildorlik chegarasi (intervali)ni 0,95 ehtimol bilan toping.

yechish. a) Avval tanlanma o‘rtacha qiymatini

$$\bar{x} = a + \frac{c}{\sqrt{n}} \sum \left(\frac{x_i - a}{c} \right) \cdot n_i$$

formula orqali topamiz. Buning uchun hisoblash jadvalini tuzamiz (tanlanma o‘rta qiymatini yuqorida hisoblagan edik). Formulada a=15; s=2 deb olamiz.

x_i	9	11	13	15	17	18	Jami
n_i	8	37	79	165	126	85	500
$\frac{x_i - a}{c}$	-3	-2	-1	0	1	2	-
$\left(\frac{x_i - a}{c}\right)^2$	9	4	1	0	1	4	-
$\left(\frac{x_i - a}{c}\right) n_i$	-24	-74	-79	0	126	170	119

$\left(\frac{x_i-a}{c}\right)^2 n_i$	72	148	79	0	126	340	765

$$\bar{x}=15+\frac{2}{500}\cdot 119=15{,}676.$$

Tanlanma dispersiyasini topishda ushbu formuladan foydalanamiz:

$$\sigma^2=\frac{c^2}{n}\sum\left(\frac{x_i-a}{c}\right)^2 n_i-\left(\bar{x}-a\right)^2=\frac{4}{500}\cdot 765-(15{,}676-15)^2\approx 5{,}66.$$

Endi $P\{|\bar{x}-a|\le\delta\}$ ehtimolni topishimiz kerak, bu yerda δ=0,2 tanlanma takrorlanmaydigan bo‘lgani uchun ehtimolni topishda

$$P\left\{\left|\bar{x}-a\right|\le\delta\right\}=\Phi\left(\delta\sqrt{\frac{n}{\delta_0^2\left(1-\frac{n}{N}\right)}}\right)$$

formuladan foydalanamiz, bunda *a*-bosh to‘plamning o‘rtacha qiymati.

n=500, N=10000 va δ_0^2 noma'lum bo‘lgani uchun uning o‘rniga σ^2 ni olamiz:

$$P\left\{\left|\bar{x}-a\right|\le 0{,}2\right\}=\Phi\left(0{,}2\sqrt{\frac{500}{5{,}66\left(1-\frac{500}{10000}\right)}}\right)=\Phi\left(0{,}2\cdot\sqrt{92{,}3}\right)=\Phi(1{,}92)$$

Ilovadagi 2-jadvaldan Φ(1,92)=0,4726 ni topamiz.

Demak, $P\{|\bar{x}-a|\le 0.2\}=0.4726$ bo‘ladi;

b) avval δ ni topish uchun

$$\delta=t\sqrt{\frac{\delta_0^2(1-\frac{n}{N})}{n}}$$

formuladan foydalanamiz. Buning uchun *t* ni *2F(t)*=0,95 tenglikdan topamiz. 2-jadvaldan t=1,96 ni aniqlaymiz:

$$\delta=1{,}96\sqrt{\frac{5{,}66\left(1-\frac{500}{10000}\right)}{500}}\approx 0{,}2.$$

Demak, ishonchlilik intervali $\bar{x}-\delta\le a\le\bar{x}+\delta$ formulaga ko‘ra *15.476≤ a ≤ 15.876* bo‘ladi.

8-§. Tanlanma o‘rtacha qiymat va tanlanma dispersiyani hisoblashning ko‘paytmalar usuli

1. Teng uzoqlashgan variantalar. Variantalarning qabul qiladigan qiymatlari katta sonlar bo‘lganda, tanlanmaning yig‘ma xarakteristikalarini quyidagi ko‘paytmalar usuli bilan hisoblash qulaydir.

h ayirmali arifmetik progressiya tashkil etadigan variantalar *teng uzoqlikdagi variantalar* deb ataladi.

Ushbu $$u_i = \frac{x_i - c}{h} \quad (i = \overline{1,k})$$ tenglik bilan aniqlanadigan variantalar shartli variantalar deb ataladi, bu yerda c-soxta nol (eng katta chastotaga ega bo‘lgan varianta), *h*-ikki varianta orasidagi masofa (birlik).

Tanlamaning yig‘ma xarakteristikalarini hisoblashda empirik momentlardan foydalanish qulaydir. Empirik momentlar kuzatish ma'lumotlari bo‘yicha hisoblanadi:

$M_k = \frac{1}{n}\sum_i n_i\,(x_i - c)^k$- ifoda *k-tartibli oddiy empirik moment* deyiladi, bu yerda *s* - soxta nol, $n = \sum n_i$ - tanlanma hajmi, n_i - chastota.

$M_k = \frac{1}{n}\sum_i n_i\,(x_i)^k$-ifoda *k-tartibli boshlang‘ich empirik moment* deyiladi. *k*=1 bo‘lsa, $M_k = \frac{1}{n}\sum_i n_i\,x_i = \bar{x}$ bo‘ladi.

$m_k = \frac{1}{n}\sum_i n_i\,(x_i - \bar{x})^k$- ifoda *k - tartibli markaziy empirik moment deyiladi.*

Xususiy holda *k*=2 bo‘lganda

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_i n_i (x_i - \bar{x})^2 = D.$$

Empirik qiymatlarni hisoblashda osonlik uchun shartli empirik momentlardan foydalanish mumkin:

$$M_k^* = \frac{1}{n}\sum_i n_i u_i^k = \frac{1}{n}\sum n_i\left(\frac{x_i - c}{h}\right)^k$$

ifoda *k - tartibli shartli empirik moment* deyiladi. Xususan, *k*=1 da

$$M_1^* = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sum_i n_i x_i - x\frac{1}{n}\sum n_i\right] = \frac{1}{h}\left(\bar{x} - c\right).$$

Bu yerdan $\bar{x}$ ni topamiz: $\bar{x} = M_1^* \cdot h + c$ formula tanlanma o‘rtacha qiymatni topish formulasidir, $D = \lfloor M_2^* - (M_2^*)^2 \rfloor \cdot h^2$ tanlanma dispersiyasini hisoblash formulasi.

$\bar{x}$ va *D* ni hisoblashda ko‘paytmalar usulidan foydalanish uchun hisoblash jadvalini tuzish qulay bo‘ladi.

1) jadvalning birinchi ustuniga variantalarni ortib borish tartibida yoziladi;

2) ikkinchi ustunga variantalarning mos chastotalari yoziladi. Ustun tagiga chastotalar yig‘indisi yoziladi;

3) uchinchi ustunga shartli variantalar $u_i = \frac{x_i - c}{h}$ yoziladi;

4) to‘rtinchi ustunga chastotalarni shartli variantalarga ko‘paytmalari yoziladi. Ustun tagiga ularning yig‘indisi yoziladi;

5) beshinchi ustunga chastotalarni shartli variantalar kvadratlariga ko‘paytmalari yoziladi, ustun tagiga ularning yig‘indisi yoziladi;

6) oltinchi ustunga chastotalarning har qaysisini bitta orttirilgan shartli variantalarning kvadratlariga ko‘paytmalari yoziladi va ustun tagiga $\sum_i n_i(u_i + 1)^2$ yig‘indisi yoziladi.

Bu ustun kontrol ustun deyiladi. Agar $\sum_i n_i(u_i + 1)^2$ yig‘indi $\sum_i n_i u_i^2 + 2\sum_i n_i u_i + n$ yig‘indiga teng bo‘lsa, u holda hisoblashlar to‘g‘ri bajarilgan hisoblanadi. Jadval to‘ldirilgandan keyin

$$M_1^* = \frac{1}{n}\sum_i n_i u_i\,,\ M_2^* = \frac{1}{n}\sum_i n_i u_i^2$$

shartli momentlar topiladi, so‘ngra $\bar{x}$ va D hisoblanadi.

1-Misol. Tanlanmaning berilgan taqsimoti bo‘yicha tanlanma o’rta qiymatini va tanlanma dispersiyasini ko‘paytmalar usuli bilan toping:

x_i	65	70	75	80	85	
n_i	2	5	25	15	3	

Yechish. Shartli variantalarga o’tib hisoblash jadvalini tuzamiz:

b) Bu misolda ham, osonlik uchun, hisoblash jadvalini tuzamiz.

1	2	3	4	5	6
x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i(u_i+1)^2$
65	2	-2	-4	8	2
70	5	-1	-5	5	0
75	25	0		0	25
80	15	1	15	15	60
85	3	2	6	12	27
$\sum$	*50*		12	40	114

Nazorat:

$$\sum n_i(u_i+1)^2 = 114,$$

$$\sum_i n_i u_i^2 + 2\sum_i n_i u_i + n = 40 + 24 + 50 = 114.$$

Demak, hisoblash to‘g‘ri. Endi M_1 va M_2^* ni hisoblaymiz:

$$M_1^* = \frac{1}{n}\sum n_i u_i = \frac{12}{50} = 0{,}24,$$

$$M_2^* = \frac{1}{n}\sum n_i u_i^2 = \frac{40}{50} = 0{,}8.$$

Berilgan misolda h=70-65=5; c=70 ekanligini hisobga olsak:

$$\bar{x} = M_1^* \cdot h + c = 0{,}24 \cdot 5 + 75 = 76{,}2$$

$$D = \left[M_2^* - \left(M_2^*\right)^2\right]h^2 = \left[0{,}8 - (0{,}24)^2\right] \cdot 25 = 18{,}56.$$

2. Teng uzoqlikda bo‘lmagan variantalar. Kuzatish natijalarida variantalar hamma vaqt ham teng uzoqlikda joylashgan bo‘lavermaydi. Ularni teng uzoqlikdagi variantalarga keltirish uchun belgining kuzatilayotgan hamma qiymatlari kirgan intervalni bir necha teng qismiy intervallarga bo‘linadi, so‘ngra qismiy intervallarning o‘rtalari topiladi. Har bir, yangi interval chastotasi uchun shu intervaldagi chastotalar yig‘indisi olinadi.

2-Misol. *n=50* hajmli tanlanmaning teng uzoqlikda bo‘lmagan variantalari taqsimoti bo‘yicha tanlanma o‘rtacha qiymat va tanlanma dispersiyani ko‘paytmalar usuli bilan toping:

x_i	6	8	11	13	15,5	17,5	20	23,5	24,5	26
n_i	1	9	6	6	4	6	8	5	4	1

yechish. 6 - 26 intervalni uzunligi *h*=4 bo‘lgan 5 ta qismiy intervalga bo‘lamiz:

6-10, 10-14, 14-18, 18-22, 22-26.

Qismiy intervallarning o‘rtalarini yangi y_i variantalar sifatida olib, teng uzoqlikdagi variantalarni hosil qilamiz:

$$y_1 = 8,\ y_2 = 12,\ y_3 = 16,\ y_4 = 20,\ y_5 = 24.$$

Har bir intervalning chastotalari quyidagicha bo‘ladi:

$$n_1 = 1 + 9 = 10,\ n_2 = 6 + 6 = 12,\ n_3 = 4 + 6 = 10,$$

$$n_4 = 8,\ n_5 = 5 + 4 + 1 = 10.$$

Demak, teng uzoqlikdagi variantalar taqsimoti:

y_i	8	12	16	20	24
n_i	10	12	10	8	10

Ko‘paytmalar usulidan foydalanamiz, buning uchun hisoblash jadvalini tuzamiz:

y_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i(u_i+1)^2$
8	10	-1	-10	10	0
12	12	0		0	12
16	10	1	10	10	40
20	8	2	16	32	72
24	10	3	30	90	160
$\sum$	*50*		46	142	284

Kontrol:

$$\sum n_i(u_i+1)^2 = 284,$$

$$\sum_i n_i u_i^2 + 2\sum_i n_i u_i + n = 142 + 92 + 50 = 284.$$

Demak, hisoblash to‘g‘ri. Endi M_1^* va M_2^* ni hisoblaymiz:

$$M_1^* = \frac{1}{n}\sum n_i u_i = \frac{46}{50} = 0{,}92,$$

$$M_2^* = \frac{1}{n}\sum n_i u_i^2 = \frac{142}{50} = 2{,}84.$$

Berilgan misolda h=4; c=12 ekanligini hisobga olsak:

$$\bar{y} = M_1^* \cdot h + c = 0{,}92 \cdot 4 + 12 = 15{,}68$$

$$D = \left[M_2^* - \left(M_2^*\right)^2\right]h^2 = \left[2{,}84 - (0{,}92)^2\right] \cdot 16 = 32.$$

Tanlanma dispersiyani hisoblashda gruppalash natijasida vujudga kelgan xatoni kamaytirish maqsadida Sheffard tuzatmasi kiritiladi, u quyidagiga teng:

$$D' = D - \frac{1}{12}h^2.$$

D va *h* ning qiymatlarini o‘rniga qo‘yamiz:

$$D' = 32 - \frac{1}{12}4^2 = 32 - 1{,}3 = 30{,}7.$$

O’z-o’zini tekshirish uchun savollar:

1. Taqsimot parametrlarining statistik baholari
2. Nuqtaviy statistik bahoga ta’rif bering va unga misollar keltiring.
3. Qanday baho siljimagan statistik baho deyiladi misol keltiring ?
4. Asosli, effektiv statistik bahoga ta’rif bering va unga misollar keltiring .
5. Asimptotik siljimagan bahoga ta’rif bering.
6. Tuzatilgan tanlanma dispersiyasi qanday formula bilan aniqlanadi ?
7. Intervalli statistic baho. Qanday statistik bahoga intervalli statistic baho deyiladi?

8. Normal taqsimotnini noma’lum parametrlari matematik kutilishi va dispersiyasiga qanday intervalli statistic baho quriladi?
9. Taqsimot parametrlarini baholashda ko’paytmalar usulini qo’llanilishini tushunti-ring?

Kalit so’zlar:

Taqsimot parametrlari, statistik baho, nuqtaviy statistik baho, siljimagan, asosli, effektiv, tuzatilgan dispersiya, intervalli, normal taqsimot, matematik kutilish, dispersiya, intervalli statistic baho, ko’paytma.

Xulosa

Taqsimot parametrlarining statistik baholari, nuqtaviy, siljimagan, asosli, effektiv statistik baho, asimptotik siljimagan baho, tuzatilgan tanlanma dispersiya, intervalli statistic baho, normal taqsimotnini noma’lum parametrlari matematik kutilishi va dispersiyasiga intervalli statistic baho qurish, taqsimot parametrlarini baholashda ko’paytmalar usulini qo’llanilishini mavzulari o’rganilgan.

XXVIII BOB. STATISTIK GIPOTEZALARNI TEKSHIRISH.

Statistik gipotezzalar. Asosiy tushunchalar

Bir jinsli ob’ektlar to`plamining son yoki sifat belgisi tasodifiy miqdor bo`lib, ma’lum taqsimot qonuniga ega bo`ladi. Amaliyotda o`rganilayotgan son belgining taqsimot qonuni ko`pincha noma’lumbo`ladi. Statistik tahlillarga asosan,uning taqsimot qonuni haqida ma’lum bir taxmin olg`a suriladi.

Noma’lum taqsimotning ko`rinishi yoki ma’lum taqsimotning parametrlari haqidagi gipotezaga statistik gipoteza deyiladi. Masalan, quyidagi gipotezalar statistik gipoteza bo`ladi:

1). Bosh to`plam normal taqsimotga ega, “Sulton” paxta navining o’rtacha hosildorligi normal taqsimotga ega;

2). Ikkita normal to`plamning o`rta qiytmatlari o`zaro teng.

Olg`a surilgan asosiy gipoteza, nolinchi gipoteza deyiladi va $H_0$ bilan belgilanadi. Nolinchi gipotezaga zid bo`lgan gipotezani (konkurent) alternativ gipoteza deyiladi va u H_1 bilan belgilanadi.

Faqat bitta gipotezani o`z ichiga olgan bo`lsa, oddiy statistik gipoteza deyiladi. Masalan, H_0: $a = 4$ ga, ya'ni normal taqsimotning matematik kutilishi 4-ga teng (6-ma'lumholda) degan taxmin oddiy statistik gipotezadir.

Murakkab statistik gipoteza, chekli yoki cheksiz sondagi oddiy gipotezalardan iborat bo`ladi. Masalan H_0: $a \neq 7$ (6-noma'lum) gipoteza murakkab statistik gipotezadir.

Olg`a surilgan statistik gipotezani to`g`ri yoki noto`g`riligini tekshirish natijasida, quyidagi ikki turdagi xatoga yo`l qo`yish mumkin: 1) Birinchi tur xato shundan iboratki, bunda to`g`ri statistik gipoteza tekshirish natijasida rad qilinadi;
2) Ikkinchi tur xato - bunda aslida noto`g`ri statistik gipoteza tekshirish natijasida qabul qilinadi.
Birinchi tur xatoga yo`l qo`yish extimoli α bilan belgilanadi va u qiytmatdorlik darajasi deyiladi. Ko`pincha α sifatida 0,05 (5%li), 0,07(7%li) yoki 0,1(10%li) olinadi.

Statistik kriteriy deb, H_0 gipotezani tekshirish uchun xizmat qiladigan K tasodifiy miqdorga aytiladi. Statistik gipotezalarni tekshirishni eng muqobil usullarini yaratish, matematik statistika fanining asosiy vazifalaridan biridir.

Tajriba natijalari asosida, ikkita paxta navidan, qaysi birini hosildorligi yuqori yoki sifati yaxshi ekanligini yetarli kafolat bilan aniqlash, muhim amaliy hamda iqtisodiy ahamiyatga ega bo`lgan masalalardan biridir. Bu savollarga keyingi paragraflarda o`rganiladigan Fisher-Snedekor va Styudent kriteriyalari yordamida javob olish mumkin.

1 -§. Normal taqsimlangan bosh to`plamlarning dispersiyallari tengligi haqidagi statistik gipotezani Fisher-Snedekor kriteriyasi bilan tekshirish

Bu mavzuda qishloq xo'jalik masalalarini yechishga statistik kriteriyalarni qo'llanishiga doir ya'ni normal taqsimlangan bosh to`plamlarning dispersiyallari tengligi haqidagi statistik gipotezani Fisher-Snedekor kriteriyasi bilan tekshirsh masalalarini o'rganamiz. Ma'lumki, qishloq xo'jalik ekinlari katta maydonlarda ekilib, ular qariyib bir xil sharoitda o'stiriladi, shu sababli, o'rganilayotgan qishloq xo'jalik ekinlarini o'rtacha hosildorligini, ehtimollar nazariyasining markaziy limit teoremasiga asosan, normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deb olinishimiz mumkin[3].

Faraz qilaylik, o`rganilayotgan, X va Y bosh to`plamlar normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo`lsin. Ma'lumki, normal taqsimot matematik kutilish $M(X) = a$ va o`rtacha kvadratik chetlanishi $\sqrt{D(X)} = \sigma$ orqali to`liq aniqlanadi. Shu sababli, umumiy holda σ -ma'lum va σ - noma'lum hollar o`rganiladi. Aslida, amaliy

masalalarni yechishda, har ikkala parametrlar a va σ noma'lum hol ko`p uchraydi.

X va Y bosh to`plamlar normal taqsimlangan bo`lib, ularni ikkala parametrlari ham noma'lum bo`lsin. Shu bosh to`plamlardan hajimlari n va m ga teng bo`lgan tanlanma to`plamlarni olamiz:

$$\left.\begin{array}{l} X: x_1, x_2, ..., x_n \\ Y: y_1, y_2, ..., y_m \end{array}\right\} \qquad (28.1)$$

tanlanma to`plamlar asosida, asosiy $H_0 : D(X) = D(Y)$ bosh to'plamlarning dispersiyalari tengligi haqidagi statistic gipotezani $H_0 : D(X) \neq D(Y)$ alternativ shartda, α qiytmatdorlik darajasi bilan tekshirish talab qilingan bo'lsin.

Bosh to'plamlarning dispersiyalari tengligi haqidagi statistik gipotezani α qiytmatdorlik darajasi bilan Fisher-Snedekor kriteriyasi yordamida tekshirish mumkin. Yuqorida keltirilgan (28.1) tanlanma to`plamlar yordamida, avvolo tanlanma o`rta qiytmatlarni $\overline{X_T}$, $\overline{Y_T}$ va tuzatilgan tanlanma dispersiyalarni hsoblaymiz:

$$S_X{}^2 = \frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_T)^2 n_i \qquad S_Y{}^2 = \frac{1}{(m-1)}\sum_{i=1}^{k}(y_i - \bar{y}_T)^2 m_i$$

Fisher-Snedekor kriteriyasi yordamida quyidagi tasodifiy miqdorni hisoblaymiz:

$$F_{kuz} = \frac{S^2{}_{katta}}{S^2{}_{kichik}} \qquad (28.2)$$

Isbotlaganki, bu tasodifiy miqdor $F_{kuz} = \frac{S^2{}_{katta}}{S^2{}_{kichik}}$ Fisher-Snedekor taqsimotiga ega bo`lib, uning kritik qiymati(ushbu darslikdadagi 5-ilova) jadvaldan topiladi $F_{kritik} = F(f_1; f_2; \alpha)$.

Bu yerda f_1 va f_2 katta va kichik dispersiyalarning ozodlik darajalari soni bo`lib u n va m tanlanmalarning hajmlari orqali aniqlanadi.

Bu yerda ikki xol bo`lishi mumkin:

1) agar $F_{kuz} < F_{krit}$ bo`lsa, asosiy gipotezani $H_0 : D(X) = D(Y)$ rad etishga asos yo'q yani α qiymatdorlik darajasi bilan qobul qilinadi;

2) agar $F_{kuz} .> F_{krit}$ bo`lsa, bu holda asosiy $H_0 : D(X) = D(Y)$ gipoteza rad etilib, unga alternativ $H_1 : D(X) \neq D(Y)$ gipoteza α qiytmatdorlik darajasi bilan qabul qilinadi.

Fisher-Snedekor kriteriyasi yordamida, tasodifiy miqdorlarning aniqliklarini (xatoliklarini) taqqoslash mumkin. Masalan, Fisher-Snedekor kriteriyasi yordamida

bir xil ishni bajaradigan ikkita stanokdan, qaysi biri bu vazifani aniq bajarishini, ular ishlab chiqargan mahsulotlarni statistik tahlil qilib, yetarli kafolat bilan (masalan 95% li kafolat bilan) aniqlash mumkin.

2 -§. Normal taqsimlangan bosh to`plamlarning o`rta qiytmatlari tengligi haqidagi statistik gipotezani Styudent kriteriyasi bilan tekshirish

X va Y bosh to`plamlar normal taqsimlangan bo`lib, ularni ikkala parametrlari ham noma'lum bo`lsin. Bu bosh to`plamlardan hajmlari n va m ga teng bo`lgan tanlanma to`plamlar berilgan bo`lsin:

$$\left.\begin{array}{l} X: x_1, x_2, ..., x_n \\ Y: y_1, y_2, ..., y_m \end{array}\right\} \qquad (28.1)$$

Berilgan tanlanma to`plamla rasosida, asosiy $H_0 : M(X) = M(Y)$ bosh to`plamlarning o`rta qiymatlari tengligi haqidagi statistik gipotezani, $H_1 : M(X) \neq M(Y)$, alternativ shartda α qiytmatdorlik darajasi bilan tekshirish talab qilingan.

Bu savolga javob berish uchun, biz avvalo (28.1) tanlanma to`plamlar asosida, Fisher-Snedekor kriteriyasi yordamida, ularning $H_0 : D(X) = D(Y)$ dispersiyalari tengligi haqidagi statistik gipotezani $H_1 : D(X) \neq D(Y)$, alternativ shartda tekshirishimiz lozim bo`ladi. Agar bu statistik gipoteza α qiytmatdorlik darajasi bilan qabul qilinsa, bosh to`plamning o`rta qiytmatlari tengligi haqidagi statistik gipotezani Styudent kriteriyasi bilan tekshirish mumkin. (28.1) tanlanmalar yordamida ularni tanlanma o`rta qiytmatlar $\overline{X_T}$, $\overline{Y_T}$ va tuzatilgan tanlanma dispersiyalari yordamida $S^2{}_X$, $S^2{}_Y$ quyidagi tasodifiy miqdorni hisoblaymiz:

$$T_{kuz} = \frac{|\ \overline{X_T} - \overline{Y_T}\ |\sqrt{\dfrac{nm(n+m-2)}{n+m}}}{\sqrt{(n-1)S^2{}_X + (m-1)S^2{}_Y}} \qquad (28.4)$$

Isbotlanganki, asosiy $H_0 : M(X) = M(Y)$ gipoteza to`g`ri bo`lganda, (28.4) tasodifiy miqdor $T_{krit} = T(n+m-2;\alpha)$ - ozodlik darajali St'yudent taqsimotiga ega bo`ladi ya'ni, Styudent taqsimot jadvalidan (ushbu darslikdadagi 3-ilova) $T_{krit} = T(n+m-2;\alpha)$ ni qiymatini topib, uni T_{kuz} miqdor bilan taqqoslaymiz:

1. agar $T_{kuz} < T_{krit} = T(n+m-2;\alpha)$ bo`lsa, asosiy gipoteza $H_0 : M(X) = M(Y)$ ni rad etishga asos yo`q, ya'ni H_0 gipoteza α qiytmatdorlik darajasi bilan qabul qilinadi;
2. agar $T_{kuz} < T_{krit} = T(n+m-2;\alpha)$ bo`lsa, asosiy gipoteza $H_0 : M(X) = M(Y)$ ni rad etishga asos yo`q, ya'ni H_0 gipoteza α qiytmatdorlik darajasi bilan qabul qilinadi;
3. agar $T_{kuz} > T_{krit} = T(n+m-2;\alpha)$ bo`lsa, asosiy H_0 gipoteza rad etilib, unga alternativ $H_1 : M(X) \neq M(Y)$ gipoteza α qiytmatdorlik darajasi qabul qilinadi;

Izoh: Styudent kriteriyasi yordamida, ikki nav paxta yoki boshqa qishloq xo`jalik ekinlari bo`yincha o`tkazilgan tajriba natijalari asosida, ulardan yuqori hosildorlisini $\gamma -$ kafolat bilan $(\gamma = 1 - \alpha)$ aniqlash mumkin.

3-§. Qishloq xo`jalik masalalarini yechishga Fisher-Snedekor va St'yudent kriteriyalarini qo`llanishiga doir namunaviy masalalarni yechimi

Misol-1. X va Y paxta navlari bo`yicha o`tkazilgan tajriba natijalari asosida, bosh to`plamlarning normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar deb qarab, $\alpha = 0{,}05$ qiymatdorlik darajasi bilan 1) $H_0 : D(X) = D(Y)$ gipotezani, $H_1 : D(X) \neq D(Y)$ alternativ shartda Fisher-Snedekork riteriyasi yordamida; 2) $H_0 : M(X) = M(Y)$ gipotezani, $H_1 : M(X) < M(Y)$ alternativ shartda Styudent kriteriyasi bilan tekshiring:

Tajribalar soni	X nav s/ga	Ynav s'/ga	$X_i - \overline{X}_T$	$Y_i - \overline{Y}_T$	$(X_i - \overline{X}_T)^2$	$(Y_i - \overline{Y}_T)^2$
1	25	30	-4	-3	16	9
2	30	35	1	2	1	4
3	28	40	-1	7	1	49
4	32	27	3	6	9	36
5	29	-	0	-	0	-
	$\overline{X_T} \approx 29$	$\overline{Y_T} = 33$			27	98

Yechish. 1) Avvalo $H_0 : D(X) = D(Y)$ gipotezani Fisher-Snedekor kriteriyasi bilan $H_1 : D(X) \neq D(Y)$ alternativ shartda tekshirish uchun, jadvaldan foydalanib $n = 5, m = 4$ tuzatilgan tanlanma dispersiyalarni hisoblaymiz $S^2{}_X$, $S^2{}_Y$

$$S_X{}^2 = \frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_T)^2 n_i = \frac{1}{4}\ 27 = 6{,}75$$

$$S_Y{}^2 = \frac{1}{(m-1)}\sum_{i=1}^{k}(y_i - \bar{y}_T)^2 m_i = \frac{1}{3}\ 98 = 32{,}67$$

Fisher-Snedekor kriteriyasiga asosan(28.2)

$$F_{kuz} = \frac{S^2{}_{katta}}{S^2{}_{kichik}} = \frac{32{,}67}{6{,}75} = 4{,}84;$$

Fisher Snedekor kriteriyasining qiymatlari jadvali ilova - 5 dan $F_{kritik} = F(f_1; f_2; \alpha) = F(3;4;0{,}05). = 6{,}59$. $F_{kuz} < F_{krit}$ bo`lganligi uchun, $H_0 : D(X) = D(Y)$ asosiy gipoteza 95% li kafolat bilan qabul qilinadi.

2) Styudent kriteriyasi yordamida talab qilingan $H_0 : M(X) = M(Y)$ gipotezani alternativ $H_1 : M(X) < M(Y)$ shartda tekshiramiz:

$$T_{kuz} = \frac{|\ \overline{X_T} - \overline{Y_T}\ |\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}}{\sqrt{(n-1)S^2{}_X + (m-1)S^2{}_Y}} = \frac{|29-33|}{\sqrt{27+98}}\sqrt{\frac{4*5(4+5-2)}{4+5}} = 1{,}4$$

Ushbu darslikning 4-ilovasidan T_{krit} kritik qiymatini topamiz, uning qiymati $T_{krit} = T(n+m-2;\alpha) = T(7;0{,}05) = 2{,}36$ bo`lganligidan, tajriba natijalari asosida hisoblangan $T_{kuz}$ =1,4 bilan taqqoslab $T_{kuz} < T_{krit}$ bo`lishini aniqlaymiz.

Demak, ikkala nav paxtani o`rtacha hosildorliklari teng degan asosiy gipoteza $H_0 : M(X) = M(Y)$, $\alpha = 0{,}05$ qiymatdorlik darajasi bilan qabul qilinadi.

Bu yechilgan misoldan ko`rinadiki, garchi bir-biridan 4 s/ga ga farq qilishiga qaramasdan, X va Y paxta navlari bir xil hosildorlikka ega ekanligi 95% li kafolat bilan aniqlandi. Bu farq agrotexnik tadbirlar tufayli yuzaga kelgan, ya'ni Y paxta naviga eng muqobil vaqtda agrotexnik tadbirlar o`tkazilgan, shuni hisobiga yuqori hosil olingan. Bu tasdiq, qishloq xo'jaligida muhim ahamiyatga ega.

4 -§. Fisher-Snedekor va St'yudent kriteriyalarini qishloq xo`jaligi masalalarini yechishga qo`llanishiga doir mustaqil yechish uchun misollar

Ushbu 1-6 misollarda ikki xil X va Y paxta navlari bo`yicha, o`tkazilgan tajriba natijalari asosida $\alpha = 0{,}05$ qiymatdorlik darajasi bilan(bosh to`plamlarning o`rtacha hosildorliklari normal taqsimlangan degan shartilda) quyidagi statistik gipotezalarni:

1) Fisher-Snedekor kriteriyasi bilan $H_0 : D(X) = D(Y)$ gipotezani, $H_1 : D(X) \neq D(Y)$ alternativ shartda; 2) Styudent kriteriyasi bilan $H_0 : M(X) = M(Y)$ gipotezani, $H_1 : M(X) \neq M(Y)$ alternativ shartda tekshiring:

1

Tajriba soni	*X nav s/ga*	*U nav s/ga*
	28	*33*
2	*30*	*35*
3	*28*	*40*
4	*33*	*37*
5	*32*	-
	$\overline{X_T} =$ –	$\overline{Y_T} =$

2

Tajriba soni	*X nav s/ga*	*U nav s/ga*
1	*25*	*30*
2	*30*	*36*
3	*27*	*40*
4	*28*	*34*
5	*35*	-
	$\overline{X_T} =$ –	$\overline{Y_T} =$

3

Tajriba soni	*X nav s/ga*	*U nav s/ga*
1	*36*	*34*
2	*30*	*38*
3	*34*	*40*
4	*40*	*36*
5	*35*	*32*
	$\overline{X_T} =$ –	$\overline{Y_T} =$ –

4.

Tajriba soni	X nav s/ga	U nav s/ga
1	31	36
2	30	35
3	28	42
4	32	33
5	29	-
	$\overline{X_T} =$ –	$\overline{Y_T} =$ –

5.

5.		
Tajriba soni	*X nav s/ga*	*U nav s/ga*
1	*36*	*34*
2	*30*	*38*
3	*34*	*40*
4	*40*	*36*
5	*35*	*32*
	$\overline{X_T} =$ –	$\overline{Y_T} =$ –

6.

Tajriba soni	X nav s/ga	U nav s/ga
1	35	36
2	30	38
3	28	42
4	32	33
5	34	-
	$\overline{X_T} =$ –	$\overline{Y_T} =$ –

5 -§. O`zaro bog`liq bosh to`plamlarning o`rta qiymatlarini taqqoslash. Eng kichik ahamiyatli farq va uni qishloq xo`jalik masalalarini yechishga qo`llanilishi

O`tgan mavzuda o`zaro erkli, normal taqsimlangan bosh to`plamlarning o`rta qiymatlari tengligi haqidagi statistik gipotezani St'yudent kriteriyasi bilan tekshirishni o`rgandik. Bu mavzuda normal taqsimlangan X, Y bosh to`plamlar

o`zaro bog`liq bo`lgan holda, ularning o`rta qiymatlari tengligi haqidagi statistik gipotezani tekshirishni o`rganamiz([2] – [4]).

Normal taqsimlangan X, Y bosh to`plamlardan, hajmlari mos ravishda n va m bo`lgan tanlanma to`plamlarni olib, ularning tanlanma o`rta qiytmatlarini $\overline{X_T}, \overline{Y_T}$ va tanlanma dispersiyalarini hisoblaymiz. Soddalik uchun biz tanlanmalarni hajmlari n=m bir xil va bu bosh to`plamlarning dispersiyalari teng $\sigma_1 = \sigma_2$ holni qaraymiz.

Normal taqsimlangan X, Y bosh to`plamlar o`zaro bog`liq bo`lgan holda, ularning o`rta qiymatlari tengligi haqidagi statistik gipotezani tekshirish quyidagicha amalga oshiriladi:

1) Tanlanma to`plamlar o`zaro bog`lik bo`lganligi uchun, juft-juft o`zaro bog`liq tanlanma natijalarini farqini taqqoslaymiz. Ya'ni, asosiy va alternativ gipotezalar quyidagicha bo`ladi:

$$H_0: d = |\overline{X_T} - \overline{Y_T}| = 0$$
$$H_1: d = |\overline{X_T} - \overline{Y_T}| \neq 0 \qquad (28.5)$$

Bu asosiy H_0 statistik gipotezani tekshirishda eng muqobil statistik kriteriya St'yudent kriteriyasi hisoblanadi.

2) Tanlanma to`plam yordamida quyidagi miqdorni hisoblaymiz

$$d_1 = \frac{\sum d_i}{n}$$

1) Bu miqdorlarni tuzatilgan tanlanma dispersiyalarini hisoblaymiz

$$S_d^{\ 2} = \frac{\sum d_i^{\ 2} - n(d_1)^2}{n-1}$$

2) O`rtacha farqning, o`rtacha kvadratik chetlanishi hisoblanadi

$$\lambda_d = \sqrt{\frac{S_d^{\ 2}}{n}}$$

3) St'yudent kriteriyasining T_{kuz} qiymatini tajriba ma'lumotlari asosida h hisoblaymiz

$$T_{kuz} = \frac{|d_1|}{\lambda_d}$$

4) Kuzatish natijalarining juftliklari soni bo`yicha ozodlilik darajalari sonini aniqlaymiz $\kappa = n - 1$,
5) St'yudent taqsimot jadvalidan T_{kuz}=T(n-1; α) kritik qiymati topiladi (ushbu darslikdadagi 3- ilova)
6) Nihoyat T_{kuz} va T_{krit} qiymatlar taqqoslanib xulosa chiqariladi:

a) Agar $T_{kuzat} < T_{kritik}$ bo`lsa, asosiy H_0 gipoteza α qiymatdorlik darajasi bilan qabul qilinadi;

b) Agar $T_{kuz} > T_{krit}$ bo`lsa, asosiy H_0 gipoteza α qiymatdorlik darajasi bilan rad etilib, unga H_1 alternativ gipoteza shu qiymatdorlik darajasi bilan qabul qilinadi.

Misol-1. O`g`itlarning turli miqdorlarini paxta hosildorligiga ta'siri H_1 amiyatli, yoki H_0 amiyatsiz ekanligini aniqlash maqsadida bir xil nav paxtani birinchi maydonning (har-bir ga/siga) 200 kg azot, 250 kg kaliy va boshqa ikkinchi maydonga 250 kg azot, 300 kg kaliy, 250 kg fosforli o`g`it solinib harbiri bo`yincha 6 tadan variantda tajriba o`tkazildi. Ushbu tajriba ma'lumotlari bo`yicha o`g`itlarning turli miqdorlarini paxta hosildorligiga ta'siri ahamiyatli yoki ahamiyatsiz ekanligini St'yudent kriteriyasi yordamida, α=0,05 qiymatdorlik darajasi bilan, quyidagi tajriba ma'lumotlari bo`yicha tekshiring?

Tajribalar soni	Hosildorlik s/ga		$d_i = x_i - y_i$	$d_i^2 = (x_i - y_i)^2$
	$X(N_{250},P_{200},K_{300})$	$U(N_{200},K_{250})$		
1	32	28	4	16
2	30	26	4	16
3	34	31	3	9
4	36	32	4	16
5	33	30	3	9
6	36	33	3	9
∑	201	180	21	75
O`rtacha qiymati	$X_T = 33,5$	$Y_T = 30$	3,5	

Jadvaldan foydalanib, yukorida keltirilgan formulalar bilan kuyidagi mikdorlarni hisoblaymiz

$$d_1 = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{21}{6} = 3,5, \qquad S_d^{\,2} = \frac{\sum d_i^{\,2} - n(d_1)^2}{n-1} = \frac{75 - 6*(3,5)^2}{5} = \frac{75 - 73,5}{5} = \frac{1,5}{5} = 0,3$$

$$\lambda_d = \sqrt{\frac{S_d^{\,2}}{n}} = \sqrt{\frac{0,3}{6}} = 0,224 \qquad T_{kuz} = \frac{|d_1|}{\lambda_d} = \frac{3,5}{0,224} = 15,63$$

St'yudent taqsimot jadvalidan(ushbu darslikning 3 - ilovasidan) kritik qiymati topiladi $T_{krit} = T(n-1; \alpha) = T(5; 0,05) = 2,57$.

Bizni misolda, $T_{kuzat} > T_{kritik}$ bo`lganligidan, asosiy $H_0$ gipoteza α qiymatdorlik darajasi bilan rad etilib, unga alternativ $H_1$ gipoteza shu qiymatdorlik darajasi bilan qabul qilinadi. Boshqacha aytganda, birinchi yer maydoninig har ga/siga yuqorida keltirilgan miqdorda fosfor , kaliy o`g`itlari solinganiga qaraganda, ikkinchi yer

maydoninig har ga/siga yuqorida keltirilgan miqdorda azot, fosfor, kaliy o`g`itlari solinganida paxtaning hosildorligi 95% li kafolat bilan ahamiyatli miqdorda oshar ekan.

Tanlanma to`plamlar o`zaro bog`liq bo`lganda, ularning o`rtacha qiytmatlarning farqi $d = \overline{X_T} - \overline{Y_T}$ qachon ahamiyatli yoki ahamiyatsiz bo`lishini quyidagicha ham talqin qilish mumkin:

Avvalo, tanlanma dispersiya

$$D(d) = D(\overline{X_T} - \overline{Y_T}) = D(\overline{X_T}) + D(\overline{Y_T}) = S^2_{\overline{X_T}} + S^2_{\overline{Y_T}}$$

va uning o`rtacha kvadratik chetlanishi hisoblanadi

$$S_T(d) = \sqrt{S^2_{\overline{X_T}} + S^2_{\overline{Y_T}}}$$

Bu tasodifiy miqdorlar normal taqsimlangan holda, ularning farqi uchun intervalli statistik baho quyidagicha bo`ladi:

$$(d - t_\gamma s_d;\ d + t_\gamma s_d) \qquad (28.6)$$

Bu yerda $T_\gamma = T_{kritik} = T(n-1;\alpha) = t_\gamma$ – St'yudent taqsimotining kritik qiymatlari(darslikning 3 -ilovasidan):

1) Agar ayirma $d < T_\gamma s_d$ bo`lsa, $H_0$: $MX_T = MY_T = Md = 0$ gipotezani rad etishga asos yo`q;

2)Agar ayirma $d > T_\gamma s_d$ bo`lsa, H_0 gipoteza rad etiladi va H_1 : $d = |\overline{X_T} - \overline{Y_T}| \neq 0$ alternativ gipoteza qabul qilinadi.

Tasodifiy chetlanishni limitik, ya'ni chegaraviy qiytmatiga eng kichik ahamiyatli farq deyiladiva u qisqacha NSR deb belgilanadi. Uning qiymati quyidagi tenglik orqali aniqlanadi $NSR = T_\gamma s_d$. Bu yerda $T_\gamma = T(n+m-2;\ 0.05)$ ni qiytmati Styudent taqsimot jadvalidan topiladi (ilova - 3):

1) Agar $d < NSR$ bo`lsa $\Rightarrow H_0$ gipotezani rad etishga asos yo`q, ya'ni 95%li kafolat bilan H_0 : $d = |\overline{X_T} - \overline{Y_T}| = 0$ statistik gipoteza qabul qilinadi;

2). Agar $d \geq NSR$ bo`lsa $\Rightarrow$ H_0 gipoteza rad etilib, unga alternativ H_1 : $d = |\overline{X_T} - \overline{Y_T}| \neq 0$ gipoteza α qiymatdorlik darajasi bilan qabul qilinadi.

NSRdan tajriba natijalari bo`yicha, qishloq xo`jalik ekinlarini haqiqiy hosildorligiga intervalli statistik baho qurishda va eng asosiy H_0 : $d = |\overline{X_T} - \overline{Y_T}| = 0$ statistik gipotezani tekshirishda keng foydalaniladi.

Misol-2. Yuqorida yechilgan misol-1 ma'lumotlari bo`yicha NSR ni aniqlab xulosa chiqaring?

Jadval yordamida va ilova- dan quyidagilarni aniqlaymiz:

$$d = |\overline{X_T} - \overline{Y_T}| = |33{,}5 - 30| = 3{,}5$$

$$\lambda_d = \sqrt{\frac{S_d^{\ 2}}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}3}{6}} = 0{,}224$$

$T_{krit} = T(n-1; \alpha) = T(5; 0,05) = t_{0,05;5} = 2,57.$

Bundan

$$NSR = T_{\gamma} s_d = 2,57 \cdot 0,224 = 0,5757.$$

$$d = \left| \overline{X_T} - \overline{Y_T} \right| = 3,5 > HCP = 0,5757$$

Bo`lganligi uchun, alternativ gipoteza $H_1$ : $d = \left| \overline{X_T} - \overline{Y_T} \right| \neq 0$, ya'ni paxtaga yuqorida keltirilgan miqdorda $N_{250}$, $P_{200}$, $K_{300}$ azot, fosfor, kaliy o`g`itlari solinsa, paxtaning hosildorligi yuqori bo`lishligi haqidagi statistik gipoteza 95% li kafolat bilanqabul qilinadi.

Zaruriy tanlanma hajmini aniqlash

Misol-1. Faraz qilaylik 800 ga maydonga kuzgi bug`doy ekilgan. Qancha yer maydonida kuzatishlar olib borilganda, haqiqiy hosildorlikni 0,8 s/ga dan oshmaydigan xatoda, 0,954 ehtimol bilan baholash mumkin? Agar boshlang`ich kuzatishlarda uni o`rtacha kvadratik chetlanishi 3,6 s/ga teng bo`lsa.

Yechish. N=800 ga bosh to`plam, $\sigma$=3,6 s/ga, $\varepsilon_x$=0,8 s/ga, p=0.954, **t(n;γ)=2** bo`lganligidan, qaytarilmaydigan tanlanma uchun zaruriy tanlanma hajmi quyidagi formula bilan aniqlanadi

$$n = \frac{t^2 \sigma^2 N}{\sigma^2 t^2 + \varepsilon_{\bar{x}}^2 N}, \qquad n = \frac{2^2 \cdot 3.6^2 800}{2^2 \cdot 3.6^2 + 0.8^2 \cdot 800} = 74$$

Demak, 800 ga maydondagi bug`doy hosildorligini 0,954 ehtimol bilan baholash uchun 74 ga maydonda kuzatishlar olib borish kerak.

Agar 74 ga 74000 m^2 ekanligini e'tiborga olsak, pagonno'y metr hisobida qancha zaruriy tanlanma olinishi kelib chiqadi.

Agar takroriy tanlanma bo`lsa

$$n_2 = \frac{t^2 \sigma^2}{\varepsilon_{\bar{x}}^2} = \frac{2^2 \cdot 3.6^2}{0.8^2} = 81$$

pagonno'y metr maydonda kuzatishlar olib borilishi kerakligi kelib chiqadi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar:

1) Qanday gipotezalar statistik gipoteza bo`ladi?
2) Oddiy va murakkab gipotezalar bir-biridan qanday farq qiladi?
3) Statistik gipotezalarni tekshirishda qanday xatolarga yo`l qo`yilishi mumkin?
4) Fisher-Snedekor kriteriyasi yordamida qanday statistik gipotezalar tekshiriladi ?

5) Fisher-Snedekor kriteriyasi yordamida statistik gipotezalarni tekshirish jarayonini tushuntiring?
6) St'yudent kriteriyasi yordamida statistik gipotezalarni tekshirishdan avval qanday statistik gipoteza tekshirilishi kerak?
7) St'yudent kriteriyasi yordamida qanday statistik gipotezalar tekshiriladi va uni qishloq xo`jaligida qo`llanilishini, ahamiyatini tushuntiring?
8) O`zaro bog`liq tanlanma to`plamlarni o`rtacha qiymatlari tengligi haqidagi statistik gipotezani St'yudent kriteriyasi bilan qanday tekshirish mumkin?
9) Eng kichik ahamiyatli farq NSR qanday aniqlanadi?
10) Yer maydoniga qarab kuzatish o`tkazish zarur bo`lgan, tanlanma to`plamning hajmi qanday aniqlanadi?

Kalit so'zlar:

Statistik, oddiy, murakkab, gipoteza,tekshirishdagi xatolar, qiymatdorlik darajasi, Fisher-Snedekor , St'yudent kriteriyalari, qishloq xo`jalik masalalarini yechishga qo`llanilishi, bog`liq tanlanma, eng kichik ahamiyatli farq (NSR).

Xulosa:

Statistik gipotezalar, oddiy va murakkab gipotezalar va ularning bir-biridan farqi, statistik gipotezalarni tekshirishda qanday xatolarga yo`l qo`yilishi mumkinligi, Fisher-Snedekor, St'yudent kriteriyalari yordamida qanday statistik gipotezalar tekshiriladi va ularni qishloq xo`jalik masalalarini yechishga qo`llanilishini, o`zaro bog`liq tanlanma to`plamlarni o`rtacha qiymatlari tengligi haqidagi statistik gipoteza tekshirish, eng kichik ahamiyatli farqning(NSR) tub mohiyati o'rgaanilgan.

6 -§. Bir faktorli dispersion tahlil usuli va uni qishloq xo`jalik masalalarini yechishga qo`llanilishi

Biz 2 **-§** da, Styudent kriteriyasi yordamida, faqat ikkita paxta yoki boshqa qishloq xo'jalik ekini bo'yicha o`tkazilgan tajriba natijalari asosida, ulardan yuqori hosildorlisini, yetarli kafolat bilan aniqlash mumkinligini o`rgandik.

Ushbu mavzuda XX-asr boshlarida, Fisher asos solgan va qishloq xo`jaligida juda keng qo`llaniladigan dispersion tahlil usuli bilan, asosan uning amaliyotga qo'llanilishiga e'tibor qaratgan holda qisqacha tanishamiz([2] − [4]).

Bir vaqtda kamida $k \geq 3$ paxta navlari bo`yicha, o`tkazilgan tajriba natijalariga ko`ra, ulardan qaysi birining yuqori hosildor paxta navi ekanligini, yoki ma'lum bir

ball banatetga ega bo`lgan yer maydoniga uch va undan ortiq mineral va mahaliy o`g`itlardan qanday miqdorda solinganida eng yuqori hosil olish mumkinligini, dispersion tahlil usuli yordamida yetarli kafolat bilan aniqlash mumkin.

Masalan, faktorlarning faqat o`rtacha hosildorlikka ta'siri o`rganilsa, bir faktorli dispersion tahlil usuli bo`ladi. Agar ham hosildorlikka hamda uning sifatiga ta'siri bir vaqtda o`rganilsa, ikki faktorli dispersion tahlil usuli va xakazo. Bu yerda faktorlar qishlobq xo`jalik ekinlarining navlari, foydalanilayotgan o`g`itlarning yoki qo`llanilayotgan agrotexnik tadbirlarning turlari va boshqalar.

Bu usulni qo`llashdagi asosiy talab, o`rganilayotgan bosh to`plamlarning son yoki sifat belgilarini normal taqsimotga ega bo`lishidir.

Yuqorida takidlanganidek, qishloq xo`jalik ekinlari yetarli katta maydonlarda ekilib, qariyib bir xil sharoitda yetishtiriladi, birxil agrotexnik ishlov beriladi, shu sababli ehtimollar nazariyasining markaziy limit teoremasiga asosan bujarayonning barcha parametrlarini xususan o`rtacha hosildorligini normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deb qarash mumkin.

O`rganilayotgan $X_1$, $X_2$, ..., $X_k$ bosh to`plamlar normal taqsimlangan, noma'lum, ammo bir xil dispersiyalarga ega bo`lsin. Berilgan α qiymatdorlik darajasi bilan barcha matematik kutilishlar tengligi haqidagi asosiy H_0 gipotezani

$$H_0 : M(X_1) = M(X_2) = M(X_3) = ... = M(X_K) \qquad (28.7)$$
$$H_1 : M(X_1) \neq M(X_2) \neq M(X_3) \neq ..... \neq M(X_K)$$

H_1 alternativ shartda, o`tkazilgan tajriba natijalari bo`yicha tekshirish talab qilinadi. Bir nechta o`rta qiymatlarni taqqoslash, ularni dispersiyalarini taqqoslashga asoslanganligi uchun, uni dispersion tahlil usuli deb yuritiladi. Amaliy masalalarni yechishda dispersion tahlil usuli k- ta $F_1$, $F_2$,..., $F_k$ darajaga ega bo`lgan F sifat faktorning o`rganilayotgan miqdorga t a'siri muhim yoki muhim emasligini aniqlash uchun qo`llaniladi.

Masalan, ma'lum bir ball banatetga ega bo`lgan paxta maydonini har bir gektariga azot, fosfor, kaley mineral o`g`itlaridan necha kilogrammdan solinganida eng yuqori hosil olinadi? Bu misolda o`g`itlarning turlari faktor bo`lsa, ularning har biridan solingan miqdorlari faktor darajalari bo'ladi.

Dispersion tahlil usulini asosiy g`oyasi faktor ta'sirida vujudga keladigan $S^2_{fak}$ Faktor dispersiya» va tasodifiy sabablar bilan bo`ladigan S^2_{qol} «qoldiq dispersiya» ni taqqoslab xulosa chiqarishdan iboratdir.

Bizga k ta faktorni(masalan, k-xildagi turli mineral o`g`itlarni), qishloq xo`jalik ekini hosildorligiga ta'sirini ahamiyatli yoki ahamiyatsiz ekanligini aniqlash

bo`yicha n ta o`tkazilgan tajriba natijalari berilgan bo`lib (jadval-1), $\alpha$ qiymatdorlik darajasi bilan, normal taqsimlangan bosh to`plamlarning gruppaviy o`rtacha qiymatlari tengligi haqidagi asosiy H_0 gipotezani(ularning dispersiyalari teng degan shartda),

$H_0 : M(X_1) = M(X_2) = M(X_3) = ... = M(X_K)$ quyidagi alternativ shartda $H_1 : M(X_1) \neq M(X_2) \neq M(X_3) \neq ..... \neq M(X_K)$ tekshirish talab qilingan bo`lsin:

jadval-1

O`tkazilgan tajribalar sonin	Faktordarajalari(O`g`itlarning yoki ularning miqdorining turlari)				
	F_1	F_2	.....	.....	F_k
1	X_{11}	X_{21}	.....	.....	X_{K1}
2	X_{12}	X_{22}	.....	.....	X_{K2}
…….	..... .	..... .	.....	.....	..... .
…….	..... .	..... .	.....	.....	..... .
n	X_{1K}	X_{2K}	.....	.....	X_{Kn}
$\sum$	X_1	X_2	.....	.....	X_k

Bu savolga javob berish uchun, avvalo o`tkazilgan tajriba natijalari asosida(jadval-1 yordamida) quyidagi miqdorlarni hisoblaymiz:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{k} X_{ij}^2 \ , \ \ Q_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} X_j^2 \ , \ \ Q_3 = \frac{1}{kn}\left\{\sum_{J=1}^{K} X_j\right\}^2 . \quad (28.8)$$

faktorlar bo`yincha o`tkazilgan tajriba natijalarini X_{ij}, $X_j = \sum_{i=1}^{n} X_{ij}$ ustun bo`yicha tajriba natijalarining yig`indisi.

Bu miqdorlar yordamida faktor va qoldiq dispersiyalar hisoblanadi

$$S^2{}_{qolqiq} = \frac{Q_1 - Q_2}{k(n-1)} \qquad S^2{}_{faktor} = \frac{Q_2 - Q_3}{k-1} \qquad (28.9)$$

Bu miqdorlar yordamida, F_{kuzat} tasodifiy miqdor hisoblanadi

$$F_{kuzat} = \frac{S^2{}_{faktor}}{S^2{}_{qoldiq}} \qquad (28.10)$$

Isbotlaganki, asosiy statistik gipoteza H_0 o`rinli bo`lganda, F_{kuzat} tasodifiy miqdor Fisher-Snedekor taqsimotiga ega bo`ladi va uning kritik qiymati $F(f_1, f_2, \alpha) = k_{kritik}(k-1, k(n-1); \alpha)$ ushbu darslikning ilovasidagi 5-jadvaldan topiladi.

Bir faktorli dispersion tahlil usuli yordamida asosiy va alternativ statistik gipotezalarni tekshirishning umumiy sxemasi quyidagicha:

1) tajriba natijalariga asoslanib, S^2_{fakt} va S^2_{qoldiq} dispersiyalar hisoblaniladi;

2) H_0 gipotezani tekshirish kriteriyasining $F_{kuzat} = \frac{S^2_{faktor}}{S^2_{qoldiq}}$ qiymati o`tkazilgan tajribalar natijalari asosida hisoblanadi;

3) Ushbu darslikning ilovasidagi 5-jadvalidan berilgan α qiymatdorlik va ozodlik darajalari $f_1 = k-1, f_2 = k(n-1)$ bo`yicha Fisher-Snedekor taqsimotining kritik qiymatlari jadvalidan $F(f_1, f_2, \alpha) = k_{kritik}(k-1, k(n-1); \alpha)$ qiymati aniqlanadi. Bu yerda k-faktor darajalari soni, n-har bir faktor darajasi bo`yicha o`tkazilgan tajribalar soni;

4) agar $\mathbf{F_{kuzat} < F_{kritik}}$ bo`lsa, $H_0$ gipoteza $\alpha$ qiymatdorlik darajasi bilan qabul qilinadi, bizni misolda ya'ni faktorlarning qishloq xo`jalik ekini hosildorligiga ta'siri ahamiyatsiz bo`ladi;

5) agar $\mathbf{F_{kuzat} > F_{kritik}}$ bo`lsa, u holda asosiy $H_0$ gipoteza rad etilib, unga alternativ $H_1$ gipoteza qabul qilinadi, ya'ni faktorlarning qishloq xo`jalik ekini hosildorligiga ta'siri ahamiyali bo`ladi;

Eslatma. Agar X_{ij} o`tkazilgan tajriba natijalari, katta sonlar bo`lsa, dispersiyaning xossasi asasan $D(X_{ij} - C) = D(X_{ij})$, barcha tajriba natijalaridan bir xil o`zgarmas C sonini ayirib, hisoblashlarni bajarsak ham, chiqariladigan xulosa o`zgarmaydi.

Dispersion tahlil usuli juda katta hisoblashlarni talab qilganligidan, bu usuldan boydalanishda, EHMda tuzilgan maxsus paket programmalardan foydalanib hisoblash mumkin.

Izoh: Agar $X_1, X_2, ..., X_p$ bosh to`plamlar normal taqsimlangan bo`lib, ularning dispersiyalarini tengligi noma'lum bo`lsa, u holda avvalo Bartlett kriteriyasi yordamida, bosh to`plamlarning dispersiyalari tengligini haqidagi statistik gipotezani tekshirish lozim bo'ladi.

7 -§. Bir faktorli dispersion tahlil usulini qishloq xo`jaligiga qo`llanishiga doir namunaviy misollarning yechimi

Misol-1. Uch xil A, B, C arpa navlari bo'yicha o`tkazilgan tajriba natijalari asosida, ularning o`rtacha hosildorliklari teng degan asosiy $H_0 : M(X) = M(Y) = M(Z)$ statistik gipotezani, al'ternativ $H_1 : M(X) \neq M(Y) \neq M(Z)$ ular har-xil hosildorlikka

ega bo`lgan turli xil arpa navlari degan H_1 shartda, $\alpha = 0{,}05$ qiymatdorlik darajasi bilan tekshiring:

Navlar	Tajriba natijalari (s/ga)				O`tkazilgan tajribalar soni	Yig`in-disi	O`rta-chasi
	1	2	3	4			
A	24,6	29,2	26,8	29,4	4	110,0	27,5
B	22,4	27,3	27,4	23,3	4	100,4	25,1
C	21,3	25,2	24,5	22,2	4	93,2	23,3
∑					12	303,6	25,3

Yechish. Hisoblashlarni yengillashtirish maqsadida, dispersiyani $D(X_{ij} - C) = D(X_{ij})$ xossasidan foydalanib, barcha tajriba natijalaridan umumiy o`rtachaga yaqin, C=25 ni ayirib, hosil bo`lgan sonlar uchun faktor va qoldiq dispersiyalarni hisoblaymiz:

	1	2	3	4	yig`indi
A	-0,4	4,2	1,8	4,4	10
B	-2,6	2,3	2,4	1,7	3,8
C	-3,7	0,2	0,5	1,8	-1,2
∑					12,6

Bu misolda arpani k=3 - xil navi bo`yicha, o`tkazilgan n=4 tatajribalar soni.

Asosiy gipotezani tekshirish uchun jadval yordamida quyidagi miqdorlarni hisoblaymiz (28.8)-(28.10):

$$Q_1, Q_2, Q_3, S^2{}_{qol}, S^2{}_{fak}, F_{kuz}$$

$Q_1 = \sum_{i=1}^{k} X_{ij}{}^2 =$ 0,16+6,76+13,69+17,64+5,29+0,04+3,24+5,76+0,25+ 19,36+2,89+3,24=78,3

$Q_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} X_i{}^2$ =1/4[10^2+3,8^2+(-1,2)^2]=1/4(100+14,44+1,44)+115,88/4=28,97

$Q_3 = \frac{1}{kn}[\sum_{i=1}^{k} X_i]^2 =$ 1/12(10+3,8-1,2)^2=1/12*12,6^2=158,76/12=13,23

$S^2{}_{qolqiq} = \frac{Q_1 - Q_2}{k(n-1)} =$(78,32-28,97)/(3*(4-1))=49,35/9=5,48(3)

$S^2{}_{faktor} = \frac{Q_2 - Q_3}{k-1} =$(28,97-13,23)/2=15,74/2=7,87

$F_{kuzat} = \frac{S^2_{faktor}}{S^2_{qoldiq}}$ =7,87/5,48=1,44 . Ushbu darslikning ilovasidagi 4-jadvalidan

F_{kritik} = F(2; 9; 0,05) = 4,26.

Demak, $F_{kuzat} < F_{kritik}$, H_o gipoteza α=0.05 qiymatdorlik darajasi bilan qabul qilinadi, ya'ni uch xil arpa navlarining o`rtacha hosildorliklari teng ekan. Boshqacha aytganda ular bir xil arpa navlari ekanligi 95% li kafolat bilan tasdiqlanadi.

Misol-2. Ushbu jadvalda keltirilgan tajriba natijalariga ko`ra α=0,05 qiytmatdorlik darajasi bilan har – xil o`g`itlarning paxta hosildorligiga ta'siri $H_1 : M(X) \neq M(Y) \neq M(Z)$ ahamiyatli yoki ahamiyatsiz $H_0 : M(X) = M(Y) = M(Z)$ ekanligini bir faktorli dispersion tahlil usuli bilan tekshiring:

Tajribalar soni n	O`g`itlarning turlari (faktor darajalari)		
	A_1(N)	A_2(P_2O_5)	A_3(K_2O)
1	25	30	20
2	27	28	24
3	23	27	25
4	29	27	27
O`rtacha qiymati	26	28	24

Yechish. Bu misolda paxtaga solingan mineral o`g`itlar sonik=3 xil, har bir solingan o`g`it bo`yicha o`tkazilgan tajribalari soni n=4. Jadvaldagi o`tkazilgan tajriba natijalaridan bir-xil C= 26 sonini ayirib quyidagi jadvalga ega bo`lamiz:

Tajribalar soni n	O`g`itlarning turlari (faktor darajalari)		
N	A_1	A_2	A_3
1	-1	4	-6
2	1	2	-2
3	-3	1	-1
4	3	1	1
∑	X_1 = 0	X_2 =8	X_3 = - 8

Bu yerda ustunlar bo`yicha yig`indilari:

$X_1 = \sum_j x_{ij} = -1 + 1 - 3 + 3 = 0$, $X_2 = \sum_j x_{2j} = 4 + 2 + 1 + 1 = 8$

$X_3 = \sum_j x_{3j} = -6 - 2 - 1 + 1 = -8$

Quyidagi miqdorlarni hisoblaymiz $Q_1, Q_2, Q_3, S^2_{qol}, S^2_{fak}, F_{kuz}$:

Jadvaldagi barcha miqdorlar kvadratlarining yig`indisi

$Q_1 = \sum_i \sum_j x_{ij}^2 = (-1)^2 + 1^2 + \ldots + 1^2 = 84$

Ustunlar bo`yicha kvadratlarining yig`indisi

$$Q_2 = \frac{1}{n}\sum_{1}^{3} x_i^2 = \frac{1}{4}(0^2 + 8^2 + (-8)^2) = 0$$

.

Ustun elementlar yig`indisining kvadratlari

$$Q_3 = \frac{1}{kn}\left(\sum_i x_i\right)^2 = \frac{1}{3\cdot 4}(0+8-8)^{\overline{2}} = 0$$

Bu miqdorlar yordamida S^2_{fakt} factor, hamda S^2_{qoldiq} - qoldiq dispersiyalarni quyidagi formulalar bilan hisoblaymiz:

$$S_K^2 = \frac{Q_1 - Q_2}{k(n-1)} = \frac{84-32}{3(4-1)} = \frac{52}{9} = 5.78 \quad ,$$

$$S_\Phi^2 = \frac{Q_2 - Q_3}{k-1} = \frac{32-0}{2} = 16$$

Natijada S^2_q va S^2_f dispersiyalarning tengligi haqidagi gipotezani Fisher –Snedekor kriteriyasi yordamida tekshiramiz:

$$F_{куз} = \frac{S_\Phi^2}{S_K^2} = \frac{16}{5.78} = 2.77$$

Ilova-5 dagi jadvaldan kritik qiytmatini topamiz:
F_{krit}=F(0,05;k-1;k(n-1)), F_{kr}=F(0,05;2;9) = 4,3.

Hatijada, F_{kuz}= 2,78 < F_{kr} = 4,3 bo`lganligidan, o`g`itlarning paxta hosildorligiga ta’siri ahamiyatsiz degan H_0 gipoteza 95% kafolat bilan qabul qiniladi.

Bir faktorli dispersion tahlil usulini qishloq xo`jaligiga qo`llanishiga doir mustaqil yechish uchun misollar

Bir faktorli dispersion tahlil usuli bilan, paxtaga solingan 4-xil o`g`itlarning paxta hosildorligiga ta’siri a hamiyatsiz degan statistik gipotezani

1) $H_0 : M(X_1) = M(X_2) = M(X_3) = M(X_4)$,

2) ahamiyatli degan $H_1 : M(X_1) \neq M(X_2) \neq M(X_3) \neq M(X_4)$ alternativ shartda,

quyidagi o`tkazilgan tajriba natijalari asosida α=0.05 qiymatdorlik darajasi bilan(bosh to`plamlar normal taqsimlangan va ularning dispersiyalari teng degan shartda) tekshiring:

1

N	Faktor darajalari(o`g`itlarni turlari).			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	24	32	33	29

2	30	28	34	30
3	34	36	30	28

2

N	Faktor darajalari(o`g`itlarni turlari).			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	32	33	32	28
2	30	28	33	30
3	34	36	30	28

3

N	Faktor darajalari(o`g`itlarni turlari).			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	28	26	29	28
2	29	28	30	29
3	27	29	28	30

4

N	Faktor darajalari(o`g`itlarni turlari).			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	28	28	25	28
2	26	27	29	29
3	30	32	26	27

5

N	Faktor darajalari(o`g`itlarni turlari).			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	28	30	32	28
2	30	28	33	30
3	34	36	30	28

6

N	Faktor darajalari(o`g`itlarni turlari).			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1	29	28	32	25
2	28	29	33	28
3	24	25	27	29

O’z-o’zini tekshirish uchun savollar:

1). Bir va ko`p faktorli dispersion tahlil usuli va uning tub mohiyati haqida tushuncha bering?

2). Bir faktorli dispersion tahlil usuli yordamida qanday statistik gipotezalar tekshiriladi?

3). Bir faktorli dispersion tahlil usuli yordamida asosiy va alternativ statistik gipotezalarni tekshirish sxemasini va qishloq xo'jaligiga qo'llanishini tushuntiring, misollar keltiring?

Kalit so'zlar:

Bir, ko`p, faktorli, dispersion tahlil usuli, mohiyati, statistik, gipoteza, tekshirish, qollanilishi, qishloq xo'jalikk, tatbiqlari.

Xulosa:

Bir va ko`p faktorli dispersion tahlil usuli va uning tub mohiyati, qanday statistik gipotezalarni tekshirishga qollanilishi, xususan qishloq xo'jalik masalalarini yechishga tatbiqlari o'rganilgan.

8-§. Bosh tuplamni normal taqsimlanganligi haqidagi statistik gipotezani Pirsonning χ^2 -kriteriyalari bilan tekshirish

Matematik statistikaning muvofiqlik kriteriyalari yordamida o`rganilayotgan X son belgining noma'lum taqsimot qonuni haqidagi statistik gipotezalar tekshiriladi. O`rganilayotgan X son belgini o`tkazilgan tajriba natijalari asosida ma'lum bir taqsimotga ega deb faraz qilish mumkin. Muvofiqlik kriteriyalariga Pirson, Kolmogorov-Smirnov, Mizes kriteriyalari kiradi([2] – [4]).

Bu kriteriyalar yordamida bosh to`plamning X son belgisini binomial, normal, Puasson yoki boshqa taqsimotga ega degan statistik gipotezalarni tekshirish mumkin.

X son belgining noma'lum taqsimot qonuni haqidagi asosiy H_0 statistik gipotezani tekshirishda keng qo`llaniladigan Pirsonning $\chi^2$ kriteriyasiga qisqacha to`xtalib o`tamiz.

Ehtimollar nazariyasining markaziy limit teoremasi xulosalaridan ma'lumki, hayotda uchraydigan tasodifiy miqdorlarning aksariyati, normal taqsimotga ega bo`ladi. Shu sababli o`tkazilgan tajriba natijasiga ko`ra, o`rganilayotgan X-tasodifiy miqdorning normal taqsimotga ega ekanligini tekshirish, muhim nazariy va amaliy ahamiyatga egadir. Chunki, tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni ma'lum bo`lsa, tasodifiy miqdor haqida yetarli va asosli xulosalar chiqarish mumkin.

Yuqorida takidlanganidek qishloq xo`jaligida, barcha ekinlar katta yer maydonida ekilganligidan, o`rganilayotgan bosh to`plamning X son belgisini normal taqsimlangan deb faraz qilish, mantiqan to`g`ri bo`ladi. Bu tasdiq asosida

qishloq xo`jaligi ekinlari hosildorligiga kafolatli intervalli statistic baho qurish, avvaldan uni hosildorligini bashorat(prognoz) qilish mumkin.

Bosh to`plamning X son belgisi, matematik kutilishi $M(X) = a$ 6=$\sqrt{D(X)}$ o`rtacha kvadratik chetlanishi bo`lgan, normal taqsimotga ega degan asosiy gipotezani

$$H_0 : P(X < x) = \Phi_{a,\sigma}(x), \quad H_1 : P(X < x) \neq \Phi_{a,\sigma}(x) \qquad (28.11)$$

alternativ shartda Pirsonning χ^2 kriteriyasi yordamida tekshirish talab qilingan bo'lsin.

X bosh to`plamdan hajmi n ga teng bo`lgan, tanlanma to`plam olinib, uning statistik taqsimoti bo`yicha, har bir variantaning absalyut uchrashlar sonini aniqlaymiz:

X_i	x_1	x_2	...	x_K
n_i	n_1	n_2	...	n_K

Bu yerda n_i x_i variantaning empirik chastotalari soni, $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ tanlanmaning hajmi. Bosh to`plam normal taqsimotga ega degan shartda, $n_i^{/}$ nazariy chastotalar quyidagicha hisoblanadi:

1). Statistik taqsimot bo`yicha, tanlanma o`rta qiymat $\overline{x_T}$ va tanlanma o`rtacha kvadratik chetlanish hisoblanadi $\sigma_T = \sqrt{D_T}$;

2). X tasodifiy miqdor normal taqsimotga ega degan shartda $n_i^{/}$ nazariy chastotalarni quyidagi formula bilan hisoblanadi

$$n_i^{/} = \frac{nh}{\sigma_B}\varphi(u_i) \qquad (28.12)$$

bu yerda n tanlanmaning hajmi, qo`shni variantalarning ayirmasi

$h = X_{i+1} - X_i$, shartli varianta $u_i = \dfrac{X_i - \overline{x}_T}{\sigma_B}$,

$\varphi(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\ell^{-\frac{u^2}{2}}$ normal taqsimotning differensial (zichlik) funksiyasi.

Natijada hisoblashlar yordamida har-bir empirik chastotaga mos kutilayotgan nazariy chastotalar hisoblanadi $n_1^{/}, n_2^{/}, ..., n_k^{/}$;

n_i	n_1	n_2	……	n_k
$n_i^{/}$	$n_1^{/}$	$n_2^{/}$	……	$n_k^{/}$

3) Pirsonning χ^2 kriteriyasi yordamida n_i : n_1, n_2, …..,n_k -kuzatilgan (empirik) va $n_i^{/}$: $n_1^{/}$ $n_2^{/}$,……, $n_k^{/}$ nazariy chastotalarga asosan χ^2_{kuz} hisoblanadi:

$$\chi^2_{куз} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i^{/})^2}{n_i^{/}} \qquad (28.13)$$

K. Pirson isbotlanganki ([1], [2]), n→∞ da $\chi^2_{куз}$ tasodifiymiqdor, $s = k - r - 1$ ozodlik darajali «xi-kvadrat» taqsimotga ega bo`ladi. Bu yerda k- tanlanmadagi gruppalar soni, $r -$ taxmin qilinayotgan taqsimotning baholanayotgan noma'lum parametrlari soni. Bosh to`plam normal taqsimlangan degan shartda $r = 2$ bo`ladi va $s = k - 3$.

Berilgan α va $s = k - r - 1$ ozodlik darajalari bo`yicha $\chi^2_{kr}(\alpha, s)$ topilib(Ushbu darslikning ilova -5 dan), bu qiymat (28.13) formula bilan hisoblangan χ^2_{kuz} bilan taqqoslanadi:

1) agar $\chi^2_{kuz} < \chi^2_{kr}$ bo`lsa, qo`yilgan asosiy H_0 gipotezani rad etishga asos yo`q, ya'ni $\alpha$ qiymatdorlik darajasi bilan $H_0$, bosh to`plamning normal taqsimlanganligi haqidagi asosiy statistik gipoteza qabul qilinadi;

2) agar $\chi^2_{kuz} > \chi^2_{kr}$ bo`lsa, H_0 gipoteza rad etilib, unga alternativ H_1 gipoteza shu α qiymatdorlik darajasi bilan qabul qilinadi.

Izoh: Agar statistik gipotezani tekshirishda har bir intervaldagi kuzatishlar soni $n_i^1 = np_i < 5$ bo`lsa, bu intervalni qo`shni interval bilan birlashtirish lozim bo`ladi.

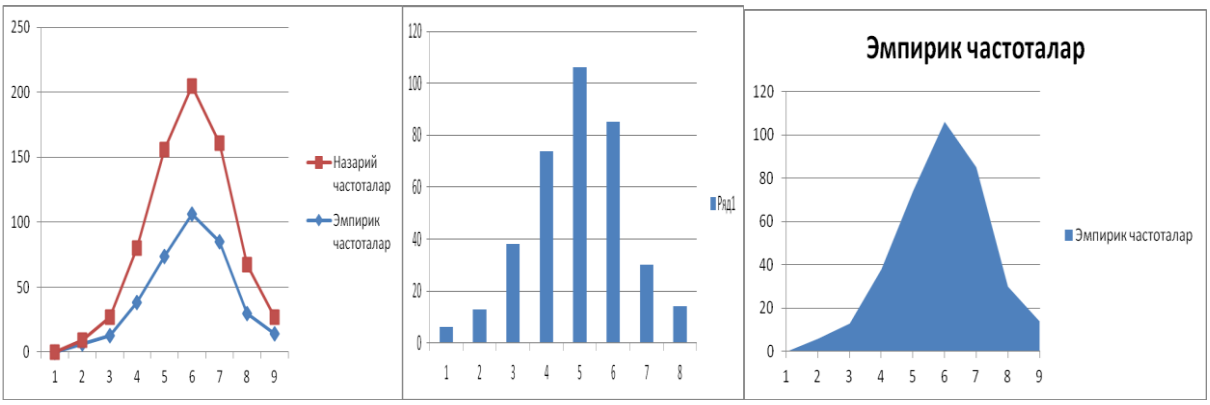
9-§. Bosh tuplamni normal taqsimlanganligi haqidagi statistik gipotezani Pirsonning χ^2 kriteriyasi bilan tekshirishga namunaviy misolning yechimi

Pirsonning χ^2 kriteriyasi yordamida bosh to`plamni normal taqsimlanganligi haqidagi H_0 asosiy statistik gipotezani, alternativ H_1 normal taqsimotga ega emas degan shartda α qiymatdorlik darajasi bilan tekshiramiz.

Misol-1. Quyidagi berilgan empirik va nazariy chastotalarga ko`ra, $\alpha$=0,05 qiymatdorlik darajasi bilan, bosh to`plamning X son be lgisini normal taqsimlanganligi haqidagi H_0 asosiy gipotezani Pirsonning χ^2 kriteriyasi yordamida tekshiring:

Empirikchastotalar	n_i	6	13	38	74	106	85	30	14
Nazariychastotalar	$n_i^{/}$	3	14	42	82	99	76	37	13

Yechish: Jadvalda n_i - empirik chastotalarning gistogrammasini, normal taqsimotga yaqinligini quyidagi shakldan ham ko`rish mumkin:



Shakl-9

χ^2_{kuz}-ni hisoblash uchun ushbu jadvalni tuzamiz:

I	n_i	$n_i^{/}$	$n_i - n_i^{/}$	$(n_i - n_i^{/})^2$	$\left[\frac{(n_i - n_i^{/})^2}{n_i^{/}}\right]$
1	6	3	3	9	3
2	13	14	-1	1	0,07
3	38	42	-4	16	0,38
4	74	82	-8	64	0,78
5	106	99	7	49	0,49
6	85	76	9	81	1,07
7	30	37	-7	49	1,32
8	14	13	1	1	0,08
	366	366			X^2_{kuz} = 7,19

Jadvalning oxirgi ustunidan χ^2_{kuz}=7,19 va jadvalidan S=8,

K=8-3=5, $\alpha = 0{,}05$ qiymatlarga mos Pirsonning χ^2 kriteriyasini kritik qiymatini topamiz $\chi^2_{kr}(0{,}05;\ 5) = 11{,}1$ (Ushbu darslikning 5-ilovasidan)

Demak, bu misolda $\chi^2_{kuz} < \chi^2_{kr}$ bo`lgani uchun, H_0 gipotezani rad etishga asos yuq, ya'ni X son belgini normal taqsimlangan deb qarash mumkin.

Misol-2. O`zbekiston respublikasining lalmikor yerlarida 1958-1988 yillarda etishtirilagan kuzgi bug`doyning o`rtacha hosildorligini, normal taqsimlanganligi haqidagi $H_0$ asosiy statistik gipotezani quyidagi statistik ma'lumotlar bo`yicha Pirsonning χ^2 – kriteriysi bilantekshiring.

Yechish: Tanlanma to`plamning intervalli variatsion qatorini tuzib, uning kuzatilgan empirik chastotasi $n_i$ va bosh to`plamni normal taqsimotga ega degan farazda hisoblan gan n_i^1 nazariy chastotalari qiymatlari bo`yicha quyidagi jadvalga ega bo`lamiz:

Interval chegaralari $[x_i;\ x_{i+1})$	**Empirik chastota** n_i	**Interval chegaralari** $(u_{i+1};u_i)$	$p_i = \Phi(u_{i+1}) - \Phi(u_i)$	**nazariych astota** $n_i^{/} = np_i$	$\frac{(n_i - n_i^{/})^2}{n_i^{/}}$
[2,40;4,22)	6	[–∞;–0.939)	0.1736	5.381	0.071
[4,22;6,04)	8	[-0.939;–0.304)	0.2085	6.464	0.365
[6,04;7,86)	5	[–0.304;0.336)	0.2510	7.781	0.994
[7,86;9,68)	6	[0.336;0.974)	0.2010	6.231	0.017
[9,68;11,50)	3	[0.974;1.612)	0.1122	3.478	0.066
[11,50;13,32)	3	[1.612;+∞)	0.0537	1.665	1.071
∑	31		1		χ^2_{kuz}= 2.58

Jadvalda $u_i = (x_i - x_t)/\ 6_T$ shartli varianta, $u_{i+1} = u_i + h$;
$h = (x_{max} - x_{min})/(1+3.32\lg n) = 1.82$, $u_i = (x_i - x_t)/6_T = (x_i - 6.9)/2.854$,
$p_i = \Phi(u_{i+1}) - \Phi(u_i)$,

$$\chi^2_{куз} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i^{/})^2}{n_i^2} = 2{,}58;$$

χ^2–taqsimot jadvalidan α=0.05 da, $\chi^2_{kr} = \chi^2(0.05;3) = 7.815$, bundan $\chi^2_{kuz} < \chi^2_k$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, O`zbekiston Respublikasining lalmikor yerlarida yetishtirilagan kuzgi bug`doyning o`rtacha hosildorligi normal taqsimlanganligi haqidagi H_0 gipoteza 95% li kafolat bilan qabul qilinadi.

Pirsonning χ^2 – kriteriyasia doir mustaqil yechish uchun misollar

Quyida 1-4 misollarda berilgan empirik va nazariy chastotalarga ko`ra,

α=0,05 qiymatdorlik darajasi bilan bosh to`plamning X son belgini normal taqsimlanganligi haqidagi asosiy gipotezani $H_0 : P(X < x) = \Phi_{a,\sigma}(x)$, $H_1 : P(X < x) \neq \Phi_{a,\sigma}(x)$ alternativ shartda Pirsonning χ^2 kriteriyasi yordamida tekshiring:

1.

Empirik chastotalar	n_i	5	8	12	15	18	20	25	28
Nazariy chastotalar	$n_i^{/}$	3	7	12	16	19	21	23	30

2

Empirik chastotalar	n_i	15	18	21	25	28	30	33	35
Nazariy chastotalar	$n_i^{/}$	13	17	19	24	27	33	35	38

3

Empirik chastotalar	n_i	7	9	12	15	18	22	25	28
Nazariy chastotalar	$n_i^{/}$	9	10	14	16	19	21	23	30

4

Empirik chastotalar	n_i	25	28	32	35	38	40	43	45
Nazariy chastotalar	$n_i^{/}$	23	27	33	36	39	41	45	48

O’z-o’zini tekshirish uchun savollar:

1). Muvofiqlik kriteriyalari, Muvofiqlik kriteriyalariga Pirson, Kolmogorov-Smirnov kriteriyalari haqida nimalarni bilasiz va ular yordamida qanday statistik gipotezalar tekshiriladi?
2). Pirsonning χ^2 -muvofiqlik kriteriyasi yordamida, o`rganilayotgan son belgining normal taqsimlanganligi haqidagi statistik gipotezani tekshirish sxemasini tushuntiring?
3). Pirsonning χ^2 -muvofiqlik kriteriyasini qishloq xo’jalik masalalarini yecyishdagi ahamiyati qanday?

Kalit so’zlar:

Muvofiqlik kriteriyalari, Pirson, Kolmogorov-Smirnov, Mizes , χ^2 - kriteriya, normal taqsimlangan, statistik gipoteza, qo’llanilishi.

Xulosa

Muvofiqlik kriteriyalari, Kolmogorov- Smirnov, Mizes kriteriyalari, Pirsonning χ^2 kriteriyasi yordamida, normal taqsimlanganligi haqidagi statistik gipotezani tekshirish va uni qishloq xo'jalik masalalarini yechishga qo'llanishi doir mavzular o'rganilgan.

XXIX BOB. KORRELYASIYA NAZARIYASI.

1-§. Chiziqli korrelyasiya

Matematikada va texnikada funksional bog'lanish tushunchasini ko'p uchratish mumkin. Masalan, doira yuzi radiusiga bog'liq *(*S$=\pi r^2$*)*, gaz bosimi hajm va temperaturasiga bog'liq ($p = R \cdot \frac{t}{v}$ *p*-gaz bosimi, *t*-temperatura, *R*-o'zgarmas koeffitsient) va hokazo. Funksional bog'lanish tasodifiy miqdorlar orasida ham bo'lishi mumkin([2] − [4]).

Statistik bog'lanshi deb shunday bog'lanishga aytiladiki, unda miqdorlardan birining o'zgarishi ikkinchisi taqsimotining o'zgarishiga olib keladi. Xususan, statistik bog'liqlik miqdorlardan birining o'zgarishi ikkinchisining o'rtacha qiymatini o'zgarishida ko'rinadi; bu holda statistik bog'lanish korrelyasion bog'lanish deb ataladi.

Masalan, maydoni bir xil bo'lgan yer uchastkalariga bir xil miqdorda o'g'it solinsa ham har xil hosil olinadi. Lekin o'rtacha hosildorlik solingan o'g'it miqdoriga bog'liq bo'ladi. Bu yerda hosildorlikning o'rtacha qiymati bilan o'g'it miqdori orasida korrelyasion bog'lanish mavjud deb qarash mumkin.

X va *Y* belgilar berilgan bo'lsin.

Shartli o'rtacha qiymat $\overline{y_x}$ deb *Y* ning *X*=*x* qiymatga mos qiymatlarining o'rtacha arifmetik qiymatiga aytiladi.

Y ning *X* ga korrelyasion bog'liqligi deb, $\overline{y_x}$ shartli o'rtacha qiymatning *x* ga funksional bog'liqligiga aytiladi:

$$\overline{y_x} = f(x). \qquad (29.1)$$

(27.1) tenglama *Y* ning *X* ga regressiya tenglamasi deyiladi;

f(x) funksiya *Y* ning *X* ga regressiyasi, uning grafigi esa *Y* ning *X* ga regressiya chizig'i deyiladi.

$$\overline{x_y} = \varphi(y) \qquad (29.2)$$

tenglama *X* ning *Y* ga regressiya tenglamasi deyiladi.

Korrelyasion bog'liqlik ikki xil bo'ladi: chiziqli va egri chiziqli.

Korrelyasion bog'liqlik chiziqli bo'lganda regressiya tenglamasi

$$\overline{y_x} = ax + b \qquad (29.3)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Bu tenglamadagi *a* tanlanmaning regressiya koeffitsienti deyiladi.

(26.3) dagi *a* va *b* ni eng kichik kvadratlar usuli yordamida quyidagi normal tenglamalar sistemasidan topamiz:

$$\left.\begin{aligned} b\sum_{i=1}^{n} x_i + a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ bn + a\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} y_i \end{aligned}\right\} \qquad (29.4)$$

Y ning *X* ga regressiya to‘g‘ri chizig‘ining tanlanma tenglamasi

$$\overline{y_x} - \overline{y} = r_t \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right) \qquad (29.5)$$

ko‘rinishda bo‘ladi, bu yerda $\overline{y_x}$ - shartli o‘rtacha qiymat, $\bar{x}$ va $\bar{y}$ tekshirilayotgan *X* va *Y* belgilarning tanlanma o‘rtacha qiymatlari; σ_x, σ_y- tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanishlari, r_t- tanlanma korrelyasiya koeffitsienti quyidagi formula orqali topiladi:

$$r_t = \frac{\sum n_{xy} XY - nXY}{n\sigma_x \sigma_y}. \qquad (29.6)$$

Chiziqli korrelyasion bog‘lanish zichligini baholash uchun ana shu tanlanma korrelyasiya koeffitsienta r_t xizmat qiladi; $|r_t|$ birga qancha yaqin bo‘lsa, bog‘lanish shuncha kuchli bo‘ladi.

Hisoblashlarni soddalashtirish uchun hisoblash jadvalini tuzish qulay. Agar *X* va *Y* belgilar ustida kuzatish ma'lumotlari teng uzoqlikdagi variantali korrelyasion jadvali ko‘rinishida berilgan bo‘lsa, u holda quyidagi shartli variantalarni kiritamiz:

$$u_i = \frac{x_i - c_1}{h_1}, \quad v_i = \frac{y_j - c_2}{h_2},$$

Bu yerda s_1, s_2 - mos ravishda «sohta» nollar, h_1, h_2 - mos ravishda qadamlar. Shartli variantalar orqali tanlanma korrelyasiya koeffitsienti quyidagicha topiladi:

$$r_t = \frac{\sum n_{uv} uv - n\overline{u}\overline{v}}{n\sigma_u \sigma_v}, \qquad (29.7)$$

Bu yerda $\sum n_{uv}\, uv$ ni hisoblashni kelgusida misol orqali tushuntiramiz.

$$\overline{u} = \frac{\sum n_u u}{n}, \ \overline{v} = \frac{\sum n_v v}{n}, \ \sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - \left(\overline{u}\right)^2}, \ \sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - \left(\overline{v}\right)^2}$$

Ifodalar ko‘paytmalar usuli orqali topiladi. Ularni topgandan so‘ng regressiya tenglamasidagi ifodalarni quyidagicha topamiz:

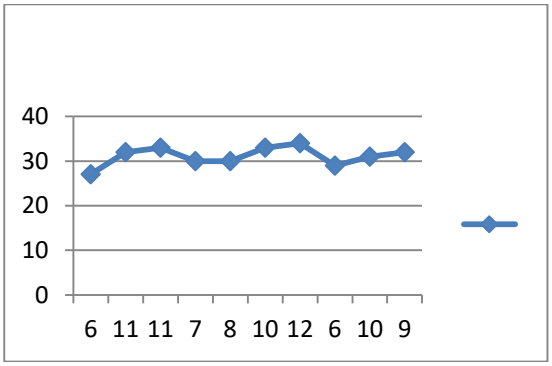
$$\bar{x} = \bar{u}h_1 + c_1,\ \bar{y} = \bar{v}h_2 + c_2,\ \ \sigma_x = \sigma_u \cdot h,\ \ \sigma_y = \sigma_v \cdot h_2$$

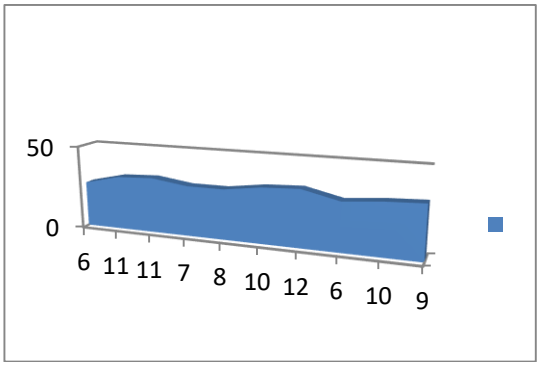
1-misol. Berilgan maydonda o‘g‘itning hosildorlikka ta'sirini o‘rganish maqsadida o‘tkazilgan 10 ta tajriba natijasi quyidagicha bo‘ldi:

x_i	6	11	11	7	8	10	12	6	10	9
y_i	27	32	33	30	30	33	34	29	31	32

Bu yerda x har bir gektar yerga solingan o‘g‘it miqdori (tonna), u har bir gektar yerdan olingan hosildorlik. Y ning X ga to‘g‘ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini toping va uni kuzatish natijalari bilan taqqoslang.

Yechish. O‘g‘it miqdorining oshirilishi bilan hosildorlik ortishini ko‘ramiz. Bu ikki miqdor o‘zaro to‘g‘ri chiziqli bog‘lanishga ega deb qaraymiz:





$$\overline{y_x} = ax + b.$$

Bu yerdagi a va b parametrlarni (29.4) eng kichik kvadratlar usuli yordamida topish uchun ma’lumotlar bo’yicha hisoblash jadvalini tuzamiz (1-jadval).

Natijasa *a va b ga nisbatan* quyidagi normal tenglamalar sistemasiga ega bo’lamiz:

$$\left.\begin{aligned} 90b + 852a &= 2831 \\ 10b + 90a &= 310 \end{aligned}\right\}$$

Sistema yechib

$$a = \frac{41}{42} \qquad b = \frac{310 - 90a}{10} = 22\frac{5}{14}.$$

U holda talab qilingan regressiya tenglamasi

$$\overline{y_x} = \frac{41}{42}x + 22\frac{5}{14} \qquad (29.8)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

1-jadval

Tajriba nomeri	y_i	x_i	x_i^2	$x_i y_i$

1	27	6	36	162
2	32	11	121	352
3	33	11	121	363
	30	7	49	210
5	30	8	64	240
6	33	10	100	330
7	34	12	144	408
8	28	6	36	168
9	31	10	100	310
10	32	9	81	288
n=10	310	90	852	2831

Endi bir xil miqdordagi o‘g‘it solinganda (29.8) tenglik bo‘yicha $\overline{y_x}$ kutiladigan hosildorlik qiymatlarining y_i, tanlanma qiymati miqdorlaridan og‘ishini 0,01 aniqlikda topamiz:

2-jadval

x_i	y_i	$\overline{y_x}$	$\overline{y_x} - y_i$
6	37	28,06	1,06
11	32	32,96	0,96
11	33	32,96	-0,04
7	30	29,04	-0,96
8	30	30,02	0,02
10	33	31,98	-1,02
12	34	33,94	-1,06
6	28	28,05	0,06
10	31	31,98	0,98
9	32	31	-1,00

$\overline{y_x} - y_i$ qiymatlaridan ko‘rinadiki kutiladigan hosildorlik o‘g‘it miqdoriga juda bog‘liq ekan.

Kuzatishlar soni katta bo‘lganda *x* qiymatning o‘zi n_x marta, y qiymatning o‘zi n_y marta, son jufti *(x, y)* ning o‘zi n_{xy} marta uchrashi mumkin. Shu sababli kuzatish ma'lumotlari gruppalanadi, ya'ni n_x, n_y, n_{xy} chastotalar hisoblanadi va jadval ko‘rinishida yoziladi. Bunday holatda quyidagi misolni yechish sxemasidan foydalangan ma'kul.

2-Misol. Biror o‘simlik og‘irligining (butun o‘simlik og‘irligi *x* gramm hisobida) ekilgan urug‘ og‘irligi (*y* gramm hisobida) bo‘yicha taqsimoti jadval usulida berilgan.

3- jadval

x,y	13	18	23	28	33	38	43	48	53	58	63	68	n_x
25	3	2											5
35		6	4	0				1					11
45		1	13	5									19
55		1	2	4	8	1							16
65			1		4	4	2						11
75					2	6	6	1					15
85							1	5					6
95								1	4	1			6
105									2	4	1	1	8
115										1		1	2
125												1	1
n_y	3	10	20	8	14	11	9	7	6	6	1	3	100

Yechish. Bu yerda o‘simlik og‘irligi va urug‘ og‘irliklari sinflarga ajratilgan bo‘lib, bu sinflarning o‘rtalari *x*-25, 35 ... *u*-13, 18 ... deb olingan. 3 soni - umumiy og‘irligi 25 g hamda urug‘ og‘irligi 13 g dan bo‘lgan uch o‘simlik borligini ko‘rsatadi va hakazo. So‘nggi ustunda umumiy og‘irlikka mos o‘simliklar chastoasi joylashgan. 100 o‘simlikdan 5 tasining umumiy og‘irligi 25 gramm, 11 tasining og‘irligi 35 g va hokazo. So‘nggi satrda urug‘ og‘irligiga mos o‘simlik chastotalari n_y joylashgan. Endi korrelyasiya koeffitsienta *Y* ning *X* ga regressiya to‘g‘ri chizig‘ining tanlanma tenglamasini tuzamiz.

x qiymatlari o‘zgarmas ayirmasi 10 ga, *u* qiymatlari esa o‘zgarmas ayirmasi 5 ga teng ekaniga diqqatni jalb etib, shartli variantalarni kiritamiz. *x* o‘rniga $u = \frac{x-1}{10}$ miqdorni va u o‘rniga $v = \frac{y-8}{5}$ miqdorni kiritamiz.

Bu holda *x* ning 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 105, 115, 125 qiymatlari mos ravishda

i= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 qiymatlar bilan, *u* ning *u:* 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53, 58, 63, 68 qiymatlari esa *v* ning

v=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 qiymatlari bilan almashadi.

Natijada yangi shartli variantalar bo‘yicha quyidagi korrelyasion jadvalni hosil qilamiz (4-jadval).

v,u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	n_u
1	3	2											5
2		6	4					1					11
3		1	13	5									19
4		2	2	4	8	1							16
5			1		4	4	2						11
6					2	6	6	1					14
7							1	5					6
8								1	4	1			6
9									2	4	1	1	8
10										1		1	2
11												1	1
n_v	3	11	20	9	14	11	9	8	6	6	1	3	100

$\bar{u}, \bar{v}$ larni hisoblash uchun to‘rt maydon usulidan foydalanib 5-jadvalni tuzamiz.

Har bir katak o‘ngdagi yuqori va pastki chap burchakdagi raqamlarni mos ravishda v va u shartli variantalar qiymatlarining chastotasiga ko‘paytirish bilan hosil qilinadi. Bu yuqori o‘ng (pastki chap) burchakdagi raqamlarni satr (ustun) bo‘yicha yig‘ib oxirgi avvalgi ustunga (satrga) yozamiz.

Masalan, to‘rtinchi satr va beshinchi ustundagi bu raqamlar yig‘indisi quyidagicha topiladi:

$$70 = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 4\cdot 4 + 8\cdot 5 + 1\cdot 6 = 2 + 6 + 16 + 40 + 6$$

$$64 = 4\cdot 8 + 4\cdot 5 + 6\cdot 2 = 32 + 20 + 12.$$

Pastki chap burchakdagi sonlar chastotani u ga ko‘paytirishdan hocil qilinadi.

Ohirgi ustun (satr) kataklariga $u\cdot v(v\cdot u)$ qiymatlari joylashtirilib, ohirida ular yig‘indisi yoziladi. Bu jadvaldan foydalanib quyidagi hisoblashlarni bajaramiz:

5-jadval

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$u = \sum_u$	u-V
1	3 / 3	2 / 4											7	7
2		12 / 6	8 / 12 / 4										32	64
3		3 / 2	39 / 13	15 / 20 / 5									61	183
4		4 / 2	8 / 6	16 / 4	32 / 40 / 8	1 / 6 / 4							70	280
5			3		20	24	14						61	305

			5	1		20	4	20	4	10	2									
6							10		36		42		8						96	576
						12	2	36	6	36	6	6	1							
7											7		40						47	326
										7	1	5	5							
8													8		36		10		54	432
												8	1	32	4	8	1			
9															18		40		11		12	81	729
														18	2	36	4	9	1	9	1		
10																	10				12	22	220
																10	1			10	1		
11																					12	12	132
																				11	1		
$u = \sum$	3	21	60	31	64	60	53	51	50	54	9	30	486 543	3257						
$v = \sum$	3	42	180	124	320	360	371	408	450	540	99	360	3257							

$$\bar{u} = \frac{\sum n_{uv} u}{n} = \frac{u}{n} = \frac{486}{100} = 4{,}86, \quad \bar{v} = \frac{\sum n_{uv} v}{n} = \frac{v}{n} = \frac{543}{100} = 5{,}43.$$

Endi quyidagi yordamchi jadvallarni tuzamiz (5, 6, 7, 8, 9-jadvallar).

6-jadval

u	n_u	$n_u u$	$n_u u^2$
1	5	5	5
2	11	22	44
3	19	57	171
4	16	64	256
5	11	55	275
6	15	90	540
7	6	42	294
8	6	48	384
9	8	72	648
10	2	20	200
11	1	11	121
$\sum$	100	486	2938

7-jadval

v	n_u	$n_u v$	$n_u v^2$
1	3	3	3
2	10	20	40

3	20	60	180
4	9	36	144
5	14	70	350
6	11	66	396
7	9	63	441
8	8	64	512
9	6	54	486
10	6	60	600
11	1	11	121
12	3	36	532
$\sum$	100	543	3705

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum n_u u^2}{n} - \left(\bar{u}^2\right) = \frac{2938}{100} - \left(4{,}86\right)^2 = 5{,}7604.$$

$$\sigma_u = \sqrt{5{,}7604} = 2{,}400.$$

$$\sigma_v^2 = \frac{\sum n_v v^2}{n} - \left(\bar{v}^2\right) = \frac{3705}{100} - 29{,}4849 = 7{,}5651;$$

$$\sigma_v = \sqrt{7{,}5651} = 2{,}750.$$

Endi r_t ni hisoblaymiz:

$$r_t = \frac{\sum n_{uv} uv - n\bar{u}\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v} = \frac{1}{\sigma_u\sigma_v}\left(\frac{\sum n_{uv} uv}{n} - \bar{u}\bar{v}\right) =$$

$$= \frac{1}{2{,}4 \cdot 2{,}75}\left(\frac{3{,}257}{100} - 4{,}86 \cdot 5{,}43\right) = \frac{6{,}1802}{6{,}600} = 0{,}936.$$

Ma'lumki, r_t ning qiymati (± 1) ga yaqin chiqsa, biz *x* va *u* miqdorlar orasidagi bog‘lanishni chiziqli bog‘lanish deb qarashimiz mumkin.

x va u uchun quyidagilarni yozishizniz mumkin:

$$\bar{x} = \bar{u} \cdot h_1 + c_1;\ \bar{y} = \bar{v}h_2 + c_2;\ \sigma_x = \sigma_u h_1;\ \sigma_y = \sigma_v h_2.$$

Bundan

$$\bar{x} = 10\bar{u} + 5 = 63{,}50; \qquad \sigma_x = 10\sigma_u = 24{,}00$$

$$\bar{y} = 5\bar{v} + 8 = 35{,}15; \qquad \sigma_y = 5\sigma_y = 13{,}75;$$

$$C_{xy} = 50C_{uv} = 50\left(\frac{\sum n_{uv} uv}{n} - \bar{u}\bar{v}\right) = 50 \cdot 6{,}1802 = 309{,}01$$

kelib chiqadi.

Regressiya tenglamasini keltirib chiqarish uchun regressiya koeffitsientini hisoblaymiz:

$$\rho_{yx} = r_t \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0{,}936 \cdot \frac{13{,}75}{24} = 0{,}536.$$

u ning *x* ga regressiya tenglamasi $\overline{y_x} - \bar{y} = p_{yx}(x - \bar{x})$ ga asosan $\bar{y} = 35.15 + 0.536(x - 63.50)$ yoki $\overline{y_x} = 0.536 + 1.11$ bo‘ladi.

Endi *x* o‘rniga uning turli qiymatlarini qo‘yib, $\overline{y_x}$ qiymatlarini topamiz:

$$\bar{y}_1 = 0{,}536 \cdot 25 + 1{,}11 = 14{,}51 = 14{,}5$$

$$\bar{y}_2 = 0{,}536 \cdot 25 + 1{,}11 = 19{,}9$$

va hokazo. Quyidagi jadvalni tuzamiz (8-jadval).

8-jadval

x	$\bar{y}_x$	y'_x	$\bar{y}_x - y'_x$	x	$\bar{y}_x$	y'_x	$\bar{y}_x - y'_x$
25	14,5	15,0	-0,5	75	41,3	40,0	1,3
35	19,9	22,6	-2,7	85	46,7	47,2	-0,5
45	25,2	24,1	1,1	95	52,0	53,0	-1,0
55	30,6	29,9	0,7	105	57,4	54,6	-1,2
65	33,0	35,3	0,7	115	62,8	63,0	-0,2
				125	68,1	68,0	0,1

Jadvaldan ko‘rinadiki, xususiy o‘rtacha haqiqiy o‘rtacha qiymatga yetarlicha yaqin ekan.

25.1-eslatma. Uchinchi ustundagi y_x ning xususiy o‘rtacha qiymatlari quyidagicha toliladi:

$$y'_1 = \frac{13 \cdot 3 + 18 \cdot 2}{3 + 2} = 15;$$

$$y'_2 = \frac{18 \cdot 6 + 23 \cdot 4 + 48 \cdot 1}{6 + 4 + 1} = 22{,}6$$

va hokazo.

3-Misol. Tuproqning nisbatan namligi *(x)* va yopishqoqligi *(u)* to‘g‘risida aniqlangan ma'lumotlar quyidagicha(*n=12):*

x (%): 19,9; 20,9; 26,1; 29,4; 30,5; 40,3; 44,8; 47,6; 56,6; 58,3; 64,5 ; 75,6

$y\left(\frac{г}{см^2}\right)$ 0,0 ; 0,6; 0,1; 1,1 ; 1,7; 1,7; 2,6; 3,4; 4,2; 5,8; 6,3; 7,3.

Ma'lumotlarning korrelyasiya koeffitsientini va regressiya chizig‘ining tanlanma tenglamasini tuzing.

Yechish. Hisoblash jadvalini to‘g‘ridan-to‘g‘ri tuzamiz:

9-jadval

	$X(x)$	$Y(y)$	x^2	y^2	xy

1	19,9	0,0	396,01	0,00	0,00
2	20,9	0,6	436,81	0,36	12,54
3	26,1	1,1	681,21	1,21	28,71
4	29,4	1,2	864,36	1,44	35,28
5	30,5	1,7	930,25	2,89	51,85
6	40,3	1,7	1624,09	2,89	68,51
7	44,8	2,6	2007,64	6,76	116,48
8	47,8	3,4	2284,84	11,56	162,52
9	55,6	4,2	3091,36	17,64	233,52
10	58,3	5,8	3398,89	33,64	338,14
11	64,5	6,3	4160,25	39,69	406,35
12	76,6	7,3	5867,56	53,29	559,18
$\sum$	514,7	35,9	25742,67	171,37	2013,08

x va *u* qiymatlari bir martadan takrorlangani uchun to‘g‘ridan-to‘g‘ri formulalardan foydalanamiz:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{514.7}{12} = 42.89; \ \bar{x} = 42.89\%.$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{35.9}{12} = 2.99; \ \bar{y} = 2.99\frac{г}{см^2}.$$

$$\frac{1}{n}\sum\left(x-\bar{x}\right)^2 = \left[\sum x^2 - (\sum x)^2 : 12 = \left[25742{,}67 - (514{,}7)^2\right]:12 = 3666.33;\right.$$

$$\frac{1}{n}\sum\left(y-\bar{y}\right)^2 = \left[\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2\right]:12 = \left[171{,}37 - (35{,}9)^2\right]:12 = 63{,}97$$

$$\frac{1}{n}\sum\left(x-\bar{x}\right)\left(y-\bar{y}\right) = \left[2013{,}08 - 514{,}7\cdot 35{,}9\right]:12 = 473{,}27.$$

Endi tanlanma korrelyasiya koeffitsientini hisoblaymiz:

$$r_t = \frac{\sum\left(x-\bar{x}\right)\left(y-\bar{y}\right)}{\sqrt{\sum\left(x-\bar{x}\right)^2\sum\left(y-\bar{y}\right)^2}} = \frac{473{,}27}{\sqrt{3666{,}33\cdot 63{,}97}} = 0{,}977.$$

Regressiya koeffitsienti:

$$\rho_{yx} = r_t\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0{,}977\frac{\sqrt{63{,}97}}{\sqrt{3666{,}33}} = 0{,}13\frac{г}{см^2}.$$

Demak, regressiya tenglamasi quyidagicha bo’ladi:

$$Y_x - \bar{y} = \rho_{yx}\left(X - \bar{x}\right)$$

Yoki

$$Y_x = 2{,}99 + 0{,}13(x - 42{,}89) = 0{,}13x - 2{,}58,$$

$$Y_x = 0{,}13x - 2{,}58.$$

2-§. Egri chiziqli korrelyasiya

Agar regressiya grafigi egri chiziqli bo‘lsa, korrelyasion bog‘lanish *egri chiziqli korrelyasiya* deyiladi. Ikkinchi tartibli parabolik korrelyasiya bo‘lgan holda *U* ning *X* ga regressiyasining tanlanma tenglamasi

$$\bar{y}_x = ax^2 + bx + c \qquad (29.9)$$

ko‘rinishda bo‘ladi (ikkinchi tartibli parabolik korrelyasiya), *a*, *b* va *s* parametrlarni eng kichik kvadratlar usulidan foydalanib quyidagi normal tenglamalar sistemasidan topiladi:

$$\begin{cases} a\sum x^4 + b\sum x^3 + c\sum x^2 = \sum x^2\bar{y}_x \\ a\sum x^3 + b\sum x^2 + c\sum x = \sum x\bar{y}_x, \\ a\sum x^2 + b\sum x + cn = \sum \bar{y}_x. \end{cases} \qquad (29.10)$$

Bu *X* va *Y* miqdorlar takrorlanmay kelgan holdir.

Agar *X* va *Y* miqdorlar takrorlanib kelsa, ya'ni n_x va n_y chastotalarga ega bo‘lsa, ma'lumotlar korrelyasion jadval orqali berilgan bo‘lib, normal tenglama ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} a\sum n_x x^4 + b\sum n_x x^3 + c\sum n_x x^2 = \sum n_x x^2\bar{y}_x \\ a\sum n_x x^3 + b\sum n_x x^2 + c\sum n_x x = \sum n_x x\bar{y}_x, \\ a\sum n_x x^2 + b\sum n_x x + cn = \sum n_x \bar{y}_x. \end{cases}$$

Bunda *a*, *b* va *s* parametrlar topilib, (27.9) tenglamaga qo‘yiladi.

Huddi shu yo‘l bilan $\bar{X}$ning $\bar{Y}$ ga regressiyasining tanlanma tenglamasi

$$\bar{x}_y = a_1 y^2 + b_1 y + c \qquad (29.11)$$

formula yordamida topiladi.

U ning *X* ga korrelyasiyasining zichligini baholash uchun ushbu

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma}{\sigma_y} - \check{y}x \qquad (29.12)$$

tanlanma korrelyasion nisbat topiladi. Bu yerda

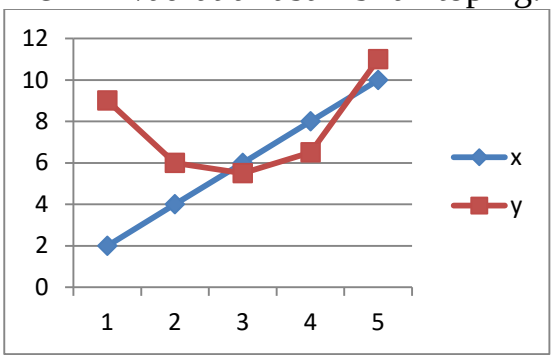
$$\sigma_{\bar{y}_x} = \sqrt{\frac{\sum n_x(\bar{y}_x - \bar{y})^2}{n}}, \qquad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum n_y(y_x - \bar{y})^2}{n}}. \qquad (29.13)$$

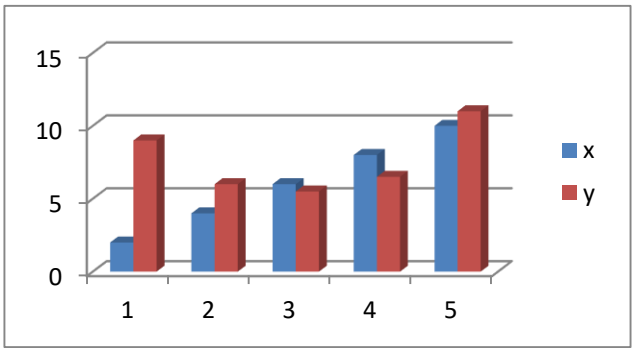
topiladi.

1-Misol. Tajriba natijasida quyidagi ma'lumotlar olingan:

x	2	4	6	8	10
y	9	6	5,5	6,5	11

x va u lar $y=ax^2+bx+c$ ko‘rinishdagi tenglama bilan bog‘langan deb, *a, b* va c ni eng kichik kvadratlar usuli bilan toping.





Yechish. Hisoblashlarni soddalashtirish uchun quyidagi jadvalni tuzamiz:

x	2	4	6	8	10	$\sum x = 30$
y	9	4	5,5	6,5	11	$\sum y = 38$
xy	18	24	33	52	110	$\sum xy = 237$
x^2	4	16	36	64	210	$\sum x^2 = 220$
x^2y	36	96	198	416	1100	$\sum x^2y = 1846$
x^3	8	64	216	512	1000	$\sum x^3 = 1800$
x^4	16	256	1296	4096	10000	$\sum x^4 = 15664$

Topilgan qiymatlarni normal tenglamaga qo‘yamiz:

$$\begin{cases} 15664a + 1800b + 220c = 1846 \\ 1800a + 220b + 30c = 237 \\ 220a + 30b + 5c = 38 \end{cases}$$

Endi bu sistemani *a, b, c* ga nisbatan yechamiz. Uchinchi tenglamani 44 ga ko‘paytirib, birinchi tenglamadan ayiramiz:

$$- \begin{cases} 15664a + 1800b + 220c = 1846 \\ 9680a + 1320b + 220c = 1672 \end{cases}$$

$$5984a + 480b = 174$$

Uchinchi tenglamani 6 ga ko‘paytirib, ikkinchi tenglamadan ayiramiz:

$$- \begin{cases} 1800a + 220b + 30c = 237 \\ 1320a + 180b + 30c = 228 \end{cases}$$

$$480a + 40b = 9$$

Shunday qilib, quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 5984a + 480b = 174 \\ 480a + 40b = 9 \end{cases}$$

Bu sistemani *a va b* ga nisbatan yechsak:

$$a = \frac{33}{112} \approx 0{,}3; \qquad b = -\frac{927}{290} \approx -3{,}3$$

kelib chiqali. Bulardan foydalanib *s* ni topamiz: $c \approx 14.5$. *x* va *u* orasidagi bog‘lanishni ko‘rsatuvchi (27.9) funksiya

$$\bar{y}_x = 0{,}3x^2 - 3{,}3x + 14{,}5$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

2-Misol. Quyidagi korrelyasion jadvalda berilgan ma'lumotlar orqali $\overline{y_x} = ay^2 + bx + c$ tanlanma regressiya tenglamasini va korrelyasion nisbatni toping:

x / u	2	3	5	n_y
25	20	-	-	20
45	-	30	1	31
110	-	1	48	49
n_x	20	31	49	n=100

Yechish. Parametrlarni topish uchun quyidagi hisoblash jadvalini tuzamiz (jadvaldagi kasr sonlar yaxlitlangan):

x	n_x	$\bar{y}_x$	$n_x \cdot x$	$n_x \cdot x^2$	$n_x \cdot x^3$	$n_x \cdot x^4$	$n_x\bar{y}_x$	$n_x\bar{y}_x \cdot x$	$n_x\bar{y}_x \cdot x^2$
2	20	25	40	80	160	320	500	1000	2000
3	31	47,1	93	279	837	2511	1460	4280	13141
5	49	108,7	245	1225	6125	30625	5325	26624	133121
$\sum$	100		378	1584	7122	33456	7285	32004	148262

$\overline{y_x}$ ni topish usulini tushuntiramiz:

$$\bar{y}_2 = \frac{20 \cdot 25}{20} = 25 \qquad \bar{y}_3 = \frac{30 \cdot 45 + 110}{31} = 47{,}1, \qquad \bar{y}_3 = \frac{1 \cdot 45 + 48 \cdot 110}{49} = 108{,}7.$$

Jadvaldagi topilgan qiymatlarni (27.9') formulaga qo‘yamiz:

$$\begin{cases} 33456a + 7122b + 1584c = 148262 \\ 7122a + 1584b + 878c = 32004 \\ 1584a + 378b + 100c = 7285 \end{cases}$$

Bu sistemami yechib quyidagilarni topamiz:

$$a=2,94; \quad b=7,27; \quad c=-1,25$$

Shunday qilib, izlanayotgan regressiya tenglamasi ushbu ko‘rinishga ega bo’ladi

$$\bar{y}_x = 2,94x^2 + 7,27x - 1,25$$

Bu tenglama bo‘yicha hisoblangan shartli o‘rtacha qiymatlar hisoblash jadvalidagi shartli o‘rtacha qiymatlardan sal farq qilishi mumkin, masalan x=2 da jadval bo‘yicha $\overline{y_1} = 25$, tenglama bo‘yicha esa

$$\bar{y}_2 = 2,94 \cdot 4 + 7,27 \cdot 2 - 1,25 = 25,05.$$

Demak, topilgan tenglama kuzatish ma'lumotlari bilan juda mos keladi.

Endi korrelyasion nisbatni topamiz. Buning uchun avval umumiy o‘rtacha qiymatni topamiz:

$$\bar{y} = \frac{\sum n_y \cdot y}{n} = \frac{20 \cdot 25 + 31 \cdot 45 + 49 \cdot 100}{100} = 72,35.$$

So‘ngra umumiy kvadratik chetlanishni topamiz:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum n_y (y - \bar{y})^2}{n}} \approx 37,3.$$

Gruppalararo o‘rtacha kvadratik chetlanishni topamiz:

$$\sigma_{\bar{y}_x} = \sqrt{\frac{\sum n_y (\bar{y} - \bar{y})^2}{n}} = \left[25(25 - 72,35)^2 + 45 \cdot (47,9 - 72,35)^2 + \right.$$

$$\left. + 110(107 - 72,35)^2 \right] : 100 = 35,9$$

Demak, korrelyasion nisbat taqriban quyidagiga teng:

$$\mu_{\bar{y}_x} = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_y} = \frac{35,9}{37,3} = 0,96.$$

Demak, tajriba natijalari asosida tasodifiy miqdorlar orasidagi bog’lanish qinuniyatlarini statistik tahlil qilib kafolatli aniqlash mumkin.

O’z-o’zini tekshirish uchun savollar

1. Korrelyatsion bog’lanishga ta’rif bering?
2. Korrelyatsiya nazariyasining asosiy vazifalari nimalardan iborat?
1. Tanlanma korelyatsiya koifesenti qanday formula bilan hisoblanadi?
3. Tanlanma korelyatsiya koifesentining xossalarini aytib bering.
4. Eng kichik kvadratlar usulini mohiyatini tuhuntiring?
5. Chiziqli bog’langan holda regressiya tenglamasi qanday tuziladi?

6. Chiziqli bog’lanmagan holda bog’lanish tenglamasi qanday tuziladi?
7. Korrelyatsion jadval haqida tushuncha bering?

Kalit so’zlar

Korrelyatsion bog’lanish, vazifalari, tanlanma korelyatsiya koifesenti, xossalari, eng kichik kvadratlar usuli, chiziqli bog’langan, chiziqli bog’lanmagan hollarda bog’lanish tenglamasi, korrelyatsion jadval.

Xulosa

Korrelyatsion bog’lanish, korrelyatsiya nazariyasining asosiy vazifalari, tanlanma korelyatsiya koifesenti, korrelyatsiya koifesentining xossalari, eng kichik kvadratlar usuli, chiziqli bog’langan, chiziqli bog’lanmagan hollarda bog’lanish tenglamalarini tuzish va korrelyatsion jadval mavzulari o’rganilgan.

Ilovalar

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$ **funktsiyasining qiymatlar jadvali**

Ilova-1

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,8986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3685	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3527	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,30,11	0,2989	0,2666	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,3155	0,2133	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,01989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1479	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1396	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0941	0,0925	0,0909	0,0893	0,0872	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,1734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0541	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0349	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0210	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0196	0,0093	0,0091	0,0088	0,0186	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0060	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0004	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004

3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ **Laplas funksiyasining qiymatlar jadvali**

Ilova -2

X	Φ(X)	X	Φ(X)	X	Φ(X)	X	Φ(X)	X	Φ(X)	X	Φ(X)	X	Φ(X)
0,00	0,000	0,46	0,1772	0,92	0,3212	1,38	0,4168	1,84	0,4671	2,30	0,4893	2,76	0,4971
0,02	0,0080	0,48	0,1844	0,94	0,3264	1,40	0,4192	1,86	0,4686	2,32	0,4898	2,78	0,4973
0,04	0,0160	0,50	0,1915	0,96	0,3315	1,42	0,4222	1,88	0,4699	2,34	0,4904	2,80	0,4974
0,06	0,0239	0,52	0,1985	0,98	0,3365	1,44	0,4251	1,90	0,4713	2,36	0,4909	2,82	0,4976
0,08	0,0319	0,54	0,2054	1,00	0,3413	1,46	0,4279	1,92	0,4726	2,38	0,4913	2,84	0,4977
0,10	0,0398	0,56	0,2143	1,02	0,3461	1,48	0,4306	1,94	0,4738	2,40	0,4919	2,86	0,4979
0,12	0,0478	0,58	0,2190	1,04	0,3508	1,50	0,4332	1,96	0,4750	2,42	0,4922	2,88	0,4980
0,14	0,0557	0,60	0,2257	1,06	0,3554	1,52	0,4353	1,98	0,4761	2,44	0,4927	2,90	0,4981
0,16	0,0636	0,62	0,2324	1,08	0,3599	1,54	0,4382	2,00	0,4772	2,46	0,4931	2.92	0,4982
0,18	0,0714	0,64	0,2389	1,10	0,3643	1,56	0,4406	2,02	0,4783	2,48	0,4934	2,94	0,4984
0,20	0,0793	0,66	0,2454	1,12	0,3686	1,58	0,4409	2,04	0,4793	2,50	0,4938	2,96	0,4985
0,22	0,0871	0,68	0,2517	1,14	0,3729	1,60	0,4452	2,06	0,4803	2.52	0,4941	2,98	0,4986
0,24	0,0948	0,70	0,2580	1,16	0,3770	1,62	0,4474	2,08	0,4812	2,54	0,4945	3,00	0,49865
0,26	0,1026	0,72	0,2642	1,18	0,3810	1,64	0,4495	2,10	0,4821	2,56	0,4948	3,20	0,49931
0,28	0,1103	0,74	0,2703	1,20	0,3840	1,66	0,4515	2,12	0,4830	2,58	0,4951	3,40	0,49968
0,30	0,1179	0,76	0,2764	1,22	0,3883	1,68	0,4535	2,14	0,4838	2,60	0,4953	3,60	0,499841
0,32	0,1255	0,78	0,2823	1,24	0,3925	1,70	0,4554	2,16	0,4846	2,62	0,4956	3,80	0,499928
0,34	0,1331	0,80	0,2881	1,26	0,3962	1,72	0,4573	2,18	0,4854	2,64	0.4959	4,00	0,499968
0,36	0,1406	0,82	0,2939	1,28	0,3997	1,74	0,4591	2,20	0,4861	2,66	0,4961	4,50	0,499997
0,38	0,1480	0,84	0,2995	1,30	0,4032	1,76	0,4608	2,22	0,4868	2,68	0,4963	5,00	0,499997
0,40	0,1554	0,86	0,3051	1,32	0,4066	1,78	0,4625	2,24	0,4875	2,70	0,4965		
0,42	0,1628	0,88	0,3106	1,34	0,4099	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,72	0,4967		
0,44	0,1700	0,90	0,3159	1,36	0,4131	1,82	0,4656	2,28	0,4887	2,74	0,4969		

St'yudent taqsimotining t_γ =t (n; γ)=T(n; γ) kritik qiytmatlari jadvali

Ilova-3

γ / n	0,95	0,99	γ / n	0,95	0,99
5	2,78	4,60	20	2,093	3,883
6	2,57	4,03	25	2,064	2,797
7	2,45	3,71	30	2,045	2,756
8	2,37	3,50	35	2,032	2,729

9	2,31	2,36	40	2,023	2,708
10	2,26	3,25	45	2,016	2,692
11	2,23	3,17	50	2,009	3,502
12	2.20	3.11	60	2.001	2.662
13	2.18	3.01	70	1.996	2.649
14	2.16	3.01	80	1.001	2.640
15	2.15	2.98	90	1.987	2.633
16	2.13	2.95	100	1.984	2.627
17	2.12	2.92	120	1.980	2.617
18	2.11	2.90	∞	1.960	2.576
19	2.10	2.88			

Q=q(γ, n) qiytmatlar jadvali

Ilova- 4

γ / n	0,95	0,99	γ / n	0,95	0,99
5	1.37	2.67	20	0.37	0.58
6	1.09	2.01	25	0.32	0.49
7	0.92	1.62	30	0.28	0.43
8	0.80	1.38	35	0.26	0.38
9	0.71	1.20	40	0.24	0.35
10	0.65	1.08	45	0.22	0.32
11	0.59	0.98	50	0.21	0.30
12	0.55	0.90	60	0.188	0.269
13	0.52	0.83	70	0.174	0.245
14	0.48	0.78	80	0.161	0.226
15	0.46	0.73	90	0.151	0.211
16	0.44	0.70	100	0.143	0.198
17	0.42	0.66	150	0.115	0.160
18	0.40	0.63	200	0.099	0.136
19	0.39	0.60	250	0.089	0.120

Fisher-Snedekor taqsimotining $F(k_1; k_2, \alpha)$ kritik qiymatlari jadvali (α=0,05)

Ilova-5

	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,45	199,50	215,72	224,57	230,17	233,97	238,89	243,91	249,04	254,32
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67

7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,21
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,91
9	5,12	4,26	3,63	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,79
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,72	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,25	2,96	2,73	2,57	2,47	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,62
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,01	1,92	1,70	1,39
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

χ^2 taqsimotning kritik qiymatlari jadvali

Ilova-6

zodlik darajasi soni, k	α qiytmatdorlik darajasi			
	0,01	0,05	0,95	0,99
1	6,6	3,8	0,0039	0,00016
2	9,2	6,0	0,103	0,020
3	11,3	7,8	0,352	0,115
4	13,3	9,5	0,711	0,297
5	15,1	11,1	1,15	0,554
6	16,8	12,6	1,64	0,872
7	18,5	14,1	2,17	1,24

8	20,1	15,5	2,73	1,65
9	21,7	16,9	3,33	2,09
10	23,2	18,3	3,94	2,56
11	24,7	19,7	4,57	3,05
12	26.2	21.0	5.23	3.57
13	27.7	22.4	5.89	4.11
14	29.1	23.7	6.57	4.66
15	30.6	25.0	7.26	5.23
16	32.0	26.3	7.96	5.81
17	33.4	27.6	8.67	6.41
18	34.8	28.9	9.39	7.01
19	36.2	30.1	10.1	7.63
20	37,6	31,4	10,9	8,26
21	38,9	32,7	11,6	8,90
22	40,3	33,9	12,3	9,54
23	41,6	35,2	13,1	10,2
24	43,0	36,4	13,8	10,9
25	44,3	37,7	14,6	11,5
26	45,6	38,9	15,4	12,2
27	47,0	40,1	16,2	12,9
28	48,3	41,3	16,9	13,6
29	49,6	42,6	17,7	14,3
30	50,9	43,8	18,5	15,0

Korrelyasiya koeffitsientini *0< r< 0.99*
qiymatlariga mos Z kriteriyaning qiymatlari jadvali

ilova-7

r	Z- ni qiymatlari									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,070	0,080	0,090
0,1	0,100	0,110	0,121	0,131	0,141	0,151	0,161	0,172	0,182	0,192
0,2	0,203	0,213	0,224	0,234	0,245	0,255	0,266	0,277	0,288	0,299
0,3	0,310	0,321	0,332	0,343	0,354	0,365	0,377	0,388	0,400	0,412
0,4	0,424	0,436	0,448	0,460	0,472	0,485	0,497	0,510	0,523	0,536
0,5	0,549	0,563	0,576	0,590	0,604	0,618	0,633	0,648	0,662	0,78

0,6	0,693	0,709	0,725	0,741	0,758	0,775	0,793	0,811	0,829	0,848
0,7	0,867	0,887	0,908	0,929	0,950	0,973	0,996	1,020	1,045	1,071
0,8	1,099	1,127	1,157	1,188	1,221	1,256	1,293	1,333	1,376	1,422
0,9	1,472	1,528	1,589	1,658	1,738	1,832	1,946	2,092	2,298	2,647
0,99	2,647	2,700	2,759	2,826	2,903	2,995	3,106	3,250	3,453	3,800

Tanlanma korrelyasiya koeffitsientining turli ozodlilik darajalariga mos kritik qiymatlari jadvali ($\alpha = 0.05$)

ilova-8

Ozodlik darajalari soni k= n-2	Qiymatdorlik darajasi $\alpha = 0,05$	Ozodlik darajalari soni k = n-2	Qiymatdor-lik darajasi $\alpha = 0,05$	Ozodlilik darajalari soni k = n-2	Qiymatdor-lik darajasi $\alpha = 0,05$
1	0,997	11	0,553	21	0,413
2	0,950	12	0,532	22	0,404
3	0,878	13	0,514	23	0,396
4	0,811	14	0,497	24	0,388
5	0,754	15	0,482	25	0,381
6	0,707	16	0,468	30	0,349
7	0,666	17	0,456	40	0,304
8	0,632	18	0,444	50	0,273
9	0,602	19	0,433	60	0,250
10	0,576	20	0,423	100	0,195

Foydalanilgan adabiyotlar

1). Т.Азларов, Ҳ. Мансуров Математик анализ, I ва II қисм, Т., “Ўқитувчи” 1986,1989 й.
2). Б. Абдалимов “Олий математика”, Тошкент, “Ўқитувчи”. 1994, 368 бет.
3). A.A.Fayziyev, B.Rajabov, L.Rajabova “Oliy matematika, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika”, Tashkent, tashdau, 2014,
4). В.Е.Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика. –М.: ЮНИТИ, 2002 г.
5). Jay L. Devore, Kenneth N. Berk. Modern Mathematical Statistiks with Applications (Second Edition).- Springer Science+Business Media, LLC 2012.
6). S. M.Blinder “Guide to Essential Math” 2nd Edition.Elsevier, USA 2013
7). John R. Fanchi “Math refresher for scientists and engineers”, 3rd.ed., Springer-Verlag, New York 2008.
8) B.L. BoWerman, R.T. O’Colonneell “Applied statistics”, Chikago, London, Toronto, 1997, 1273 p.
9). Дж. Франс, Дж. Х. М. Торнли «Математические модели в сельском схозяйстве» М., «Агропромиздат», 1990 г
10). О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных «Математические методы в в экономике” М. “дис” 2001, 368 стр.
11). Х.Э.Крынь**ский** « Математика для экономистов», М.»Статистика», 1970.
12). Е. Кочович «Финансовая математика с задачами и решениями», Москва, «ФиС», 2004, 380 стр.
13). А.С.Солодовников, В.А.Бабайцев, А.В. Браилов «Математика в экономике», М. »ФиС», 1-tom,1998, 220 стр.
14). А.Н. Колесников «Краткий курс математики для экономистов»-М. »ИНФРА-М», 1997, 210 стр.
15). В.М. Аньшин “Инвестиционный анализ” -М.”Дело”. 2000, 280 стр
16). Р.А. Ховард “Динамическое программирование и Марковские процессы”. Москва. ”Советское радио”, 1964,187 стр.
17). Х. А. Таха “Operations research an introduction” New York, 1982, 1-2

Qo’shimcha adabiyotlar

1. И.И. Баврин «Краткий курс высшей математики» - М. «Физматлит», 2003, 328 стр.
2. B.A.Kolemaev,O.B.Staroverov,V.B.Trundaevskiy “Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika”. M.”Visshaya shkola”, 1991. 400 str.

3. А.А.Файзиев « Аграр университетда математика фанини ўқитишнинг баъзи муаммолари ҳақида », ЎРОЎМТВ, ТошДТУ. “Олий математика” фани ўқитилишининг сифатини ошириш мавзусидаги Республика илмий-услубий ва амалий семинар материаллари тўплами, Тошкент-2019, 60-64 бетлар
4. Б.Абдалимов, А.А.Файзиев « Фермер хўжалигининг иқтисодий кўрсаткичларини математик моделлаштириш ёрдамида таҳлили». Ўзбекистон Аграр фани хабарномаси, № 2 (76), 2019, 164 –167 бет.
5. А.А.Файзиев, Атабаев М.М., Касимов Б.С. « Тупроқ унумдорлигини сақлашнинг муқобил стратегиясини аниқлашда Марков занжирини қўлла-нилиши », Журнал, Вестник аграрной науки Узбекистана, № 4 (82), 2020, 124-127 бет.
6. Б.Абдалимов,А.А.Файзиев, Н.Н.Мусаева “Talab va taklif funkyalari yordamida iqtisodiy jarayonlarni tahlil». Аграр соҳани барқарор ривожлантиришда фан, таълим ва ишлаб чиқариш интеграцияси «Профессор-ўқитувчи ва èш олимларнинг илмий-амалий конференцияси материаллари тўплами, Тошкент, ТошДАУ, 21 май 2018 йил , 394-396 бетлар.

Elektron darslik va qo‘llanmalar

2. А.А.Степанов. Высшая математика: Учебное пособие. Владивосток. WWW: vvruhttp:/wwwvvsu.ru
3. В.А.Илин, А.В.Курина. Высшая математика: Учебник.WWW.buyner. ruhttp:// w w w/buyner. ru /book/ d /
4. Электронное средства учебного назначения. АлтайТГУ.Высшая математика. А.С.Киркинский.http: //ou/tsu. ru/eleduphp? Pqagtuou/ tsn / ru
5. Р.Е.Донко. Высшая математика в упражнениях и задачах. Част 1-2. http:// www. isuctru/ /dept/vhk/smatireals :// www. Isuctru.
124-128 .

Internet ma’lumotlar.

1. http://www.ziyonet.uz
2. http://www.twirpx.com
3. http://moodle.samqxi.uz
4. http://alea.impa.br/english/index_v12.htm
5. http://www.ams.org/publications/journals/journalsframework/tpms

6. http://probability.univ.kiev.ua/tims/
7. http://www.mathnet.ru/
8. http://elibrary.ru/rubric_titles.asp?rcode=274300

Mundarija

	KIRISH	3
	I QISM **I - bob. Turli foizlarni hisoblash va ularni qishloq xo‘jalik masalalarini yechishga qo‘llanilishi.**	
1-§.	Oddiy foiz masalalarini yechish……	**5**
2-§.	Oddiy va murakkab foizli jamg‘armalarni hisoblash.....	**6**
3-§.	Qishloq xo’jalik korxonalarini o‘rtacha o‘sish sur’atini aniqlash.....	**7**
4-§.	Qimmatbaho qog‘ozlarning baho qiymatini aniqlash.....	**8**
5-§.	Xo‘jalikning uzoq muddatli qarzini to‘lash. Iste’mol krediti……	**9**
6-§.	Chegirib qolinadigan mablag‘ni (amortizasiya fondini) hisoblash. Chiziqli usul.....	**11**
7-§.	Qishloq xo‘jalik ekinlarining turli ekish sxemalari.....	**11**
8-§.	Kiritilayotgan investisiyalarni samaradorligini baholashda turli foizlarni qo’llanilishi.....	**13**
	I I QISM	
	II - bob. Analitik geometriya. Tekislikda analitik geometriyaning dastlabki tushunchalari	
1-§.	To‘g‘ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasi ……	**17**
2-§.	Ikki nuqta orasidagi masofa …….....	**20**
3-§.	Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish ……	**21**
4-§.	Uchburchak yuzi …….....	**22**
5-§.	Analitik geometriyaning asosiy masalalari ……	**25**
	III - bob. To‘g‘ri chiziq va uning tenglamalari	
1-§.	To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi ……	**25**
2-§.	To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi……	**28**
3-§.	To‘g‘ri chiziqning kesmalar bo‘yicha tenglamasi ……	**30**
4-§.	To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi ……	**31**
	IV- bob. To‘g‘ri chiziqqa oid asosiy masalalar	
1-§.	Berilgan nuqtadan (berilgan yo‘nalish bo‘yicha) o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi.....	**33**
2-§.	Ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi ……	**34**
3-§.	Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak ……..	**35**
4-§.	Ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik va perpendikulyarlik shartlari…….	**37**
5-§.	Berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa ……	**38**
6-§.	Ikki to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtasi ……	**39**

	V- bob. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar	
1-§.	Aylana va uning tenglamasi ……	**42**
2-§.	Ellips va uning tenglamasi ……..	**46**
3-§.	Giperbola va uning tenglamasi ……	**49**
4-§.	Parabola va uning tenglamasi …….....	**53**
	VI - bob. Fazodagi analitik geometriya	
1-§.	Fazoda to‘g‘ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasi ……	**56**
2-§.	Fazodagi ikki nuqta orasidagi masofa …….	**58**
3-§.	Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish ……..	**59**
	VII - bob. Tekislik va uning tenglamalari	
1-§.	Tekislikning umumiy tenglamasi	**60**
2-§.	Tekislikning kesmalar bo‘yicha tenglamasi	**64**
3-§.	Tekislikning normal tenglamasi ……..	**66**
4-§.	Berilgan nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi ……..	**67**
5-§.	Ikki tekislik orasidagi burchak ……	**68**
6-§.	Berilgan nuqtadan berilgan tekislikkacha bo‘lgan masofa……..	**69**
	VIII - bob. Ikkinchi tartibli sirtlar	
1-§.	Sfera va uning tenglamasi ……...	**71**
2-§.	Ellipsoid	**72**
3-§.	Giperboloidlar	**73**
4-§.	Paraboloidlar	**74**
5-§.	Qutb koordinatalar sistemasi	**75**
	IX - bob. Chiziqli va vektorlar algebrasining boshlang‘ich tushunchalari	
1-§.	Chiziqli algebraning asosiy tushunchalari	**77**
2-§.	Determinantlarni hisoblash qoidalari va xossalar…….	**77**
3-§.	Chiziqli tenglamalar sistemasi……..	**81**
4-§.	Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish…….	**83**
5-§.	Matritsa. Matritsalar ustida amallar. Teskari matritsani topish. Matritsaning rangi……...	**86**
6-§.	Chiziqli tenglamalar sistemasini matrisaviy usul bilan yechish……...	**87**
7-§.	Kroneker –Kapelli teoremasi. Bir jinsli n no’malumli n ta tenglamalar sistemasini yechish……...	**90**
8-§.	Matritsalarni iqtisodiy masalalarni yechishga qo`llanilishi. Leontevning xo’jaliklararo balans tenglamalari…….	**95**
9-§.	Vektorlar algebrasining asosiy tushunchalari	**101**
10-§.	Ortogonal vektorlarni baho va infillyasiya indekslarini aniqlashga qo‘llanilishi	**111**
	III qism.	
	X - bob. Matematik tahlil	
1-§.	Dastlabki tushunchalar …….	**114**
2-§.	Sonning absolyut qiymati ……	**115**
3-§.	O‘zgaruvchi va o‘zgarmas miqdorlar ……..	**116**
4-§.	Funksiya tushunchasi	**116**
5-§.	Funksiyaning berilish usullari …….....	**117**

6-§.	Funksiyaning grafigi ……	**118**
7-§.	Funksiyaning chegaralanganligi ……..	**120**
8-§.	Juft va toq funksiyalar …….	**121**
9-§.	Monoton funksiyalar	**122**
10-§.	Davriy funksiya	**122**
11-§.	Murakkab funksiya ……...	**123**
12-§.	Teskari funksiya	**123**
13-§.	Sodda (elementar) funksiyalar …….	**124**
14-§.	Iqtisodiy va qishloq xo'jaligida qo'llaniladigan ishlab chiqarish funksiyalariga misollar……	**129**
	XI - bob. Natural argumentli funksiya	
1-§.	Sonlar ketma-ketligi tushunchasi …….	**131**
2-§.	Sonlar ketma-ketliklari ustida amallar ……..	**132**
3-§.	Sonlar ketma-ketligining limiti	**133**
4-§.	Cheksiz kichik hamda cheksiz katta miqdorlar orasidagi bog'lanish ……	**137**
5-§.	Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari	**138**
6-§.	Ketma-ketlik limitining mavjudligi haqida teoremalar …….	**139**
	XII - bob. Funksiya limiti	
1-§.	Funksiya limiti tushunchasi ……...	**142**
2-§.	Limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalari	**145**
3-§.	Ajoyib limitlar	**146**
4-§.	Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar. Funksiyalarni solishtirish	**148**
	XIII - bob. Funksiyaning uzluksizligi	
1-§.	Funksiya uzluksizligi ta'rifi ……..	**150**
2-§.	Funksiyaning uzilishi	**152**
3-§.	Uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar	**153**
4-§.	Elementar funksiyalarning uzluksizligi	**154**
5-§.	Funksiya uzluksizligidan foydalanib muhim limitlarni hisoblash……...	**154**
6-§.	Uzluksiz funksiyalarning xossalari	**156**
7-§.	Funksiyaning tekis uzluksizligi ……	**156**
8-§.	Kompleks sonlar	**158**
	XIV - bob. Funksiyaning hosilasi va differensiali	
1-§.	Tezlik haqida masala	**162**
2-§.	Funksiya hosilasining ta'rifi …….....	**162**
3-§.	Hosilaning geometrik ma'nosi ……..	**165**
4-§.	Funksiyaning uzluksiz bo'lishi bilan uning hosilaga ega bo'lishi orasidagi bog'lanish …….	**166**
5-§.	Teskari funksiyaning hosilasi ……...	**166**
6-§.	Murakkab funksiyaning hosilasi ……...	**167**
7-§.	Hosila hisoblashdagi sodda qoidalar	**168**
8-§.	Elementar funksiyalarning hosilalari	**169**
9-§.	Teskari trigonometrik funksiyalarning hosilasi	**171**
10-§.	Hosilalar jadvali	**172**
11-§.	Funksiyaning differensiallanuvchiligi tushunchasi ……	**172**

12-§.	Funksiyaning differensial ta'rifi	**173**
13-§.	Differensiallar jadvali ……..	**175**
14-§.	Funksiya differensialining sodda qoidalari	**175**
15-§.	Yuqori tartibli hosila va differensiallar	**176**
16-§.	Differensial hisobning asosiy teoremalari	**177**
	XV - bob. Differensial hisobning tatbiqlari	
1-§.	Funksiyaning o‘suvchi va kamayuvchi bo‘lishi	**181**
2-§.	Funksiyaning ekstremumlari ……	**182**
3-§.	Funksiya ekstremumining zaruriy sharti	**182**
4-§.	Funksiya ekstremumining yetarli shartlari	**183**
5-§.	Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari	**187**
6-§.	Egri chiziqning qavariqligi va botiqligi. Bukilish (egilish) nuqtasi ……	**187**
7-§.	Egri chiziqning asimptotatari ……	**191**
8-§.	Funksiyani tekshirishning umumiy sxemasi	**193**
9-§.	Aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidalari	**194**
10-§.	Differensial hisobining tatbiqlari.Bahoga nisbatan talabning egiluvchanligini aniqlash……..	**196**
11-§.	Iqtisodiy jarayonlarni nisbiy o`zgaruvchanligini tahlili.....	**198**
	XVI - bob. Aniqmas integral	
1-§.	Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral	**202**
2-§.	Aniqmas integralning xossalari ……	**203**
3-§.	Asosiy integrallar jadvali ……..	**204**
4-§.	Integrallash usullari …… …….	**206**
5-§.	Sodda kasr va ularni hisoblash …….	**210**
6-§.	Ratsional funksiyalarni integrallash	**212**
7-§.	Ba'zi irratsional funksiyalarni integrallash	**213**
8-§.	Trigonometrik funksiyalarni integrallash	**216**
	XVII - bob. Aniq integral	
1-§.	O‘tilgan yo‘l haqidagi masala ……...	**219**
2-§.	Integral yig‘indi ……	**220**
3-§.	Aniq integral ta'rifi ……...	**220**
4-§.	Aniq integral xossalari …….....	**223**
5-§.	Aniq integrallarni hisoblash ……..	**227**
6-§.	Aniq integralni hisoblash usullari	**230**
7-§.	Aniq integrallarni taqribiy hisoblash	**232**
	XVIII - bob. Aniq integralning ba'zi tatbiqlari	
1-§.	Tekis shaklning yuzi va uning aniq integral orqali ifodalanishi……	**235**
2-§.	Yoy uzunligi va uning aniq integral orqali ifodalanishi……	**238**
	XIX - bob. Xosmas integrallar	
1-§.	Chegaralari cheksiz xosmas integrallar	**240**
2-§.	Yaqinlashuvchi xosmas integralning xossalari	**241**
3-§.	Chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrallari	**243**
	XX - bob. Ikki argumentli funksiyalar	
1-§.	Ikki argumentli funksiya tushunchasi	**245**

2-§.	Tekislik nuqtalaridan iborat ketma-ketlik va uning limiti……	**248**
3-§.	Ikki argumentli funksiya va uning limiti	**250**
4-§.	Ikki argumentli funksiyaning uzluksizligi	**253**
5-§.	Ikki argumentli funksiyaning hosilasi va differensiallari……	**255**
6-§.	Funksiyaning to‘liq orttirmasi formulasi	**257**
7-§.	Ikki argumentli funksiyaning differensiali	**257**
8-§.	Ikki argumentli funksiyaning yuqori tartibli xususiy hosilalari va differensial-lari……	**260**
9-§.	Ikki argumentli funksiyaning ekstremum qiymatlari……	**262**
10-§.	Funksiya ekstremumining zaruriy sharti	**263**
11-§.	Funksiya ekstremumining yetarlilik sharti	**263**
12-§.	Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarni qishlo xo’jalik va iqtisodiy masalalani yechishga qo‘llanilish……	**266**
	XXI - bob. Ikki argumentli funksiyaning integrali	
1-§.	Ikki karrali integral	**272**
2-§.	Egri chiziqli integrallar ……	**276**
3-§.	Parametrlarga bog‘liq integrallar	**279**
	XXII - bob. Qatorlar	
1-§.	Sonli qatorlar	**283**
2-§.	Yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari	**286**
3-§.	Qatorlarning yaqinlashuvchiligi ……..	**288**
4-§.	Hadlarining ishoralari almashinib keladigan qatorlar. Leybnits teoremasi……..	**292**
5-§.	Ixtiyoriy hadli qator. Qatorning absolyut yaqinlashuvchiligi……	**294**
6-§.	Funksional qatorlar	**295**
7-§.	Tekis yaqinlashuvchi funksional qatorning xossalari……	**299**
8-§.	Darajali qatorlar ……	**300**
9-§.	Darajali qatorning xossalari ……..	**303**
10-§.	Teylor va Makloren qatorlari. Funksiyalarni Makloren qatoriga yoyish va ularni taqribiy hisoblashlarga tatbiqlari.....	**304**
	XXIII - bob. Differensial tenglamalar	
1-§.	Differensial tenglama tushunchasi	**308**
2-§.	Birinchi tartibli differensial tenglamalar	**309**
3-§.	Bir jinsli tenglamalar ……	**310**
4-§.	Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar……..	**312**
5-§.	Ikkinchi tartibli chiziqli differensal tenglamalar……..	**313**
6-§.	O‘zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar……	**314**
7-§.	Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsientli bir jinsli bo’lmagan chiziqli differen-sial tenglamalar ……..	**317**
8-§.	Qishloq xo’jalik ekinlarini o’sish jarayonini matematik modellashtirish yorda-mida o’rganish……..	**320**
9-§.	Daraxtlarni o’sish jarayonini differensial tenglamalar yordamida o’rganish.....	**322**
	IV qism	
	XXIV - bob. Ehtimollar nazariyasi	

1-§.	Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalari	**326**
2-§.	Tasodifiy hodisalar ustida amallar	**327**
3-§.	Hodisa ehtimolining ta'riflari	**328**
4-§.	Ehtimollarni qo‘shish teoremalari	**332**
5-§.	Ehtimollarni ko‘paytirish teomalari	**334**
6-§.	To‘la ehtimol formulasi. Bayes formulasi	**336**
7-§.	O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tajribalar ketma-ketligi. Bernulli formulasi……	**338**
8-§.	Puasson teoremasi	**343**
9-§.	Muavr-Laplasning lokal va integral teoremalari	**345**
10-§.	Markov zanjiri. Asosiy tushunchalar va teoremalar.....	**349**
11-§.	Markov zanjirini qishloq xo‘jalik masalalarini yechishga qo‘llanilishi.....	**350**
12-§.	Tuproq unumdorligini saqlashning muqobil strategiyasini aniqlashda Markov zanjirini qo‘llanilishi.....	**353**
	XXV - bob. Tasodifiy miqdorlar	
1-§.	Tasodifiy miqdorlar turlari ……...	**359**
2-§.	Tasodifiy miqdor ehtimollarining taqsimot qonuni …….	**360**
3-§.	Uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Taqsimot funksiyasi …….	**362**
4-§.	Taqsimot funksiyasining xossalari	**363**
5-§.	Tekis taqsimot	**366**
6-§.	Normal taqsimot	**367**
	XXVI - bob. Tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari	
1-§.	Tasodifiy miqdorning matematik kutilishi	**369**
2-§.	Tisodifiy miqdorning dispersiyasi	**374**
3-§.	Ehtimollar nazariyasining limit teoremalari	**378**
4-§.	Markaziy limit teoremani qishloq xo‘jalik masalalarini yechishga qo‘llanilishi doir namunaviy misollarning yechimi…….	**382**
	XXVII - bob. Matematik statistika elementlari	
1-§.	Tanlanma usul	**385**
2-§.	Tanlanmaning statistik taqsimoti ……..	**386**
3-§.	Empirik taqsimot funksiyasi …….	**389**
4-§.	Poligon va gistogramma	**391**
5-§.	Taqsimot parametrlarining statistik baholari	**394**
6-§.	Tanlanma o‘rtacha qiymat va tanlanma dispersiya	**395**
7-§.	Bahoning aniqligi, ishonchlilik ehtimoli, ishonchlilik intervali ……...	**397**
8-§.	Tanlanma o‘rtacha qiymat va tanlanma dispersiyani hisoblashning ko‘payt-malar usuli ……	**404**
	XXVIII - bob. Statistik gipotezalarni tekshirish .	
1-§.	Statistik gipotezalarni tekshirish.Normal taqsimlangan bosh to`plamlarning dispersiyallari tengligi haqidagi statistik gipotezani Fisher-Snedekor kriteriyasi bilan tekshirish……..	**408**
2-§.	Normal taqsimlangan bosh to`plamlarning o`rtaqiytmatlari tengligi haqidagi statistik gipotezani Styudent kriteriyasi bilan tekshirish……..	**410**
3-§.	Qishloq xo`jalik masalalarini yechishga Fisher-Snedekor va St’yudent kriteriyalarini qo`llanishiga doir namunaviy masalalarni yechimi…….	**411**

4-§.	Fisher-Snedekor va St'yudent kriteriyalarini qishloq xo`jaligi masalalarini yechishga qo`llanishiga doir mustaqil yechish uchun misollar……	**412**
5-§.	O`zaro bog`liq bosh to`plamlarning o`rta qiymatlarini taqqoslash. Eng kichik ahamiyatli farq va uni qishloq xo`jalik masalalarini yechishga qo`llanilishi…...	**413**
6-§.	Bir faktorli dispersion tahlil usuli va uni qishloq xo`jalik masalalarini yechishga qo`llanilishi……..	**417**
7-§.	Bir faktorli dispersion tahlil usulini qishloq xo`jaligiga qo`llanishiga doir namunaviy misollarning yechimi…….	**420**
8-§.	Bosh tuplamni normal taqsimlanganligi haqidagi statistic gepotezani Pirsonning χ^2 -kriteriyalari bilan tekshirish……	**424**
9-§.	Pirsonning χ^2 – kriteriyasia doir mustaqil yechish uchun misollar……	**426**
	XXVIII - bob. Korrelyasiya nazariyasi	
1-§.	Chiziqli korrelyasiya	**429**
2-§.	Egri chiziqli korrelyasiya …….....	**437**
	Ilovalalar……	**442**
	Foydalanilgan adabiyotlar.....	**447**
	Mundarija	**449**
	Glossariy	**454**
	Mustaqil ta'lim mavzulari	**461**
	Testlar	**464**
	Shakllar	**476**
	Buyuk matematik olimlar	**497**

GLOSSARIY

Atamaning o'zbek tilida nomlanishi	Atamaning ingliz tilida nomlanishi	Atamaning rus tilida nomlanishi	Atamaning ma'nosi

I –tur xatolik	An error in the first tipe I	Ошибка первого рода	Qaror qabul qilish jarayonida to’g’ri gipotezani rad(inkor) etilishi
II- tur xatolik	An error in the second tipe II	Ошибка второго рода	Qaror qabul qilish jarayonida noto’g’ri gipotezani qobul qilinishi
Algebraik tushuncha	Algebraic concepts	Алгебраические понятия	Математиканинг қисми бўлиб, алгебраик амалларни бажариш қонуниятларни ўрганади
Altirnativ gipoteza	Alternative hypothesis	Альтернативная гипотеза	Qarlayotgan asosiy gipotezaga qarama qarshi gipoteza
Amortizasiya fondi	Depreciation fund	Амортизационны й фонд	Korxona, traktor,texnika vositalarini vaqt o’tishi bilan eskirishi hisobiga,chegirib qolinadigan mablag’ miqdori
Asosiy gipoteza	Hypothesis null	Основная гипотеза	Tekshirilayotgan asosiy gepoteza
Asosli baho	Based estimate	Состоятельная оценка	Tanlanma mahsulotining no’malum parametiri bahosining nomalum parametriga baho qiymatlarining yaqin bo’lishi
Baho	Estimate	Оценка	Tanlanmaning har qanday sonli funksiysi
Bernulli sxemasi	Bernulli scheme	Схема Бернулли	Har bir tajribada ikki natijaga ega bo’ladigan bo’g’liqmas sinovlar ketma-ketligi
Birgalikda bo’lmagan hodisa	No events	Несовместый события	Bir vaqtda ro’y berishi mumkin bo’lmagan hodisalar

Bog'liq hodisalar	Events	Зависимый события	Birining ro'y berishi ikkinchisining ro'y bergan yoki ro'y bermaganligi bog'liq bo'lgan hodisalar
Bog'liqmas sinovlar	Independent trials	Независимый испытаний	Qaror qabul qilish jarayonida
Bog'liqmas hodisalar	Independent events	Независимый событий	Natijalari bog'liqmas bo'lgan sinovlar
Vaqtga bog'liq qator	Time series	Временный ряд	Vaqtga bog'liq tasodifiy jarayoning qiymatlari
Variasion qator	Variatsion series variables	Вариационный ряд	O'sish tartibida joylashgan varianta ketma-ketligi
Gistogramma	Histogram	Гистограмма	Interval variasion qaror berilishining grafik usuli
Determinant	Determinant	Детерминанта	Determinant
Diskret tasidifiy miqdor	Discrete random	Дискретная случайная величина	Chekli yoki sanoqli sondagi turli qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan tasodifiy miqdor
Dispersion tahlili	Dispersion analysis	Дисперсионный анализ	Sifatli omillarning o'zgarishiga bog'liq natijalarning statistic tahlil qilinishi
Dispersiya	Dispersion	Дисперсия	Tasodifiy miqdor qabul qiladigan qiymatlarning, shu tasodifiy miqdor matematik qutulishidan o'rtacha chetlanishini ko'rsatuvchi kattalik
Yopiq soha	Off the field	Замкуная область	Chegara nuqtalarini qabul qiladigan soha tushuniladi

Jamg'arma	Accumulation	Накопление	Bankka qo'yilgan A so'mni kelishilgan ma'lum bir muddat oralig'ida (oy, kvartal , yil) p % qo'shilib jamg'arma hosil bo'ladi
Zichlik funksiyasi	Density function	Функция плотности	Uzluksiz tasodifiy miqdor funksiyasining hosilasi
Intervalli baho	Assessment of interval	Оценка интервальная	Baholanayotgan parametrni qoplaydigan intervalning uchlari bo'lgan ikki son bilan aniqlanadigan baho
Ishonchlilik oralig'I	Confidence interval	Доверительный интервал	Baholanayotgan no'malum paramert qiymatlari ma'lum bir ehtimollik bilan joylashishi mumkin bo'lgan oraliq
Katta sonlar qonuni	Law of Large Numbers	Закон больших Чисел	Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligining ma'lum shartlarda o'zgarmas songa yaqinlashishi
Kesma	Cut	Отрезок	To'g'ri chiziqli ikki nuqta bilan chegaralangan ichki qismi
Kovarasion tahlil	Analysis Kovariatsion	Ковариационный анализ	$(a_1,a_2,...,a_L,$ □□□$^2)$ Modelning parametrlari nuqtaviy va intervallic baholarni topish, ular haqidagi har hil gipotezalarni tekshirish imkoniyati

Korrelyasion bog'lanish	Korrelyatsion link	Корреляционная зависимость	Bir tasodifiy miqdorning qiymatlari o'zgarganda ikkinchi tasodifiy miqdor shartli o'rta qiymatning o'zgarishi

Korrelyasion tahlili	Analysis Korrelyatsion	Корреляционный анализ	Sifat belgilariga va miqdoriy belgilarga ega bo'lgan nazariy-ehtimoliy modellarni o'rganish bilan shug'ullanadi, yani regression va dispersion usullarni birlashtiradi
Kriteryning quvvatini oshirish	To increase the power of the criteria	Увеличения мощности критериев	II– tur hatolikni kamaytirish
Lyapunov sharti	Lyapunov condition	Условия Ляпунова	Bir hil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun markaziy limit teorimasining o'rinli bo'lish sharti
Markaziy limit teorema	Central Limit Theorem	Центральная предельная теорема	Normal taqsimot funksiyasiga yaqinlashishni ifodalovchi har qanday limit teorema
Matematik qutulish	Mathematical names	Математические ожидания	Tasodifiy miqdor qabul qilishi mumkin bo'lgan o'rtacga qiymat .

Momentlar usuli	Method of Moments	Метод моментов	Tanlanma nomalum parametrini hisoblashda naariy momentlarni empirik momentlarga tenglash natijasida hosil bo'ladigan tenglamalar sestimasini yechish natijasida hosil bo'lgan bahoni tanlash
Muqarrar hodisa	Unavoidable	Достоверный события	Malum shartlar kompleksi bajarilganda har doim ro'y beradigan hodisa
Murakkab gipoteza	Compound hupothesis	Сложная гипотеза	Tarkibida ikki va undan ortiq taqsimot qonunida ega bo'lgan gipoteza

Murakkab foizli jamg’arma	Compound interest savings	Сложные проценты экономии	Agar har bir kelishilgan vaqt oralig’ida bog’lanish pulning o’sish foiziga nisbatan fiozi qo’shib borilsa murakkab foizli jamg’arma hosil bo’ladi
Oddiy foizli jamg’arma	Simple interest savings	Простые процентные сбережения	Agar boshlang’ich A so’m pul miqdorini har bir kelishilgan vaqt oralig’ida r%ni qo'shib borilsa oddiy foizli jamg'arma hosil bo'ladi
Ochiq soha	The open field	Открытое интервал	Chegara qiymatlaridan tashqari qiymatlar qobil qiladigan sohaning turi tushiniladi

Poligon	Polygon	Полигон	Diskret variatsion qatorni grafik izohi.
Reprezentativ tanlanma	Representative sample	Выборка репрезентативная	Bosh to’plamning xususiyatlarini to’la saqlovchi tanlanma to’plam
Ro’y bermaydigan hodisa	That does not happen in the event	Невозможный события	Malum shartlar kompleksi bajarilganda ro’y berishi mumkin bo’lmagan hodisa
Siljimagan baho	Estimate unbiased	Несмешенная события	Bahoning matematik kutulishi baholanayotgan paramertga teng bo’lishi
Sodda gipoteza	Simple hypothesis	Простая гипотеза	Tarkibida bitta taqsimot qonuni bo’lgan gipoteza
Statestik bo’g’lanish	Statistical link	Статистическая зависимость	Bir tasodifiy miqdorning qiymatlari o’zgarganda ikkinchi tasodifiy miqdor taqsimot qonunining o’zgarishi

Statestik gipoteza	Statistical hypothesis	Статистическая гипотеза	Tanlanma nomalum taqsimot qonunining nomalum parametri yoki ko'rinishi haqidagi har qanday taxmin
Statestika	Statistics	Статистика	Tanlanma elenentlardan tashkil topgan har qanday sonli funksiya
Takrorlanuvchi tanlanma	Repeated sampling	Повторный выборка	Har bir tanlangan element asosiy to'plamga tanlanma qaytarilishi

Taqsimot qonuni	Distributive law	Закон распределения	Diskret tasodifiy miqdorlar qabul qiladigan qiymatlar va shu qiymatlarni qabul qlish ehtimollari jadvali
Taqsimot funksiyasi	Distribution function	Функция распределения	X tasodifiy miqdorning x qiymatidan kichik bo'lish ehtimoli
Taqsimotning emperik funksiyasi	Function of the division of experimental	Функция разделения экспериментальной	Har bir x_i qiymat uchun $X<x$ hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaydigan funksiya
Tanlanma	Sample	Выборка	Bo'g'liqmas va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi
Tasodifiy miqdor	Random	Случайный	Elementlar hodisalar fazosida aniqlangan har qanday sonli funksiya
Tasodifiy hodisa	Random event	Случайное событие	Malum shartlar kompleksi bajarilganda ro'y berishi ham bermasligi ham mumkin bo'lgan hodisa
Teng imkoniyatli hodisalar	Equal Opportunities events	Равновозможный события	Ro'y berish imkoniyatlari bir xil bo'lgan hodisalar

Trend	trend	Тенденция	Tasodifiy faktorlarni silliq o’zgarishini ifodalovchi komponenta

To’lov badali	Payment fee	Плата за платеж	Fermer xo’jaligini n muddatga olgan qarzi (kredet ga kelishilgan muddatlarda to’lab boriladigan pul miqdori
Uzluksiz	Random	Непрерывная	Qabul qiladigan
Tasodifiy miqdor	variables	случайная величина	Qiymatlarni sonlar o’qining birorta oralig’ini to’ldirishi mumkin bo’lgan tasodifiy miqor
O’rtacha kvadratik chetlanish	Mean squart deviations	Среднее квадратическое отклонения	Tasodifiy miqdor despersiyasining kvadrat ildizdan chiqarilgan kattalik
O’rtacha o’sish surati	The average growth rate	Средние темпы роста	Fermer xo’jaligi yoki ishlab chiqarish korxonasining malum bir vaqt (yil) oralig’idagi iqtisodiy o’sish ko’rsatkichi
Funksional bog’lanish	Functional link	Функциональная зависимость	Ikki nuqta orasida bir qiymatli moslik o’rnatilshi
Haqiqatga eng yaqin baholash usuli	A method of assessing the closest to the truth	Метод максимальна правдоподобная оценка	Tanlanmaning nomalum parametrini baholashda noalum parametrini tanlanmaning ro’y berishi eng kata ehtimolga ega bo’lishi shartida toppish usuli
Hodisa	Event	Событие	Elementar hodisalar fazosining har qanday qismi

Hodisalarning to'la guruhi	Group events	Польная группи событии	Juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan va yig'indisi muqarrar hodisaga teng bo'lgan hodisalar guruhi
Shartli ehtimol	Conditional Probability	Условная вероятность	Bir hodisaning ikkinchi ro'y berganligi shartidagi ehtimollik
Elementar hodisa	Elementary	Элементарных событий	Tajribaning mumkin bo'lgan barcha natijalaridan iborat bo'lgan elementar hodisalar fazosining elementi
Elementar hodisalar fazosi	Elementary events space	Пространство элементарных событий	Har qanday bo'sh bo'lmagan to'plam . Odatda elementar hodisalar fazosi sifatida tajribaning mumkin bo'lgan barcha natijalaridan iborat bo'lgan to'plam qaralad
Eng katta	The largest	Наибольшее	Bog'liqmas tajribalar
Ehtimolli son	Possible number of	Возможное количество	Ketma-ketligidan biror hodisaning eng katta ehtimollikka ega bo'lgan ro'y berishlari soni
Effiktiv baho	Effective evaluation	Эффективная оценка	Nomalum parameter uchun baholarning eng kichik despersiyasiga ega bo'lishi
Ehtimol	Probably	Вероятно	Hodisaning ro'y berish imkoniyatini ko'rsatuvchi kattalik.

II.MUSTAQIL TA'LIM MAVZULARI

1. Bir jinsli tenglamalar sistemasini yechish usullari mavzusini o'rganishda "**SWOT-tahlil**" metodidan foydalanish.
2. Chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirish.Kroneker- Kapelli teoremasi mavzusini

o’rganishda**“Kyes-stadi”** metodidan foydalanish.

3. Matrisalar algebrasining iqtisodiy masalalarni yechishda qo’llanilishi. mavzusini o’rganishda**“Tushunchalar tahlili”** metodidan foydalanish.
4. Tekislikda va fazoda koordinatalar sistemalari. Parallel ko’chirishda, simmetriyada va burishda Dekart koordinatalarini almashtirish. . mavzusini o’rganishda**“Baliq skleti”** metodidan foydalanish.
5. Ikkinchi tartibli sirtlarning to’gri chiziqli yasovchilari. Chiziqli sirtlar. Ikkinchi tartibli sirtlarni injener-texnik masalalarini yechishga qo’llanilishi. . mavzusini o’rganishda**“Ven diogrammasi”** metodidan foydalanish.
6. To’plamlar va ular ustida amallar. To’plamlarning yuqori va quyi chegaralari. Bolsano-Veyershtrass teoremasi. mavzusini o’rganishda“**“SWOT-tahlil”** metodidan foydalanish.
7. Murakkab funksiyaning limiti va uzluksiz funksiyalarning xossalari.(Oraliq qiymat haqida teorema) . mavzusini o’rganishda**“BBB”** metodidan foydalanish.
8. Teskari funksiya uzluksizligi va differensiallanuvchiligi. mavzusini o’rganishda**“Tushunchalar tahlili”** metodidan foydalanish.
9. Ko’rsatkichli darajali va giperbolik funksiyalar hosilalarini hisoblash. . mavzusini o’rganishda**“Tushunchalar tahlili”** metodidan foydalanish.
10. Aniqmasliklarni yechish Lolital qoidalari . mavzusini o’rganishda**“Tushunchalar tahlili”** metodidan foydalanish.
11. Rasional, irrasional va trigonometrik funksiyalarni integrallash. . mavzusini o’rganishda**“Tushunchalar tahlili”** metodidan foydalanish.
12. Ikki o’zgaruvlichi funksiya ekstremumi va uning tadbiqlari. . mavzusini o’rganishda**“Muammoli ta’lim”** metodidan foydalanish.
13. Ishorasi almashinuvchi qatorlar. Leybnis alomati. Funksional qatorning tekis yaqinlashishi. . mavzusini o’rganishda**“Tushunchalar tahlili”** metodidan foydalanish.
14. Ikki o’zgaruvchili funksiya uchun Teylor qatori. . mavzusini o’rganishda**“Tushunchalar tahlili”** metodidan foydalanish.
15. Ehtimolni geometrik, statistik ta’riflari. Erklitakroriy sinashlar Bernuli, Muavr-Laplas, Puasson formulalaridan foydalanish shartlari. . mavzusini o’rganishda**“Tushunchalar tahlili”** metodidan foydalanish.
16. Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar Binomial, Puassan, giometrik, tekis, ko’rsatkichli, taqsimotlar. . mavzusini o’rganishda**“Tushunchalar tahlili”** metodidan foydalanish.
17. Katta sonlar qonuni.Chebo’shev teoremasi. . mavzusini o’rganishda**“6x6x6”** metodidan foydalanish.
18. Extimollar nazariyasing markaziy limit teoremasi va uni qishloq xo’jaligida qo’llanilishi. . mavzusini o’rganishda**“Klastir”** metodidan foydalanish.
19. Matematik statistika. Oddiy, boshlangich, markaziy va shartli emperik momentlar. . mavzusini o’rganishda**“Tushunchalar tahlili”** metodidan foydalanish.
20. Tanlanmaning noma’lum parametrlarini yig’indilar usuli bilan baholash. . mavzusini o’rganishda**“Bumerang”** metodidan foydalanish.
21. Bir necha normal bosh to’plamlarning dispersiyalarini taqqoslash. Kochren kiriteriyasi. . mavzusini o’rganishda**“Assisement”** metodidan foydalanish.
22. Bosh to’plamning normal, binomial, puasson taqsimoti bilan taqsimlanganligi haqidagi statistik gipotezani Pirsonni x^2-kriteriyasi bilan tekshirish. . mavzusini o’rganishda**“dialogik yondoshuv”** metodidan foydalanish.
23. Bir nechta o’rta qiymatlarni tengligi haqidagi gipotezani bir faktorli dispersion tahlil usuli bilan

tekshirish. . mavzusini o'rganishda**"o'z-o'zini nazorat"** metodidan foydalanish.

24. Korrelyasion jadval. Tanlanma korrelyasiya koeffisentini hisoblashning to'rt maydon usuli. mavzusini o'rganishda**"T-sxema"** metodidan foydalanish

II.MUSTAQIL TA'LIM MAVZULARI

25. Bir jinsli tenglamalar sistemasini yechish usullari mavzusini o'rganishda "**SWOT-tahlil**" metodidan foydalanish.
26. Chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirish.Kroneker- Kapelli teoremasi mavzusini o'rganishda**"Kyes-stadi"** metodidan foydalanish.
27. Matrisalar algebrasining iqtisodiy masalalarni yechishda qo'llanilishi. mavzusini o'rganishda**"Tushunchalar tahlili"** metodidan foydalanish.
28. Tekislikda va fazoda koordinatalar sistemalari. Parallel ko'chirishda, simmetriyada va burishda Dekart koordinatalarini almashtirish. . mavzusini o'rganishda**"Baliq skleti"** metodidan foydalanish.
29. Ikkinchi tartibli sirtlarning to'gri chiziqli yasovchilari. Chiziqli sirtlar. Ikkinchi tartibli sirtlarni injener-texnik masalalarini yechishga qo'llanilishi. . mavzusini o'rganishda**"Ven diogrammasi"** metodidan foydalanish.
30. To'plamlar va ular ustida amallar. To'plamlarning yuqori va quyi chegaralari. Bolsano-Veyershtrass teoremasi. mavzusini o'rganishda""**SWOT-tahlil"** metodidan foydalanish.
31. Murakkab funksiyaning limiti va uzluksiz funksiyalarning xossalari.(Oraliq qiymat haqida teorema) . mavzusini o'rganishda**"BBB"** metodidan foydalanish.
32. Teskari funksiya uzluksizligi va differensiallanuvchiligi. mavzusini o'rganishda**"Tushunchalar tahlili"** metodidan foydalanish.
33. Ko'rsatkichli darajali va giperbolik funksiyalar hosilalarini hisoblash. . mavzusini o'rganishda**"Tushunchalar tahlili"** metodidan foydalanish.
34. Aniqmasliklarni yechish Lolital qoidalari . mavzusini o'rganishda**"Tushunchalar tahlili"** metodidan foydalanish.
35. Rasional, irrasional va trigonometrik funksiyalarni integrallash. . mavzusini o'rganishda**"Tushunchalar tahlili"** metodidan foydalanish.
36. Ikki o'zgaruvlichi funksiya ekstremumi va uning tadbiqlari. . mavzusini o'rganishda**"Muammoli ta'lim"** metodidan foydalanish.
37. Ishorasi almashinuvchi qatorlar. Leybnis alomati. Funksional qatorning tekis yaqinlashishi. . mavzusini o'rganishda**"Tushunchalar tahlili"** metodidan foydalanish.
38. Ikki o'zgaruvchili funksiya uchun Teylor qatori. . mavzusini o'rganishda**"Tushunchalar tahlili"** metodidan foydalanish.
39. Ehtimolni geometrik, statistik ta'riflari. Erklitakroriy sinashlar Bernuli, Muavr-Laplas, Puasson formulalaridan foydalanish shartlari. . mavzusini o'rganishda**"Tushunchalar tahlili"** metodidan foydalanish.
40. Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar Binomial, Puassan, giometrik, tekis, ko'rsatkichli, taqsimotlar. . mavzusini o'rganishda**"Tushunchalar tahlili"** metodidan foydalanish.
41. Katta sonlar qonuni.Chebo'shev teoremasi. . mavzusini o'rganishda**"6x6x6"** metodidan foydalanish.
42. Extimollar nazariyasing markaziy limit teoremasi va uni qishloq xo'jaligida qo'llanilishi. . mavzusini o'rganishda**"Klastir"** metodidan foydalanish.

43. Matematik statistika. Oddiy, boshlangich, markaziy va shartli emperik momentlar. . mavzusini o'rganishda**"Tushunchalar tahlili"** metodidan foydalanish.

44. Tanlanmaning noma'lum parametrlarini yig'indilar usuli bilan baholash. . mavzusini o'rganishda**"Bumerang"** metodidan foydalanish.

45. Bir necha normal bosh to'plamlarning dispersiyalarini taqqoslash. Kochren kiriteriyasi. . mavzusini o'rganishda**"Assisement"** metodidan foydalanish.

46. Bosh to'plamning normal, binomial, puasson taqsimoti bilan taqsimlanganligi haqidagi statistik gipotezani Pirsonni x^2-kriteriyasi bilan tekshirish. . mavzusini o'rganishda**"dialogik yondoshuv"** metodidan foydalanish.

47. Bir nechta o'rta qiymatlarni tengligi haqidagi gipotezani bir faktorli dispersion tahlil usuli bilan tekshirish. . mavzusini o'rganishda**"o'z-o'zini nazorat"** metodidan foydalanish.

48. Korrelyasion jadval. Tanlanma korrelyasiya koeffisentini hisoblashning to'rt maydon usuli. mavzusini o'rganishda**"T-sxema"** metodidan foydalanish

II.MUSTAQIL TA'LIM MAVZULARI

49. Bir jinsli tenglamalar sistemasini yechish usullari mavzusini o'rganishda "**SWOT-tahlil**" metodidan foydalanish.

50. Chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirish.Kroneker- Kapelli teoremasi mavzusini o'rganishda**"Kyes-stadi"** metodidan foydalanish.

51. Matrisalar algebrasining iqtisodiy masalalarni yechishda qo'llanilishi. mavzusini o'rganishda**"Tushunchalar tahlili"** metodidan foydalanish.

52. Tekislikda va fazoda koordinatalar sistemalari. Parallel ko'chirishda, simmetriyada va burishda Dekart koordinatalarini almashtirish. . mavzusini o'rganishda**"Baliq skleti"** metodidan foydalanish.

53. Ikkinchi tartibli sirtlarning to'gri chiziqli yasovchilari. Chiziqli sirtlar. Ikkinchi tartibli sirtlarni injener-texnik masalalarini yechishga qo'llanilishi. . mavzusini o'rganishda**"Ven diogrammasi"** metodidan foydalanish.

54. To'plamlar va ular ustida amallar. To'plamlarning yuqori va quyi chegaralari. Bolsano-Veyershtrass teoremasi. mavzusini o'rganishda""**SWOT-tahlil"** metodidan foydalanish.

55. Murakkab funksiyaning limiti va uzluksiz funksiyalarning xossalari.(Oraliq qiymat haqida teorema) . mavzusini o'rganishda**"BBB"** metodidan foydalanish.

56. Teskari funksiya uzluksizligi va differensiallanuvchiligi. mavzusini o'rganishda**"Tushunchalar tahlili"** metodidan foydalanish.

57. Ko'rsatkichli darajali va giperbolik funksiyalar hosilalarini hisoblash. . mavzusini o'rganishda**"Tushunchalar tahlili"** metodidan foydalanish.

58. Aniqmasliklarni yechish Lolital qoidalari . mavzusini o'rganishda**"Tushunchalar tahlili"** metodidan foydalanish.

59. Rasional, irrasional va trigonometrik funksiyalarni integrallash. . mavzusini o'rganishda**"Tushunchalar tahlili"** metodidan foydalanish.

60. Ikki o'zgaruvlichi funksiya ekstremumi va uning tadbiqlari. . mavzusini o'rganishda**"Muammoli ta'lim"** metodidan foydalanish.

61. Ishorasi almashinuvchi qatorlar. Leybnis alomati. Funksional qatorning tekis yaqinlashishi. . mavzusini o'rganishda**"Tushunchalar tahlili"** metodidan foydalanish.

62. Ikki o'zgaruvchili funksiya uchun Teylor qatori. . mavzusini o'rganishda**"Tushunchalar tahlili"** metodidan foydalanish.

63. Ehtimolni geometrik, statistik ta'riflari. Erklitakroriy sinashlar Bernuli, Muavr-Laplas, Puasson formulalaridan foydalanish shartlari. . mavzusini o'rganishda**"Tushunchalar tahlili"** metodidan foydalanish.

64. Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar Binomial, Puassan, giometrik, tekis, ko'rsatkichli, taqsimotlar. . mavzusini o'rganishda**"Tushunchalar tahlili"** metodidan foydalanish.

65. Katta sonlar qonuni.Chebo'shev teoremasi. . mavzusini o'rganishda**"6x6x6"** metodidan foydalanish.

66. Extimollar nazariyasing markaziy limit teoremasi va uni qishloq xo'jaligida qo'llanilishi. . mavzusini o'rganishda**"Klastir"** metodidan foydalanish.

67. Matematik statistika. Oddiy, boshlangich, markaziy va shartli emperik momentlar. . mavzusini o'rganishda**"Tushunchalar tahlili"** metodidan foydalanish.

68. Tanlanmaning noma'lum parametrlarini yig'indilar usuli bilan baholash. . mavzusini o'rganishda**"Bumerang"** metodidan foydalanish.

69. Bir necha normal bosh to'plamlarning dispersiyalarini taqqoslash. Kochren kiriteriyasi. . mavzusini o'rganishda**"Assisement"** metodidan foydalanish.

70. Bosh to'plamning normal, binomial, puasson taqsimoti bilan taqsimlanganligi haqidagi statistik gipotezani Pirsonni x^2-kriteriyasi bilan tekshirish. . mavzusini o'rganishda**"dialogik yondoshuv"** metodidan foydalanish.

71. Bir nechta o'rta qiymatlarni tengligi haqidagi gipotezani bir faktorli dispersion tahlil usuli bilan tekshirish. . mavzusini o'rganishda**"o'z-o'zini nazorat"** metodidan foydalanish.

72. Korrelyasion jadval. Tanlanma korrelyasiya koeffisentini hisoblashning to'rt maydon usuli. mavzusini o'rganishda**"T-sxema"** metodidan foydalanish

TESTLAR

Test savollari	A	B	C	D
1. Oddiy foizli jamg'ar-mani hisoblash formulasi qaysi javobda to'g'ri ko'rsatilgan?	$*A_n = A_0\left(1+\frac{np}{100}\right)$	$A_n = A_0 + \left(\frac{np}{100}\right)$	$A_n = A_n\left(1+\frac{P}{100}\right)$	$A_n = 1+\frac{np}{100}$
2. Murakkab foizli jamg'armani hisoblash formulasi qaysi javobda to'g'ri ko'rsatilgan?	$*A_n = A_0\left(1+\frac{P}{100}\right)^n$	$A_n = \left(A_0 + \frac{P}{100}\right)^n$	$A_n = A_0 + (1+p)^n$	$A_n = (A_0 + p)^n$
3. $\begin{vmatrix} 2x & 8 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$ X ni toping?	$* x = 3,$	$x = 2$	$x = -3$	$x = 0$
4. $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$ Sistemani yeching?	$*\begin{cases} x = 2, \\ y = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 4, \\ y = 6 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0, \\ y = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x = -2, \\ y = 0 \end{cases}$
5. Hisoblang $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \\ 6 & 4 & 8 \end{vmatrix}$	*0	20	70	30

5. $X=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix}$ va $Y=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\1&3&1\end{pmatrix}$ Bo'lsa X·У matrisani hisoblang?	* $\begin{pmatrix}8&12&7\\2&1&1\\8&7&6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&6&1\\7&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&3\\3&4&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0&1\\1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$
6. $A=\begin{pmatrix}5&2\\4&3\end{pmatrix}$ Teskari $A^{-1}=?$	* $\begin{pmatrix}\frac{3}{7}&-\frac{2}{7}\\-\frac{4}{7}&\frac{5}{7}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\frac{3}{7}&\frac{2}{7}\\\frac{4}{7}&-\frac{5}{7}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{5}{7}&-\frac{2}{7}\\-\frac{4}{7}&\frac{3}{7}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{3}{17}&-\frac{2}{17}\\-\frac{4}{17}&\frac{5}{17}\end{pmatrix}$
8. $B=\begin{pmatrix}1&2&-4\\-3&-6&12\\2&14&-8\end{pmatrix}$ Matrisani rangini aniqlang?	*1	3	2	5
9. Uchlari $A(4:-2)$, $B(6:4)$ va $C(5:6)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak yuzini hisoblang?·	*5	10	15	20
10. $2x+2y-6=0$ to'g'ri chiziqni OX o'qi bilan tashkil qilgan burchagini toping?.	*135^0	45^0	120^0	30^0
11. $A(5:2)$ va $B(-4:-7)$ nuqtalardan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi qaysi?·	* $y=x-3$	$y=2x+1$	$y=x+1$	$y=x+3$
12. $y=3x+5$ va $y=-2x+7$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping?	* $\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
13. $y=2x+1$ va $y=kx+3$ to'g'ri chiziqlar k ni qanday qiymatida parallel bo'ladi ?	*2	1	3	4

14. $M(1;2)$ nuqtadan $3x+4y+4=0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toping?	*3	2	1	4,2
15. $M(1;\sqrt{3})$ nuqta qutub koordinatalar sistemasida qanday bo'ladi?	$*M_1\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$	$M_1\left(3;\frac{\pi}{6}\right)$	$M_1\left(\sqrt{2};\frac{\pi}{2}\right)$	$M_1\left(\sqrt{3};\frac{\pi}{4}\right)$
16. $M\left(2;\frac{\pi}{6}\right)$ nuqta Dekart koordinatalar sistemasida qanday bo'ladi?	$*M_1\left(\sqrt{3};1\right)$	$M_1\left(\sqrt{2};2\right)$	$M_1(1;3)$	$M_1\left(2;\sqrt{3}\right)$
17. $x^2+y^2-6x-10y-15=0$ aylananing radiusini toping?	$*R=7$	$R=8$	$R=9$	$R=10$
18. $4x^2+9y^2=36$ ellipsning kata kichik yarim o'qlarini toping?	$*a=3,\ в=2$	$a=1,\ в=2$	$a=2,\ в=4$	$a=3,\ в=6$
19. $9x^2-16y^2=144$ giperbolaning asimptotalarini toping?	$*y=\pm\frac{3}{4}x$	$y=-\frac{2}{3}x$	$y=\pm\frac{1}{2}x$	$y=\pm\frac{2}{5}x$
20. $y^2=16x$ parabolaning fokusini koordenatasini toping?	$*F(4;0)$	$F(8;0)$	$F(-8;0)$	$F(16;0)$
21. $\begin{cases} x=R\cdot\cos t \\ y=R\cdot\sin t \end{cases}$ Bu qaysi chiziqni parametric tenglamasi	$*x^2+y^2=R^2$	$y^2=R\cdot x$	$x=R\cdot y^2$	$y=R\cdot x$
22. $\vec{a}(1;-2;3)$ va $\vec{в}(2;1;-4)$ vekkorlarni $\vec{a}+\vec{в}$ yig'indisini toping ?	$*\vec{c}(3;-1;-1)$	$\vec{c}(2;-2;-4)$	$\vec{c}(1;4;-3)$	$\vec{c}(2;1;6)$
23. Agar $\lvert\vec{a}\rvert=8$, $\lvert\vec{в}\rvert=5$, $\alpha=\left(\widehat{\vec{a};\vec{в}}\right)=60^0$ bo'lsa, $\vec{a}\cdot\vec{в}$ skalyar	*20	30	15	25

ko'paytmasini toping?				
24. $\vec{a}(2;3;-1)$ va $\vec{в}(3;-2;0)$ vektorlarni $\vec{a}\times\vec{в}$ vektorli ko'paytmasini toping?	$*\vec{c}(-2;-3;-13)$	$\vec{c}(2;-2;-4)$	$\vec{c}(1;4;-3)$	$\vec{c}(2;1;6)$
25.Uchlari A (3;1;4), B(4;6;2), C(6;3;5), Д(5; -2;-1)nuqtalarda bo'lgan piramidaning hajmimi toping?	$*\frac{52}{3}$	17	18	$\frac{104}{3}$
26. Fazoda $\vec{a}(2;3;4)$ vektorga parallel bo'lgan $M_0(1;1;1)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini toping?	* $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4}$	$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{1}$	$\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-4}{4}$	$\frac{x-4}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-2}{4}$
27. $x^2=2py$ qanday sirtni ifodalaydi	*giperbolik paraboloidni	silindrni	Elliptic paraboloidni	konus
28. $f(x)=x+\frac{1}{2}\cos x$ bo'lsa, $f(0)=?$	$*\frac{1}{2}$	0	2	3
29. Funksiyani aniqlanish sohasini toping $y=\sqrt{3+x}+\sqrt{7-x}$	$*[-3;7]$	$(-3;7)$	$[-3;7)$	$(-3;7]$
30.Birinch aloyib limitni toping:	$*\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx+1}{x}=1$
31. Funksiyani uzluksizligi qaysi holda to'g'ri yozilgan?	$*\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$	$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\Delta x=2$	$\lim\limits_{\Delta x\to 1}\Delta y=0$	$\lim\limits_{\Delta x\to a}\Delta y=1$
32.Funksiyani hosilasini toping: $y=3x^2+4x+6$	$*y^1=6x+4$	$y^1=5x+4$	$y^1=4x+6$	$y^1=2x+4$
33. Funksiyani hosilasini toping: $y=\sin(3x+4)$	$*3\cos(3x+4)$,	$4\cos 3x$	$5\sin(3x+4)$	$\cos 3x$
34. Funksiyani hosilasini toping: $y=3(4x+2)^3$	$*36(4x+2)^2$	$24(4x+2)^2$	$30(4x+2)^2$	$12(4x+2)$
35. $y=f(x)=e^{2x}+x$ funksiyani differehsialini toping $dy=?$	$*(2e^{2x}+1)dx$	$2(e^{2x}+1)dx$	$(4e^{2x}+1)dx$	$4e^{2x}+1dx$
36.	*1 *ва* 2,	3 ва 4	1 ва 4,	4 ва 5

$y=\left(\frac{1}{3}\right)x^3-\left(\frac{3}{2}\right)x^2+2x+1$ funksiyani kritik nuqtalarini toping?				
37. $y=1-2x^2$ funksiyani kamayish oralig'ini toping?.	* $(0;+\infty)$	$[0;-2)]$	$[-\infty;0]$	$\left[-\frac{1}{2};0\right]$
38. $y=1-4x^2$. funksiyani o'sish oralig'ini toping?.	* $(-\infty;0)$	$[0;\frac{1}{2}]$	$(-\infty;\infty)$	$(-\infty;0]$
39. funksiyani erstremum qiymatini toping: $y=1/2(x+1/4)^2-6$	* $-1/4$	$1/4$	$1/2$	-6
40. funksiyani maksimumini toping?. $y=9-x^2$	*9	0	1	3
41.Limitni hisoblang: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}$	* $\frac{1}{4}$	4	3	1
42. $z_1=3-2i$ va $z_2=-2+5i$ kompleks sonlarni z_1+z_2 yig'indisini toping?	* $1+3i$,	2	$3+5i$	$4-2i$
43. $z_1=1-2i$ va $z_2=1+2i$ kompleks sonlarni $z_1\cdot z_2$ toping?	* 5	4	3	2
44.Integralni hisoblang : $\int dx/(8x-4)$	* $\frac{1}{8}\ln\lvert 8x-4\rvert+C$,	$Ln\lvert 8x-4\rvert+C$	$4Ln\lvert 8x-4\rvert+C$	$8Ln\lvert 8x-4\rvert+C$
45. $\int\frac{dx}{x^2-3x+2}$ Integralni yeching?	* $\ln\frac{x-2}{x-1}+C$,	$\frac{x-2}{x-1}+C$	$\ln\frac{x+2}{x+1}+C$	$\ln\frac{x-1}{x-2}+C$
46. $\int\sin^3 x\cos^3 x dx$ Integralni yeching?	* $\frac{1}{4}\sin^4 x-\frac{1}{6}\sin^6 x+$ $+C$,	$\frac{3}{4}\sin^4 x-\frac{5}{6}\sin^6 x+$ $+C$	$\frac{1}{4}\cos^4 x-\frac{1}{3}\sin^6 x+$ $+C$	$\frac{3}{4}\sin^4 x-\frac{7}{6}\cos^6 x+$ $+C$
47. Quyidagi fynksiyalar bilan chegaralangan figura yuzini aniq integral yordamida	* $\frac{22}{3}$,	1,6	1,25	1,5

hisoblang $y = x^2 + 7$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$				
48. Quyidagi fynksiyalar bilan chegaralangan figura yuzini OX o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismni hajmini aniq integral yordamida hisoblang $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$	$*\frac{\pi}{5}$,	$1{,}25\pi$	2π	$1{,}5\pi$
49.Xosmas integralni yeching: $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$	*1,	0	2	3
50. Qaysi javobda aniq integrallarni taqribiy hisoblashda qo'llaniladi-gan trapetsiyalar formu-lasi keltirilgan?	* $\int_a^в f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} y_i$	$\int_a^в f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} y_{i-1}$	$\int_a^в f(x)dx \approx h(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} y_i$	$\int_a^в f(x)dx \approx F(в) - F(a)$
51. $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$ Parametric tenglama bilan berilgan aylana uzunligini hisoblang?	$*2\pi R$,	$\frac{2}{3}\pi R$	$\frac{3}{4}\pi R$	$3\pi R$
52. $z = x^2$, $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ sirtlar bilan chegaralangan jisimning hajmini hisoblang?	$*\frac{1}{12}$,	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$
53. $y = 4 - x^2$ parabola va Oxo'qi bilan chegaralangan jisimning og'irlik markazini toping?	$*M\left(0;\frac{8}{5}\right)$	$M\left(\frac{5}{8};0\right)$	$M\left(0;\frac{5}{8}\right)$	$M\left(\frac{8}{5};0\right)$
54. $z = x^3 + 5xy^2 - y^3$ Ikki o'zgaruvchili fynksiyaning z_y^1 xususiy hosilasini toping?	$*10xy - 3y^2$,	$xy - y^2$	$5xy - y^2$	$xy + y^2$
55. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ funksiyaning M(x; y; z)	*1	2	3	4

nuqtadagi gradient tezligini aniqqlang?				
56. Qaysi holda ikki o'zgaruvchili funksiya-ning ekstremumga ega bo'lishining yetarli sharti to'g'ri yozilgan?	$*AC-B^2>0,$	$AC^2-B^2=0$	$AC-B^2=0$	$A^2C^2-B=0$
57.Agar S soha markazi koordinatlar boshida va radiusi R=2 ga teng bo'lgan aylana bo'lsa,quydagi ikki karali integralni hisoblang; $\iint\limits_S \sqrt{4-x^2-y^2}\,ds$	$*\frac{16}{3}\pi,$	$\frac{3}{16}\pi$	$\frac{17}{3}\pi$	$\frac{16}{7}\pi$
58.Agar V integrallash sohasi $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ tekisliklar bilan chegaralangan piramida bo'lsaa,ushbu uch karali integralni hisoblang; $\iiint\limits_V zdV$	$*\frac{1}{24},$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$
59. $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=в\sin t \end{cases}$ parametrik tenglama bilan berilgan ellips bilan chegaralangan figura yuzasini egri chiziqli integrallar yordamida hisoblang.	$*aв\pi,$	$\frac{1}{2}a^2в\pi$	$2aв\pi$	$\frac{3}{4}aв\pi$
60. Differensial tenglama yechimini umumiy yechimini toping. $(1-y)dx+(1+x)dy=0$	$*$ $y=1+C(x+1),$	$y=C(x+1),$	$y=x^2+C,$	$\sqrt{y=1/x},$
61. Differensial tenglama yechimini yeching. $y^{11}-9y=0$	$*$ $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{3x},$	$y=e^{5x}$	$y=e^{6x}$	$y=C_1e^{-3x}+C_2e^{5x}$
62. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+...$ sonli qatorni umumiy hadi qaysi javobda to'g'ri	$*a_n=\frac{1}{2n-1},$	$a_n=\frac{1}{3n+1}$	$a_n=\frac{n}{2n+1}$	$a_n=\frac{n}{7n+1}$

yozilgan?				
63. Qachon $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qachon shartli yaqinlashuvchi qator deyiladi.	*Qator yaqinlashuvchi bo'lib uning hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan qator uzoqlashuvchi bo'lsa	Agar qator uzoqlashuvchi bo'lsa	Agar qator yaqinlashuvchi bo'lsa	Agar qator hadlarining absolyut qiymatlarida n tuzilgan qator yaqinlashuvchi bo'lsa.
64. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+3)\frac{x^n}{4^n}$ qatorni yaqinlashish radiusini toping.	* 4,	3	12	5
65. y= sin x ni Makloren qatorini yoyilmasi qaysi holda to'g'ri yozilgan?	* $x - x^3/3! + x^5/5! - ...$	$x + (2/1!)x^2 + + (3/2!)x^3 + ...$	$x + x^2/2! + x^3/3! + ...$	$x + x^2/3! + x^4/5 + ...$
66.Fure koeffisentlarini hisoblash formulasi qaysi javobda keltirilgan?	* $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx$ $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx$	$a_0 = \frac{1}{2n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ $a_k = \frac{3}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx$ $b_k = \frac{8}{7\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx$	$a_0 = \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi} f(x)dx$ $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos kxdx$ $b_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx$	$a_0 = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ $a_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx$ $b_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx$
67.Funksiyalarni Fure qatoriga yoyishni yetarli shartlari qaysi teoremada keltirilgan.	*Dirixle teoremasida	Fure teoremasida	Koshi teoremasida	Lagranj teoremasida
68.Hodisalar necha hil bo'ladi?	*Murakkab mumkin bo'lmagan tasodifiy	Murakkab tasodifiy	Tasodifiy, Mumkin bo'lmagan	Mumkin bo'lgan .
69. Muqarrar hodisaning ehtimoli nimaga teng?	*1	1/2	1/3	2
70. Ixtiyoriy hodisaning ehtimoli uchun quydagi-larning qaysi biri o'rinli?	* $0 \le p(A) \le 1$	$p(A) = 0$	$p(A) = 01$	$0{,}5 \le p(A) \le 1$
71. Beda urug'I ichida 0,1% begona o't urug'i bo'lsa, 1000 dona urug' ichida o'rtacha necha dona begona o't urug'i bo'ladi?	*1	2	3	4
72. Olma va shaftoli	*0.97	0.80	0.75	0.89

ko’charlari ekildi.Agar olma ko’chatini ko’karish ehtimoli 0,7 bo’lsa, shaptoli ko’chatini ko’karish ehtimoli 0,9 bo’lsa, ulardan kamida bittasining ko’karish ehtimolini toping?				
73. O’yin kubigini bir marta tashlaganda elementar hodisalor fazosi nechta hodisadan iborat bo’ladi?	* 6 та	5 та	4 та	3 та
74. Tanga 2 marta ketma-ket tashlandi. Kamida bir martagerbli tomon tushish ehtimolini toping?	*0.75	0.35	0.45	0.65
75. Urug’ning o’nuv-chanligi 70 % ni tashkil etsa , 6 ta ekilgan chigitdan 4 tasini o’nib chiqish ehtimolini toping?	*0.64	0.74	0.93	0.54
76. Qaysi holda Muavr-Laplasning local va integral teoremalaridan foydalanish mumkin?	* $np \geq 10$ bo’lsa	$n-$ har qanday holda	p-nolga yaqin, $n-$ kichik bo’lsa	$np \leq 10$ bo’lganda
77.Tutilgan baliqning og’irligi normal taqsimlangan tasodifiy miqdor bo’lib, M(X) =375 g va Д(X) =25 g bo’lsa tavakkal tutilgan baliq og’irligini 300 g bilan 425 g orasida bo’lish ehtimoli topilsin.	*0.9759	0.8759	0.6759	0.5759
78. Tasodifiy miqdorlar asosan necha xil bo’ladi?	*2	6	4	5
79Agar $F(x)=\begin{cases} 0, & агар\ \ x \leq 2\ \ бўлса, \\ x/2-1, & агар 2 \leq x \leq 4, \\ 1, & агар\ \ x \geq 4\ \ бўлса, \end{cases}$ $P(2 \leq X \leq 3)$ ehtimoli topilsin	*1/2	1/4	0,8	3/4
80. Nishonga qarata 20 ta o’q otildi. Ulardan 18	*0,9	0.5	0.7	0,3

tasi nishonga tekkan bo'lsa,nishonga tekkan o'qlarning nisbiy chastotasi topilsin.				
81. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonunu bilan berilgan X 5 10 15 P 0.2 0.6 0.2 Uning matematik kutulishi topilsin	*10	6	7	9
82. Agar X tasodifiy miqdorni despersiyasi 2 ga teng bo'lsaY = 3X tasodifiy miqdorni despersiyasini toping	*18	14	16	20
83. Agar M(X) =3 ga teng bo'lsa, M(3X) =?	*9	5	7	3
84. Ikki birgadani normani bajarish ehtimolliklari mos ravishda 0.8 va 0.85 ga teng bo'lsa ikkala birgadani ham normani bajarish ehtimoli topilsin.	*0.68	0.38	0.48	0.58
85. X va Y o'zaro bo'g'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lib, D(X)=5, D(Y) =6 bo'lsa $Z = 3X + 2Y$ **miqdorini despersiyasi** topilsin.	*69	59	60	79
86. Agar $X \sim N$ (0,1) bo'lsa X tasodifiy miqdorini (0,2) oraliqda tushish ehtimoli topilsin.	*0,4772	0,4800	0,5847	0,6340
87. Agar X tasodifiy miqdorni taqsimot funksiyasi $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x/4, & 0 \le x \le 4 \\ 1, & x \ge 4 \end{cases}$ bo'lsa, M(x)=?	*2	1	0	3

88. Agar M(X)=2 ga teng bo'lsa $Z = 2x + 1$ tasodifiy miqdorni matematik qutulishini toping.	*5	4	2	3
89. Chaman ochilgan paxta maydonida har bir tup g'o'zadagi paxtalarning og'irlgi qanday tasodifiy miqdor bo'ladi?	Uzluksiz	Diskret	O'zgarmas	Tasodifiy
90. n= 10 hajmli tanlanmagan statistic taqsimoti berilgan X_i 102 104 105 n_i 2 3 5 Tuzatilgan tanlanma despersiyasi topilsin	*6.93	7.61	7.53	8.20
91. Tanlanmani statistik taqsimoti berilgan X_i 4 7 8 12 n_i 5 2 3 10 tanlanmani hajmi topilsin	*20	7	5	10
92. Bosh to'plamdan n=50 hajmi tanlanma olingan X_i 10 20 30 n_i 15 30 15 bosh o'ttaga qiymatni siljimagan bahosi topilsin	*20	30	40	50
93. Ushbu statistic taqdimot uchun moda va mediana topilsin X_i: 10, 12, 14, 16, 18 n_i: 4, 8, 15, 6, 2	*(14;14)	(4;6)	(5;10)	(12;5)
94. n=51 hajmli tanlanma bo'yicha bosh despersiya $Д_т$=5 topilgan. Bosh to'plam despersiyaning siljimagan bahosini toping.	*5.1	3.1	4.1	2.1
95. Ikkita normal bosh to'plamlar uchun $H_0 : M(X) = M(Y)$ statestik gipoteza qaysi holda rad etiladi?	* $\lfloor T_{куз} \rfloor \geq t_{кр}$	$T_{куз} \leq t_{кр}$	$F_{куз} \leq t_{кр}$	$F_{куз} \geq t_{кр}$

96. Agar $S_x^2 = 0{,}84$ $S_y^2 = 2.52$ $F_{кр} = 2.72$ bo'lsa, $H_0 : Д(X) = Д(У)$ o'rinlimi yoki $H_1 : Д(X) \geq Д(У)$	*H_o rad etiladi	H_0, H_1 ikkalasi ham to'g'ri	H_o o'rinli	H_1 rad etiladi
97. Ikkita o'yin soqqasi tashlanganda, soqqalar-ning yoqlarida tushgan ochkolar yig'indisi uchga teng bo'lish ehtimolini toping.	*1/18	1/3	2/3	1/4
98. Agar factor va qoldiq despersiyalar mos ravishda 4.84 va 2.2 teng bo'lsa, bir nechta o'rta qiymatlarni tengligi haqidagi gipotezani tekshirish kiriteriyasini qiymatini toping $F_{куз}$ =?	*2.2	1.3	3.2	4.2
99. Agar shartli varianta yordamida $M_1 = 0{,}6; h = 2; c = 30$ topilgan bo'lsa , $\overline{X}_т$=?	*31.2	28.2	83.2	35.2
100. Korrelyasiya koeffisenti uchun quydagilardan qaysi biri to'g'ri?	* $-1 \leq Z_T \leq 1$	$0 \leq Z_T \leq 1$	$-\infty \leq Z_T \leq +\infty$	$-\infty \leq Z_T \leq \infty$

AHTAM FAYZIYEV

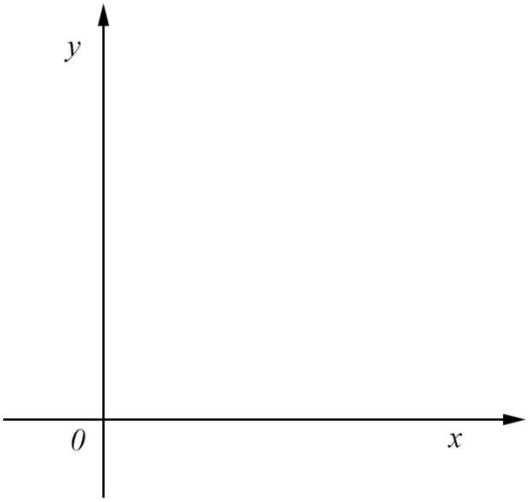
MATEMATIKA

Agrar universitet va qishloq ho‘jalik oily o ‘quv yurtlari talabalari uchun darslik

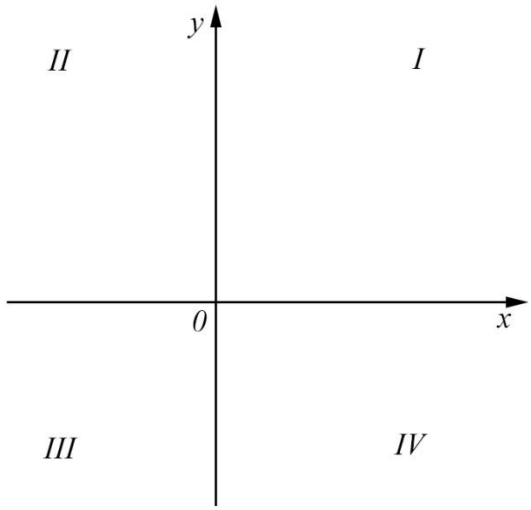
Badiiy muharrir:
Musavvir:
Texn. muharrirlar:
Musahhiha:

Toshkent, « », 2021

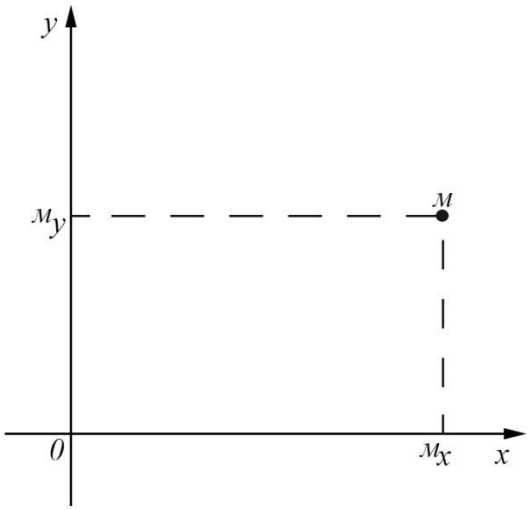
Ayrim muhim elementar funksiyalarning shakillari



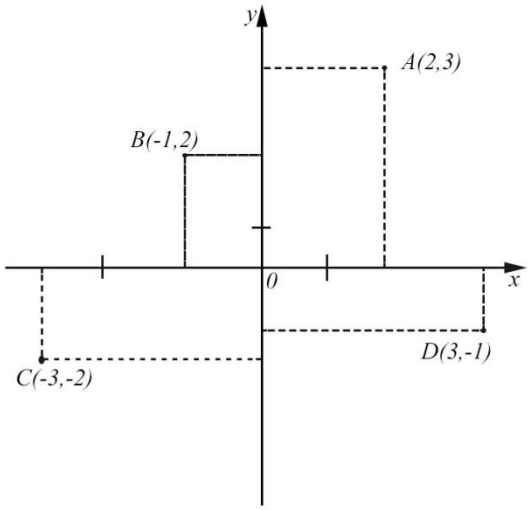
1-чизма



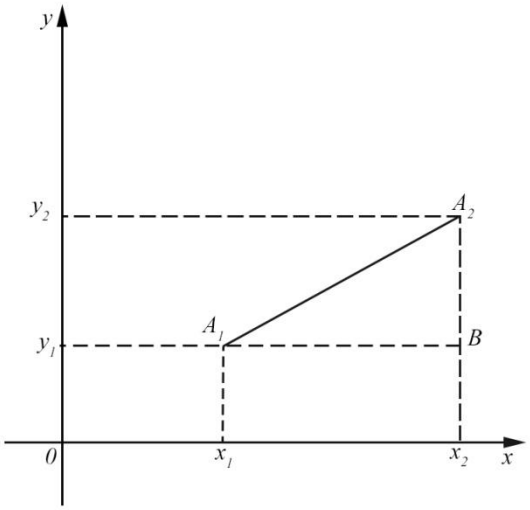
2-чизма



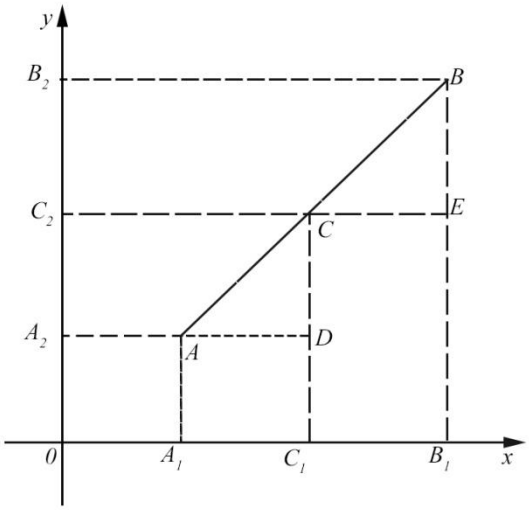
3-чизма



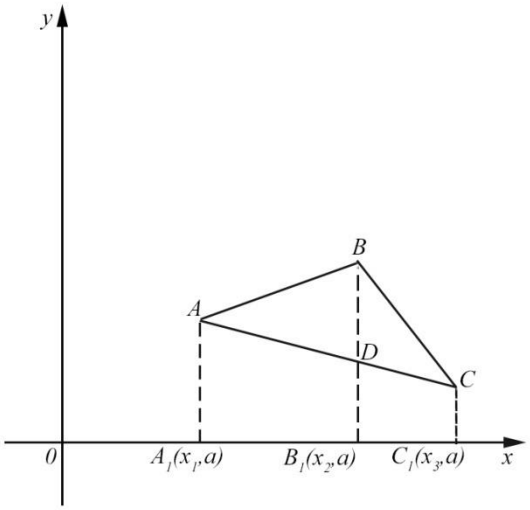
4-чизма



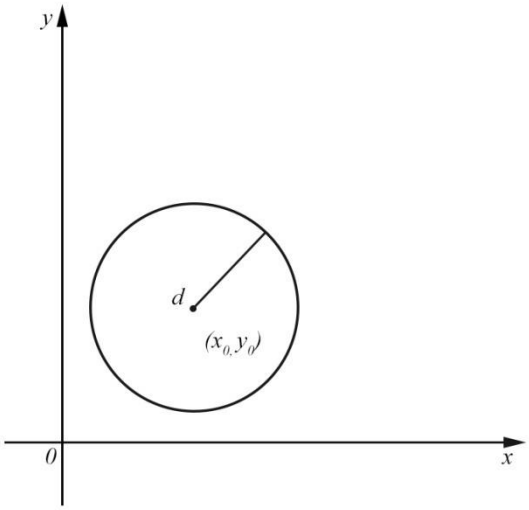
5-чизма



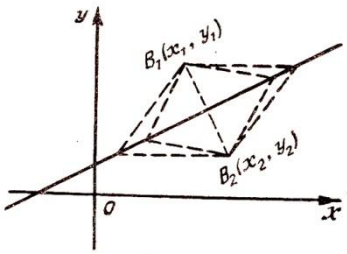
6-чизма



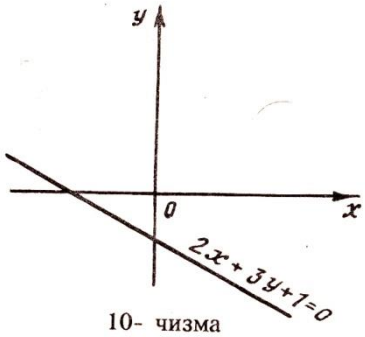
7-чизма



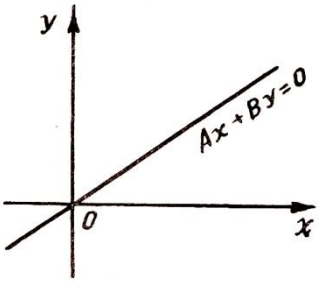
8-чизма



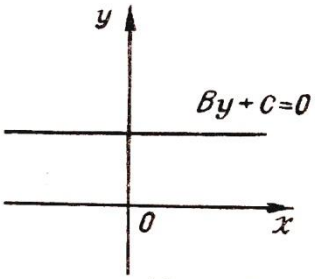
9- чизма



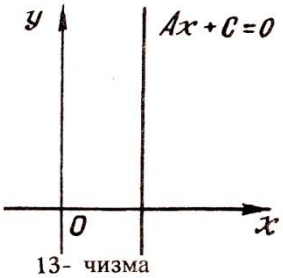
10- чизма



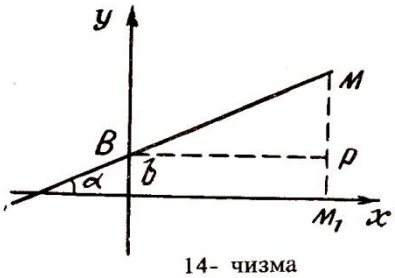
11- чизма



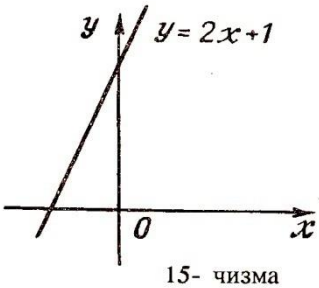
12- чизма



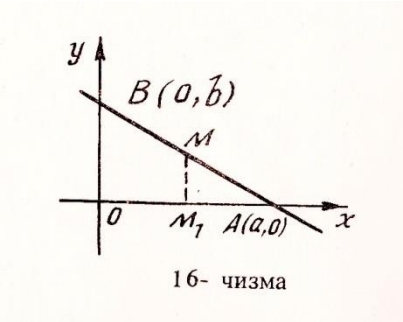
13- чизма



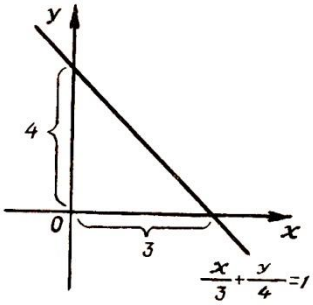
14- чизма



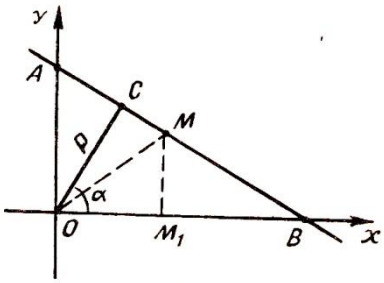
15- чизма



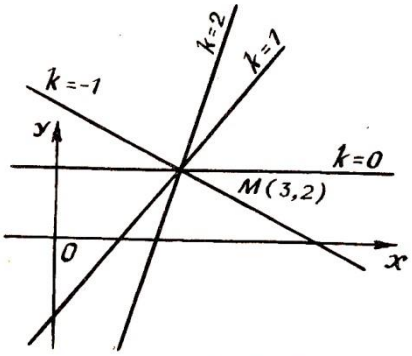
16- чизма



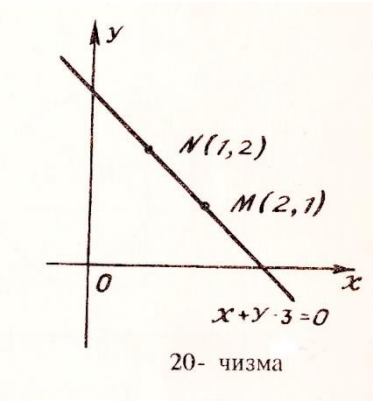
17- чизма



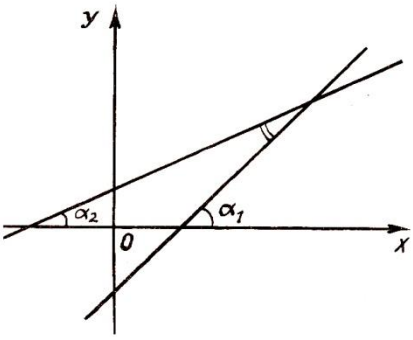
18- чизма



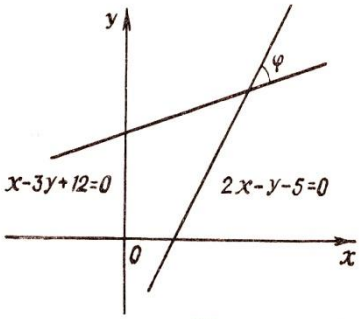
19- чизма



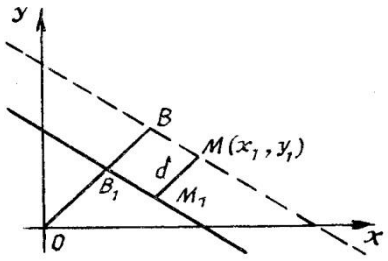
20- чизма



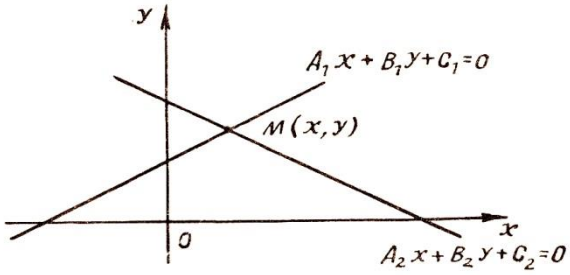
21- чизма



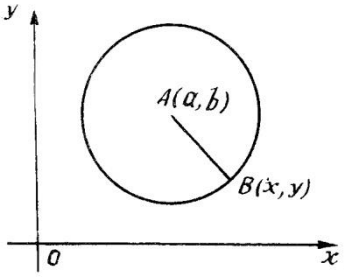
22- чизма



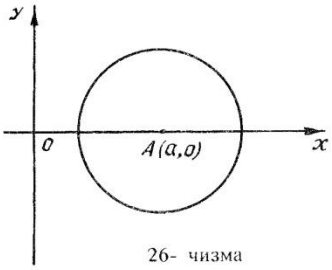
23- чизма



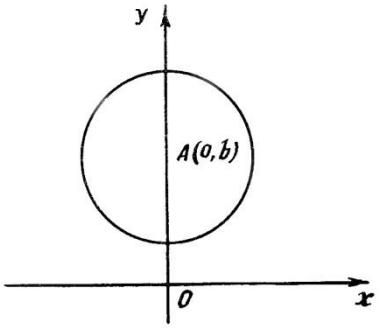
24- чизма



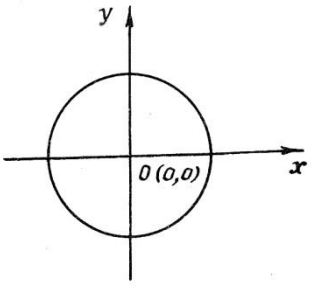
25- чизма



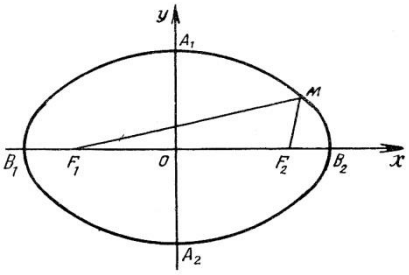
26- чизма



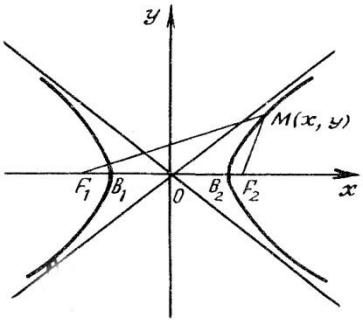
27- чизма



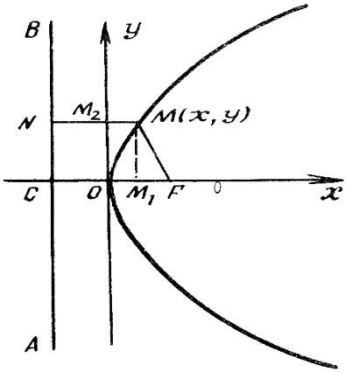
28- чизма



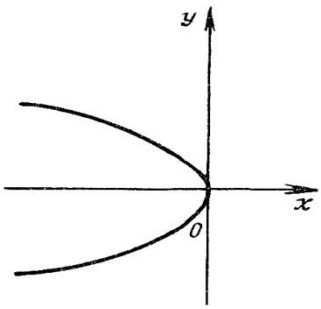
29- чизма



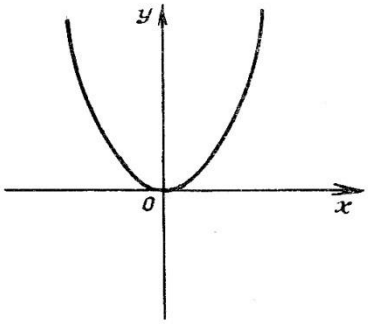
30- чизма



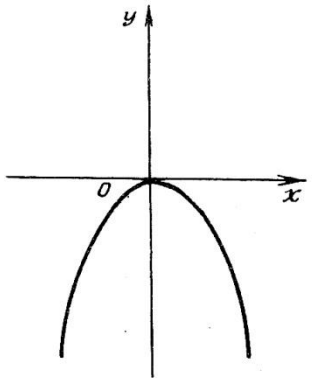
31- чизма



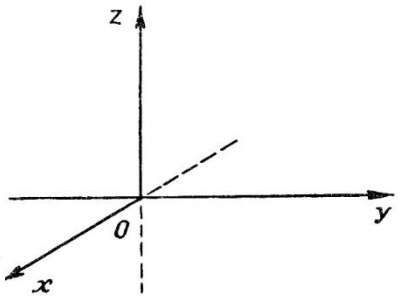
32- чизма



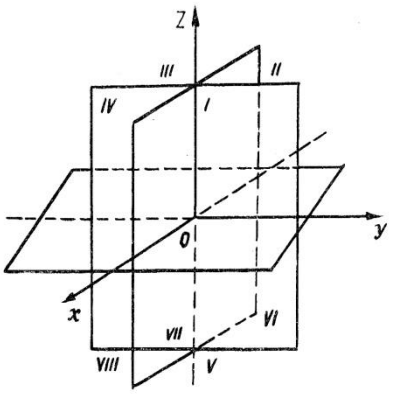
33- чизма



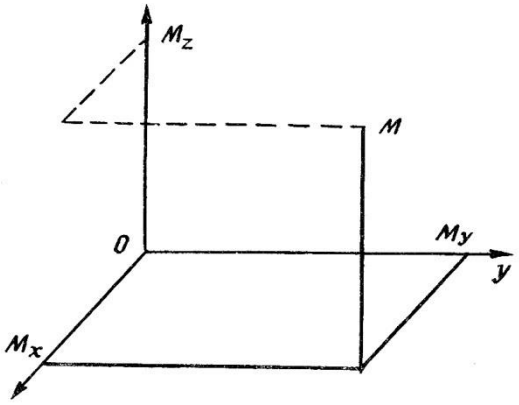
34- чизма



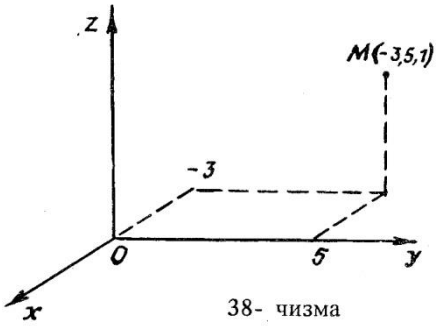
35- чизма



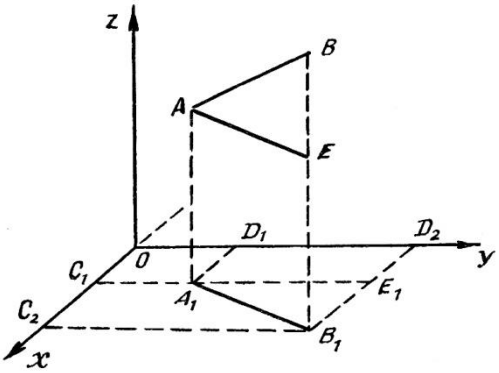
36- чизма



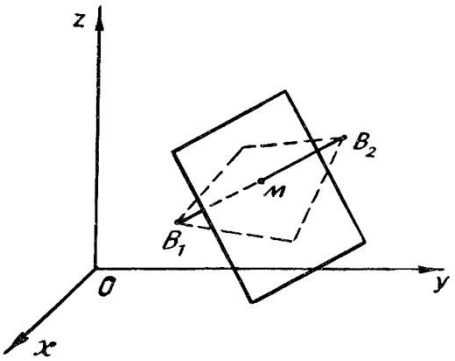
37- чизма



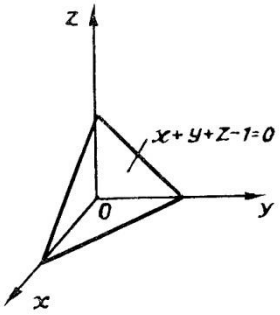
38- чизма



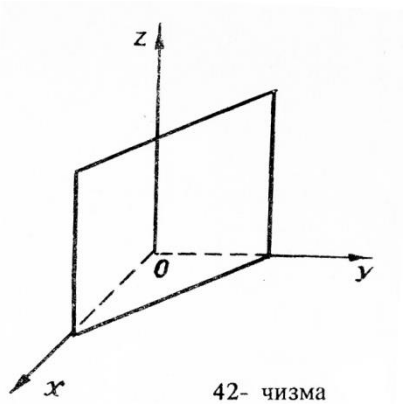
39- чизма



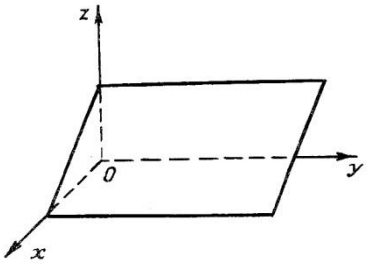
40- чизма



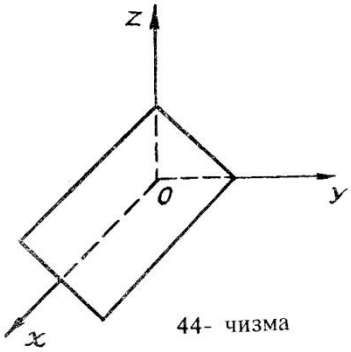
41- чизма



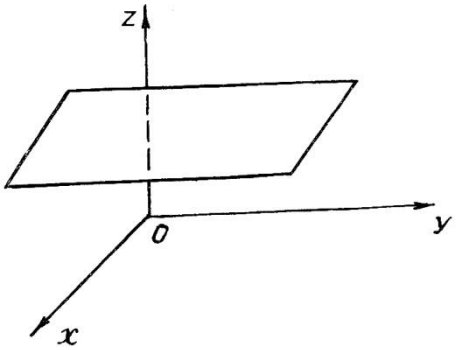
42- чизма



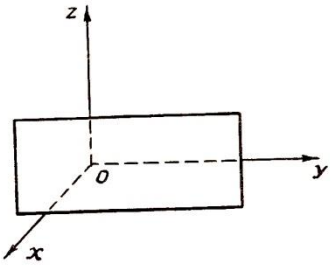
43- чизма



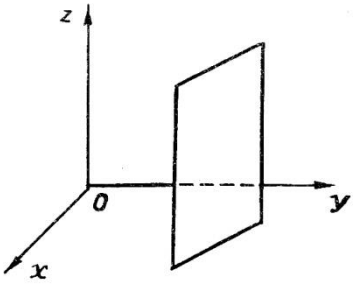
44- чизма



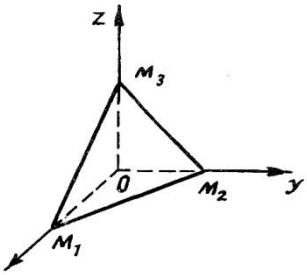
45- чизма



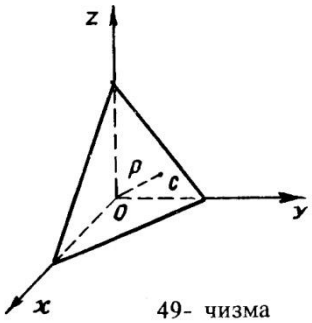
46- чизма



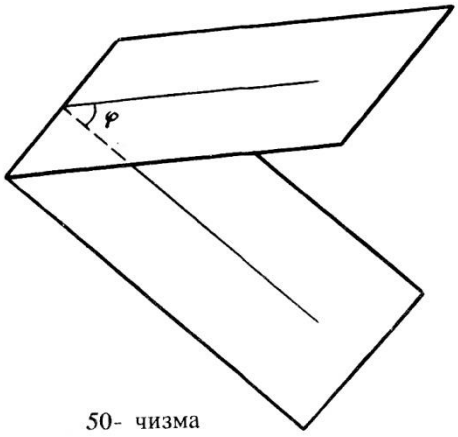
47- чизма



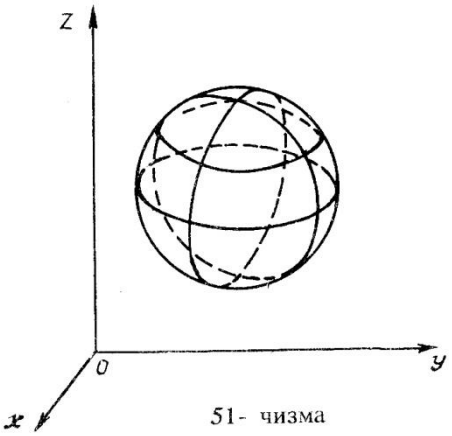
48- чизма



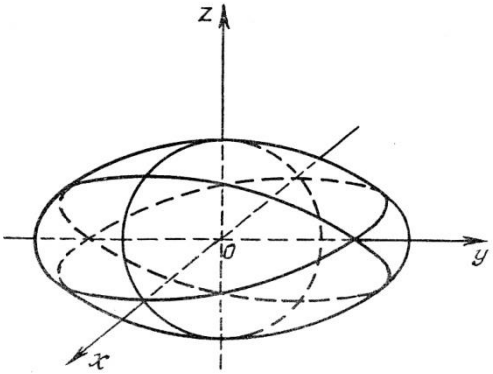
49- чизма



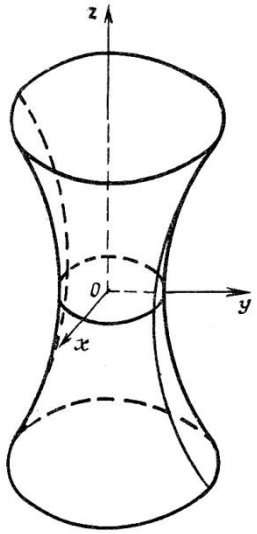
50- чизма



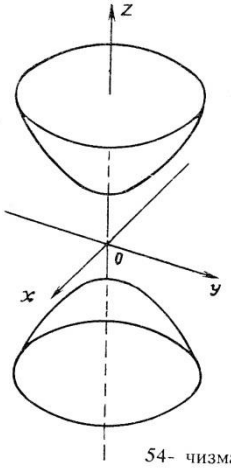
51- чизма



52- чизма



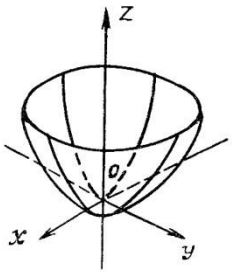
53- чизма



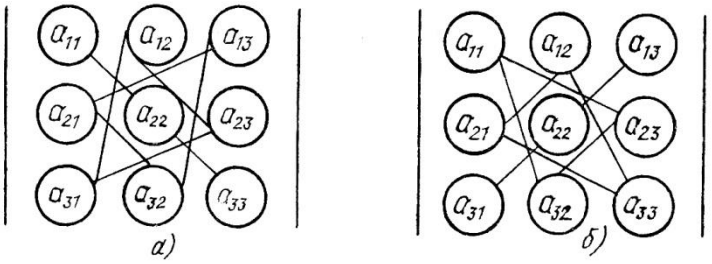
54- чизма

"+" ишора билан

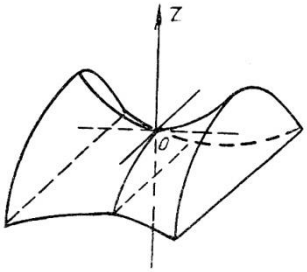
"—" ишора билан



55- чизма

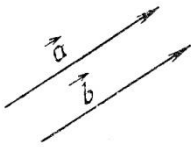


56 а,б-чизма

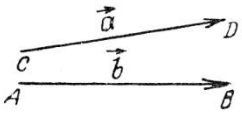


56- чизма

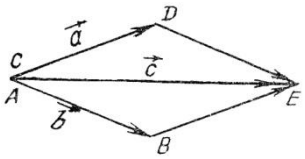
57- чизма



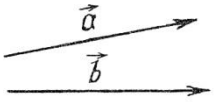
58- чизма



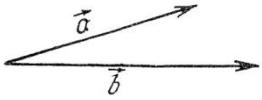
59- чизма



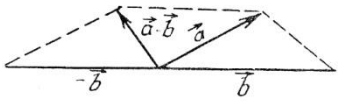
60- чизма



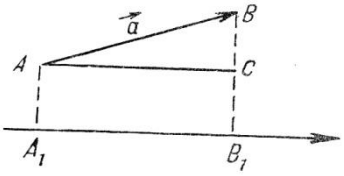
61- чизма



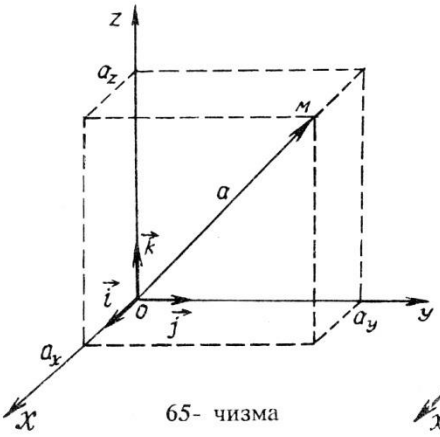
62- чизма



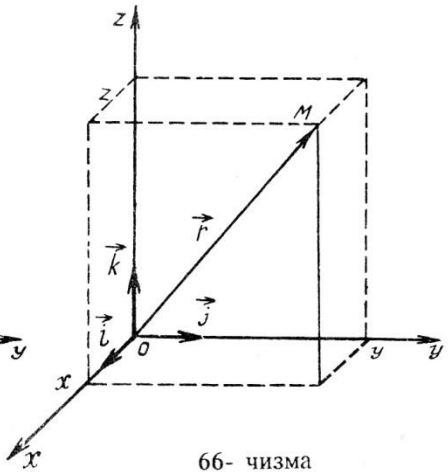
63- чизма



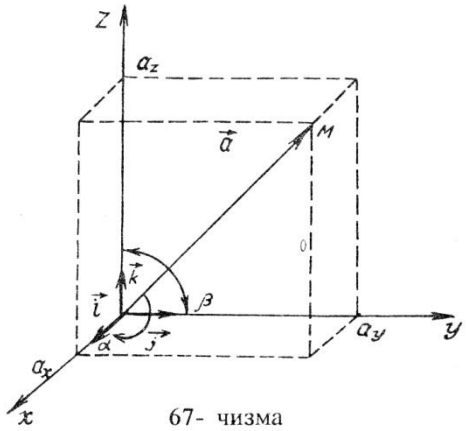
64- чизма



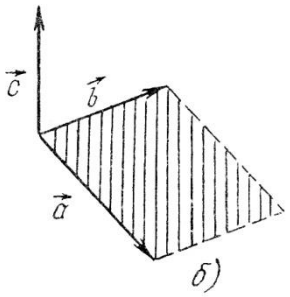
65- чизма



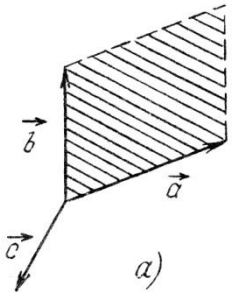
66- чизма



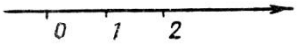
67- чизма



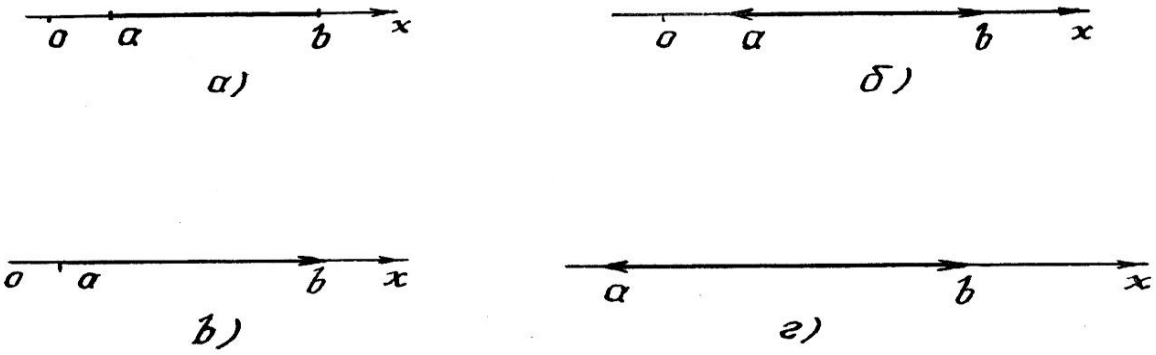
68 - чизма



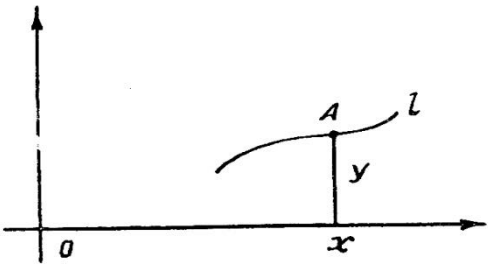
68- чизма



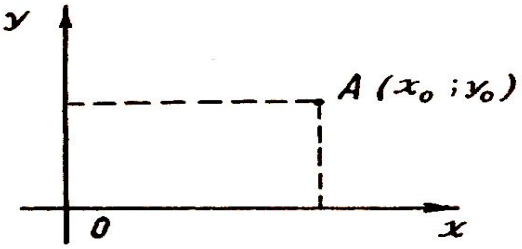
69- чизма



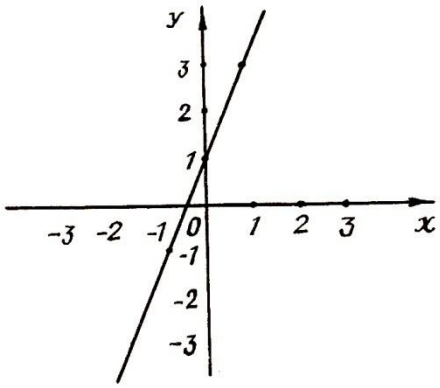
70- чизма



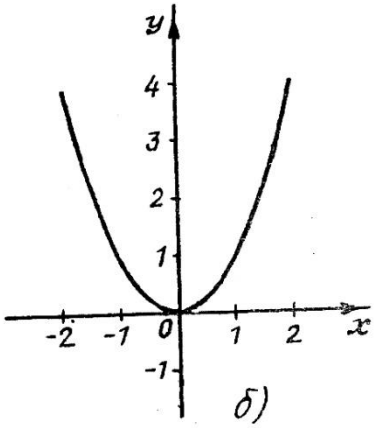
71- чизма



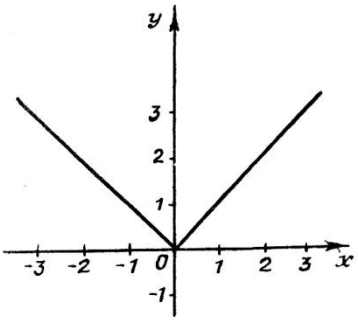
72- чизма



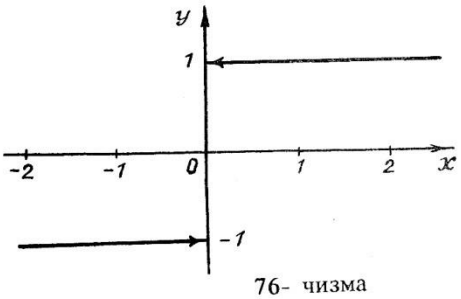
73- чизма



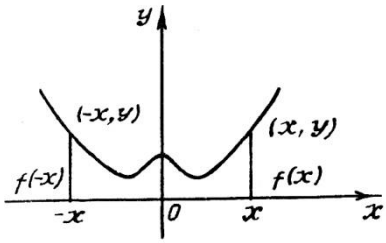
74- чизма



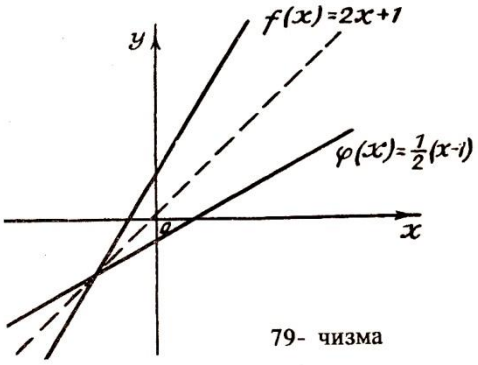
75- чизма



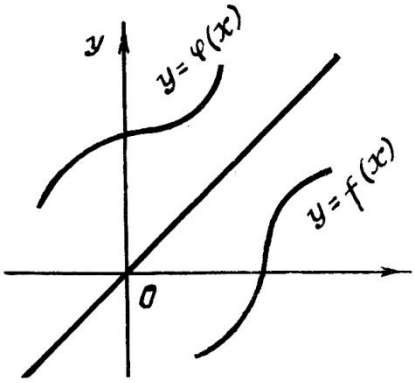
76- чизма



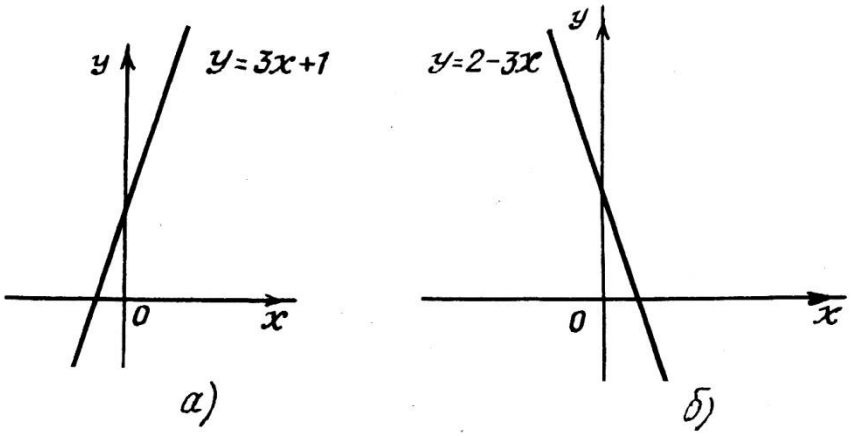
77- чизма

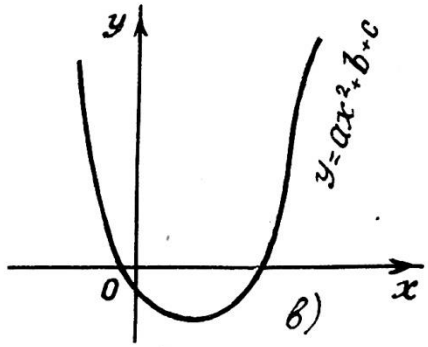


79- чизма

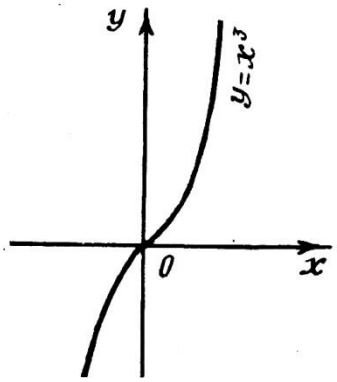


80- чизма

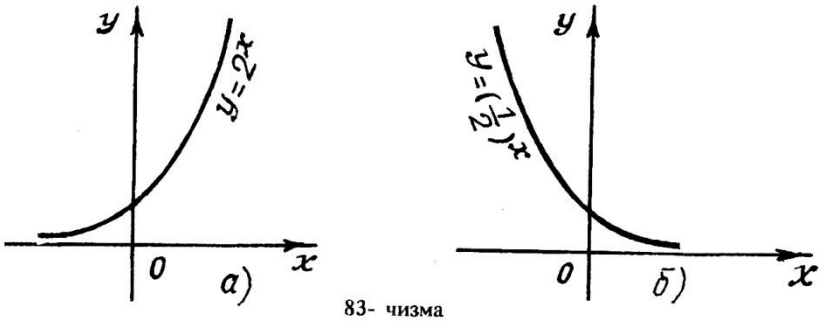




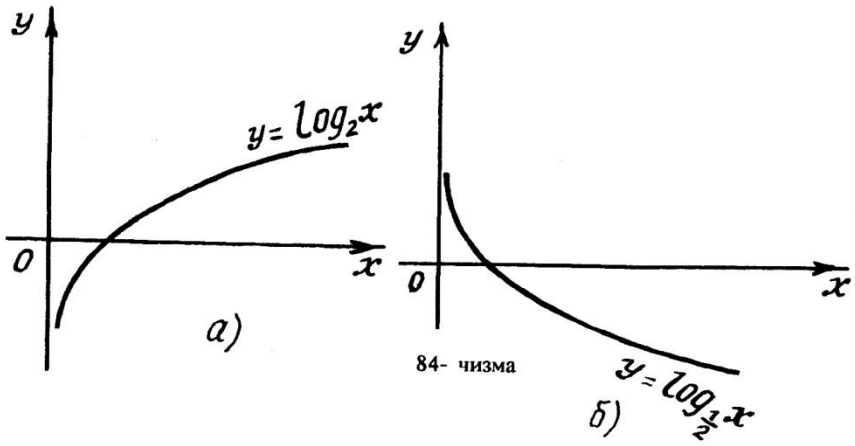
81- чизма



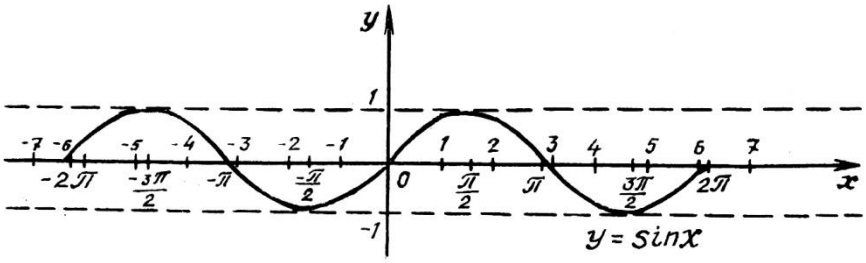
82- чизма



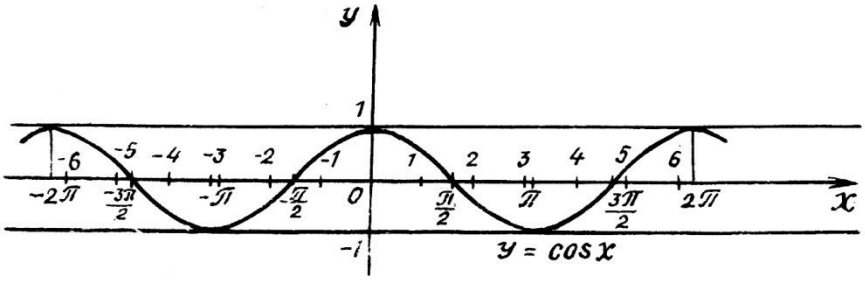
83- чизма



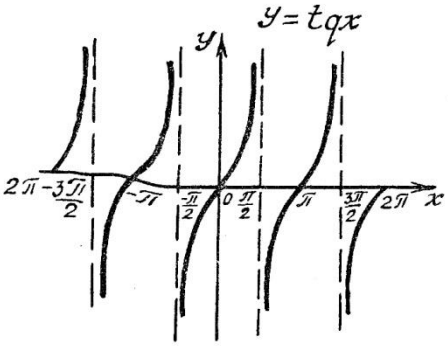
84- чизма



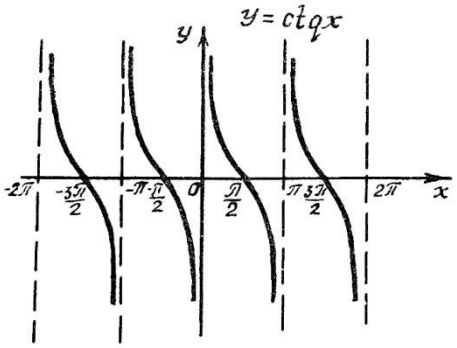
85-чизма



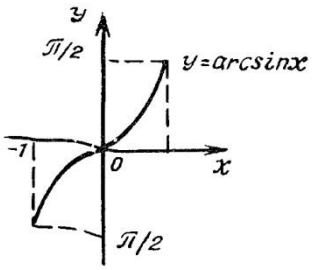
86- чизма



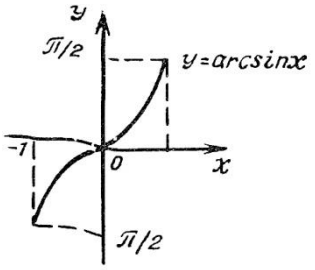
87- чизма



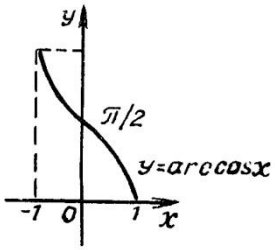
88- чизма



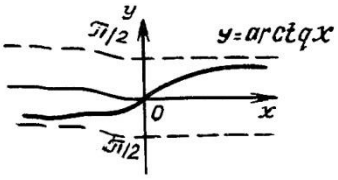
89- чизма



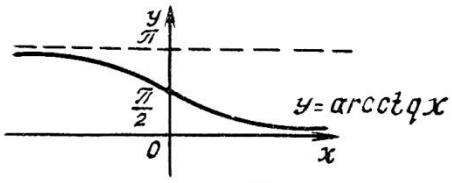
89- чизма



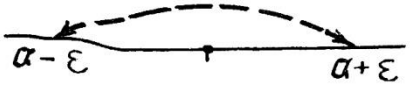
90- чизма



91- чизма



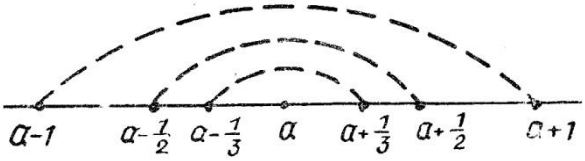
92- чизма



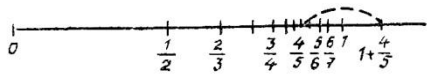
93- чизма

94- чизма

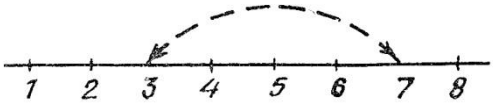
95- чизма



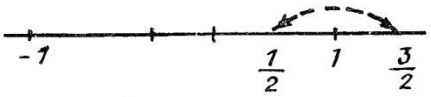
96- чизма



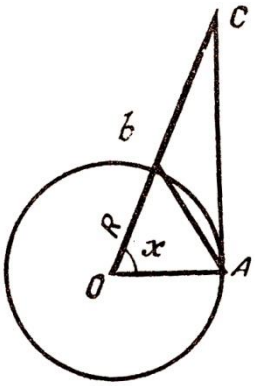
97- чизма



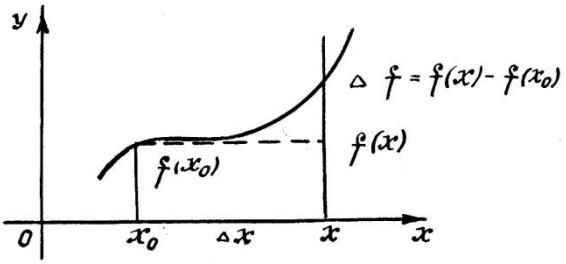
98- чизма



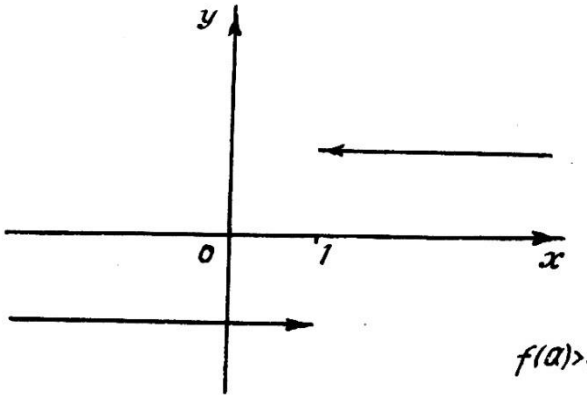
99- чизма



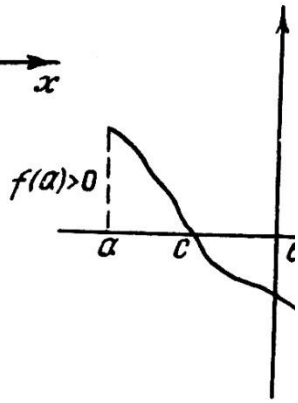
100- чизма



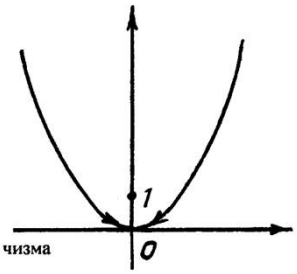
101- чизма



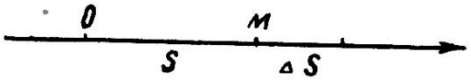
103- чизма



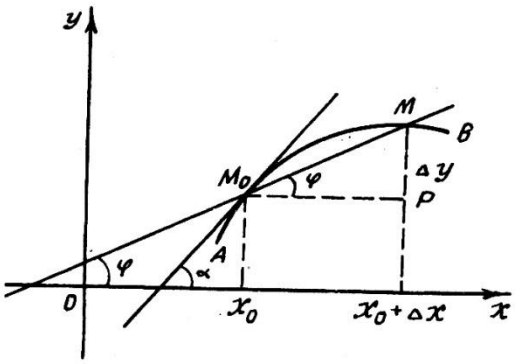
104-



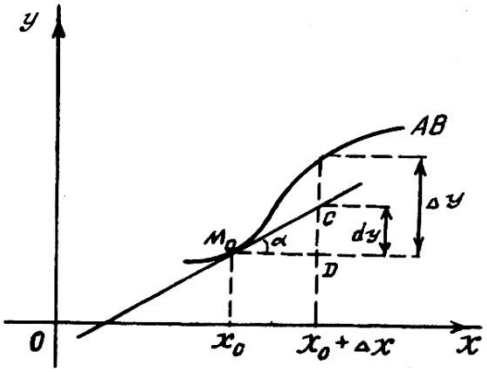
102- чизма



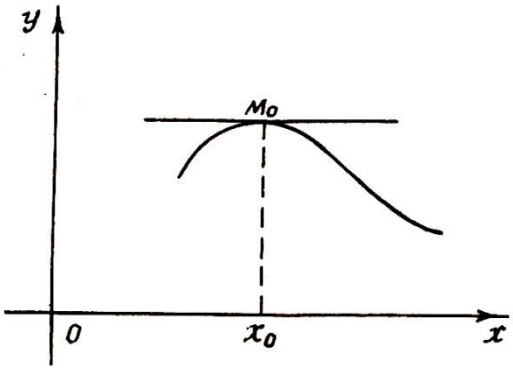
105- чизма



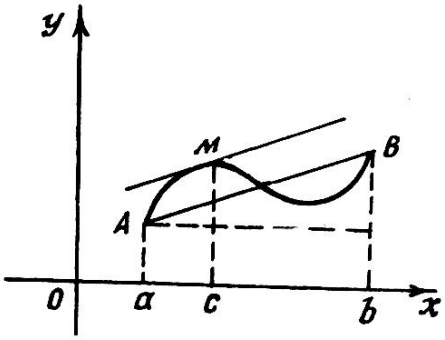
106- чизма



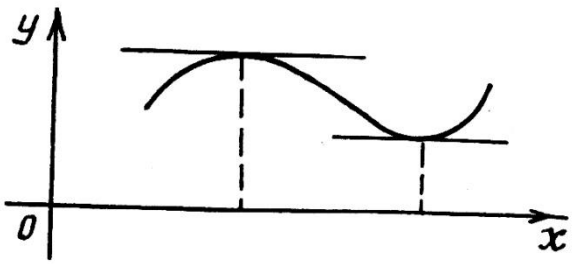
107- чизма



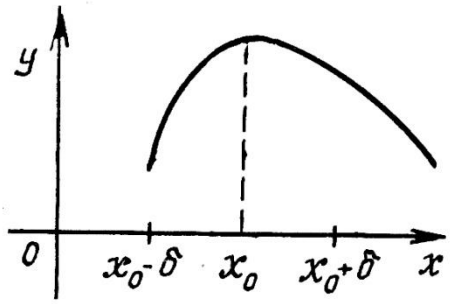
108- чизма



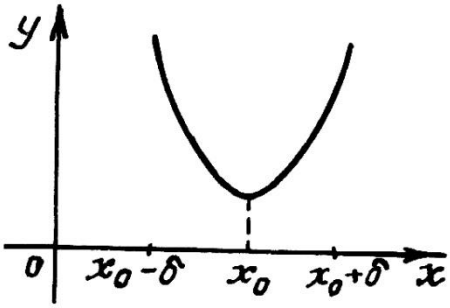
109- чизма



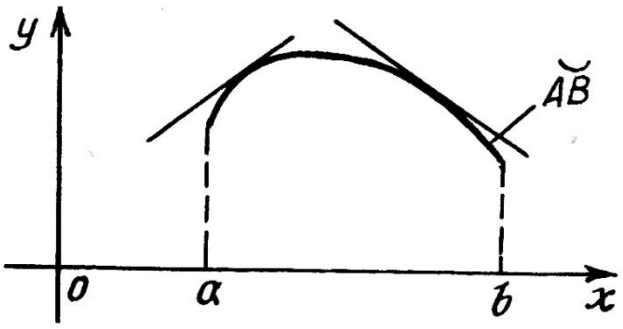
110- чизма



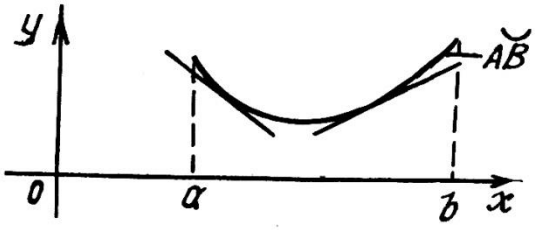
111- чизма



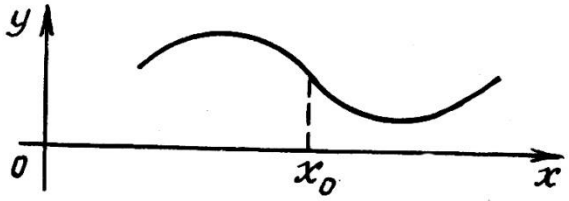
112- чизма



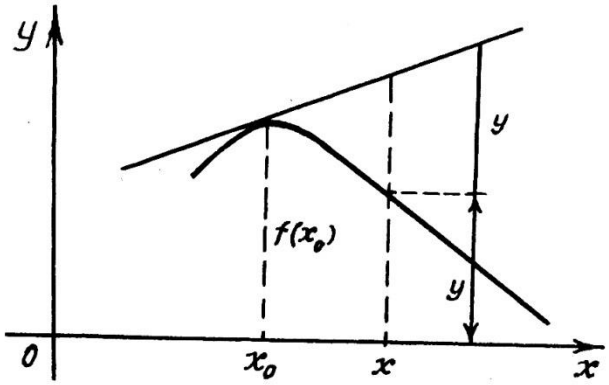
113- чизма



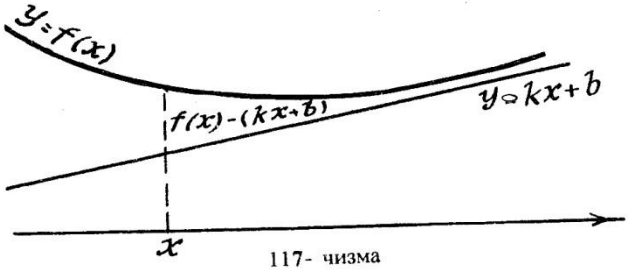
114- чизма



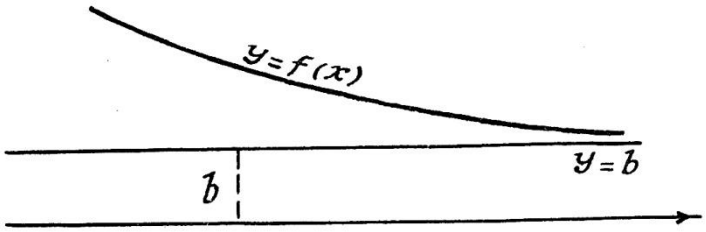
115- чизма



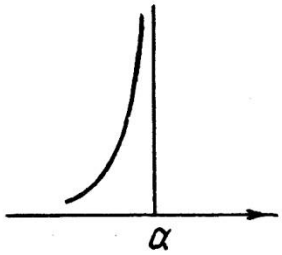
116- чизма



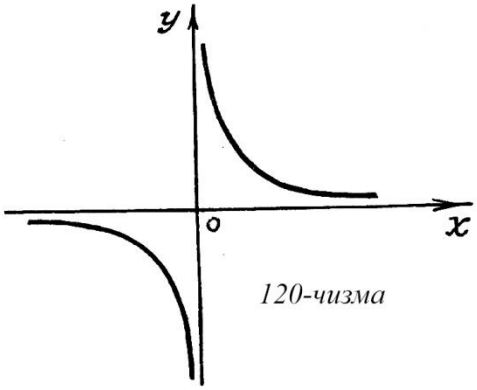
117- чизма



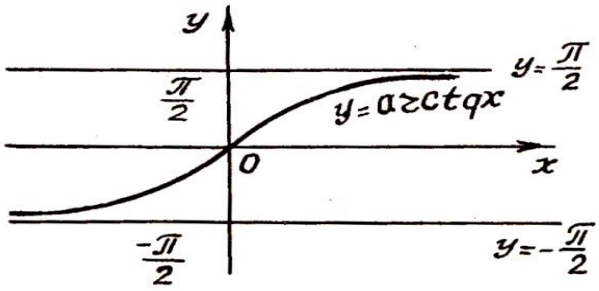
118 - чизма



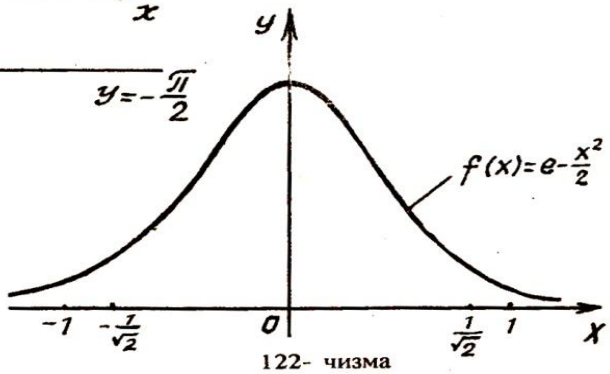
119-чизма



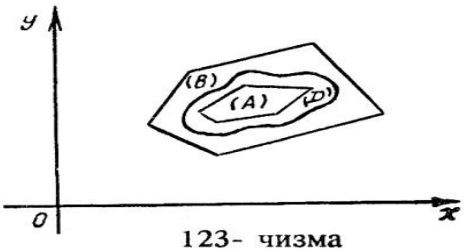
120-чизма



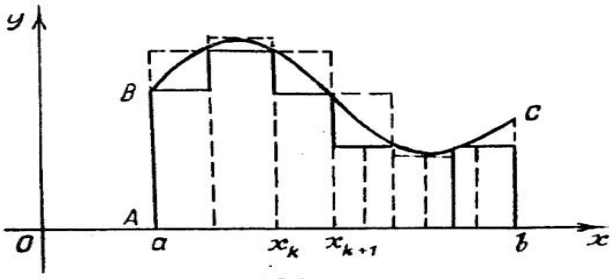
121- чизма



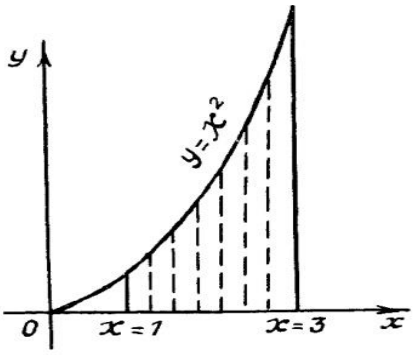
122- чизма



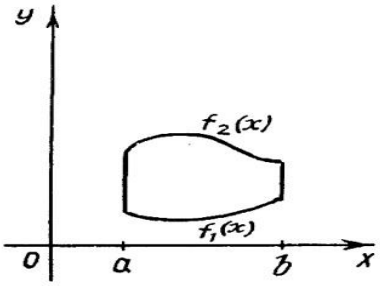
123- чизма



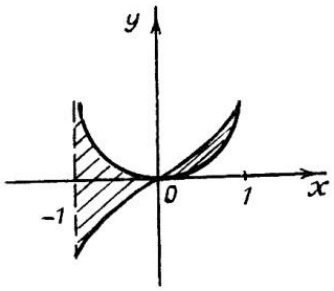
124- чизма



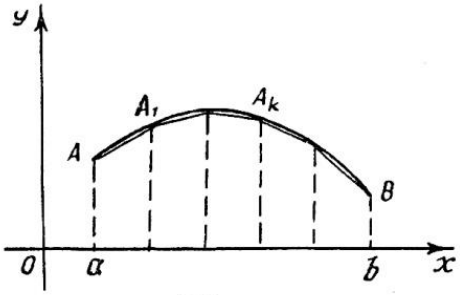
125- чизма



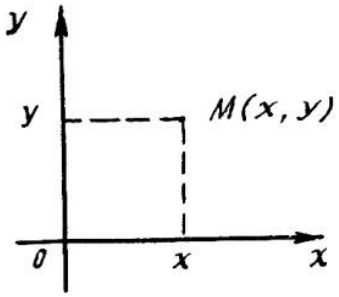
126- чизма



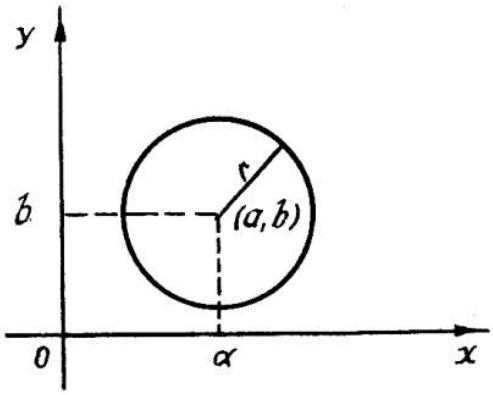
127- чизма



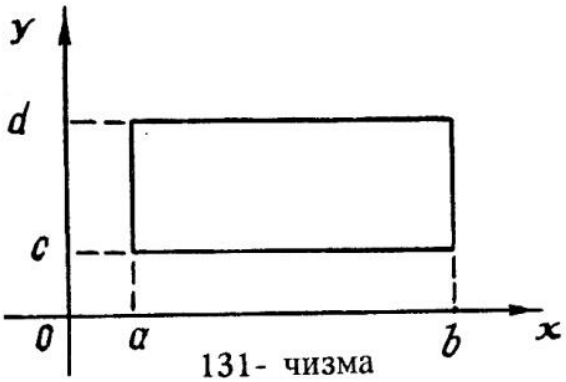
128- чизма



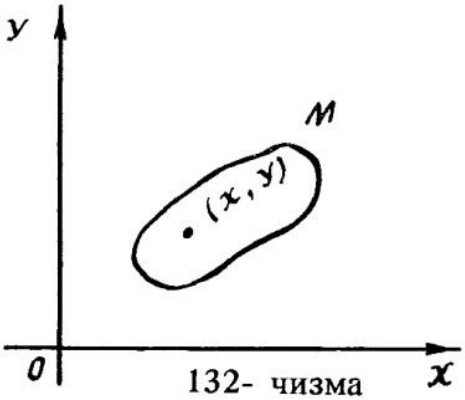
129- чизма



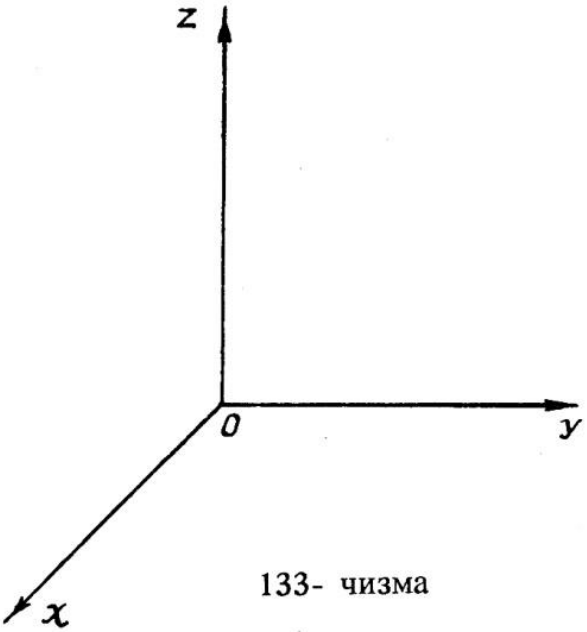
130- чизма



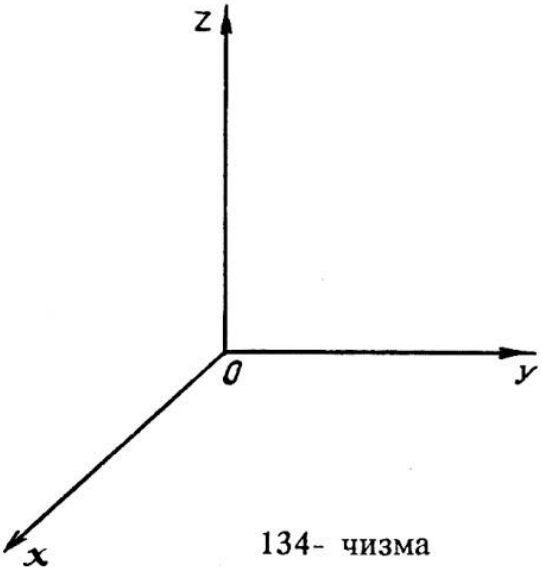
131- чизма



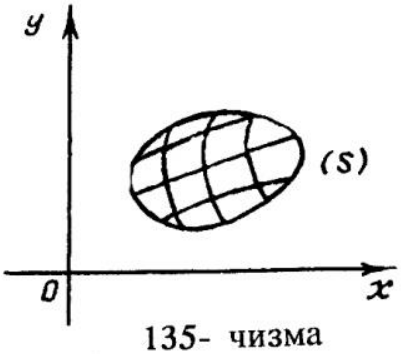
132- чизма



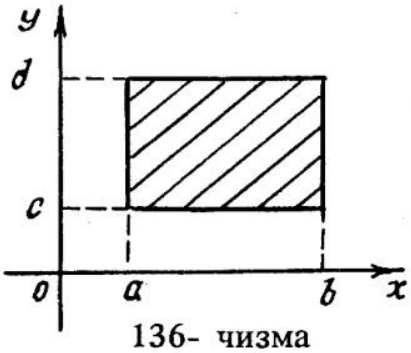
133- чизма



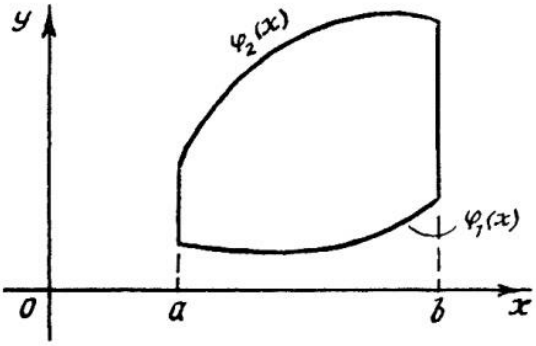
134- чизма



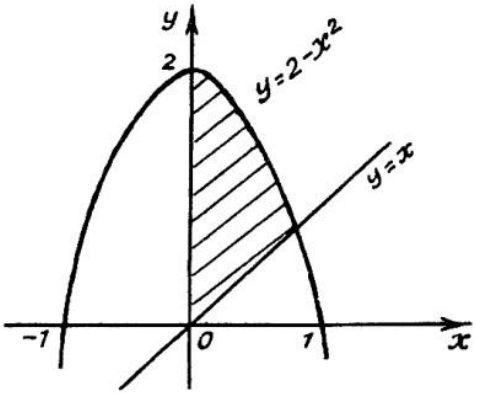
135- чизма



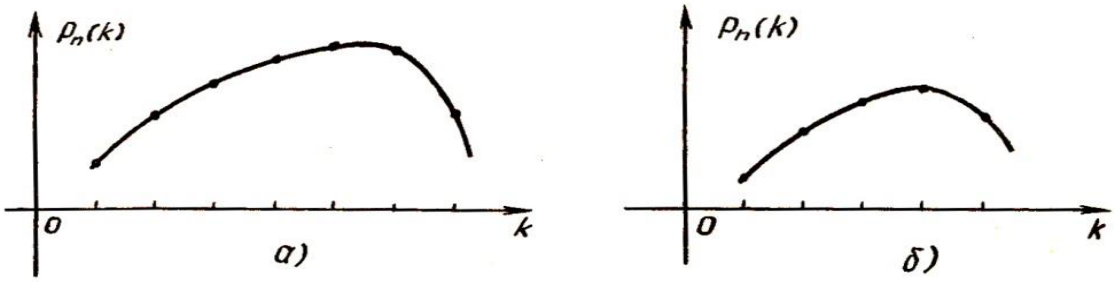
136- чизма



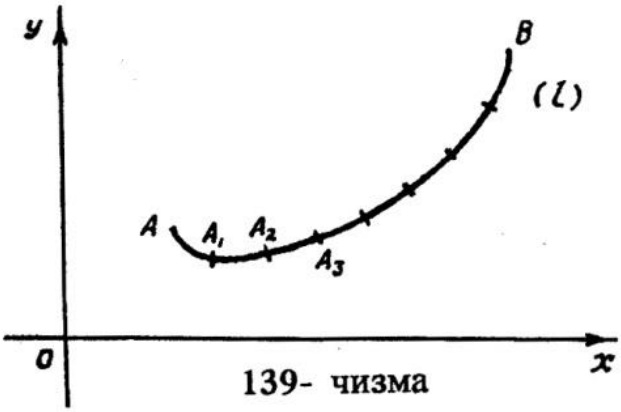
137- чизма



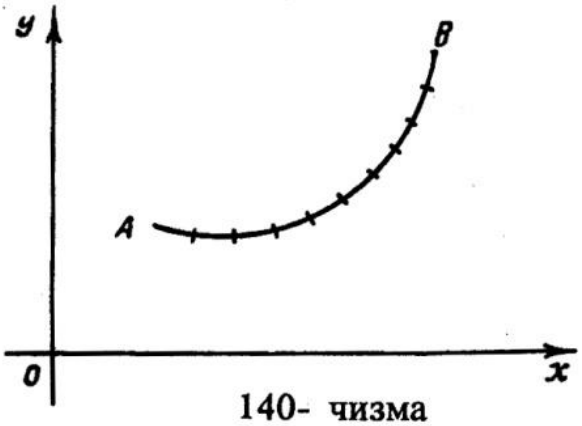
138- чизма



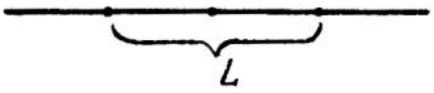
142- чизма



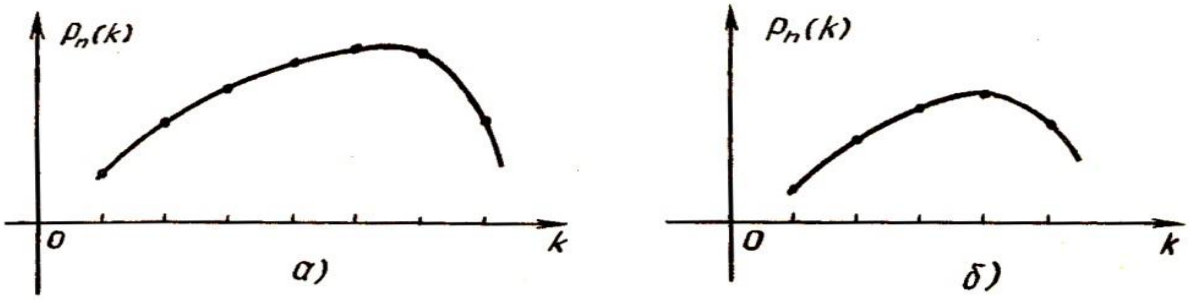
139- чизма



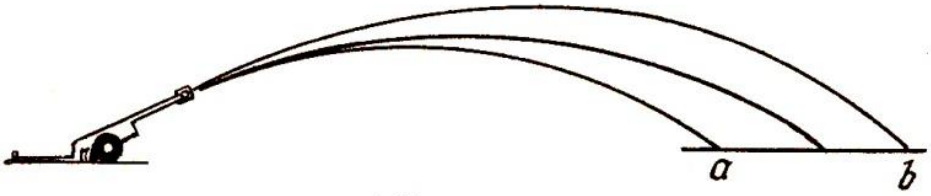
140- чизма



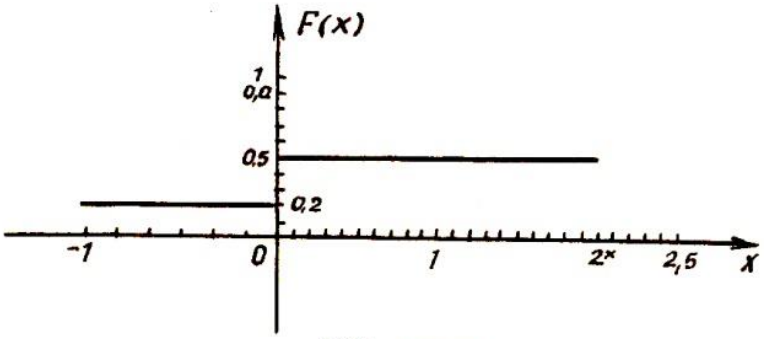
141- чизма



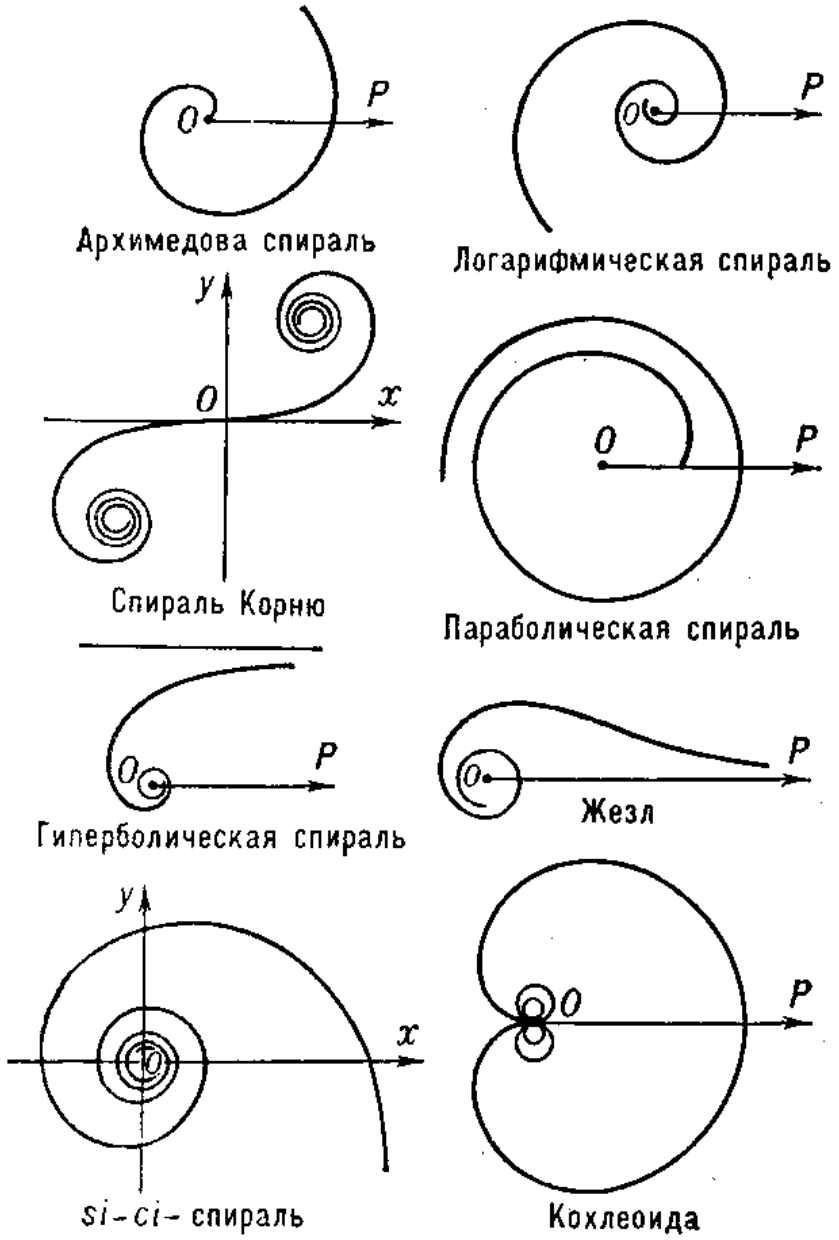
142- чизма

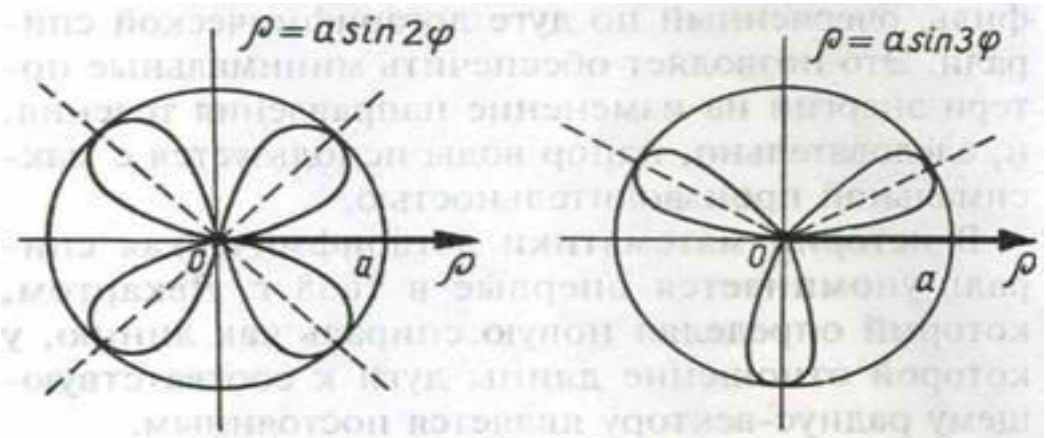


143- чизма



144- чизма


O
P
Архимедова спираль
O
P
Логарифмическая спираль
y
O
x
Спираль Корню
O
P
Параболическая спираль
O
P
Гиперболическая спираль
O
P
Жезл
y
x
O
si-ci- спираль
O
P
Кохлеоида


ρ = a sin 2φ
0
a
ρ
ρ = a sin 3φ
0
a
ρ

а) Рис. 11 б)

Рис. 4.21

Рис. 4.22

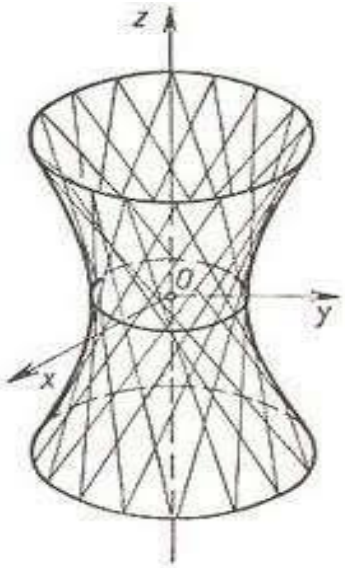
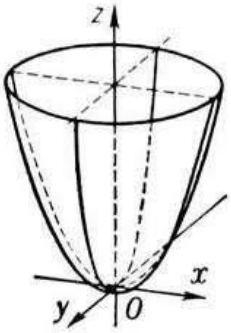
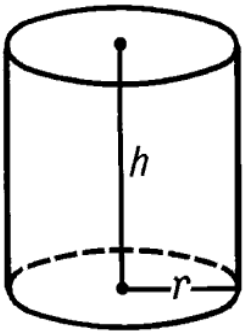
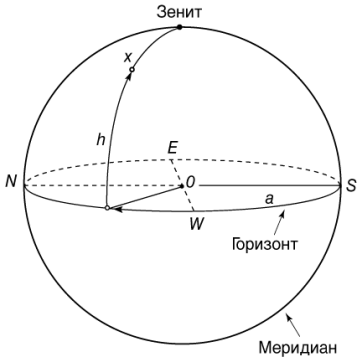


Рис. 4.20



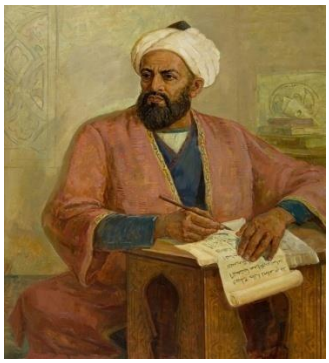


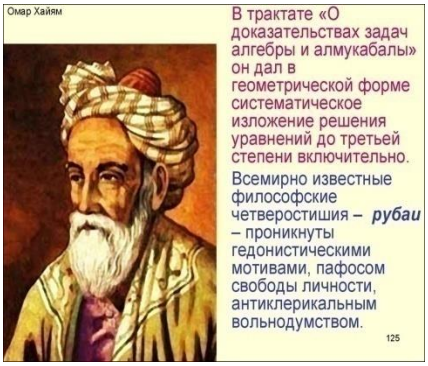


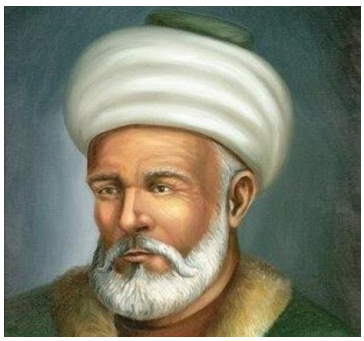
БУЮК МАТЕМАТИК ОЛИМЛАР

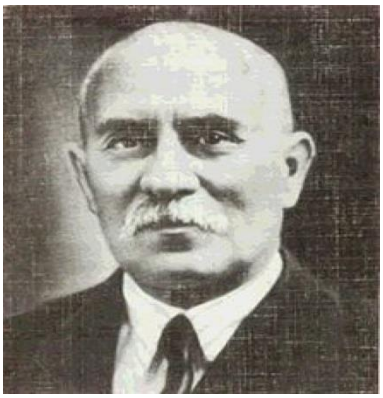
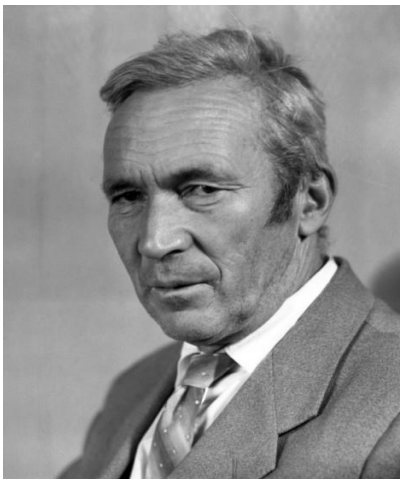
Великие
математики.

Абу Абдулла Мухаммед ибн Муса аль-Хорезми - выдающийся астроном, географ и математик IX века
MyShared




Омар Хайям
В трактате «О доказательствах задач алгебры и алмукабалы» он дал в геометрической форме систематическое изложение решения уравнений до третьей степени включительно.
Всемирно известные философские четверостишия – рубаи – проникнуты гедонистическими мотивами, пафосом свободы личности, антиклерикальным вольнодумством.
125



Марков А.А. (1856-1922)
Расширил область применения закона больших чисел и центральной предельной теоремы, распространив их на зависимые опыты.
Назад



A.A.FAYZIYEV

MATEMATIKA

$$H_0: \quad M(X) = M(Y), \quad H_1: \quad M(X) \neq M(Y)$$

$$t_{ko'z} = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{(n-1)S_X^2-(m-1)S_Y^2}}\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}},$$

$$t_{krit} = t\ (n+m-2;\ \alpha).$$

TOSHKENT – 2021

MATEMATIKADAN MUHIM FORMULALAR

Oddiy foizli jamg‘arma	$A_n = A\left(1+\frac{np}{100}\right)$, **A-boshlang’ich pul, p%, n muddat.**
Murakkab foizli jamg‘arma	$K_n = K\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ **K-boshlang’ich pul, p%, n muddat.**

1. $a^0 = 1,$	**2.** $a^n a^m = a^{n+m},$	**3.** $a^n : a^m = a^{n-m}$,
4. $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$	**5.** $(a^n)^m = a^{nm},$	**6.** $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

7. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ **agar** ≥ 0 va $b \geq 0$ $bo'lsa$

8. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{b}$ **agar** $a \geq 0$ va $b > 0$ $bo'lsa$

9. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$ **10.** $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

11. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$

12. $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & agar \quad a \geq 0 \quad bo'lsa, \\ -a, & agar \quad a \leq 0 \quad bo'lsa. \end{cases}$

13. $\sqrt{(a-b)^2} = |a-b| = \begin{cases} a-b, & agar \quad a \geq b \quad bo'lsa, \\ b-a, & agar \quad a \leq b \quad bo'lsa. \end{cases}$

14. $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, **15.** $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2,$

16. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

17. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$

18. $log_a 1 = 0,$ **19.** $log_a a = 1,$ **20.** $log_a(bc) = log_a b + log_a c$

21. $log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c,$ **22.** $log_{a^n} b = \frac{1}{n} log_a b$

23. $log_a b^n = n log_a b,$ **24.** $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a},$ **25.** $log_a b = \frac{1}{log_b a}$

26. $log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} log_a b,$ **27.** $log_{10} b = lgb,$ **28.** $log_e b = lnb$

1. Birinchi ajoyib limit $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, 2. Ikkinchi ajoyib limit $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}7182$.

Hosila jadvali

$1.C'=0,$	$2.(x)'=1,$	$3.(x^n)'=nx^{n-1},$
$4.(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}},$	$5.\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	$6.(a^x)'=a^x\ln a,$
$7.(e^x)'=e^x,$	$8.(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a},$	$9.(\ln x)'=\frac{1}{x},$
$10.(\sin x)'=\cos x,$	$11.(\cos x)'=-\sin x,$	$12.(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
$13.(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$14.(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$15.(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$16.(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$	
$17.(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$		
$18.(U+V+W)'=U'+V'+W'$	$19.(UV)'=U'V+UV'$	
$20.(CU)'=CU'$, C-const	$21.\left(\frac{U}{V}\right)'=\frac{U'V-UV'}{V^2}$	

Integrallash jadvali

$1.\int dx = x + C$	$2.\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$3.\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$4.\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$5.\int e^x dx = e^x + C$	$6.\int \cos x dx = \sin x + C$
$7.\int \sin x dx = -\cos x + C$	$8.\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + C$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$	10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + C \\ -arcctgx + C \end{cases}$
11. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right\| + C$
13. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a \pm x^2}} = \pm\sqrt{a \pm x^2} + C$	14. $\int \frac{xdx}{x^2 \pm a} = \frac{1}{2}\ln\left\|x^2 \pm a\right\| + C$

15. $\int [af(x) \pm bg(x)]dx = a\int f(x)dx \pm b\int g(x)dx$ 16. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

17. $\int udv = uv - \int vdu$ bo‘laklab integrallash formulasi deyiladi

Nyuton-Leybnis formulasi
$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big\|_a^b = F(b) - F(a)$
Yuza va hajmlarni aniq integral yordamida hisoblash:
a) $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$ egri chiziq OX o‘qi va $x = a$, $x = b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapesiya yuzasi quyidagi formula bilan hisoblanadi:
$S = \int_a^b f(x)dx$
b) Agar egri chiziq $x = \varphi(t)$, $y = \varphi(t)$ parametrik tenglamalar bilan berilgan bo‘lsa, $\alpha \leq t \leq \beta$ figura yuzasi quyidagi formula bilan hisoblanadi:
$S = \int_a^b ydx = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt$
c) Qutub koordinatalari sistemasida $g = g(\varphi)$, $\alpha < \varphi < \beta$ chiziqlar bilan chegaralangan yuza
quyidagi formula bilan hisoblanadi:
$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta g^2(\varphi)d\varphi$
d) *Ox* o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan aylanma jismning hajmini hisoblash formulasi :
a) $V_{ox} = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx$

Qator $u_1+u_2+...+u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$
a). Qator yaqinlashushning zaruriy sharti $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$
b). Yetarli sharti, Da'lamber a'lomati: $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = D = \begin{cases} D<1\ ,\ qator\ yaqinlashuvchi, \\ D>1\ ,\ qator\ uzoqlashuvchi. \end{cases}$
c). Koshi a'lomati: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = K = \begin{cases} K<1\ ,\ qator\ yaqinlashuvchi, \\ K>1\ ,\ qator\ uzoqlashuvchi. \end{cases}$
Funksiyani Makloren qatoriga yoyilmasi
$f(x) = f(0)+\frac{f`(0)}{1!}x+\frac{f``(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+..$
Teylor qatoriga yoyilmasi:
$f(x) == f(a)+\frac{f`(a)}{1!}(x-a)+\frac{f``(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$
$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$
$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^{2n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^{2n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...$
$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+....$
Funktsiyani $1 < x < 1$ oraliqda Makloren qatoriga yoyilmasi
$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n.$
Xususan
a) $m=1/2$ $(1+x)^{1/2} \approx 1+x/2 - x^2/8$
b) $m=1/3$ $(1+x)^{1/3} \approx 1+x/3 - x^2/9$
Kombinatorika elementlfri:
Gruppalash $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2).....[n-(k-1)]}{1\cdot 2\cdot 3.....k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
O'rinlashtirish A^k_n=n(n-1)(n-2)…..[n-(k-1)]
O 'rin almashtirish P_n=n!=1·2·3···n.
Ehtimolning klassik ta'rifi $P(A)=\frac{m}{n}$
Ehtimollarni qo'shish P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)
Ko'paytirish teoremalasi P(AB)=P(A) P(B/A)

To‘la ehtimol
$P(A) = P(B_1) \bullet P_{B_1}(A) + P(B_2) \bullet P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n) \bullet P_{B_n}(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\, P(A/B_i)$
Bayes formulalari $P_A(B_i) = \dfrac{P(B_i) \cdot P_{B_2}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}$
Bernulli formulasi $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$
Bu yerda k=0, 1, 2, ..., n,
$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$, $0! = 1$
Muavr-Laplasning lokal teoremasi $np = \text{const} > 10$
$P_n(k) \approx \dfrac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, bu yerda $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$
Muavr-Laplasning integral teoremasi
$P_n(k_1 < k < k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$
Bu yerda $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$,
Laplas funktsiyasi $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ toq funktsiya
Puasson formulasi
$P_n(k) \approx (\lambda^k e^{-\lambda})/k!$, $\lambda = np = \text{const} < 10$
Tasodifiy miqdor. X diskret tasodifiy miqdorni taqsimot qonuni:

x_i	x_1	x_2	.....	x_n
p_i	p_1	p_2	.....	p_n

Bu erda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ X diskret tasodifiy miqdorni qabul qiladigan qiymatlari, $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$
Matematik kutilish
$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum x_ip_i$
Diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi $D(X)$
$D(X) = M(X - M(X))^2 = MX^2 - (M(X))^2$,
bu yerda $MX^2 = \sum x_i^2 p_i = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \ldots + x_n^2 p_n$
O‘rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.
Normal taqsimot
$f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$
Normal taqsimlangan M(X)=a, o‘rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma = \sqrt{D(x)}$ tasodifiy miqdorning (α, β) oraliqda yotuvchi qiymat qabul qilish ehtimoli:

$$P\{\alpha \le x \le \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

Matematik statistika elementlari

Tanlanmaning statistik taqsimoti

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k
W_i	w_1	w_2	...	w_k

Bu yerda $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ - tanlamani hajmi, $\sum_{i=1}^{k} W_i = 1$

Sterdjess formulasi: intervallar soni $k=1+3{,}322 \lg n$,

Interval uzunligi $h=(x_{max} - x_{min})/k$.

Nuqtaviy statistik baholar:

a) Tanlanma o'rtacha qiymat

$$\overline{x_T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i = \frac{1}{n}(x_1 n_1 + x_2 n_2 + \cdot \quad \cdot \quad \cdot + x_k n_k)$$

bu yerda $n_1+n_2+...+n_k = n$ tanlanmani hajmi.

b). Tanlanma dispersiya $D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{x_T})^2$

c). Tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish $\sigma_T = \sqrt{D_T}$

d). Statistik taqsimotning medianasi:

$$M_e = \begin{cases} x_{k+1}, & n = 2k+1 \quad bo'lsa \\ \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}), & n = 2k \quad bo'lsa \end{cases}$$

j). Variatsiya koeffitsienti $V_T = \frac{\sigma}{\overline{x_T}} 100\%$

Intervalli statistik baho. Normal taqsimotni noma'lum

parametrlariga intervalli statistik baho qurish

a). No'malu matematik kutilish a -ga

$$\left(\overline{x_T} - t_\gamma \frac{S_T}{\sqrt{n}};\ \overline{x_T} + t_\gamma \frac{S_T}{\sqrt{n}}\right), \quad \text{bu yerda} \quad S_T^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_T})^2 n_i$$

$t_\gamma = t(n, \gamma)$ ni qiymati berilgan n va γ lar bo'yicha Styudent taqsimot jadvalidan olinadi

b). No'malu o'rtacha kvadratik chetlanish σ -ga γ kafolat bilan qoplaydigan intervalli statistic bahosi:

1) $q < 1$ bo'lganda $S_t(1-q) < \sigma < S_t(1+q)$

2) $q > 1$ bo'lganda $0 < \sigma < S_t(1+q)$

Statistik gipotezalarni tekshirish.

Styudent kriteriyasi. X va Y bosh to‘plamlar normal taqsimlangan bo‘lsin:
$\begin{cases} X: x_1, x_2 .....x_n \\ Y: y_1, y_2 .....y_n \\ H_0: M(X) = M(Y) \end{cases}$
tanlanma to‘plamlar asosida asosiy gipotezani $H_1: M(X) \neq M(Y)$
$t_{куз} = \frac{\lvert \overline{X} - \overline{Y} \rvert}{\sqrt{((n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}} \sqrt{\frac{(nm(n+m-2)}{n+m}}$ *α qiymatdorlik darajasi bilan tekshirish uchun*
hisoblanib, Styudent taqsimoti jadvalidan $t_{krit}(n+m-2;\ \alpha)$ *ning qiymati* topilib taqqoslanadi:
a). Agar $t_{kuz}<t_{kr}$ bo‘lsa, α qiymatdorlik darajasi bilan asosiy gipoteza $H_0: M(X)=M(Y)$ gipoteza qabul qilinadi;
b). Agar $t_{kuz}> t_{kr}$ bo‘lsa, asosiy H_0 gipoteza rad etilib, unga alternativ H_1:M(X)≠M(Y) gipoteza α qiymatdorlik darajasi bilan qabul qilinadi. Bu yerda $t_{kuz}(n+m-2;\ \alpha)$ *ning qiymati* Styudent taqsimoti jadvalidan topiladi
Bir faktorli dispersion tahlil usuli H_0: $M(X_1)=M(X_2=...=M(X_r)$,
asosiy gipotezani, alternativ H_1: $M(X_1)\neq M(X_2)\neq\ldots\neq M(X_r)$ shartda tekshirish uchun
hisoblanadi $F_{kuz}=S^2_{fakt}/S^2_{qoldiq}$
a) Agar $F_{kuz} < F_{kr}$ bo‘lsa, H_0 gipoteza α qiymatdorlik darajasi bilan qabul qilinadi,
b) Agar $F_{kuz}> F_{kr}$ bo‘lsa asosiy H_0 gipoteza rad etilib, alternativ H_1 gipoteza qabul qilinadi.
Fisher-Snedekor taqsimotining kritik nuqtalari jadvalidan $F_{kr}(\alpha, k_1=r-1, k_2=p(q-1))$
qiymati aniqlanadi.
Korrelyatsiya koeffitsientini hisoblash formulasi.
Korrelyatsiya koeffitsientini ushbu formula bilan hisoblanadi:
$r_T = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_T})(y_i - \overline{y_T})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_T})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y_T})^2}}$,
b). $-1 \leq r_T \leq 1$. $r=\pm 1$ *bo’lsa, x va y tasudifiy miqdorlar chiziqli bjg’lanishga ega.*
c). Chiziqli korrelyatsiyon bog’lanish tenglamasi $y_x - \overline{y_T} = r_T \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x_T})$

Lotincha			Kirill	Lotincha			Kirill
Bosma	**Yozmasi**	**Talaffuzi**	**Harflar**	**Bosma**	**Yozmasi**	**Talaffuzi**	**Harflar**
A a	*Aa*	*a*	А а	**Ō ō**	*Ōō*	*ō*	Ў ў
B b	*Bb*	*be*	Б б	**P p**	*Pp*	*pe*	П п
D d	*Dd*	*de*	Д д	**Q q**	*Qq*	*qe*	Қ қ
E e	*Ee*	*e*	Э э	**R r**	*Rr*	*re*	Р р
F f	*Ff*	*fe*	Ф ф	**S s**	*Ss*	*se*	С с
G g	*Gg*	*ge*	Г г	**Ş ş**	*Şş*	*şe*	Ш ш
Ḡ ḡ	*Ḡḡ*	*ḡe*	Ғ ғ	**Ç ç**	*Çç*	*çe*	Ч ч
H h	*Hh*	*he*	Ҳ ҳ	**T t**	*Tt*	*te*	Т т
I i	*Ii*	*i*	И и	**U u**	*Uu*	*u*	У у
J j	*Jj*	*je*	Ж ж	**V v**	*Vv*	*ve*	В в
K k	*Kk*	*ke*	К к	**X x**	*Xx*	*xe*	Х х
L l	*Ll*	*le*	Л л	**Y y**	*Yy*	*ye*	Й й
M m	*Mm*	*me*	М м	**Z z**	*Zz*	*ze*	З з
N n	*Nn*	*ne*	Н н	**ng**	*ng*	*nge*	нг
O o	*Oo*	*o*	О о	**'**	**'**	*Tutuq b.*	ъ