دانشگاه اصفهان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر خوانسار

جبر خطی کاربردی

نیمسال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۳

فهرست مطالب

مقدمه

۱.۰ مقدمه

جبر خطی عددی شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی و محاسباتی است که به مطالعه و توسعه الگوریتم‌های عددی برای حل مسائل جبر خطی می‌پردازد. این درس در بسیاری از حوزه‌های علمی و مهندسی نقش کلیدی دارد.

۲.۰ اهداف جبر خطی عددی

- توسعه الگوریتم‌های کارا برای حل دستگاه‌های معادلات خطی.
- تقریب و محاسبه مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس‌ها.
- بررسی پایداری و دقت روش‌های عددی در جبر خطی.
- ارائه روش‌هایی برای تجزیه و تحلیل ماتریس‌ها مانند تجزیه LU، تجزیه QR و تجزیه SVD.
- کاربرد روش‌های عددی در حل مسائل مهندسی و علمی.

۳.۰ کاربردهای جبر خطی عددی

- **مهندسی:** تحلیل سازه‌ها، پردازش سیگنال و شبیه‌سازی‌های مهندسی.
- **علوم داده و یادگیری ماشین:** کاهش ابعاد داده، الگوریتم‌های بهینه‌سازی و تحلیل داده‌های بزرگ.
- **گرافیک کامپیوتری:** پردازش تصاویر، رندرینگ سه‌بعدی و فشرده‌سازی داده‌ها.
- **اقتصاد و مالی:** مدل‌سازی مالی، بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری و تحلیل داده‌های اقتصادی.
- **فیزیک و شیمی محاسباتی:** شبیه‌سازی دینامیک مولکولی و تحلیل سیستم‌های پیچیده.

فصل ۱

بردارها و ماتریس‌ها

۱.۱ تعاریف و مفاهیم پایه‌ای

۱.۱.۱ بردارها

تعریف ۱.۱.۱: بردار

یک بردار در فضای $\mathbb{R}^n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

مثال ۱.۱.۱:

مثال: بردار $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ در $\mathbb{R}^3$.

تعریف ۲.۱.۱: جمع بردارها

اگر $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ باشند، جمع آن‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$$

تعریف ۳.۱.۱: ضرب اسکالر در بردار

برای یک بردار $\mathbf{v}$ و اسکالر c داریم:

$$c\mathbf{v} = \begin{bmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ \vdots \\ cv_n \end{bmatrix}$$

تعریف ۴.۱.۱: ترکیب خطی بردارها

یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$$

مثال ۲.۱.۱:

فرض کنید دو بردار زیر را داشته باشیم:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

اگر ضرایب $c_1 = 2$ و $c_2 = -1$ باشند، ترکیب خطی آن‌ها برابر است با:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مثال ۳.۱.۱: نوشتن یک بردار به صورت ترکیب خطی چند بردار دیگر

برداری که به صورت ترکیب خطی دو بردار دیگر نوشته می‌شود:
فرض کنیم سه بردار زیر را داشته باشیم:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$$

می‌خواهیم ضرایبی مانند c_1, c_2 پیدا کنیم که:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}$$

با جایگذاری مقدار بردارها، دستگاه معادلات خطی زیر را داریم:

$$c_1(1) + c_2(3) = 7$$

$$c_1(2) + c_2(4) = 10$$

با حل این دستگاه، مقدار $c_1 = 1$ و $c_2 = 2$ به‌دست می‌آید، پس بردار $\mathbf{w}$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی دو بردار دیگر نوشت.

مثال ۴.۱.۱: برداری که به صورت ترکیب خطی دو بردار دیگر نوشته نمی‌شود

فرض کنیم سه بردار زیر را داشته باشیم:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

اگر بخواهیم ضرایبی مانند c_1, c_2 پیدا کنیم که:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}$$

با جایگذاری مقدار بردارها، دستگاه معادلات خطی زیر را داریم:

$$c_1(1) + c_2(2) = 3$$

$$c_1(1) + c_2(2) = 4$$

این دو معادله با هم در تناقض‌اند (چون سمت چپ دو معادله برابر است اما سمت راست متفاوت)، بنابراین چنین ضرایبی وجود ندارد و بردار $\mathbf{w}$ را نمی‌توان به صورت ترکیب خطی دو بردار دیگر نوشت.

تعریف ۵.۱.۱: ضرب داخلی بردارها

اگر $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ باشند، ضرب داخلی آن‌ها به صورت زیر است:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

مثال ۵.۱.۱:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1)(4) + (2)(-5) + (3)(6) = 4 - 10 + 18 = 12$$

تعریف ۶.۱.۱: تعمیم ضرب داخلی به بردارهای مختلط

برای دو بردار مختلط $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$، ضرب داخلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i}$$

که در آن $\overline{v_i}$ مزدوج مختلط v_i است.

مثال ۶.۱.۱:

فرض کنیم دو بردار مختلط زیر را داشته باشیم:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 2-i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3-i \\ 1+2i \end{bmatrix}$$

ضرب داخلی آن‌ها برابر است با:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (1+i)\overline{(3-i)} + (2-i)\overline{(1+2i)} \\ &= (1+i)(3+i) + (2-i)(1-2i) \\ &= (1 \cdot 3 + 1 \cdot i + i \cdot 3 + i \cdot i) + (2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2i) - i \cdot 1 - i \cdot (-2i)) \\ &= (3 + i + 3i - 1) + (2 - 4i - i + 2) \\ &= (2+4i) + (4-5i) = 6 - i \end{aligned}$$

نکته :

ضرب داخلی بردارها دارای ویژگی‌های مهم زیر است:

۱. **خطی بودن در اولین مؤلفه:** برای هر بردارهای $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ و ضرایب مختلط α, β داریم:

$$(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$$

۲. **خاصیت مزدوج‌گیری:** برای هر دو بردار $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ داریم:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}$$

یعنی اگر جای دو بردار را عوض کنیم، مزدوج مختلط نتیجه تغییر می‌کند.

۳. **مثبت معین بودن:** برای هر بردار $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ داریم:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$$

و برابری زمانی رخ می‌دهد که $\mathbf{u} = 0$ باشد.

۴. **نرم بردار:** از ضرب داخلی می‌توان برای تعریف **نرم** (یا طول) یک بردار استفاده کرد:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

۵. **نامساوی شوارتز:** برای هر دو بردار $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ داریم:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

که تعمیم نامساوی کوشی-شوارتز برای بردارهای مختلط است.

۲.۱.۱ نُرم بردار

نُرم یک بردار، یک تابع است که مقدار عددی غیرمنفی را به هر بردار نسبت می‌دهد و نشان‌دهنده اندازه یا طول آن بردار است. به‌طور کلی، نُرم یک بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{C}^n$ تابعی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|\mathbf{v}\| : \mathbb{R}^n \text{ یا } \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{\geq 0}$$

و باید سه خاصیت اصلی زیر را داشته باشد:

نکته : خواص نُرم بردار

نرم یک بردار باید دارای ویژگی‌های مهم زیر باشد:

۱. **نامنفی بودن و خاصیت صفر:** برای هر بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ داریم:

$$\|\mathbf{v}\| \geq 0, \quad \text{و} \quad \|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = 0$$

۲. **همگنی:** برای هر عدد مختلط α و بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ داریم:

$$\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\|$$

یعنی ضرب یک بردار در یک عدد مختلط، مقدار نُرم را به اندازه قدرمطلق آن عدد تغییر می‌دهد.

۳. **نامساوی مثلثی:** برای هر دو بردار $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ داریم:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

این خاصیت بیان می‌کند که طول مجموع دو بردار از مجموع طول‌های آن‌ها بیشتر نیست.

تعریف ۷.۱.۱: نُرم اقلیدسی

نُرم اقلیدسی یک بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ که با $\|\mathbf{v}\|$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2}$$

که در آن $|v_i|$ مقدار قدرمطلق (یا اندازه) مؤلفه‌های مختلط بردار است. به نرم اقلیدسی نُرم ۲ هم گفته می‌شود و بیشتر اوقات آن را با نماد $\|\mathbf{v}\|_2$ نیز نشان می‌دهند.

مثال ۷.۱.۱: محاسبه نُرم ۲ یک بردار دو بعدی مختلط مقدار

فرض کنیم بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^2$ به صورت زیر داده شده باشد:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3+4i \\ 1-i \end{bmatrix}$$

نرم این بردار برابر است با:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_2 &= \sqrt{|3+4i|^2 + |1-i|^2} \\ &= \sqrt{(3^2+4^2) + (1^2+(-1)^2)} \\ &= \sqrt{(9+16) + (1+1)} \\ &= \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

تعریف ۱.۱.۸: نُرم بی‌نهایت

نرم بی‌نهایت یک بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{C}^n$ که با $\|\mathbf{v}\|_\infty$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |v_i|$$

یعنی بزرگ‌ترین مقدار مطلق در بین مؤلفه‌های بردار را نشان می‌دهد.

مثال ۱.۱.۸: محاسبه نُرم بی‌نهایت

فرض کنیم بردار زیر را داشته باشیم:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

در این صورت:

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max\{|-3|, |7|, |2|\} = 7$$

برای بردار مختلط:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2+i \\ -4-3i \\ 5+2i \end{bmatrix}$$

داریم:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\|_\infty &= \max\{|2+i|, |-4-3i|, |5+2i|\} \\ &= \max\{\sqrt{2^2+1^2}, \sqrt{(-4)^2+(-3)^2}, \sqrt{5^2+2^2}\} \\ &= \max\{\sqrt{5}, \sqrt{25}, \sqrt{29}\} = \sqrt{29} \end{aligned}$$

تعریف ۱.۱.۹: نُرم p-ام (p-Norm)

نُرم p-ام یک بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{C}^n$ که با $\|\mathbf{v}\|_p$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

که در آن $p \geq 1$ یک عدد حقیقی است.

تعریف ۱۰.۱.۱: نُرم 1 (Manhattan Norm)

نُرم ۱ که به نام نُرم مانهتن یا نُرم تاکسی‌متری نیز شناخته می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

یعنی مجموع مقادیر قدرمطلق مؤلفه‌های بردار را نشان می‌دهد.

مثال ۹.۱.۱: محاسبه نرم p

فرض کنیم بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ به صورت زیر داده شده باشد:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نُرم ۲ (نُرم اقلیدسی) برابر است با:

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \left(|3|^2 + |-4|^2 + |1|^2\right)^{\frac{1}{2}} = (9 + 16 + 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{26}$$

برای نُرم ۳ داریم:

$$\|\mathbf{v}\|_3 = \left(|3|^3 + |-4|^3 + |1|^3\right)^{\frac{1}{3}} = (27 + 64 + 1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{92}$$

مثال ۱۰.۱.۱: محاسبه نُرم ۱

برای بردار:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

داریم:

$$\|\mathbf{v}\|_1 = |3| + |-4| + |1| = 3 + 4 + 1 = 8$$

مثال ۱.۱.۱۱: محاسبه نُرم ۱ بردار مختلط مقدار

فرض کنیم بردار $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^3$ به صورت زیر داده شده باشد:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2+i \\ -3-2i \\ 4i \end{bmatrix}$$

ابتدا قدرمطلق هر مؤلفه را محاسبه می‌کنیم:

$$|2+i| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

$$|-3-2i| = \sqrt{(-3)^2+(-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$|4i| = \sqrt{(0)^2+4^2} = \sqrt{16} = 4$$

بنابراین، مقدار نُرم ۱ این بردار برابر است با:

$$\|\mathbf{w}\|_1 = |2+i| + |-3-2i| + |4i| = \sqrt{5} + \sqrt{13} + 4$$

تعریف ۱.۱.۱۱: نرم ضرب داخلی

از ضرب داخلی می‌توان نُرم یک بردار را محاسبه کرد:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$$

۱.۱.۳ ماتریس‌ها

تعریف ۱.۱.۱۲: ماتریس

یک ماتریس $m \times n$ مجموعه‌ای مستطیلی از اعداد است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال ۱.۱.۱۲:

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

۴.۱.۱ ماتریس‌های خاص

تعریف ۱۳.۱.۱: ماتریس مربعی

یک ماتریس مربعی، ماتریسی است که تعداد سطرها و ستون‌های آن برابر است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

تعریف ۱۴.۱.۱: ماتریس مستطیلی

یک ماتریس مستطیلی دارای تعداد سطر و ستون نامساوی است:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

مثال:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

تعریف ۱۵.۱.۱: ماتریس صفر

ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر باشند:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تعریف ۱۶.۱.۱: ماتریس همانی

یک ماتریس مربعی که درایه‌های قطر اصلی آن ۱ و سایر درایه‌ها صفر باشند:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعریف ۱۷.۱.۱: ماتریس قطری

یک ماتریس مربعی که درایه‌های خارج از قطر اصلی آن صفر هستند:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$

مثال:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

تعریف ۱۸.۱.۱: ماتریس بالا مثلثی

یک ماتریس مربعی که درایه‌های پایین‌تر از قطر اصلی آن صفر هستند:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

مثال:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

تعریف ۱۹.۱.۱: ماتریس پایین مثلثی

یک ماتریس مربعی که درایه‌های بالاتر از قطر اصلی آن صفر هستند:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$

مثال:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

تعریف ۲۰.۱.۱: ماتریس متقارن

یک ماتریس مربعی که در آن $A^T = A$ باشد:

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{bmatrix}$$

مثال:

$$S = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

تعریف ۲۱.۱.۱: جمع ماتریس‌ها

اگر A, B دو ماتریس هم‌اندازه باشند، جمع آن‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

تعریف ۲۲.۱.۱: ضرب اسکالر در ماتریس

برای یک ماتریس A و اسکالر c داریم:

$$(cA)_{ij} = cA_{ij}$$

تعریف ۲۳.۱.۱: ضرب ماتریس‌ها

اگر A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $n \times p$ باشد، حاصل‌ضرب AB یک ماتریس $m \times p$ است که درایه‌های آن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

۵.۱.۱ نُرم ماتریس

نُرم یک ماتریس، تعمیمی از نُرم بردار است که اندازه یا بزرگی یک ماتریس را نشان می‌دهد. به‌طور کلی، نُرم ماتریس یک تابع $\|A\|$ است که مقدار عددی غیرمنفی را به هر ماتریس A نسبت می‌دهد و باید خواص زیر را داشته باشد:

نکته : خواص نُرم بردار

۱. نامنفی بودن و خاصیت صفر:

$$\|A\| \geq 0, \quad \text{و} \quad \|A\| = 0 \iff A = 0$$

۲. همگنی (همریختی مثبت):

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ یا } \mathbb{C}$$

۳. نامساوی مثلثی:

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

۴. سازگاری با ضرب بردار (در نُرم‌های القایی):

$$\|A\mathbf{v}\| \leq \|A\| \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \neq 0$$

۶.۱.۱ انواع نُرم‌های ماتریس

چندین نُرم برای ماتریس‌ها تعریف می‌شود که بسته به کاربرد مورد استفاده قرار می‌گیرند:

تعریف ۲۴.۱.۱: نُرم فروبنیوس (Frobenius Norm)

نُرم فروبنیوس، مشابه نُرم اقلیدسی برای بردارها، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

مثال: اگر

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

باشد، نُرم فروبنیوس برابر است با:

$$\|A\|_F = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 4 + 9 + 16} = \sqrt{30}$$

تعریف ۲۵.۱.۱: نُرم p-ام القایی (Induced Norm)

نُرم p-ام القایی، برای یک ماتریس A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\|_p = \sup_{\mathbf{v}\neq 0} \frac{\|A\mathbf{v}\|_p}{\|\mathbf{v}\|_p}$$

دو حالت خاص آن رایج‌تر هستند:

نُرم ۱ (نُرم ستون‌محور):

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

که بیشترین مجموع ستون‌های قدرمطلق را نشان می‌دهد.

نُرم ∞ (نُرم سطرمحور):

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

که بیشترین مجموع سطرهای قدرمطلق را نشان می‌دهد.

مثال: برای ماتریس:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

نُرم ۱ برابر است با:

$$\|A\|_1 = \max\{|-2|+|4|, |3|+|-1|\} = \max\{6,4\} = 6$$

و نُرم بی‌نهایت برابر است با:

$$\|A\|_\infty = \max\{|-2|+|3|, |4|+|-1|\} = \max\{5,5\} = 5$$

تعریف ۲۶.۱.۱: نُرم طیفی (Spectral Norm)

نُرم طیفی ماتریس A که با $\|A\|_2$ نمایش داده می‌شود، برابر با بزرگترین مقدار ویژه (مقدار تکین) ماتریس است:

$$\|A\|_2 = \sigma_{\max}(A)$$

که $\sigma_{\max}(A)$ بزرگ‌ترین مقدار تکین ماتریس A است.

مثال: اگر

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

باشد، مقادیر ویژه آن $\lambda = \pm 1$ هستند. بنابراین:

$$\|A\|_2 = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} = \max\{1,1\} = 1$$

۲.۱ دترمینان

تعریف ۱.۲.۱: تعریف دترمینان

دترمینان یک ماتریس مربعی را می‌توان به‌صورت بازگشتی با استفاده از **بسط روی یک سطر یا ستون** محاسبه کرد. دترمینان ماتریس $A = [a_{ij}]$ مرتبه n به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

که در آن M_{ij} دترمینان ماتریس حاصل از حذف سطر i و ستون j از A است.

نکته :

– معمولاً انتخاب **سطر یا ستونی که بیشترین تعداد صفر دارد** محاسبات را ساده‌تر می‌کند.

مثال ۱.۲.۱: دترمینان ماتریس 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

دترمینان این ماتریس به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\det(A) = ad - bc$$

مثال عددی:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (3)(7) - (5)(2) = 21 - 10 = 11$$

مثال ۲.۲.۱: دترمینان ماتریس 3×3

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

بسط روی سطر اول:

$$\det(B) = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1(5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7)$$

$$= 1(45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35)$$

$$= 1(-3) - 2(-6) + 3(-3) = -3 + 12 - 9 = 0$$

پس این ماتریس **دترمینان صفر دارد** و **وابسته خطی** است.

مثال ۳.۲.۱: دترمینان ماتریس 4×4

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

بسط روی سطر اول:

$$\det(C) = 2\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

با محاسبه‌ی دترمینان هرکدام از این ماتریس‌های 3×3، مقدار نهایی به دست می‌آید:

$$\det(C) = 2(4) - 1(-3) + 3(5) - 4(2) = 8 + 3 + 15 - 8 = 18$$

۱.۲.۱ ماتریس نامنفرد

تعریف ۲.۲.۱: تعریف ماتریس نامنفرد

یک ماتریس مربعی $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را **نامنفرد** یا **معکوس‌پذیر** گویند، اگر و تنها اگر دترمینان آن مخالف صفر باشد، یعنی:

$$\det(A) \neq 0$$

در این حالت، ماتریس A دارای یک ماتریس معکوس A^{-1} است که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

که در آن I_n ماتریس همانی مرتبه n است.

مثال ۴.۲.۱: ماتریس نامنفرد 2×2

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ابتدا دترمینان آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\det(A) = (2 \times 4) - (3 \times 1) = 8 - 3 = 5$$

چون $\det(A) \neq 0$، این ماتریس نامنفرد است و معکوس‌پذیر می‌باشد.

مثال ۵.۲.۱: ماتریس منفرد 2×2

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

دترمینان این ماتریس برابر است با:

$$\det(B) = (2 \times 2) - (4 \times 1) = 4 - 4 = 0$$

چون $\det(B) = 0$، این ماتریس **منفرد** است و معکوس ندارد.

مثال ۶.۲.۱: ماتریس نامنفرد 3×3

در نظر بگیرید:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

دترمینان این ماتریس را به کمک بسط محاسبه می‌کنیم:

$$\det(C) = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (1 \times 0 - 4 \times 6) - 2 \times (0 \times 0 - 4 \times 5) + 3 \times (0 \times 6 - 1 \times 5)$$

$$= 1 \times (-24) - 2 \times (-20) + 3 \times (-5) = -24 + 40 - 15 = 1$$

چون $\det(C) \neq 0$، ماتریس C نامنفرد و معکوس‌پذیر است.

۳.۱ خواص دترمینان

دترمینان یک ماتریس دارای ویژگی‌های مهمی است که در ادامه به برخی از این خواص اشاره می‌کنیم:

۱. **دترمینان ماتریس همانی:**

$$\det(I_n) = 1$$

که در آن I_n ماتریس همانی مرتبه n است.

۲. **دترمینان ماتریس ناصفر فقط برای ماتریس نامنفرد:**

$$\det(A) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{معکوس‌پذیر است.}A$$

۳. **دترمینان ماتریس منفرد برابر صفر است:**

$$\det(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{ماتریس منفرد است و معکوس ندارد.}A$$

۴. **خاصیت ضرب دترمینان:** برای دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه A و B داریم:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

۵. **دترمینان ماتریس معکوس:** اگر A یک ماتریس نامنفرد باشد، آنگاه:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

۶. **دترمینان ماتریس بالامثلثی یا پایین‌مثلثی:** اگر A یک ماتریس مثلثی (بالامثلثی یا پایین‌مثلثی) باشد، دترمینان آن برابر است با حاصل‌ضرب درایه‌های قطری:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

۷. **اثر ضرب یک سطر یا ستون در یک عدد ثابت:** اگر تمام درایه‌های یک سطر یا ستون ماتریس A در عدد ثابت c ضرب شوند، دترمینان نیز در همان مقدار ضرب می‌شود:

$$\det(B) = c\det(A).$$

۸. **جابجایی دو سطر یا دو ستون:** اگر در یک ماتریس دو سطر یا دو ستون را با هم جابجا کنیم، دترمینان علامت عوض می‌کند:

$$\det(A') = -\det(A).$$

۹. **سطرها یا ستون‌های مساوی یا مضرب یکدیگر:** اگر دو سطر یا دو ستون یک ماتریس مساوی باشند یا مضرب یکدیگر باشند، آنگاه:

$$\det(A) = 0.$$

۱۰. **دترمینان ترانهاده‌ی ماتریس:** برای هر ماتریس مربعی A داریم:

$$\det(A^T) = \det(A).$$

۴.۱ کدهای پایتون

کد پایتون ۱.۴.۱: تعریف بردار و ماتریس در پایتون

در سطر سوم برنامه زیر یک بردار و در سطر پنجم یک ماتریس در محیط پایتون تعریف شده‌اند. برای تعریف این دو نیاز به کتابخانه numpy وجود دارد که در سطر اول این کتابخانه وارد و از np به عنوان اختصار آن استفاده شده است.

```
1 import numpy as np
2 vector = np.array([1, 2, 3, 4, 5])
3 print("vector:")
4 print(vector)
5 matrix = np.array([[1, 2, 3],
6                    [4, 5, 6],
7                    [7, 8, 9]])
8 print("\n matrix:")
9 print(matrix)
```

کد پایتون ۲.۴.۱: محاسبه نُرم‌های مختلف یک ماتریس در پایتون

```python
import numpy as np
A = np.array([[1, -2, 3],[4,  0, -1],[-2, 1, 5]])
norm_1 = np.linalg.norm(A, 1)
norm_inf = np.linalg.norm(A, np.inf)
norm_fro = np.linalg.norm(A, 'fro')
norm_2 = np.linalg.norm(A, 2)
print(f"Norm 1 (Column Norm): {norm_1}")
print(f"Infinity Norm (Row Norm): {norm_inf}")
print(f"Frobenius Norm: {norm_fro}")
print(f"Spectral Norm (Largest Singular Value): {norm_2}")
```

```
Norm 1 (Column Norm): 9.0
Infinity Norm (Row Norm): 8.0
Frobenius Norm: 7.810249675906654
Spectral Norm (Largest Singular Value): 6.40854048954407
```

کد پایتون ۳.۴.۱: محاسبه تقریبی نُرم ۱ یک ماتریس با استفاده از هزار بردار تصادفی غیر صفر

```python
import numpy as np
A = np.array([[1, -2, 3],
              [4,  0, -1],
              [-2, 1, 5]])
num_samples = 1000
approx_norm_1 = 0
for _ in range(num_samples):
    v = np.random.randn(A.shape[1])
    v /= np.linalg.norm(v, 1)
    norm_ratio = np.linalg.norm(A @ v, 1)
    approx_norm_1 = max(approx_norm_1, norm_ratio)

print(f"Approximate Norm 1: {approx_norm_1}")
```

```
Approximate Norm 1: 8.396903386801652
```

کد پایتون ۱.۴.۴: محاسبه دترمینان یک ماتریس

```python
import numpy as np
# Define a 5x5 matrix
A = np.array([
    [2, 1, 3, 4, 5],
    [1, 0, 2, 1, 3],
    [3, 2, 1, 0, 4],
    [4, 1, 0, 2, 1],
    [5, 3, 4, 1, 2]
])
# Compute the determinant
det_A = np.linalg.det(A)
# Display the determinant (rounded to 4 decimal places)
print("\nDeterminant of matrix A:")
print(round(det_A, 4))
```

```
Determinant of matrix A:
-286.0
```

۵.۱ تمرین‌ها

تمرین ۱.۵.۱

- برای ماتریس‌های صفر و ماتریس‌های همانی انواع نُرم‌های ماتریسی را بدست آورید. چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟
- ماتریس زیر را در نظر بگیرید هر یک از نُرم‌های ماتریس روی آن را محاسبه کنید.

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$