دانشگاه اصفهان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر خوانسار

جبر خطی کاربردی

نیمسال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۳

فهرست مطالب

مقدمه

۱.۰ مقدمه

جبر خطی عددی شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی و محاسباتی است که به مطالعه و توسعه الگوریتم‌های عددی برای حل مسائل جبر خطی می‌پردازد. این درس در بسیاری از حوزه‌های علمی و مهندسی نقش کلیدی دارد.

۲.۰ اهداف جبر خطی عددی

- توسعه الگوریتم‌های کارا برای حل دستگاه‌های معادلات خطی.
- تقریب و محاسبه مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس‌ها.
- بررسی پایداری و دقت روش‌های عددی در جبر خطی.
- ارائه روش‌هایی برای تجزیه و تحلیل ماتریس‌ها مانند تجزیه LU، تجزیه QR و تجزیه SVD.
- کاربرد روش‌های عددی در حل مسائل مهندسی و علمی.

۳.۰ کاربردهای جبر خطی عددی

- **مهندسی:** تحلیل سازه‌ها، پردازش سیگنال و شبیه‌سازی‌های مهندسی.
- **علوم داده و یادگیری ماشین:** کاهش ابعاد داده، الگوریتم‌های بهینه‌سازی و تحلیل داده‌های بزرگ.
- **گرافیک کامپیوتری:** پردازش تصاویر، رندرینگ سه‌بعدی و فشرده‌سازی داده‌ها.
- **اقتصاد و مالی:** مدل‌سازی مالی، بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری و تحلیل داده‌های اقتصادی.
- **فیزیک و شیمی محاسباتی:** شبیه‌سازی دینامیک مولکولی و تحلیل سیستم‌های پیچیده.

فصل ۱

بردارها و ماتریس‌ها

۱.۱ تعاریف و مفاهیم پایه‌ای

۱.۱.۱ بردارها

تعریف ۱.۱.۱: بردار

یک بردار در فضای $\mathbb{R}^n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

مثال ۱.۱.۱:

مثال: بردار $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ در $\mathbb{R}^3$.

تعریف ۲.۱.۱: جمع بردارها

اگر $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ باشند، جمع آن‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$$

تعریف ۳.۱.۱: ضرب اسکالر در بردار

برای یک بردار $\mathbf{v}$ و اسکالر c داریم:

$$c\mathbf{v} = \begin{bmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ \vdots \\ cv_n \end{bmatrix}$$

تعریف ۴.۱.۱: ترکیب خطی بردارها

یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$$

مثال ۲.۱.۱:

فرض کنید دو بردار زیر را داشته باشیم:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

اگر ضرایب $c_1 = 2$ و $c_2 = -1$ باشند، ترکیب خطی آن‌ها برابر است با:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مثال ۳.۱.۱: نوشتن یک بردار به صورت ترکیب خطی چند بردار دیگر

برداری که به صورت ترکیب خطی دو بردار دیگر نوشته می‌شود:
فرض کنیم سه بردار زیر را داشته باشیم:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$$

می‌خواهیم ضرایبی مانند c_1, c_2 پیدا کنیم که:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}$$

با جایگذاری مقدار بردارها، دستگاه معادلات خطی زیر را داریم:

$$c_1(1) + c_2(3) = 7$$

$$c_1(2) + c_2(4) = 10$$

با حل این دستگاه، مقدار $c_1 = 1$ و $c_2 = 2$ به‌دست می‌آید، پس بردار $\mathbf{w}$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی دو بردار دیگر نوشت.

مثال ۱.۱.۴: برداری که به صورت ترکیب خطی دو بردار دیگر نوشته نمی‌شود

فرض کنیم سه بردار زیر را داشته باشیم:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

اگر بخواهیم ضرایبی مانند c_1, c_2 پیدا کنیم که:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}$$

با جایگذاری مقدار بردارها، دستگاه معادلات خطی زیر را داریم:

$$c_1(1) + c_2(2) = 3$$

$$c_1(1) + c_2(2) = 4$$

این دو معادله با هم در تناقض‌اند (چون سمت چپ دو معادله برابر است اما سمت راست متفاوت)، بنابراین چنین ضرایبی وجود ندارد و بردار $\mathbf{w}$ را نمی‌توان به صورت ترکیب خطی دو بردار دیگر نوشت.

تعریف ۱.۱.۵: ضرب داخلی بردارها

اگر $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ باشند، ضرب داخلی آن‌ها به صورت زیر است:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

مثال ۱.۱.۵:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1)(4) + (2)(-5) + (3)(6) = 4 - 10 + 18 = 12$$

تعریف ۶.۱.۱: تعمیم ضرب داخلی به بردارهای مختلط

برای دو بردار مختلط $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$، ضرب داخلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i}$$

که در آن $\overline{v_i}$ مزدوج مختلط v_i است.

مثال ۶.۱.۱:

فرض کنیم دو بردار مختلط زیر را داشته باشیم:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 2-i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3-i \\ 1+2i \end{bmatrix}$$

ضرب داخلی آن‌ها برابر است با:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (1+i)\overline{(3-i)} + (2-i)\overline{(1+2i)} \\ &= (1+i)(3+i) + (2-i)(1-2i) \\ &= (1 \cdot 3 + 1 \cdot i + i \cdot 3 + i \cdot i) + (2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2i) - i \cdot 1 - i \cdot (-2i)) \\ &= (3 + i + 3i - 1) + (2 - 4i - i + 2) \\ &= (2 + 4i) + (4 - 5i) = 6 - i \end{aligned}$$

نکته :

ضرب داخلی بردارها دارای ویژگی‌های مهم زیر است:

۱. **خطی بودن در اولین مؤلفه:** برای هر بردارهای $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ و ضرایب مختلط α, β داریم:

$$(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$$

۲. **خاصیت مزدوج‌گیری:** برای هر دو بردار $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ داریم:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}$$

یعنی اگر جای دو بردار را عوض کنیم، مزدوج مختلط نتیجه تغییر می‌کند.

۳. **مثبت معین بودن:** برای هر بردار $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ داریم:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$$

و برابری زمانی رخ می‌دهد که $\mathbf{u} = 0$ باشد.

۴. **نرم بردار:** از ضرب داخلی می‌توان برای تعریف **نرم** (یا طول) یک بردار استفاده کرد:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

۵. **نامساوی شوارتز:** برای هر دو بردار $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ داریم:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

که تعمیم نامساوی کوشی–شوارتز برای بردارهای مختلط است.

۲.۱.۱ نُرم بردار

نُرم یک بردار، یک تابع است که مقدار عددی غیرمنفی را به هر بردار نسبت می‌دهد و نشان‌دهنده اندازه یا طول آن بردار است. به‌طور کلی، نُرم یک بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{C}^n$ تابعی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|\mathbf{v}\| : \mathbb{R}^n \text{ یا } \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{\geq 0}$$

و باید سه خاصیت اصلی زیر را داشته باشد:

نکته : خواص نُرم بردار

نرم یک بردار باید دارای ویژگی‌های مهم زیر باشد:

۱. **نامنفی بودن و خاصیت صفر:** برای هر بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ داریم:

$$\|\mathbf{v}\| \geq 0, \quad \text{و} \quad \|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = 0$$

۲. **همگنی:** برای هر عدد مختلط α و بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ داریم:

$$\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$$

یعنی ضرب یک بردار در یک عدد مختلط، مقدار نُرم را به اندازه قدرمطلق آن عدد تغییر می‌دهد.

۳. **نامساوی مثلثی:** برای هر دو بردار $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ داریم:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

این خاصیت بیان می‌کند که طول مجموع دو بردار از مجموع طول‌های آن‌ها بیشتر نیست.

تعریف ۷.۱.۱: نُرم اقلیدسی

نُرم اقلیدسی یک بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ که با $\|\mathbf{v}\|$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2}$$

که در آن $|v_i|$ مقدار قدرمطلق (یا اندازه) مؤلفه‌های مختلط بردار است. به نرم اقلیدسی نُرم ۲ هم گفته می‌شود و بیشتر اوقات آن را با نماد $\|\mathbf{v}\|_2$ نیز نشان می‌دهند.

مثال ۷.۱.۱: محاسبه نُرم ۲ یک بردار دو بعدی مختلط مقدار

فرض کنیم بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^2$ به صورت زیر داده شده باشد:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3+4i \\ 1-i \end{bmatrix}$$

نرم این بردار برابر است با:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_2 &= \sqrt{|3+4i|^2 + |1-i|^2} \\ &= \sqrt{(3^2+4^2) + (1^2 + (-1)^2)} \\ &= \sqrt{(9+16) + (1+1)} \\ &= \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

تعریف ۸.۱.۱: نُرم بی‌نهایت

نرم بی‌نهایت یک بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{C}^n$ که با $\|\mathbf{v}\|_\infty$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$$

یعنی بزرگ‌ترین مقدار مطلق در بین مؤلفه‌های بردار را نشان می‌دهد.

مثال ۸.۱.۱: محاسبه نُرم بی‌نهایت

فرض کنیم بردار زیر را داشته باشیم:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

در این صورت:

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max\{|-3|, |7|, |2|\} = 7$$

برای بردار مختلط:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2+i \\ -4-3i \\ 5+2i \end{bmatrix}$$

داریم:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\|_\infty &= \max\{|2+i|, |-4-3i|, |5+2i|\} \\ &= \max\{\sqrt{2^2+1^2}, \sqrt{(-4)^2+(-3)^2}, \sqrt{5^2+2^2}\} \\ &= \max\{\sqrt{5}, \sqrt{25}, \sqrt{29}\} = \sqrt{29} \end{aligned}$$

تعریف ۹.۱.۱: نُرم pـام (p-Norm)

نُرم pـام یک بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{C}^n$ که با $\|\mathbf{v}\|_p$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

که در آن $p \geq 1$ یک عدد حقیقی است.

تعریف ۱۰.۱.۱: نُرم 1 (Manhattan Norm)

نُرم ۱ که به نام نُرم مانهتن یا نُرم تاکسی‌متری نیز شناخته می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

یعنی مجموع مقادیر قدرمطلق مؤلفه‌های بردار را نشان می‌دهد.

مثال ۹.۱.۱: محاسبه نرم p

فرض کنیم بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ به صورت زیر داده شده باشد:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نُرم ۲ (نُرم اقلیدسی) برابر است با:

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \left(|3|^2 + |-4|^2 + |1|^2\right)^{\frac{1}{2}} = (9 + 16 + 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{26}$$

برای نُرم ۳ داریم:

$$\|\mathbf{v}\|_3 = \left(|3|^3 + |-4|^3 + |1|^3\right)^{\frac{1}{3}} = (27 + 64 + 1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{92}$$

مثال ۱۰.۱.۱: محاسبه نُرم ۱

برای بردار:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

داریم:

$$\|\mathbf{v}\|_1 = |3| + |-4| + |1| = 3 + 4 + 1 = 8$$

مثال ۱۱.۱.۱: محاسبه نُرم ۱ بردار مختلط مقدار

فرض کنیم بردار $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^3$ به صورت زیر داده شده باشد:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2+i \\ -3-2i \\ 4i \end{bmatrix}$$

ابتدا قدرمطلق هر مؤلفه را محاسبه می‌کنیم:

$$|2+i| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

$$|-3-2i| = \sqrt{(-3)^2+(-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$|4i| = \sqrt{(0)^2+4^2} = \sqrt{16} = 4$$

بنابراین، مقدار نُرم ۱ این بردار برابر است با:

$$\|\mathbf{w}\|_1 = |2+i| + |-3-2i| + |4i| = \sqrt{5} + \sqrt{13} + 4$$

تعریف ۱۱.۱.۱: نرم ضرب داخلی

از ضرب داخلی می‌توان نُرم یک بردار را محاسبه کرد:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$$

۳.۱.۱ ماتریس‌ها

تعریف ۱۲.۱.۱: ماتریس

یک ماتریس $m \times n$ مجموعه‌ای مستطیلی از اعداد است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال ۱۲.۱.۱:

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

۴.۱.۱ ماتریس‌های خاص

تعریف ۱۳.۱.۱: ماتریس مربعی

یک ماتریس مربعی، ماتریسی است که تعداد سطرها و ستون‌های آن برابر است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

تعریف ۱۴.۱.۱: ماتریس مستطیلی

یک ماتریس مستطیلی دارای تعداد سطر و ستون نامساوی است:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

مثال:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

تعریف ۱۵.۱.۱: ماتریس صفر

ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر باشند:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تعریف ۱۶.۱.۱: ماتریس همانی

یک ماتریس مربعی که درایه‌های قطر اصلی آن ۱ و سایر درایه‌ها صفر باشند:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعریف ۱.۱.۱۷: ماتریس قطری

یک ماتریس مربعی که درایه‌های خارج از قطر اصلی آن صفر هستند:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$

مثال:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

تعریف ۱.۱.۱۸: ماتریس بالا مثلثی

یک ماتریس مربعی که درایه‌های پایین‌تر از قطر اصلی آن صفر هستند:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

مثال:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

تعریف ۱.۱.۱۹: ماتریس پایین مثلثی

یک ماتریس مربعی که درایه‌های بالاتر از قطر اصلی آن صفر هستند:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$

مثال:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

تعریف ۲۰.۱.۱: ماتریس متقارن

یک ماتریس مربعی که در آن $A^T = A$ باشد:

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{bmatrix}$$

مثال:

$$S = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

تعریف ۲۱.۱.۱: جمع ماتریس‌ها

اگر A, B دو ماتریس هم‌اندازه باشند، جمع آن‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

تعریف ۲۲.۱.۱: ضرب اسکالر در ماتریس

برای یک ماتریس A و اسکالر c داریم:

$$(cA)_{ij} = cA_{ij}$$

تعریف ۲۳.۱.۱: ضرب ماتریس‌ها

اگر A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $n \times p$ باشد، حاصل‌ضرب AB یک ماتریس $m \times p$ است که درایه‌های آن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

کد پایتون ۱.۱.۱: تعریف بردار و ماتریس در پایتون

در سطر سوم برنامه زیر یک بردار و در سطر پنجم یک ماتریس در محیط پایتون تعریف شده‌اند. برای تعریف این دو نیاز به کتابخانه numpy وجود دارد که در سطر اول این کتابخانه وارد و از np به عنوان اختصار آن استفاده شده است.

```
1 import numpy as np
2 vector1 = np.array([1, 2, 3, 4, 5])
3 print("vector:")
4 print(vector1)
5 matrix = np.array([[1, 2, 3],
6                    [4, 5, 6],
7                    [7, 8, 9]])
8 print("\n matrix:")
9 print(matrix)
10 vector2 = np.array([4,6,7, 6,90])
11 print(vector1[-1])
```

۵.۱.۱ نُرم ماتریس

نُرم یک ماتریس، تعمیمی از نُرم بردار است که اندازه یا بزرگی یک ماتریس را نشان می‌دهد. به‌طور کلی، نُرم ماتریس یک تابع $\|A\|$ است که مقدار عددی غیرمنفی را به هر ماتریس A نسبت می‌دهد و باید خواص زیر را داشته باشد:

نکته : خواص نُرم بردار

۱. نامنفی بودن و خاصیت صفر:

$$\|A\| \geq 0, \quad \text{و} \quad \|A\| = 0 \iff A = 0$$

۲. همگنی (همریختی مثبت):

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ یا } \mathbb{C}$$

۳. نامساوی مثلثی:

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

۴. سازگاری با ضرب بردار (در نُرم‌های القایی):

$$\|A\mathbf{v}\| \leq \|A\| \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \neq 0$$

۶.۱.۱ انواع نُرم‌های ماتریس

چندین نُرم برای ماتریس‌ها تعریف می‌شود که بسته به کاربرد مورد استفاده قرار می‌گیرند:

تعریف ۲۴.۱.۱: نُرم فروبنیوس (Frobenius Norm)

نُرم فروبنیوس، مشابه نُرم اقلیدسی برای بردارها، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$$

مثال: اگر

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

باشد، نُرم فروبنیوس برابر است با:

$$\|A\|_F = \sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2} = \sqrt{1+4+9+16} = \sqrt{30}$$

تعریف ۲۵.۱.۱: نُرم pـام القایی (Induced Norm)

نُرم pـام القایی، برای یک ماتریس A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\|_p = \sup_{\mathbf{v}\neq 0}\frac{\|A\mathbf{v}\|_p}{\|\mathbf{v}\|_p}$$

دو حالت خاص آن رایج‌تر هستند:

نُرم ۱ (نُرم ستون‌محور):

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$$

که بیشترین مجموع ستون‌های قدرمطلق را نشان می‌دهد.

نُرم ∞ (نُرم سطرمحور):

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

که بیشترین مجموع سطرهای قدرمطلق را نشان می‌دهد.

مثال: برای ماتریس:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

نُرم ۱ برابر است با:

$$\|A\|_1 = \max\{|-2|+|4|, |3|+|-1|\} = \max\{6,4\} = 6$$

و نُرم بی‌نهایت برابر است با:

$$\|A\|_\infty = \max\{|-2|+|3|, |4|+|-1|\} = \max\{5,5\} = 5$$

تعریف ۲۶.۱.۱: نُرم طیفی (Spectral Norm)

نُرم طیفی ماتریس A که با $\|A\|_2$ نمایش داده می‌شود، برابر با بزرگترین مقدار ویژه (مقدار تکین) ماتریس است:

$$\|A\|_2 = \sigma_{\max}(A)$$

که $\sigma_{\max}(A)$ بزرگ‌ترین مقدار تکین ماتریس A است.

مثال: اگر

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

باشد، مقادیر ویژه آن $\lambda = \pm 1$ هستند. بنابراین:

$$\|A\|_2 = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} = \max\{1, 1\} = 1$$

کد پایتون ۲.۱.۱: محاسبه نُرم‌های مختلف یک ماتریس در پایتون

```python
import numpy as np
A = np.array([[1, -2, 3],[4,  0, -1],[-2, 1, 5]])
norm_1 = np.linalg.norm(A, 1)
norm_inf = np.linalg.norm(A, np.inf)
norm_fro = np.linalg.norm(A, 'fro')
norm_2 = np.linalg.norm(A, 2)
print(f"Norm 1 (Column Norm): {norm_1}")
print(f"Infinity Norm (Row Norm): {norm_inf}")
print(f"Frobenius Norm: {norm_fro}")
print(f"Spectral Norm (Largest Singular Value): {norm_2}")
```

```
Norm 1 (Column Norm): 9.0
Infinity Norm (Row Norm): 8.0
Frobenius Norm: 7.810249675906654
Spectral Norm (Largest Singular Value): 6.40854048954407
```

کد پایتون ۳.۱.۱: محاسبه تقریبی نُرم ۱ یک ماتریس با استفاده از هزار بردار تصادفی غیر صفر

```python
import numpy as np
A = np.array([[1, -2, 3],
              [4,  0, -1],
              [-2, 1, 5]])
num_samples = 1000
approx_norm_1 = 0
for _ in range(num_samples):
    v = np.random.randn(A.shape[1])
    v /= np.linalg.norm(v, 1)
    norm_ratio = np.linalg.norm(A @ v, 1)
    approx_norm_1 = max(approx_norm_1, norm_ratio)

print(f"Approximate Norm 1: {approx_norm_1}")
```

```
Approximate Norm 1: 8.396903386801652
```

تمرین ۱.۱.۱

- برای ماتریس‌های صفر و ماتریس‌های همانی انواع نُرم‌های ماتریسی را بدست آورید. چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

- ماتریس زیر را در نظر بگیرید هر یک از نُرم‌های ماتریس روی آن را محاسبه کنید.

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

- ماتریس A و بردار $\mathbf{x}$ به صورت زیر داده شده‌اند:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

حاصل $\|A\mathbf{x}\|_2$ و $\|A\|_2 \cdot \|\mathbf{x}\|_2$ را محاسبه کنید و نشان دهید که نابرابری زیر برقرار است:

$$\|A\mathbf{x}\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|\mathbf{x}\|_2$$

تمرین ۲.۱.۱

برنامه‌ای به زبان پایتون بنویسید که در آن یک ماتریس به عنوان ورودی گرفته شود و تمامی نُرم‌های معرفی شده در قبل را به عنوان خروجی نمایش دهد.

۲.۱ دترمینان

تعریف ۱.۲.۱: تعریف دترمینان

دترمینان یک ماتریس مربعی را می‌توان به‌صورت بازگشتی با استفاده از **بسط روی یک سطر یا ستون** محاسبه کرد. دترمینان ماتریس $A = [a_{ij}]$ مرتبه n به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

که در آن M_{ij} دترمینان ماتریس حاصل از حذف سطر i و ستون j از A است.

نکته :

- معمولاً انتخاب سطر یا ستونی که بیشترین تعداد صفر دارد محاسبات را ساده‌تر می‌کند.

مثال ۱.۲.۱: دترمینان ماتریس 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

دترمینان این ماتریس به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\det(A) = ad - bc$$

مثال عددی:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (3)(7) - (5)(2) = 21 - 10 = 11$$

مثال ۲.۲.۱: دترمینان ماتریس 3×3

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

بسط روی سطر اول:

$$\det(B) = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1(5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7)$$

$$= 1(45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35)$$

$$= 1(-3) - 2(-6) + 3(-3) = -3 + 12 - 9 = 0$$

پس این ماتریس دترمینان صفر دارد و وابسته خطی است.

مثال ۳.۲.۱: دترمینان ماتریس 4×4

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

بسط روی سطر اول:

$$\det(C) = 2\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

با محاسبه‌ی دترمینان هر کدام از این ماتریس‌های 3×3، مقدار نهایی به دست می‌آید:

$$\det(C) = 2(4) - 1(-3) + 3(5) - 4(2) = 8 + 3 + 15 - 8 = 18$$

۱.۲.۱ ماتریس نامنفرد

تعریف ۲.۲.۱: تعریف ماتریس نامنفرد

یک ماتریس مربعی $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را **نامنفرد** یا **معکوس‌پذیر** گویند، اگر و تنها اگر دترمینان آن مخالف صفر باشد، یعنی:

$$\det(A) \neq 0$$

در این حالت، ماتریس A دارای یک ماتریس معکوس A^{-1} است که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

که در آن I_n ماتریس همانی مرتبه n است.

مثال ۴.۲.۱: ماتریس نامنفرد 2×2

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ابتدا دترمینان آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\det(A) = (2 \times 4) - (3 \times 1) = 8 - 3 = 5$$

چون $\det(A) \neq 0$، این ماتریس نامنفرد است و معکوس‌پذیر می‌باشد.

مثال ۵.۲.۱: ماتریس منفرد 2×2

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

دترمینان این ماتریس برابر است با:

$$\det(B) = (2 \times 2) - (4 \times 1) = 4 - 4 = 0$$

چون $\det(B) = 0$، این ماتریس منفرد است و معکوس ندارد.

مثال ۶.۲.۱: ماتریس نامنفرد 3×3

در نظر بگیرید:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

دترمینان این ماتریس را به کمک بسط محاسبه می‌کنیم:

$$\det(C) = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (1 \times 0 - 4 \times 6) - 2 \times (0 \times 0 - 4 \times 5) + 3 \times (0 \times 6 - 1 \times 5)$$

$$= 1 \times (-24) - 2 \times (-20) + 3 \times (-5) = -24 + 40 - 15 = 1$$

چون $\det(C) \neq 0$، ماتریس C نامنفرد و معکوس‌پذیر است.

نکته : خواص دترمینان

ترمینان یک ماتریس دارای ویژگی‌های مهمی است که در ادامه به برخی از این خواص اشاره می‌شود:

۱. **دترمینان ماتریس همانی:**

$$\det(I_n) = 1$$

که در آن I_n ماتریس همانی مرتبه n است.

۲. **دترمینان ماتریس ناصفر فقط برای ماتریس نامنفرد:**

$$\det(A) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{معکوس‌پذیر است.}\ A$$

۳. **دترمینان ماتریس منفرد برابر صفر است:**

$$\det(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{ماتریس منفرد است و معکوس ندارد.}\ A$$

۴. **خاصیت ضرب دترمینان:** برای دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه A و B داریم:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

۵. **دترمینان ماتریس معکوس:** اگر A یک ماتریس نامنفرد باشد، آنگاه:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

۶. **دترمینان ماتریس بالامثلثی یا پایین‌مثلثی:** اگر A یک ماتریس مثلثی (بالامثلثی یا پایین‌مثلثی) باشد، دترمینان آن برابر است با حاصل‌ضرب درایه‌های قطری:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

۷. **اثر ضرب یک سطر یا ستون در یک عدد ثابت:** اگر تمام درایه‌های یک سطر یا ستون ماتریس A در عدد ثابت c ضرب شوند، دترمینان نیز در همان مقدار ضرب می‌شود:

$$\det(B) = c\det(A).$$

۸. **جابجایی دو سطر یا دو ستون:** اگر در یک ماتریس دو سطر یا دو ستون را با هم جابجا کنیم، دترمینان علامت عوض می‌کند:

$$\det(A') = -\det(A).$$

۹. **سطرها یا ستون‌های مساوی یا مضرب یکدیگر:** اگر دو سطر یا دو ستون یک ماتریس مساوی باشند یا مضرب یکدیگر باشند، آنگاه:

$$\det(A) = 0.$$

۱۰. **دترمینان ترانهاده‌ی ماتریس:** برای هر ماتریس مربعی A داریم:

$$\det(A^T) = \det(A).$$

کد پایتون ۱.۲.۱: محاسبه دترمینان یک ماتریس

```
import numpy as np
# Define a 5x5 matrix
A = np.array([
    [2, 1, 3, 4, 5],
    [1, 0, 2, 1, 3],
    [3, 2, 1, 0, 4],
    [4, 1, 0, 2, 1],
    [5, 3, 4, 1, 2]
])
# Compute the determinant
det_A = np.linalg.det(A)
# Display the determinant (rounded to 4 decimal places)
print("\nDeterminant of matrix A:")
print(round(det_A, 4))
```

```
Determinant of matrix A:
-286.0
```

۳.۱ وارون یک ماتریس

تعریف ۱.۳.۱: تعریف وارون یک ماتریس

یک ماتریس مربعی A از ابعاد $n\times n$ را در نظر بگیرید. اگر ماتریس A وارون‌پذیر (معکوس‌پذیر) باشد، ماتریس وارون آن، A^{-1}، به گونه‌ای تعریف می‌شود که:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

که در آن I_n ماتریس همانی $n \times n$ است.

نکته : نحوه محاسبه وارون ماتریس‌های ۲ در ۲

محاسبه‌ی وارون ماتریس ۲×۲ با استفاده از ماتریس الحاقی برای ماتریس A به شکل زیر:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

مراحل محاسبه‌ی وارون به صورت زیر است:
۱. دترمینان ماتریس ($\det(A)$) را محاسبه کنید:

$$\det(A) = ad - bc$$

اگر $\det(A) \neq 0$ باشد، ماتریس وارون‌پذیر است.
۲. ماتریس الحاقی ($\text{adj}(A)$) را محاسبه کنید:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

۳. ماتریس وارون (A^{-1}) را به دست آورید:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

نکته : نحوه محاسبه وارون ماتریس‌های ۳ در ۳

محاسبه‌ی وارون ماتریس ۳×۳ با استفاده از ماتریس الحاقی برای ماتریس A به شکل زیر:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

مراحل محاسبه‌ی وارون به صورت زیر است:
۱. دترمینان ماتریس ($\det(A)$) را محاسبه کنید:

$$\det(A) = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

اگر $\det(A) \neq 0$ باشد، ماتریس وارون‌پذیر است.
۲. ماتریس کوفاکتور (C) را محاسبه کنید:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

که در آن:

$$\begin{aligned} C_{11} &= +(ei - fh), & C_{12} &= -(di - fg), & C_{13} &= +(dh - eg), \\ C_{21} &= -(bi - ch), & C_{22} &= +(ai - cg), & C_{23} &= -(ah - bg), \\ C_{31} &= +(bf - ce), & C_{32} &= -(af - cd), & C_{33} &= +(ae - bd). \end{aligned}$$

۳. ماتریس الحاقی ($\text{adj}(A)$) را محاسبه کنید. ماتریس الحاقی، ترانهاده‌ی ماتریس کوفاکتور است:

$$\text{adj}(A) = C^T = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}$$

۴. ماتریس وارون (A^{-1}) را به دست آورید:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$$

مثال ۱.۳.۱: مثال برای ماتریس ۲×۲

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

۱. دترمینان:

$$\det(A) = (2)(4) - (3)(1) = 8 - 3 = 5$$

۲. ماتریس الحاقی:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

۳. ماتریس وارون:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

مثال ۲.۳.۱: مثال برای وارون ماتریس ۳×۳

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

۱. محاسبه‌ی دترمینان ماتریس ($\det(A)$) دترمینان ماتریس A به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\det(A) = 1 \cdot (1 \cdot 0 - 4 \cdot 6) - 2 \cdot (0 \cdot 0 - 4 \cdot 5) + 3 \cdot (0 \cdot 6 - 1 \cdot 5)$$

$$\det(A) = 1 \cdot (0 - 24) - 2 \cdot (0 - 20) + 3 \cdot (0 - 5)$$

$$\det(A) = -24 + 40 - 15 = 1$$

چون $\det(A) = 1 \neq$، ماتریس A وارون‌پذیر است.

۲. محاسبه‌ی ماتریس کوفاکتور (C) ماتریس کوفاکتور C به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

که در آن هر کوفاکتور C_{ij} به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij})$$

که M_{ij} ماتریس کوچک‌شده‌ی حذف سطر i و ستون j است.

محاسبه‌ی کوفاکتورها:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = +(0 - 24) = -24,$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = -(0 - 20) = 20,$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = +(0 - 5) = -5,$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = -(0 - 18) = 18,$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = +(0 - 15) = -15,$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = -(6 - 10) = 4,$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = +(8 - 3) = 5,$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = -(4 - 0) = -4,$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = +(1 - 0) = 1.$$

بنابراین، ماتریس کوفاکتور C به صورت زیر است:

$$C = \begin{pmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

۳. محاسبه‌ی ماتریس الحاقی ($\mathsf{adj}(A)$) ماتریس الحاقی، ترانهاده‌ی ماتریس کوفاکتور است:

$$\mathsf{adj}(A) = C^T = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

۴. محاسبه‌ی ماتریس وارون (A^{-1}) ماتریس وارون با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathsf{adj}(A)$$

از آنجایی که $\det(A) =$، داریم:

$$A^{-1} = \mathsf{adj}(A) = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

نتیجه‌گیری ماتریس وارون A^{-1} به صورت زیر است:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

کد پایتون ۱.۳.۱: محاسبه وارون یک ماتریس

```
import numpy as np

# Function to calculate the inverse of a matrix
def matrix_inverse(matrix):
    """
    Calculate the inverse of a square matrix.

    Parameters:
    matrix (numpy.ndarray): A square matrix (n x n).

    Returns:
    numpy.ndarray: The inverse of the input matrix.
    """
    # Check if the matrix is square
    if matrix.shape[0] != matrix.shape[1]:
        raise ValueError("The input matrix must be square (n x n).")

    # Calculate the determinant of the matrix
    det = np.linalg.det(matrix)
    if det == 0:
        raise ValueError("The matrix is singular (determinant is 0). Inver

    # Calculate the inverse using numpy's built-in function
    inverse = np.linalg.inv(matrix)
    return inverse

# Example usage
if __name__ == "__main__":
    # Define a 3x3 matrix
    A = np.array([[1, 2, 3],
                  [0, 1, 4],
                  [5, 6, 0]])

    print("Original Matrix A:")
    print(A)

    try:
        # Calculate the inverse of matrix A
        A_inv = matrix_inverse(A)
        print("\nInverse of Matrix A:")
        print(A_inv)

        # Verify the result by multiplying A with its inverse (should yiel
        identity_matrix = np.dot(A, A_inv)
        print("\nVerification (A * A_inv):")
        print(identity_matrix)
    except ValueError as e:
        print(e)
```

کد پایتون ۲.۳.۱: محاسبه وارون یک ماتریس مختلط

```
import numpy as np

# Define a complex matrix
A = np.array([[1 + 1j, 2],
              [3, 4 - 1j]])

# Calculate the inverse
A_inv = np.linalg.inv(A)

print("Original Matrix A:")
print(A)

print("\nInverse of Matrix A:")
print(A_inv)
```

۴.۱ چند ماتریس خاص

تعریف ۱.۴.۱:

۱. ماتریس مزدوج
(Conjugate Matrix)
اگر $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس مختلط باشد، ماتریس مزدوج آن (که با $\overline{A}$ نشان داده می‌شود) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\overline{A} = [\overline{a_{ij}}]$$

که در آن $\overline{a_{ij}}$ مزدوج مختلط a_{ij} است. به عبارت دیگر، قسمت موهومی هر درایه قرینه می‌شود.
مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1+2i & 3-i \\ 4 & 5i \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1-2i & 3+i \\ 4 & -5i \end{pmatrix}$$

تعریف ۲.۴.۱:

۲. ماتریس ترانهاده
(Transpose Matrix)
اگر $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $m \times n$ باشد، ماتریس ترانهاده آن (که با A^T نشان داده می‌شود) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^T = [a_{ji}]$$

یعنی سطرها و ستون‌های ماتریس جایگزین می‌شوند.
مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

تعریف ۳.۴.۱:

۳. ماتریس متقارن (Symmetric Matrix)

یک ماتریس A متقارن است اگر:

$$A = A^T$$

یعنی ماتریس با ترانهاده‌ی خود برابر باشد. ماتریس‌های متقارن فقط می‌توانند مربعی باشند.
مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

تعریف ۴.۴.۱:

۴. ماتریس شبه متقارن (Skew-Symmetric Matrix)

یک ماتریس A شبه متقارن است اگر:

$$A = -A^T$$

یعنی ماتریس با قرینه‌ی ترانهاده‌ی خود برابر باشد. درایه‌های قطر اصلی ماتریس‌های شبه متقارن همگی صفر هستند.
مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

تعریف ۵.۴.۱:

۵. ماتریس هرمیتی (Hermitian Matrix)

یک ماتریس مختلط A هرمیتی است اگر:

$$A = A^H = A^*$$

که در آن A^H ماتریس مزدوج ترانهاده (Conjugate Transpose) است. به عبارت دیگر:

$$A^* = A^H = \overline{A^T}$$

یعنی ماتریس با مزدوج ترانهاده‌ی خود برابر باشد. ماتریس‌های هرمیتی فقط می‌توانند مربعی باشند.
مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 3 \end{pmatrix}$$

تعریف ۶.۴.۱:

۶. ماتریس شبه هرمیتی
(Skew-Hermitian Matrix)

یک ماتریس مختلط A شبه هرمیتی است اگر:

$$A = -A^H$$

که در آن A^H ماتریس مزدوج ترانهاده است. به عبارت دیگر:

$$A^H = \overline{A^T}$$

یعنی ماتریس با قرینه‌ی مزدوج ترانهاده‌ی خود برابر باشد. درایه‌های قطر اصلی ماتریس‌های شبه هرمیتی همگی موهومی محض هستند (یعنی قسمت حقیقی آن‌ها صفر است).
مثال:

$$A = \begin{pmatrix} i & 2+i \\ -2+i & 3i \end{pmatrix}$$

نکته : جمع‌بندی

- – ماتریس مزدوج: مزدوج مختلط هر درایه محاسبه می‌شود.
- – ماتریس ترانهاده: سطرها و ستون‌ها جایگزین می‌شوند.
- – ماتریس متقارن: $A = A^T$.
- – ماتریس شبه متقارن: $A = -A^T$.
- – ماتریس هرمیتی: $A = A^H$ (ماتریس با مزدوج ترانهاده‌ی خود برابر است).
- – ماتریس شبه هرمیتی: $A = -A^H$ (ماتریس با قرینه‌ی مزدوج ترانهاده‌ی خود برابر است).

نکته : چند رابطه مهم

۱. اگر A یک ماتریس حقیقی باشد آنگاه: $A^T = A^*$.

۲. به ازای هر ماتریس A داریم: $(A^*)^* = A, (A^T)^T = A$

۳. اگر $A+B$ و AB قابل تعریف باشند آنگاه:

$$(A+B)^T = A^T + B^T, \qquad (A+B)^* = A^* + B^*,$$
$$(AB)^T = B^T A^T, \qquad (AB)^* = B^* A^*.$$

۳. اگر A یک ماتریس مربعی باشد آنگاه: $|A| = |A^T|, \quad |A^*| = |\bar{A}|$.

۴. اگر A یک ماتریس نامنفرد(وارون‌پذیر) باشد آنگاه: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, \quad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

۵. به ازای هر عدد مختلط c داریم: $(cA)^* = \bar{c}A^*$.

۶. اگر A یک ماتریس هرمیتی باشد آنگاه دترمینان آن یک عدد حقیقی است و

$$|A| = |A^*| = |\bar{A}|$$

۷. اگر A یک ماتریس مربعی دلخواه باشد آنگاه می‌توان ماتریس‌های H و G را به صورت زیر تعریف کرد

$$G = \frac{1}{2}(A + A^*), \qquad H = \frac{1}{2i}(A - A^*)$$

هر یک از ماتریسهای تعریف شده در قبل هرمیتی هستند و نیز داریم:

$$A = G + iH$$

۸. اگر A یک ماتریس مربعی دلخواه باشد آنگاه می‌توان ماتریس‌های H و G را به صورت زیر تعریف کرد

$$G = \frac{1}{2}(A + A^*), \qquad H = \frac{1}{2}(A - A^*)$$

که H یک ماتریس شبه هرمیتی و G یک از ماتریس هرمیتی است و نیز داریم:

$$A = G + H$$

مثال ۱.۴.۱:

۱. ماتریس‌های A و B را در نظر بگیرید. نشان دهید $A+A^T$ همواره یک ماتریس متقارن و ماتریس $A-A^T$ همواره یک ماتریس شبه متقارن است.

۲. فرض کنید A یک ماتریس دلخواه باشد، هر یک از ماتریس‌های AA^T و A^TA متقارن هستند.

۳. اگر A یک ماتریس نامنفرد و متقارن باشد آنگاه A^{-1} نیز متقارن است (بدیهی است که نامنفرد نیز هست).

$$AA^{-1} = I \Longrightarrow (A^{-1})^T A^T = I^T \Longrightarrow (A^{-1})^T A = I$$

با ضرب طرفین تساوی آخر در A^{-1} نتیجه حاصل می‌شود.

*

تعریف ۷.۴.۱: ماتریس یکانی (Unitary Matrix)

یک ماتریس مربعی U با ابعاد $n \times n$ را یکانی (Unitary) می‌نامند اگر معکوس آن برابر با مزدوج هرمیتی آن باشد. به عبارت دیگر، ماتریس U یکانی است اگر:

$$U^{-1} = U^*$$

که در آن U^* نشان‌دهنده‌ی مزدوج هرمیتی ماتریس U است (یعنی ترانهاده‌ی ماتریس U که درایه‌های آن مزدوج مختلط گرفته شده‌اند).
شرط یکانی بودن را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$U^*U = UU^* = I$$

که در آن I ماتریس یکانی با ابعاد $n \times n$ است.

نکته : برخی از ویژگی‌های ماتریس یکانی

- **حفظ ضرب داخلی:** اگر U یک ماتریس یکانی باشد، برای هر دو بردار x و y، ضرب داخلی $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ حفظ می‌شود.
- **حفظ نرم:** نرم یک بردار تحت تبدیل یکانی تغییر نمی‌کند، یعنی $\|Ux\| = \|x\|$.
- **مقادیر ویژه:** مقادیر ویژه یک ماتریس یکانی روی دایره‌ی واحد در صفحه‌ی مختلط قرار دارند، یعنی قدر مطلق آنها برابر با ۱ است.

تمرین ۱.۴.۱

درستی هر یک از ویژگی‌های فوق را با استفاده از مثال بررسی کنید.

مثال ۲.۴.۱: ماتریس یکانی

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

برای بررسی یکانی بودن این ماتریس، ابتدا مزدوج هرمیتی آن را محاسبه می‌کنیم:

$$U^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

سپس حاصل‌ضرب U^*U را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} U^*U &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + (-i)\cdot i & 1\cdot i + (-i)\cdot 1 \\ -i\cdot 1 + 1\cdot i & -i\cdot i + 1\cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+1 & i-i \\ -i+i & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \end{aligned}$$

چون $U^*U = I$، ماتریس U یکانی است.

تمرین ۲.۴.۱

نشان دهید اگر ماتریس‌های A و B یکانی باشند آنگاه AB نیز یکانی خواهد بود.

تعریف ۸.۴.۱: ماتریس نرمال

ماتریس A را نرمال می‌گوییم اگر با مزدوج ترانهاده‌ی خود جا به جا (در ضرب) شود. به عبارت دیگر، ماتریس A نرمال است اگر شرط زیر برقرار باشد:

$$AA^H = A^H A$$

که در آن A^H مزدوج ترانهاده‌ی ماتریس A است (یعنی $A^H = \overline{A^T}$).

نکته :

۱. هر ماتریس هرمیتی $(A = A^H)$ نرمال است.

۲. هر ماتریس یکانی $(A^H = A^{-1})$ نرمال است.

مثال ۱.۴.۳:

۱. ماتریس هرمیتی:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 3 \end{pmatrix}$$

این ماتریس هرمیتی است و بنابراین نرمال است.

۲. ماتریس یکانی:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

این ماتریس یکانی است و بنابراین نرمال است.

۳. ماتریس نرمال غیرهرمیتی و غیریکانی:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

این ماتریس نرمال است، زیرا:

$$AA^H = A^H A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

مثال ۱.۴.۴:

برای بررسی نرمال بودن یک ماتریس A، باید AA^H و $A^H A$ را محاسبه کرده و بررسی کنیم که آیا با هم برابر هستند یا خیر.
مثال: ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مزدوج ترانهاده‌ی آن (A^H) به صورت زیر است:

$$A^H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

حال AA^H و $A^H A$ را محاسبه می‌کنیم:

$$AA^H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^H A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

چون $AA^H \neq A^H A$، این ماتریس نرمال نیست.

تعریف ۹.۴.۱:

ماتریس A را متعامد (Orthogonal) می‌گوییم اگر ترانهاده‌ی آن معادل معکوس آن باشد. به عبارت دیگر، ماتریس A متعامد است اگر شرط زیر برقرار باشد:

$$A^T = A^{-1}$$

یا به طور معادل:

$$A^T A = A A^T = I$$

که در آن I ماتریس همانی است.

نکته : ویژگی‌های مهم ماتریس‌های متعامد

۱. **حفظ ضرب داخلی:** ماتریس‌های متعامد، ضرب داخلی بردارها را حفظ می‌کنند. یعنی برای هر دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$، داریم:

$$\langle A\mathbf{u}, A\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$$

۲. **حفظ ضرب داخلی:** ماتریس‌های متعامد، طول (نرم) بردارها را حفظ می‌کنند. یعنی برای هر بردار $\mathbf{u}$، داریم:

$$\|A\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|$$

۳. **دترمینان ماتریس متعامد:** دترمینان یک ماتریس متعامد یا 1 است یا -1:

$$\det(A) = \pm 1$$

۴. **سطرها و ستون‌های متعامد:** سطرها و ستون‌های یک ماتریس متعامد، بردارهای متعامد (عمود بر هم) و یکه (با طول ۱) هستند.

مثال ۵.۴.۱: مثال‌هایی از ماتریس‌های متعامد

۱. **ماتریس چرخش:** ماتریس چرخش در صفحه‌ی دو بعدی به زاویه‌ی θ به صورت زیر است:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

این ماتریس متعامد است، زیرا:

$$A^T A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

۲. **ماتریس بازتاب:** ماتریس بازتاب نسبت به محور x به صورت زیر است:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

این ماتریس متعامد است، زیرا:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

بررسی متعامد بودن یک ماتریس
برای بررسی متعامد بودن یک ماتریس A، باید $A^T A$ و AA^T را محاسبه کرده و بررسی کنیم که آیا با ماتریس همانی I برابر هستند یا خیر.

تمرین ۳.۴.۱

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

نشان دهید این ماتریس متعامد است.

تمرین ۴.۴.۱

برنامه‌ای به زبان پایتون بنویسید که در آن یک ماتریس به عنوان ورودی گرفته شود و متعامد بودن یا نبودن آن، نرمال بودن یا نبودن آن، یکانی بودن یا نبودن آن و هرمیتی بودن یا نبودن آن را به عنوان خروجی نمایش دهد.

فصل ۲

دستگاه معادلات خطی

تعریف ۲.۰.۱: فرم کلی دستگاه معادلات خطی

دستگاه‌های معادلات خطی مجموعه‌ای از معادلات خطی هستند که به دنبال یافتن مقادیر متغیرهایی هستیم که هم‌زمان همه‌ی معادلات را برآورده کنند. فرم کلی یک دستگاه معادلات خطی و نمایش ماتریسی آن به شرح زیر است: یک دستگاه معادلات خطی با m معادله و n متغیر به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

که در آن:

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ متغیرهای مجهول هستند.
- a_{ij} ضرایب معلوم هستند ($i = 1, 2, \ldots, m$ و $j = 1, 2, \ldots, n$).
- $b_1, b_2, \ldots, b_m$ مقادیر معلوم (سمت راست معادلات) هستند.

تعریف ۲.۰.۲: نمایش ماتریسی دستگاه معادلات خطی

دستگاه معادلات خطی فوق را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نمایش داد:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

که در آن:

- A ماتریس ضرایب است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

این ماتریس ابعاد $m \times n$ دارد.

- $\mathbf{x}$ بردار متغیرهای مجهول است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

این بردار ابعاد $n \times 1$ دارد.

- $\mathbf{b}$ بردار مقادیر معلوم (سمت راست معادلات) است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

این بردار ابعاد $m \times 1$ دارد.

مثال ۲.۰.۱:

دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 4x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

این دستگاه را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نمایش داد:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

که در آن:

- ماتریس ضرایب A به صورت زیر است:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

- بردار متغیرهای مجهول $\mathbf{x}$ به صورت زیر است:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- بردار مقادیر معلوم $\mathbf{b}$ به صورت زیر است:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

تعریف ۲.۰.۳: فرم ماتریس افزوده

فرم ماتریس افزوده برای دستگاه معادلات خطی $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$، ماتریس افزوده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

مثال ۲.۰.۲:

برای دستگاه:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$$

ماتریس افزوده:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

تعریف ۲.۰.۴: انواع دستگاه‌های معادلات خطی

۱. دستگاه مربعی
- تعریف: تعداد معادلات m برابر با تعداد متغیرها n است ($m = n$).
- ویژگی:
- ماتریس ضرایب A مربعی است.
- اگر $\det(A) \neq 0$، جواب منحصربه‌فرد دارد.
- مثال:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$$

۲. دستگاه فرومعین
- تعریف: تعداد معادلات m کمتر از متغیرها n است ($m < n$).
- ویژگی:
- معمولاً بی‌نهایت جواب دارد.
- ماتریس ضرایب پهن است.
- مثال:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

۳. دستگاه فرامعین
- تعریف: تعداد معادلات m بیشتر از متغیرها n است ($m > n$).
- ویژگی:
- معمولاً جواب دقیق ندارد (مگر در موارد خاص).
- ماتریس ضرایب بلند است.
- مثال:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 3 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$$

۱.۲ حل دستگاه معادلات خطی

۱.۱.۲ روش ماتریس معکوس

حل دستگاه معادلات خطی با استفاده از ماتریس وارون
شرایط استفاده از این روش:
- دستگاه باید مربعی باشد (تعداد معادلات = تعداد متغیرها).
- ماتریس ضرایب A باید معکوس‌پذیر باشد ($\det(A) \neq 0$).

مراحل حل:
۱. نمایش ماتریسی دستگاه:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- A: ماتریس ضرایب ($n \times n$)

- $\mathbf{x}$: بردار مجهولات $(n \times 1)$
- $\mathbf{b}$: بردار مقادیر سمت راست $(n \times 1)$

۲. محاسبه ماتریس وارون A^{-1}:
- با استفاده از روش‌هایی مانند ماتریس الحاقی یا عملیات سطری.

۳. ضرب طرفین در A^{-1}:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

مثال ۱.۱.۲:

دستگاه معادلات:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$$

۱. نمایش ماتریسی:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

۲. محاسبه A^{-1}: - دترمینان A:

$$\det(A) = (2)(-1) - (3)(4) = -2 - 12 = -14 \ (\neq 0)$$

- ماتریس الحاقی:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

- ماتریس وارون:

$$A^{-1} = \frac{1}{-14} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

۳. حل دستگاه:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{14} + \frac{3}{14} \\ \frac{10}{7} - \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{14} \\ \frac{9}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{9}{7} \end{pmatrix}$$

جواب نهایی:

$$x = \frac{4}{7}, \ y = \frac{9}{7}$$

تمرین ۱.۱.۲

سوال۱:
دستگاه زیر را با روش ماتریس وارون حل کنید:

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$$

سوال ۲:
آیا دستگاه زیر با این روش قابل حل است؟ چرا؟

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$$

سوال ۳:
ماتریس وارون A را برای دستگاه زیر محاسبه و جواب را بیابید:

$$\begin{cases} 1x + 0y + 1z = 2 \\ 0x + 2y + 0z = 4 \\ 1x + 1y + 0z = 3 \end{cases}$$

کد پایتون ۱.۱.۲: حل دستگاه معادلات خطی به روش ماتریس معکوس

```python
import numpy as np
A = np.array([[2, 3], [4, -1]])
b = np.array([5, 1])
try:
    A_inv = np.linalg.inv(A)
    x = np.dot(A_inv, b)
    print("Solution using inverse method:", x)
except np.linalg.LinAlgError:
    print("Matrix is singular!")
```

۲.۱.۲ روش حذفی گاوس

حل دستگاه معادلات خطی با روش حذف گاوس
هدف: تبدیل ماتریس افزوده به فرم سطری پلکانی یا کاهش‌یافته برای یافتن جواب.

مراحل روش حذف گاوس:

- ۱. تشکیل ماتریس افزوده $[A \mid \mathrm{b}]$.
- ۲. استفاده از عملیات سطری مقدماتی:
  - جابجایی دو سطر.
  - ضرب یک سطر در عددی ناصفر.
  - جمع مضربی از یک سطر با سطر دیگر.

- ۳. تبدیل به فرم سطری پلکانی.
- ۴. حل از پایین به بالا.

مثال ۲.۱.۲:

دستگاه مربعی با جواب منحصربه‌فرد دستگاه:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$$

حل: ۱. ماتریس افزوده:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{array}\right)$$

۲. عملیات سطری: – $R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -9 \end{array}\right)$$

۳. حل:
– از سطر دوم: $-2y = -9 \Rightarrow y = \frac{9}{2}$.
– از سطر اول: $x + 2(\frac{9}{2}) = 5 \Rightarrow x = -4$.

جواب: $x = -4$، $y = \frac{9}{2}$.

مثال ۳.۱.۲:

دستگاه فرومعین با بی‌نهایت جواب
دستگاه:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

حل:
۱. ماتریس افزوده:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

۲. عملیات سطری: – $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{array}\right)$$

۳. حل:
– از سطر دوم: $-y - 3z = -5 \Rightarrow y = 5 - 3z$.
– از سطر اول: $x + (5 - 3z) + z = 3 \Rightarrow x = -2 + 2z$.

جواب عمومی:

$$x = -2 + 2z,\ y = 5 - 3z \quad (z \in \mathbb{R}).$$

مثال ۴.۱.۲:

دستگاه فرامعین بدون جواب
دستگاه:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 5 \\ 3x + 3y = 4 \end{cases}$$

حل:
۱. ماتریس افزوده:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

۲. عملیات سطری: – $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

– سطر دوم نشان‌دهنده‌ی $1 = 0$ است.

نتیجه: دستگاه ناسازگار است (جواب ندارد).

مثال ۵.۱.۲:

دستگاه معادلات خطی به صورت:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = 5 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

حل با روش حذف گاوس:
مرحله ۱: تشکیل ماتریس افزوده
ماتریس افزوده برای این دستگاه به صورت زیر است:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

مرحله ۲: حذف متغیر x_1 از سطر سوم
برای حذف x_1 از سطر سوم، از سطر اول استفاده می‌کنیم. عملیات سطری:

$$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1$$

ماتریس جدید:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & -1 & -7 \end{array}\right]$$

مرحله ۳: حذف متغیر x_2 از سطر سوم
برای حذف x_2 از سطر سوم، از سطر دوم استفاده می‌کنیم. عملیات سطری:

$$R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2$$

ماتریس جدید:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

مرحله ۴: تحلیل دستگاه
دستگاه به فرم سطری پلکانی تبدیل شده است. مشاهده می‌کنیم که:
– متغیرهای اصلی (پایه‌ای): x_1، x_2، x_4 (ستون‌های دارای اولین عدد غیرصفر در هر سطر).
– متغیرهای آزاد: x_3 و x_5 (ستون‌های بدون عدد غیرصفر اصلی).

مرحله ۵: حل دستگاه به صورت پارامتری
از سطر سوم شروع می‌کنیم و به صورت پس‌گشت حل می‌کنیم:

۱. سطر سوم:

$$x_4 + x_5 = 1 \implies x_4 = 1 - x_5$$

۲. سطر دوم:

$$x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 4$$

با جایگذاری x_4:

$$x_2 + x_3 + 2(1 - x_5) + x_5 = 4 \implies x_2 + x_3 + 2 - x_5 = 4 \implies x_2 + x_3 - x_5 = 2$$

بنابراین:

$$x_2 = 2 - x_3 + x_5$$

۳. سطر اول:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = 5$$

با جایگذاری x_2 و x_4:

$$x_1 + 3(2 - x_3 + x_5) + x_3 + 5(1 - x_5) + x_5 = 5$$

ساده‌سازی:

$$x_1 + 6 - 3x_3 + 3x_5 + x_3 + 5 - 5x_5 + x_5 = 5 \implies x_1 - 2x_3 - x_5 + 11 = 5$$

نتیجه:

$$x_1 = -6 + 2x_3 + x_5$$

جواب عمومی دستگاه: با توجه به متغیرهای آزاد x_3 و x_5، جواب به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x_1 = -6 + 2s + t \\ x_2 = 2 - s + t \\ x_3 = s \quad (\text{متغیر آزاد}) \\ x_4 = 1 - t \\ x_5 = t \quad (\text{متغیر آزاد}) \end{cases}$$

که در آن $s, t \in \mathbb{R}$ پارامترهای دلخواه هستند.

تمرین ۲.۱.۲

تمرین ۱: حل کنید:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

تمرین ۲: حل کنید (در صورت وجود جواب):

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 4y - 2z = 2 \\ 3x + 6y - 3z = 3 \end{cases}$$

تمرین ۳: حل کنید:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2y + 5z = -4 \\ 2x + 5y - z = 27 \end{cases}$$

تمرین ۴: آیا دستگاه زیر جواب دارد؟

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + 2z = 1 \end{cases}$$

تمرین ۳.۱.۲

دستگاه معادلات خطی زیر را به روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 5 \\ -3x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 2x_4 = 7 \\ -x_1 + x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 7 \end{cases}$$

کد پایتون ۲.۱.۲: حل دستگاه معادلات خطی به روش حذفی گاوس

```
import numpy as np
A = np.array([[2, 4, -2, -2], [1, 2, 4, -3], [-3, -3, 8, -2], [-1, 1, 6, -
b = np.array([-4, 5, 7, 7])
x = np.linalg.solve(A, b)
print("Solution using numpy.linalg.solve:", x)
```

تمرین ۴.۱.۲

یک دستگاه معادلات خطی شامل چهار معادله و چهار مجهول بسازید که بردار جواب آن به صورت

$$x = [1, -1, 0, 2]$$

باشد. سپس این دستگاه را با استفاده از برنامه‌های پایتون داده شده در قبل حل کنید.

۲.۲ روش حذفی گاوس جردن

روش حذف گاوس–جردن یک الگوریتم برای حل دستگاه‌های معادلات خطی است که ماتریس را به فرم کاهش‌یافته سطری پلکانی تبدیل می‌کند. این روش، توسعه‌یافته‌ی روش حذف گاوس است و ماتریس را تا حد امکان ساده می‌کند.

مراحل روش حذف گاوس–جردن:

۱. تشکیل ماتریس افزوده $[A \mid \mathbf{b}]$.

۲. تبدیل به فرم سطری پلکانی (REF) با استفاده از عملیات سطری مقدماتی:

   ۱. – جابجایی دو سطر.
   ۲. – ضرب یک سطر در عددی ناصفر.
   ۳. – جمع مضربی از یک سطر با سطر دیگر.

۳. تبدیل به فرم کاهش‌یافته :(RREF)

   ۱. ایجاد ۱های اصلی (پایه‌ای) در هر سطر.
   ۲. صفر کردن تمام درایه‌های بالا و پایین هر ۱ اصلی.

۴. استخراج جواب از ماتریس کاهش‌یافته.

مثال ۲.۲.۱:

دستگاه مربعی با جواب منحصربه‌فرد دستگاه:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$$

حل:

۱. ماتریس افزوده:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{array}\right]$$

۲. عملیات سطری: – $R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -9 \end{array}\right]$$

– $R_2 \leftarrow -\frac{1}{2}R_2$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4.5 \end{array}\right]$$

– $R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4.5 \end{array}\right]$$

۳. جواب:

$$x = -4, \quad y = 4.5$$

مثال ۲.۲.۲:

دستگاه با بی‌نهایت جواب دستگاه:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$$

حل: ۱. ماتریس افزوده:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

۲. عملیات سطری: – $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{array}\right]$$

– $R_2 \leftarrow -R_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

– $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

۳. جواب عمومی:

$$x = -2 + 2z, \quad y = 5 - 3z \quad (z \in \mathbb{R})$$

تمرین ۱.۲.۲

۱. دستگاه معادلات زیر را به روش گاوس–جردن حل کنید(در صورت وجود جواب):

$$\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+3y=5 \end{cases}$$

۲. دستگاه معادلات زیر را به روش گاوس–جردن حل کنید(در صورت وجود جواب):

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+4y-2z=2 \\ 3x+6y-3z=3 \end{cases}$$

۳. دستگاه معادلات زیر را به روش گاوس–جردن حل کنید(در صورت وجود جواب):

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2y+5z=-4 \\ 2x+5y-z=27 \end{cases}$$

نکته :

تفاوت اصلی بین روش حذف گاوس [a] و روش حذف گاوس–جردن [b] در میزان ساده‌سازی ماتریس و نحوه استخراج جواب است.

[a]Gaussian Elimination
[b] Gauss-Jordan Elimination

نکته : هدف نهایی در روش حذفی گاوس

- ماتریس را به فرم سطری پلکانی [a] تبدیل می‌کند.
- در REF ، زیر هر عدد اصلی (پایه‌ای) صفر قرار می‌گیرد.
- جواب با حل پس‌گشت [b] به دست می‌آید.

[a]Row Echelon Form - REF
[b]Back Substitution

نکته : هدف نهایی در روش حذفی گاوس - جردن

- ماتریس را به فرم کاهش‌یافته سطری پلکانی [a] تبدیل می‌کند.
- در RREF، هر عدد اصلی ۱ است و تنها عدد غیرصفر در ستون خود است.
- جواب مستقیماً از ماتریس خوانده می‌شود.

[a]Reduced Row Echelon Form - RREF

نکته : مراحل اجرای روش حذفی گاوس

۱. ماتریس را به فرم REF می‌آورد.
۲. با جایگزینی از سطر آخر به بالا، جواب را محاسبه می‌کند.

نکته : مراحل اجرای روش حذفی گاوس–جردن

۱. ماتریس را به فرم RREF می‌آورد.
۲. جواب بدون نیاز به محاسبات اضافه، مستقیماً از ماتریس استخراج می‌شود.

نکته : نمادگذاری ماتریس در REF

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

نیاز به حل معادله‌ی $z = 2$، سپس جایگزینی در معادلات بالاتر.

نکته : نمادگذاری ماتریس در RREF

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0 & 3\\0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

جواب مستقیماً: $x=-1$، $y=3$، $z=2$.

مثال ۳.۲.۲: مثال مقایسه‌ای

دستگاه معادلات:

$$\begin{cases}2x+y-z=8\\-3x-y+2z=-11\\-2x+y+2z=-3\end{cases}$$

حل با حذف گاوس (REF): ماتریس نهایی:

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & 8\\0 & 0.5 & 0.5 & 1\\0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

– نیاز به حل پس‌گشت برای یافتن z، سپس y، و در نهایت x.
حل با حذف گاوس–جردن (RREF): ماتریس نهایی:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\0 & 1 & 0 & 3\\0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

– جواب مستقیماً: $x=2$، $y=3$، $z=-1$.

تمرین ۲.۲.۲

تعداد عملیات‌های حسابی (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) را برای هر یک از روش‌های حذفی گاوس و حذفی گاوس جردن محاسبه کنید.

۳.۲ تجزیه LU

تعریف ۱.۳.۲: تجزیه LU

تجزیه LU یعنی تجزیه‌ی یک ماتریس مربعی A به صورت حاصل‌ضرب دو ماتریس:

$$A=LU$$

که در آن:
– L: ماتریس مثلثی پایین با درایه‌های قطر اصلی برابر با ۱ (یا بدون شرط خاص)
– U: ماتریس مثلثی بالا

نکته : کاربردهای تجزیه LU

۱. حل دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ به صورت سریع‌تر

۲. محاسبه‌ی معکوس ماتریس

۳. محاسبه‌ی دترمینان

مثال ۱.۳.۲:

تجزیه LU برای ماتریس ۲×۲
فرض کن:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

ماتریس U:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

پس:

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال ۲.۳.۲:

تجزیه LU برای ماتریس ۳×۳ ساده

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

با استفاده از الگوریتم LU (به صورت دستی یا با برنامه‌نویسی) به دست می‌آید:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال ۳.۳.۲: حل دستگاه معادلات خطی با استفاده از تجزیه LU

استفاده از LU برای حل دستگاه
دستگاه زیر رو با LU حل می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

گام ۱: تجزیه LU

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام ۲: حل $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

گام ۳: حل $Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تمرین ۱.۳.۲

۱. ماتریس زیر را به صورت LU تجزیه کن:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

۲. با استفاده از LU، دستگاه زیر را حل کن:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \end{bmatrix}$$

۳. تجزیه LU برای ماتریس زیر را انجام بده:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 8 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

۴. فرض کن LU تجزیه برای ماتریس A انجام شده و:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 20 \end{bmatrix}$$

با استفاده از LU، دستگاه $Ax = b$ را حل کنید.

نکته : مراحل گام‌به‌گام تجزیه LU روش دولیتل

هدف: تجزیه‌ی یک ماتریس مربعی $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ به:

$$A = LU$$

که:
- L: ماتریس مثلثی پایین با عناصر ۱ روی قطر (یا بدون شرط)
- U: ماتریس مثلثی بالا
- در روش دولیتل قطر اصلی L همگی برابر یک هستند و با اجرای روش حذف گاوسی LU رو می‌سازیم.

فرض کنیم ماتریس A از مرتبه ۳ باشد:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

و بخواهیم بنویسیم:

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

۱. **محاسبه سطر اول ماتریس U:**

محاسبه سطر اول ماتریس U: چون سطر اول L برابر با $[0, 0, 1]$ است، پس:

$$U_{1,:} = A_{1,:} = [a_{11}, a_{12}, a_{13}]$$

۲. **محاسبه‌ی ستون اول L:**

برای سطرهای ۲ و ۳:

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}, \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}$$

۳. **محاسبه‌ی u_{22}, u_{23}:**

$$U_{2,:} = A_{2,:} - l_{21} \cdot U_{1,:}$$

۴. **محاسبه‌ی l_{32}:**

$$l_{32} = \frac{A_{32} - l_{31} \cdot u_{12}}{u_{22}}$$

۵. **محاسبه‌ی u_{33}:**

$$u_{33} = A_{33} - l_{31} \cdot u_{13} - l_{32} \cdot u_{23}$$

خلاصه‌ی کلی فرمول‌ها:
برای هر سطر i و ستون j:

برای محاسبه‌ی U:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$$

برای محاسبه‌ی L (زمانی که $i > j$):

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right) \tag{۱.۲}$$

مثال ۴.۳.۲: مثال عددی گام‌به‌گام (ماتریس ۳×۳):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 6 & 18 & -1 \end{bmatrix}$$

گام ۱: U سطر اول

$$u_{11} = 2, \quad u_{12} = 3, \quad u_{13} = 1$$

گام ۲: L ستون اول

$$l_{21} = \frac{4}{2} = 2, \quad l_{31} = \frac{6}{2} = 3$$

گام ۳: سطر دوم از U

$$u_{22} = 7 - (23) = 1, \quad u_{23} = 2 - (21) = 0$$

گام ۴: l_{32}

$$l_{32} = \frac{18 - (33)}{1} = \frac{9}{1} = 9$$

گام ۵: u_{33}

$$u_{33} = -1 - (31 + 90) = -4$$

نتیجه نهایی:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

تمرین ۲.۳.۲

ماتریس زیر را به روش LU تجزیه کنید:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

تمرین ۳.۳.۲

تجزیه LU ماتریس سه‌قطری زیر را محاسبه کنید:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

تعریف ۲.۳.۲: زیرماتریس‌های اصلی

زیرماتریس‌های اصلی یک ماتریس مربعی A با ابعاد $n \times n$، ماتریس‌های کوچکتری هستند که از حذف برخی سطرها و ستون‌های A به دست می‌آیند، با این شرط که ستون‌های حذف‌شده دقیقاً همان سطرهای حذف‌شده باشند. این ماتریس‌ها نقش کلیدی در بررسی وجود تجزیه LU، محاسبه دترمینان و تحلیل پایداری ماتریس دارند.
برای یک ماتریس A به صورت:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

زیرماتریس اصلی $k \times k$ (برای $1 \leq k \leq n$) با انتخاب k سطر و ستون اول ساخته می‌شود. به عبارت دیگر:

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}.$$

مثال ۵.۳.۲: زیرماتریس‌های اصلی

برای ماتریس 3×3 برای ماتریس:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

زیرماتریس‌های اصلی عبارتند از: ۱. $k = 1$: $A_1 = (1)$،
۲. $k = 2$: $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$،
۳. $k = 3$: $A_3 = A$ (خود ماتریس اصلی).

نکته : زیرماتریس‌های اصلی و تجزیه LU

تجزیه LU بدون جایگشت سطرها وجود دارد اگر و تنها اگر دترمینان همه زیرماتریس‌های اصلی A_k (برای $k = 1, 2, \ldots, n-1$) غیرصفر باشند.

مثال ۶.۳.۲:

فرض کنید:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies A_1 = (0) \,.$$

چون $\det(A_1) = 0$، تجزیه LU بدون جایگشت امکان‌پذیر نیست.

نکته :

دترمینان ماتریس اصلی برابر است با حاصلضرب عناصر قطر اصلی ماتریس U در تجزیه LU.

مثال ۷.۳.۲:

در مثال‌های قبل دیدیم که اگر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 6 & 18 & -1 \end{bmatrix}$$

آنگاه تجزیه LU به صورت زیر خواهد بود

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

پس با توجه به نکته قبل

$$\det(A) = 2 \times 1 \times (-4) = -8$$

۱.۳.۲ تجزیه LU و PLU با استفاده از ماتریس‌های مقدماتی

تعریف ۳.۳.۲: ماتریس‌های مقدماتی

ماتریس مقدماتی، ماتریسی است که با اعمال یک عملیات سطری مقدماتی روی ماتریس همانی I به دست می‌آید. این عملیات‌ها شامل:

۱. جابجایی دو سطر (مثل E_{ij})،

۲. ضرب یک سطر در عددی ناصفر (مثل $E_i(k)$)،

۳. جمع مضربی از یک سطر به سطر دیگر (مثل $E_{ij}(k)$).

مثال ۸.۳.۲:

برای ایجاد ماتریس مقدماتی $E_{21}(-3)$ که سطر ۲ را با -3 برابر سطر ۱ جمع می‌کند:

$$E_{21}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

نکته : محاسبه وارون ماتریس مقدماتی

وارون این ماتریس با معکوس کردن علامت k ساخته می‌شود به عنوان مثال:

$$E_{21}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

آنگاه

$$E_{21}^{-1}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

زیرا به سادگی دیده می شود که:

$$E_{21}(k) \cdot E_{21}^{-1}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

درستی این موضوع در حال کلی نیز به سادگی قابل اثبات است.

مثال ۹.۳.۲: وارون ماتریس مقدماتی

اگر $R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1$ در $I_{3\times 3}$، آنگاه:

$$E_{21}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{21}^{-1}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مثال ۱۰.۳.۲: وارون ماتریس مقدماتی

اگر $R_3 \leftarrow R_3 - 4R_2$ در $I_{4\times 4}$، آنگاه:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تمرین ۴.۳.۲

وارون ماتریس زیر را بیابید (حاصل از $R_1 \leftarrow R_1 + 5R_3$ در $I_{3\times 3}$):

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تمرین ۵.۳.۲

اگر E با عملیات $R_2 \leftarrow R_2 - 3R_4$ در $I_{4\times 4}$ ساخته شود، E^{-1} چیست؟

تعریف ۴.۳.۲: ماتریس جایگشت

اگر جای دو سطر از ماتریس همانی I را عوض کنیم، ماتریس حاصل یک ماتریس جایگشت خواهد بود. معمولا ماتریس‌های جایگشت را با نماد P [a] نشان می‌دهند.

[a] Permutation Matrix

نکته : وارون یک ماتریس جایگشت

وارون هر ماتریس جایگشت خودش است.

مثال ۱۱.۳.۲: ماتریس جایگشت

جابجایی سطرهای ۱ و ۲ در $I_{3\times 3}$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نکته :

ماتریس‌های جایگشت متقارن و متعامد هستند، بنابراین:

$$P^{-1} = P^T = P$$

به عبارت دیگر یعنی وارون ماتریس جایگشت خود ماتریس است.

مثال ۱۲.۳.۲: وارون ماتریس جایگشت

برای ماتریس P بالا:

$$P \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

پس $P^{-1} = P$.

مثال ۱۳.۳.۲: وارون ماتریس جایگشت

جابجایی سطرهای ۲ و ۳ در $I_{4\times 4}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = P$$

نکته : تجزیه LU با استفاده از ماتریس‌های مقدماتی

تجزیه LU یک ماتریس A به صورت $A = LU$ است، که:

۱. L: ماتریس پایین‌مثلثی با قطر اصلی ۱ (حاصل ضرب معکوس ماتریس‌های مقدماتی).

۲. U: ماتریس بالامثلثی (فرم سطری پلکانی A).

مراحل انجام:

۱. حذف گاوسی روی A با عملیات سطری مقدماتی انجام می‌شود.

۲. هر عملیات سطری معادل ضرب A در ماتریس مقدماتی E_k است.

۳. پس از تبدیل A به U، ماتریس L از معکوس ماتریس‌های مقدماتی ساخته می‌شود:

$$L = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1}.$$

مثال ۱۴.۳.۲: تجزیه LU با استفاده از ماتریس‌های مقدماتی

ماتریس A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

مرحله ۱: ایجاد U با عملیات سطری

عملیات: $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ (ضرب در ماتریس مقدماتی $E_{21}(-2)$):

$$E_{21}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = E_{21}(-2) \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

مرحله ۲: محاسبه L از معکوس ماتریس مقدماتی

معکوس $E_{21}(-2)$:

$$E_{21}^{-1}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = L.$$

نتایج:

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

نکته : شرایط وجود تجزیه LU

بدون جایگشت سطرها: همه زیرماتریس‌های اصلی A باید غیرصفر باشند.
با جایگشت سطرها: اگر نیاز به جابجایی سطرها باشد، از تجزیه $PA = LU$ استفاده می‌شود.

مثال ۱۵.۳.۲: مثال با جایگشت سطرها (PLU)

اگر $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

نیاز به جابجایی سطرها دارد: $PA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- سپس $PA = LU$.

مثال ۱۶.۳.۲: تجزیه LU (بدون جایگشت سطرها)

ماتریس زیر را با روش LU تجزیه کنید:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

مراحل حل:

۱. حذف گاوسی برای ساخت U:

سطر ۲: $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

سطر ۳: $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

سطر ۳: $R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

۲. ساخت ماتریس L:

ضرایب حذف شده در مراحل بالا را در L قرار دهید:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

۳. نتایج:

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

مثال ۱۷.۳.۲: تجزیه PLU (با جایگشت سطرها)

ماتریس زیر را با روش PLU تجزیه کنید (نیاز به جایگشت سطرها دارد):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

مراحل حل:

۱. جایگشت سطرها برای جلوگیری از صفر در پایوت:

جابجایی R_1 و R_2:

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

۲. حذف گاوسی روی PA:

سطر ۳: $R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

سطر ۳: $R_3 \leftarrow R_3 + R_2$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

۳. ساخت ماتریس L:

- ضرایب حذف:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

۴. نتایج:

$$PA = LU \implies \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

تمرین ۶.۳.۲

ماتریس زیر را با روش LU تجزیه کنید:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

تمرین ۷.۳.۲

آیا ماتریس زیر نیاز به تجزیه PLU دارد؟ چرا؟

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

کد پایتون ۱.۳.۲:

```python
import numpy as np
from scipy.linalg import lu
A = np.array([[1, 2, 3], [2, 5, 7], [1, 5, 3]])
P, L, U = lu(A)
print("L:\n", L)
print("U:\n", U)
```

۲.۳.۲ حل دستگاه معادلات خطی با استفاده از تجزیه LU

نکته : حل دستگاه معادلات خطی با استفاده از تجزیه LU

تجزیه LU یک روش کارآمد برای حل دستگاه‌های خطی $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ است. این روش شامل دو مرحله اصلی است:

۱. تجزیه A به LU: ماتریس A به حاصلضرب دو ماتریس مثلثی L (پایین‌مثلثی) و U (بالامثلثی) تبدیل می‌شود.

۲. حل دو سیستم مثلثی

   ۱. ابتدا $L\mathrm{y} = \mathrm{b}$ را برای یافتن y حل می‌کنیم (حل رو به جلو).

   ۲. سپس $U\mathrm{x} = \mathrm{y}$ را برای یافتن x حل می‌کنیم (حل رو به عقب).

مثال ۱۸.۳.۲: حل دستگاه معادلات خطی با استفاده از تجزیه LU

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \\ 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 19 \end{cases}$$

ماتریس A و بردار $\mathbf{b}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 19 \end{pmatrix}$$

مرحله ۱: تجزیه $A = LU$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

—

مرحله ۲: حل $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ (حل رو به جلو)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$3y_1 + 2y_2 + y_3 = 19 \implies y_3 = 2$ − $2y_1 + y_2 = 11 \implies y_2 = 1$ − $y_1 = 5$ −

بردار $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

مرحله ۳: حل $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (حل رو به عقب)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \implies x_1 = 0$ − $x_2 - x_3 = 1 \implies x_2 = 3$ − $x_3 = 2$ −

جواب نهایی:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

تمرین ۸.۳.۲

دستگاه زیر را با تجزیه LU حل کنید:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ 3x_1 + 4x_2 = 17 \end{cases}$$

۳.۳.۲ کاربرد تجزیه LU برای محاسبه وارون و دترمینان ماتریس

نکته : کاربرد تجزیه LU برای محاسبه وارون ماتریس

۱. تجزیه A به LU: ماتریس A را به حاصلضرب L (پایین‌مثلثی با قطر اصلی ۱) و U (بالامثلثی) تبدیل می‌کنیم.

۲. حل $AX = I$: برای یافتن وارون A^{-1}، دستگاه $AX = I$ را حل می‌کنیم. این کار به حل n دستگاه معادلات خطی زیر می‌انجامد:

$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1, \quad A\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2, \quad \ldots, \quad A\mathbf{x}_n = \mathbf{e}_n$$

که در آن $\mathbf{e}_i$ بردار ستونی iام ماتریس همانی I است.

۳. استفاده از L و U: هر دستگاه را با دو مرحله حل می‌کنیم:

- حل رو به جلو: $L\mathbf{y}_i = \mathbf{e}_i$.
- حل رو به عقب: $U\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i$.

مثال ۱۹.۳.۲: کاربرد تجزیه LU برای محاسبه وارون ماتریس

برای ماتریس:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

حل A^{-1}:

۱. حل $A\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

- $L\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- $U\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \implies \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

۲. حل $A\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

- $L\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $U\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

۳. وارون A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

نکته : کاربرد تجزیه LU برای محاسبه دترمینان ماتریس

با استفاده از تجزیه $A = LU$:

رابطه دترمینان:

$$\det(A) = \det(L) \cdot \det(U)$$

چون L پایین‌مثلثی با قطر اصلی ۱ است: $\det(L) = 1$.

U بالامثلثی است، پس دترمینان آن حاصلضرب عناصر قطر اصلی است:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

مثال ۲۰.۳.۲: کاربرد تجزیه LU برای محاسبه دترمینان ماتریس

$$\det(A) = \det(U) = 2 \times 1 = 2$$

تمرین ۹.۳.۲

دترمینان و وارون ماتریس زیر را با استفاده از تجزیه LU بدست آورید.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

۴.۲ تجزیه چالسکی ماتریس‌ها

۱.۴.۲ ماتریس‌های معین مثبت

تعریف ۱.۴.۲: ماتریس معین مثبت

یک ماتریس متقارن $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را معین مثبت [a] می‌نامیم اگر برای هر بردار غیرصفر $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$، شرط زیر برقرار باشد:

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$$

به عبارت دیگر:

۱. A باید متقارن باشد ($A = A^T$).

۲. ضرب درجه دوم $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ برای همه $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ مثبت باشد.

[a] Positive Definite Matrix

تعریف ۲.۴.۲: ماتریس نیمه معین مثبت

یک ماتریس متقارن $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را نیمه معین مثبت [a] می‌نامیم اگر برای هر بردار غیرصفر $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$، شرط زیر برقرار باشد:

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq 0$$

به عبارت دیگر:

۱. A باید متقارن باشد ($A = A^T$).

۲. ضرب درجه دوم $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ برای همه $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ نامنفی باشد.

[a] Positive Semi-Definite Matrix

تعریف ۳.۴.۲: ماتریس معین منفی

یک ماتریس متقارن $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را معین منفی [a] می‌نامیم اگر برای هر بردار غیرصفر $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$، شرط زیر برقرار باشد:

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0$$

به عبارت دیگر:

۱. A باید متقارن باشد ($A = A^T$).

۲. ضرب درجه دوم $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ برای همه $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ منفی باشد.

[a] Negative Definite Matrix

تعریف ۴.۴.۲: ماتریس نیمه معین منفی

یک ماتریس متقارن $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را نیمه معین منفی [a] می‌نامیم اگر برای هر بردار غیرصفر $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$، شرط زیر برقرار باشد:

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \leq 0$$

به عبارت دیگر:

۱. A باید متقارن باشد ($A = A^T$).

۲. ضرب درجه دوم $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ برای همه $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ نامثبت باشد.

[a] Negative Semi-Definite Matrix

نکته : یک شرط معادل برای تشخیص معین مثبت بودن یک ماتریس

یک ماتریس متقارن A معین مثبت است اگر و تنها اگر همه زیرماتریس‌های اصلی [a] دترمینان مثبت داشته باشند. شرایط معادل دیگری نیز هست بعدا گفته خواهد شد.

[a] Principal Minors

مثال ۱.۴.۲: ماتریس معین مثبت

ماتریس زیر معین مثبت است:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

بررسی شرایط:

۱. ماتریس متقارن است.

۲. ضرب درجه دوم:

برای $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$:

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 > 0.$$

مثال ۲.۴.۲: ماتریس معین مثبت

ماتریس زیر معین مثبت است:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

بررسی شرایط:

۱. ماتریس متقارن است.

۲. دترمینان زیرماتریس‌های اصلی:

- $\det(B_1) = 4 > 0$،
- $\det(B_2) = \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 19 > 0$،
- $\det(B_3) = \det(B) = 84 > 0$.

۲.۴.۲ تجزیه چالسکی

تعریف ۵.۴.۲: تجزیه چالسکی

تجزیه چالسکی [a] یک روش ریاضی است که برای تجزیه یک ماتریس معین مثبت به یک ضرب ماتریس مثلثی پایین و همچنین ترانهاده آن استفاده می‌شود. اگر A یک ماتریس معین مثبت $n \times n$ باشد، می‌توان آن را به صورت زیر تجزیه کرد:

$$A = LL^T$$

که در آن:

- L یک ماتریس مثلثی پایین است و تمامی عناصر بالای قطر آن صفر است.
- L^T ترانهاده ماتریس L است.

[a] Cholesky Decomposition

نکته : شرایط برای تجزیه چالسکی

برای اینکه یک ماتریس A تجزیه چالسکی داشته باشد، باید ماتریس A معین مثبت باشد یعنی:

۱. متقارن باشد: $A = A^T$

۲. برای هر بردار غیر صفر x، باید $x^T Ax > 0$ برقرار باشد.

نکته : مراحل تجزیه چالسکی

برای محاسبه تجزیه چالسکی، معمولاً از روش زیر استفاده می‌شود:

- ماتریس A را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- عناصر ماتریس L را به صورت زیر محاسبه کنید:

$$L_{ij} = \begin{cases} \sqrt{A_{ii} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}^2} & \text{اگر } i = j \\ \frac{1}{L_{jj}} \left(A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk} \right) & \text{اگر } i > j \\ 0 & \text{اگر } i < j \end{cases}$$

مثال ۳.۴.۲: تجزیه چالسکی

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

تجزیه چالسکی:

$$\begin{aligned} L_{11} &= \sqrt{4} = 2 \\ L_{21} &= \frac{1}{L_{11}}(2) = 1 \\ L_{22} &= \sqrt{3 - 1^2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

بنابراین، ماتریس L به صورت زیر است:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

و داریم:

$$A = LL^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

مثال ۴.۴.۲: تجزیه چالسکی

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$B = \begin{bmatrix} 25 & 15 & 5 \\ 15 & 18 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

تجزیه چالسکی:

$$\begin{aligned} L_{11} &= \sqrt{25} = 5 \\ L_{21} &= \frac{15}{5} = 3 \\ L_{31} &= \frac{5}{5} = 1 \end{aligned}$$

حالا برای L_{22}:

$$L_{22} = \sqrt{18 - 3^2} = \sqrt{9} = 3$$

برای L_{32}:

$$L_{32} = \frac{0 - (3)(1)}{3} = 0$$

برای L_{33}:

$$L_{33} = \sqrt{4 - 1^2} = \sqrt{3}$$

بنابراین، ماتریس L به صورت زیر است:

$$L = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

تمرین ۱.۴.۲

۱. ماتریس زیر را تجزیه چالسکی کنید:

$$C = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

۲. ماتریس زیر را تجزیه چالسکی کنید:

$$D = \begin{bmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 10 & 6 \\ 4 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

مثال ۵.۴.۲: حل دستگاه معادلات خطی با استفاده از تجزیه چولسکی

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} 4x_1 + 12x_2 - 16x_3 = 12 \\ 12x_1 + 37x_2 - 43x_3 = 35 \\ -16x_1 - 43x_2 + 98x_3 = -58 \end{cases}$$

که به صورت ماتریسی می‌توان نوشت:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

که:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 35 \\ -58 \end{bmatrix}$$

مرحله اول: تجزیه چولسکی

چون A ماتریسی متقارن و مثبت معین است، می‌توان آن را به صورت $A = LL^T$ تجزیه کرد که L ماتریسی مثلثی پایین است:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$

با محاسبات، داریم:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

مرحله دوم: حل دستگاه

ابتدا دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 35 \\ -58 \end{bmatrix}$$

با حل این دستگاه (روش پیش‌رو):

$$\begin{aligned} 2y_1 = 12 \quad &\Rightarrow \quad y_1 = 6, \\ 6y_1 + y_2 = 35 \quad &\Rightarrow \quad 6(6) + y_2 = 35 \quad \Rightarrow \quad y_2 = -1, \\ -8y_1 + 5y_2 + 3y_3 = -58 \quad &\Rightarrow \quad -8(6) + 5(-1) + 3y_3 = -58 \quad \Rightarrow \quad 3y_3 = -5 \quad \Rightarrow \quad y_3 = -\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

سپس دستگاه زیر را حل می‌کنیم

$$L^T\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

که معادله‌ی زیر را می‌دهد:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

با حل این دستگاه (روش پس‌رو):

$$\begin{aligned} 3x_3 = -\frac{5}{3} \quad &\Rightarrow \quad x_3 = -\frac{5}{9}, \\ x_2 + 5x_3 = -1 \quad &\Rightarrow \quad x_2 + 5\left(-\frac{5}{9}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{14}{9}, \\ 2x_1 + 6x_2 - 8x_3 = 6 \quad &\Rightarrow \quad 2x_1 + 6\left(\frac{14}{9}\right) - 8\left(-\frac{5}{9}\right) = 6 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + \frac{84}{9} + \frac{40}{9} = 6 \quad \Rightarrow \\ 2x_1 + \frac{124}{9} = 6 \quad &\Rightarrow \quad 2x_1 = 6 - \frac{124}{9} = -\frac{70}{9} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{35}{9}. \end{aligned}$$

در نتیجه، جواب دستگاه برابر است با:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{35}{9} \\ \frac{14}{9} \\ -\frac{5}{9} \end{bmatrix}$$

فصل ۳

فضاهای برداری

۱.۳ فضای برداری

تعریف ۱.۱.۳: گروه جابجایی یا گروه آبلی

گروه آبلی (یا گروه جابجایی) یک ساختار جبری $(G, *)$ است که در آن:

- G یک مجموعه است.
- $*$ یک عمل دوتایی روی G است (یعنی $\forall a, b \in G$، $a * b \in G$).

این عمل باید خواص زیر را داشته باشد:

۱. **بسته بودن:**

$$\forall a, b \in G, \quad a * b \in G$$

۲. **شرط شرکت‌پذیری:**

$$\forall a, b, c \in G, \quad (a * b) * c = a * (b * c)$$

۳. **وجود عضو همانی:**

$$\exists e \in G \quad \text{که} \quad \forall a \in G, \quad e * a = a * e = a$$

۴. **وجود معکوس:**

$$\forall a \in G, \quad \exists a' \in G \quad \text{چنان که} \quad a * a' = a' * a = e$$

۵. **جابجایی:**

$$\forall a, b \in G, \quad a * b = b * a$$

اگر فقط ویژگی‌های ۱ تا ۴ برقرار باشد، $(G, *)$ را **گروه** می‌نامند. اگر ویژگی ۵ نیز برقرار باشد، آن را **گروه آبلی** می‌گویند.

مثال ۱.۱.۳: مثال‌های از گروه

- $(\mathbb{Z}, +)$: اعداد صحیح با عمل جمع.
- $(\mathbb{R}, +)$: اعداد حقیقی با عمل جمع.
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$: اعداد حقیقی ناصفر با ضرب.

مثال ۲.۱.۳: مثال‌هایی که گروه نیستند

- $(\mathbb{Q}^c, +)$: اعداد گنگ با عمل جمع.
- $(\mathbb{Q}^c, \times)$: اعداد گنگ با عمل ضرب.

تعریف ۲.۱.۳: میدان

میدان مجموعه‌ای F به همراه دو عمل جمع $(+)$ و ضرب $(\times)$ است، به‌طوری که خواص زیر برقرار باشند:

- $(F, +)$ یک گروه آبلی (گروه جابجایی) است.
- $(F \setminus \{0\}, \times)$ یک گروه آبلی است.
- ضرب نسبت به جمع توزیع‌پذیر است:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c), \quad \forall a, b, c \in F$$

مثال‌ها:

- مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$
- مجموعه اعداد مختلط $\mathbb{C}$
- مجموعه اعداد گویا $\mathbb{Q}$

تعریف ۳.۱.۳: فضای برداری

فضای برداری (یا فضای خطی) بر روی یک میدان F، مجموعه‌ای V است که دارای دو عمل جمع بردارها و ضرب اسکالر است، به‌طوری که:

- $(V, +)$ یک گروه آبلی است.
- عمل ضرب اسکالر $F \times V \to V$ تعریف شده است و خواص زیر را دارا می‌باشد:
  - برای همه‌ی $\alpha, \beta \in F$ و $u \in V$:
$$(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$$
  - برای همه‌ی $\alpha \in F$ و $u, v \in V$:
$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$$
  - برای همه‌ی $\alpha, \beta \in F$ و $u \in V$:
$$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$$
  - برای عنصر واحد $1 \in F$ و هر $u \in V$:
$$1u = u$$

مثال‌ها:

- $\mathbb{R}^n$ با جمع برداری معمولی و ضرب اسکالر حقیقی.
- فضای ماتریس‌های $m \times n$ بر روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$.
- مجموعه تمام توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ با جمع و ضرب اسکالر نقطه‌ای.

۲.۳ مثال‌های خاص از فضای برداری

مثال ۱.۲.۳: فضای توابع پیوسته

مجموعه‌ی $C([a,b],\mathbb{R})$ از تمام توابع پیوسته از بازه‌ی بسته $[a,b]$ به $\mathbb{R}$، یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ است.
عملیات:

- جمع دو تابع f و g به صورت نقطه‌ای:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

- ضرب یک اسکالر $\alpha\in\mathbb{R}$ در تابع f به صورت:

$$(\alpha f)(x)=\alpha(f(x))$$

ویژگی: تمام خواص فضای برداری (بسته بودن، جابجایی، توزیع‌پذیری و ...) برقرار است.

مثال ۲.۲.۳: فضای چندجمله‌ای‌ها

مجموعه‌ی $P_n(\mathbb{R})$ شامل همه‌ی چندجمله‌ای‌های با درجه حداکثر n بر روی $\mathbb{R}$ یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است.
شکل کلی اعضای این فضا:

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \quad \text{که} \quad a_i\in\mathbb{R}$$

عملیات:

- جمع چندجمله‌ای‌ها: جمع ضرایب هم‌درجه.
- ضرب اسکالر در چندجمله‌ای: ضرب همه‌ی ضرایب در اسکالر.

مثال:
اگر

$$p(x)=1+2x+3x^2 \quad \text{و} \quad q(x)=4x+5x^2$$

آنگاه:

$$(p+q)(x)=(1)+(2+4)x+(3+5)x^2=1+6x+8x^2$$

و برای اسکالر $\alpha=2$ داریم:

$$(2p)(x)=2(1+2x+3x^2)=2+4x+6x^2$$

تمرین ۱.۲.۳

بررسی کنید کدام یک از مجموعه‌های زیر یک فضای برداری است:

۱. $S = \{A \in M_{2\times 2} \ \mid\ A \text{ نامنفرد است }\}$

۲. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid\ ax + by = 0\}$

۳. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid\ ax + by = k,\ k \neq 0\}$

۴. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} \ \mid\ a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}$

۳.۳ زیرفضا

تعریف ۱.۳.۳: زیرفضا

فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد. زیرمجموعه‌ای $W \subseteq V$ را یک **زیرفضای برداری** از V می‌نامیم اگر W خود نیز یک فضای برداری روی F با عملیات جمع و ضرب اسکالر القاشده از V باشد.

برای اینکه W یک زیرفضا باشد، باید شرایط زیر را دارا باشد:

۱. بردار صفر متعلق به W باشد: $\mathbf{0} \in W$

۲. برای هر $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$، جمع آن‌ها نیز در W باشد: $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$

۳. برای هر $\mathbf{v} \in W$ و هر اسکالر $c \in F$، ضرب اسکالر آن نیز در W باشد: $c\mathbf{v} \in W$

مثال ۱.۳.۳:

زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^3$ به صورت

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

یک زیرفضا از $\mathbb{R}^3$ است، زیرا:

- بردار صفر $(0, 0, 0)$ در W است چون $0 + 0 + 0 = 0$
- جمع دو عنصر از W نیز مجموع مختصات‌شان صفر است.
- ضرب اسکالر یک عنصر از W، همچنان مجموع مختصاتش صفر باقی می‌ماند.

مثال ۲.۳.۳:

زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^2$ به صورت

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$$

نیز یک زیرفضا است چون خطی است که از مبدأ عبور می‌کند و بسته نسبت به جمع و ضرب اسکالر است.

مثال ۳.۳.۳:

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$$

زیرفضا نیست چون بسته نسبت به ضرب اسکالر نیست؛ مثلاً $(1,1) \in W$ ولی $(-1)(1,1) = (-1,-1) \notin W$.

تمرین ۱.۳.۳

۱. بررسی کنید که آیا مجموعه زیر زیرفضای $\mathbb{R}^3$ هست یا خیر:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$$

۲. کدام یک از مجموعه‌های زیر زیرفضای $\mathbb{R}^2$ هستند؟ دلیل بیاورید.

(آ) $W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 1\}$

(ب) $W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\}$

۳. نشان دهید که مجموعه تمام ماتریس‌های 2×2 متقارن یک زیرفضا از فضای $\mathbb{R}^{2\times 2}$ است.

۴.۳ ترکیب خطی

تعریف ۱.۴.۳:

فرض کنید $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ بردارهایی در فضای برداری V باشند و $c_1, c_2, \dots, c_k$ اسکالرهایی از میدان $\mathbb{F}$.

ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$$

که در آن $\mathbf{w} \in V$ است.

مثال ۱.۴.۳:

فرض کنید:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c_1 = 2, \quad c_2 = -1$$

ترکیب خطی این دو بردار به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_1 - 1 \cdot \mathbf{v}_2 = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

بنابراین، بردار $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ ترکیب خطی از $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ است.

مثال ۲.۴.۳:

فرض کنید:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

می‌خواهیم ضرایبی c_1, c_2 بیابیم به طوری که:

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$$

یعنی:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + 2c_2 \\ 2c_1 + c_2 \end{bmatrix}$$

با حل دستگاه:

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 4 \\ 2c_1 + c_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \text{حل:} c_1 = 1, \quad c_2 = \frac{3}{2}$$

پس $\mathbf{w}$ ترکیب خطی از $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ است.

مثال ۳.۴.۳:

فرض کنید:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

هر ترکیب خطی از $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ به صورت زیر است:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اما بردار $\mathbf{w}$ مؤلفه سوم برابر ۱ دارد. چون هیچ ترکیب خطی از $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ مؤلفه سوم غیرصفر ندارد، بنابراین: $\mathbf{w}$ قابل بیان به صورت ترکیب خطی از $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ نیست.

تعریف ۳.۴.۲: فضای پیموده شده یا اسپن

فرض کنید $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ بردارهایی در فضای برداری V باشند. فضای برداری تولید شده توسط این بردارها که با $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ نمایش داده می‌شود، مجموعه‌ی تمام ترکیب‌های خطی ممکن از آن‌هاست:

$$\text{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} = \{c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k \mid c_i \in \mathbb{F}\}$$

این مجموعه، یک زیرفضای برداری از V است.

مثال ۳.۴.۴:

فرض کنید:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

آنگاه:

$$\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

که در واقع برابر با کل فضای $\mathbb{R}^2$ است.

اما اگر فقط $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ را داشته باشیم، آنگاه:

$$\text{span}\{\mathbf{v}_1\} = \left\{ c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 2c \end{bmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

که یک خط در فضای $\mathbb{R}^2$ است.

مثال ۵.۴.۳:

فرض کنید:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

آنگاه:

$$\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{bmatrix} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

که صفحه xy در فضای سه‌بعدی $\mathbb{R}^3$ را تشکیل می‌دهد.
حال بردار زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

این بردار در صفحه xy قرار ندارد، زیرا مؤلفه سوم آن برابر با ۱ است، در حالی که تمام بردارهای در $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ مؤلفه سومشان صفر است. بنابراین:

$$\mathbf{w} \notin \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$$

تعریف ۳.۴.۳: فضای ستونی یک ماتریس

فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد که دارای ستون‌های $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ است:

$$A = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{a}_n]$$

فضای ستونی ماتریس A، که با $\text{Col}(A)$ یا $\text{Im}(A)$ نمایش داده می‌شود، مجموعه تمام ترکیب‌های خطی ستون‌های A است:

$$\text{Col}(A) = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$$

این فضا، زیرفضایی از $\mathbb{R}^m$ است.

مثال ۶.۴.۳:

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

ستون‌های A برابرند با:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

پس فضای ستونی A برابر است با:

$$\text{Col}(A) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$

که زیرفضایی از $\mathbb{R}^3$ است.

نکته : تعبیر هندسی فضای ستونی

فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد و دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

تعبیر هندسی: دستگاه بالا تنها زمانی جواب دارد که بردار $\mathbf{b}$ در فضای ستونی ماتریس A باشد. به‌عبارت‌دیگر:

دستگاه معادلات $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ سازگار است. $\iff$ $\mathbf{b} \in \text{Col}(A)$

مثال ۷.۴.۳:

ماتریس و بردار سمت راست را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 15 \end{bmatrix}$$

آیا $\mathbf{b}$ در فضای ستونی A قرار دارد؟
برای پاسخ، بررسی می‌کنیم که آیا می‌توان $\mathbf{b}$ را به صورت ترکیب خطی از ستون‌های A نوشت.
ستون‌های A:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

فرض می‌کنیم:

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b} \Rightarrow c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 15 \end{bmatrix}$$

با جمع بردارها، معادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$\begin{bmatrix} c_1 + 2c_2 \\ c_2 \\ 3c_1 + 6c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 15 \end{bmatrix}$$

بنابراین باید حل کنیم:

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 5 \\ c_2 = 2 \\ 3c_1 + 6c_2 = 15 \end{cases}$$

از معادله دوم، داریم: $c_2 = 2$، پس:

$$c_1 + 4 = 5 \Rightarrow c_1 = 1$$

بررسی معادله سوم:

$$3(1) + 6(2) = 3 + 12 = 15 \quad \checkmark$$

نتیجه: چون توانستیم ضرایب $c_1 = 1$ و $c_2 = 2$ را بیابیم، بنابراین $\mathbf{b}$ در $\mathrm{Col}(A)$ قرار دارد و دستگاه $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ دارای جواب است.

تمرین ۱.۴.۳

۱. ماتریس A و بردار $\mathbf{b}$ به‌صورت زیر داده شده‌اند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

بررسی کنید که آیا $\mathbf{b}$ در فضای ستونی A قرار دارد.

۲. ماتریس A و بردار $\mathbf{b}$ به‌صورت زیر داده شده‌اند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

آیا بردار $\mathbf{b}$ در فضای ستونی ماتریس A قرار دارد؟

۳. بررسی کنید که آیا بردار $\mathbf{b}$ در فضای ستونی ماتریس زیر قرار دارد و اگر بله، ضرایب ترکیب خطی را بیابید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

۴. ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

تعیین کنید برای چه مقادیری از a و b، بردار $\mathbf{b}$ در $\mathrm{Col}(A)$ قرار دارد. آیا می‌توانید a و b را طوری انتخاب کنید که دستگاه $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ناسازگار باشد؟

تعریف ۴.۴.۳: فضای پوچی یک ماتریس

فضای پوچی یک ماتریس [a] $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$، مجموعه‌ای از تمام بردارهای $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ است که رابطهٔ زیر را ارضا می‌کنند:

$$\mathrm{Null}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

این فضا، یک زیرفضای خطی از $\mathbb{R}^n$ است.

[a] Null Space

مثال ۸.۴.۳:

- مثال ۱:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Null}(A) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

- مثال ۲:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Null}(A) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

تمرین ۲.۴.۳

۱. ماتریس A را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

فضای پوچی این ماتریس را بیابید.

۲. ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مجموعهٔ تمام بردارهای $\mathbf{x}$ را که در رابطه $A\mathbf{x} = 0$ صدق می‌کنند را پیدا کنید.

۳. ماتریس A را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فضای پوچی این ماتریس را بیابید.

تعریف ۵.۴.۳: استقلال خطی

مجموعه‌ای از بردارها $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ در فضای برداری V را **خطی مستقل** می‌گوییم اگر فقط ترکیب خطی صفر آن‌ها منجر به بردار صفر شود؛ یعنی اگر:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$$

در غیر این صورت، این مجموعه **خطی وابسته** است.

تعریف ۶.۴.۳: وابستگی خطی

مجموعه‌ای از بردارها را **خطی وابسته** می‌نامیم اگر ضرایب ناصفری وجود داشته باشند به‌طوری‌که ترکیب خطی آن‌ها برابر صفر شود:

$$\exists\,(c_1, \dots, c_k) \neq (0, \dots, 0) \text{ چنان‌که } c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

مثال ۹.۴.۳:

- مثال ۱ (مستقل):

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

این دو بردار در $\mathbb{R}^2$ مستقل هستند.

- مثال ۲ (وابسته):

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$$

چون $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1$، پس خطی وابسته‌اند.

- مثال ۳:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

بررسی کنید که آیا این سه بردار در $\mathbb{R}^3$ مستقل هستند یا خیر.

تمرین ۳.۴.۳

۱. بررسی کنید آیا بردارهای زیر در $\mathbb{R}^2$ مستقل هستند یا نه:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$$

۲. در $\mathbb{R}^3$، بررسی کنید که آیا بردارهای زیر مستقل هستند:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

۳. بررسی کنید که آیا بردارهای زیر در $\mathbb{R}^4$ مستقل هستند یا نه:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\2\\1\end{bmatrix}$$

۴. بردارهای زیر را در $\mathbb{R}^4$ در نظر بگیرید:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\0\\3\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}-1\\-2\\1\\-3\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}2\\4\\-1\\6\end{bmatrix}$$

بررسی کنید که آیا این بردارها مستقل هستند یا نه. اگر وابسته‌اند، رابطه‌ای بین آن‌ها پیدا کنید.

تعریف ۷.۴.۳: پایه یه فضای برداری

پایه یک فضای برداری مجموعه‌ای از بردارهای مستقل خطی است که هر بردار در آن فضای برداری می‌تواند به‌صورت ترکیب خطی از آن‌ها بیان شود.

تعریف ۸.۴.۳: بعد یک فضای برداری

بعد فضای برداری به حداکثر تعداد بردارهای مستقل خطی در آن فضا گفته می‌شود. به عبارت دیگر، بعد فضای برداری معادل تعداد بردارهای پایه‌ای است که برای تولید هر بردار در آن فضا به کار می‌روند. اگر فضای برداری V دارای n بردار مستقل خطی باشد، گفته می‌شود که بعد آن برابر با n است. این n را به عبارتی **بعد** فضای V می‌نامیم.

مثال ۱۰.۴.۳:

- مثال ۱: فضای $\mathbb{R}^2$
$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
این دو بردار پایه‌ای برای فضای $\mathbb{R}^2$ هستند و فضای $\mathbb{R}^2$ بعد ۲ دارد.
- مثال ۲: فضای $\mathbb{R}^3$
$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
این بردارها پایه‌ای برای فضای $\mathbb{R}^3$ هستند و فضای $\mathbb{R}^3$ بعد ۳ دارد.
- مثال ۳: زیرفضای $\mathbb{R}^2$ با یک بردار
$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$
این دو بردار وابسته‌اند و فضای برداری به‌طور مؤثر یک بعد دارد.

تمرین ۴.۴.۳

۱. زیرفضای $\mathbb{R}^2$ با بردارهای زیر را بررسی کنید و بعد آن را تعیین کنید:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۲. زیرفضای $\mathbb{R}^3$ با بردارهای زیر را بررسی کنید و بعد آن را تعیین کنید:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

۳. زیرفضای $\mathbb{R}^3$ با بردارهای زیر را بررسی کنید و بعد آن را تعیین کنید:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

۴. زیرفضای زیر را بررسی کنید و بعد آن را تعیین کنید:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۵.۳ تغییر پایه

در یک فضای برداری، ممکن است بردارها را نسبت به پایه‌های مختلفی نمایش دهیم. **تغییر پایه** به فرآیند تبدیل مختصات یک بردار از یک پایه به پایه‌ای دیگر گفته می‌شود.

فرض کنید $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ و $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ دو پایه برای فضای برداری $\mathbb{R}^n$ باشند. اگر بردار $\mathbf{x}$ در پایه B به صورت:

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

و در پایه B' به صورت:

$$\mathbf{x} = b_1\mathbf{w}_1 + b_2\mathbf{w}_2 + \cdots + b_n\mathbf{w}_n$$

نشان داده شود، آنگاه ماتریسی وجود دارد که مختصات بردار را از پایه B به پایه B' تبدیل می‌کند.

تعریف ۱.۵.۳: ماتریس تغییر پایه

ماتریس تغییر پایه از پایه B' به پایه B، ماتریسی است که با استفاده از بردارهای B' و نمایش آن‌ها در پایه B ساخته می‌شود. به بیان دیگر:
اگر بردارهای $\mathbf{w}_i$ به صورت ترکیبی خطی از $\mathbf{v}_j$ ها بیان شوند، آنگاه ماتریس P شامل این ترکیب‌ها است:

$$\mathbf{w}_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ji}\mathbf{v}_j \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \ldots\ \mathbf{w}_n] = P[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \ldots\ \mathbf{v}_n]$$

در این صورت، ماتریس P، ماتریس تغییر پایه از B به B' است.
برای تبدیل مختصات یک بردار $\mathbf{x}$ از پایه‌ی B' به پایه‌ی B داریم:

$[\mathbf{x}]_B = P[\mathbf{x}]_{B'}$ و برعکس: $[\mathbf{x}]_{B'} = P^{-1}[\mathbf{x}]_B$

مثال ۱.۵.۳:

فرض کنید دو پایه‌ی زیر در $\mathbb{R}^3$ تعریف شده‌اند:

$$B = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$$

$$B' = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} \right\}$$

و می‌خواهیم مختصات بردار $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}3\\4\\2\end{bmatrix}$ را نسبت به پایه B' بیابیم، در حالی که بردار $\mathbf{x}$ ابتدا نسبت به پایه B بیان شده است.

مرحله اول: نوشتن ماتریس تغییر پایه از B' به B

ابتدا بردارهای پایه‌ی B' را بر حسب پایه‌ی B بازنویسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم:

$$\mathbf{w}_i = a_{1i}\mathbf{v}_1 + a_{2i}\mathbf{v}_2 + a_{3i}\mathbf{v}_3$$

برای هر $\mathbf{w}_i$، دستگاه معادلاتی می‌سازیم تا ضرایب a_{ji} را بیابیم.

برای نمونه برای $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$:

$$a_1 \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_1 + a_3\\a_1 + a_2\\a_2 + a_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

حل این دستگاه:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 2 \\ a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 1$$

بنابراین:

$$\mathbf{w}_1 = 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 1\mathbf{v}_3$$

به همین ترتیب، $\mathbf{w}_2$ و $\mathbf{w}_3$ را نیز بر حسب پایه B می‌نویسیم و ماتریس تغییر پایه از B' به B را به صورت زیر می‌سازیم:

$$P = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

مرحله دوم: محاسبه مختصات $\mathbf{x}$ در پایه B'

فرض می‌کنیم مختصات $\mathbf{x}$ نسبت به B داده شده باشد:

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$$

اکنون می‌خواهیم آن را به پایه B' تبدیل کنیم:

$$[\mathbf{x}]_{B'} = P^{-1}[\mathbf{x}]_B$$

ماتریس P^{-1} را به روش عددی یا تحلیلی محاسبه می‌کنیم و سپس حاصل ضرب آن در $[\mathbf{x}]_B$ را به دست می‌آوریم.

مثال ۲.۵.۳:

۱. فرض کنید:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

و بردار:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مختصات $\mathbf{x}$ در پایه B به صورت خودش است. حال می‌خواهیم مختصات آن را در پایه B' بیابیم. ابتدا ماتریس پایه جدید را می‌سازیم:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

مختصات در پایه B' برابر است با:

$$[\mathbf{x}]_{B'} = P^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پس:

$$\mathbf{x} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

۲. پایه استاندارد:

$$B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots$$

پایه جدید:

$$B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

بردار:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ماتریس تغییر پایه:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

مختصات $\mathbf{x}$ در پایه B' برابر است با $[\mathbf{x}]_{B'} = P^{-1}\mathbf{x}$ که با محاسبه معکوس P به دست می‌آید.

۶.۳ فضای گستره یک ماتریس

تعریف ۱.۶.۳:

اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد، فضای ستونی (یا فضای گستره) [a] آن، زیرفضای تولیدشده توسط ستون‌های ماتریس A در $\mathbb{R}^m$ است. این فضا شامل تمام ترکیب‌های خطی از ستون‌های A می‌باشد.

$$\text{Col}(A) = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$$

که در آن، $\mathbf{a}_i$ ستون‌های ماتریس A هستند.

[a] Range Space

مثال ۱.۶.۳:

فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

ستون دوم دو برابر ستون اول است. بنابراین فضای ستونی توسط یک بردار تولید می‌شود:

$$\text{Col}(A) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

در نتیجه، $\text{Col}(A)$ یک زیرفضای یک‌بعدی از $\mathbb{R}^3$ است.

مثال ۲.۶.۳:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ستون‌های این ماتریس مستقل خطی هستند. پس:

$$\text{Col}(A) = \mathbb{R}^3$$

زیرا فضای ستونی تمام فضای $\mathbb{R}^3$ را پوشش می‌دهد و بعد آن برابر با ۳ است.

نکته : روش محاسبه فضای ستونی

برای یافتن فضای ستونی یک ماتریس:

۱. ستون‌های ماتریس را به صورت بردارهای ستونی در نظر بگیرید.

۲. بررسی کنید که کدام‌یک از آن‌ها مستقل خطی هستند (مثلاً با روش حذف گاوسی).

۳. فضای ستونی برابر است با span بردارهای ستونی مستقل.

مثال ۳.۶.۳:

فرض کنید ماتریس A به صورت زیر باشد:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 1 & 3 & 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

گام اول: حذف سطری (ردیف کاهش یافته)

با انجام عملیات سطری، ماتریس را به فرم ردیف کاهش یافته می‌بریم. نتیجه به صورت زیر است:

$$\text{RREF}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

گام دوم: شناسایی ستون‌های مستقل

در ماتریس ردیف کاهش یافته، ستون‌های ۱، ۲، و ۴ محور هستند. بنابراین، ستون‌های متناظر از ماتریس اصلی A، مستقل خطی هستند و فضای ستونی توسط آن‌ها تولید می‌شود:

$$\text{Col}(A) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$

تمرین ۱.۶.۳

فصل ۴

مقادیر ویژه و برداهای ویژه

۱.۴ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

تعریف ۱.۱.۴:

فرض کنید A یک ماتریس مربعی $n \times n$ باشد. اگر بردار ناصفری $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ و عددی $\lambda \in \mathbb{R}$ (یا $\mathbb{C}$) وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

در این صورت، λ را مقدار ویژه و $\mathbf{v}$ را بردار ویژه ماتریس A می‌نامند.

یافتن مقادیر ویژه

برای یافتن مقادیر ویژه، معادله مشخصه را حل می‌کنیم:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

که در آن I ماتریس همانی است.

یافتن بردارهای ویژه

برای هر مقدار ویژه‌ی λ، بردارهای ویژه مربوط به آن از حل دستگاه همگن زیر به‌دست می‌آیند:

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$$

مثال

مثال ۴.۱.۱:

ماتریس:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

حل:

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 2$$

برای $\lambda = 5$، دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$(A - 5I)\,\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = x \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

برای $\lambda = 2$:

$$(A - 2I)\,\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

کد پایتون ۴.۱.۱:

```
import numpy as np

# Define the matrix A
A = np.array([[6, 2, 1],
              [2, 3, 1],
              [1, 1, 1]])

# Compute eigenvalues and eigenvectors
eigenvalues, eigenvectors = np.linalg.eig(A)

# Display results
print("Eigenvalues:")
print(eigenvalues)

print("\nEigenvectors (column-wise):")
print(eigenvectors)
```

۱.۱.۴ قضیه کیلی–هامیلتون (Cayley–Hamilton Theorem)

نکته : بیان قضیه:

اگر A یک ماتریس مربعی از مرتبه $n\times n$ با ضرایب حقیقی یا مختلط باشد و $p(\lambda)$ چندجمله‌ای مشخصه‌ی آن باشد، آنگاه:

ماتریس A، ریشه‌ی چندجمله‌ای مشخصه‌ی خودش است.

یعنی اگر:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

آنگاه:

$$p(A) = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I = 0$$

که در آن I ماتریس همانی است و 0 ماتریس صفر می‌باشد.

مثال ۲.۱.۴: استفاده از قضیه کیلی–هامیلتون

فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ابتدا چندجمله‌ای مشخصه را پیدا می‌کنیم:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 3) \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

طبق قضیه کیلی–هامیلتون:

$$A^2 - 5A + 6I = 0$$

حال طرف چپ معادله را بررسی می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$-5A = -5\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -5 \\ 0 & -15 \end{bmatrix}, \quad 6I = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 5A + 6I = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & -5 \\ 0 & -15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین معادله برقرار است و قضیه کیلی–هامیلتون تأیید می‌شود.

۲.۴ نُرم دو ماتریس و ارتباط آن با مقادیر ویژه

تعریف ۱.۲.۴: نُرم دو

نرم دو ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\|_2 = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}$$

این مقدار برابر است با بزرگ‌ترین مقدار تکین (singular value) ماتریس A که معادل با ریشه دوم بیشینه مقدار ویژه ماتریس A^TA است:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$$

در صورتی‌که ماتریس A مربعی و متقارن باشد، نرم دو برابر است با بیشینه مقدار مطلق مقادیر ویژه:

$$\|A\|_2 = \max\{|\lambda_i|\}$$

مثال ۱.۲.۴:

فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ابتدا داریم:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 13 \end{bmatrix}$$

اکنون مقادیر ویژه ماتریس A^TA را پیدا می‌کنیم. چند جمله مشخصه این ماتریس به‌صورت زیر است:

$$\det(A^TA - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 13-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(13-\lambda) - 4$$

$$= \lambda^2 - 14\lambda + 9$$

حل این معادله درجه دوم دو مقدار ویژه به ما می‌دهد، سپس داریم:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}}$$

۳.۴ مقادیر منفرد (تکین) یک ماتریس

تعریف ۱.۳.۴:

فرض کنید A یک ماتریس حقیقی از مرتبه $m \times n$ باشد. مقادیر منفرد ماتریس A، اعدادی غیرمنفی $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^TA)} \quad \text{برای} \; i = 1, 2, \ldots, r \tag{۱.۴}$$

که در آن:

- A^TA ماتریسی متقارن و نیمه‌مثبت معین از مرتبه $n \times n$ است.
- $\lambda_i(A^TA)$ مقادیر ویژهٔ مثبت یا صفر ماتریس A^TA هستند.
- $r = \min(m, n)$

به عبارت دیگر، مقادیر منفرد برابر با ریشه دوم غیرمنفی مقادیر ویژهٔ ماتریس A^TA هستند.

نکته : ویژگی‌های مقادیر منفرد

- تمام σ_iها حقیقی و نامنفی هستند: $\sigma_i \geq 0$
- مقادیر منفرد معمولاً به ترتیب نزولی مرتب می‌شوند: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r \geq 0$
- تعداد مقادیر منفرد غیر صفر برابر با رتبهٔ عددی ماتریس A است.

مثال ۱.۳.۴:

فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ابتدا ماتریس A^TA را محاسبه می‌کنیم:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژهٔ A^TA برابرند با:

$$\lambda_1 = 10.6056, \quad \lambda_2 = 3.3944$$

پس مقادیر منفرد ماتریس A عبارتند از:

$$\sigma_1 = \sqrt{10.6056} \approx 3.26, \quad \sigma_2 = \sqrt{3.3944} \approx 1.84$$

۴.۴ تجزیه مقادیر تکین و کاربرد آن در فشرده‌سازی تصاویر

۱.۴.۴ تجزیه مقادیر تکین (SVD)

تعریف ۱.۴.۴:

فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. تجزیه مقادیر تکین (SVD) ماتریس A به صورت زیر است:

$$A = U\Sigma V^T$$

که در آن:

- U یک ماتریس $m \times m$ متعامد (ستون‌های آن بردارهای ویژه AA^T هستند)
- Σ یک ماتریس قطری $m \times n$ شامل مقادیر تکین $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r \geq 0$
- V یک ماتریس $n \times n$ متعامد (ستون‌های آن بردارهای ویژه A^TA هستند)

مثال ۱.۴.۴:

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ابتدا ماتریس A^TA را محاسبه می‌کنیم:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه‌ی A^TA را با حل معادله مشخصه پیدا می‌کنیم:

$$\det(A^TA - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(5-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 14\lambda + 36 = 0$$

حل این معادله:

$$\lambda = 7 \pm \sqrt{13} \Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{7+\sqrt{13}}, \quad \sigma_2 = \sqrt{7-\sqrt{13}}$$

مقادیر σ_1 و σ_2 مقادیر تکین (singular values) هستند. سپس بردارهای ویژه‌ی متناظر را برای ساخت ماتریس V محاسبه می‌کنیم. با داشتن V، ماتریس‌های U و Σ نیز قابل محاسبه خواهند بود با استفاده از روابط:

$$AV_i = \sigma_i U_i$$

مثال ۴.۴.۲:

فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ابتدا A^TA را محاسبه می‌کنیم:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه‌ی A^TA را پیدا می‌کنیم:

$$\det(A^TA - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 3$$

پس:

$$\sigma_1 = \sqrt{3}, \quad \sigma_2 = \sqrt{1}$$

حال با محاسبه بردارهای ویژه متناظر برای A^TA، ماتریس V به‌دست می‌آید. سپس U را از رابطه $U_i = \frac{1}{\sigma_i}AV_i$ محاسبه می‌کنیم.

نهایتاً تجزیه به صورت:

$$A = U\Sigma V^T$$

به‌دست می‌آید که در آن Σ ماتریسی 2×3 با مقادیر σ_1 و σ_2 در قطر است.

۴.۴.۲ شبه معکوس (Pseudo-inverse) در تجزیه مقدار تکین (SVD)

فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ یک ماتریس دلخواه باشد. آنگاه تجزیه مقدار تکین آن به صورت زیر است:

$$A = U\Sigma V^T$$

که در آن:

- $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ماتریسی متعامد (Orthogonal)
- $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریسی متعامد
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ماتریسی قطری شامل مقادیر تکین $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$

تعریف Σ^+

ماتریس Σ^+ یا **شبه معکوس** از Σ به صورت زیر تعریف می‌شود. اگر:

$$\Sigma = \left[\begin{array}{cccc} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]_{m\times n}$$

آنگاه:

$$\Sigma^+ = \left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_r} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]_{n\times m}$$

یعنی فقط درایه‌های غیرصفر قطری معکوس می‌شوند و جای ابعاد نیز تغییر می‌کند.

شبه معکوس ماتریس A

اگر $A = U\Sigma V^T$ آنگاه شبه معکوس آن (Moore–Penrose pseudo-inverse) برابر است با:

$$A^+ = V\Sigma^+U^T$$

کاربردها

- حل دستگاه‌های خطی ناسازگار (overdetermined) به روش **حداقل مربعات**:

$$\min_{\mathbf{x}} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = A^+\mathbf{b}$$

- استفاده در فشرده‌سازی تصویر یا کاهش نویز با حذف مقادیر کوچک‌تر در Σ.

نکته : کاربرد در فشرده‌سازی تصویر

در فشرده‌سازی تصاویر، می‌توان تنها از k مقدار تکین بزرگ‌تر برای تقریب تصویر استفاده کرد:

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

که A_k تقریب رتبه‌−k از A است. این روش باعث می‌شود اطلاعات اصلی تصویر حفظ شود ولی فضای ذخیره‌سازی کاهش یابد.

۳.۴.۴ عدد وضعیت یک ماتریس (Condition Number)

تعریف ۲.۴.۴:

عدد وضعیت یک ماتریس مربعی A معیاری از حساسیت جواب دستگاه معادلات خطی $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ نسبت به تغییرات در بردار b یا در خود ماتریس A می‌باشد.
به‌طور خاص، عدد وضعیت A (با نرم دلخواه مانند نرم ۲) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

اگر از نرم ۲ استفاده کنیم (یعنی نرم طیفی یا spectral norm)، آنگاه:

$$\kappa_2(A) = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}$$

که در آن $\sigma_{\max}$ و $\sigma_{\min}$ به ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار تکین (singular value) ماتریس A هستند.

نکته : کاربرد عدد وضعیت

- هر چه عدد وضعیت $\kappa(A)$ بزرگ‌تر باشد، دستگاه حساس‌تر به اختلال در ورودی‌ها (مثلاً نویز یا خطای گرد کردن) خواهد بود.
- اگر $\kappa(A)$ بزرگ باشد، حل عددی معادله $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ ممکن است ناپایدار یا دارای خطای بزرگ باشد.
- اگر $\kappa(A) \approx 1$، ماتریس به خوبی شرطی (well-conditioned) است و محاسبات پایدار هستند.

مثال ۳.۴.۴:

فرض کنید نتایج انجام یک سری آزمایشات تجربی منجر به بدست آمدن چنین دستگاه معادلات ماتریسی گردد،

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 93.477 & 10.202 & -28.832 \\ 1.963 & 32.816 & 62.414 \\ 26.821 & 36.816 & 57.234 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34.7177 \\ 70.9241 \\ 82.9271 \end{bmatrix}$$

از آنجاییکه

$$|A| = -0.19170$$

است، می‌توان آن را بصورت زیر حل کرد،

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93.477 & 10.202 & -28.832 \\ 1.963 & 32.816 & 62.414 \\ 26.821 & 36.816 & 57.234 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 34.7177 \\ 70.9241 \\ 82.9271 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5000 \\ 0.8000 \\ 0.7000 \end{bmatrix}$$

حال اگر این نتایج حاصل از یک اندازه‌گیری عملی باشد، در اینصورت این احتمال وجود دارد که برخی از ارقام را به منظور سهولت در محاسبات گرد کنیم. با این فرض نتایج را مجدداً بررسی می‌نماییم،

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93.477 & 10.202 & -28.832 \\ 1.963 & 32.816 & 62.414 \\ 26.821 & 36.816 & 57.234 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 34.7 \\ 70.9 \\ 82.9 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.68294 \\ 8.9228 \\ -3.50254 \end{bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج بطور چشم‌گیری تغییر نموده است.

بررسی علت موضوع:

ابتدا مقادیر منفرد ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 93.477 & 10.202 & -28.832 \\ 1.963 & 32.816 & 62.414 \\ 26.821 & 36.816 & 57.234 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = 100.0004 \qquad \sigma_2 = 100.0000 \qquad \sigma_3 = 0.0002$$

حال عدد حالت را به‌دست می‌آوریم:

$$\kappa_A = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{100.0004}{0.0002} = 5.2164 \times 10^5 \gg 1$$

عدد حالت مقدار بسیار بزرگی است، لذا ماتریس A نزدیک به منفرد شدن است. در این صورت اعمال تغییرات بسیار کوچکی در بردار b سبب بروز خطای بزرگی در بردار x می‌شود.

مثال ۴.۴.۴:

فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ابتدا مقادیر منفرد ماتریس A را حساب می‌کنیم (مثلاً با استفاده از SVD):

$$\sigma_1 \approx 5.464, \quad \sigma_2 \approx 0.366$$

پس:

$$\kappa_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \approx \frac{5.464}{0.366} \approx 14.93$$

این عدد نسبتاً بزرگ نشان می‌دهد که حل دستگاه $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ می‌تواند نسبت به خطاهای عددی نسبتاً حساس باشد.

نکته : راهکارهای رفع مشکل بد وضع بودن ماتریس در حل دستگاه معادلات خطی

زمانی که ماتریس A در دستگاه خطی $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ دارای عدد وضعیت بزرگی باشد، دستگاه معادلات «بد وضع» در نظر گرفته می‌شود. در چنین شرایطی راه‌حل‌های زیر برای بهبود پایداری عددی و کاهش حساسیت به نویز پیشنهاد می‌شوند:

۱. **استفاده از تجزیه مقادیر منفرد (SVD):** با استفاده از تجزیه SVD، می‌توان مؤلفه‌هایی که با مقادیر منفرد کوچک متناظر هستند را حذف یا تضعیف کرد. این روش منجر به **وارون‌سازی پایدار** ماتریس می‌شود.

$$A = U\Sigma V^T \quad \Rightarrow \quad A^\dagger = V\Sigma^{-1}U^T$$

۲. **به‌کارگیری Tikhonov regularization (یا Ridge Regression):** این روش با حل دستگاه به‌صورت زیر عمل می‌کند:

$$(A^TA + \lambda I)\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

که در آن $\lambda > 0$ پارامتر تنظیم (regularization parameter) است. این روش از ناپایداری ناشی از مقدارهای منفرد کوچک جلوگیری می‌کند.

۳. **کاهش بعد مسئله:** با تحلیل مولفه‌های اصلی (PCA) یا حذف مؤلفه‌هایی که تأثیر زیادی ندارند می‌توان فضای مسئله را کاهش داده و پایداری را افزایش داد.

۴. **افزایش دقت محاسبات:** استفاده از داده‌هایی با دقت بالا (مثلاً اعداد اعشاری با دقت دو برابر) می‌تواند خطاهای عددی را کاهش دهد.

۵. **بازشرایط‌سازی ماتریس (Preconditioning):** گاهی می‌توان با ضرب ماتریس A در یک ماتریس پیش‌شرط M مناسب (مثلاً ماتریس پایین مثلثی یا ماتریس قطری) شرایط ماتریس را بهبود داد.

فصل ۵

روش حداقل مربعات

روش حداقل مربعات برای حل دستگاه معادلات خطی

در بسیاری از مسائل کاربردی، دستگاه معادلات خطی ممکن است بیش‌تعیین‌شده (Overdetermined) باشد، یعنی تعداد معادلات بیشتر از تعداد مجهولات است:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad m > n$$

در این صورت، ممکن است دستگاه معادلات هیچ جواب دقیقی نداشته باشد. هدف روش **حداقل مربعات** یافتن بردار $\mathbf{x}$ است که **کمترین مقدار** ممکن برای تابع خطا را بدهد:

$$\min_{\mathbf{x}} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$$

فرمول کلی

برای یافتن جواب در روش حداقل مربعات، دستگاه نرمال را تشکیل می‌دهیم:

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

که این دستگاه مربعی $n \times n$ معمولاً قابل حل است (در صورتی که A دارای رتبه کامل باشد).

مثال ۵.۰.۱:

فرض کنید دستگاه زیر را داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

هدف یافتن بردار $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ است که بهترین تقریب را ارائه دهد.
ابتدا دستگاه نرمال را می‌نویسیم:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}, \quad A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

حل دستگاه:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

مثال ۵.۰.۲:

داده‌ها:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

تشکیل دستگاه نرمال:

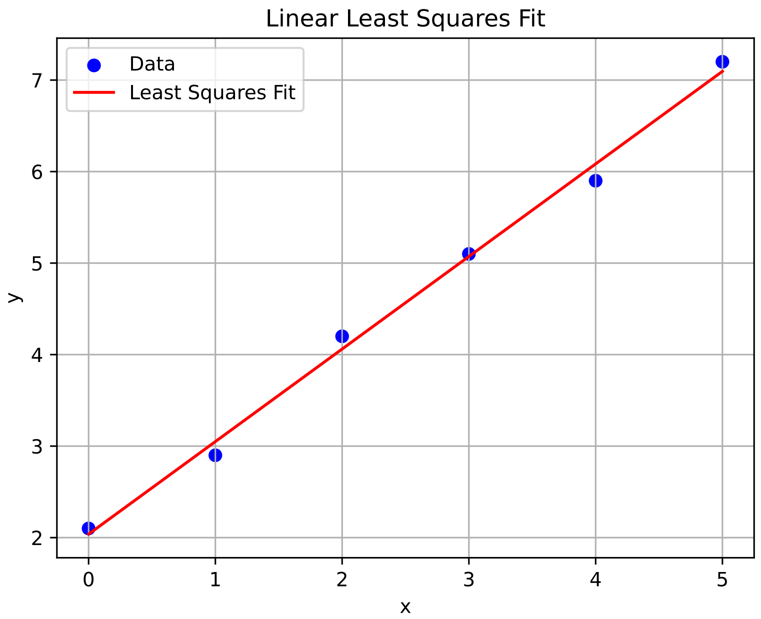
$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

حل:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.6667 \\ 1.6667 \end{bmatrix}$$

کد پایتون ۱.۰.۵:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x = np.array([0, 1, 2, 3, 4, 5])
y = np.array([2.1, 2.9, 4.2, 5.1, 5.9, 7.2])
A = np.vstack([x, np.ones_like(x)]).T
b = y
x_hat, residuals, rank, s = np.linalg.lstsq(A, b, rcond=None)
a, b_intercept = x_hat
print(f"Best fit line: y = {a:.4f}x + {b_intercept:.4f}")
plt.scatter(x, y, color='blue', label='Data')
plt.plot(x, a * x + b_intercept, color='red', label='Least Squares Fit')
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.title("Linear Least Squares Fit")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```



شکل ۱.۵: برازش خطی کمترین مربعات

تمرین ۱.۰.۵

۱. برای دستگاه زیر، جواب به روش حداقل مربعات را بیابید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

۲. نشان دهید که اگر A دارای رتبه کامل نباشد، ممکن است دستگاه نرمال جواب یکتا نداشته باشد.

۳. نشان دهید که اگر A دارای تجزیه SVD به صورت $A = U\Sigma V^T$ باشد، آنگاه جواب حداقل مربعات برابر است با:

$$\mathbf{x}_{\text{LS}} = V\Sigma^{+}U^T\mathbf{b}$$

و این جواب را برای ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

محاسبه کنید.