دانشگاه اصفهان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر خوانسار

جبر خطی کاربردی

نیمسال دوم سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۳

فهرست مطالب

مقدمه

۱.۰ مقدمه

جبر خطی عددی شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی و محاسباتی است که به مطالعه و توسعه الگوریتم‌های عددی برای حل مسائل جبر خطی می‌پردازد. این درس در بسیاری از حوزه‌های علمی و مهندسی نقش کلیدی دارد.

۲.۰ اهداف جبر خطی عددی

- توسعه الگوریتم‌های کارا برای حل دستگاه‌های معادلات خطی.
- تقریب و محاسبه مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس‌ها.
- بررسی پایداری و دقت روش‌های عددی در جبر خطی.
- ارائه روش‌هایی برای تجزیه و تحلیل ماتریس‌ها مانند تجزیه LU، تجزیه QR و تجزیه SVD.
- کاربرد روش‌های عددی در حل مسائل مهندسی و علمی.

۳.۰ کاربردهای جبر خطی عددی

- **مهندسی:** تحلیل سازه‌ها، پردازش سیگنال و شبیه‌سازی‌های مهندسی.
- **علوم داده و یادگیری ماشین:** کاهش ابعاد داده، الگوریتم‌های بهینه‌سازی و تحلیل داده‌های بزرگ.
- **گرافیک کامپیوتری:** پردازش تصاویر، رندرینگ سه‌بعدی و فشرده‌سازی داده‌ها.
- **اقتصاد و مالی:** مدل‌سازی مالی، بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری و تحلیل داده‌های اقتصادی.
- **فیزیک و شیمی محاسباتی:** شبیه‌سازی دینامیک مولکولی و تحلیل سیستم‌های پیچیده.

فصل ۱

بردارها و ماتریس‌ها

۱.۱ تعاریف و مفاهیم پایه‌ای

۱.۱.۱ بردارها

تعریف ۱.۱.۱: بردار

یک بردار در فضای $\mathbb{R}^n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

مثال ۱.۱.۱:

مثال: بردار $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ در $\mathbb{R}^3$.

تعریف ۲.۱.۱: جمع بردارها

اگر $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ باشند، جمع آن‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$$

تعریف ۳.۱.۱: ضرب اسکالر در بردار

برای یک بردار $\mathbf{v}$ و اسکالر c داریم:

$$c\mathbf{v} = \begin{bmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ \vdots \\ cv_n \end{bmatrix}$$

تعریف ۴.۱.۱: ترکیب خطی بردارها

یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$$

مثال ۲.۱.۱:

فرض کنید دو بردار زیر را داشته باشیم:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

اگر ضرایب $c_1 = 2$ و $c_2 = -1$ باشند، ترکیب خطی آن‌ها برابر است با:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مثال ۳.۱.۱: نوشتن یک بردار به صورت ترکیب خطی چند بردار دیگر

برداری که به صورت ترکیب خطی دو بردار دیگر نوشته می‌شود:
فرض کنیم سه بردار زیر را داشته باشیم:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$$

می‌خواهیم ضرایبی مانند c_1, c_2 پیدا کنیم که:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}$$

با جایگذاری مقدار بردارها، دستگاه معادلات خطی زیر را داریم:

$$c_1(1) + c_2(3) = 7$$

$$c_1(2) + c_2(4) = 10$$

با حل این دستگاه، مقدار $c_1 = 1$ و $c_2 = 2$ به‌دست می‌آید، پس بردار $\mathbf{w}$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی دو بردار دیگر نوشت.

مثال ۱.۱.۴: برداری که به صورت ترکیب خطی دو بردار دیگر نوشته نمی‌شود

فرض کنیم سه بردار زیر را داشته باشیم:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

اگر بخواهیم ضرایبی مانند c_1, c_2 پیدا کنیم که:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}$$

با جایگذاری مقدار بردارها، دستگاه معادلات خطی زیر را داریم:

$$c_1(1) + c_2(2) = 3$$

$$c_1(1) + c_2(2) = 4$$

این دو معادله با هم در تناقض‌اند (چون سمت چپ دو معادله برابر است اما سمت راست متفاوت)، بنابراین چنین ضرایبی وجود ندارد و بردار $\mathbf{w}$ را نمی‌توان به صورت ترکیب خطی دو بردار دیگر نوشت.

تعریف ۱.۱.۵: ضرب داخلی بردارها

اگر $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ باشند، ضرب داخلی آن‌ها به صورت زیر است:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

مثال ۱.۱.۵:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1)(4) + (2)(-5) + (3)(6) = 4 - 10 + 18 = 12$$

تعریف ۶.۱.۱: تعمیم ضرب داخلی به بردارهای مختلط

برای دو بردار مختلط $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$، ضرب داخلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i}$$

که در آن $\overline{v_i}$ مزدوج مختلط v_i است.

مثال ۶.۱.۱:

فرض کنیم دو بردار مختلط زیر را داشته باشیم:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 2-i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3-i \\ 1+2i \end{bmatrix}$$

ضرب داخلی آن‌ها برابر است با:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (1+i)\overline{(3-i)} + (2-i)\overline{(1+2i)} \\ &= (1+i)(3+i) + (2-i)(1-2i) \\ &= (1 \cdot 3 + 1 \cdot i + i \cdot 3 + i \cdot i) + (2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2i) - i \cdot 1 - i \cdot (-2i)) \\ &= (3 + i + 3i - 1) + (2 - 4i - i + 2) \\ &= (2+4i) + (4-5i) = 6 - i \end{aligned}$$

نکته :

ضرب داخلی بردارها دارای ویژگی‌های مهم زیر است:

۱. **خطی بودن در اولین مؤلفه:** برای هر بردارهای $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ و ضرایب مختلط α, β داریم:

$$(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$$

۲. **خاصیت مزدوج‌گیری:** برای هر دو بردار $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ داریم:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}$$

یعنی اگر جای دو بردار را عوض کنیم، مزدوج مختلط نتیجه تغییر می‌کند.

۳. **مثبت معین بودن:** برای هر بردار $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ داریم:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$$

و برابری زمانی رخ می‌دهد که $\mathbf{u} = 0$ باشد.

۴. **نرم بردار:** از ضرب داخلی می‌توان برای تعریف **نرم** (یا طول) یک بردار استفاده کرد:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

۵. **نامساوی شوارتز:** برای هر دو بردار $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ داریم:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

که تعمیم نامساوی کوشی-شوارتز برای بردارهای مختلط است.

۲.۱.۱ نُرم بردار

نُرم یک بردار، یک تابع است که مقدار عددی غیرمنفی را به هر بردار نسبت می‌دهد و نشان‌دهنده اندازه یا طول آن بردار است. به‌طور کلی، نُرم یک بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{C}^n$ تابعی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|\mathbf{v}\| : \mathbb{R}^n \text{ یا } \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{\geq 0}$$

و باید سه خاصیت اصلی زیر را داشته باشد:

نکته : خواص نُرم بردار

نرم یک بردار باید دارای ویژگی‌های مهم زیر باشد:

۱. **نامنفی بودن و خاصیت صفر:** برای هر بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ داریم:

$$\|\mathbf{v}\| \geq 0, \quad \text{و} \quad \|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = 0$$

۲. **همگنی:** برای هر عدد مختلط α و بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ داریم:

$$\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\|$$

یعنی ضرب یک بردار در یک عدد مختلط، مقدار نُرم را به اندازه قدرمطلق آن عدد تغییر می‌دهد.

۳. **نامساوی مثلثی:** برای هر دو بردار $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ داریم:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

این خاصیت بیان می‌کند که طول مجموع دو بردار از مجموع طول‌های آن‌ها بیشتر نیست.

تعریف ۷.۱.۱: نُرم اقلیدسی

نُرم اقلیدسی یک بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ که با $\|\mathbf{v}\|$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2}$$

که در آن $|v_i|$ مقدار قدرمطلق (یا اندازه) مؤلفه‌های مختلط بردار است. به نرم اقلیدسی نُرم ۲ هم گفته می‌شود و بیشتر اوقات آن را با نماد $\|\mathbf{v}\|_2$ نیز نشان می‌دهند.

مثال ۷.۱.۱: محاسبه نُرم ۲ یک بردار دو بعدی مختلط مقدار

فرض کنیم بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^2$ به صورت زیر داده شده باشد:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 + 4i \\ 1 - i \end{bmatrix}$$

نرم این بردار برابر است با:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_2 &= \sqrt{|3 + 4i|^2 + |1 - i|^2} \\ &= \sqrt{(3^2 + 4^2) + (1^2 + (-1)^2)} \\ &= \sqrt{(9 + 16) + (1 + 1)} \\ &= \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

تعریف ۸.۱.۱: نُرم بی‌نهایت

نرم بی‌نهایت یک بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{C}^n$ که با $\|\mathbf{v}\|_\infty$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |v_i|$$

یعنی بزرگ‌ترین مقدار مطلق در بین مؤلفه‌های بردار را نشان می‌دهد.

مثال ۸.۱.۱: محاسبه نُرم بی‌نهایت

فرض کنیم بردار زیر را داشته باشیم:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

در این صورت:

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max\{|-3|, |7|, |2|\} = 7$$

برای بردار مختلط:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2+i \\ -4-3i \\ 5+2i \end{bmatrix}$$

داریم:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\|_\infty &= \max\{|2+i|, |-4-3i|, |5+2i|\} \\ &= \max\{\sqrt{2^2+1^2}, \sqrt{(-4)^2+(-3)^2}, \sqrt{5^2+2^2}\} \\ &= \max\{\sqrt{5}, \sqrt{25}, \sqrt{29}\} = \sqrt{29} \end{aligned}$$

تعریف ۹.۱.۱: نُرم p-ام (p-Norm)

نُرم p-ام یک بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{C}^n$ که با $\|\mathbf{v}\|_p$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

که در آن $p \ge 1$ یک عدد حقیقی است.

تعریف ۱۰.۱.۱: نُرم 1 (Manhattan Norm)

نُرم ۱ که به نام نُرم مانهتن یا نُرم تاکسی‌متری نیز شناخته می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

یعنی مجموع مقادیر قدرمطلق مؤلفه‌های بردار را نشان می‌دهد.

مثال ۹.۱.۱: محاسبه نرم p

فرض کنیم بردار $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ به صورت زیر داده شده باشد:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نُرم ۲ (نُرم اقلیدسی) برابر است با:

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \left(|3|^2 + |-4|^2 + |1|^2\right)^{\frac{1}{2}} = (9 + 16 + 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{26}$$

برای نُرم ۳ داریم:

$$\|\mathbf{v}\|_3 = \left(|3|^3 + |-4|^3 + |1|^3\right)^{\frac{1}{3}} = (27 + 64 + 1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{92}$$

مثال ۱۰.۱.۱: محاسبه نُرم ۱

برای بردار:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

داریم:

$$\|\mathbf{v}\|_1 = |3| + |-4| + |1| = 3 + 4 + 1 = 8$$

مثال ۱.۱.۱۱: محاسبه نُرم ۱ بردار مختلط مقدار

فرض کنیم بردار $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^3$ به صورت زیر داده شده باشد:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2+i \\ -3-2i \\ 4i \end{bmatrix}$$

ابتدا قدرمطلق هر مؤلفه را محاسبه می‌کنیم:

$$|2+i| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

$$|-3-2i| = \sqrt{(-3)^2+(-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$|4i| = \sqrt{(0)^2+4^2} = \sqrt{16} = 4$$

بنابراین، مقدار نُرم ۱ این بردار برابر است با:

$$\|\mathbf{w}\|_1 = |2+i| + |-3-2i| + |4i| = \sqrt{5} + \sqrt{13} + 4$$

تعریف ۱.۱.۱۱: نرم ضرب داخلی

از ضرب داخلی می‌توان نُرم یک بردار را محاسبه کرد:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

۱.۱.۳ ماتریس‌ها

تعریف ۱.۱.۱۲: ماتریس

یک ماتریس $m \times n$ مجموعه‌ای مستطیلی از اعداد است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال ۱.۱.۱۲:

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

۴.۱.۱ ماتریس‌های خاص

تعریف ۱۳.۱.۱: ماتریس مربعی

یک ماتریس مربعی، ماتریسی است که تعداد سطرها و ستون‌های آن برابر است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

تعریف ۱۴.۱.۱: ماتریس مستطیلی

یک ماتریس مستطیلی دارای تعداد سطر و ستون نامساوی است:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

مثال:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

تعریف ۱۵.۱.۱: ماتریس صفر

ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر باشند:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تعریف ۱۶.۱.۱: ماتریس همانی

یک ماتریس مربعی که درایه‌های قطر اصلی آن ۱ و سایر درایه‌ها صفر باشند:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعریف ۱.۱.۱۷: ماتریس قطری

یک ماتریس مربعی که درایه‌های خارج از قطر اصلی آن صفر هستند:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$

مثال:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

تعریف ۱.۱.۱۸: ماتریس بالا مثلثی

یک ماتریس مربعی که درایه‌های پایین‌تر از قطر اصلی آن صفر هستند:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

مثال:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

تعریف ۱.۱.۱۹: ماتریس پایین مثلثی

یک ماتریس مربعی که درایه‌های بالاتر از قطر اصلی آن صفر هستند:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$

مثال:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

تعریف ۲۰.۱.۱: ماتریس متقارن

یک ماتریس مربعی که در آن $A^T = A$ باشد:

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{bmatrix}$$

مثال:

$$S = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

تعریف ۲۱.۱.۱: جمع ماتریس‌ها

اگر A, B دو ماتریس هم‌اندازه باشند، جمع آن‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

تعریف ۲۲.۱.۱: ضرب اسکالر در ماتریس

برای یک ماتریس A و اسکالر c داریم:

$$(cA)_{ij} = cA_{ij}$$

تعریف ۲۳.۱.۱: ضرب ماتریس‌ها

اگر A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $n \times p$ باشد، حاصل‌ضرب AB یک ماتریس $m \times p$ است که درایه‌های آن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

کد پایتون ۱.۱.۱: تعریف بردار و ماتریس در پایتون

در سطر سوم برنامه زیر یک بردار و در سطر پنجم یک ماتریس در محیط پایتون تعریف شده‌اند. برای تعریف این دو نیاز به کتابخانه numpy وجود دارد که در سطر اول این کتابخانه وارد و از np به عنوان اختصار آن استفاده شده است.

```
1 import numpy as np
2 vector1 = np.array([1, 2, 3, 4, 5])
3 print("vector:")
4 print(vector1)
5 matrix = np.array([[1, 2, 3],
6                    [4, 5, 6],
7                    [7, 8, 9]])
8 print("\n matrix:")
9 print(matrix)
10 vector2 = np.array([4,6,7, 6,90])
11 print(vector1[-1])
```

۵.۱.۱ نُرم ماتریس

نُرم یک ماتریس، تعمیمی از نُرم بردار است که اندازه یا بزرگی یک ماتریس را نشان می‌دهد. به‌طور کلی، نُرم ماتریس یک تابع $\|A\|$ است که مقدار عددی غیرمنفی را به هر ماتریس A نسبت می‌دهد و باید خواص زیر را داشته باشد:

نکته : خواص نُرم بردار

۱. نامنفی بودن و خاصیت صفر:

$$\|A\| \geq 0, \quad \text{و} \quad \|A\| = 0 \iff A = 0$$

۲. همگنی (همریختی مثبت):

$$\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ یا } \mathbb{C}$$

۳. نامساوی مثلثی:

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

۴. سازگاری با ضرب بردار (در نُرم‌های القایی):

$$\|A\mathbf{v}\| \leq \|A\|\|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \neq 0$$

۶.۱.۱ انواع نُرم‌های ماتریس

چندین نُرم برای ماتریس‌ها تعریف می‌شود که بسته به کاربرد مورد استفاده قرار می‌گیرند:

تعریف ۲۴.۱.۱: نُرم فروبنیوس (Frobenius Norm)

نُرم فروبنیوس، مشابه نُرم اقلیدسی برای بردارها، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$$

مثال: اگر

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

باشد، نُرم فروبنیوس برابر است با:

$$\|A\|_F = \sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2} = \sqrt{1+4+9+16} = \sqrt{30}$$

تعریف ۲۵.۱.۱: نُرم p-ام القایی (Induced Norm)

نُرم p-ام القایی، برای یک ماتریس A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\|_p = \sup_{\mathbf{v}\neq 0}\frac{\|A\mathbf{v}\|_p}{\|\mathbf{v}\|_p}$$

دو حالت خاص آن رایج‌تر هستند:

نُرم ۱ (نُرم ستون‌محور):

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$$

که بیشترین مجموع ستون‌های قدرمطلق را نشان می‌دهد.

نُرم ∞ (نُرم سطرمحور):

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

که بیشترین مجموع سطرهای قدرمطلق را نشان می‌دهد.

مثال: برای ماتریس:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

نُرم ۱ برابر است با:

$$\|A\|_1 = \max\{|-2|+|4|, |3|+|-1|\} = \max\{6,4\} = 6$$

و نُرم بی‌نهایت برابر است با:

$$\|A\|_\infty = \max\{|-2|+|3|, |4|+|-1|\} = \max\{5,5\} = 5$$

تعریف ۱.۱.۲۶: نُرم طیفی (Spectral Norm)

نُرم طیفی ماتریس A که با $\|A\|_2$ نمایش داده می‌شود، برابر با بزرگترین مقدار ویژه (مقدار تکین) ماتریس است:

$$\|A\|_2 = \sigma_{\max}(A)$$

که $\sigma_{\max}(A)$ بزرگ‌ترین مقدار تکین ماتریس A است.
مثال: اگر

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

باشد، مقادیر ویژه آن $\lambda = \pm 1$ هستند. بنابراین:

$$\|A\|_2 = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} = \max\{1, 1\} = 1$$

کد پایتون ۱.۱.۲: محاسبه نُرم‌های مختلف یک ماتریس در پایتون

```python
import numpy as np
A = np.array([[1, -2, 3],[4,  0, -1],[-2, 1, 5]])
norm_1 = np.linalg.norm(A, 1)
norm_inf = np.linalg.norm(A, np.inf)
norm_fro = np.linalg.norm(A, 'fro')
norm_2 = np.linalg.norm(A, 2)
print(f"Norm 1 (Column Norm): {norm_1}")
print(f"Infinity Norm (Row Norm): {norm_inf}")
print(f"Frobenius Norm: {norm_fro}")
print(f"Spectral Norm (Largest Singular Value): {norm_2}")
```

```
Norm 1 (Column Norm): 9.0
Infinity Norm (Row Norm): 8.0
Frobenius Norm: 7.810249675906654
Spectral Norm (Largest Singular Value): 6.40854048954407
```

کد پایتون ۳.۱.۱: محاسبه تقریبی نُرم ۱ یک ماتریس با استفاده از هزار بردار تصادفی غیر صفر

```python
import numpy as np
A = np.array([[1, -2, 3],
              [4,  0, -1],
              [-2, 1, 5]])
num_samples = 1000
approx_norm_1 = 0
for _ in range(num_samples):
    v = np.random.randn(A.shape[1])
    v /= np.linalg.norm(v, 1)
    norm_ratio = np.linalg.norm(A @ v, 1)
    approx_norm_1 = max(approx_norm_1, norm_ratio)

print(f"Approximate Norm 1: {approx_norm_1}")
```

```
Approximate Norm 1: 8.396903386801652
```

تمرین ۱.۱.۱

- برای ماتریس‌های صفر و ماتریس‌های همانی انواع نُرم‌های ماتریسی را بدست آورید. چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟
- ماتریس زیر را در نظر بگیرید هر یک از نُرم‌های ماتریس روی آن را محاسبه کنید.

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

- ماتریس A و بردار $\mathbf{x}$ به صورت زیر داده شده‌اند:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

حاصل $\|A\mathbf{x}\|_2$ و $\|A\|_2 \cdot \|\mathbf{x}\|_2$ را محاسبه کنید و نشان دهید که نابرابری زیر برقرار است:

$$\|A\mathbf{x}\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|\mathbf{x}\|_2$$

تمرین ۲.۱.۱

برنامه‌ای به زبان پایتون بنویسید که در آن یک ماتریس به عنوان ورودی گرفته شود و تمامی نُرم‌های معرفی شده در قبل را به عنوان خروجی نمایش دهد.

۲.۱ دترمینان

تعریف ۱.۲.۱: تعریف دترمینان

دترمینان یک ماتریس مربعی را می‌توان به‌صورت بازگشتی با استفاده از **بسط روی یک سطر یا ستون** محاسبه کرد. دترمینان ماتریس $A = [a_{ij}]$ مرتبه n به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

که در آن M_{ij} دترمینان ماتریس حاصل از حذف سطر i و ستون j از A است.

نکته :

- معمولاً انتخاب سطر یا ستونی که بیشترین تعداد صفر دارد محاسبات را ساده‌تر می‌کند.

مثال ۱.۲.۱: دترمینان ماتریس 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

دترمینان این ماتریس به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\det(A) = ad - bc$$

مثال عددی:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (3)(7) - (5)(2) = 21 - 10 = 11$$

مثال ۲.۲.۱: دترمینان ماتریس 3×3

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

بسط روی سطر اول:

$$\det(B) = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1(5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7)$$

$$= 1(45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35)$$

$$= 1(-3) - 2(-6) + 3(-3) = -3 + 12 - 9 = 0$$

پس این ماتریس دترمینان صفر دارد و وابسته خطی است.

مثال ۳.۲.۱: دترمینان ماتریس 4×4

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

بسط روی سطر اول:

$$\det(C) = 2\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

با محاسبه‌ی دترمینان هر کدام از این ماتریس‌های 3×3، مقدار نهایی به دست می‌آید:

$$\det(C) = 2(4) - 1(-3) + 3(5) - 4(2) = 8 + 3 + 15 - 8 = 18$$

۱.۲.۱ ماتریس نامنفرد

تعریف ۲.۲.۱: تعریف ماتریس نامنفرد

یک ماتریس مربعی $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را **نامنفرد** یا **معکوس‌پذیر** گویند، اگر و تنها اگر دترمینان آن مخالف صفر باشد، یعنی:

$$\det(A) \neq 0$$

در این حالت، ماتریس A دارای یک ماتریس معکوس A^{-1} است که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

که در آن I_n ماتریس همانی مرتبه n است.

مثال ۴.۲.۱: ماتریس نامنفرد 2×2

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ابتدا دترمینان آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\det(A) = (2 \times 4) - (3 \times 1) = 8 - 3 = 5$$

چون $\det(A) \neq 0$، این ماتریس نامنفرد است و معکوس‌پذیر می‌باشد.

مثال ۱.۲.۵: ماتریس منفرد 2×2

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

دترمینان این ماتریس برابر است با:

$$\det(B) = (2 \times 2) - (4 \times 1) = 4 - 4 = 0$$

چون $\det(B) = 0$، این ماتریس منفرد است و معکوس ندارد.

مثال ۱.۲.۶: ماتریس نامنفرد 3×3

در نظر بگیرید:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

دترمینان این ماتریس را به کمک بسط محاسبه می‌کنیم:

$$\det(C) = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (1 \times 0 - 4 \times 6) - 2 \times (0 \times 0 - 4 \times 5) + 3 \times (0 \times 6 - 1 \times 5)$$

$$= 1 \times (-24) - 2 \times (-20) + 3 \times (-5) = -24 + 40 - 15 = 1$$

چون $\det(C) \neq 0$، ماتریس C نامنفرد و معکوس‌پذیر است.

نکته : خواص دترمینان

ترمینان یک ماتریس دارای ویژگی‌های مهمی است که در ادامه به برخی از این خواص اشاره می‌شود:

۱. **دترمینان ماتریس همانی:**
$$\det(I_n) = 1$$
که در آن I_n ماتریس همانی مرتبه n است.

۲. **دترمینان ماتریس ناصفر فقط برای ماتریس نامنفرد:**
$$\det(A) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A \text{ معکوس‌پذیر است.}$$

۳. **دترمینان ماتریس منفرد برابر صفر است:**
$$\det(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad A \text{ ماتریس منفرد است و معکوس ندارد.}$$

۴. **خاصیت ضرب دترمینان:** برای دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه A و B داریم:
$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

۵. **دترمینان ماتریس معکوس:** اگر A یک ماتریس نامنفرد باشد، آنگاه:
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

۶. **دترمینان ماتریس بالامثلثی یا پایین‌مثلثی:** اگر A یک ماتریس مثلثی (بالامثلثی یا پایین‌مثلثی) باشد، دترمینان آن برابر است با حاصل‌ضرب درایه‌های قطری:
$$\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

۷. **اثر ضرب یک سطر یا ستون در یک عدد ثابت:** اگر تمام درایه‌های یک سطر یا ستون ماتریس A در عدد ثابت c ضرب شوند، دترمینان نیز در همان مقدار ضرب می‌شود:
$$\det(B) = c\det(A).$$

۸. **جابجایی دو سطر یا دو ستون:** اگر در یک ماتریس دو سطر یا دو ستون را با هم جابجا کنیم، دترمینان علامت عوض می‌کند:
$$\det(A') = -\det(A).$$

۹. **سطرها یا ستون‌های مساوی یا مضرب یکدیگر:** اگر دو سطر یا دو ستون یک ماتریس مساوی باشند یا مضرب یکدیگر باشند، آنگاه:
$$\det(A) = 0.$$

۱۰. **دترمینان ترانهاده‌ی ماتریس:** برای هر ماتریس مربعی A داریم:
$$\det(A^T) = \det(A).$$

کد پایتون ۱.۲.۱: محاسبه دترمینان یک ماتریس

```
import numpy as np
# Define a 5x5 matrix
A = np.array([
    [2, 1, 3, 4, 5],
    [1, 0, 2, 1, 3],
    [3, 2, 1, 0, 4],
    [4, 1, 0, 2, 1],
    [5, 3, 4, 1, 2]
])
# Compute the determinant
det_A = np.linalg.det(A)
# Display the determinant (rounded to 4 decimal places)
print("\nDeterminant of matrix A:")
print(round(det_A, 4))
```

```
Determinant of matrix A:
-286.0
```

۳.۱ وارون یک ماتریس

تعریف ۱.۳.۱: تعریف وارون یک ماتریس

یک ماتریس مربعی A از ابعاد $n\times n$ را در نظر بگیرید. اگر ماتریس A وارون‌پذیر (معکوس‌پذیر) باشد، ماتریس وارون آن، A^{-1}، به گونه‌ای تعریف می‌شود که:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

که در آن I_n ماتریس همانی $n \times n$ است.

نکته : نحوه محاسبه وارون ماتریس‌های ۲ در ۲

محاسبه‌ی وارون ماتریس ۲×۲ با استفاده از ماتریس الحاقی برای ماتریس A به شکل زیر:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

مراحل محاسبه‌ی وارون به صورت زیر است:
۱. دترمینان ماتریس ($\det(A)$) را محاسبه کنید:

$$\det(A) = ad - bc$$

اگر $\det(A) \neq 0$ باشد، ماتریس وارون‌پذیر است.
۲. ماتریس الحاقی ($\text{adj}(A)$) را محاسبه کنید:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

۳. ماتریس وارون (A^{-1}) را به دست آورید:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

نکته : نحوه محاسبه وارون ماتریس‌های ۳ در ۳

محاسبه‌ی وارون ماتریس ۳×۳ با استفاده از ماتریس الحاقی برای ماتریس A به شکل زیر:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

مراحل محاسبه‌ی وارون به صورت زیر است:
۱. دترمینان ماتریس ($\det(A)$) را محاسبه کنید:

$$\det(A) = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

اگر $\det(A) \neq 0$ باشد، ماتریس وارون‌پذیر است.
۲. ماتریس کوفاکتور (C) را محاسبه کنید:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

که در آن:

$$\begin{aligned} C_{11} &= +(ei - fh), & C_{12} &= -(di - fg), & C_{13} &= +(dh - eg), \\ C_{21} &= -(bi - ch), & C_{22} &= +(ai - cg), & C_{23} &= -(ah - bg), \\ C_{31} &= +(bf - ce), & C_{32} &= -(af - cd), & C_{33} &= +(ae - bd). \end{aligned}$$

۳. ماتریس الحاقی ($\text{adj}(A)$) را محاسبه کنید. ماتریس الحاقی، ترانهاده‌ی ماتریس کوفاکتور است:

$$\text{adj}(A) = C^T = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}$$

۴. ماتریس وارون (A^{-1}) را به دست آورید:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$$

مثال ۱.۳.۱: مثال برای ماتریس ۲×۲

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

۱. دترمینان:

$$\det(A) = (2)(4) - (3)(1) = 8 - 3 = 5$$

۲. ماتریس الحاقی:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

۳. ماتریس وارون:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

مثال ۲.۳.۱: مثال برای وارون ماتریس ۳×۳

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

۱. محاسبه‌ی دترمینان ماتریس ($\det(A)$) دترمینان ماتریس A به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\det(A) = 1 \cdot (1 \cdot 0 - 4 \cdot 6) - 2 \cdot (0 \cdot 0 - 4 \cdot 5) + 3 \cdot (0 \cdot 6 - 1 \cdot 5)$$

$$\det(A) = 1 \cdot (0 - 24) - 2 \cdot (0 - 20) + 3 \cdot (0 - 5)$$

$$\det(A) = -24 + 40 - 15 = 1$$

چون $\det(A) = 1 \neq$، ماتریس A وارون‌پذیر است.

۲. محاسبه‌ی ماتریس کوفاکتور (C) ماتریس کوفاکتور C به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

که در آن هر کوفاکتور C_{ij} به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij})$$

که M_{ij} ماتریس کوچک‌شده‌ی حذف سطر i و ستون j است.
محاسبه‌ی کوفاکتورها:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = +(0 - 24) = -24,$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = -(0 - 20) = 20,$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = +(0 - 5) = -5,$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = -(0 - 18) = 18,$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = +(0 - 15) = -15,$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = -(6 - 10) = 4,$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = +(8 - 3) = 5,$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = -(4 - 0) = -4,$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = +(1 - 0) = 1.$$

بنابراین، ماتریس کوفاکتور C به صورت زیر است:

$$C = \begin{pmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

۳. محاسبه‌ی ماتریس الحاقی ($\mathsf{adj}(A)$) ماتریس الحاقی، ترانهاده‌ی ماتریس کوفاکتور است:

$$\mathsf{adj}(A) = C^T = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

۴. محاسبه‌ی ماتریس وارون (A^{-1}) ماتریس وارون با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathsf{adj}(A)$$

از آنجایی که $\det(A) =$ ، داریم:

$$A^{-1} = \mathsf{adj}(A) = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

نتیجه‌گیری ماتریس وارون A^{-1} به صورت زیر است:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

کد پایتون ۱.۳.۰۱: محاسبه وارون یک ماتریس

```python
import numpy as np

# Function to calculate the inverse of a matrix
def matrix_inverse(matrix):
    """
    Calculate the inverse of a square matrix.

    Parameters:
    matrix (numpy.ndarray): A square matrix (n x n).

    Returns:
    numpy.ndarray: The inverse of the input matrix.
    """
    # Check if the matrix is square
    if matrix.shape[0] != matrix.shape[1]:
        raise ValueError("The input matrix must be square (n x n).")

    # Calculate the determinant of the matrix
    det = np.linalg.det(matrix)
    if det == 0:
        raise ValueError("The matrix is singular (determinant is 0). Inver

    # Calculate the inverse using numpy's built-in function
    inverse = np.linalg.inv(matrix)
    return inverse

# Example usage
if __name__ == "__main__":
    # Define a 3x3 matrix
    A = np.array([[1, 2, 3],
                  [0, 1, 4],
                  [5, 6, 0]])

    print("Original Matrix A:")
    print(A)

    try:
        # Calculate the inverse of matrix A
        A_inv = matrix_inverse(A)
        print("\nInverse of Matrix A:")
        print(A_inv)

        # Verify the result by multiplying A with its inverse (should yiel
        identity_matrix = np.dot(A, A_inv)
        print("\nVerification (A * A_inv):")
        print(identity_matrix)
    except ValueError as e:
        print(e)
```

کد پایتون ۲.۳.۱: محاسبه وارون یک ماتریس مختلط

```python
import numpy as np

# Define a complex matrix
A = np.array([[1 + 1j, 2],
              [3, 4 - 1j]])

# Calculate the inverse
A_inv = np.linalg.inv(A)

print("Original Matrix A:")
print(A)

print("\nInverse of Matrix A:")
print(A_inv)
```

۴.۱ چند ماتریس خاص

تعریف ۱.۴.۱:

۱. ماتریس مزدوج
(Conjugate Matrix)
اگر $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس مختلط باشد، ماتریس مزدوج آن (که با $\overline{A}$ نشان داده می‌شود) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\overline{A} = [\overline{a_{ij}}]$$

که در آن $\overline{a_{ij}}$ مزدوج مختلط a_{ij} است. به عبارت دیگر، قسمت موهومی هر درایه قرینه می‌شود.
مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1+2i & 3-i \\ 4 & 5i \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1-2i & 3+i \\ 4 & -5i \end{pmatrix}$$

تعریف ۲.۴.۱:

۲. ماتریس ترانهاده
(Transpose Matrix)
اگر $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $m \times n$ باشد، ماتریس ترانهاده آن (که با A^T نشان داده می‌شود) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^T = [a_{ji}]$$

یعنی سطرها و ستون‌های ماتریس جایگزین می‌شوند.
مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

تعریف ۱.۴.۳:

۳. ماتریس متقارن
(Symmetric Matrix)

یک ماتریس A متقارن است اگر:

$$A = A^T$$

یعنی ماتریس با ترانهاده‌ی خود برابر باشد. ماتریس‌های متقارن فقط می‌توانند مربعی باشند.
مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

تعریف ۱.۴.۴:

۴. ماتریس شبه متقارن
(Skew-Symmetric Matrix)

یک ماتریس A شبه متقارن است اگر:

$$A = -A^T$$

یعنی ماتریس با قرینه‌ی ترانهاده‌ی خود برابر باشد. درایه‌های قطر اصلی ماتریس‌های شبه متقارن همگی صفر هستند.
مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

تعریف ۱.۴.۵:

۵. ماتریس هرمیتی
(Hermitian Matrix)

یک ماتریس مختلط A هرمیتی است اگر:

$$A = A^H = A^*$$

که در آن A^H ماتریس مزدوج ترانهاده
(Conjugate Transpose)
است. به عبارت دیگر:

$$A^* = A^H = \overline{A^T}$$

یعنی ماتریس با مزدوج ترانهاده‌ی خود برابر باشد. ماتریس‌های هرمیتی فقط می‌توانند مربعی باشند.
مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 3 \end{pmatrix}$$

تعریف ۶.۴.۱:

۶. ماتریس شبه هرمیتی
(Skew-Hermitian Matrix)

یک ماتریس مختلط A شبه هرمیتی است اگر:

$$A = -A^H$$

که در آن A^H ماتریس مزدوج ترانهاده است. به عبارت دیگر:

$$A^H = \overline{A^T}$$

یعنی ماتریس با قرینه‌ی مزدوج ترانهاده‌ی خود برابر باشد. درایه‌های قطر اصلی ماتریس‌های شبه هرمیتی همگی موهومی محض هستند (یعنی قسمت حقیقی آن‌ها صفر است).
مثال:

$$A = \begin{pmatrix} i & 2+i \\ -2+i & 3i \end{pmatrix}$$

نکته : جمع‌بندی

- – ماتریس مزدوج: مزدوج مختلط هر درایه محاسبه می‌شود.
- – ماتریس ترانهاده: سطرها و ستون‌ها جایگزین می‌شوند.
- – ماتریس متقارن: $A = A^T$.
- – ماتریس شبه متقارن: $A = -A^T$.
- – ماتریس هرمیتی: $A = A^H$ (ماتریس با مزدوج ترانهاده‌ی خود برابر است).
- – ماتریس شبه هرمیتی: $A = -A^H$ (ماتریس با قرینه‌ی مزدوج ترانهاده‌ی خود برابر است).

نکته : چند رابطه مهم

۱. اگر A یک ماتریس حقیقی باشد آنگاه: $A^T = A^*$.

۲. به ازای هر ماتریس A داریم: $(A^*)^* = A, (A^T)^T = A$

۳. اگر $A+B$ و AB قابل تعریف باشند آنگاه:

$$(A+B)^T = A^T + B^T, \qquad (A+B)^* = A^* + B^*,$$
$$(AB)^T = B^T A^T, \qquad (AB)^* = B^* A^*.$$

۳. اگر A یک ماتریس مربعی باشد آنگاه: $|A| = |A^T|, \quad |A^*| = |\bar{A}|$.

۴. اگر A یک ماتریس نامنفرد(وارون‌پذیر) باشد آنگاه: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, \quad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

۵. به ازای هر عدد مختلط c داریم: $(cA)^* = \bar{c}A^*$.

۶. اگر A یک ماتریس هرمیتی باشد آنگاه دترمینان آن یک عدد حقیقی است و

$$|A| = |A^*| = |\bar{A}|$$

۷. اگر A یک ماتریس مربعی دلخواه باشد آنگاه می‌توان ماتریس‌های H و G را به صورت زیر تعریف کرد

$$G = \frac{1}{2}(A + A^*), \qquad H = \frac{1}{2i}(A - A^*)$$

هر یک از ماتریسهای تعریف شده در قبل هرمیتی هستند و نیز داریم:

$$A = G + iH$$

۸. اگر A یک ماتریس مربعی دلخواه باشد آنگاه می‌توان ماتریس‌های H و G را به صورت زیر تعریف کرد

$$G = \frac{1}{2}(A + A^*), \qquad H = \frac{1}{2}(A - A^*)$$

که H یک ماتریس شبه هرمیتی و G یک از ماتریس هرمیتی است و نیز داریم:

$$A = G + H$$

مثال ۱.۴.۱:

۱. ماتریس‌های A و B را در نظر بگیرید. نشان دهید $A+A^T$ همواره یک ماتریس متقارن و ماتریس $A-A^T$ همواره یک ماتریس شبه متقارن است.

۲. فرض کنید A یک ماتریس دلخواه باشد، هر یک از ماتریس‌های AA^T و A^TA متقارن هستند.

۳. اگر A یک ماتریس نامنفرد و متقارن باشد آنگاه A^{-1} نیز متقارن است (بدیهی است که نامنفرد نیز هست).

$$AA^{-1} = I \Longrightarrow (A^{-1})^T A^T = I^T \Longrightarrow (A^{-1})^T A = I$$

با ضرب طرفین تساوی آخر در A^{-1} نتیجه حاصل می‌شود.

*

تعریف ۷.۴.۱: ماتریس یکانی (Unitary Matrix)

یک ماتریس مربعی U با ابعاد $n \times n$ را یکانی (Unitary) می‌نامند اگر معکوس آن برابر با مزدوج هرمیتی آن باشد. به عبارت دیگر، ماتریس U یکانی است اگر:

$$U^{-1} = U^*$$

که در آن U^* نشان‌دهنده‌ی مزدوج هرمیتی ماتریس U است (یعنی ترانهاده‌ی ماتریس U که درایه‌های آن مزدوج مختلط گرفته شده‌اند).
شرط یکانی بودن را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$U^*U = UU^* = I$$

که در آن I ماتریس یکانی با ابعاد $n \times n$ است.

نکته : برخی از ویژگی‌های ماتریس یکانی

- **حفظ ضرب داخلی:** اگر U یک ماتریس یکانی باشد، برای هر دو بردار x و y، ضرب داخلی $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ حفظ می‌شود.
- **حفظ نرم:** نرم یک بردار تحت تبدیل یکانی تغییر نمی‌کند، یعنی $\|Ux\| = \|x\|$.
- **مقادیر ویژه:** مقادیر ویژه یک ماتریس یکانی روی دایره‌ی واحد در صفحه‌ی مختلط قرار دارند، یعنی قدر مطلق آنها برابر با ۱ است.

تمرین ۱.۴.۱

درستی هر یک از ویژگی‌های فوق را با استفاده از مثال بررسی کنید.

مثال ۱.۴.۲: ماتریس یکانی

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

برای بررسی یکانی بودن این ماتریس، ابتدا مزدوج هرمیتی آن را محاسبه می‌کنیم:

$$U^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

سپس حاصل‌ضرب U^*U را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} U^*U &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-i) \cdot i & 1 \cdot i + (-i) \cdot 1 \\ -i \cdot 1 + 1 \cdot i & -i \cdot i + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+1 & i-i \\ -i+i & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \end{aligned}$$

چون $U^*U = I$، ماتریس U یکانی است.

تمرین ۱.۴.۲

نشان دهید اگر ماتریس‌های A و B یکانی باشند آنگاه AB نیز یکانی خواهد بود.

تعریف ۱.۴.۸: ماتریس نرمال

ماتریس A را نرمال می‌گوییم اگر با مزدوج ترانهاده‌ی خود جا به جا (در ضرب) شود. به عبارت دیگر، ماتریس A نرمال است اگر شرط زیر برقرار باشد:

$$AA^H = A^H A$$

که در آن A^H مزدوج ترانهاده‌ی ماتریس A است (یعنی $A^H = \overline{A^T}$).

نکته :

۱. هر ماتریس هرمیتی ($A = A^H$) نرمال است.

۲. هر ماتریس یکانی ($A^H = A^{-1}$) نرمال است.

مثال ۱.۴.۳:

۱. ماتریس هرمیتی:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 3 \end{pmatrix}$$

این ماتریس هرمیتی است و بنابراین نرمال است.

۲. ماتریس یکانی:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

این ماتریس یکانی است و بنابراین نرمال است.

۳. ماتریس نرمال غیرهرمیتی و غیریکانی:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

این ماتریس نرمال است، زیرا:

$$AA^H = A^H A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

مثال ۱.۴.۴:

برای بررسی نرمال بودن یک ماتریس A، باید AA^H و $A^H A$ را محاسبه کرده و بررسی کنیم که آیا با هم برابر هستند یا خیر.
مثال: ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مزدوج ترانهاده‌ی آن (A^H) به صورت زیر است:

$$A^H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

حال AA^H و $A^H A$ را محاسبه می‌کنیم:

$$AA^H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^H A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

چون $AA^H \neq A^H A$، این ماتریس نرمال نیست.

تعریف ۹.۴.۱:

ماتریس A را متعامد (Orthogonal) می‌گوییم اگر ترانهاده‌ی آن معادل معکوس آن باشد. به عبارت دیگر، ماتریس A متعامد است اگر شرط زیر برقرار باشد:

$$A^T = A^{-1}$$

یا به طور معادل:

$$A^T A = AA^T = I$$

که در آن I ماتریس همانی است.

نکته : ویژگی‌های مهم ماتریس‌های متعامد

۱. **حفظ ضرب داخلی:** ماتریس‌های متعامد، ضرب داخلی بردارها را حفظ می‌کنند. یعنی برای هر دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$، داریم:

$$\langle A\mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

۲. **حفظ ضرب داخلی:** ماتریس‌های متعامد، طول (نرم) بردارها را حفظ می‌کنند. یعنی برای هر بردار $\mathbf{u}$، داریم:

$$\|A\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|$$

۳. **دترمینان ماتریس متعامد:** دترمینان یک ماتریس متعامد یا 1 است یا -1:

$$\det(A) = \pm 1$$

۴. **سطرها و ستون‌های متعامد:** سطرها و ستون‌های یک ماتریس متعامد، بردارهای متعامد (عمود بر هم) و یکه (با طول ۱) هستند.

مثال ۵.۴.۱: مثال‌هایی از ماتریس‌های متعامد

۱. **ماتریس چرخش:** ماتریس چرخش در صفحه‌ی دو بعدی به زاویه‌ی θ به صورت زیر است:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

این ماتریس متعامد است، زیرا:

$$A^T A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

۲. **ماتریس بازتاب:** ماتریس بازتاب نسبت به محور x به صورت زیر است:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

این ماتریس متعامد است، زیرا:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

بررسی متعامد بودن یک ماتریس
برای بررسی متعامد بودن یک ماتریس A، باید $A^T A$ و AA^T را محاسبه کرده و بررسی کنیم که آیا با ماتریس همانی I برابر هستند یا خیر.

تمرین ۳.۴.۱

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

نشان دهید این ماتریس متعامد است.

تمرین ۴.۴.۱

برنامه‌ای به زبان پایتون بنویسید که در آن یک ماتریس به عنوان ورودی گرفته شود و متعامد بودن یا نبودن آن، نرمال بودن یا نبودن آن، یکانی بودن یا نبودن آن و هرمیتی بودن یا نبودن آن را به عنوان خروجی نمایش دهد.

فصل ۲

دستگاه معادلات خطی

تعریف ۱.۰.۲: فرم کلی دستگاه معادلات خطی

دستگاه‌های معادلات خطی مجموعه‌ای از معادلات خطی هستند که به دنبال یافتن مقادیر متغیرهایی هستیم که هم‌زمان همه‌ی معادلات را برآورده کنند. فرم کلی یک دستگاه معادلات خطی و نمایش ماتریسی آن به شرح زیر است: یک دستگاه معادلات خطی با m معادله و n متغیر به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

که در آن:

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ متغیرهای مجهول هستند.
- a_{ij} ضرایب معلوم هستند ($i = 1, 2, \ldots, m$ و $j = 1, 2, \ldots, n$).
- $b_1, b_2, \ldots, b_m$ مقادیر معلوم (سمت راست معادلات) هستند.

تعریف ۲.۰.۲: نمایش ماتریسی دستگاه معادلات خطی

دستگاه معادلات خطی فوق را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نمایش داد:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

که در آن:

- A ماتریس ضرایب است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  این ماتریس ابعاد $m \times n$ دارد.

- $\mathbf{x}$ بردار متغیرهای مجهول است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

  این بردار ابعاد $n \times 1$ دارد.

- $\mathbf{b}$ بردار مقادیر معلوم (سمت راست معادلات) است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

  این بردار ابعاد $m \times 1$ دارد.

مثال ۱.۰.۲:

دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 4x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

این دستگاه را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نمایش داد:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

که در آن:

- ماتریس ضرایب A به صورت زیر است:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

- بردار متغیرهای مجهول $\mathbf{x}$ به صورت زیر است:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- بردار مقادیر معلوم $\mathbf{b}$ به صورت زیر است:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

تعریف ۳.۰.۲: فرم ماتریس افزوده

فرم ماتریس افزوده برای دستگاه معادلات خطی $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$، ماتریس افزوده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

مثال ۲.۰.۲:

برای دستگاه:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$$

ماتریس افزوده:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

تعریف ۲.۰.۴: انواع دستگاه‌های معادلات خطی

۱. دستگاه مربعی
- تعریف: تعداد معادلات m برابر با تعداد متغیرها n است ($m = n$).
- ویژگی:
- ماتریس ضرایب A مربعی است.
- اگر $\det(A) \neq 0$، جواب منحصربه‌فرد دارد.
- مثال:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$$

۲. دستگاه فرومعین
- تعریف: تعداد معادلات m کمتر از متغیرها n است ($m < n$).
- ویژگی:
- معمولاً بی‌نهایت جواب دارد.
- ماتریس ضرایب پهن است.
- مثال:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

۳. دستگاه فرامعین
- تعریف: تعداد معادلات m بیشتر از متغیرها n است ($m > n$).
- ویژگی:
- معمولاً جواب دقیق ندارد (مگر در موارد خاص).
- ماتریس ضرایب بلند است.
- مثال:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 3 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$$

۱.۲ حل دستگاه معادلات خطی

۱.۱.۲ روش ماتریس معکوس

حل دستگاه معادلات خطی با استفاده از ماتریس وارون

شرایط استفاده از این روش:
- دستگاه باید مربعی باشد (تعداد معادلات = تعداد متغیرها).
- ماتریس ضرایب A باید معکوس‌پذیر باشد ($\det(A) \neq 0$).

مراحل حل:

۱. نمایش ماتریسی دستگاه:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- A: ماتریس ضرایب ($n \times n$)
- $\mathbf{x}$: بردار مجهولات ($n \times 1$)

– **b**: بردار مقادیر سمت راست $(n \times 1)$

۲. محاسبه ماتریس وارون A^{-1}:
– با استفاده از روش‌هایی مانند ماتریس الحاقی یا عملیات سطری.
۳. ضرب طرفین در A^{-1}:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

مثال ۱.۱.۲:

دستگاه معادلات:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$$

۱. نمایش ماتریسی:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

۲. محاسبه A^{-1}: – دترمینان A:

$$\det(A) = (2)(-1) - (3)(4) = -2 - 12 = -14 \ (\neq 0)$$

– ماتریس الحاقی:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

– ماتریس وارون:

$$A^{-1} = \frac{1}{-14} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

۳. حل دستگاه:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{14} + \frac{3}{14} \\ \frac{10}{7} - \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{14} \\ \frac{9}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{9}{7} \end{pmatrix}$$

جواب نهایی:

$$x = \frac{4}{7}, \ y = \frac{9}{7}$$

تمرین ۱.۱.۲

سوال۱:
دستگاه زیر را با روش ماتریس وارون حل کنید:

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$$

سوال ۲:
آیا دستگاه زیر با این روش قابل حل است؟ چرا؟

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$$

سوال ۳:
ماتریس وارون A را برای دستگاه زیر محاسبه و جواب را بیابید:

$$\begin{cases} 1x + 0y + 1z = 2 \\ 0x + 2y + 0z = 4 \\ 1x + 1y + 0z = 3 \end{cases}$$

کد پایتون ۱.۱.۲: حل دستگاه معادلات خطی به روش ماتریس معکوس

```python
import numpy as np
A = np.array([[2, 3], [4, -1]])
b = np.array([5, 1])
try:
    A_inv = np.linalg.inv(A)
    x = np.dot(A_inv, b)
    print("Solution using inverse method:", x)
except np.linalg.LinAlgError:
    print("Matrix is singular!")
```

۲.۱.۲ روش حذفی گاوس

حل دستگاه معادلات خطی با روش حذف گاوس
هدف: تبدیل ماتریس افزوده به فرم سطری پلکانی یا کاهش‌یافته برای یافتن جواب.
مراحل روش حذف گاوس:

- ۱. تشکیل ماتریس افزوده $[A \mid \mathbf{b}]$.
- ۲. استفاده از عملیات سطری مقدماتی:
  - جابجایی دو سطر.
  - ضرب یک سطر در عددی ناصفر.
  - جمع مضربی از یک سطر با سطر دیگر.

- ۳. تبدیل به فرم سطری پلکانی.

- ۴. حل از پایین به بالا.

مثال ۲.۱.۲:

دستگاه مربعی با جواب منحصربه‌فرد دستگاه:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$$

حل: ۱. ماتریس افزوده:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{array}\right)$$

۲. عملیات سطری: – $R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -9 \end{array}\right)$$

۳. حل:
– از سطر دوم: $-2y = -9 \Rightarrow y = \frac{9}{2}$.
– از سطر اول: $x + 2(\frac{9}{2}) = 5 \Rightarrow x = -4$.

جواب: $x = -4$، $y = \frac{9}{2}$.

مثال ۳.۱.۲:

دستگاه فرومعین با بی‌نهایت جواب
دستگاه:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

حل:
۱. ماتریس افزوده:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

۲. عملیات سطری: – $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{array}\right)$$

۳. حل:
– از سطر دوم: $-y - 3z = -5 \Rightarrow y = 5 - 3z$.
– از سطر اول: $x + (5 - 3z) + z = 3 \Rightarrow x = -2 + 2z$.

جواب عمومی:

$$x = -2 + 2z, \; y = 5 - 3z \quad (z \in \mathbb{R}).$$

مثال ۴.۱.۲:

دستگاه فرامعین بدون جواب
دستگاه:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 5 \\ 3x + 3y = 4 \end{cases}$$

حل:
۱. ماتریس افزوده:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

۲. عملیات سطری: – $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

– سطر دوم نشان‌دهنده‌ی $0 = 1$ است.

نتیجه: دستگاه ناسازگار است (جواب ندارد).

مثال ۵.۱.۲:

دستگاه معادلات خطی به صورت:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = 5 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

حل با روش حذف گاوس:
مرحله ۱: تشکیل ماتریس افزوده
ماتریس افزوده برای این دستگاه به صورت زیر است:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

مرحله ۲: حذف متغیر x_1 از سطر سوم
برای حذف x_1 از سطر سوم، از سطر اول استفاده می‌کنیم. عملیات سطری:

$$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1$$

ماتریس جدید:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & -1 & -7 \end{array}\right]$$

مرحله ۳: حذف متغیر x_2 از سطر سوم
برای حذف x_2 از سطر سوم، از سطر دوم استفاده می‌کنیم. عملیات سطری:

$$R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2$$

ماتریس جدید:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

مرحله ۴: تحلیل دستگاه
دستگاه به فرم سطری پلکانی تبدیل شده است. مشاهده می‌کنیم که:
- متغیرهای اصلی (پایه‌ای): x_1، x_2، x_4 (ستون‌های دارای اولین عدد غیرصفر در هر سطر).
- متغیرهای آزاد: x_3 و x_5 (ستون‌های بدون عدد غیرصفر اصلی).

مرحله ۵: حل دستگاه به صورت پارامتری
از سطر سوم شروع می‌کنیم و به صورت پس‌گشت حل می‌کنیم:

۱. سطر سوم:

$$x_4 + x_5 = 1 \implies x_4 = 1 - x_5$$

۲. سطر دوم:

$$x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 4$$

با جایگذاری x_4:

$$x_2 + x_3 + 2(1 - x_5) + x_5 = 4 \implies x_2 + x_3 + 2 - x_5 = 4 \implies x_2 + x_3 - x_5 = 2$$

بنابراین:

$$x_2 = 2 - x_3 + x_5$$

۳. سطر اول:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = 5$$

با جایگذاری x_2 و x_4:

$$x_1 + 3(2 - x_3 + x_5) + x_3 + 5(1 - x_5) + x_5 = 5$$

ساده‌سازی:

$$x_1 + 6 - 3x_3 + 3x_5 + x_3 + 5 - 5x_5 + x_5 = 5 \implies x_1 - 2x_3 - x_5 + 11 = 5$$

نتیجه:

$$x_1 = -6 + 2x_3 + x_5$$

جواب عمومی دستگاه: با توجه به متغیرهای آزاد x_3 و x_5، جواب به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x_1 = -6 + 2s + t \\ x_2 = 2 - s + t \\ x_3 = s \quad (\text{متغیر آزاد}) \\ x_4 = 1 - t \\ x_5 = t \quad (\text{متغیر آزاد}) \end{cases}$$

که در آن $s, t \in \mathbb{R}$ پارامترهای دلخواه هستند.

تمرین ۲.۱.۲

تمرین ۱: حل کنید:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

تمرین ۲: حل کنید (در صورت وجود جواب):

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 4y - 2z = 2 \\ 3x + 6y - 3z = 3 \end{cases}$$

تمرین ۳: حل کنید:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2y + 5z = -4 \\ 2x + 5y - z = 27 \end{cases}$$

تمرین ۴: آیا دستگاه زیر جواب دارد؟

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + 2z = 1 \end{cases}$$

تمرین ۳.۱.۲

دستگاه معادلات خطی زیر را به روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 5 \\ -3x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 2x_4 = 7 \\ -x_1 + x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 7 \end{cases}$$

کد پایتون ۲.۱.۲: حل دستگاه معادلات خطی به روش حذفی گاوس

```
import numpy as np
A = np.array([[2, 4, -2, -2], [1, 2, 4, -3], [-3, -3, 8, -2], [-1, 1, 6, -
b = np.array([-4, 5, 7, 7])
x = np.linalg.solve(A, b)
print("Solution using numpy.linalg.solve:", x)
```

تمرین ۴.۱.۲

یک دستگاه معادلات خطی شامل چهار معادله و چهار مجهول بسازید که بردار جواب آن به صورت

$$x = [1, -1, 0, 2]$$

باشد. سپس این دستگاه را با استفاده از برنامه‌های پایتون داده شده در قبل حل کنید.

۲.۲ روش حذفی گاوس جردن

روش حذف گاوس-جردن یک الگوریتم برای حل دستگاه‌های معادلات خطی است که ماتریس را به فرم کاهش‌یافته سطری پلکانی تبدیل می‌کند. این روش، توسعه‌یافته‌ی روش حذف گاوس است و ماتریس را تا حد امکان ساده می‌کند.

مراحل روش حذف گاوس-جردن:

۱. تشکیل ماتریس افزوده $[A \mid \mathbf{b}]$.

۲. تبدیل به فرم سطری پلکانی (REF) با استفاده از عملیات سطری مقدماتی:

   ۱. - جابجایی دو سطر.
   ۲. - ضرب یک سطر در عددی ناصفر.
   ۳. - جمع مضربی از یک سطر با سطر دیگر.

۳. تبدیل به فرم کاهش‌یافته :(RREF)

   ۱. ایجاد ۱های اصلی (پایه‌ای) در هر سطر.
   ۲. صفر کردن تمام درایه‌های بالا و پایین هر ۱ اصلی.

۴. استخراج جواب از ماتریس کاهش‌یافته.

مثال ۲.۲.۱:

دستگاه مربعی با جواب منحصربه‌فرد دستگاه:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$$

حل:
۱. ماتریس افزوده:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{array}\right]$$

۲. عملیات سطری: – $R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -9 \end{array}\right]$$

– $R_2 \leftarrow -\frac{1}{2}R_2$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4.5 \end{array}\right]$$

– $R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4.5 \end{array}\right]$$

۳. جواب:

$$x = -4, \quad y = 4.5$$

مثال ۲.۲.۲:

دستگاه با بی‌نهایت جواب دستگاه:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$$

حل: ۱. ماتریس افزوده:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

۲. عملیات سطری: - $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{array}\right]$$

- $R_2 \leftarrow -R_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

- $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

۳. جواب عمومی:

$$x=-2+2z, \quad y=5-3z \quad (z\in\mathbb{R})$$

تمرین ۱.۲.۲

۱. دستگاه معادلات زیر را به روش گاوس-جردن حل کنید(در صورت وجود جواب):

$$\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+3y=5 \end{cases}$$

۲. دستگاه معادلات زیر را به روش گاوس-جردن حل کنید(در صورت وجود جواب):

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+4y-2z=2 \\ 3x+6y-3z=3 \end{cases}$$

۳. دستگاه معادلات زیر را به روش گاوس-جردن حل کنید(در صورت وجود جواب):

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2y+5z=-4 \\ 2x+5y-z=27 \end{cases}$$

نکته :

تفاوت اصلی بین روش حذف گاوس [a] و روش حذف گاوس-جردن [b] در میزان ساده‌سازی ماتریس و نحوه استخراج جواب است.

[a] Gaussian Elimination
[b] Gauss-Jordan Elimination

نکته : هدف نهایی در روش حذفی گاوس

- ماتریس را به فرم سطری پلکانی [a] تبدیل می‌کند.
- در REF ، زیر هر عدد اصلی (پایه‌ای) صفر قرار می‌گیرد.
- جواب با حل پس‌گشت [b] به دست می‌آید.

[a] Row Echelon Form - REF
[b] Back Substitution

نکته : هدف نهایی در روش حذفی گاوس - جردن

- ماتریس را به فرم کاهش‌یافته سطری پلکانی [a] تبدیل می‌کند.
- در RREF، هر عدد اصلی ۱ است و تنها عدد غیرصفر در ستون خود است.
- جواب مستقیماً از ماتریس خوانده می‌شود.

[a] Reduced Row Echelon Form - RREF

نکته : مراحل اجرای روش حذفی گاوس

۱. ماتریس را به فرم REF می‌آورد.
۲. با جایگزینی از سطر آخر به بالا، جواب را محاسبه می‌کند.

نکته : مراحل اجرای روش حذفی گاوس-جردن

۱. ماتریس را به فرم RREF می‌آورد.
۲. جواب بدون نیاز به محاسبات اضافه، مستقیماً از ماتریس استخراج می‌شود.

نکته : نمادگذاری ماتریس در REF

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

نیاز به حل معادله‌ی $z = 2$، سپس جایگزینی در معادلات بالاتر.

نکته : نمادگذاری ماتریس در RREF

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

جواب مستقیماً: $x = -1$، $y = 3$، $z = 2$.

مثال ۳.۲.۲: مثال مقایسه‌ای

دستگاه معادلات:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 8 \\ -3x - y + 2z = -11 \\ -2x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

حل با حذف گاوس (REF): ماتریس نهایی:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- نیاز به حل پس‌گشت برای یافتن z، سپس y، و در نهایت x.

حل با حذف گاوس-جردن (RREF): ماتریس نهایی:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- جواب مستقیماً: $x = 2$، $y = 3$، $z = -1$.

تمرین ۲.۲.۲

تعداد عملیات‌های حسابی (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) را برای هر یک از روش‌های حذفی گاوس و حذفی گاوس جردن محاسبه کنید.

۳.۲ تجزیه LU

تعریف ۱.۳.۲: تجزیه LU

تجزیه LU یعنی تجزیه‌ی یک ماتریس مربعی A به صورت حاصل‌ضرب دو ماتریس:

$$A = LU$$

که در آن:
– L: ماتریس مثلثی پایین با درایه‌های قطر اصلی برابر با ۱ (یا بدون شرط خاص)
– U: ماتریس مثلثی بالا

نکته : کاربردهای تجزیه LU

۱. حل دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ به صورت سریع‌تر

۲. محاسبه‌ی معکوس ماتریس

۳. محاسبه‌ی دترمینان

مثال ۱.۳.۲:

تجزیه LU برای ماتریس ۲×۲
فرض کن:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

ماتریس U:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

پس:

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال ۲.۳.۲:

تجزیه LU برای ماتریس ۳×۳ ساده

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

با استفاده از الگوریتم LU (به صورت دستی یا با برنامه‌نویسی) به دست می‌آید:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال ۳.۳.۲: حل دستگاه معادلات خطی با استفاده از تجزیه LU

استفاده از LU برای حل دستگاه
دستگاه زیر رو با LU حل می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

گام ۱: تجزیه LU

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام ۲: حل $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

گام ۳: حل $Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تمرین ۱.۳.۲

۱. ماتریس زیر را به صورت LU تجزیه کن:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

۲. با استفاده از LU، دستگاه زیر را حل کن:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \end{bmatrix}$$

۳. تجزیه LU برای ماتریس زیر را انجام بده:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 8 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

۴. فرض کن LU تجزیه برای ماتریس A انجام شده و:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 20 \end{bmatrix}$$

با استفاده از LU، دستگاه $Ax = b$ را حل کنید.

نکته : مراحل گام‌به‌گام تجزیه LU روش دولیتل

هدف: تجزیه‌ی یک ماتریس مربعی $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ به:

$$A = LU$$

که:
- L: ماتریس مثلثی پایین با عناصر ۱ روی قطر (یا بدون شرط)
- U: ماتریس مثلثی بالا
- در روش دولیتل قطر اصلی L همگی برابر یک هستند و با اجرای روش حذف گاوسی LU رو می‌سازیم.

فرض کنیم ماتریس A از مرتبه ۳ باشد:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

و بخواهیم بنویسیم:

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

۱. **محاسبه سطر اول ماتریس U:**

محاسبه سطر اول ماتریس U: چون سطر اول L برابر با $[0, 0, 1]$ است، پس:

$$U_{1,:} = A_{1,:} = [a_{11}, a_{12}, a_{13}]$$

۲. **محاسبه‌ی ستون اول L:**

برای سطرهای ۲ و ۳:

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}, \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}$$

۳. **محاسبه‌ی u_{22}, u_{23}:**

$$U_{2,:} = A_{2,:} - l_{21} \cdot U_{1,:}$$

۴. **محاسبه‌ی l_{32}:**

$$l_{32} = \frac{A_{32} - l_{31} \cdot u_{12}}{u_{22}}$$

۵. **محاسبه‌ی u_{33}:**

$$u_{33} = A_{33} - l_{31} \cdot u_{13} - l_{32} \cdot u_{23}$$

خلاصه‌ی کلی فرمول‌ها:
برای هر سطر i و ستون j:

برای محاسبه‌ی U:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$$

برای محاسبه‌ی L (زمانی که $i > j$):

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right) \tag{۲.۱}$$

مثال ۴.۳.۲: مثال عددی گام‌به‌گام (ماتریس ۳×۳):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 6 & 18 & -1 \end{bmatrix}$$

گام ۱: U سطر اول

$$u_{11} = 2, \quad u_{12} = 3, \quad u_{13} = 1$$

گام ۲: L ستون اول

$$l_{21} = \frac{4}{2} = 2, \quad l_{31} = \frac{6}{2} = 3$$

گام ۳: سطر دوم از U

$$u_{22} = 7 - (23) = 1, \quad u_{23} = 2 - (21) = 0$$

گام ۴: l_{32}

$$l_{32} = \frac{18 - (33)}{1} = \frac{9}{1} = 9$$

گام ۵: u_{33}

$$u_{33} = -1 - (31 + 90) = -4$$

نتیجه نهایی:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

تمرین ۲.۳.۲

ماتریس زیر را به روش LU تجزیه کنید:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

تمرین ۳.۳.۲

تجزیه LU ماتریس سه‌قطری زیر را محاسبه کنید:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

تعریف ۲.۳.۲: زیرماتریس‌های اصلی

زیرماتریس‌های اصلی یک ماتریس مربعی A با ابعاد $n \times n$، ماتریس‌های کوچکتری هستند که از حذف برخی سطرها و ستون‌های A به دست می‌آیند، با این شرط که ستون‌های حذف‌شده دقیقاً همان سطرهای حذف‌شده باشند. این ماتریس‌ها نقش کلیدی در بررسی وجود تجزیه LU، محاسبه دترمینان و تحلیل پایداری ماتریس دارند.
برای یک ماتریس A به صورت:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

زیرماتریس اصلی $k \times k$ (برای $1 \leq k \leq n$) با انتخاب k سطر و ستون اول ساخته می‌شود. به عبارت دیگر:

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}.$$

مثال ۵.۳.۲: زیرماتریس‌های اصلی

برای ماتریس 3×3 برای ماتریس:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

زیرماتریس‌های اصلی عبارتند از: ۱. $k = 1$: $A_1 = (1)$،
۲. $k = 2$: $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$،
۳. $k = 3$: $A_3 = A$ (خود ماتریس اصلی).

نکته : زیرماتریس‌های اصلی و تجزیه LU

تجزیه LU بدون جایگشت سطرها وجود دارد اگر و تنها اگر همه زیرماتریس‌های اصلی A_k (برای $k = 1, 2, \ldots, n-1$) غیرصفر باشند.

مثال ۶.۳.۲:

فرض کنید:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies A_1 = (0).$$

چون $\det(A_1) = 0$، تجزیه LU بدون جایگشت امکان‌پذیر نیست.

نکته :

دترمینان ماتریس اصلی برابر است با حاصلضرب عناصر قطر اصلی ماتریس U در تجزیه LU.

مثال ۷.۳.۲:

در مثال‌های قبل دیدیم که اگر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 6 & 18 & -1 \end{bmatrix}$$

آنگاه تجزیه LU به صورت زیر خواهد بود

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

پس با توجه به نکته قبل

$$\det(A) = 2 \times 1 \times (-4) = -8$$

۱.۳.۲ تجزیه LU و PLU با استفاده از ماتریس‌های مقدماتی

تعریف ۳.۳.۲: ماتریس‌های مقدماتی

ماتریس مقدماتی، ماتریسی است که با اعمال یک عملیات سطری مقدماتی روی ماتریس همانی I به دست می‌آید. این عملیات‌ها شامل:

۱. جابجایی دو سطر (مثل E_{ij})،

۲. ضرب یک سطر در عددی ناصفر (مثل $E_i(k)$)،

۳. جمع مضربی از یک سطر به سطر دیگر (مثل $E_{ij}(k)$).

مثال ۸.۳.۲:

برای ایجاد ماتریس مقدماتی $E_{21}(-3)$ که سطر ۲ را با -3 برابر سطر ۱ جمع می‌کند:

$$E_{21}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

نکته : محاسبه وارون ماتریس مقدماتی

وارون این ماتریس با معکوس کردن علامت k ساخته می‌شود به عنوان مثال:

$$E_{21}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

آنگاه

$$E_{21}^{-1}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

زیرا به سادگی دیده می شود که:

$$E_{21}(k) \cdot E_{21}^{-1}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

درستی این موضوع در حال کلی نیز به سادگی قابل اثبات است.

مثال ۹.۳.۲: وارون ماتریس مقدماتی

اگر $R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1$ در $I_{3\times 3}$، آنگاه:

$$E_{21}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{21}^{-1}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مثال ۱۰.۳.۲: وارون ماتریس مقدماتی

اگر $R_3 \leftarrow R_3 - 4R_2$ در $I_{4\times 4}$، آنگاه:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تمرین ۴.۳.۲

وارون ماتریس زیر را بیابید (حاصل از $R_1 \leftarrow R_1 + 5R_3$ در $I_{3\times 3}$):

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تمرین ۵.۳.۲

اگر E با عملیات $R_2 \leftarrow R_2 - 3R_4$ در $I_{4\times 4}$ ساخته شود، E^{-1} چیست؟

تعریف ۴.۳.۲: ماتریس جایگشت

اگر جای دو سطر از ماتریس همانی I را عوض کنیم، ماتریس حاصل یک ماتریس جایگشت خواهد بود. معمولا ماتریس‌های جایگشت را با نماد P [a] نشان می‌دهند.

[a] Permutation Matrix

نکته : وارون یک ماتریس جایگشت

وارون هر ماتریس جایگشت خودش است.

مثال ۱۱.۳.۲: ماتریس جایگشت

جابجایی سطرهای ۱ و ۲ در $I_{3\times 3}$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نکته :

ماتریس‌های جایگشت متقارن و متعامد هستند، بنابراین:

$$P^{-1} = P^T = P$$

به عبارت دیگر یعنی وارون ماتریس جایگشت خود ماتریس است.

مثال ۱۲.۳.۲: وارون ماتریس جایگشت

برای ماتریس P بالا:

$$P \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

پس $P^{-1} = P$.

مثال ۱۳.۳.۲: وارون ماتریس جایگشت

جابجایی سطرهای ۲ و ۳ در $I_{4\times 4}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = P$$

نکته : تجزیه LU با استفاده از ماتریس‌های مقدماتی

تجزیه LU یک ماتریس A به صورت $A = LU$ است، که:

۱. L: ماتریس پایین‌مثلثی با قطر اصلی ۱ (حاصل ضرب معکوس ماتریس‌های مقدماتی).

۲. U: ماتریس بالامثلثی (فرم سطری پلکانی A).

مراحل انجام:

۱. حذف گاوسی روی A با عملیات سطری مقدماتی انجام می‌شود.

۲. هر عملیات سطری معادل ضرب A در ماتریس مقدماتی E_k است.

۳. پس از تبدیل A به U، ماتریس L از معکوس ماتریس‌های مقدماتی ساخته می‌شود:

$$L = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1}.$$

مثال ۱۴.۳.۲: تجزیه LU با استفاده از ماتریس‌های مقدماتی

ماتریس A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

مرحله ۱: ایجاد U با عملیات سطری

عملیات: $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ (ضرب در ماتریس مقدماتی $E_{21}(-2)$):

$$E_{21}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = E_{21}(-2) \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

مرحله ۲: محاسبه L از معکوس ماتریس مقدماتی

معکوس $E_{21}(-2)$:

$$E_{21}^{-1}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = L.$$

نتایج:

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

نکته : شرایط وجود تجزیه LU

بدون جایگشت سطرها: همه زیرماتریس‌های اصلی A باید غیرصفر باشند.
با جایگشت سطرها: اگر نیاز به جابجایی سطرها باشد، از تجزیه $PA = LU$ استفاده می‌شود.

مثال ۱۵.۳.۲: مثال با جایگشت سطرها (PLU)

اگر $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

نیاز به جابجایی سطرها دارد: $PA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- سپس $PA = LU$.

مثال ۱۶.۳.۲: تجزیه LU (بدون جایگشت سطرها)

ماتریس زیر را با روش LU تجزیه کنید:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

مراحل حل:

۱. حذف گاوسی برای ساخت U:

سطر ۲: $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

سطر ۳: $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

سطر ۳: $R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

۲. ساخت ماتریس L:

ضرایب حذف شده در مراحل بالا را در L قرار دهید:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

۳. نتایج:

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

مثال ۱۷.۳.۲: تجزیه PLU (با جایگشت سطرها)

ماتریس زیر را با روش PLU تجزیه کنید (نیاز به جایگشت سطرها دارد):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

مراحل حل:

۱. جایگشت سطرها برای جلوگیری از صفر در پایوت:

جابجایی R_1 و R_2:

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

۲. حذف گاوسی روی PA:

سطر ۳: $R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

سطر ۳: $R_3 \leftarrow R_3 + R_2$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

۳. ساخت ماتریس L:

- ضرایب حذف:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

۴. نتایج:

$$PA = LU \implies \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

تمرین ۶.۳.۲

ماتریس زیر را با روش LU تجزیه کنید:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

تمرین ۷.۳.۲

آیا ماتریس زیر نیاز به تجزیه PLU دارد؟ چرا؟

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

کد پایتون ۱.۳.۲:

```python
import numpy as np
from scipy.linalg import lu
A = np.array([[1, 2, 3], [2, 5, 7], [1, 5, 3]])
P, L, U = lu(A)
print("L:\n", L)
print("U:\n", U)
```

۲.۳.۲ حل دستگاه معادلات خطی با استفاده از تجزیه LU

نکته : حل دستگاه معادلات خطی با استفاده از تجزیه LU

تجزیه LU یک روش کارآمد برای حل دستگاه‌های خطی $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ است. این روش شامل دو مرحله اصلی است:

۱. تجزیه A به LU: ماتریس A به حاصلضرب دو ماتریس مثلثی L (پایین‌مثلثی) و U (بالامثلثی) تبدیل می‌شود.

۲. حل دو سیستم مثلثی

   ۱. ابتدا $L\mathrm{y} = \mathrm{b}$ را برای یافتن y حل می‌کنیم (حل رو به جلو).

   ۲. سپس $U\mathrm{x} = \mathrm{y}$ را برای یافتن x حل می‌کنیم (حل رو به عقب).

مثال ۱۸.۳.۲: حل دستگاه معادلات خطی با استفاده از تجزیه LU

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \\ 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 19 \end{cases}$$

ماتریس A و بردار $\mathbf{b}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 19 \end{pmatrix}$$

مرحله ۱: تجزیه $A = LU$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

—

مرحله ۲: حل $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ (حل رو به جلو)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$3y_1 + 2y_2 + y_3 = 19 \implies y_3 = 2 - 2y_1 + y_2 = 11 \implies y_2 = 1 - y_1 = 5 -$

بردار $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

مرحله ۳: حل $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (حل رو به عقب)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \implies x_1 = 0 - x_2 - x_3 = 1 \implies x_2 = 3 - x_3 = 2 -$

جواب نهایی:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

تمرین ۸.۳.۲

دستگاه زیر را با تجزیه LU حل کنید:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ 3x_1 + 4x_2 = 17 \end{cases}$$

۳.۳.۲ کاربرد تجزیه LU برای محاسبه وارون و دترمینان ماتریس

نکته : کاربرد تجزیه LU برای محاسبه وارون ماتریس

۱. تجزیه A به LU: ماتریس A را به حاصلضرب L (پایین‌مثلثی با قطر اصلی ۱) و U (بالامثلثی) تبدیل می‌کنیم.

۲. حل $AX = I$: برای یافتن وارون A^{-1}، دستگاه $AX = I$ را حل می‌کنیم. این کار به حل n دستگاه معادلات خطی زیر می‌انجامد:

$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1, \quad A\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2, \quad \ldots, \quad A\mathbf{x}_n = \mathbf{e}_n$$

که در آن $\mathbf{e}_i$ بردار ستونی iام ماتریس همانی I است.

۳. استفاده از L و U: هر دستگاه را با دو مرحله حل می‌کنیم:

- حل رو به جلو: $L\mathbf{y}_i = \mathbf{e}_i$.

- حل رو به عقب: $U\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i$.

مثال ۱۹.۳.۲: کاربرد تجزیه LU برای محاسبه وارون ماتریس

برای ماتریس:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

حل A^{-1}:

۱. حل $A\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

- $L\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- $U\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \implies \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

۲. حل $A\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

- $L\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $U\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

۳. وارون A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

نکته : کاربرد تجزیه LU برای محاسبه دترمینان ماتریس

با استفاده از تجزیه $A = LU$:

رابطه دترمینان:

$$\det(A) = \det(L) \cdot \det(U)$$

چون L پایین‌مثلثی با قطر اصلی ۱ است: $\det(L) = 1$.

U بالامثلثی است، پس دترمینان آن حاصلضرب عناصر قطر اصلی است:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

مثال ۲۰.۳.۲: کاربرد تجزیه LU برای محاسبه دترمینان ماتریس

$$\det(A) = \det(U) = 2 \times 1 = 2$$

تمرین ۹.۳.۲

دترمینان و وارون ماتریس زیر را با استفاده از تجزیه LU بدست آورید.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$