

٩

الجزء  
الثاني

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دولَةُ فَلَسْطِين  
وَرَادَةُ التَّعْلِيَّةِ وَالتَّعْلِيمِ

# الرياضيات

فريق التأليف:

أ. محمد غانم

أ. أمانى الأخضر

أ. أشجان جبر

أ. قيس شبانة (منسقاً)

أ. عماد جمعة

أ. جهاد ابو جاسر

أ. هاشم أبو بكر



أ. نسرين دويكات

## قررت وزارة التربية والتعليم في دولة فلسطين

تدرس هذا الكتاب في مدارسها بدءاً من العام الدراسي ٢٠١٧ / ٢٠١٨ م

### الإشراف العام

د. صبرى صيدم	رئيس لجنة المناهج
د. بصرى صالح	نائب رئيس لجنة المناهج
أ. ثروت زيد	رئيس مركز المناهج

### الدائرة الفنية

أ. كمال فحصاوي	إشراف فني
أ. عبد الناصر أبوشوشة	تصميم فني

د. نبيل الجندي	تحكيم علمي
أ. وفاء الجيوسي	تحرير لغوي
د. سعيد عساف	مراجعة
أ. سالم نعيم	رسومات
أ. مها غانم	قراءة
د. سمية النّخلة	متابعة للمحافظات الجنوبية

الطبعة الثانية

٢٠١٩ / م ١٤٤٠ هـ

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولة فلسطين  
وزارة التربية والتعليم العالي



مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

[f.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym](https://www.facebook.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym)

فакс +970-2-2983280 | هاتف +970-2-2983250

حي الماصيون، شارع الصالحة

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

يصنف الإصلاح التربوي بأنه المدخل العقلاني العلمي النابع من ضرورات الحالة، المستند إلى واقعية الشأة، الأمر الذي انعكس على الرؤية الوطنية المطورة للنظام التعليمي الفلسطيني في محاكاة الخصوصية الفلسطينية والاحتياجات الاجتماعية، والعمل على إرساء قيم تعزز مفهوم المواطنة والمشاركة في بناء دولة القانون، من خلال عقد اجتماعي قائم على الحقوق والواجبات، يتفاعل المواطن معها، ويعي تراكيتها وأدواتها، ويسمهم في صياغة برنامج إصلاح يحقق الآمال، ويلامس الأمانى، ويرثى لتحقيق الغايات والأهداف.

ولما كانت المناهج أداة التربية في تطوير المشهد التربوي، بوصفها علمًا له قواعده ومفاهيمه، فقد جاءت ضمن خطة متكاملة عالجت أركان العملية التعليمية التعليمية بجميع جوانبها، بما يسمهم في تجاوز تحديات النوعية بكل اقتدار، والإعداد لجيل قادر على مواجهة متطلبات عصر المعرفة، دون التورط بإشكالية التشتت بين العولمة والبحث عن الأصالة والاتماء، والانتقال إلى المشاركة الفاعلة في عالم يكون العيش فيه أكثر إنسانية وعدالة، وينعم بالرفاهية في وطن نحمله ونظامه.

ومن منطلق الحرص على تجاوز نمطية تلقّي المعرفة، وصولاً لما يجب أن يكون من إنتاجها، وباستحضار واعٍ لعدد المنطلقات التي تحكم رؤيتنا للطالب الذي نريد، وللبنية المعرفية والفكريّة المتواخّة، جاء تطوير المناهج الفلسطينية وفق رؤية محكومة بإطار قوامه الوصول إلى مجتمع فلسطيني ممتلك للقيم، والعلم، والثقافة، والتكنولوجيا، وتلبية المتطلبات الكفيلة بجعل تحقيق هذه الرؤية حقيقة واقعة، وهو ما كان له ليكون لولا التناغم بين الأهداف والغايات والمنطلقات والمرجعيات، فقد تآلفت وتكاملت؛ ليكون النتاج تعبيراً عن توليفة تحقق المطلوب معرفياً وتربوياً وفكرياً.

ثمة مراجعات تؤطر لهذا التطوير، بما يعزّزأخذ جزئية الكتب المقررة من المناهج دورها المأمول في التأسيس؛ لتتوازن إبداعي خالق بين المطلوب معرفياً، وفكرياً، ووطنياً، وفي هذا الإطار جاءت المرجعيات التي تم الاستناد إليها، وفي طليعتها وثيقة الاستقلال والقانون الأساسي الفلسطيني، بالإضافة إلى وثيقة المناهج الوطني الأول؛ لتوجه الجهد، وتعكس ذاتها على مجلمل المخرجات.

ومع إنجاز هذه المرحلة من الجهد، يغدو إرجاء الشكر للطواقم العاملة جميعها؛ من فرق التأليف والمراجعة، والتدقيق، والإشراف، والتصميم، وللجنة العليا أقل ما يمكن تقديمها، فقد تجاوزنا مرحلة الحديث عن التطوير، ونحن واثقون من تواصل هذه الحالة من العمل.

وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج الفلسطينية

كانون أول / ٢٠١٧ م

تُعدّ مرحلة التمكين مرحلة تعليمية مهمة؛ كونها تأتي محصلة للمعارف والمفاهيم التي اكتسبها الطالبة من مرحلة التهيئة، وهي مرحلة تبدأ من الصف الخامس، وتنتهي بالصف العاشر، يميل الطلبة خلال هذه المرحلة إلى الاستقلالية في التفكير، والبحث، والاستقصاء؛ لذا ما ينبغي مراعاته إشراكهم في المناقشة، وحل المشكلات المطروحة التي يتمّ من خلالها بناء شخصية الطالب قادر على مجاورة النظائر العلمي والتكنولوجي الهائل، في عالم مليء بالتغييرات التي تتطلب منه اكتساب روح المبادرة، والتكييف مع مستجدات العصر المتتسارعة، بما يضمن له استكشاف المعارف، وفي هذه المرحلة أيضًا، يتم تقديم المحتوى التعليمي ب قالب عصري؛ ليكون امتداداً للمحتوى الرياضي الذي تمّ في مرحلة التأسيس، ويستمرّ منهاج المبني على الأنشطة أصلًا في ربط التعلم بالسياقات الحياتية بطريقة جاذبة محببة؛ لتكوين طالب متفاعل نشط، ينفذ الأنشطة والتمارين المتنوعة المطلوبة منه.

تشكل العملية التعليمية التعلمية في هذه المرحلة الركيزة الأساسية في تمكين الطالب من المفاهيم والمعارف والمهارات، وتوظيفها ضمن سياقات مناسبة، تقوم على حل مشكلات حياتية، ولا يكون ذلك إلا بالقيام بأنشطة محفزة، ومثيرة للتفكير، تحاكي البيئة الفلسطينية في المجالات الاجتماعية، والاقتصادية، وغيرها، كما تمّ توظيف التكنولوجيا في تنفيذ هذه الأنشطة بطريقة سلسة جذابة، مع الأخذ بعين الاعتبار التدرج في مستوى الأنشطة، بما يتناسب ومستويات الطلبة، والتعامل مع كل مستوى بما يضمن علاج الضعف، وصولاً لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.

تتكوّن هذا الكتاب من خمس وحداتٍ تعليمية، تناولت الوحدة الخامسة: حساب المثلثات والنسب المثلثية وتطبيقات عليها، أمّا الوحدة السادسة، فتناولت الجبر، لتقديم مفهوم الفترة وطرق حلّ المتباينات الخطية، وتناولت الوحدة السابعة الاقترانات والعمليات عليها، أمّا الوحدة الثامنة (الاحتمالات)، فاستكملت قوانين الاحتمالات التي تعلمها الطلبة سابقاً، بالإضافة للاحتمال المشروط واستقلال الحوادث، وتناولت الوحدة التاسعة (الهندسة) معادلة الدائرة والزوايا المحيطية والمركريّة بالإضافة للشكل الرباعي الدائري.

أملنا بهذا العمل، وقد حققنا مطالب العملية التعليمية التعلمية كافة، من خلال منهاج فلسطينيّ واقعيّ منظم، وإننا إذ نضع بين أيديكم ثمرة جهد متواصل، وكلنا ثقة بكم معلمين ومشيرفين تربويين ومديري مدارس، وأولياء أمور، وخبراء ذوي علاقة في رفد هذا الكتاب بمقدراتكم، وتغديتكم الراجعة، بما يعمل على تجويده وتحسينه؛ لما فيه مصلحة الطلبة قادة المستقبل.

# المحتويات

## الوحدة الخامسة: حساب المثلثات

٦٣	٥ - ٧ الاقتران النسبي	٤	٥ - ١ النسب المثلثية
٦٧	٦ - ٧ العمليات على الاقترانات النسبية	٨	٥ - ٢ النسب المثلثية الثانوية
٧٢	٧ - ٧ تمارين عامة	١٣	٥ - ٣ المتطابقات المثلثية
		١٧	٥ - ٤ المعادلات المثلثية
		٢٠	٥ - ٥ تمارين عامة

## الوحدة الثامنة: الاحتمالات

٧٦	١ - ٨ قوانين الاحتمالات
٨٠	٢ - ٨ الاحتمال المشروط
٨٤	٣ - ٨ استقلال الحوادث
٨٨	٤ - ٨ تمارين عامة

## الوحدة السادسة: الجبر وتطبيقات الحساب

٢٤	٦ - ١ الفرات
٣٠	٦ - ٢ المتباينات الخطية بمتغير واحد
٣٧	٦ - ٣ المتباينات الخطية بمتغيرين
٤٢	٦ - ٤ تمارين عامة

## الوحدة التاسعة: الهندسة

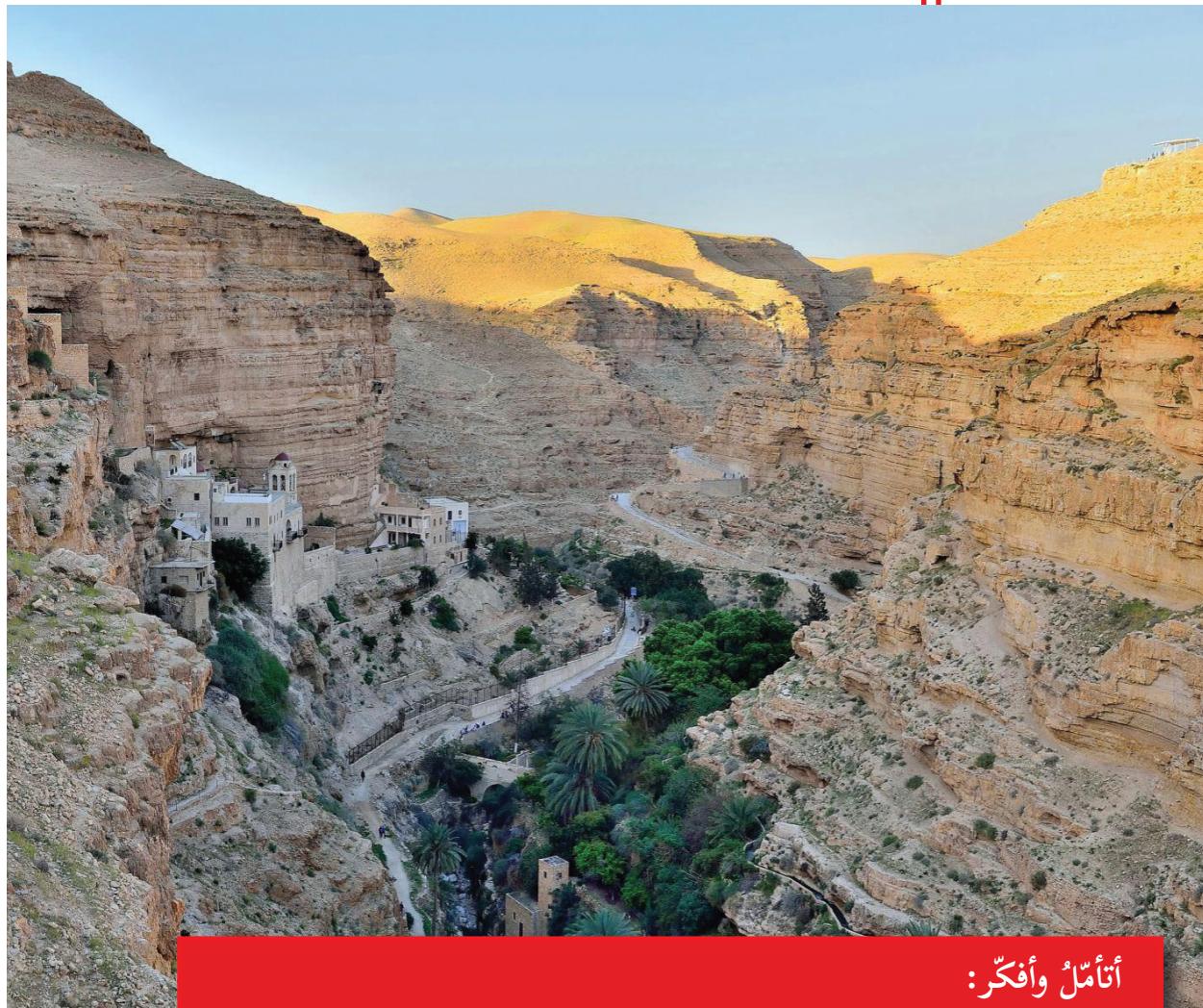
٩٢	١ - ٩ الدائرة
٩٧	٢ - ٩ الزوايا المركزية والزوايا المحيطية
١٠٣	٣ - ٩ الشكل الرباعي الدائري
١٠٧	٤ - ٩ تمارين عامة

## الوحدة السابعة: الاقترانات

٤٦	٧ - ١ كثيرات الحدود
٥٠	٧ - ٢ جمع كثيرات الحدود وطرحها
٥٤	٧ - ٣ ضرب كثيرات الحدود وقسمتها
٥٩	٧ - ٤ الاقتران التربيعي

٥

## الوحدة



أتاملُ وأفكّرُ:

يُمكنُ إقامة جسر بين الجبلين باستخدام النسب المثلثية من خلال رسم تخطيطي لمثلث قائم الزاوية، أناقش ذلك.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها، أن يكونوا قادرين على توظيف النسب المثلثية في الحياة العملية من خلال الآتي:

١ إيجاد النسب المثلثية الأساسية للزرويا الحادة.

٢ التعرُّف إلى النسب المثلثية الثانوية.

٣ التعرُّف إلى العلاقات بين النسب المثلثية.

٤ التعرُّف إلى مفهوم المتطابقة المثلثية.

٥ إثبات صحة متطابقة مثلثية .

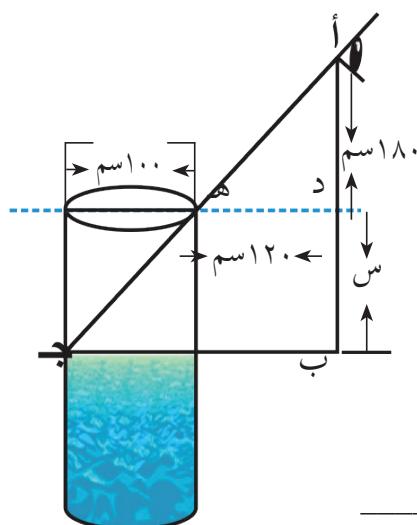
٦ حل معادلة مثلثية .

٧ استخدام النسب المثلثية في حل مشكلات حياتية.

**نشاط (١):** تعاني الزراعة في فلسطين من نقص بالمياه بسبب اجراءات الاحتلال، إذ يقوم المزارعون بإنشاء آبار مياه لأغراض الري، فإذا أراد مزارع طوله ١٨٠ سم معرفة انخفاض مستوى سطح مياه بئر قطره ١م، واقترب من حافة البئر حتى تتمكن من رؤية سطح الماء، وكان بعده عن حافة البئر ١٢٠ سم. أجد انخفاض سطح الماء على النحو الآتي:



نفرض أن  $s$  تمثل انخفاض مستوى سطح المياه في البئر.  
من تشابه المثلثات  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ :



$$\frac{180}{120 + 100} = \frac{180}{s + 100}$$

$$(s + 180) \times 180 = s \times 180 + 180 \times 100$$

$$s = 180 - 100$$

$$s = 80 \text{ سم}$$

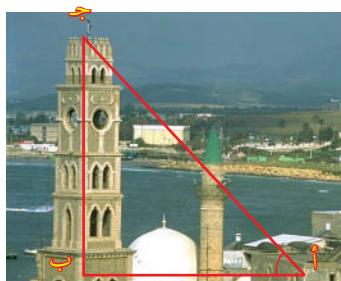
ومنها: انخفاض مستوى سطح المياه في البئر =

**أذكّر:** النسبة بين طولي ضلعين من أضلاع المثلث القائم الزاوية تُسمى نسبة مثلثية.



**نشاط (٢):** برج الساعة في عكا واحد من سبعة أبراج أقيمت في فلسطين عام ١٩٠١ م.

يمثل الشكل المقابل مثلثاً قائم الزاوية في  $B$ ، أكمل ما يأتي :



١) يُسمى الضلع  $AB$  بالنسبة إلى الزاوية  $A$  مجاوراً.

٢) يُسمى الضلع  $BC$  بالنسبة إلى الزاوية  $A$ :

٣) يُسمى الضلع  $AC$  وتر المثلث القائم الزاوية، وهو أطول أضلاع المثلث.

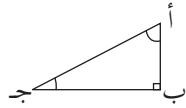
٤) جيب الزاوية  $A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

٥) جيب تمام الزاوية  $A =$

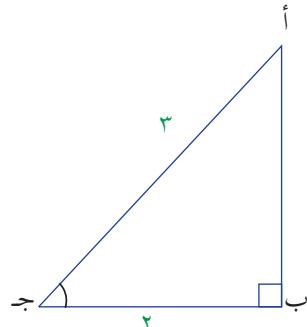
٦) ظل الزاوية  $A =$

**أذكّر:**

المثلثة الأساسية للزاوية الحادة أ.



**نشاط(٣):** أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب، فيه جتا ج =  $\frac{2}{3}$  ، أ ج = ٣ وحدات، أجد:



(١) ظاج (٢) جاج

$$\text{جتا ج} = \frac{\boxed{\quad}}{3} = \frac{\boxed{\quad}}{\text{أ ج}} = \frac{\text{ال المجاور}}{\text{الوتر}}$$

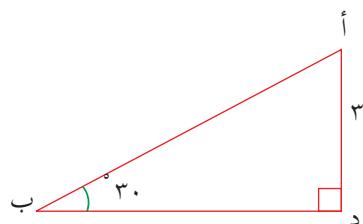
ومنها  $\text{ب ج} = 2$  وحدة ، ثم نعيّن أطوال الأضلاع على المثلث  
 $(\text{أ ب})^2 = (\text{أ ج})^2 - (\text{ب ج})^2$  (لماذا ؟)

$$\begin{aligned}\text{أ ب} &= \underline{\hspace{2cm}} \\ \text{ظاج} &= \underline{\hspace{2cm}} \\ \text{جا ج} &= \underline{\hspace{2cm}}\end{aligned}$$

**نشاط(٤):** أ د ب مثلث قائم الزاوية في د، فيه أ د = ٣ وحدات، أجد كلّ من:



٣) النسبة المثلثة الأساسية للزوايا:  $30^\circ, 60^\circ$



(١) أ ب (٢) ب د

$$\text{المثلث أ د ب فيه جا } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{\text{أ ب}}$$

$$\text{أ ب} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{ومنها ب د} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{ظاج} = 30^\circ$$

$$\text{جتا ج} = 30^\circ$$

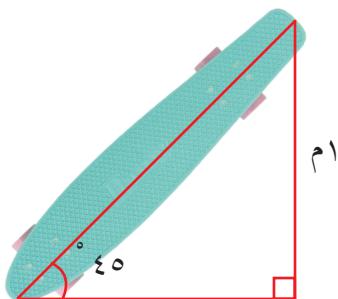
$$\text{جا } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{ظاج} = 60^\circ$$

$$\text{جتا ج} = 60^\circ$$

$$\text{جا } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**نشاط(٥):** لوح للتزلج يرتفع أحد طرفيه عن الأرض ١ م، ويصنع طرفه الآخر مع الأرض زاوية قياسها  $45^\circ$  كما في الشكل المجاور بالاعتماد على المعلومات الواردة في الشكل، أكمل إيجاد:



١) طول لوح التزلج

طول لوح التزلج = \_\_\_\_\_ م ، لأن \_\_\_\_\_

٢) النسب المثلثية الأساسية للزاوية  $45^\circ$

$\text{جا } 45^\circ = \text{جتا } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\text{ظا } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1}$

**ملاحظة:** يمكن إيجاد قياس زاوية إذا علمنت إحدى نسبها المثلثية، باستخدام الحاسبة العلمية من خلال مفاتيح خاصة على الآلة الحاسبة العلمية.



(مفتاح جا) ،  $\cos$  (مفتاح جتا) ،  $\tan$  (مفتاح ظا)

مثلاً:  $\text{جا } 30^\circ = \frac{1}{2}$  يكافئ الزاوية التي جيبها  $\left(\frac{1}{2}\right)$

ورمزها على الآلة الحاسبة:  $\sin^{-1}(x)$

لإيجاد الزاوية باستخدام الآلة الحاسبة، نتبع الخطوات الآتية:

Shift → sin → 0.5 → =  $30^\circ$

إذا كانت س زاوية حادة، فإن:  $0 < \text{جا س} < 1$

$0 < \text{جتا س} < 1$

**أتذكر:**

إذا كانت س زاوية حادة، فما القيم الممكنة لظاس؟

**أفكر وأناقش**

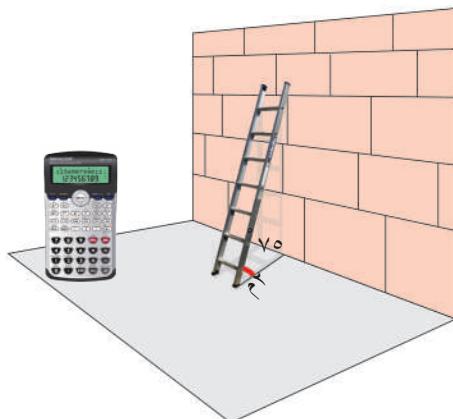
## تمارين وسائل:



**س١** أجدُ قيمَ النّسبِ المثلثيّة الأساسية للزاوية الصّغرى في المثلث  $\triangle ABC$  القائم الزاوي في ب،  
إذا كان  $AB = 8$  سم ،  $AC = 10$  سم.

**س٢**  $\triangle ABC$  مثلث قائم الزاوية في ب، إذا علمت أنّ  $\angle B = 60^\circ$  ، وأنّ  $AB = 10$  ،  
أجدُ : جناب، ظاج

**س٣** إذا كانت الزاوية الآمنة التي يمكن أن يستند بها سلم على حائط هي  $75^\circ$  تقريباً مع الأرض كما في الشكل المجاور، ما طول السلم، إذا كانت قاعدته تبعد مترين عن الحائط الرأسى؟



**س٤** من نقطةٍ تبعد 3 أمتار عن قاعدة منزل ارتفاعه 6 أمتار رصدت قمة المنزل،  
أرسم شكلاً يبيّن زاوية ارتفاع قمة المنزل، ثم أحسب قيمة تلك الزاوية.



## النّسب المثلثيّة الثانويّة



**نشاط (١) :** تنتشر زراعة النخيل في فلسطين مثل منطقة أريحا والأغوار، وقطاع غزة، وبيسان؛ ونتيجةً للانتهاكات الإسرائيليّة في تجريف الأشجار تعرّض بعضها للتكسير. إذا تعرّضت إحدى أشجار النخيل للكسر، كما في الشكل المجاور، وكان طول الجزء المائل من الشجرة على الأرض ١٣ متراً، وكان طول الشجرة قبل سقوطها ٢٠ متراً، فهل يمكن معرفة قياس الزاوية التي يصنّعها الجزء المائل مع سطح الأرض؟



يمكن استخدام النسب المثلثية لمعرفة قياس الزاوية  $\theta$ .



$$\text{جا } \theta = \frac{\text{المقابل}}{13} = \frac{\square}{13}$$

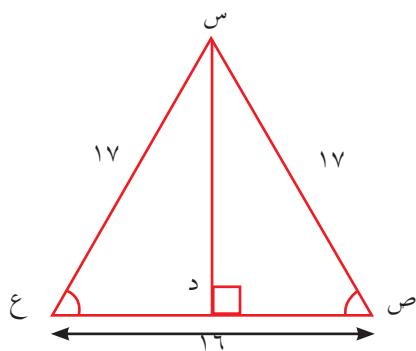
$$\theta = \text{الزاوية التي جيّبها } \left( \frac{\square}{13} \right)$$

هناك نسب مثلثية أخرى يمكن استخدامها لإيجاد قيمة الزاوية  $\theta$ ، أذكر بعضاً منها.

**أفكّر وأناقش**



**نشاط (٢) :**  $\frac{\sin \theta}{\sin \phi} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$  متساوي الساقين فيه:  $\sin \theta = \sin \phi = \frac{1}{2}$  وحدة،



$\sin \theta = \frac{1}{2}$  وحدة، أكمل إيجاد:

طول  $\overline{AD} = \square$  (نظرية فيثاغورس)

$$\frac{\sin \theta}{\sin \phi} = \frac{\overline{AD}}{17} = \frac{\square}{17} \text{ ، وتمثّل جا } \theta .$$

$$\frac{\sin \theta}{\sin \phi} = \frac{1}{\frac{\text{س}}{\text{ص}}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} \text{ ، وتمثّل جا } \phi .$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin D}{\sin S} &= \text{، وتمثل جتاص} \\ \frac{\sin S}{\sin D} &= \text{، وتمثل} \\ \frac{\sin D}{\sin S} &= \text{، وتمثل ظاص} \\ \frac{\sin D}{\sin S} &= \text{، وتمثل} \end{aligned}$$

**أَعْلَم** : النسب المثلثية الناتجة عن مقلوب النسب المثلثية الأساسية تسمى النسب المثلثية الثانوية، وتعرف كما يأتي:

**قاطع الزاوية س**:  $\cot S = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{1}{\sin S}$

**قاطع تمام الزاوية س**:  $\operatorname{csc} S = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{1}{\cos S}$

**ظل تمام الزاوية س**:  $\operatorname{sec} S = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{1}{\tan S}$

**نشاط(٣)** : أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب، فيه أ ب = ٧ سم، أ ج = ٨ سم، أجد:

١) قا أ    ٢) قتا أ    ٣) ظتا أ    ٤) جا أ × قتا أ    ٥) جتا أ × قا أ



نجد أولاً طول الصلع ب ج :  $(B \bar{J})^2 = (A \bar{J})^2 - (A \bar{B})^2$

$$(B \bar{J})^2 = 64 - 49 = 15, \text{ ومنها} B \bar{J} = \sqrt{15}$$

$$1) \cot A = \frac{1}{\sin A} = \frac{8}{7}$$

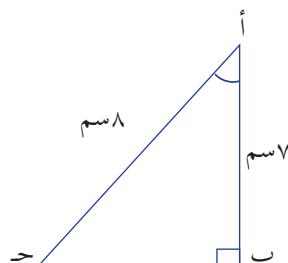
$$2) \operatorname{csc} A = \frac{1}{\cos A}$$

$$3) \operatorname{sec} A = \frac{1}{\tan A}$$

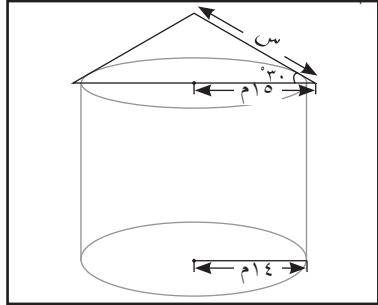
$$4) \tan A \times \operatorname{csc} A = \tan A \times \frac{1}{\sin A}$$

$$5) \operatorname{csc} A \times \cot A = \frac{1}{\sin A} \times \frac{1}{\tan A}$$

لاحظ أن النسبة المثلثية × مقلوبها =



**نشاط (٤):** مخزن لتخزين الحبوب على شكل أسطوانة يعلوه غطاء مخروطي كما في الشكل المجاور، وكان نصف قطر قاعدة المخزن ١٤ م. يزيد طول نصف قطر الغطاء متراً واحداً عن طول نصف قطر القاعدة، أجد قيمة س حيث س طول راسم الغطاء.



$$\frac{s}{\square} = \tan 30^\circ$$

$$\frac{s}{\square} = \frac{2}{\square}$$

$$s = \frac{2}{\square} \times 14 \text{ م}$$

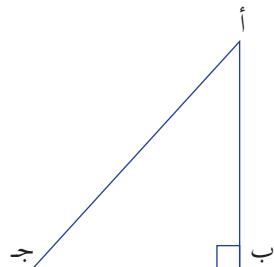
إذن طول راسم الغطاء =  $\frac{2}{\square} \times 14$  م

**نشاط (٥):** أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب. فيه:  $\angle A + \angle D = 90^\circ$ ، ومنها:



$$\angle D = 90^\circ - \angle A$$

أكمل إيجاد النسب المثلثية، باستخدام أطوال أضلاع المثلث:



$$\frac{\text{ج}}{\text{أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}} \quad , \quad \frac{\text{ج}}{\text{أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}}$$

$$\frac{\text{ج}}{\text{أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}} \quad , \quad \frac{\text{ج}}{\text{أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}}$$

$$\frac{\text{ج}}{\text{أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}} \quad , \quad \frac{\text{ج}}{\text{أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}}$$

$$\frac{\text{ج}}{\text{أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}} \quad , \quad \frac{\text{ج}}{\text{أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}}$$

$$\frac{\text{ج}}{\text{أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}} \quad , \quad \frac{\text{ج}}{\text{أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}}$$

أقارنُ بين كلّ نسبتين متقابلتين، ثم أستنتج العلاقة بين النسب المثلثية للزواياتين : أ، (٩٠° - أ) ؟

: إذا كانت أ زاوية حادّة، فإنّ:

١) جا أ = جتا ( $90^\circ - \alpha$ ) ، والعكس صحيح، جا الزاوية = جتا المتممة.

٢) ظا أ = ظتا ( $90^\circ - \alpha$ ) ، والعكس صحيح، ظل الزاوية = ظتا المتممة.

٣) قا أ = قتا ( $90^\circ - \alpha$ ) ، والعكس صحيح، قا الزاوية = قتا المتممة.

**نشاط(٦)** : أ جـ هـ مثلث قائم الزاوية في جـ، فيه: جـتا هـ =  $\frac{1}{5}$  ،

فإذا كان أ هـ = ١٠ وحدات، أجد:



١) قيم النسب المثلثية الأخرى للزاوية هـ .

لإيجاد باقي النسب المثلثية نرسم المثلث أ جـ القائم في جـ، فيه: جـ هـ = ٢ وحدة،

أ هـ = ١٠ وحدات. فيكون

$$\text{جا هـ} = \text{_____} , \quad \text{أ جـ} = \text{_____}$$

$$\text{قا هـ} = \text{_____} , \quad \text{ظا هـ} = \text{_____}$$

$$\text{ظتا هـ} = \text{_____} , \quad \text{قتا هـ} = \frac{5}{\underline{\underline{24}}}$$

$$\frac{\text{قتا}(90^\circ - \text{هـ}) \text{قا}(90^\circ - \text{هـ})}{\text{ظتا هـ}} \quad ٢) \text{ قيمة المقدار :}$$

$$\frac{\text{قتا هـ} \times \boxed{\phantom{00}}}{\text{ظتا هـ}} =$$

$$\frac{\frac{5}{\underline{\underline{24}}} \times 5}{(\quad)} =$$

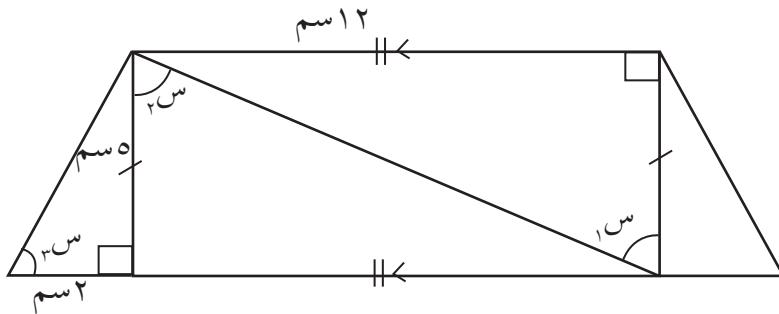
$$\text{_____} =$$

## تمارين ومسائل:



**س١** س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص، فيه س ص = ص ع = ٥ سم، أجد كلاً من:  
جتا ع، ظا ع، قاع، قطاع.

**س٢** أجد النسب المثلثية الأساسية والثانوية للزوايا س، س، س في الشكل الآتي:

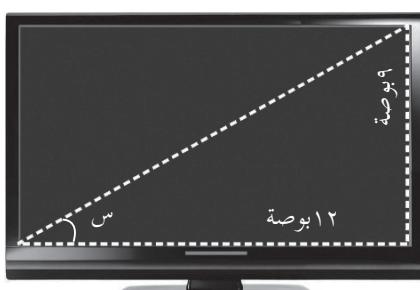


**س٣** لدى هاني سلك أ د طوله ٢٥ سم، أراد أن يشكل منه زاوية قائمة لاستخدامه في حصة الرياضيات، أخذ عليه النقاطان ب، ج، وقام بشنی السلك عند النقطة ب.

بحيث: أ ب = ب ج = ١٠ سم ، ب د يعادل أ ب. أجد:

$$\begin{array}{l} \text{١ طول أ د، طول أ ج} \\ \text{٢ ظا (أ ج ب)، جتا د} \end{array}$$

**س٤** أ ج ه مثلث قائم الزاوية في ج، جتا  $(90^\circ - ه) = \frac{2}{3}$  ، أ ه = ٣ وحدات، أجد:  
جا ه ، ظا ه ، ظتا  $(90^\circ - ه)$



**س٥** تصنف شاشات الحاسوب وفقاً لطول قطرها، في الشكل

المجاور طول الشاشة \* = ١٢ بوصة \*\*، وعرضها = ٩

$$\text{بوصة، أيُّنْ أَنْ: } \frac{1}{جتا س} = \frac{1}{1 - جا س}$$

\* الواجهة الأمامية للشاشة

\*\* البوصة = ٢٥٤ سم

## المتطابقات المثلثية

**نشاط (١):** هدى وشادي طلابان في الصف التاسع في مدرسة الشهيد أبو جهاد الأساسية، كلفهما معلم الرياضيات بواجبٍ يتيّي، وكان حول كون المعادلة  $s^2 - 9 = (s - 3)(s + 3)$  صحيحةً لـ كلّ قيم المتغير  $s$ ، أم صحيحة بعض قيم المتغير  $s$ . وفي اليوم التالي تناقش الطالبان حول ذلك.



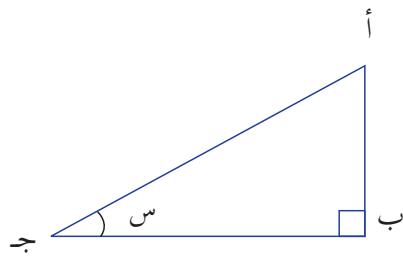
أيهما كانت إجابته صحيحةً: هدى أم شادي؟ ولماذا؟  
لاحظ أنَّ:  $s^2 - 9 = (s - 3)(s + 3)$  : صحيحة لـ

**أَتَعْلَم** : المتطابقة هي معادلة صحيحة لجميع قيم المتغيرات فيها.  
والمتطابقة المثلثية هي متطابقة تحوي نسباً مثلثية. وتكون صحيحة لجميع قيم الزوايا الموجودة فيها.



**نشاط(٢)**: في المثلث المجاور، أجد:

أولاً: العلاقة بين ظاس، جاس، جتاس



$$\frac{\frac{أ}{ب}}{\frac{ب}{ج}} = \frac{جاس}{جتاس}$$

$$\frac{\frac{أ}{ب}}{\frac{ج}{ج}} = \text{ظاس}$$

ثانياً: قيمة جاس + جتاس

$$\frac{\square}{\square} = \frac{\frac{أ}{ب}}{\frac{ج}{ج}} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{\square}{\square} = \frac{\frac{ب}{ج}}{\frac{أ}{ج}} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = \text{جاس} + \text{jetas}$$

$$1 = \frac{\frac{أ}{ب} + \frac{ب}{ج}}{\frac{أ}{ج}} \quad (\text{لماذا})?$$

**اعْلَم** : إذا كان س ص ع مثلثاً قائم الزاوية في ص، فإنّ :

$$\text{جاس} = \frac{\text{جتاس}}{\text{ظاس}}$$

$$2. \text{ جاس} + \text{jetas} = 1 \quad (\text{تسمى متطابقات مثلثية أساسية})$$

وهناك كثيرٌ من المتطابقات المثلثية التي تُشتقُّ من المتطابقة المثلثية الأساسية السابقة منها:

★ بقسمة طرفي المتطابقة المثلثية الأساسية الثانية على: جتاس ، تنتج متطابقة مثلثية أساسية أخرى:

$$\text{ظاس} + 1 = \text{فاس}$$

★ بقسمة طرفي المتطابقة نفسها على: جاس ، نحصل على المتطابقة : ظاس + 1 = قتاس

**نشاط (٣):** أثبت صحة المتطابقة الآتية:



$$\frac{جـاـهـ}{ـجـتـاهـ} + ـ1ـ = \frac{ـ1ـ - ـجـتـاهـ}{ـ1ـ - ـجـتـاهـ}$$

$$\frac{ـجـاـهـ}{ـ1ـ - ـجـتـاهـ} = \frac{ـ1ـ - ـجـتـاهـ}{ـ1ـ - ـجـتـاهـ}$$

$$\frac{(ـ) (ـ)}{ـ1ـ - ـجـتـاهـ} =$$

$$= ـ1ـ + ـجـتـاهـ$$

**لاحظ:** لإثبات صحة متطابقة بدأنا بأحد الأطراف للوصول إلى الطرف الآخر.

**نشاط (٤):** قام كل من علي و هبة بمحاولة اثبات صحة المتطابقة:



جـتـاهـ سـ ظـنـاهـ سـ = فـنـاهـ سـ - جـاسـ كـالـآـتـيـ:

**طريقة هبة**

$$\frac{ـ1ـ}{ـفـتـاـسـ - ـجـاسـ} = \frac{ـ1ـ}{ـجـاـسـ} - ـجـاـسـ$$

$$\frac{ـ1ـ - ـجـاـسـ}{ـجـاـسـ} =$$

(لكن :  $ـجـاـسـ + ـجـتـاهـ سـ = ـ1ـ$ )

$$\frac{ـجـتـاهـ سـ}{ـجـاـسـ} =$$

**طريقة علي**

$$\frac{ـجـتـاهـ سـ}{ـجـتـاهـ سـ} = \frac{ـجـتـاهـ سـ}{ـجـاـسـ} \times \frac{ـجـاـسـ}{ـجـاـسـ}$$

$$\frac{ـجـتـاهـ سـ}{ـجـاـسـ} =$$



**(أناقش الحلّين)**

**لـاحـظ:** لإثبات صـحةـ مـطـابـقـةـ تمـ أـخـذـ كـلـ طـرـفـ عـلـىـ حـدـهـ حـتـىـ تـسـاوـيـ الـطـرـفـانـ.

تمارين وسائل:



## س١ أثبت صحة المتطابقات الآتية:

$$\text{جتاُس} = (1 + \text{جا س}) (1 - \text{جا س})$$

جتا س + جا س ظا س = جتا س

فاس قتس = ظاس + ظتس

$$4 \quad (جاس + جتا س)^2 - 2 \text{ جا س جتا س} = 1$$

**س٢** أُعْطِ مَثَلًاً يَبْيَّنُ أَنَّ كَلَّا مِمَّا يَأْتِي لَيْسَ مُتَطَابِقَةً مُثَلِّشَةً:

أ - جا س = جتا س

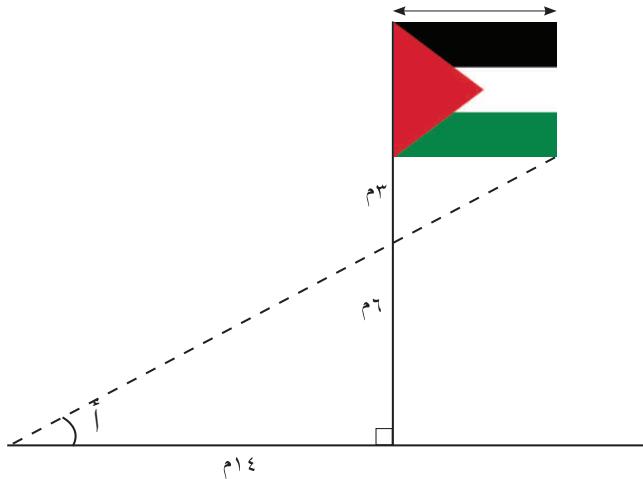
**ب** جا س جتا س =  $\frac{1}{2}$  جا س

**س٣** تم رفع علم فلسطين أمام مقر الأمم المتحدة أواخر شهر أيلول من العام ٢٠١٥م.

أجد طول العلم

**ب** بالاعتماد على الزواية الحادة أ في الشكل الآتي أتحقق من صحة المتطابقة

$$(جاء - ) (ظاء + قاء) = جتا$$



## المعادلات المثلثية

**نشاط (١):** ينصُّ قانونُ انعكاسِ الضوءِ الأول على أنَّ زاويةَ سقوطِ شعاعٍ على سطحِ



عنوانٌ تساوي زاويةَ انعكاسِ الشعاع نفسه. يحاول شخصٌ طوله ١٧٠ سم معرفةَ ارتفاعِ عمودِ كهرباءٍ من خلالِ النَّظرِ إلى مرآةٍ مسليَّةٍ ملقاءٍ على سطحِ الأرضِ، بحيثٍ يبعدُ عن النقطةِ جَ مسافةً ٢ م، فإذا عُلِمَ أنَّ قياسَ زاويةِ السقوطِ  $٥٠^\circ$ ، وأنَّ عمودَ الكهرباءِ يبعدُ ٤ م عن النقطةِ جَ، فكيفٍ يمكنُ استخدامُ النسب المثلثيَّةِ في الشكلِ المقابلِ، لمعرفةِ ارتفاعِ عمودِ الكهرباءِ؟

قياس زاوية الانعكاس =

قياس الزاوية س في المثلث أ ب ج =  $٤٠^\circ$  (لماذا؟)

$$\text{ظ س} = \frac{\square}{\square}$$

$$\text{ع} = ٤ \text{ ظاس}$$



$$\text{ع} = ٤ \text{ ظ} = \frac{\square}{\square} = ٣,٤ \text{ متر}$$

تُسمى الجملةُ :  $٣,٤ = ٤ \text{ ظاس}$  معادلةً مثلثيةً.

هل هناك طريقةً حلًّا أخرى.

**أفكِرْ و أناقشْ**

**المعادلة المثلثية:** هي معادلة تحتوي نسبةً مثلثيةً أو أكثر، تكون صحيحةً لبعض قيم المتغير فيها.



\* زاوية السقوط: هي الزاوية المحصورة بين الشعاع الساقط والعمود المقام عند نقطة السقوط.

### **نشاط (٢): أحل المعادلات المثلثية الآتية:**



أ)  $\sqrt{2} \operatorname{قتا س} - 2 = 0$  ، حيث: س زاوية حادة.

$$\operatorname{قتا س} - 2 = 0$$

$$\operatorname{قتا س} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{جا س} = \frac{2}{\sqrt{2}} \text{ ، إذن: س} = 45^\circ$$

ومنها: مجموعة حل المعادلة هي  $\{45^\circ\}$

ب)  $\sqrt{3} \operatorname{جا س} - \operatorname{جتا س} = 0$  ، س زاوية حادة.

$$\operatorname{جا س} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{جا س} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{جتا س} \text{ (قسمة طرفي المعادلة على جتا س)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

س =  $30^\circ$  ، ومنها: مجموعة حل المعادلة هي  $\{30^\circ\}$

### **ملاحظة:**

**حل المعادلة المثلثية:** هو إيجاد قياس الزاوية س التي تجعل المعادلة صحيحة.

**مجموعة حل المعادلة:** هي مجموعة القيم التي تجعل المعادلة صحيحة دائمًا.



### **نشاط (٣): أحل المعادلات المثلثية الآتية:**

أ)  $2 \operatorname{جتا}^2 س - 7 \operatorname{جتا س} + 3 = 0$  ، س زاوية حادة.

أكمل بإيجاد قيمة/قيمة س :

أ)  $2 \operatorname{جتا}^2 س - 7 \operatorname{جتا س} + 3 = 0$  ، س زاوية حادة

(جتا س - 1) (جتا س - 3) = 0

إما  $2 \operatorname{جتا س} - 1 = 0$  أو  $\operatorname{جتا س} - 3 = 0$

$$\operatorname{جتا س} = \frac{1}{2}$$

مروفة (لماذا؟)

$$س =$$

ومنها: مجموعة حل المعادلة هي  $\{60^\circ\}$

هل كل معادلة مثلثية تمثل متطابقة مثلثية؟

**أفك و أناقش**

تمارين وسائل:



**س١** أحل المعادلات المثلثية الآتية حيث س، هـ، أ، زوايا حادة :

١٠ = (٢ جتا هـ - ١) (١ جتا هـ - ١)

$$\bullet = 1 + 2\cos \theta$$

ج

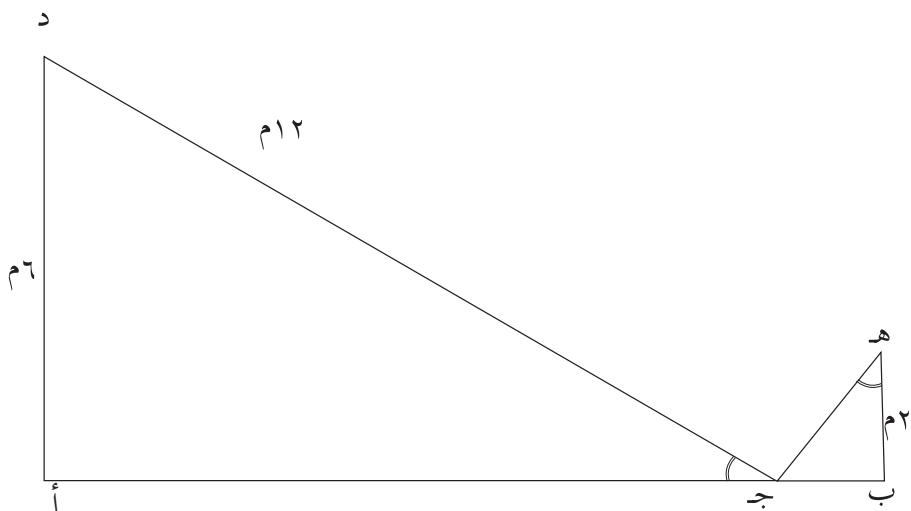
**س٢** أب ج مثلث قائم الزاوية في ب فيه:  $قا = \frac{1}{2}$ ، أحل المعادلات الآتية:

س جاؤ - جتاً = ۱

٢ - ظاءٌ - ظاءٌ

$$\text{قتا}(90^\circ - \theta) = \left(\frac{1}{s}\right) - \frac{s^2}{\sin^2 \theta}, \quad s \neq 0$$

**س٣** يمثل الشكل الآتي موقع المنزل (هـ) عند النقطة (جـ) المزودة لخدمة الإنترنـت من موقع التقوية (دـ)، وكان  $\triangle (دـ جـ أـ) = \triangle (جـ هـ بـ)$ .  
أجد  $\triangle$  هـ.



## تمارين عامة

س١ أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ ما قيمة المقدار  $\frac{\text{جتا } س \text{ قتا } س}{\text{ظا } س}$  ؟

- أ) ظنا س      ب) قتا س      ج) ظتا س      د) قتا س

٢ إذا كانت س زاوية حادة، وكان جاس = جتا(س + ٢٠°)، فما قياس الزاوية س ؟

- أ) ٣٠°      ب) ٣٥°      ج) ٥٠°      د) ٢٠°

٣ ما قيمة جا٢٣٠ + جتا٢٣٠ ؟

- أ) صفر      ب) ١

٤ ما قيمة جتا ه  $\times \frac{1}{قا ه}$  ؟

- أ) صفر      ب) ١      ج) جتا ه      د) جتا ه

٥ إذا كانت س زاوية حادة، وكان جتا س ظا س =  $\frac{1}{٣}$  ، فما قيمة س ؟

- أ) ٤٥°      ب) ٣٠°      ج) ٦٠°      د) ٨٠°

٦ ما قيمة المقدار المكافئ لـ: جا٢ س + ظا٢ س جا٢ س ؟

- أ) ظا س      ب) قا٢ س      ج) ظتا س      د) ظا٢ س

س٢ إذا كان جا٢ = ٣٠، أجد قيمة النسبة المثلثية الأخرى للزاوية أ، وقيمة النسبة المثلثية للزاوية المتممة لها.

س٣ أثبت صحة المتطابقات المثلثية الآتية:

$$\text{ب} \quad \text{جتا } س + \text{ظا } س \text{ جتا } س = ١$$

$$\text{د} \quad \frac{\text{جا } س \text{ جتا } س}{\text{ظا } س} + \frac{\text{ظا } س}{\text{قتا } س \text{ ظا } س} = ١$$

$$\text{أ} \quad \frac{\text{ظا } س}{١ + \text{ظا } س} = \text{جا } س$$

$$\text{ج} \quad ١ + \text{ظتا}(٩٠ - ه) = \text{قا } ه$$

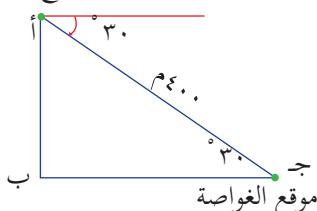
س٤ إذا علمت أن: ١٣ جا٢ - ١٢ = ٠، حيث أ زاوية حادة. أحسب قيمة ظا٢ + قا٢

**س٥** أحل المعادلات المثلثية الآتية:

**أ**  $2 - جتا هـ + 3 = 0$

**ب**  $2 جتا هـ - 5 جتا هـ + 2 = 0$

موقع الرadar



**س٦** رصد رadar على سفينة حربية غواصه على بعد ٤٠٠ متر تحت سطح الماء، بزاوية انخفاض قياسها  $30^\circ$ ، أجد عمق الغواصه تحت سطح الماء لحظة الرصد.

**س٧** أقيِّم ذاتيًّا: أكمل الجدول الآتي:

متدلي	متوسط	مرتفع	المهارة
			اجد النسب المثلثية لاي زاوية حادة
			احل مسائل كلامية على النسب المثلثية
			اوظف النسب المثلثية في حل مشكلات حياتية

## مشروع الوحدة:

يفصلُ وادي بين قريتي ببرطعة الشرقية وبرطعة الغربية، ولتسهيل الحركة بينهما فكر السكان إقامة جسرٍ فوقه، كيف تساعد السكان في التخطيط لإقامة الجسر؟ (اعتبر القرىتين على نفس المستوى)

- ★ حدّد الأدوات اللازمة للعمل.
- ★ ارسم شكلًا توضيحيًّا.
- ★ حدّد المفاهيم والمهارات الرياضية التي تحتاجها.
- ★ ما المخاطر التي يواجهونها؟
- ★ اكتب تقريرًا يوضح خطوات العمل.

- [www.mohe.ps/pcdc](http://www.mohe.ps/pcdc)

روابط إلكترونية

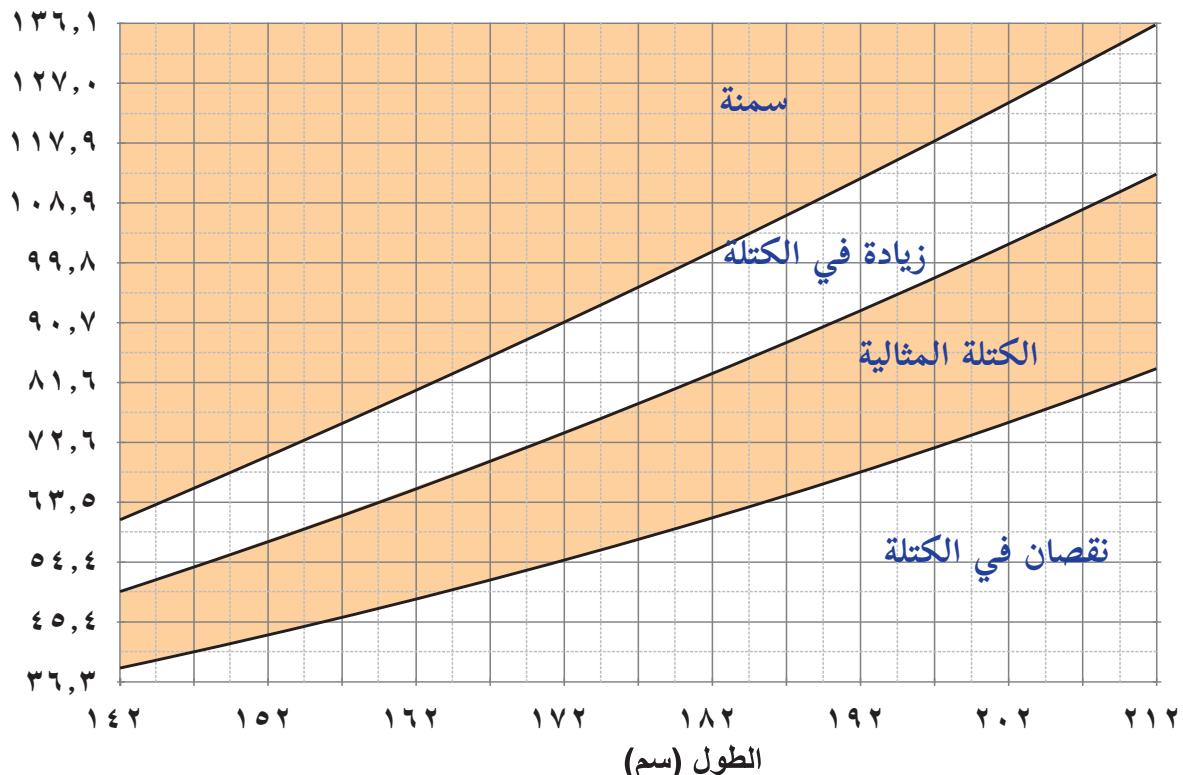
# ٦

## الجبر وتطبيقات الحساب

### الوحدة

الكتلة  
(كغم)

المخطط البياني للطول والكتلة



أتأمل الصورة، أقيس طولي، وأستخدم المخطط البياني في تحديد الكتل المناسبة، لتكون كتلي ضمن الكتلة المثلية (الطبيعية).

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها، أن يكونوا قادرين على توظيف المtribainat الخطية في الحياة العملية من خلال الآتي:

- ١ التعرُّف إلى الفترات وأنواعها .
- ٢ تمثيل الفترات على خط الأعداد .
- ٣ التعرُّف إلى المtribaine الخطية بمتغيرٍ واحدٍ، وحلّها .
- ٤ التعرُّف إلى المtribaine الخطية بمتغيرين، وتمثيلها بيانياً .
- ٥ حلّ نظامٍ من المtribainat الخطية بمتغيرين بيانياً .
- ٦ حلّ مشكلاتٍ حياتية على مفاهيم الوحدة .

## الفترات

**نشاط(١):** يعد الحق في توفير التعليم المجاني من الحقوق الأساسية لكل طفل، يلتحق



الأطفال في فلسطين بالصف الأول الأساسي في المدارس الحكومية والوكالة إذا كانت أعمارهم بين ٥ سنوات و٧ أشهر، و٦ سنوات و٧ أشهر، في بداية العام الدراسيٌ، إضافةً إلى الذين أعمارهم ٦ سنوات و٧ أشهر تماماً.

يمكن لأي طفل في فلسطين عمره ٦ سنوات وشهر في بداية العام الدراسي الالتحاق بالمدارس الفلسطينية الحكومية، أو الوكالة، لاحظ أن  $\frac{1}{12}$  ممحض بين العددين

$$\frac{7}{12}, \frac{5}{12}$$

لا يمكن لطفلٍ في فلسطين عمره ٥ سنوات الالتحاق في المدارس الحكومية، أو مدارس الوكالة.

لاحظ أنّ:  $٥ \notin \{s : s \in \mathbb{N}, s > \frac{7}{12}\}$ .

هل يمكن للطفل الفلسطيني الذي عمره ٥ سنوات و ١٠ أشهر الالتحاق بالمدرسة؟ \_\_\_\_\_، لماذا؟ \_\_\_\_\_.

## نشاط (٢):



١. أكمل كتابة المجموعات الآتية:

أ) المجموعة المكونة من العددين الحقيقيين: ١ ، ٥، وجميع الأعداد المحصورة بينهما على خط الأعداد =  $\{s : s \in \mathbb{N}, 1 \leqslant s \leqslant 5\}$ ، وهي مجموعة الأعداد الحقيقة التي تبدأ بالعدد ١ وتنتهي بالعدد ٥.

ب) المجموعة المكونة من العدد ١ ، وجميع الأعداد المحصورة بين العددين: ١ ، ٥ على خط الأعداد =  $\{s : s \in \mathbb{N}, 1 < s \leqslant 5\}$ .

٢. ماذا نسمّي هذه المجموعات؟ \_\_\_\_\_

\* على اعتبار أن العام الدراسي يبدأ في الأول من شهر أيلول.

ليكن  $\alpha$  ،  $\beta$  عددين حقيقيين، بحيث:  $\alpha > \beta$ ، فإن مجموعه جميع الأعداد الحقيقية الممحصورة بين العددين:  $\alpha$  ،  $\beta$  على خط الأعداد، تسمى فترة ، ويستعمل الرمزان "[ " ، " ]" للدلالة على انتمام طرفي الفترة أو عدم انتمائهما إليها.

### الفترات المحدودة :

ليكن  $\alpha$  ،  $\beta$  عددين حقيقيين ، حيث:  $\alpha > \beta$

الفترة على شكل مجموعه	الفترة بالرموز	أنواع الفترات
{ $s: s \in \mathbb{R}$ ، $\alpha \geqslant s \geqslant \beta$ }	[ $\alpha$ ، $\beta$ ]	المغلقة
{ $s: s \in \mathbb{R}$ ، $\alpha > s \geqslant \beta$ }	[ $\alpha$ ، $\beta$ ]*	نصف المغلقة (نصف المفتوحة)
{ $s: s \in \mathbb{R}$ ، $\alpha \geqslant s > \beta$ }	[ $\alpha$ ، $\beta$ ]**	نصف المغلقة (نصف المفتوحة)
{ $s: s \in \mathbb{R}$ ، $\alpha > s > \beta$ }	[ $\alpha$ ، $\beta$ ***]	المفتوحة

يمكن التعبير عن الفترات بالكلمات مثلاً:

الفترة الثانية: تعبّر عن جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من العدد  $\alpha$  والأقل أو يساوي العدد  $\beta$

\* نصف مغلقة من اليسار    \*\* نصف مغلقة من اليمين    \*\*\* يمكن كتابتها أيضاً على الصورة ( $\alpha$  ،  $\beta$ )



**نشاط (٣):** أكمل كتابة الفترات الآتية كمجموعات، وأمثلها على خط الأعداد:

الفترة	ال الفترة على شكل مجموعة	التمثيل على خط الأعداد
[٧ ، ٢]	{س: س ≥ ٢ ، س ≤ ٧}	
[٧ ، ٢]	{س: س > ٢ ، س ≤ ٧}	
[٥ ، ٢[	{س: س > ٥ ، س ≤ ٢[}	
]٥ ، ٢[	{س: س > ٥ ، س ≤ ٢[}	



**نشاط (٤):** أ) أكتب الفترة  $[-\frac{1}{2}, 2]$ ، على شكل مجموعة:

ب) أمثلها على خط الأعداد:



ج) أحدد أي الأعداد الآتية تنتمي إلى الفترة  $[-\frac{1}{2}, 2]$ :

$$-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1, 8$$

د) أكتب ٣ أعداد تنتمي إلى الفترة  $[-\frac{1}{2}, 2]$ :

- 1) هل  $[1, 4] = [4, 1]$ ؟ ، ولماذا؟
- 2) بين كل عددين حقيقيين يوجد عدد غير منتهي من الأعداد، أعط ثلاثة أعداد بين العددين  $\frac{1}{10}$  ،  $\frac{2}{10}$ .

**أفـَكـَرْ وَأـَنـَاقـَشْ**



**نشاط (٥)** مصعدٌ في بناءٍ مكونٍ من ٧ طوابق، كُتب عليه: "الحد الأعلى للحمولة ٤٥٠ كغم".

يمكن التعبير عن كتلة الحمولة الممكنة للمصعد بالفترة: [٠ ، ٤٥٠].

أمثل ذلك الفترة على خط الأعداد:

هل يمكن لـ ٣ أشخاص، كتلهم: ٨٣ كغم ، ٩٠ كغم ، ٧٩ كغم، ويحمل كلّ منهم ٢٥ كغم من الأرز الصعوداً معاً إلى الطابق الرابع؟  
وضّح إجابتك.

### الفترات غير المحدودة

ليكن  $A$  عدداً حقيقياً ، فإنّ:

الفترة على شكل مجموعة	الفترة
$\{s : s \in H, s \leq A\}$	$[A, \infty]$
$\{s : s \in H, s < A\}$	$[A, \infty)$
$\{s : s \in H, s \geq A\}$	$[A, \infty[$
$\{s : s \in H, s > A\}$	$\infty[, A]$
$\{s : s \in H\} = H$	$\infty[, \infty[$

يمكن التعبير عن الفترات بالكلمات مثلاً:

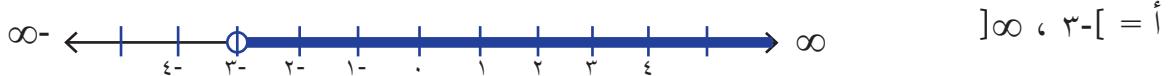
الفترة الأولى تعبّر عن جميع الأعداد الحقيقة الأكبر من أو يساوي العدد  $A$ .

**ملاحظة:** الرمز  $\infty$  يدلّ على مalanهاية في الفترات غير المحدودة.

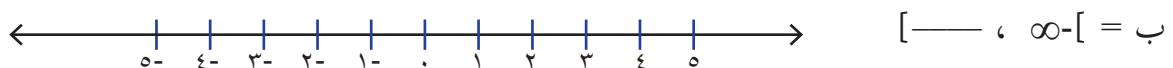


**نشاط (٦)** أعيّر عن المجموعات الآتية بفترات، وأكمل تمثيلها على خط الأعداد:

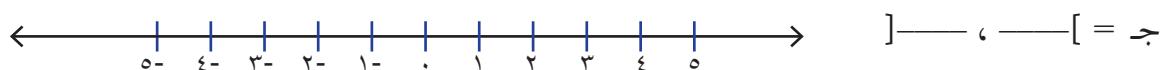
$$1) \quad \{s : s \in \mathbb{H}, s < 3\} = \{s : s \in \mathbb{H}, s < 3\}$$



$$2) \quad \{s : s \in \mathbb{H}, s \geq 2\} = \{s : s \in \mathbb{H}, s \geq 2\}$$



$$3) \quad \{s : s \in \mathbb{H}\} = \{s : s \in \mathbb{H}\}$$



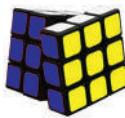
**نشاط (٧)**: أُمِّلِّ الفترة  $[10, \infty)$  على خط الأعداد، أحَدِّد أي الأعداد الآتية تتبع  
إلى هذه الفترة:  $0.980, 10, 0, \frac{1}{2}, 100$ .



صفر  $\in [0, \infty)$  ،  $10 \in [0, \infty)$  ،  $100 \in [0, \infty)$

$-0.980 \notin [0, \infty)$  ،  $\frac{1}{2} \in [0, \infty)$  ،  $-10 \notin [0, \infty)$

## تمارين ومسائل:



س١ كُتُبْ عَلَى قَطْرَةِ لِلْعَيْنِ: "صَالِحةٌ لِلْاسْتِخْدَامِ لِمَدَدِ ٣٠ يَوْمًا مِنْ تَارِيخِ فَتْحِ الْبَوْبَةِ"، أَعْبَرُ عَنْ مَدَدِ صَلَاحِيَّتِهَا عَنْدِ فَتْحِهَا بِفَتْرَةٍ، وَأَمْثَلُهَا عَلَى خَطٍّ الْأَعْدَادِ.

س٢ أَكْتُبِ الْمَجْمُوعَاتِ الْأَتَيَةِ عَلَى شَكْلِ فَتَرَاتِ :

أ)  $ل = \{s : s \in \mathbb{Z}, s > 21\} \geq 400$ .

ب) جميع الأعداد الحقيقية التي يُعدُّها عن الصفر أقل من ٥ وحدات.

ج) درجات الحرارة السالبة.

س٣ أَمْثَلُ الْفَتَرَاتِ الْأَتَيَةِ عَلَى خَطٍّ الْأَعْدَادِ :

أ)  $[2, 4]$

ب)  $[0, 4]$

ج)  $[9, \infty)$

س٤ أَعْبَرْ عَمَّا يَلِي بِفَتَرَاتِ :

أ) فَتَرَةُ صَلَاحِيَّةِ مِصْبَاحٍ ٩٥٠ سَاعَةً تَشْغِيلٍ.

ب) الْفَتَرَةُ الَّتِي تُمَثِّلُ أَيَّ عَدِّ حَقِيقِيٍّ غَيْرِ مُوجَبٍ.

س٥ أَحَدُّ الْأَعْدَادِ الَّتِي تَنْتَمِي إِلَى الْفَتَرَةِ  $[-\infty, -3]$  ،  $[-3, -1]$  ،  $[-1, 0]$  ،  $[-4, -3]$  ،  $[-4, -2]$  ،  $[-2, -1]$  ،  $[-1, 0]$  ،  $[-3, -2]$  ،  $[-4, -3]$  ،  $[-5, -4]$  ،  $[-6, -5]$  ،  $[-7, -6]$  ،  $[-8, -7]$  ،  $[-9, -8]$  ،  $[-10, -9]$  ،  $[-11, -10]$  ،  $[-12, -11]$  ،  $[-13, -12]$  ،  $[-14, -13]$  ،  $[-15, -14]$  ،  $[-16, -15]$  ،  $[-17, -16]$  ،  $[-18, -17]$  ،  $[-19, -18]$  ،  $[-20, -19]$  ،  $[-21, -20]$  ،  $[-22, -21]$  ،  $[-23, -22]$  ،  $[-24, -23]$  ،  $[-25, -24]$  ،  $[-26, -25]$  ،  $[-27, -26]$  ،  $[-28, -27]$  ،  $[-29, -28]$  ،  $[-30, -29]$  ،  $[-31, -30]$  ،  $[-32, -31]$  ،  $[-33, -32]$  ،  $[-34, -33]$  ،  $[-35, -34]$  ،  $[-36, -35]$  ،  $[-37, -36]$  ،  $[-38, -37]$  ،  $[-39, -38]$  ،  $[-40, -39]$  ،  $[-41, -40]$  ،  $[-42, -41]$  ،  $[-43, -42]$  ،  $[-44, -43]$  ،  $[-45, -44]$  ،  $[-46, -45]$  ،  $[-47, -46]$  ،  $[-48, -47]$  ،  $[-49, -48]$  ،  $[-50, -49]$  ،  $[-51, -50]$  ،  $[-52, -51]$  ،  $[-53, -52]$  ،  $[-54, -53]$  ،  $[-55, -54]$  ،  $[-56, -55]$  ،  $[-57, -56]$  ،  $[-58, -57]$  ،  $[-59, -58]$  ،  $[-60, -59]$  ،  $[-61, -60]$  ،  $[-62, -61]$  ،  $[-63, -62]$  ،  $[-64, -63]$  ،  $[-65, -64]$  ،  $[-66, -65]$  ،  $[-67, -66]$  ،  $[-68, -67]$  ،  $[-69, -68]$  ،  $[-70, -69]$  ،  $[-71, -70]$  ،  $[-72, -71]$  ،  $[-73, -72]$  ،  $[-74, -73]$  ،  $[-75, -74]$  ،  $[-76, -75]$  ،  $[-77, -76]$  ،  $[-78, -77]$  ،  $[-79, -78]$  ،  $[-80, -79]$  ،  $[-81, -80]$  ،  $[-82, -81]$  ،  $[-83, -82]$  ،  $[-84, -83]$  ،  $[-85, -84]$  ،  $[-86, -85]$  ،  $[-87, -86]$  ،  $[-88, -87]$  ،  $[-89, -88]$  ،  $[-90, -89]$  ،  $[-91, -90]$  ،  $[-92, -91]$  ،  $[-93, -92]$  ،  $[-94, -93]$  ،  $[-95, -94]$  ،  $[-96, -95]$  ،  $[-97, -96]$  ،  $[-98, -97]$  ،  $[-99, -98]$  ،  $[-100, -99]$  ،  $[-101, -100]$  ،  $[-102, -101]$  ،  $[-103, -102]$  ،  $[-104, -103]$  ،  $[-105, -104]$  ،  $[-106, -105]$  ،  $[-107, -106]$  ،  $[-108, -107]$  ،  $[-109, -108]$  ،  $[-110, -109]$  ،  $[-111, -110]$  ،  $[-112, -111]$  ،  $[-113, -112]$  ،  $[-114, -113]$  ،  $[-115, -114]$  ،  $[-116, -115]$  ،  $[-117, -116]$  ،  $[-118, -117]$  ،  $[-119, -118]$  ،  $[-120, -119]$  ،  $[-121, -120]$  ،  $[-122, -121]$  ،  $[-123, -122]$  ،  $[-124, -123]$  ،  $[-125, -124]$  ،  $[-126, -125]$  ،  $[-127, -126]$  ،  $[-128, -127]$  ،  $[-129, -128]$  ،  $[-130, -129]$  ،  $[-131, -130]$  ،  $[-132, -131]$  ،  $[-133, -132]$  ،  $[-134, -133]$  ،  $[-135, -134]$  ،  $[-136, -135]$  ،  $[-137, -136]$  ،  $[-138, -137]$  ،  $[-139, -138]$  ،  $[-140, -139]$  ،  $[-141, -140]$  ،  $[-142, -141]$  ،  $[-143, -142]$  ،  $[-144, -143]$  ،  $[-145, -144]$  ،  $[-146, -145]$  ،  $[-147, -146]$  ،  $[-148, -147]$  ،  $[-149, -148]$  ،  $[-150, -149]$  ،  $[-151, -150]$  ،  $[-152, -151]$  ،  $[-153, -152]$  ،  $[-154, -153]$  ،  $[-155, -154]$  ،  $[-156, -155]$  ،  $[-157, -156]$  ،  $[-158, -157]$  ،  $[-159, -158]$  ،  $[-160, -159]$  ،  $[-161, -160]$  ،  $[-162, -161]$  ،  $[-163, -162]$  ،  $[-164, -163]$  ،  $[-165, -164]$  ،  $[-166, -165]$  ،  $[-167, -166]$  ،  $[-168, -167]$  ،  $[-169, -168]$  ،  $[-170, -169]$  ،  $[-171, -170]$  ،  $[-172, -171]$  ،  $[-173, -172]$  ،  $[-174, -173]$  ،  $[-175, -174]$  ،  $[-176, -175]$  ،  $[-177, -176]$  ،  $[-178, -177]$  ،  $[-179, -178]$  ،  $[-180, -179]$  ،  $[-181, -180]$  ،  $[-182, -181]$  ،  $[-183, -182]$  ،  $[-184, -183]$  ،  $[-185, -184]$  ،  $[-186, -185]$  ،  $[-187, -186]$  ،  $[-188, -187]$  ،  $[-189, -188]$  ،  $[-190, -189]$  ،  $[-191, -190]$  ،  $[-192, -191]$  ،  $[-193, -192]$  ،  $[-194, -193]$  ،  $[-195, -194]$  ،  $[-196, -195]$  ،  $[-197, -196]$  ،  $[-198, -197]$  ،  $[-199, -198]$  ،  $[-200, -199]$  ،  $[-201, -200]$  ،  $[-202, -201]$  ،  $[-203, -202]$  ،  $[-204, -203]$  ،  $[-205, -204]$  ،  $[-206, -205]$  ،  $[-207, -206]$  ،  $[-208, -207]$  ،  $[-209, -208]$  ،  $[-210, -209]$  ،  $[-211, -210]$  ،  $[-212, -211]$  ،  $[-213, -212]$  ،  $[-214, -213]$  ،  $[-215, -214]$  ،  $[-216, -215]$  ،  $[-217, -216]$  ،  $[-218, -217]$  ،  $[-219, -218]$  ،  $[-220, -219]$  ،  $[-221, -220]$  ،  $[-222, -221]$  ،  $[-223, -222]$  ،  $[-224, -223]$  ،  $[-225, -224]$  ،  $[-226, -225]$  ،  $[-227, -226]$  ،  $[-228, -227]$  ،  $[-229, -228]$  ،  $[-230, -229]$  ،  $[-231, -230]$  ،  $[-232, -231]$  ،  $[-233, -232]$  ،  $[-234, -233]$  ،  $[-235, -234]$  ،  $[-236, -235]$  ،  $[-237, -236]$  ،  $[-238, -237]$  ،  $[-239, -238]$  ،  $[-240, -239]$  ،  $[-241, -240]$  ،  $[-242, -241]$  ،  $[-243, -242]$  ،  $[-244, -243]$  ،  $[-245, -244]$  ،  $[-246, -245]$  ،  $[-247, -246]$  ،  $[-248, -247]$  ،  $[-249, -248]$  ،  $[-250, -249]$  ،  $[-251, -250]$  ،  $[-252, -251]$  ،  $[-253, -252]$  ،  $[-254, -253]$  ،  $[-255, -254]$  ،  $[-256, -255]$  ،  $[-257, -256]$  ،  $[-258, -257]$  ،  $[-259, -258]$  ،  $[-260, -259]$  ،  $[-261, -260]$  ،  $[-262, -261]$  ،  $[-263, -262]$  ،  $[-264, -263]$  ،  $[-265, -264]$  ،  $[-266, -265]$  ،  $[-267, -266]$  ،  $[-268, -267]$  ،  $[-269, -268]$  ،  $[-270, -269]$  ،  $[-271, -270]$  ،  $[-272, -271]$  ،  $[-273, -272]$  ،  $[-274, -273]$  ،  $[-275, -274]$  ،  $[-276, -275]$  ،  $[-277, -276]$  ،  $[-278, -277]$  ،  $[-279, -278]$  ،  $[-280, -279]$  ،  $[-281, -280]$  ،  $[-282, -281]$  ،  $[-283, -282]$  ،  $[-284, -283]$  ،  $[-285, -284]$  ،  $[-286, -285]$  ،  $[-287, -286]$  ،  $[-288, -287]$  ،  $[-289, -288]$  ،  $[-290, -289]$  ،  $[-291, -290]$  ،  $[-292, -291]$  ،  $[-293, -292]$  ،  $[-294, -293]$  ،  $[-295, -294]$  ،  $[-296, -295]$  ،  $[-297, -296]$  ،  $[-298, -297]$  ،  $[-299, -298]$  ،  $[-300, -299]$  ،  $[-301, -300]$  ،  $[-302, -301]$  ،  $[-303, -302]$  ،  $[-304, -303]$  ،  $[-305, -304]$  ،  $[-306, -305]$  ،  $[-307, -306]$  ،  $[-308, -307]$  ،  $[-309, -308]$  ،  $[-310, -309]$  ،  $[-311, -310]$  ،  $[-312, -311]$  ،  $[-313, -312]$  ،  $[-314, -313]$  ،  $[-315, -314]$  ،  $[-316, -315]$  ،  $[-317, -316]$  ،  $[-318, -317]$  ،  $[-319, -318]$  ،  $[-320, -319]$  ،  $[-321, -320]$  ،  $[-322, -321]$  ،  $[-323, -322]$  ،  $[-324, -323]$  ،  $[-325, -324]$  ،  $[-326, -325]$  ،  $[-327, -326]$  ،  $[-328, -327]$  ،  $[-329, -328]$  ،  $[-330, -329]$  ،  $[-331, -330]$  ،  $[-332, -331]$  ،  $[-333, -332]$  ،  $[-334, -333]$  ،  $[-335, -334]$  ،  $[-336, -335]$  ،  $[-337, -336]$  ،  $[-338, -337]$  ،  $[-339, -338]$  ،  $[-340, -339]$  ،  $[-341, -340]$  ،  $[-342, -341]$  ،  $[-343, -342]$  ،  $[-344, -343]$  ،  $[-345, -344]$  ،  $[-346, -345]$  ،  $[-347, -346]$  ،  $[-348, -347]$  ،  $[-349, -348]$  ،  $[-350, -349]$  ،  $[-351, -350]$  ،  $[-352, -351]$  ،  $[-353, -352]$  ،  $[-354, -353]$  ،  $[-355, -354]$  ،  $[-356, -355]$  ،  $[-357, -356]$  ،  $[-358, -357]$  ،  $[-359, -358]$  ،  $[-360, -359]$  ،  $[-361, -360]$  ،  $[-362, -361]$  ،  $[-363, -362]$  ،  $[-364, -363]$  ،  $[-365, -364]$  ،  $[-366, -365]$  ،  $[-367, -366]$  ،  $[-368, -367]$  ،  $[-369, -368]$  ،  $[-370, -369]$  ،  $[-371, -370]$  ،  $[-372, -371]$  ،  $[-373, -372]$  ،  $[-374, -373]$  ،  $[-375, -374]$  ،  $[-376, -375]$  ،  $[-377, -376]$  ،  $[-378, -377]$  ،  $[-379, -378]$  ،  $[-380, -379]$  ،  $[-381, -380]$  ،  $[-382, -381]$  ،  $[-383, -382]$  ،  $[-384, -383]$  ،  $[-385, -384]$  ،  $[-386, -385]$  ،  $[-387, -386]$  ،  $[-388, -387]$  ،  $[-389, -388]$  ،  $[-390, -389]$  ،  $[-391, -390]$  ،  $[-392, -391]$  ،  $[-393, -392]$  ،  $[-394, -393]$  ،  $[-395, -394]$  ،  $[-396, -395]$  ،  $[-397, -396]$  ،  $[-398, -397]$  ،  $[-399, -398]$  ،  $[-400, -399]$  ،  $[-401, -400]$  ،  $[-402, -401]$  ،  $[-403, -402]$  ،  $[-404, -403]$  ،  $[-405, -404]$  ،  $[-406, -405]$  ،  $[-407, -406]$  ،  $[-408, -407]$  ،  $[-409, -408]$  ،  $[-410, -409]$  ،  $[-411, -410]$  ،  $[-412, -411]$  ،  $[-413, -412]$  ،  $[-414, -413]$  ،  $[-415, -414]$  ،  $[-416, -415]$  ،  $[-417, -416]$  ،  $[-418, -417]$  ،  $[-419, -418]$  ،  $[-420, -419]$  ،  $[-421, -420]$  ،  $[-422, -421]$  ،  $[-423, -422]$  ،  $[-424, -423]$  ،  $[-425, -424]$  ،  $[-426, -425]$  ،  $[-427, -426]$  ،  $[-428, -427]$  ،  $[-429, -428]$  ،  $[-430, -429]$  ،  $[-431, -430]$  ،  $[-432, -431]$  ،  $[-433, -432]$  ،  $[-434, -433]$  ،  $[-435, -434]$  ،  $[-436, -435]$  ،  $[-437, -436]$  ،  $[-438, -437]$  ،  $[-439, -438]$  ،  $[-440, -439]$  ،  $[-441, -440]$  ،  $[-442, -441]$  ،  $[-443, -442]$  ،  $[-444, -443]$  ،  $[-445, -444]$  ،  $[-446, -445]$  ،  $[-447, -446]$  ،  $[-448, -447]$  ،  $[-449, -448]$  ،  $[-450, -449]$  ،  $[-451, -450]$  ،  $[-452, -451]$  ،  $[-453, -452]$  ،  $[-454, -453]$  ،  $[-455, -454]$  ،  $[-456, -455]$  ،  $[-457, -456]$  ،  $[-458, -457]$  ،  $[-459, -458]$  ،  $[-460, -459]$  ،  $[-461, -460]$  ،  $[-462, -461]$  ،  $[-463, -462]$  ،  $[-464, -463]$  ،  $[-465, -464]$  ،  $[-466, -465]$  ،  $[-467, -466]$  ،  $[-468, -467]$  ،  $[-469, -468]$  ،  $[-470, -469]$  ،  $[-471, -470]$  ،  $[-472, -471]$  ،  $[-473, -472]$  ،  $[-474, -473]$  ،  $[-475, -474]$  ،  $[-476, -475]$  ،  $[-477, -476]$  ،  $[-478, -477]$  ،  $[-479, -478]$  ،  $[-480, -479]$  ،  $[-481, -480]$  ،  $[-482, -481]$  ،  $[-483, -482]$  ،  $[-484, -483]$  ،  $[-485, -484]$  ،  $[-486, -485]$  ،  $[-487, -486]$  ،  $[-488, -487]$  ،  $[-489, -488]$  ،  $[-490, -489]$  ،  $[-491, -490]$  ،  $[-492, -491]$  ،  $[-493, -492]$  ،  $[-494, -493]$  ،  $[-495, -494]$  ،  $[-496, -495]$  ،  $[-497, -496]$  ،  $[-498, -497]$  ،  $[-499, -498]$  ،  $[-500, -499]$  ،  $[-501, -500]$  ،  $[-502, -501]$  ،  $[-503, -502]$  ،  $[-504, -503]$  ،  $[-505, -504]$  ،  $[-506, -505]$  ،  $[-507, -506]$  ،  $[-508, -507]$  ،  $[-509, -508]$  ،  $[-510, -509]$  ،  $[-511, -510]$  ،  $[-512, -511]$  ،  $[-513, -512]$  ،  $[-514, -513]$  ،  $[-515, -514]$  ،  $[-516, -515]$  ،  $[-517, -516]$  ،  $[-518, -517]$  ،  $[-519, -518]$  ،  $[-520, -519]$  ،  $[-521, -520]$  ،  $[-522, -521]$  ،  $[-523, -522]$  ،  $[-524, -523]$  ،  $[-525, -524]$  ،  $[-526, -525]$  ،  $[-527, -526]$  ،  $[-528, -527]$  ،  $[-529, -528]$  ،  $[-530, -529]$  ،  $[-531, -530]$  ،  $[-532, -531]$  ،  $[-533, -532]$  ،  $[-534, -533]$  ،  $[-535, -534]$  ،  $[-536, -535]$  ،  $[-537, -536]$  ،  $[-538, -537]$  ،  $[-539, -538]$  ،  $[-540, -539]$  ،  $[-541, -540]$  ،  $[-542, -541]$  ،  $[-543, -542]$  ،  $[-544, -543]$  ،  $[-545, -544]$  ،  $[-546, -545]$  ،  $[-547, -546]$  ،  $[-548, -547]$  ،  $[-549, -548]$  ،  $[-550, -549]$  ،  $[-551, -550]$  ،  $[-552, -551]$  ،  $[-553, -552]$  ،  $[-554, -553]$  ،  $[-555, -554]$  ،  $[-556, -555]$  ،  $[-557, -556]$  ،  $[-558, -557]$  ،  $[-559, -558]$  ،  $[-560, -559]$  ،  $[-561, -560]$  ،  $[-562, -561]$  ،  $[-563, -562]$  ،  $[-564, -563]$  ،  $[-565, -564]$  ،  $[-566, -565]$  ،  $[-567, -566]$  ،  $[-568, -567]$  ،  $[-569, -568]$  ،  $[-570, -569]$  ،  $[-571, -570]$  ،  $[-572, -571]$  ،  $[-573, -572]$  ،  $[-574, -573]$  ،  $[-575, -574]$  ،  $[-576, -575]$  ،  $[-577, -576]$  ،  $[-578, -577]$  ،  $[-579, -578]$  ،  $[-580, -579]$  ،  $[-581, -580]$  ،  $[-582, -581]$  ،  $[-583, -582]$  ،  $[-584, -583]$  ،  $[-585, -584]$  ،  $[-586, -585]$  ،  $[-587, -586]$  ،  $[-588, -587]$  ،  $[-589, -588]$  ،  $[-590, -589]$  ،  $[-591, -590]$  ،  $[-592, -591]$  ،  $[-593, -592]$  ،  $[-594, -593]$  ،  $[-595, -594]$  ،  $[-596, -595]$  ،  $[-597, -596]$  ،  $[-598, -597]$  ،  $[-599, -598]$  ،  $[-600, -599]$  ،  $[-601, -600]$  ،  $[-602, -601]$  ،  $[-603, -602]$  ،  $[-604, -603]$  ،  $[-605, -604]$  ،  $[-606, -605]$  ،  $[-607, -606]$  ،  $[-608, -607]$  ،  $[-609, -608]$  ،  $[-610, -609]$  ،  $[-611, -610]$  ،  $[-612, -611]$  ،  $[-613, -612]$  ،  $[-614, -613]$  ،  $[-615, -614]$  ،  $[-616, -615]$  ،  $[-617, -616]$  ،  $[-618, -617]$  ،  $[-619, -618]$  ،  $[-620, -619]$  ،  $[-621, -620]$  ،  $[-622, -621]$  ،  $[-623, -622]$  ،  $[-624, -623]$  ،  $[-625, -624]$  ،  $[-626, -625]$  ،  $[-627, -626]$  ،  $[-628, -627]$  ،  $[-629, -628]$  ،  $[-630, -629]$  ،  $[-631, -630]$  ،  $[-632, -631]$  ،  $[-633, -632]$  ،  $[-634, -633]$  ،  $[-635, -634]$  ،  $[-636, -635]$  ،  $[-637, -636]$  ،  $[-638, -637]$  ،  $[-639, -638]$  ،  $[-640, -639]$  ،  $[-641, -640]$  ،  $[-642, -641]$  ،  $[-643, -642]$  ،  $[-644, -643]$  ،  $[-645, -644]$  ،  $[-646, -645]$  ،  $[-647, -646]$  ،  $[-648, -647]$  ،  $[-649, -648]$  ،  $[-650, -649]$  ،  $[-651, -650]$  ،  $[-652, -651]$  ،  $[-653, -652]$  ،  $[-654, -653]$  ،  $[-655, -654]$  ،  $[-656, -655]$  ،  $[-657, -656]$  ،  $[-658, -657]$  ،  $[-659, -658]$  ،  $[-660, -659]$  ،  $[-661, -660]$  ،  $[-662, -661]$  ،  $[-663, -662]$  ،  $[-664, -663]$  ،  $[-665, -664]$  ،  $[-666, -665]$  ،  $[-667, -666]$  ،  $[-668, -667]$  ،  $[-669, -668]$  ،  $[-670, -669]$  ،  $[-671, -670]$  ،  $[-672, -671]$  ،  $[-673, -67$

## المتباينات الخطية بمتغير واحد



**نشاط (١):** يُعدُّ فقرُ الدم (الأنيميا) من المخاطر الصحية في المجتمع الفلسطيني، وينتج عن نقص بعض المغذيات من الفيتامينات، والعناصر المعدنية، (ويُعدُّ فقرُ الدم الناتج عن نقص الحديد هو الأكثر انتشاراً، يُعدُّ الذكر البالغ مصاباً بفقر الدم إذا كان معدل الهيموغلوبين في الدم أقلَّ من ١٣ غم/ديسلتر)، وللأنثى البالغة أقلَّ من ١٢ غم/ديسلتر، وللطفل وللمرأة الحامل أقلَّ من ١١ غم/ديسلتر؛ وذلك حسب بروتوكول وزارة الصحة الفلسطينية، الذي يعتمد ما تقرره منظمة الصحة العالمية. فإذا رمنا لنسبة الهيموغلوبين في الدم للذكر البالغ المصاب بفقر الدم بالرمز س، فيمكن التعبير عنها بـ:

س < ١٣، وتُسمى متباينة. أكمل:

هل يُعدُّ الذكر البالغ الذي نسبة الهيموغلوبين عنده ٩ مصاباً بفقر الدم؟ \_\_\_\_\_

هل يمكن أن تكون س = ١٤؟ \_\_\_\_\_

**المتباينة الخطية بمتغير واحد:** هي عبارة رياضية بمتغير واحد، وتحوى إحدى الإشارات



، < ، > ، ≤ ، ≥ و تكتب بإحدى الصور الآتية :

أس + ب > ٠، أس + ب ≥ ٠، أس + ب < ٠، أس + ب ≤ .

حيث أ ، ب أعداد حقيقية،  $A \neq 0$  صفر .

**نشاط (٢):** أرتِّب الأشخاص التالية أسماؤهم حسب أطوالهم من الأطول إلى الأقصر:



أمل: ١٥٨ م ، مازن: ١٩٠ م ، جميل: ١٧٠ سم.

مازن هو الأطول

الترتيب هو: \_\_\_\_\_ ، \_\_\_\_\_ ، \_\_\_\_\_ .



\* ١ ديسيلتر = لتر



### نشاط (٣): أكُون متباعدةً تُعبّر عن كُلّ من الجمل الآتية:

\* الحد الأدنى لقيمة المشتريات في محل تجاري؛ للحصول على خصم هو ١٠٠ دينار. فإذا رمزاً لقيمة المشتريات للحاصلين على خصم بالرمز س ، يمكن التعبير عن المسألة بالمتباينة:  $S \leqslant 100$

٦٠	
؟	٣٥

\* الحد الأعلى لزمن التشغيل المتواصل لخلاطٍ منزليٍّ ٦٠ ثانية، شغلته أم عبد الله ٣٥ ثانية وما زال يعمل. أرمز لزمن الإضافي الممكِن للتشغيل م فإنَّ المتباينة:  $. \quad \geqslant \quad + 35 \geqslant \quad .$



### نشاط (٤): أجدُ ناتجَ ما يأتي، وأقارن :

$$\begin{aligned} 3 - 8 &= \underline{\hspace{2cm}}, \text{ وهو عدداً موجباً و منها } 8 < 3 \\ 6 - 2 &= \underline{\hspace{2cm}}, \text{ وهو عدد } \underline{\hspace{2cm}} \text{ و منها } 6 > 2. \end{aligned}$$

ما زالت تلاحظ؟



يكون العدد الحقيقيّ أ أكبر من العدد الحقيقيّ ب؛ أي:  $A > B$  ، إذا كان  $A - B$  عدداً موجباً، وبالرموز  $A - B > 0$ .

### نشاط (٥): أضع إشارة $<$ أو $>$ في الفراغات الآتية :



$$12 > 5$$

$$2 - + 12 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 2 - + 5 \quad , \quad 3 + 12 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 3 + 5$$

$$4 - < 1 -$$

$$6 - + 4 - \underline{\hspace{2cm}} \quad 6 - + 1 - \quad , \quad 2 + 4 - \underline{\hspace{2cm}} \quad 2 + 1 -$$

ما زالت تلاحظ؟

إذا كانت  $a$  ،  $b$  ،  $c$  أعداداً حقيقية ، و كان  $a > b$  ، فإنّ :  
 $a + c > b + c$ .



**نشاط (٦) :** أكمل إيجاد ما يأتي، وأضع إشارة  $<$  أو  $>$  أو  $=$  في الفراغ :

$$12 > 5$$

$$2 - \times 12 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 2 - \times 5$$

,

$$3 \times 12 > 3 \times 5$$

$$4 - < 1 -$$

$$6 - \times 4 - \underline{\hspace{2cm}} \quad 6 - \times 1 -$$

,

$$2 \times 4 - \underline{\hspace{2cm}} \quad 2 \times 1 -$$

$$24 - < 36$$

$$6 - \div 24 - \underline{\hspace{2cm}} \quad 6 - \div 36$$

,

$$6 \div 24 - \underline{\hspace{2cm}} \quad 6 \div 36$$

ماذا تلاحظ ؟

**أَتَعْلَمُ :** إذا كانت  $a$  ،  $b$  ،  $c$  أعداداً حقيقية ، فإنّه :

إذا كان  $a > b$  ، وكان  $c$  عدداً موجباً، فإنّ:  $a + c > b + c$

وإذا كان  $a > b$  ، وكان  $c$  عدداً سالباً، فإنّ:  $a + c < b + c$

العبارات أعلاه صحيحة إذا كانت الإشارة  $\geqslant$ .

**حل المتباعدة:** هو إيجاد قيمة، أو قيم المتغير التي تجعل المتباعدة صحيحةً عند تعويض تلك القيم فيها.

**ملاحظة:** مجموعة قيم المتغير تسمى مجموعة حل المتباعدة.

**مِثَالٌ (١):** أجد مجموعَة حل المُتباينة:  $2s - 2 \leqslant 20$  في  $\mathbb{H}$  ، وأمثل مجموعَة الحل على خط الأعداد.

$$2s - 2 \leqslant 20$$

**الحل:**

$$2 + 20 \leqslant 2 + 2s - 2$$

$$22 \leqslant 2s$$

$$\text{وبالقسمة على 2 ينْتَج: } s \leqslant 11$$

مجموعَة الحل =  $[11, \infty)$  ، وتمثَّل على خط الأعداد:



ليكن  $a$  ،  $b$  عددين حقيقيين، بحيث:  $a < b$  . ما العلاقة بين  $\frac{1}{a}$  ،  $\frac{1}{b}$  ؟

أوضح بأمثلة عدديَّة.

**أُفَكَّرْ وَاناقش**

**نشاط (٧):** كلفت المعلمة كلاً من إشراق وندى حل المُتباينة:  $2s + 3 > 4s + 9$  في  $\mathbb{H}$  .



### طريقة ندى

$$\begin{aligned} 9 + 2s &> 3 + 4s \\ 9 - 9 + 2s &> 3 - 3 + 4s \\ 2s &> 3 \\ 2s &> 6 \\ s &> 3 \end{aligned}$$



### طريقة إشراق

$$\begin{aligned} 9 - 4s &> 3 + 4s \\ 9 - 9 - 4s &> 3 - 3 + 4s \\ -4s &> 3 \\ s &> -\frac{3}{4} \end{aligned}$$



اناقش الحلَّيْن:



**نشاط (٨):** بالاعتماد على المتباينة:  $s > 1,5 > 8,9$  ، أكمل ما يأتي:

أكبر عدد صحيح يتحقق المتباينة هو: ٨

أقل عدد صحيح يتحقق المتباينة هو: \_\_\_\_.

عدد الأعداد الصحيحة التي تتحقق المتباينة يساوي: \_\_\_\_.

أكتب ثلاث أعداد صحيحة تتحقق المتباينة: \_\_\_\_ ، \_\_\_\_ ، \_\_\_\_.

مجموعة حل المتباينة في  $H = \{s : s > 1,5 > 8,9\}$

أقارن مجموعة حل المتباينة:  $s > 1,5 > 8,9$  بالفترتين:  $[1,5, \infty) > [8,9, \infty)$

أمثل مجموعة حل المتباينة على خط الأعداد:

**مثال (٢):** أجد مجموعة حل المتباينة:  $s - 1 > 4s + 2 \geqslant 6$  ، ثم أمثل مجموعة حلها على خط الأعداد.

## الحل:

لحل المتباينة:  $s - 1 > 4s + 2 \geqslant 6$  نجد تقاطع مجموعتي حل المتباينتين:

$$s - 1 > 4s + 2 \quad \text{و} \quad 4s + 2 \geqslant 6$$

**أولاً:** المتباينة  $s - 1 > 4s + 2$

$$s - 3 > 4s \quad (\text{طرح } 2 \text{ من طرفي المتباينة}).$$

$$-3 > 3s \quad (\text{طرح } s \text{ من طرفي المتباينة}).$$

$$-1 > s \quad (\text{قسمة طرفي المتباينة على } 3).$$

إذن: مجموعة الحل  $[-1, \infty)$

**ثانياً:** المتباعدة  $4s + 2 \geqslant 6$

(بطرح 2 من طرفي المتباعدة).

$$4s \geqslant 4$$

(بقسمة طرفي المتباعدة على 4).

$$s \geqslant 1$$

إذن مجموعة الحل  $[1, \infty)$

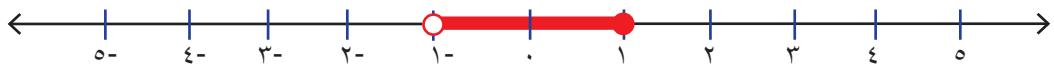
مجموعة حل المتباعدة:  $s - 1 > 4s + 2 \geqslant 6$  هي:

$$[-1, 1) \cap [1, \infty) = [1, 1]$$

الاحظ التمثيل على خط الأعداد:



وبالتالي، فإن تمثيل مجموعة الحل هو تقاطع الفترتين



## تمارين ومسائل:



س١ أحلل الممتباينات الآتية، وأمثل مجموعه حلّها على خط الأعداد:

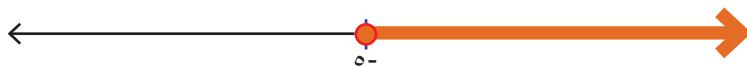
١  $s + 3 \geqslant 4$

٢  $s - 5 < 0$

٣  $-s - 7 \geqslant s - 6$

٤  $12 \geqslant 7 - s$

س٢ أكتب ممتباينة خطية يكون حلّها ممثلا بالشكل:



ب) أكتب ممتباينة تمثل العبارة: «طرح العدد ٧٠ من عدد ما، وكانت النتيجة ٥ على الأقل».



س٣ كتلة شاحنة ١٤ طناً، وكان الحد الأعلى لها مع حمولتها ٣٢ طناً، فما الحمولة المتبقية المسماوح بها. أعتبر عن المسألة بممتباينة، ثم أحلّها.

س٤ إذا كانت  $a > b$ ، ما إشارة قيم كل من  $a$ ،  $b$  التي تجعل الممتباينة صحيحة في كل من الحالات الآتية:

١  $\frac{a}{b} < 0$

٢  $a^2 b > 0$

٣  $a b > 0$

## المتباينات الخطية بمتغيرين



**نشاط (١)** ضمن آليات تنظيم الأسواق في فلسطين، أقرت وزارة الاقتصاد الوطني، ضمن الماده ١٧ من قانون حماية المستهلك قراراً بإشهار الأسعار على السلع، ويلزم هذا القرار التجار والبائعين وضع الأسعار على السلع. تحدّد الأسعار في الأسواق الفلسطينية في بعض الحالات الاستثنائية؛ حيث يتم وضع تسعيرة استرشادية لمجموعة من السلع من قبل دائرة حماية المستهلك في المحافظات، فإذا أصدرت استماره شهر رمضان بأسعار مجموعه من السلع الغذائية الأساسية في إحدى المحافظات، ومنها:

جبنه بلدية	دجاج مذبوح	النوع
٥ دنانير	٤ دنانير	السعر (كغم)

فإذا رصدت سميارة ٣٠ ديناراً لشراء دجاج، وجبنه بلدية ، فوجدت أن كيلوغرام الدجاج يُباع في أحد المحال التجارية بأربعة دنانير، ويُباع كيلوغرام الجبنه بخمسة دنانير، فإذا رمنا لكتلة الدجاج س كغم، ولكتلة الجبنه ص كغم. أعبّر عن المسألة بمتباينة:

$$4s + 5c \geq 30$$

لاحظ أن:  $s \leq 0$  و  $c \leq 0$ .

هل تستطيع سميارة شراء ٤ كيلوغرام دجاج، و ٣ كيلوغرام جبنه ؟

إذا التزم التجار بالأسعار الاسترشادية التي حدّتها دائرة حماية المستهلك في المحافظة،

هل سيكون باستطاعتها شراء ٤ كيلوغرام دجاج و ٣ كيلوغرام جبنه ؟

**المتباعدة الخطية بمتغيرين:** هي عبارة رياضية فيها متغيران، واحدى الإشارات  $>$ ،  $<$ ،  $\geqslant$ ،  $\leqslant$ ، و تكتب بإحدى الصور الآتية :

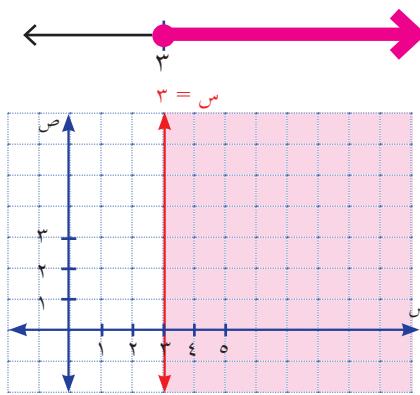
$$as + b < 0, \quad as + b > 0,$$

$$as + b \leqslant 0, \quad as + b \geqslant 0,$$

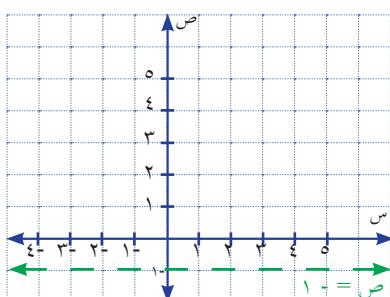
حيث:  $a$ ،  $b$  ،  $c$  أعداد حقيقة وأ،  $b$  ≠ صفرًا.

**مثال (١):** أكتب مجموعة حل المتباعدة:  $s \leqslant 3$ ، وأمثلها على خط الأعداد، ثم أمثلها في المستوى الديكارتي .

مجموعة حل المتباعدة:  $s \leqslant 3 = [3, \infty)$  ، و تمثل على خط الأعداد:



ولتمثيل مجموعة حل المتباعدة:  $s \leqslant 3$  في المستوى الديكارتي، نرسم الخط المستقيم  $s = 3$  الذي يقسم المستوى إلى منطقتين، إحداهما تمثل مجموعة الحل، نظلل منطقة حل المتباعدة  $s \leqslant 3$  كما في الشكل. لاحظ أن الإحداثي السيني للنقاط الواقعه ضمن منطقة الحل يتحقق  $s \leqslant 3$ ، أمثل موقع النقطة (٥ ، ١).



**نشاط (٢):** أكمل تمثيل مجموعة حل المتباعدة:

ص > ١ - في المستوى الديكارتي .

أرسم الخط المستقيم الذي معادله ص = ١ - ، بحيث يرسّم الخط مقطعاً لأن: ص = ١ - لا تتحقق المتباعدة.

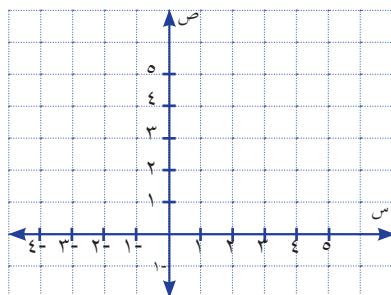
أظلل المنطقة التي تمثل مجموعة الحل، وتشمل جميع النقاط التي إحداثييها الصادي أكبر من ١ -

أكتب زوجاً مرتباً ينتمي إلى مجموعة حل المتباعدة: ص > ١ - .

أكتب زوجاً مرتباً لا ينتمي إلى مجموعة حل الممتباينة: ص < ١٠ (لا يتحققها).



**نشاط (٣):** أمثل مجموعة حل الممتباينة:  $2s - 3 \geq 6$  في المستوى الديكارتي.



أرسم الخط المستقيم  $2s - 3 = 6$

لتحديد منطقة الحل، أعرض إحداثيات نقطة لا تقع على الخط المستقيم المرسوم في الممتباينة، ولتكن

: (٠ ، ١)

$$1 \times 2 - 0 \times 3 = 2 \leq 6 . \text{ ماذا تلاحظ؟}$$

أظلل المنطقة التي تمثل مجموعة الحل على الرسم.

أكتب زوجاً مرتباً ينتمي إلى مجموعة الحل:

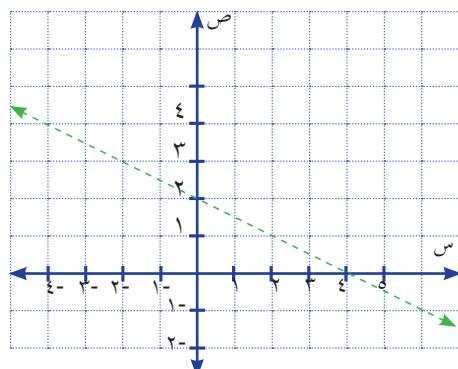
أكتب زوجاً مرتباً لا ينتمي إلى مجموعة الحل:

**نظام الممتباينات :** هو أي مجموعة من الممتباينات.

والمنطقة التي تمثل حل النظام هي المنطقة التي تتحقق جميع الممتباينات فيه.



**نشاط (٤):** أحدد المنطقة التي تمثل حل النظام الآتي في المستوى الديكارتي:



$$s + 2 > 4$$

$$s \leq 1$$

$$s \leq 1 - 2s$$

أمثل مجموعة حل الممتباينة:  $s + 2 > 4$  :

أرسم الخط المستقيم:  $s + 2 = 4$  ، لاحظ أن الخط متقطع.

أُحدّد منطقة حل الممتباينة:  $s + 2 < 4$  باختيار زوج مرتب، مثل:  $(1, 0)$  والتعويض فيها:

$$1 + 0 < 4$$

أي أنّ النقطة  $(1, 0)$  ضمن منطقة الحل.

أظلّل منطقة حل الممتباينة:  $s + 2 < 4$  باللون الأخضر.

١) أمثل مجموعة حل الممتباينة  $s \leq 1$ :

أرسم الخط المستقيم  $s = 1$

ثم أحدد منطقة حل الممتباينة  $s \leq 1$ ، باختيار زوج مرتب مثل:  $(0, 0)$ ، والتعويض فيها.

أظلّل منطقة حل الممتباينة  $s \leq 1$  بلون آخر.

٢) أمثل مجموعة حل الممتباينة  $s \leq -1$ :

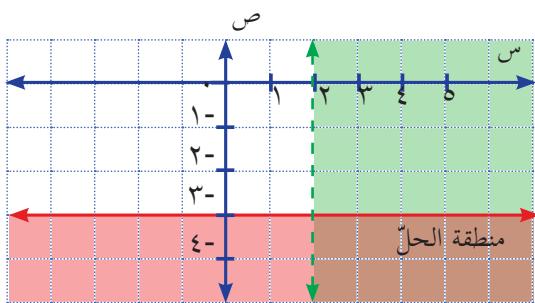
أرسم الخط المستقيم  $s = -1$

أحدّد منطقة حل الممتباينة:  $s \leq -1$

أظلّل منطقة حل الممتباينة ————— بلون مختلف عن اللونين السابقين.

وبهذا تكون المنطقة الواقعه ضمن مجموعة حل كل ممتباينة في النظام، هي التي تمثل مجموعة حل النظام.

**مثال (٢):** ما نظام الممتباينات الذي مثّلت مجموعة حلّه في الشكل؟



النظام هو:

$s > 2$  (تمثّلها المنطقة المظللة باللون الأخضر)

$s \geq -3$  (تمثّلها المنطقة المظللة باللون الأحمر)

**الحل:**

## تمارين ومسائل:



**س١** أمثل بيانيًّاً مجموعه حلٌّ كلٌّ متباعدة من المتباينات الآتية :

١ ص  $\leqslant$  ٢

٢ ص  $- ٦ >$

٣ ص  $> ٢,٥$

**س٢** أجد بالرسم في المستوى الديكارتي المنطقه التي تمثل حلٌّ كلٌّ نظامٍ من المتباينات الآتية:

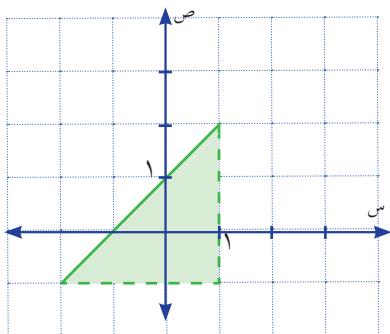
١ ص  $> ١$

٢ ص  $\leqslant ٢$

٣ ص  $\geqslant -٣$

٤ ص  $+ ٢s \geqslant ٤$

**س٣** أجد نظام المتباينات الذي يمثل المنطقه المظللة الآتية:



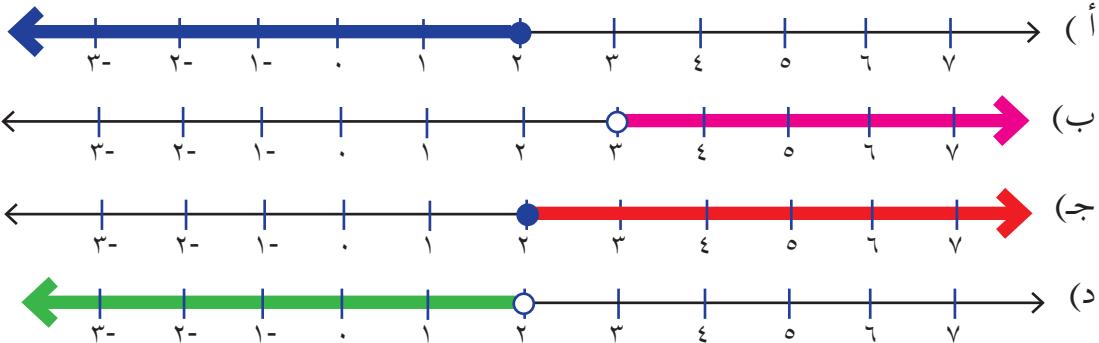
**س٤** ينتج مصنع للأقمشة الجاهزة، في إحدى المدن الفلسطينية المشهورة بالصناعات الوطنية، نوعين من الجرابات، صوفية وقطنية، حيث يبيع ربطة الجرابات الصوفية بـ ٢ دينار، وربطة الجرابات القطنية بـ ٣ دنانير. استلم المصنع طلبية من أحد التجار لشراء النوعين بحيث لا يزيد ثمنها عن ٣٠٠ دينار. أمثل بيانيًّاً الخيارات الممكنة التي يمكن للمصنع أن يزود بها ذلك التاجر.

## تمارين عامة

(٤ - ٦)

**س١** أضْعِ دَائِرَةً حَوْلَ رَمْزِ الإِجَابَةِ الصَّحِيحةِ فِيمَا يَأْتِي:

**١** أيُّ مِنَ الْآتِيَةِ تَمَثِّلُ حَلَّ الْمُتَبَايِنَةِ:  $10 + 3s \geqslant 16$



**٢** إِذَا كَانَتْ نَ تَمَثِّلُ الْمَدَةَ بِالسَّاعَاتِ التِّي يَحْتَاجُهَا عَمَرُو لِحَلِّ أَسْئَلَةِ امْتِحَانٍ كُتُبَ عَلَيْهِ "مَدَةُ الْامْتِحَانِ سَاعَةٌ وَ نَصْفٌ" ، فَمَا الْمُتَبَايِنَةُ التِّي تُمَثِّلُ القيَمَ المُمْكِنَةَ لِنَ؟

**أ**)  $n > 1,5$       **ب**)  $n \leqslant 1,5$       **ج**)  $n \geqslant 1,5$       **د**)  $n < 1,5$

**٣** ما الفترة التي تمثل المجموعة: {٤، ٥، ٦، ٧}؟

**أ**)  $[2, 4]$       **ب**)  $[2, \infty)$       **ج**)  $[-2, 2]$       **د**)  $[0, \infty)$

**٤** ما الفترة التي يقع بها العدد  $\bar{3,9}$ .

**أ**)  $[1, 2]$       **ب**)  $[3, 2]$       **ج**)  $[0, 4]$       **د**)  $[-4, 0]$

**٥** إِذَا كَانَتْ ص  $\in [5, 7]$  ، فَمَا قِيمَةُ ص؟

**أ**) ٧-      **ب**) ٥      **ج**) صفر      **د**) ١٢

**س٢** تَعْلَمُ إِحْدَى شَرْكَاتِ الطَّيْرَانِ لِرِبَائِنَهَا أَنَّ الْحَدَ الأَعْلَى لِأَمْتَعَةِ الرَّاكِبِ الْوَاحِدِ هِيَ ٣٥ كَغْم، فَإِذَا كَانَتْ كَتْلَةُ الْحَقِيقَةِ الْأُولَى لِأَحَدِ الْمَسَافِرِينَ ١٥ كَغْم، مَا الْكَتْلَةُ الْمُمْكِنَةُ لِلْحَقِيقَةِ الثَّانِيَةِ؟ (أُعْبِرُ عَنِ الْمَسَأَةِ بِمُتَبَايِنَةٍ وَأَحْلَهَا).

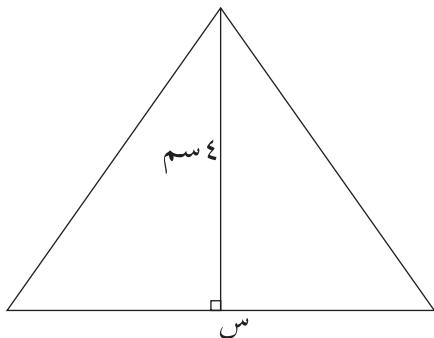
**س٣** أَمْثِلُ مَجْمُوعَةَ حلِّ النَّظَامِ الْآتِيِّ فِي الْمُسْتَوِيِّ الْدِيكَارَاتِيِّ:

$$s > 1-$$

$$s \geqslant 2,5$$

$$s - 2 \leqslant 0$$

**س٤** ما مجموعه قيم س الممكنة التي تجعل مساحة المثلث في الشكل المجاور أقل من  $40 \text{ سم}^2$ ؟



**س٥** أقيّم ذاتي: أعبر بلغتي عن المفاهيم الأكثر اثارة التي تعلمتها في هذه الوحدة.

## مشروع الوحدة:

تُقدِّم إحدى الشركات الكبرى عروضاً لوكالاتها لتشجيع المواطنين على شراء حاجياتهم، فإذا كنتَ صاحب هذه الشركة، استخدم الجدول أدناه في وضع عروض مميزة، من وجهة نظرك؛ لتشجيع الناس على الشراء، مع مراعاة تحقيق أرباح معقولة لشركتك.نظم عروضك فنياً أيضاً، بحيث يمكنك إدراجها في إحدى الصحف المحلية. اكتب في ورقة: لماذا تعتقد بأن عرضك قويٌّ، ومنافسٌ لعروض أخرى وما هي المخاطر المتوقعة؟

السلعة	القيمة
ثلاثة.	ثلاجة.
فرن.	طباخ غاز مع فرن.
خمسة.	غسالة.
كمبيوتر.	مكينة كهربائية.
تلفاز.	تلفزيون.

- 1- Body mass calculator
- 2- <http://www.screencast.com>
- 3- <http://www.mohe.ps.pcde>

روابط إلكترونية

# الاقترانات

✓

## الوحدة



© 2007 Joël Meulemans  
click.itphotos/Exothermic

أتأمل الصورة: أبحث في الصورة عن حوافٌ تمثلُ منحنياتِ لاقترانات، أرسمُ رسمًا تخطيطيًّا لها، مع تسميتها.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها، أن يكونوا قادرين على توظيف كثیرات الحدود والعمليات عليها في الحياة العملية من خلال الآتي:

١ التعرّف إلى كثیرات الحدود.

٢ جمع كثیرات الحدود وطرحها.

٣ ضرب كثیرات الحدود وقسمتها.

٤ التعرّف إلى الاقتران التربيعی، وتمثيله بيانیاً.

٥ التعرّف إلى الاقتران النسبي.

٦ إجراء العمليات الحسابية الأربع على الاقترانات النسبية.

## كثيرات الحدود



**نشاط(١):** تستخدم البنوك خدمة الصراف الآلي على نطاق واسع وذلك للتسهيل على المواطن في التعاملات البنكية.



يحتوى الصراف الآلي صناديق من فئة العملات المتدالوة، دينار ، دولار،... ، فإذا كانت  $s = 10$  نستطيع التعبير عن الحركات الآتية من الصراف الآلي:  $10, 100, 80, 300$ ،  
بالمقادير الجبرية:

$s^8, s^3, s^2, s^1$  على التوالي  
أمثل مجموع حركات الصراف الآلي بالرموز:

**الاقتران كثير الحدود\* على  $h$ :** هو اقتران معرف على  $h$ ، ويكون من حد أو مجموع حدود جبرية عدّة، وتكون فيه أحسن المتغير أعداداً صحيحةً غير سالبة. ونعبر عن كثير الحدود بـ:

$$q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s^1 + a_0$$

حيث:  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  أعداد حقيقة، وتسمى معاملات كثير الحدود  $q(s)$  ،  
ن عدداً صحيحاً غير سالب.



**ملاحظة:** درجة كثير الحدود هي أكبر أنس لـ المتغير فيه.

### نشاط (٢): أكمل:



١)  $Q(s) = 2s^0 - 9s + 15$  : اقترانٌ كثيرٌ حدود من الدرجة الخامسة؛ لأنَّ الأسس صحيحة غير سالبة، وأكبر أُسٌّ فيه هو ٥.

٢)  $Q(s) = s^{\frac{1}{3}} - 6s^{\frac{2}{3}}$  : ليس اقتراناً كثيرٌ حدود؛ لأنَّ الأُس  $\frac{1}{3}$  عدد غير صحيح.

٣)  $Q(s) = s - s^{\frac{1}{5}} - s^{\frac{2}{5}} + s^{\frac{3}{5}} + s^{\frac{4}{5}} - 9$ .

٤)  $Q(s) = 3$  : اقترانٌ ثابتٌ، وهو كثيرٌ حدود من الدرجة الصفرية؛ لأنَّه يمكن كتابته على صورة:  $Q(s) = \frac{3}{3}s^0$ .

٥)  $Q(s) = \pi s^0 - s^{\frac{1}{4}}$ .

٦)  $Q(s) = 4s + 1$ .

٧)  $Q(s) = 3s^3 + 5s - 4$ .

### نشاط (٣): لتكن: $Q(s) = 9s^3 - \frac{1}{2}s^2 - 5s^4 - 3$

أكمل إيجاد:



$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

يتساوي كثيراً الحدود، إذا كان لهما الدرجة نفسها، وكانت معاملاتُ قوى س المتناظرة متساوية.



### نشاط (٤): إذا كان: $Q(s) = 3s^3 + bs^2 + cs + d$ ، $H(s) = as^2 + 3s + 1$ ،

وكان  $Q(s) = H(s)$  ، أكمل إيجاد:

$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$





**نشاط(٥):** ليكن:  $Q(s) = 2s + 4$

- هل  $Q(s)$  كثير حدود؟
- إذا كان  $Q(s) = 0$
- فإن:  $2s + 4 = 0$
- $s = -2$
- $s = 2$

نُسمّي العدد  $(-2)$  صفرًا للاقتران  $Q$ ؛ لأن:  $Q(-2) = 0$  ، أتحقق من ذلك.



**أتعلّم :** إذا كان  $Q(s)$  اقترانًا ، وكان  $Q(m) = 0$  ، فإن العدد  $m$  يُسمّى صفرًا للاقتران  $Q(s)$ .



**نشاط(٦):** وجد محاسب أحد الفنادق أن العلاقة بين عدد نزلاء الفندق، ومقدار ما يربحه بالدنانير، يعطى بالإقتران  $R(s) = s^2 - 18$  ،  $s \in \mathbb{R}^+$  ، أجد عدد النزلاء الذي يجعل الربح يساوي صفرًا.

$$\begin{aligned} R(s) &= 0 \\ s^2 - 18 &= 0 \\ s^2 &= 18 \\ s &= \sqrt{18} \end{aligned}$$

و منها إما  $s = 3\sqrt{2}$  أو  $s = -3\sqrt{2}$  (مروضة، لماذا؟)  
عدد النزلاء الذي يجعل الربح يساوي صفرًا هو

## تمارين ومسائل:



**س١** أبْيَنْ أَيِّ الاقترانات الْآتِيَة تَمَثِّلُ كَثِيرَ حَدُود، ثُمَّ أَكْتُبْ دَرْجَةَ كَثِيرِ الْحَدُود فِيهَا:

أ)  $Q(s) = s^2 - 5s + 1$

ب)  $Q(s) = s^2 - \frac{5}{2}s - 7 + s^3 - 2s^2$

ج)  $Q(s) = 5s + s^5$

**س٢** تَعُد تَمَارِين التَّنفُّس أَحَد الطرق المُتَبَعَّة لِعَلاجِ الْأَمْرَاضِ الْإِضْطَرَابَاتِ. فِي أَحَدِ تَمَارِين التَّنفُّسِ، إِذَا مُثِلَّ حَجْمُ الْهَوَاء بِاللَّتَرِ فِي رَئَةِ يَاسِرِ بِالْإِقْتَرَانِ  $Q(s) = As^3 + Bs^2 + Cs + D$ ، حِيثُ سَ تَمَثِّلُ الرَّمْنِ الْلَّازِمِ لِإِجْرَاءِ عَمَلِيَّةِ الشَّهِيقِ، وَمُثِلَّ حَجْمُ الْهَوَاء بِاللَّتَرِ فِي رَئَةِ أَيْمَنِ بِالْإِقْتَرَانِ  $H(s) = Es^3 + Fs^2 + Gs + H$ ، أَجِدْ قِيمَ كُلِّ مِنْ: أَ، بَ، هَ، جَ، الَّتِي تَجْعَلُ حَجْمَ الْهَوَاء فِي رَئَيْهِمَا مُتَسَاوِيًّا.

**س٣** أَجِدْ أَصْفَارِ الاقترانات الْآتِيَةِ:

أ)  $Q(s) = 3s^7 - s^3$

ب)  $Q(s) = s^5 + s^1$

ج)  $Q(s) = s^5 + s^{14}$

د)  $Q(s) = (2s + 1)(s - 4)$

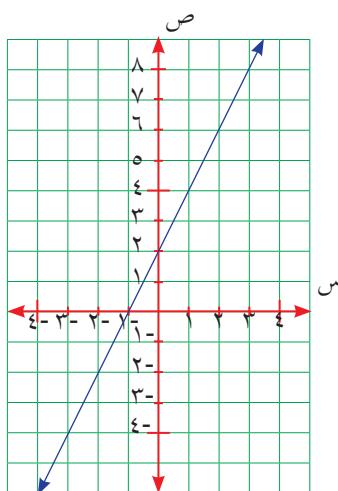
هـ)  $Q(s) = s^2 - 4$

**س٤** مُثِلُّ الاقتران  $Q(s)$  فِي الْمَسْتَوِيِّ الْدِيكَارَتِيِّ، كَمَا فِي الشَّكْلِ الْمُجاوِرِ، أَجِدْ مِنَ الشَّكْلِ:

أ) نقطَة تَقاطُعِهِ مَعَ مَحْوَرِ الصَّادَاتِ.

ب) نقطَة تَقاطُعِهِ مَعَ مَحْوَرِ السَّيْنَاتِ.

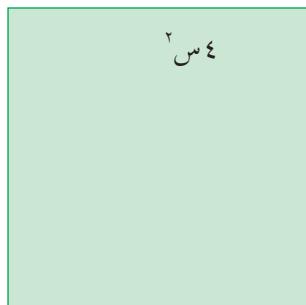
جـ) صَفَرِ الاقتران  $Q(s)$ .



## جمع كثیرات الحدود و طرحتها



**نشاط (١):** تنتشر لعبة كرة الطائرة في فلسطين، ومن أجل تطوير اللعبة يعمد الاتحاد الفلسطيني إلى توفير قاعات لأندية الدرجة الممتازة، طلب إلى مهندسٍ عملٍ تخطيطٍ داخل القاعة، لغرف ملابس اللاعبين؛ ويمكن تمثيلها بالأشكال الآتية، فرسم المهندس غرفتين، مساحة إحداهما أربعة أضعاف مساحة الأخرى.



مجموع مساحتيهما: \_\_\_\_\_

الفرق بين مساحتيهما: \_\_\_\_\_

مجموع محيطيهما: \_\_\_\_\_

**أتعلّم :** اذا كان  $Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$

فإن  $J(Q(s)) = ja_n s^n + ja_{n-1} s^{n-1} + \dots + ja_2 s^2 + ja_1 s + ja_0$

### أولاً: جمع كثیرات الحدود:

ليكن:  $Q(s)$  ،  $H(s)$  كثيري حدود، فإنّ:  $(Q + H)(s)$  كثير حدود، بحيث:

$$(Q + H)(s) = Q(s) + H(s)$$



**نشاط (٢):** ليكن  $Q(s) = s^3 + 5s^5 - 1$  ،  $H(s) = 2s^2 - s$  ،

أكمل إيجاد:

$$(Q + H)(s) = Q(s) + H(s) = (s^3 + 5s^5 - 1) + (2s^2 - s)$$

$$= (s^3 + 2s^2) + (5s^5 - s) - 1$$

$$= \underline{\hspace{2cm}} - \underline{\hspace{2cm}} + s^5 =$$

لاحظ أنّ:  $(Q + H)(s)$  هو اقتران كثير حدود من الدرجة .

## ايجاد:

**نشاط (٣):** إذا كان  $q(s) = 4s^3 - 5s^2 + 1$  ،  $k(s) = -4s^3 - s^2 + 3$  ، أكمل إيجاد:

$$( ) + ( ) = \underline{\quad} + \underline{\quad} = (\text{ك} + \text{س})(\text{ق} + \text{أ})$$

---

 =

لاحظ أنّ:  $(ق + ك)(س)$  هو اقتران كثير حدود من الدرجة —————.

$$= (1 - \kappa) (\varphi + \psi)$$

$$\text{_____} = (1-\eta)(3)$$

$$\text{_____} = (1-) \triangleleft (\xi$$

$$= (1-\kappa) + (1-\kappa) \varphi$$

٦) أقارن بين:  $q(-1) + k(-1)$  ،  $(q+k)(-1)$

**أَتَعْلَمُ :** ناتج جمع كثيري حدود هو كثير حدود، درجهه أقل، أو تساوي أعلى درجتي الاقترانين.

## ثانياً: طرح كثیرات الحدود:

ليكن:  $q(s)$ ،  $h(s)$  كثيري حدود، فإنّ:  $(q - h)(s)$  كثير حدود، بحيث:

$$(q - h)(s) = q(s) - h(s)$$





**نشاط(٤)** إذا كان  $Q(s) = 7s^3 + 5s^2 - s + 1$  ،  $H(s) = 2s^3 - 2s^2 + 7$  ، أكمل  
إيجاد:

$$(Q - H)(s) = Q(s) - H(s) = (7s^3 + 5s^2 - s + 1) - (2s^3 - 2s^2 + 7)$$

$$= (7s^3 - 1) + (5s^2 + \underline{\hspace{2cm}}) - (2s^3 - \underline{\hspace{2cm}}) + \underline{\hspace{2cm}} =$$

$$\underline{\hspace{2cm}} - \underline{\hspace{2cm}} + s^5 =$$

لاحظ أنّ:  $(Q - H)(s)$  هو اقتران كثير حدود من الدرجة  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

$$(Q(s) - H(s)) \times 3 =$$

$$\underline{\hspace{2cm}} - \underline{\hspace{2cm}} + 21s^2 =$$



**نشاط(٥)**: تعتبر حرفة صيد الأسماك في فلسطين من أقدم الحرف التي تركزت في قطاع غرة، فإذا كانت العائدات من البيع السنوي للأسماك تعطى بالاقتران

$$Q(s) = 0.03s^3 + 0.2s^2 + 40s + 120$$

وتكلفة الإنتاج تعطى بالاقتران  $H(s) = 0.07s^3 + 0.05s^2 + 20s + 50$  ، أكتب قاعدة الاقتران الذي يمثل الربح

الربح = العائدات - التكلفة

$$R(s) = Q(s) - H(s)$$

$$= (\underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}) - (0.03s^3 + 0.02s^2 + 40s + 120)$$

$$= \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} - 0.03s^3 - 0.05s^2 - 20s - 50$$

ما درجة ناتج طرح كثيري حدود؟

أفكّر وأناقش

## تمارين ومسائل:



**س١** إذا كان:  $ق(s) = 6s^3 + 5s^2 - 1$  ،  $ه(s) = 3s^2 + s + 4$

$ك(s) = 2s^2 - 4$  ، اقترانات كثيرة الحدود، أجد ما يأتي :

**ب**  $(ه - ك)(s)$

**أ**  $(ق + ه)(s)$

**د**  $(ق - ه)(3)$

**ج**  $(ق + ك)(-1)$

**هـ**  $ه(s) - 4ق(s)$

**ـهـ**  $2ق(s) + 3ك(s)$

**س٢** ليكن :

◀  $ق(s)$  كثير حدود من الدرجة الثالثة

◀  $ه(s)$  كثير حدود من الدرجة الرابعة

◀  $ك(s)$  كثير حدود من الدرجة الخامسة

فما درجة كلّ مما يأتي؟

**جـ**  $(ق + ه + ك)(s)$

**ـبـ**  $(ق - ك)(s)$

**ـأـ**  $(ق + ه)(s)$

**س٣** يمثل الشكل المجاور مخططاً لملعب كرة سلة أبعاده بدلالة  $s$  ، أجد محيطه عندما  $s = 6$  م.

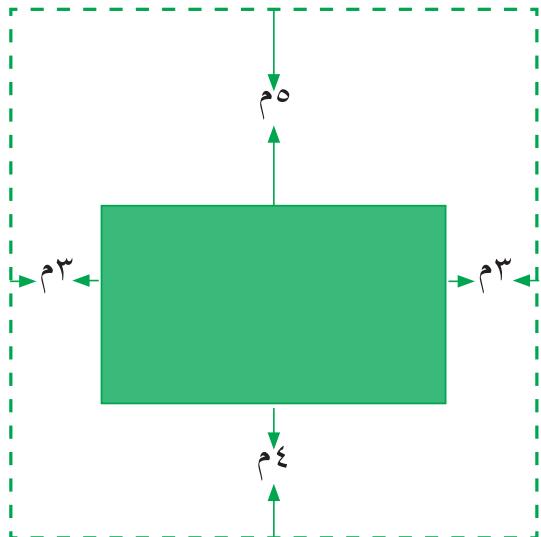
$4s + 4$



## ضرب كثیرات الحدود وقسمتها



**نشاط (١):** تصدر إحدى البلديات تراخيص البناء للمواطنين؛ لغرض تنظيم البناء،



وضبطه في المدن والقرى الفلسطينية. يمتلك سمير قطعة أرض مربعة الشكل، ويريد بناء بيت عليها، بحيث يترك مساحات حول البيت (ارتفاعات)، يمكن تمثيلها بالشكل المجاور، إفترض طول قطعة الأرض س متر.

طول البيت: (س - ٦)

عرض البيت: (س - —)

مساحة البيت:

### أولاً: ضرب كثیرات الحدود:

ليكن  $q(s)$ ،  $h(s)$  كثيري حدود، فإنّ:  $(q \times h)(s)$  كثير حدود، ويكون:

$$(q \times h)(s) = q(s) \times h(s)$$


**نشاط (٢):** إذا كان  $q(s) = s^2 + 3$ ،  $h(s) = 4s + 2$  ، أكمل إيجاد:

$$(q \times h)(s) = q(s) \times h(s) = (s^2 + 3) \times (4s + 2)$$

$$\underline{\quad} \times \underline{\quad} + \underline{\quad} \times \underline{\quad} + 2 \times s^2 + s^2 \times 4s =$$

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + s^2 \times 4s =$$



لاحظ أنّ:  $(q \times h)(s)$  هو اقتران كثير حدود من الدرجة \_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_.



**نشاط(٣):** إذا كان  $q(s) = s^3 - 5s^2 + 1$  ،  $k(s) = s^2 - 3s$  ، أكمل إيجاد:

$$(q \times k)(s) = q(s) \times k(s) = (s^2 - 5s^2 + 1) \times (s^2 - 3s)$$

$$\underline{\quad} - \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} - \underline{\quad} - \underline{\quad} = s^2 \times s^2 =$$

$$\underline{\quad} - \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} - \underline{\quad} =$$

لاحظ أنّ:  $(q \times k)(s)$  هو اقتران كثير حدود من الدرجة \_\_\_\_.

ما درجة حاصل ضرب كثيري حدود؟

**أفَكَرْ وَأُنْاقِشْ**

## ثانياً: قسمة كثيرات الحدود:



**نشاط(٤):** أكمل إيجاد ناتج قسمة ما يأتي:

$$\frac{s^3}{s^2} = s^{\underline{\quad}} , \quad s \neq \underline{\quad}. \quad (1)$$

$$\frac{s^3}{s^2} = \underline{\quad} , \quad s \neq \underline{\quad}. \quad (2)$$

$$\frac{s^2 - s}{s} = \frac{s(s-1)}{s} = \frac{s-1}{\underline{\quad}} , \quad s \neq \underline{\quad}. \quad (3)$$

$$\frac{4s^2}{s^2} = \underline{\quad} , \quad s \neq \underline{\quad}. \quad (4)$$

ليكن  $q(s)$  ،  $h(s)$  كثيري حدود، فإنّ:

$$q \div h(s) = q(s) \div h(s) \neq \text{صفر لـ كل } s \in \mathbb{R}$$

ج

**مثال:**

إذا كان  $q(s) = 7s + s^2 + 12$  ،  $h(s) = s + 2$  ، أجد:  $q(s) \div h(s)$ .  
يمكن إيجاد ناتج قسمة كثيري حدود باستخدام القسمة الطويلة، إذا كانت درجة المقسم أعلى، أو تساوي درجة المقسم عليه، باتباع الخطوات الآتية:

**الحل:**

$$\begin{array}{r}
 & 11 + s^2 - s \\
 \hline
 s + 2 & \left[ \begin{array}{r} 12 + s^2 + s \\ \hline s^2 + s \\ \hline 12 + s^2 + s \end{array} \right] \\
 & \quad - \\
 & \quad s^2 - s \\
 \hline
 & 12 + s^2 + s \\
 & \quad - \\
 & \quad s^2 - s \\
 \hline
 & 12 + s \\
 & \quad - \\
 & \quad 22 + s \\
 \hline
 & 100
 \end{array}$$

- ١- نرتّب حدود الاقترانين  $q(s)$  ،  $h(s)$  تنازلياً حسب قوى  $s$ .
- ٢- نقسم الحد الأول في المقسم على الحد الأول في المقسم عليه، ونضعه حدأً أول في ناتج القسمة؛ أي أن:  $s^2$  على  $s$  يساوي  $s$ .
- ٣- نضرب  $(s)$  الذي حصلنا عليه في خطوة ٢ في كل حد من حدود المقسم عليه، ونطرح.
- ٤- نكرر الخطوتين ٢ ، ٣ حتى نحصل على باقي درجته أقل من درجة المقسم عليه.

ناتج قسمة  $q(s)$  على  $h(s)$  يساوي  $s^2 - 2s + 11$  . والباقي ١٠٠ .

\* كيف نتحقق من صحة حل المثال السابق؟

\* ما درجة ناتج قسمة أي كثيري حدود؟

**أفَكَرْ وَأُنَاقِشْ**



**نشاط(٥):** أكمل إيجاد ناتج قسمة:  $(3s^3 + s^2 - 4) \div (s + 2)$  .

$$\begin{array}{r}
 & s^2 \\
 \hline
 s + 2 & \left[ \begin{array}{r} s^3 + s^2 - 4 \\ \hline s^2 + s \\ \hline \end{array} \right] \\
 & \quad - \\
 & \quad s^2 + s \\
 \hline
 & \quad - \\
 & \quad \hline
 & \quad \hline
 \end{array}$$

ناتج قسمة  $(3s^3 + s^2 - 4)$  على  $(s + 2)$  يساوي \_\_\_\_\_ ، والباقي \_\_\_\_\_.

لاحظ أنّ:

$$(s^3 + s^2 - 4) = (s + 2) \times (s^2 - 4)$$

( $s + 2$ ) عامل من عوامل  $s^2 + s^3 - 4$

هل ناتج القسمة عاملٌ من عوامل  $s^3 + s^2 - 4$ ؟



إذا كان باقي قسمة اقترانٍ كثيرٍ حدود على اقترانٍ كثيرٍ حدود آخر يساوي صفرًا،  
فإنَّ المقسمَ عليه عاملٌ من عواملِ المقسمَ.

**نشاط(٦):** خزان ماء اسطواني حجمه باللترات  $5(s^3 + s^2 - 4)$ ، وارتفاعه  $2s + 3$ ،  
لحساب مساحة قاعدته قام كل من فاطمة وأحمد بالحل كما يأتي:



### طريقة أحمد

$$\text{حجم الأسطوانة} = \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$\text{مساحة القاعدة} = \text{حجم الأسطوانة} \div \text{الارتفاع}$$

$$(s^3 + s^2 - 4) = (s^5 + s^4 - 10s^2) \div (s^2 + s + 3)$$

$$\begin{array}{r} s^5 \\ \hline s^2 + s + 3 \quad | \quad 10s^2 + s^4 - s^5 \\ \hline 10s^2 \\ \hline s^4 - s^5 \\ \hline s^4 \\ \hline -s^4 \\ \hline 0 \end{array}$$

صفر

### طريقة فاطمة

$$\text{حجم الأسطوانة} = \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$\text{مساحة القاعدة} = \text{حجم الأسطوانة} \div \text{الارتفاع}$$

$$(s^3 + s^2 - 4) = (s^5 + s^4 - 10s^2) \div (s^2 + s + 3)$$

$$= (s^2 + s + 3)(s^3 - s^2 - 1) \div (s^2 + s + 3)$$

$$= (s^3 - s^2 - 1) \text{ وحدة مربعة}$$

## تمارين ومسائل:



**س١** إذا كان  $ق(s) = s^3 - 5s$  ،  $ه(s) = 2 + s$  ،  $ك(s) = s^2 + 1$  ، أجد:

ب (ك × ه)(س)

أ (ق × ه)(س)

**س٢** أجد:  $(ق \div ه)(س)$  في كل مما يأتي:

أ  $ق(s) = s^3 - 1$

ب  $ق(s) = 6s^3 + 2s^2 + 1$

**س٣** أكتب درجة ناتج حاصل ضرب  $ق(s)$  في  $ه(s)$  فيما يأتي، دون إجراء عملية الضرب:

أ  $ق(s) = s^6 - 3s^4$

ب  $ق(s) = s^3 - 5s^2 + 2s - 1$

**س٤** أكتب درجة ناتج قسمة  $ق(s)$  على  $ه(s)$  فيما يأتي، دون إجراء عملية القسمة:

أ  $ق(s) = 3s^3 - 7s^4 + s$

ب  $ق(s) = 2s^2 - 8s^3 + 1$

**س٥** أبين باستخدام القسمة الطويلة أن  $s - 2$  عامل من عوامل  $s^3 - 8$

**س٦** قطعنا أرض احدهما مربعة الشكل طول ضلعها  $(s + 3)$  والأخرى مستطيلة الشكل أبعادها  $(s + 13)$  ،  $(s - 2)$  هل تتساوى مساحتيهما عندما  $s = 12$  ،  $s = 7$  ؟ أفسر إجابتي.

## الاقتران التربيعی

**نشاط (١):** كثيرٌ من حركة الأشياء في الطبيعة تحصل بطريقةٍ منظمةٍ، وضمن قوانين ثابتة.



ففي الشكل المجاور حركة الماء تشكل شكلًا منظماً.



الشكل الهندسي الذي تصنعه نافورة الماء في الشكل منحنٍ مفتوح إلى الأسفل .

أعطِ أمثلةً أخرى لأشياء، أو لأشكال لها الحركة نفسها : \_\_\_\_\_

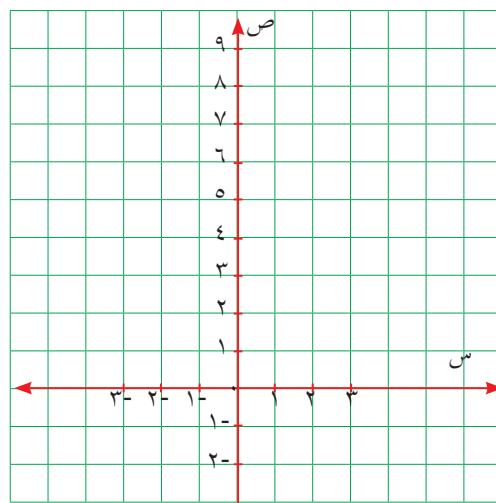


يُسمى كثيرُ الحدود  $Q(s) = As^2 + Bs + C$  حيث:  $A, B, C$  أعداد حقيقية،  $A \neq 0$  صفر اقتراناً تربيعياً.

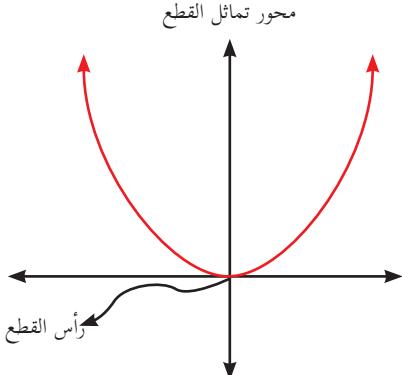


**نشاط (٢):** أكمل الجدول الآتي، وأعين النقاط الناتجة في المستوى:

| $s$              |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------------------|
|     |     | ١   |     |     | ٤   |     |     | $s = Q(s) = s^2$ |



عند تمثيل الاقتران التربيعى  $Q(s) = s^2$  في المستوى الديكارتى يظهر كما في الشكل المجاور، ويُسمى قطعاً مكافئاً. ويُسمى هنا قطعاً مكافئاً مفتوحاً إلى الأعلى؛ لأن معامل  $s^2$  موجب.



**نشاط (٣):** أكمل خطوات تمثيل الاقتران التربيعى:  $Q(s) = s^2 + 2s - 3$

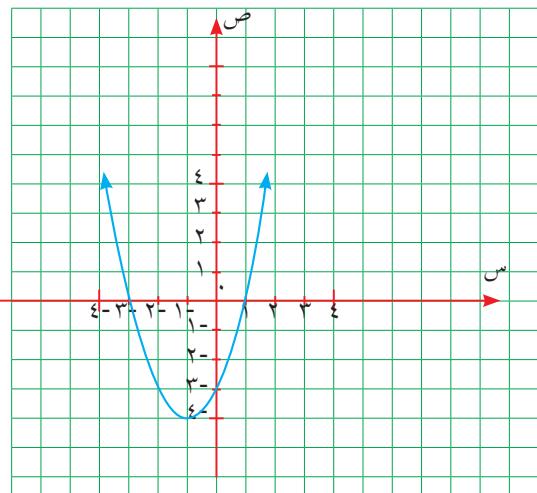
$$(1) \text{ أجد الإحداثي السيني لرأس القطع المكافئ، } s = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$$

(٢) أكمل الجدول لتمثيل النقاط:

$s^2 - 3$	$2s - 4$	$1s - 1$	$0s$	$1s$	$s$
		٤-			$s = Q(s)$

إحداثيات رأس القطع

$$Q(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$$



$$Q(1) = (1)^2 + 2(1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$$

$$Q(0) = (0)^2 + 2(0) - 3 = 0 + 0 - 3 = -3$$

$$Q(2) = (2)^2 + 2(2) - 3 = 4 + 4 - 3 = 5$$

$$Q(3) = (3)^2 + 2(3) - 3 = 9 + 6 - 3 = 12$$

(٣) أعين النقاط في المستوى الديكارتى، وأصلب بينها.

(٤) ما نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات؟

(٥) الاقتران مفتوح لـ \_\_\_\_\_ لأن \_\_\_\_\_

(٦) ما الإحداثي الصادى لرأس القطع المكافئ؟ ماذالاحظ؟

الاحظ أن:  $Q(-1) = -4$ ، وهي القيمة الصغرى للاقتران.



**نشاط(٤):** يعد وجود الأقواس أحد أهم مظاهر الفن العماني في فلسطين، الشكل المجاور هو صورة باب الحديد في المسجد الأقصى، القوس في الصورة يمكن التعبير عنه بالإقران ه(س) = ١٦ - س٢



\* ارسم محور تماثل القوس.

\* ارسم المحورين الإحداثيين بحيث ينطبق محور الصادات على محور تماثل الشكل، ومحور السينات على قاعدة القوس.

\* نقاط تقاطع قاعدة القوس مع محور السينات هي:

عرض القوس عند قاعدته = \_\_\_\_\_

ارتفاع القوس = \_\_\_\_\_

## تمارين ومسائل:

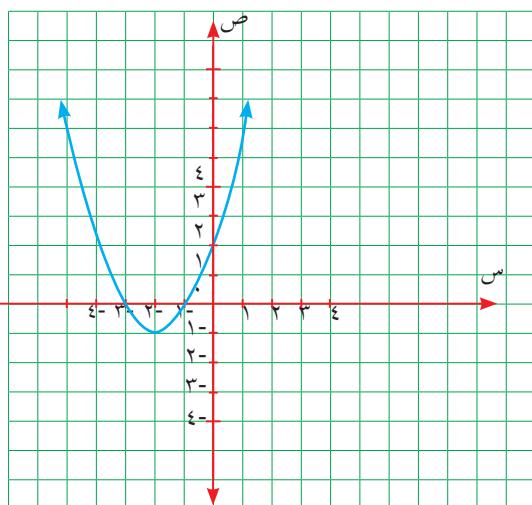


**س١** أمثل الاقترانات الآتية في المستوى الديكارتي:

أ  $ق(س) = س^2 + 6س + 9$

ب  $ق(س) = 3س^2 - 12س$

ج  $ق(س) = 1 - س^2$



**س٢** من الشكل المجاور، أجد:

أ إحداثيات رأس القطع المكافئ.

ب أصفار الاقرأن.

ج أرسم في الشكل محور التماثل.

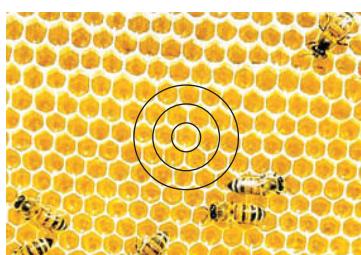
د إحداثيات نقطة تقاطعه مع محور الصّادات.

**س٣** تمثل عدد الخلية السداسية في قرص العسل

$$\text{بالاقرأن } ه(r) = 1 + 3r + r^3$$

حيث  $r$  تمثل عدد الحلقات في القرص.

أمثل الاقرأن في المستوى الديكارتي، وهل يمكن أن يكون عدد الأشكال السداسية في إحدى الحلقات يساوي صفر؟ أفسر إجابتي



## الاقتران النسبي

**نشاط(١):** في القاعات الرئيسيه يتم عمل أنظمة للتبريد للتحفيض من استهلاك الطاقة،



يحاول المهندسون أن تكون نسبة مساحة سطح المجسم إلى حجمه صغيرة بالحد الكافي . هناك قاعة طولها ٦ متر ، عرضها ٣ متر ، ارتفاعها ٢.٤ متر .

أجد: المساحة الكلية للقاعة =

$$= 6 \times 3 \times 2.4$$

$$\text{حجم القاعة} = 6 \times 3 \times 2.4$$

$$\text{نسبة المساحة الكلية للقاعة إلى حجمها} =$$

يُسمى الاقتران المكتوب على صورة  $Q(s) = \frac{h(s)}{L(s)}$  ، اقتراناً نسبياً، حيث  $h(s)$ ،  $L(s)$  اقترانان كثيرا حدود، ومجال الاقتران  $Q(s)$  هو ح ما عدا أصفار الاقتران  $L(s)$ .



**نشاط(٢):** أكتب أمثلة لاقترانات نسبية:

$$Q(s) = \frac{s^3 + 4}{s^2 - 5}, \quad s \neq \pm \sqrt{5}$$

$$h(s) =$$

$$m(s) =$$





**نشاط(٣):** ما مجال الاقترانات النسبية الآتية؟

$$1) \quad Q(s) = \frac{s^3 - 4}{s^2 + 6}$$

لإيجاد مجال الاقتران  $Q(s)$  نجد أصفار المقام.

لإيجاد أصفار المقام نضع :  $s^2 + 6 = صفر$

$$\frac{---}{s^2} = 6$$

$$\frac{---}{s} =$$

مجال  $Q(s)$  هو ح ما عدا أصفار المقام

إذن مجال  $Q(s) = \{ \dots \} = ح -$

$$2) \quad Q(s) = \frac{s}{s^2 + 5s + 6} \quad \text{نجد أولاً أصفار المقام: } s^2 + 5s + 6 = صفر$$

$$(s - 2) \times (s - ---) = صفر$$

$$\text{إما } s - 2 = صفر \text{ ، أو } s - --- = صفر$$

$$\frac{---}{s} = 2 \quad \text{أو } s =$$

إذن مجال  $Q(s) : ح - \{ 2 , --- \}$



**نشاط(٤):** أكمل إيجاد أصفار الاقترانات النسبية الآتية:

$$1) \quad Q(s) = \frac{s^3 + 4}{s^2 - 4} \quad , \quad s \neq 1 - , 4$$

$$\frac{s^3 + 4}{s^2 - 4} = صفر =$$

$$\frac{---}{s} = 3 + s \quad \text{يتبّع أن:}$$

$$\frac{---}{s} =$$

صفر الاقتران  $Q(s)$  هو: \_\_\_\_\_، وهو صفر البسط

$$، \quad \frac{s^2 - 4s - 12}{s^2 - 9} = Q(s) \quad (2)$$

$$\frac{s^2 - 4s - 12}{s^2 - 9} = صفر$$

$$----- = s^2 - 4s - 12$$

$$(s + 2) \times (s - -----) = صفر$$

إما:  $s + 2 = صفر$  ، أو:  $s - ----- = صفر$

$$----- = 2- \quad ، \quad \text{أو: } s =$$

أصفار الاقتران  $Q(s)$  هي  $----- = 2-$  ،

**أصفار الاقتران النسبي** هي تلك القيم التي تجعل قيمة البسط = صفر، ولا يكون المقام مساوياً صفر عندها.



ما القيم التي تجعل قيمة البسط = صفر إذا كان  $Q(s) = \frac{s^2 - 5}{s^2 - 9}$  حيث:  $s \neq \pm 3$

**أفكّر و أناقش**

## تمارين ومسائل:



س ١ أجد مجال الاقترانات النسبية الآتية:

$$\text{أ} \quad \text{ق}(s) = \frac{s^5 + s^3 + s}{\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}}$$

$$\text{ب} \quad \text{ق}(s) = \frac{s^4 + s^2}{s^4 + s^2}$$

$$\text{ج} \quad \text{ق}(s) = \frac{s^3 + s}{(s^2 - 1)s}$$

س ٢ أجد أصفار الاقترانات النسبية الآتية:

$$\text{أ} \quad \text{ق}(s) = \frac{s^4 - s}{s^4 + s^2}, \quad s \neq \text{صفر}$$

$$\text{ب} \quad \text{ق}(s) = \frac{s^9 + s^6 + s^3 + s}{s^2 + 1}$$

$$\text{ج} \quad \text{ق}(s) = \frac{s^2}{s^2 + s + 1}$$

س ٣ تم تبئنة خزاني وقود على شكل متوازي المستطيلات، الخزان الأول قاعدته مربعة الشكل، طول ضلعها س وارتفاعه ١م، والخزان الثاني قاعدته مستطيلة الشكل، أبعادها س + ١ ، س - ٢ وارتفاعه ١م.

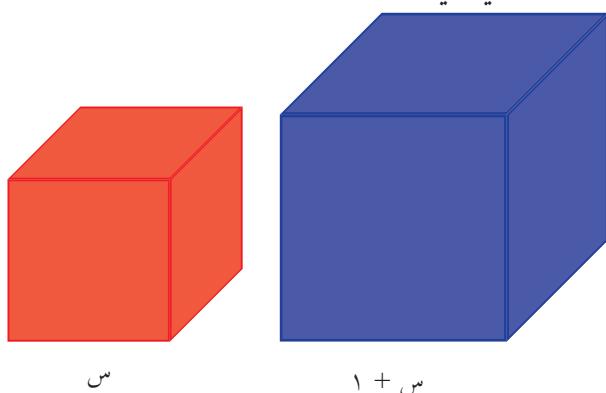
أ ما نسبة حجم الخزان الثاني إلى حجم الخزان الأول؟.

ب أي القيم الآتية تعتبر بعداً مناسباً لأبعاد الخزانين س : ٤ ، ٢ ، ١.

## العمليات على الاقترانات النسبية



**نشاط (١):** تعقد جلسات المجلس الوطني الفلسطيني في قاعات كبيرة مثل قاعة الشهيد ياسر عرفات، وقد صممت هذه القاعات، ويمكن تمثيلها بالشكل المجاور



نسبة المساحة الجانبية للمكعب إلى حجمه، وذلك لمكعبين أطوال أضلاعهما:  $s + 1$  ،  $s$

$$\star \text{ النسبة الأولى (المكعب الأزرق)} = \frac{s^2(1+s)^4}{s^2(1+s)^4}$$

$$\star \text{ النسبة الثانية (المكعب الأحمر)} = \frac{s^2}{s^2}$$

$$\star \text{ مجموع النسبتين: } \frac{s^2}{s^2} + \frac{s^2}{s^2}$$

### جمع الاقترانات النسبية وطرحها:

**مِثال:** أجد ناتج جمع الاقترانات النسبية الآتية، ببساط صورة:

$$(1) \quad \frac{s^2 + 12s + 8s^2}{s^2 - 4} , \quad s \neq \pm 2 = \frac{8 + s^2}{s^2 - 4} + \frac{4s^3 + 3s}{s^2 - 4}$$

$$\frac{6 + s}{s - 2} = \frac{(s+2)(s+6)}{(s-2)(s+2)} =$$

$$(2) \quad \frac{s^2(s+4) + (s-1)(s^3+2s+4)}{(s-1)(s+4)} = \frac{2s^3 + s^2}{s+4} + \frac{s^2}{s-1}$$

$$\frac{2s^2 - s^3 + s^5 + 7s^2}{s^3 + s^2 - 4} = \frac{2s^2 + s^8 + s^2 - s^3 + s^5}{s^3 + s^2 - 4} =$$

ليكن  $q(s) = \frac{q_1(s)}{q_2(s)}$  ،  $h(s) = \frac{h_1(s)}{h_2(s)}$  اقترانين نسبيين،

وكان  $s$  تنتمي إلى المجال المشترك للاقترانين النسبيين  $q(s)$  ،  $h(s)$ ، فإنّ:

$$\frac{q(s) h(s) \pm h(s) q(s)}{q_2(s) h_2(s)} = \frac{q_1(s) h_1(s) \pm h_1(s) q_1(s)}{q_2(s) h_2(s)}$$

• مجال مجموع أو طرح الاقترانين النسبيين هو ح ما عدا أصفار المقام.

**نشاط (٢):** أكمل إيجاد ما يلي:



$$\frac{\boxed{\phantom{0}} - s^2}{s^3 + s} = \frac{s^5 + s^2}{s^3 + s} - \frac{s^3 - s^2}{s^3 + s} \quad (1)$$

$$\frac{(\quad)(\quad) - (\quad)(s^3 - s^2)}{(s^2)(s^3 + s)} = \frac{s^4}{s + 1} - \frac{s^3 - s^2}{s^2} \quad (2)$$

$$\underline{\hspace{10em}} =$$

### ضرب الاقترانات النسبية:

أجد ناتج ما يأتي بأسط صورة:

**مثال:**

$$\frac{(25 - s^5) \times (1 + s^2) \times (s^5 - s^2)}{(s - 5) \times s^3} = \frac{s^5 - 25}{s^3} \times \frac{1 + s^2}{s^5 - 5} = q(s)$$

$$\frac{(s^2 + 1)^5}{s^3} = \frac{(s^2 + 1)^5 \times (s^5 - s^2)}{(s^5 - s^2) \times s^3} =$$

• ليكن  $Q(s) = \frac{H(s)}{C(s)}$  ، اقترانين نسبيين

و كانت س تتنبئ إلى  $H$  ما عدا أصفار المقامين، فإنّ:

$$\frac{Q(s) \times H(s)}{C(s) \times H(s)} = Q(s) \times \frac{H(s)}{C(s) \times H(s)}$$

• مجال حاصل ضرب الاقترانين هو  $H$  ما عدا أصفار  $C(s)$  ،  $H(s)$ .

**نشاط(٣):** أكمل إيجاد الناتج، مبيناً مجاله:

$$\frac{( ) \times ( ) s^2}{( ) \times (s^3 + s^2)} = \frac{s^4 - s^3}{s^5 - s^2} \times \frac{s^2}{s^3 + s} = Q(s)$$



مجال  $Q(s)$  هو:  $H - \{-3, 0\}$

### قسمة الاقترانات النسبية:



$$\frac{s^3}{1+s^2} = \frac{s}{1-s}$$

**نشاط(٤):** ليكن:  $Q(s) = \frac{s}{1-s}$  ،  $H(s) = \frac{s^2}{1+s}$

أكمل إيجاد ناتج ما يأتي، ببساط صورة:

$$Q(s) \div H(s) = \frac{1+s}{s^2} \times \frac{s}{1-s} = \frac{s^2}{1+s} \div \frac{s}{1-s}$$

$$\frac{\quad}{\quad} = \frac{( ) \times ( ) s}{s^2 \times ( )} =$$

- لِكَنْ  $q(s) = \frac{h(s)}{q(s)}$  اقتراٰنِي نسبیٰ، وَكَانَ  $h(s) \neq 0$  فَإِنْ:  $q(s) \div h(s)$  يساوي
- $\frac{q(s) \times h(s)}{q(s) \times h(s)} = \frac{q(s)}{q(s)} \times \frac{h(s)}{h(s)} = \frac{1}{5+s} \div \frac{s^2}{12+7s+s^2}$  مجال  $q(s) \div h(s)$  هو ح ما عدا أصفار الاقتراٰنات  $q(s), h(s), s=0$ .

**نشاط(٥):** أكمل إيجاد الناتج مبيّناً مجاله:



$$\frac{( )}{( )} \times \frac{s^2}{s^2 + 7s + 12} = \frac{s-5}{s+5} \div \frac{s^2}{s^2 + 7s + 12} = q(s) = \frac{( ) \times ( ) \times s^2}{( ) \times ( ) \times (s+3)} =$$

مجال  $q(s)$  هو ح  $-3, -2, -1, 0, 3$ .

## تمارين ومسائل:



**س ١** إذا كان:  $Q(s) = \frac{1}{s^2 - s}$  ،  $H(s) = \frac{s}{s - 1}$

أجد ما يأتي بأسط صورة، مبيناً مجال كل منها :

أ)  $Q(s) + H(s)$

ب)  $Q(s) - H(s)$

ج)  $\frac{1}{Q(s)} \times \frac{1}{H(s)}$

د)  $(Q(s))^2 \div H(s)$

**س ٢** أكتب الاقترانات الآتية بأسط صورة، مبيناً مجال كل منها :

$$Q(s) = \frac{6}{s-3} \times \frac{s^2 - 9}{12 - s^2}$$

$$H(s) = \frac{s^2 + 16s - 6}{s^2 - 64} \div (s-2)$$

**س ٣** استخدم الفلاح الفلسطيني صومعات على شكل مخروط لتعبئته الحبوب، أحد المخاريط المستخدمة

$$\text{نصف قطره يعطى بالعلاقة } \frac{s^2 - s - 6}{s^2 + s} \text{ وارتفاعه } \frac{s+4}{s}$$

أجد حجم ذلك المخروط.

## تمارين عامة

**س١** أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة في كلٌّ مما يأتي:

١. أي الاقترانات الآتية يُعد اقتراناً كثير حدود:

(أ)  $s + \frac{s}{8} - s^3$       (ب)  $s^3 - s^{\circ}$       (ج)  $s^5 + s^1$       (د)  $s^7 + s^3$

**٢** ما مجال الاقتران النسبي  $q(s) = \frac{s-1}{s^2-s}$  ؟

(أ)  $\{1, 0\}$       (ب)  $\{1, 0\}$       (ج)  $\{1, 0\}$       (د)  $\{1, 0\}$

**٣** ما صفر/أصفار الاقتران النسبي  $q(s) = \frac{s}{s^2-1}$  ؟

(أ)  $1, -1$  ، صفر      (ب) ١      (ج) صفر      (د)  $1, -1$  ، صفر

**٤** درجة كثير الحدود  $q(s)$  تساوي ٥ ، ودرجة كثير الحدود  $h(s)$  تساوي ٣ ، فما درجة حاصل ضربهما؟

(أ) ٢      (ب) ٥      (ج) ٨      (د) ١٥

**س٢** إذا كانت  $q(s) = s^3 - 5s^2 + 3s + 1$  ،  $h(s) = s^5$  ، أجد:

١.  $q(s) + h(s)$       ٢.  $q(s) - h(s)$       ٣.  $q(s) + h(s)$       ٤.  $q(s) \times h(s)$

٥.  $q(s) \div h(s)$       ٦.  $h(s) \div q(s)$

**س٣** إذا كانت  $q(s) = \frac{s^3}{s-1}$  ،  $h(s) = \frac{s^2-2}{s^2-1}$  ، أجد:

١. مجال  $q(s) \times h(s)$       ٢.  $q(s) + h(s)$

٣.  $q(s) \div h(s)$       ٤.  $h(s) \div q(s)$

س٤ إذا كان  $Q(s) = s^3 - 9H(s) = As^3 + Bs + C$  ،

فما قيمة كل من  $A$  ،  $B$  ،  $C$  التي تجعل  $Q(s) = H(s)$ ؟

س٥ حديقة منزل مستطيلة الشكل بعدها  $15\text{m}$  ،  $10\text{m}$  ، قطرها  $12.5\text{m}$  ، فإذا تم زيادة مساحة الحديقة بمقدار  $186\text{m}^2$  ، وذلك بإضافة عددين متساوين من الأمتار لكلاً بعدي من أبعادها ، أجد :

أ) الاقتران الذي يمثل المساحة بعد الزيادة.

ب) أبعاد الحديقة بعد الزيادة.

س٦ أقيّم ذاتي : أكمل الجدول الآتي :

متدني	متوسط	مرتفع	المهارة
			احدد المجال والمجال المقابل للاقتران
			احدد نوع اقتران ما
			اجد ناتج ضرب اقترانين

## مشروع الوحدة:

بعد الحق في توفير الطاقة من الحقوق الأساسية لكل فرد، للتخفيف من استهلاك الطاقة، يحاول المهندسون أن تكون نسبة مساحة سطح المجسم إلى حجمه صغيرة بالحد الكافي.

أيهما أفضل في بيتك تركيب نظام تبريد في غرفة الجلوس أم في غرفة نومك؟

أناقش المخاطر الاقتصادية للتكلفة وأقترح طريقة تساعد على التخفيف من استهلاك الطاقة.

[www.geoalgebra.com](http://www.geoalgebra.com)

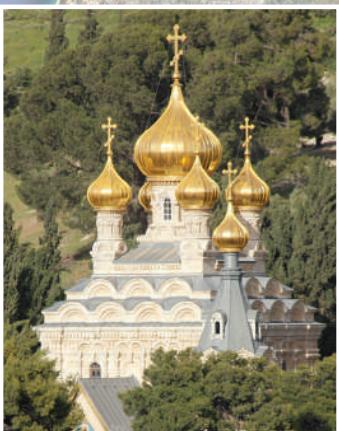
[www.graphic calculator](http://www.graphiccalculator.com)

روابط إلكترونية



# الاحتمالات

## الوحدة



أتاملُ المعالم العربية في الصورة، إذا أختيرتْ صورةً أحدِ المعالم عشوائياً، فهل الفرصة الكبرى أنْ يكون مَعْلِماً دينياً، ويقع في القدس (العاصمة)؟ أناقش صحة ذلك.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها، أن يكونوا قادرين على توظيف قوانين الاحتمالات في الحياة العملية من خلال الآتي:

١. إيجاد احتمال اتحاد حادثين.

٢. إيجاد احتمال تقاطع حادثين.

٣. إيجاد احتمال الحادث المشروط.

٤. التعرف إلى الحوادث المستقلة.

## قوانين الاحتمالات

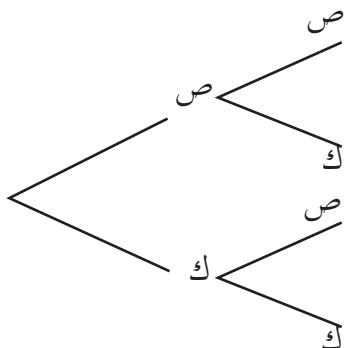


**نشاط (١):** الجنيه الفلسطيني هو العملة التي استخدمتها حكومة فلسطين في عهد الانتداب البريطاني بين عامي ١٩٤٨ م - ١٩٢٧ م.

تم إلقاء قطعة نقد معدنية من فئة ٥٠ مل مرتين متتاليتين، ولاحظة الوجه الظاهر.

ص: تعني وجه صورة عليه غصن الزيتون.

ك: تعني وجه عليه العدد ٥٠ مل



• الفراغ العيني للتجربة  $\Omega = \{(ص ، ص) ، ..... ، (ك ، ص) ، ..... ، (ص ، ك)\}$  تعني ظهور صورة في الرمية الأولى، وكتابة في الرمية الثانية.

.....  
(ك ، ص) تعني: .....

• إذا كان  $H$  حادث ظهور كتابة واحدة فقط ،  $\bar{H}$  حادث ظهور صورة واحدة على الأقل، فإن:

•  $H = \{(ص ، ك) ، ..... ، ح\} = \{(ك ، ص) ، ..... ، (ك ، ك)\}$

$$L(H) = \frac{1}{2}$$

$$L(\bar{H}) = \frac{\boxed{\phantom{0}}}{\boxed{\phantom{0}}} = \frac{1}{2}$$

$$\{ (ص ، ك) ، ..... ، (ك ، ك) \}$$

$$H \cup \bar{H} = \{ (ص ، ك) ، ..... ، (ك ، ك) \}$$

$$\frac{\boxed{\phantom{0}}}{\boxed{\phantom{0}}} = L(H \cap \bar{H}) , \quad \frac{\boxed{\phantom{0}}}{\boxed{\phantom{0}}} = L(H \cup \bar{H})$$

• احتمال عدم وقوع الحادث  $H$  هو:

$$L(\bar{H}) = 1 - L(H)$$

**أَتَذَكَّرُ:**

إذا كانت  $\Omega$  هي الفضاء العيني لتجربة عشوائية، بحيث إن كل عنصر في  $\Omega$  له فرصة الظهور نفسها (الحدث)، وكان الحادث  $H \subset \Omega$  ، فإنّ :

$$L(H) = \frac{\text{عدد عناصر } H}{\text{عدد عناصر } \Omega}$$

$$L(\bar{H}) = 1 - L(H)$$

إذا كان  $H$  ،  $\bar{H}$  حادثين في  $\Omega$  ، فإنّ :

$$L(H \cup \bar{H}) = L(H) + L(\bar{H}) - L(H \cap \bar{H})$$



**نشاط (٢):** في صندوقٍ ٦ بطاقاتٍ مرقمة بالأعداد: ٣ ، ٢٤ ، ٢٧ ، ٩ ، ٧ ، ٣٦ سُجِّبَتْ من الصندوق بطاقةٌ عشوائياً ، إذا كان :

$H$  ، حادث ظهور عددٍ من مضاعفات العدد ٣

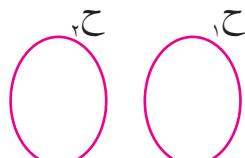
$\bar{H}$  ، حادث ظهور عددٍ من مضاعفات العدد ٦ ، فإنّ :

$$\{7, 36, 24, 27, 9, 3\} = \Omega$$

$$H = \{3, 9\}, \bar{H} = \{36, 27, 24\}$$

$$H \cap \bar{H} = \boxed{\quad}$$

$$L(H \cap \bar{H}) = \frac{1}{6}$$



إذا كان  $H$  ،  $\bar{H}$  حادثين منفصلين في  $\Omega$  ، فإنّ :

**أَتَذَكَّرُ:**

$$L(H \cup \bar{H}) = L(H) + L(\bar{H})$$



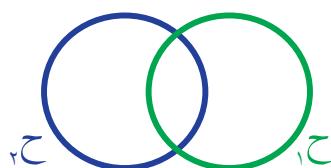
**نشاط (٣):** إذا كان احتمالاً أنْ يُنْجِزَ مقاولٌ بناءً مشروعين (سكنى وتجاري) معاً في الموعد المحدد يساوي  $\frac{1}{4}$  ، واحتمالاً أنْ يُنْجِزَ المشروع السكني يساوي  $\frac{3}{4}$  ، واحتمالاً

أنْ يُنْجِزَ المشروع التجاري  $\frac{2}{3}$  .

ما احتمالاً أنْ يُنْجِزَ المقاولُ المشروع السكني فقط؟

$H$  : حادث إنجاز المقاول المشروع السكني .

$\bar{H}$  : حادث إنجاز المقاول المشروع التجاري .



احتمال أنْ يُنجِزَ المُشروعُ السكَنِي فقط يعني: أنْ يُنجِزَ المُشروعُ السكَنِي، وَعدم إنجاز المُشروع التجاري، وبالرموز:  $L(H, - \bar{H}) = L(H, \cap \bar{H})$

$$L(H, - \bar{H}) = L(H) - L(H, \cap \bar{H})$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} =$$

• ما احتمال أنْ يُنجِزَ المُقاولُ المُشروع التجاري فقط؟

احتمال أنْ يُنجِزَ المُشروع التجاري فقط يعني:

$$L(H, - \bar{H}) = L(H) - L(H, \cap \bar{H})$$

$$\text{_____} = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} =$$

**أَتَعْلَمُ :** ليكن  $H_1, H_2$  حادثتين في الفضاء العيني  $\Omega$  لتجربة عشوائية، فإنّ:

$$\overline{H_1 \cup H_2} = \overline{H_1} \cap \overline{H_2}$$

$$\overline{H_1 \cap H_2} = \overline{H_1} \cup \overline{H_2}$$

احتمال حدوث  $H_1$  وعدم حدوث  $H_2 = L(H_1, - H_2) = L(H_1) - L(H_1 \cap H_2)$

**نشاط (٤):** ليكن:  $L(H) = 0,3, L(\bar{H}) = 0,5, L(H \cap \bar{H}) = 0,2$ ، أكمل إيجاد ما يأتي:



$$\text{_____} = \text{_____} - \text{_____} + L(H) \cdot$$

$$\text{_____} = \text{_____} - 1 - L(H) \cdot$$

$$L(H, - H) = L(H) - L(H \cap H) \cdot$$

$$\text{_____} = 0,2 - 0,3 =$$

$$L(\bar{H} \cup \bar{H}) = L(\bar{H}) \cap L(\bar{H}) = 1 - L(H \cap \bar{H}) = 1 - 0,2 = 0,8 \cdot$$

$$\text{_____} = \text{_____} - 1 = L(\bar{H} \cup H) \cdot$$

## تمارين ومسائل:



س١ لدى عائلة ثلاثة أطفال، ما احتمال أن يكون لديها بنتان وولد؟

س٢ في تجربة رمي حجري نرد منتظمين مرة واحدة، وملحوظة الوجهين الظاهرين،

أجد احتمال ما يأتي:

(أ) احتمال ظهور عددين مجموعهما ٧.

(ب) احتمال ظهور عددين فرديين.

(ج) احتمال ظهور عددين مجموعهما ٣ على الأكثر.

س٣ إذا كان  $H_1, H_2, H_3$  حادثتين في  $\Omega$  حيث:

$$P(H_1) = 0.6$$

$$P(H_2) = 0.3$$

$$P(H_1 \cap H_2) = 0.15$$

أحسب:

(أ)  $P(H_1 - H_2)$

(ب)  $P(\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2)$

## الاحتمال المشروط



**نشاط(١):** يمثل الجدول الآتي بيانات مجموعٍ من الطلبة في إحدى الجامعات الفلسطينية، لمعرفة نتائجهم في مقرر الإحصاء:

المجموع	الراسيون	الناجحون	النتيجة \ الكلية
٤٠	١٥	٢٥	العلوم
١٥	٥	١٠	الزراعة
٢٥	١٠	١٥	الهندسة
٨٠	٣٠	٥٠	المجموع

أُختيرَ أحدُ الطلبة عشوائيًّا، أجيِّبُ عمّا يأتي :

• احتمال أن يكون هذا الطالب من كلية الزراعة =  $\frac{15}{80}$

• احتمال أن يكون هذا الطالب من الناجحين = \_\_\_\_\_

• احتمال أن يكون هذا الطالب ناجحًا، ومن كلية الزراعة =  $\frac{10}{80}$

هل يمكن إيجاد احتمال أن يكون هذا الطالب من كلية الزراعة، بشرط أنه من الناجحين؟



**نشاط(٢):** في تجربة رمي حجر النرد مرتّة واحدةً، وملاحظة الوجه العلوي الظاهر،

ما احتمالُ الحصولِ على العدد ٣ إذا علمت أنَّ الوجه الظاهر عددٌ فرديٌّ؟

$$\{\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

ح، يُمثلُ حدث ظهور العدد ٣ = {٣} ، وبالتالي  $L(H) = \frac{1}{6}$

إذا علِمَ أنَّ الوجه الظاهر عددٌ فرديٌّ، فإنَّ الفضاء العينيَّ يتناقص، بحيث يصبح:

$$H = \{1, 3, 5\} \quad (\text{أي فضاء عينيٌّ جديد})$$

إذن: احتمال ظهور العدد ٣ ، بعد علِمنا أنَّ الوجه الظاهر عددٌ فرديٌّ هو =

$L(H) = \frac{1}{3}$  . وبالرموز:  $L(H / H) = \frac{1}{3}$  . وهو الاحتمال المشروط.

نلاحظ أنَّا علِمنا جزءاً من النتيجةِ التي وقعت، وهي أنَّ حدثاً معيناً قد وقع، وهو حدث ظهور عددٍ فرديٌّ.

والنتيجة: أنَّ الحادثَين يقعان معاً بشرطِ وقوع أحدهما.

بما أنَّ  $H \cap H = \{3\}$  فإن  $L(H \cap H) =$

$$\text{ومنه: } \frac{L(H \cap H)}{L(H)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

ما العلاقةُ بين:  $L(H / H)$  و  $\frac{L(H \cap H)}{L(H)}$  ؟

**أَعْلَم :** الاحتمال المشروط: هو إيجاد قيمة الاحتمال لحدثٍ ما، علماً بأنَّ حدثاً آخر قد وقع.

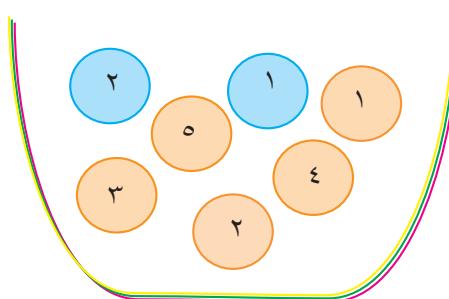
إذا كان  $H$ ،  $H$  حدثَين في  $\Omega$ ، فإنَّ احتمال وقوع  $H$ ، بشرط وقوع  $H$ ، يُرمزُ له بالرموز:

$$L(H / H) = \frac{L(H \cap H)}{L(H)}, \quad L(H) \neq \text{صفر}$$

$$\text{أي أنَّ: } L(H \cap H) = L(H / H) \times L(H)$$

**مثال:**

يحتوي وعاء على 5 كراتٍ برقمية اللون مُرقمٌ من 1 إلى 5، وكرتين زرقاء اللون مُرقمتين بالأرقام 1 ، 2 ، كما في الشكل المجاور. إذا سحبنا كرة عشوائية، ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة برقمية علمًا بأنّها تحمل الرقم 2 ؟



ليكن: **الحل:**

ح<sub>1</sub> : حدث الكرة المسحوبة برقمية اللون.

ح<sub>2</sub> : حدث الكرة المسحوبة تحمل الرقم 2 .

$$\text{ومنه: } L(\text{ح}_2) = \frac{2}{7} ,$$

ح<sub>1</sub> ∩ ح<sub>2</sub> تعني: أن الكرة المسحوبة برقمية، وتحمل الرقم 2 ،

$$\text{إذن: } L(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2) = \frac{1}{7}$$

احتمال أن تكون الكرة المسحوبة برقمية، علمًا بأنّها تحمل الرقم 2 = 2

$$L(\text{ح}_1 / \text{ح}_2) = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{7}} = \frac{L(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2)}{L(\text{ح}_2)}$$

**نشاط(٣):** ليكن: ح<sub>1</sub> ، ح<sub>2</sub> حدثان في Ω ، حيث إنّ:



$$L(\text{ح}_1) = \frac{1}{4} , L(\text{ح}_2) = \frac{1}{3} , L(\text{ح}_1 \cup \text{ح}_2) = \frac{23}{24} , \text{أكمل إيجاد } L(\text{ح}_1 / \text{ح}_2) , L(\text{ح}_2 / \text{ح}_1) :$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} - \underline{\hspace{2cm}} + L(\text{ح}_1) = L(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2)$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \frac{L(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2)}{L(\text{ح}_2)}$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \frac{L(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2)}{L(\text{ح}_1)}$$

## تمارين وسائل:



س١ أجب عما يأتي :

أ) متى يكون  $L(H, H) = \text{صفر}$

ب) متى يكون  $L(H, H) = 1$

ج) أعطى أمثلة على كل حالة للفرعين السابقين.

س٢ يحتوي صندوقٌ على 7 كراتٍ بيضاء اللون، مرقمةٌ من 1 إلى 7، وعلى 13 كرةً سوداء اللون

مرقمةٌ من 1 إلى 13، سُحبَت كرّةً بشكلٍ عشوائيٍ.

• ما احتمالُ أن تكونَ الكرةُ سوداءً علمًاً بأنّها تحمل العدد 9؟

س٣ وُجِدَ أنّ 30% من مُراجعٍ إحدى العيادات الصحيّة يعانون من ارتفاع ضغط الدم،

وأنّ 15% من المراجعين مصابون بمرضٍ في الكبد، و10% مصابون بالمرضين معاً.

• ما احتمالُ أن يكونَ أحدُ المراجعين مصاباً بمرضٍ في الكبد، علمًاً بأنّه يعاني من ارتفاع ضغطِ الدم؟

## استقلال الحوادث



**نشاط (١):** من أجل تمثيل الشعب يتم إجراء الانتخابات، أجريت انتخابات البلديات في فلسطين عام ٢٠١٧، وتنافست ثلاثة قوائم من مدينة نابلس، وأربع قوائم من مدينة الخليل، تم اختيار مرشح من كل قائمة عشوائياً، لحضور مؤتمر حول دور البلديات في خدمة المجتمع.

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

، ( ، ) ، ( ، ) ، ( ، ) } ، المسقط الأول يمثل رقم قائمة مرشح مدينة نابلس، والمسقط الثاني يمثل رقم قائمة مرشح مدينة الخليل.

ما احتمال أن يكون مرشح مدينة نابلس من القائمة الثالثة؟

ح: تُمثل حادث أن يكون مرشح مدينة نابلس من القائمة الثالثة،

$$P(H) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

ما احتمال اختيار مرشح مدينة الخليل من القائمة الرابعة؟

**لتكن:**  $H_1$  تُمثل حادث أن يكون مرشح مدينة الخليل من القائمة الرابعة.

$$P(H_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

إذا تم اختيار مرشحين من المدينتين بشكل عشوائي، ما احتمال أن يكون المرشح الأول من القائمة الثالثة لمدينة نابلس، وأن يكون المرشح الثاني من القائمة الرابعة لمدينة الخليل؟

**المطلوب:** احتمال حدوث الحادثين معاً؛ أي  $P(H_1 \cap H_2)$

$$P(H_1 \cap H_2) = \frac{1}{12}$$

$$P(H_1 \cap H_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

ما العلاقة بين:  $P(H_1 \cap H_2)$ ،  $P(H_1) \times P(H_2)$ ؟

هل يتاثر اختيار مرشح مدينة نابلس باختيار مرشح الخليل؟

هل يتاثر حدوث  $H_1$  بحدوث  $H_2$ ؟

$$P(H_1 / H_2) = \frac{P(H_1 \cap H_2)}{P(H_2)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$$

$$P(H_2 / H_1) = \frac{P(H_1 \cap H_2)}{P(H_1)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

ما العلاقة بين:  $L(H/H)$ ,  $L(H_1/H_2)$ ,  $L(H_2/H_1)$ ؟  
 نلاحظ أنّ: حادث اختيار المرشح من إحدى قوائم مدينة نابلس لا يؤثّر على حادث اختيار، أو عدم اختيار المرشح = من مدينة الخليل ، وتسمى مثل هذه الحوادث حوادث مستقلة .

**أَتَعْلَم :** يُقال أنّ  $H$ ,  $H_1$ ,  $H_2$  حادثان مستقلان، إذا كان وقوع أيٌّ منهما لا يؤثّر على وقوع، أو عدم وقوع الحادث الآخر؛ أي أنّ :

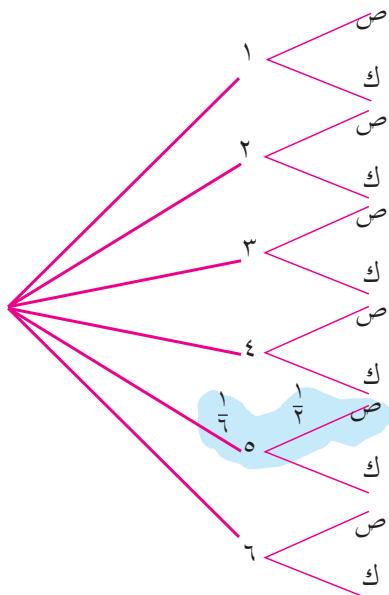
$$L(H/H) = L(H)$$

$$L(H_1/H_2) = L(H_1)$$

$$\text{وكذلك } L(H_2/H_1) = L(H_2) \times L(H_1).$$

في تجربة رمي حجر نرد، ثم إلقاء قطعة نقد، وملحوظة الوجهين الظاهرين، ما احتمال ظهور الرقم 5 على حجر النرد، وظهور صورة على قطعة النقد؟

$$\Omega = \{(1, \text{ص}), (1, \text{ك}), (2, \text{ص}), (2, \text{ك}), (3, \text{ص}), (3, \text{ك}), (4, \text{ص}), (4, \text{ك}), (5, \text{ص}), (5, \text{ك}), (6, \text{ص}), (6, \text{ك})\}$$



**ليكن**  $H$ : حادث ظهور الرقم 5 على حجر النرد.

$H_1$ : حادث ظهور صورة على قطعة النقد.

**والمطلوب:**  $L(H \cap H_1)$

لاحظ أنّ الحادثين  $H$ ,  $H_1$  مستقلان ، فلا يتأثر رمي قطعة النقد برمي حجر النرد، فنجد احتمال كلّ منهما دون الاعتماد على الآخر:  $L(H) = \frac{1}{6}$  ،  $L(H_1) = \frac{1}{2}$

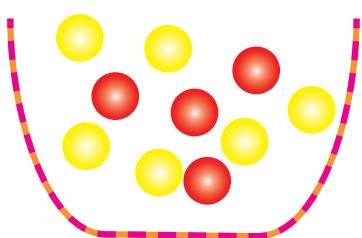
وبما أنّ  $H$ ,  $H_1$  مستقلان، يتّبع أنّ:

$$L(H \cap H_1) = L(H) \times L(H_1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

هل يمكنك إيجاد:  $L(H \cap H_1)$  بطريقة أخرى؟

**أَفَكَرْ وَأَنْاقِشْ**

**نشاط (٢):** يحتوي صندوق على ٤ كراتٍ حمراء اللون، و٦ كراتٍ صفراء اللون متماثلاتٍ



في الحجم، سُحبَت كرتان على التوالي:

ما احتمال أن تكون الأولى حمراء، والثانية صفراء،

إذا كان السحب مع الإرجاع؟

ح<sub>١</sub>: الكرة الأولى المسحوبة حمراء.

ح<sub>٢</sub>: الكرة الثانية المسحوبة صفراء.

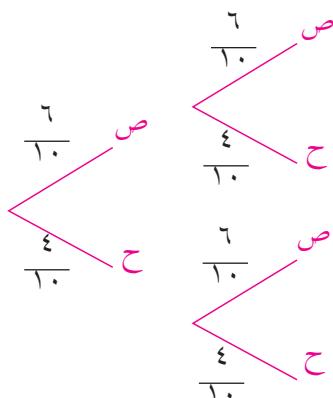
احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء، والثانية صفراء،

إذا كان السحب مع الإرجاع =

$$L(H_1 \cap H_2) = L(H_1) \times L(H_2)$$

$$\frac{\square}{100} = \frac{\square}{10} \times \frac{4}{10}$$

لماذا؟



**نشاط (٣):** إذا كان  $L(H_1) = 0,5$  ،  $L(H_2) = 0,7$  ،



وكان  $L(H_1 \cup H_2) = 0,85$  ، أيَّنْ أنْ  $H_1$  ،  $H_2$  حادثان مستقلان.

$$_____ = _____ \times _____ = L(H_1) \times L(H_2)$$

$$L(H_1 \cup H_2) = L(H_1) + L(H_2) - L(H_1 \cap H_2)$$

$$0,85 = 0,5 + 0,7 - L(H_1 \cap H_2)$$

$$L(H_1 \cap H_2) = 0,35$$

نلاحظ أنَّ  $L(H_1 \cap H_2) = L(H_1) \times L(H_2)$  ، أيَّ أنَّ الحادثنين  $H_1$  ،  $H_2$  مستقلان.

**نشاط (٤):** إذا كان  $L(H_1) = 0,4$  ،  $L(H_2) = 0,5$  . وكان  $H_1$  ،  $H_2$  حادثنين مستقلان،

أجد قيمة ما يأتي:

$$_____ = _____ \times _____ = L(H_1 \cap H_2) = 0,4 \times 0,5$$

$$_____ = _____ - _____ + _____ = L(H_1 \cup H_2) = 0,9$$

$$_____ = L(H_1 / \bar{H}_2)$$



## تمارين وسائل:



س١ إذا كان:  $L(H) = 0,6$  ،  $L(\bar{H}) = 0,5$  ، وكان  $L(H \cap \bar{H}) = 0,8$  ،  
أيَّنْ أَنْ:  $H$  ،  $\bar{H}$  حادثان مستقلان.

س٢ يحتوي صندوقٌ على ٥ كراتٍ زرقاء اللون، و٧ كراتٍ خضراء اللون،  
سُحبت كرتان على التوالي، مع إرجاع. أحسب احتمال ما يأتي:  
ا) أن تكون الكرة الأولى زرقاء، والثانية خضراء.  
ب) أن تكون الكرتان من اللون نفسه.

س٣ إذا كان:  $L(H \cap \bar{H}) = 0,2$  ،  $L(\bar{H}) = 0,4$  ،  $L(H) = 0,5$  ، أجد:  
ا)  $L(H \cap H)$   
ب)  $L(H / H)$   
ج) هل  $H$  ،  $\bar{H}$  حادثان مستقلان؟

## تمارين عامة

١٠ أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

إذا كان  $H$  ،  $H$  ، حدثين منفصلين في  $\Omega$  ، وكان  $L(H) = \frac{2}{3}$

$L(H) = \frac{1}{4}$  ، مما قيمة  $L(H \cap H)$ ؟

- أ)  $\frac{1}{6}$       ب)  $\frac{11}{12}$       ج)  $\frac{5}{12}$       د) صفر

إذا كان  $H$  ،  $H$  ، حدثين مستقلين في  $\Omega$  ، لتجربة عشوائية ما ، وكان  $L(H) = 0.5$

$L(H) = 0.4$  ، مما قيمة  $L(H \cup H)$ ؟

- أ)  $0.7$       ب)  $0.9$       ج)  $0.5$       د)  $0.4$

إذا كان  $L(H) = 0.7$  ،  $L(H) = 0.4$  ،  $L(H - H) = 0.4$

فما قيمة  $L(H / H)$ ؟

- أ)  $0.6$       ب)  $0.25$       ج)  $0.5$       د)  $0.75$

إذا كان احتمال أن ينجح عامر في الرياضيات يساوي  $0.7$  ، واحتمال أن ينجح في اللغة الإنجليزية يساوي  $0.8$  ، واحتمال أن ينجح في كليهما يساوي  $0.56$ . فما احتمال نجاحه في الرياضيات فقط؟

- أ)  $0.8$       ب)  $0.24$       ج)  $0.14$       د)  $0.7$

إذا كان  $L(\bar{H} / H) = 0.3$  ، و  $L(H) = 0.4$  ، وكان  $H$  ،  $H$  مستقلان، فما قيمة

$L(H \cap \bar{H})$ ؟

- أ)  $0.12$       ب)  $0.28$       ج)  $0.7$       د)  $0.3$

٢ إذا كان احتمال نجاح طالب في امتحان الفيزياء يساوي  $0.75$  ، واحتمال نجاحه في امتحان الكيمياء يساوي  $0.8$  ، واحتمال نجاحه في الامتحانين معاً يساوي  $0.65$ ، فما احتمال:

أ) نجاح الطالب في أحد الامتحانين؟

ب) نجاح الطالب في امتحان الكيمياء فقط؟

**س٣** صندوقان يحتوي الأول على ٤ كراتٍ بيضاء اللون، و٥ كراتٍ سوداء اللون، ويحتوي الثاني على ٣ كراتٍ بيضاء اللون، و٢ كرات سوداء اللون، وجميع الكرات في الصندوقين متماثلاتٌ في الحجم: إذا سُحبت كرّة واحدة من كلٌّ صندوقٍ، فما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان سوداً؟

**س٤** إذا كان  $H_1, H_2$  حادثتين في  $\Omega$ ، وكان  $L(H_1) = \frac{1}{3}$  ،  $L(H_2/H_1) = \frac{1}{2}$  ،  $L(H_2) = \frac{1}{6}$  . أحسب قيمة كلٌّ مما يأتي:

$$\text{• } L(H_1/H_2) \quad \text{• } L(H_2/H_1) \quad \text{• } L(H_1 - H_2)$$

**س٥** إذا كان  $L(H_1) = 0.4$  ،  $L(H_2/H_1) = 0.5$  ،  $L(H_2) = ?$

**ب** هل  $H_1, H_2$  مستقلان؟

**س٦** أقيِّم ذاتي: أعبر بلغتي عن توظيف مفاهيم الوحدة في حياتي المدرسية .

## مشروع الوحدة:

تتعدد الهوائيات والمهارات لدى الطلبة، ففي إحدى المدارس لوحظَ تعددُ الهوائيات لدى طلبة الصف التاسع، منها لعبة كرة القدم، لعبة كرة السلة، لعبة كرة الطائرة، لعبة الشطرنج، القراءة وغيرها من الهوائيات.

بالتعاون مع زملائك قم بتوزيع طلبة صفّك إلى ثلاث مجموعات، وقم بتصنيف الهوائيات لديهم في جدول. اختر أحد الطلبة بصورة عشوائية، ثم احسب :

- ١ احتمال أن يكون هذا الطالب من المجموعة الأولى، ويلعب كرة القدم.
- ٢ احتمال أن يكون الطالب لاعب شطرنج، علما بأنه من المجموعة الثالثة.
- ٣ أناقش نتائج المجموعات المختلفة، وأصف الفروقات بينها.

# ٩

## الوحدة



تأمل صورة المسجد العمري في مدينة غزة، ولاحظ الأشكال الهندسية (الدائرة) الواردة فيها، ومدى الدقة والإتقان في بناء المسجد . كيف يمكن تحديد مركز النافذة الدائرية؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها، أن يكونوا قادرين على توظيف معادلة الدائرة والمماسات والزوايا في الحياة العملية من خلال الآتي:

- ١ التعرف إلى معادلة الدائرة.
- ٢ إيجاد معادلة الدائرة.
- ٣ التعرف إلى الزوايا المحيطية، والزوايا المركزية.
- ٤ استنتاج العلاقة بين الزاويتين المركزية والمحيطية المشتركة في القوس نفسه.
- ٥ استنتاج العلاقة بين الزاويتين المحيطيتين المشتركتين في القوس نفسه.
- ٦ أن يتعرف على مماس الدائرة.
- ٧ أن يتعرف الزاوية المماسية في الدائرة.
- ٨ أن يستنتج العلاقة بين الزاوية المماسية والزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس.
- ٩ التعرف إلى الشكل الرباعي الدائريّ.
- ١٠ استنتاج بعض خصائص الشكل الرباعي الدائريّ.

## الدائرة



**نشاط (١):** تربية الخيول والاعتناء بها إرث عربى أصيل، ومن طرق التعامل مع الخيول أن يقوم الرجل بمسك طرف حبل يمتد إلى رسن الحصان الذى يدور بعده ثابت عن الرجل.



- ما شكل المسار الناتج من حركة الحصان حول الرجل؟
- ماذا يمثل موقع قدمي الرجل بالنسبة للمسار؟
- ماذا يسمى البعد الثابت بين موقع الرجل ومسار الحصان؟

نلاحظ أن المسار الذي يشكله الحصان من دورانه حول نقطة ثابتة (موقع الرجل) هو دائرة مركزها النقطة الثابتة ونصف قطرها —— .

**أَتَعْلَم : المحل الهندسي :** هو مسار نقطة تحرّك في المستوى الديكارتي لرسم منحنى تحت شروط معينة، حيث تُتّبع هذه المسارات أشكالاً هندسية.

**الدائرة :** هي المحل الهندسي (المسار) لنقطة تحرّك في المستوى، بحيث تبعد بعداً ثابتاً عن نقطة ثابتة، تسمى مركز الدائرة، ويُرمز لها بالرمز . يُسمى البعد الثابت نصف قطر الدائرة ، ويُرمز له بالرمز نق.



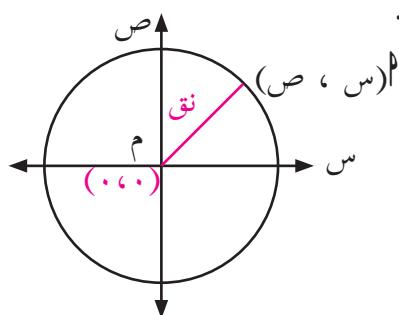
**نشاط (٢):** يُمثل الشكل المجاور دائرةً مركّبها نقطةً الأصل  $M$ ، والنقطة  $(s, c)$  تقع على الدائرة،  $M$  هو نصف قطر الدائرة.

باستخدام قانون المسافة بين نقطتين، فإنّ:

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{(s_2 - s_1)^2 + (c_2 - c_1)^2} \\ M &= \sqrt{(s - 0)^2 + (c - 0)^2} \end{aligned}$$

ولكن:  $M = \sqrt{s^2 + c^2}$

بتربيع الطرفين أحصل على المعادلة :



## أَتَعْلَم

الصورة العامة لمعادلة الدائرة، التي مرّكّبها نقطة الأصل  $(0, 0)$ ، ونصف قطرها  
نق هي:  $s^2 + c^2 = نق^2$

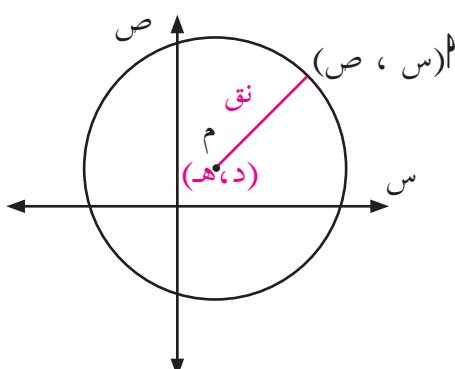
**مثال (١):**

**الحل:**

$$\text{معادلة الدائرة: } s^2 + c^2 = نق^2$$

$$s^2 + c^2 = 4^2$$

$$s^2 + c^2 = 16$$



**نشاط (٣):** لإيجاد معادلة الدائرة في الشكل المجاور، حيث:  $M$  مركز الدائرة  
نصف قطر الدائرة هو  $M$ ، والنقطة  
تقع على الدائرة التي مرّكّبها  $M$ .

طول  $m$  باستخدام قانون المسافة بين نقطتين:

$$m = \sqrt{(s_2 - s_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}$$

ومنها:  $n = m = \frac{1}{2} \text{ هو نصف قطر}$

بتربيع الطرفين أحصل على المعادلة :

**أتعلّم :** الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها النقطة  $(d, h)$ ، ونصف قطرها  $n$  هي :  $(s - d)^2 + (c - h)^2 = n^2$

أكتب معادلة الدائرة التي مركزها النقطة  $(1, 2)$ ، وطول نصف قطرها  $3$  سم.

**مثال (٢) :**

**الحل :**

$$\text{معادلة الدائرة: } (s - d)^2 + (c - h)^2 = n^2$$

$$(s - 1)^2 + (c - 2)^2 = 3^2$$

ملاحظة: عند فك الأقواس في معادلة الدائرة السابقة نحصل على الصورة:

$$s^2 - 4s + 4 + c^2 - 2c + 1 = 9$$

$$s^2 - 4s + c^2 - 2c = 5$$

$$s^2 - 4s + c^2 - 2c = 4$$

**نشاط (٤) :** عند فك الأقواس في المعادلة التي على الصورة:  $(s - d)^2 + (c - h)^2 = n^2$

$$\text{نحصل على: } s^2 - \underline{\quad} + d^2 + \underline{\quad} + h^2 - \underline{\quad} = n^2$$

$$s^2 - \underline{\quad} + d^2 + \underline{\quad} + h^2 - \underline{\quad} = \text{صفر}$$

بفرض أن  $-d = l$ ,  $-h = k$ ,  $d^2 + h^2 - n^2 = g$

تنتج الصورة :

ماذا تلاحظ على معامل  $s^2$ , معامل  $c^2$ ؟

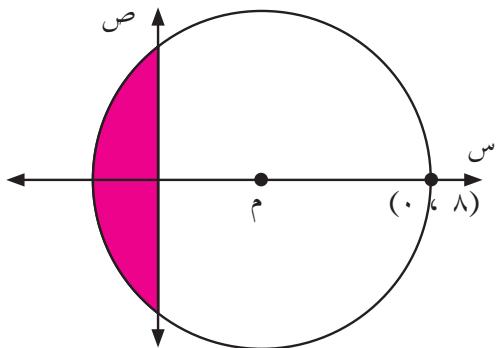
هل يوجد الحد  $s$  في المعادلة؟

## أَتَعْلَم

**الصورة القياسية لمعادلة الدائرة هي :**  $s^2 + k^2 + 2ks + c^2 + 2sc + j = 0$

ويكون فيها مركز الدائرة  $(-k, -c)$  ، نصف قطرها  $\sqrt{a^2 + b^2}$

لاحظ أن  $a^2 + b^2 - j > 0$



**نشاط (٥):** كان الفلاح الفلسطيني يستغل منطقة من أرضه لعمل بيدر عليها، كما هو ممثل في الشكل المظلل، إذا مُثلثت معادلة الدائرة:  $32s^2 + 2sc - 12s = 32$   
أجد مركز ونصف قطر الدائرة.



نحوّل المعادلة:  $32s^2 + 2sc - 12s = 32$  إلى الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

$$32s^2 + 2sc - 12s - 32 = 0$$

نقسم طرفيّ المعادلة على 2، فتصبح:

$$16s^2 + sc - 6s - 16 = 0$$

$c/2 = 0$  ، ومنها  $c = 0$

$$16s^2 + s - 6s - 16 = 0$$

نصف قطر = 5 وحدات

مركز الدائرة:  $(-s/2, -c)$

## تمارين وسائل:



**س١** أجد معايير الدائرة في كل حالة مما يأتي :

أ) مركزها (٠،٠)، وطول نصف قطرها ٥ سم.

ب) مركزها (٢،٣)، وطول قطرها ٦ سم.

ج) مركزها (-٢، -٧)، وتمر في النقطة (٤، -٨).

**س٢** أجد مركز الدائرة، وطول نصف قطرها في كل حالة مما يأتي :

أ)  $s^2 + c^2 = 1$ .

ب)  $(s - 3)^2 + (c + 4)^2 = 42$

ج)  $6s^2 + 6c^2 = 36$

د)  $s^2 + c^2 - 12s = 14$

**س٣** أي المعادلات الآتية معايير دائرة؟

أ)  $s^2 - c^2 = 36$

ب)  $s^2 + c^2 - 4s = 9$

ج)  $8s^2 + 8c^2 + 2sc = 10$

د)  $s^2 + 2c^2 - 5 = 0$

هـ)  $s^2 + c^2 - 2s + 3c = 0$

**س٤** أجد قيمة ك التي تجعل نصف قطر الدائرة الآتية ٥ وحدات :

$s^2 + c^2 + 4s + 2k - 12 = \text{صفر}$

**س٥** رسم معلم التربية الرياضية في إحدى المدارس الفلسطينية دائرة في وسط ملعب كرة القدم.

افتراض المعلم أن الدائرة مرسومة في مستوى ديكاريتي مركزها (٤، -٢)، ونصف قطرها ٦

م. ما معاييرها؟

## الزوايا المركزية والزوايا المحيطية



**نشاط (١):** المحافظة على عمارة الأرض، والاعتناء بها من ضرورات بقائنا عليها، فـ«على هذه الأرض ما يستحق الحياة». اعتمد الفلاح قديماً على قوة دفع المياه الناتجة من دولاب المياه لتحريك طاحونة القمح، تأمل دولاب المياه في الشكل المجاور، ثم أجب:

في الدائرة التي مركزها م.

تُسمى القطعة أ نصف قطر الدائرة، بينما القطعة ب ج أج قوس في الدائرة.



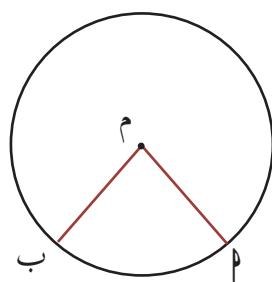
اذكر أسماء أربع زوايا في الشكل المجاور: \_\_\_\_\_، \_\_\_\_\_، \_\_\_\_\_، \_\_\_\_\_.

الاحظ: موقع رأس الزوايا في الشكل السابق.

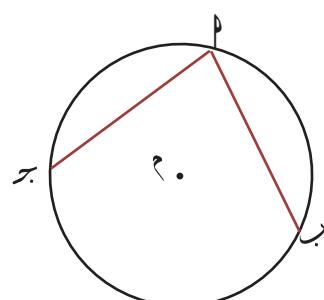


**الزاوية المركزية:** هي الزاوية التي يقع رأسها في مركز الدائرة، وضلعها أنصاف أقطار في الدائرة.

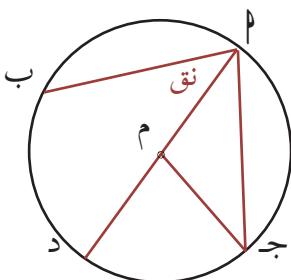
**الزاوية المحيطية:** هي الزاوية التي يقع رأسها على الدائرة، وضلعها أوتاً في الدائرة.



الزاوية م ب (مركزية)



الزاوية ب ج (محيطية)



**نشاط (٢):** في الشكل المجاور دائرة مركزها م :

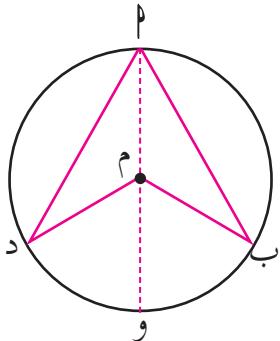
تُسمى الزاوية ج م د زاوية \_\_\_\_\_، لماذا؟

تُسمى الزاوية م د زاوية مركزية، لماذا؟

اذكر أسماء زاويتين محيطيتين \_\_\_\_\_، \_\_\_\_\_.



**نشاط (٣):** في الشكل المقابل، إذا كانت م مرکز الدائرة، وكان  $\angle B = 30^\circ$ ،  $\angle D = 35^\circ$  أجد:  $\angle A$ .



الزاوية ب م و خارجة عن المثلث أ ب م

إذن:  $\Delta B_M = \Delta B_m + \Delta B_A$

ولكن :  $\Delta b_m = \Delta b_m$ ; لأنّ

لایجاد:  $\Delta$  دم و  $\times 2 =$  \_\_\_\_\_

$$\text{_____} = \text{_____} \times r =$$

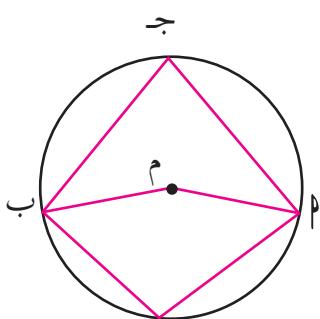
$$\Delta_{\text{بـمـد}} = \Delta_{\text{بـمـو}} + \Delta_{\text{وـمـد}}$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} + {}^\circ\gamma_1 =$$

—————  $\triangleright \times 2 = \triangleright \text{بـمـدـ} \triangleright \text{وينتجـ أـنـ}$

**لاحظ أنّ:** الزاوية  $B$  م زاوية مرکزية، والزاوية  $B$  د زاوية محیطیة، مرسومتان على القوس نفسه، ما العلاقة بين قياس الزاويتين؟

قياس الزاوية المركزية تساوي ضعفي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.



**نشاط (٤):** تحيط بمدينة القدس (العاصمة) العديد من القرى، فإذا مثل الشكل المجاور موقع القرى (أ ، ب ، ج ، د) بالنسبة للقدس (م)، وكان  $\angle M B = ١٥٠^\circ$

أجد:  $\Delta ABC$ ,  $\Delta ADB$ .

بما أن الزاوية  $\alpha$  م ب \_\_\_\_\_، والزاوية  $\beta$  ج ب \_\_\_\_\_ مشتركتان في القوس  $\overset{\frown}{AB}$



إذن:  $\angle M B = \angle J B$

$$\angle J B = \frac{1}{2} \times$$

$$\angle M B \text{ المنشورة} = 360^\circ - 150^\circ = 210^\circ$$

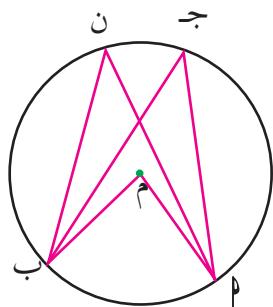
زاوية  $M B$  المنشورة مرکزية على القوس \_\_\_\_\_، وزاوية  $M D$  بمحيطة مشتركة معها في القوس \_\_\_\_\_

إذن:  $\angle M B \text{ المنشورة} = \angle M D$

$$\angle M D = \angle M B$$



**نشاط (٥):** أتأملُ الشكل المجاور، فيه م مركز الدائرة، وقياس الزاوية  $M B = 80^\circ$ ،  
أجد: قياس الزاوية  $M N B$ ، وقياس الزاوية  $M J B$



$$\angle M B = \text{لماذا؟}$$

$$\angle M N B = 40^\circ$$

ما العلاقة بين الزاويتين:  $M J B$  ،  $M N B$  ؟



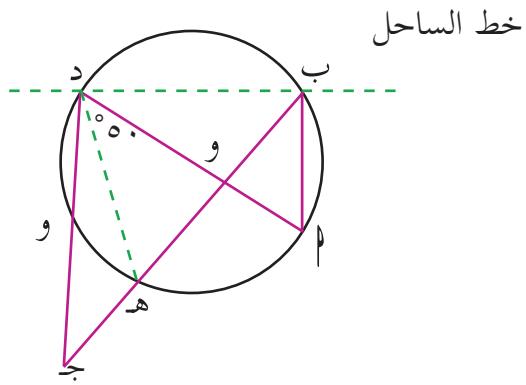
**أَتَعْلَم :** أي زاويتان محيطيتان مرسومتان على قوس واحد في الدائرة متساويتان في القياس.

**نشاط (٦):** تمثل الدائرة في الشكل المجاور المنطقة الخطيرة التي يحظر على السفن الاقتراب منها.

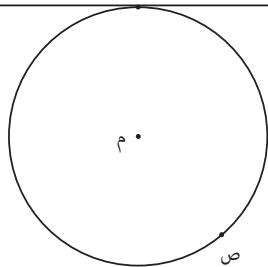
النقطة ج تمثل موقع سفينة في البحر.

تسمى الزاوية  $D H B$  زاوية الخطير

$\angle A B H = \text{لأنها مرسومة}$



**نشاط (٧):** إرسم مستقيم يقطع الدائرة التي مركزها م في نقطة س فقط.



يسمى المستقيم أس أو ..... أو .....

إرسم مستقيم يقطع الدائرة التي مركزها م في نقطة ص فقط.

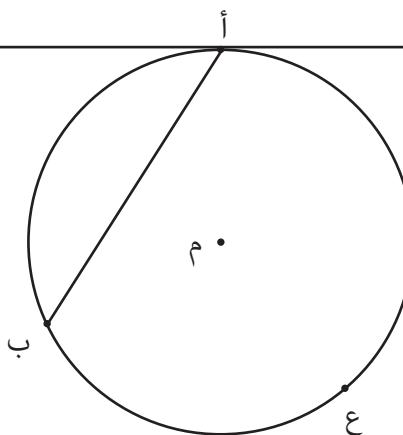


**أَتَعْلَم :** مماس الدائرة هو المستقيم الذي يشتراك مع الدائرة في نقطة واحدة تُعرف بنقطة تماسه معها (نقطة تماس).

**نشاط (٨):** الشكل المرسوم جانباً يمثل دائرة مركزها م ، فيها س / مماس للدائرة في النقطة أ.



س /



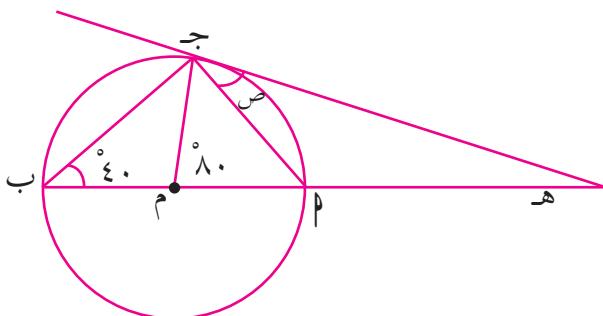
أب ووتر في الدائرة.

الزاوية المماسية هي .....  
تُسمى الزاوية س / أب زاوية مماسية



**نشاط (٩): الأدوات:** ورق A4 ، قلم ، فرجار ، مسطرة ، منقلة.

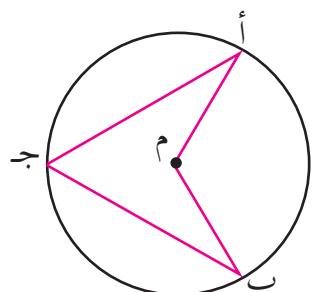
- ارسم دائرة مركزها م (كل مجموعة ترسم دائرة نصف قطرها مختلف عن الآخر).
  - اختر نقطة على الدائرة مثل أ وارسم منها مماس.
  - ثم ارسم وتر يمر بالنقطة أ مثل أب ، ارسم زاوية محاطية على الوتر من الجهة الأخرى (ليس في جهة المماس)
  - قم بقياس الزاوية المماسية والزاوية المحاطية التي رسمتها وسجل ملاحظاتك
- ما العلاقة بين قياس الزاوية المماسية والزاوية المحاطية المشتركة معها في نفس القوس.



**نشاط (١٠):** في الشكل المجاور  
أجد قياس الزاوية المشار إليها بالرموز  
(م مركز الدائرة)

▷ ص = .....، مماسية ومحيطة على نفس القوس.

ما العلاقة بين قياس الزاوية المماسية والزاوية المركزية المشتركة معها في نفس القوس؟



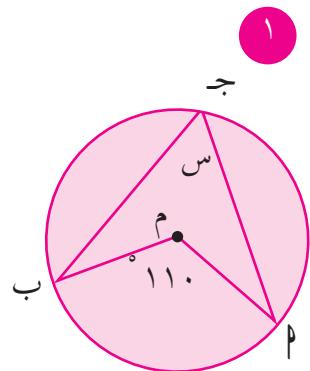
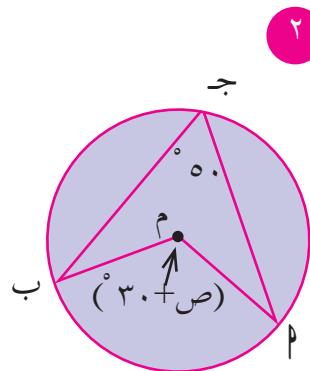
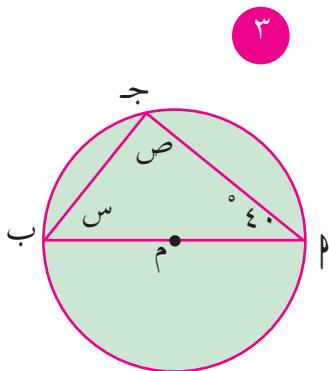
### تمارين ومسائل:

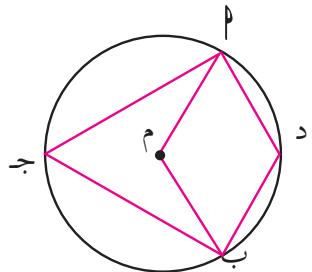


**س١** الشكل المجاور فيه م مركز الدائرة، فإذا كان قياس  $\angle(م ب) = 130^\circ$ ، أجد  $\angle(ج ب)$ .

**س٢** أبين أن قياس الزاوية المحيطة المرسومة على قطر الدائرة تساوي  $90^\circ$ .

**س٣** أجد قيمة المجهول في الأشكال الآتية، حيث م مركز الدائرة:

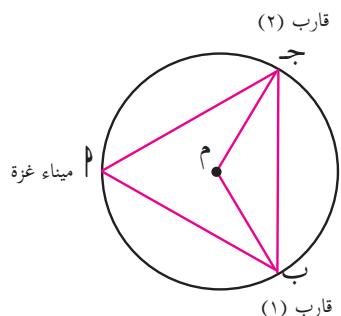




س٤ في الشكل المجاور دائرة مركزها م، فيها :

$$\angle ADB = 140^\circ$$

أجد:  $\angle AMB$  المنعكسة، و  $\angle AJC$ .



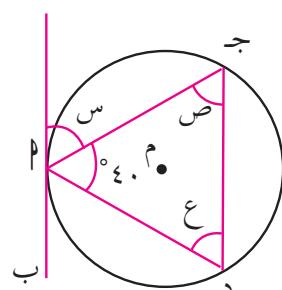
س٥ يعاني الصيادون من ضيق مساحة الصيد المخصصة لهم

بسبب إجراءات الاحتلال، انطلق قاربا صيد من ميناء

غزة كما في الشكل المجاور، إذا كانت الدائرة مركزها

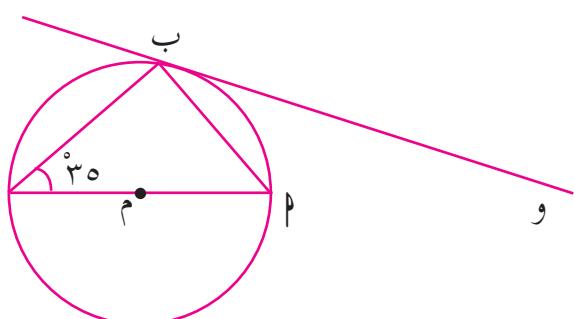
$$M، وفيها \angle AMB = 30^\circ$$

أجد  $\angle ABC$ .



س٦ في الشكل المجاور أ ب مماس للدائرة أجد قياس جميع

الزوايا المشار إليها بالرموز حيث م مركز الدائرة.

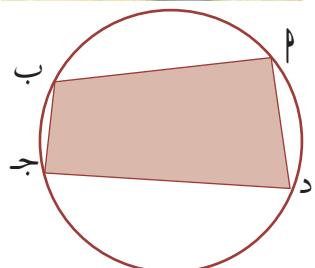


س٧ أجد قياس الزاوية و ب أ في الشكل المجاور.

## الشكل الرباعي الدائري

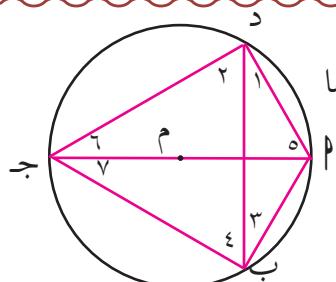


**نشاط (١):** يتكون الزيّ التراثيّ الشعبيّ في فلسطين من أثوابٍ مطرزةٍ يدوياً، بخيوط الحرير أو الصوف، ويتحذّل التطريز تصاميم وأشكالاً مختلفةً من منطقة إلى أخرى، تتكون من أشكال هندسية، ورسوماتٍ، إذا أحطنا الشكل الرباعي في المطرزة بدائرة، بحيث تمرُّ بجميع رؤوسه، فماذا نسمّي هذا الشكل؟



في الشكل المقابل رؤوس الشكل الرباعي  
تقع على الدائرة التي مركزها م، فيسمى الشكل  
م ب ج د شكل رباعيًّا دائريًّا.

**أَتَعْلَم :** **الشكل الرباعي الدائري:** هو شكل رباعيٌّ تقع رؤوسه الأربع على الدائرة.



**نشاط (٢):** م ب ج د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة مركزها م، أجد مجموع قياس الزاويتين المتقابلتين د، ب.

$$D = 3 \quad D = 6 \quad (\text{محيطيتان على قوس واحد})$$

لماذا؟

لكن  $1D + 2D + 5D + 6D = 180^\circ$  (مجموع زوايا المثلث)

$$\text{إذن: } 1D + 2D + 3D + 4D = 180^\circ$$

إذن: مجموع قياس الزاويتين د، ب =

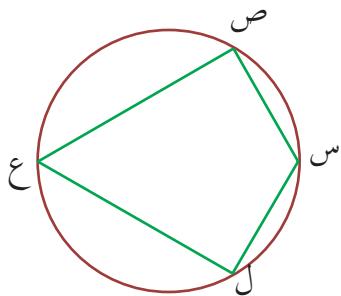
أبحث عن طرق أخرى لحل النشاط.

**أفَكَرْ وَأَنَاقِشْ**

# أَتَعْلَمُ

**كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الدائري متكمالتان (مجموعهما  $180^\circ$ ).  
إذا كان مجموع زاويتين متقابلتين في شكل رباعي  $= 180^\circ$ ، فإن هذا الشكل رباعي دائري.**

**نشاط (٣):** في الشكل المقابل يسمى الشكل س ص ع ل ----- . لماذا؟



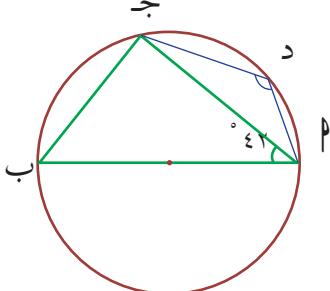
إذا كان  $\angle D = 70^\circ$

ومنه  $\angle S =$  ----- . لماذا؟



**نشاط (٤):** ب ج د شكل رباعي دائري، فيه:

الضلعين ب د قطر في الدائرة.



أجد:  $\angle (D \text{ ج})$  ، إذا كان  $\angle (ج \text{ ب}) = 42^\circ$

$\angle (ب \text{ ج}) =$  ----- . لماذا؟

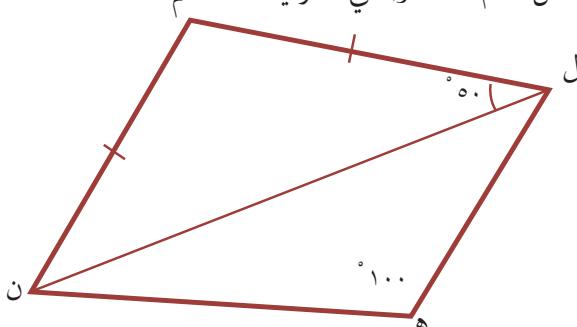


المثلث ب ج فيه:

$\angle (ب \text{ ج}) = (90^\circ + 42^\circ) =$  -----

ومنه:  $\angle (د \text{ ج}) = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$  . لماذا؟

**نشاط (٥):** اقترح أحد مصممي البرامج الحاسوبية النموذج المرفق كتصميم لساحة مدرسة العودة (الشكل التخطيطي) هل الشكل ل م ن ه رباعي دائري؟ لماذا؟



$\angle (م \text{ ن} \text{ ل}) =$  ----- . لماذا؟

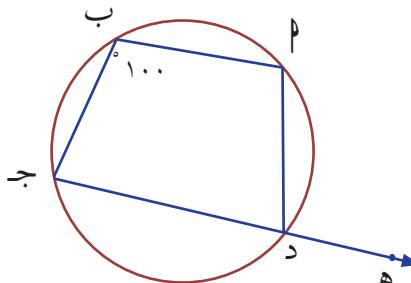
$\angle M = 80^\circ$  . لماذا؟

الشكل ل م ن ه شكل رباعي، فيه زاويتان متقابلتان، مجموع قياسهما  $= 180^\circ$

إذن الشكل ل م ن ه شكل رباعي دائري.

## أَفْكَرْ وَأَنْاقِشْ

هل كلٌّ معيّنٍ شكلٌ رباعيٌ دائريٌّ؟



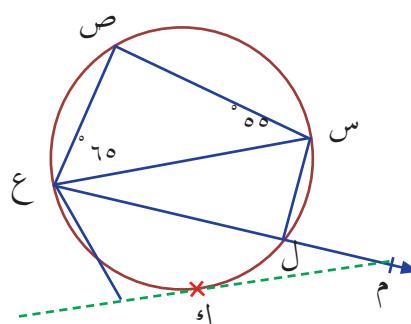
**نشاط (٦):** في الشكل المقابل أجد  $\angle M$  د ه .

$\angle M$  د ج = ٨٠° ، لماذا؟-----

$\angle M$  د ه = ----- . لماذا؟

$\angle M$  د ه تقع على امتداد أحد أضلاع الشكل الرباعي والضلعين المجاور له. ماذا تُسمى  $\angle M$  د ه بالنسبة إلى الشكل الرباعي  $MBCD$ ؟

إذا مُدّ أحد أضلاع الشكل الرباعي على استقامته، فإنَّ الزاوية المحصورة بين امتداد الضلع والضلعين المجاور له تُسمى **الزاوية الخارجية** عن الشكل الرباعي.  
وقياس الزاوية الخارجية للشكل الرباعي الدائري = قياس الزاوية الداخلية المقابلة للمجاورة لها.



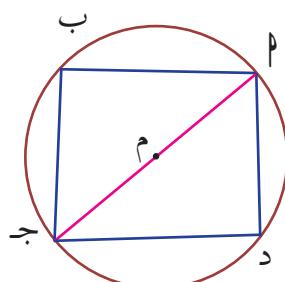
**نشاط (٧):** في الشكل المقابل أجد  $\angle SLM$  .

$\angle (SCL) =$  -----  
الزاوية  $(SCL)$  تُسمى زاوية ----- عن الشكل الرباعي الدائري.

$\angle (SLM) =$  -----



**ملاحظة:** إذا كانت إحدى زوايا الشكل الرباعي الدائري قائمةً، فإنَّ قطرَ الشكل الرباعي المقابل لهذه الزاوية القائمة هو قطر الدائرة.

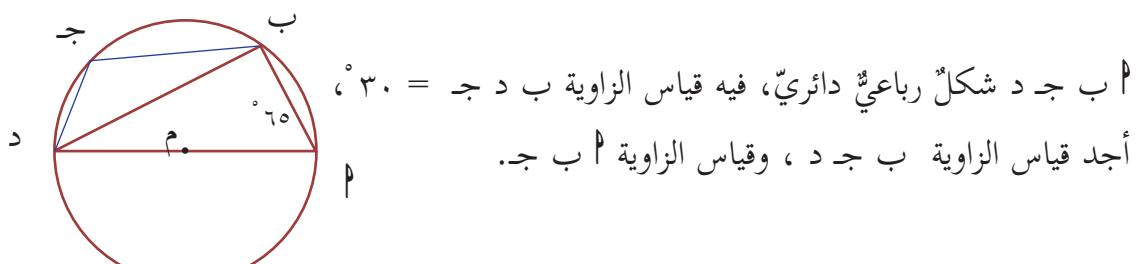


في الشكل الرباعي الدائري  $MBCD$   $\angle MBC = 90^\circ$  ومنه  $M$  ج قطر في الدائرة، وهو قطر الشكل الرباعي.

## تمارين وسائل:



**س١** أيّ الأشكال الآتية تمثل شكلًا رباعيًّا دائريًّا.



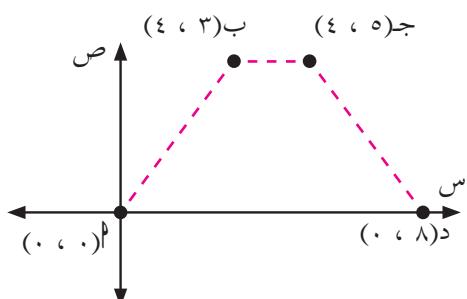
**س٢** ب ج د شكل رباعيٌّ دائريٌّ، فيه قياس الزاوية ب د ج = 30°، ج د م = 60°.

أجد قياس الزاوية ب ج د ، وقياس الزاوية ب ج .

**س٣** ب ج د شكل رباعيٌّ دائريٌّ، فيه:  $\angle A = 4x + 20^\circ$  ،  $\angle B = 3x + 13^\circ$  ،

أجد قيمة س بالدرجات، ثم أجد قياسي كل من زاوية أ وزاوية ج .

**س٤** في يوم الأرض وعلى لوحة كرتونية، مثلت هند موقعا لأربعة قرى فلسطينية مهجورة، كما في الشكل المجاور.



**أ** ما اسم الشكل الهندسي الذي يصل بين النقاط؟

**ب** أين أن الشكل هو رباعي دائري؟

## تمارين عامة

س١ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ ما طول نصف قطر الدائرة التي معادلتها:  $(س - ٥)^٢ + (ص - ٦٤)^٢ = ?$

- أ) ٥ سم      ب) ٢ سم      ج) ٦٤ سم      د) ٨ سم

٢ قياس زاوية مرئية في دائرة مركزها  $M = ١٠٠^\circ$ ، فما قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس؟

- أ)  $١٠^\circ$       ب)  $٥٠^\circ$       ج)  $١٠٠^\circ$       د)  $٢٠^\circ$

٣ ما العلاقة بين كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الدائري؟

- أ) مجموعهما  $٣٦٠^\circ$       ب) متساوietين      ج) متكمالتين      د) متناظمتين

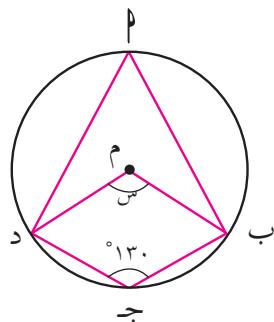
٤ ما قياس الزاوية المحيطية المرسومة على قطر الدائرة؟

- أ)  $٩٠^\circ$       ب)  $٣٠^\circ$       ج)  $٦٠^\circ$       د)  $٨٠^\circ$

٥ في الشكل المجاور:

إذا كان M مركز دائرة، فيها  $\angle (ب ج د) = ١٣٠^\circ$ ، فما قيمة س؟

- أ)  $٥٠^\circ$   
ب)  $١٠٥^\circ$   
ج)  $٢٣٠^\circ$   
د)  $١٠٠^\circ$

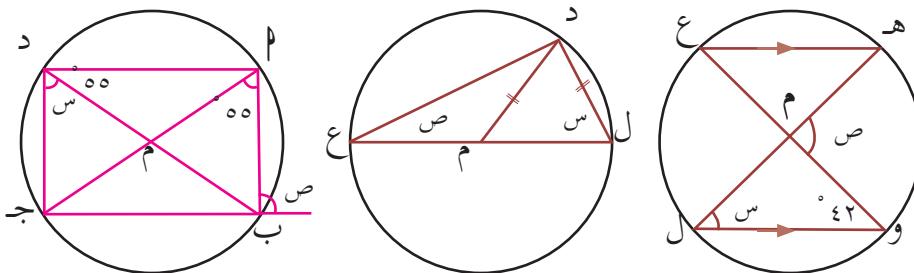


س٢ أجد معادلة الدائرة في الحالات الآتية:

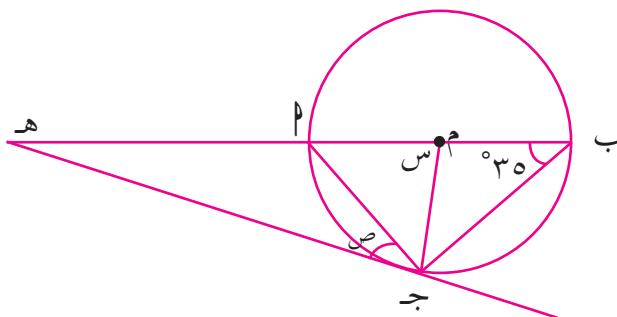
١ مركزها (١، ٥)، وتمرّ بالنقطة (٢، ٤)

٢ نهايتها قطر فيها النقطتان: (٧، ١٢)، ب(-٥، ٤)

**س٣** أجد قياسات الزوايا المجهولة في الأشكال الآتية:



**س٤** بـ جـ دـ شـكـلـ رـبـاعـيـ دائـرـيـ، مـرـسـومـ دـاخـلـ دـائـرـةـ مـرـكـزـهـاـ مـ، إـذـاـ كـانـ مـ بـ قـطـرـاـ فـيـ الدـائـرـةـ، وـكـانـ قـيـاسـ الزـاوـيـةـ بـ مـ جـ = ٤٠ـ، أـجـدـ قـيـاسـ الزـاوـيـةـ مـ دـ جــ.



**س٥** فـيـ الشـكـلـ الـمـجاـوـرـ أـجـدـ قـيـاسـ الزـاوـيـةـ الـمـشـارـ إـلـيـهـاـ بـ الـرـمـوزـ.

**س٥** أـقـيمـ ذاتـيـ: اـعـبـرـ بـلـغـتـيـ عـنـ نـقـاطـ الـقـوـةـ وـنـقـاطـ الـضـعـفـ الـوارـدـةـ فـيـ مـفـاهـيمـ الـوـحـدةـ الـتـيـ تـعـلـمـتـهـاـ.

## مشروع الوحدة:

صمم نموذجاً لجداريّة مستطيلة الشكل أبعادها ٥٢ م، لوضعها على جدار المدرسة. أكرر نموذجاً بشكل رباعي دائري (مستطيل، مربع، . . . الخ) بحيث نستطيع تكراره ليغطي اللوحة. هل يُشترط تكرار الشكل الرباعي الدائري نفسه في اللوحة كلّها؟ أناقش الخطوات والصعوبات التي قد تواجهك.

<http://www.ies.co.jp/math/java/geo/klight/klight.html>

<http://www.blogmathnookarabia.com>

روابط إلكترونية

# المشروع

**المشروع:** شكل من أشكال منهج الشاطئ؛ يقوم الطلبة (أفراداً أو مجموعات) بسلسلة من ألوان النشاط التي يتمكنون خلالها من تحقيق أهداف ذات أهمية للقائمين بالمشروع. ويمكن تعريفه على أنه: سلسلة من النشاط الذي يقوم به الفرد أو الجماعة لتحقيق أغراض واضحة ومحددة في محيط اجتماعي برغبة وداعية.

## ميزات المشروع:

١. قد يمتد زمن تنفيذ المشروع لمدة طويلة ولا يتم دفعه واحدة.
٢. ينفّذه فرد أو جماعة.
٣. يرمي إلى تحقيق أهداف ذات معنى للقائمين بالتنفيذ.
٤. لا يقتصر على البيئة المدرسية وإنما يمتد إلى بيئة الطلبة لمنحهم فرصة التفاعل مع البيئة وفهمها.
٥. يستجيب المشروع لميول الطلبة واحتاجاتهم ويشير دافعيّتهم ورغبتهم بالعمل.

## خطوات المشروع:

### أولاًً: اختيار المشروع: يشترط في اختيار المشروع ما يأتي:

١. أن يتماشى مع ميول الطلبة ويشبع حاجاتهم.
٢. أن يوفر فرصة للطلبة للمرور بخبرات متنوعة.
٣. أن يرتبط الواقع حياة الطلبة ويكسر الفجوة بين المدرسة والمجتمع.
٤. أن تكون المشروعات متنوعة ومتراقبة وتكمّل بعضها البعض ومتوازنة، لا تغلب مجالاً على الآخر.
٥. أن يتلاءم المشروع مع إمكانات المدرسة وقدرات الطلبة والفئة العمرية.
٦. أن يُخطط له مسبقاً.

### ثانياً: وضع خطة المشروع:

يتم وضع الخطة تحت إشراف المعلم حيث يمكن له أن يتدخل لتصويب أي خطأ يقع فيه الطلبة.

#### يقتضي وضع الخطة الآتية:

١. تحديد الأهداف بشكل واضح.
٢. تحديد مستلزمات تنفيذ المشروع، وطرق الحصول عليها.
٣. تحديد خطوات سير المشروع.

٤. تحديد الأنشطة الالزمة لتنفيذ المشروع، (شريطة أن يشترك جميع أفراد المجموعة في المشروع من خلال المناقشة والحوار وإبداء الرأي، بإشراف وتوجيه المعلم).
٥. تحديد دور كل فرد في المجموعة، ودور المجموعة بشكل كلي.

#### **ثالثاً: تنفيذ المشروع:**

مرحلة تنفيذ المشروع فرصة لاكتساب الخبرات بالمارسة العملية، وتعُد مرحلة ممتعة ومثيرة لما تتوفره من الحرية، والتخلص من قيود الصف، وشعور الطالب بذاته وقدرته على الإنجاز حيث يكون إيجابياً متفاعلاً حلاًّ مبدعاً، ليس المهم الوصول إلى النتائج بقدر ما يكتسبه الطلبة من خبرات ومعلومات ومهارات وعادات ذات فائدة تعكس على حياتهم العامة.

#### **دور المعلم:**

١. متابعة الطلبة وتوجيههم دون تدخل.
٢. إتاحة الفرصة للطلبة للتعلم بالأخطاء.
٣. الابتعاد عن التوتر مما يقع فيه الطلبة من أخطاء.
٤. التدخل الذكي كلما لزم الأمر.

#### **دور الطلبة:**

١. القيام بالعمل بأنفسهم.
٢. تسجيل النتائج التي يتم التوصل إليها.
٣. تدوين الملاحظات التي تحتاج إلى مناقشة عامة.
٤. تدوين المشكلات الطارئة (غير المتوقعة سابقاً).

#### **رابعاً: تقويم المشروع: يتضمن تقويم المشروع الآتي:**

١. الأهداف التي وضع المشروع من أجلها، ما تم تحقيقه، المستوى الذي تحقق لكل هدف، العوائق في تحقيق الأهداف إن وجدت وكيفية مواجهة تلك العوائق.
٢. الخطة من حيث وقتها، التعديلات التي جرت على الخطة أثناء التنفيذ، التقييد بالوقت المحدد للتنفيذ، ومرنة الخطة.
٣. الأنشطة التي قام بها الطلبة من حيث، تنوعها، إقبال الطلبة عليها، توافر الإمكانيات الالزمة، التقييد بالوقت المحدد.
٤. تجاوب الطلبة مع المشروع من حيث، الإقبال على تنفيذه بدافعية، التعاون في عملية التنفيذ، الشعور بالارتياح، إسهام المشروع في تنمية اتجاهات جديدة لدى الطلبة.

يقوم المعلم بكتابة تقرير تقويمي شامل عن المشروع من حيث:

- أهداف المشروع وما تحقق منها.
- الخطة وما طرأ عليها من تعديل.
- الأنشطة التي قام بها الطلبة.
- المشكلات التي واجهت الطلبة عند التنفيذ.
- المدة التي استغرقها تنفيذ المشروع.
- الاقتراحات اللازمة لتحسين المشروع.

## المراجع

- فريديريك بل (1986): طرق تدريس الرياضيات:الجزء الثاني؛ (ترجمة محمد المفتى و ممدوح سليمان).  
قبرص:الدار العربية للنشر والتوزيع
- اللحام، أنور (1990) : الجبر ، ط 4، مطبعة دار الكتاب ، دمشق
- ابو الوفاء البوزجاني (1971): علم الحساب العربي ، تحقيق د. احمد سعيدان ، عمان .
- انور عكاشة واخرون (1990): تاريخ الرياضيات ، مؤسسة دار الكتب للطباعة والنشر ، عمان
- كارتر ، فيليب ؛ راسيل ، كين (2010) : الدليل الكامل في اختبارات الذكاء، مكتبة جرير ، السعودية
- هاشم الطيار، ويحيى سعيد (1977): موجز تاريخ الرياضيات، مؤسسة دار الكتب للطباعة والنشر، جامعة الموصل.
- الستي ، جورج (1988): ، الجبر الخطي ، دار الحكمة ، جامعة البصرة
- الجنابي، احمد نصيف (1980):، الرياضيات عند العرب، منشورات دار الجاحظ للنشر، الجمهورية العراقية
- الزغول، عماد (2005)، الإحصاء التربوي، الطبعة الاولى ، دار الشروق للنشر والتوزيع.
- عبد اللطيف، علي اسحق (1993): عالم الهندسة الرياضية ابن الهيثم، منشورات الجامعة الاردنية، عمان، الاردن .
- الخوارزمي ، محمد بن موسى (1939): كتاب الجبر والمقابلة ، تقديم علي مصطفى مسرفة ومحمد مرسي  
احمد ، القاهرة
- ريتش، بارنيت (2004) : الجبر الأساسي ، ، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية -القاهرة- مصر
- Kline, M,(1972): Mathematics Thought From Ancient to Modern Times, Oxford, N.Y
- Lamborg. James(2005):Math reference,Wiley ,N.Y
- Bell,E,T(1937): ,Men of Mathematics ,Simon and Schuter,N.Y
- Friel,Suzan.Rashlin,Sid.Doyle,Dot. & others(2001): Navigating through Algebra in Grades 6-8. NCTM. RESTON, VIRGINIA .

## لجنة المناهج الوزارية:

د. شهناز الفار	أ. ثروت زيد	د. صبري صيدم
د. سمية نخالة	أ. عزام أبو بكر	د. بصرى صالح
م. جهاد دريدى	أ. علي مناصرة	م. فواز مجاهد

## اللجنة الوطنية لوثيقة الرياضيات:

د. علي عبد المحسن	د. محمد صالح (منسقاً)	أ. ثروت زيد
د. عبد الكريم ناجي	أ. وهيب جبر	د. تحسين المغربي
د. علا الخليلي	د. محمد مطر	د. عطا أبوهانى
أ. ارواح كرم	د. أيمن الأشقر	د. شهناز الفار
أ. عبد الكريم صالح	أ. أحلام صلاح	أ. نادية جبر
د. وجيه ضاهر	أ. كوثر عطية	أ. نسرين دويكات
أ. قيس شبانة	أ. احمد سياعرة	أ. فتحى أبو عودة
		أ. مبارك مبارك

## المشاركون في ورشات عمل الجزء الثاني من كتاب الرياضيات للصف التاسع:

أ. ريم العريضات	أ. رائية شريم	أ. محمد الفرا	أ. كريم العارضة
أ. منال الصباغ	أ. ميسون جمل	أ. راتب نصار	أ. عهود طه
أ. ابتسام اسليم	أ. عارف السعافين	أ. أمل جبور	أ. عبد الله مهنا
أ. سهيل شبير	أ. سمير حنيف	أ. منال أسمة	أ. وفاء موسى
أ. سعيد عتيق	أ. صلاح الترك	أ. رفيق الصيفي	أ. باسم المدهون
	أ. رابعة فتشافشة	أ. نبيلة سلامة	أ. عبد العزيز شلالدة