

# 演算法設計方法論 (Design Strategies for Computer Algorithms)

Homework 4

DUE DATE: JANUARY 8, 2018

學號: b03902129 系級: 資工四 姓名: 陳鵬宇

## 1 問題定義

問題: *Determining whether a point belongs to the union of given  $n$  circles*

輸入: •  $n$  個圓  $C_i(Q_i, r_i)$ , 其中圓心座標  $Q_i(x_i, y_i)$  且半徑  $r_i$ 。

• 一點  $P(x, y)$

輸出: • TRUE,  $P \in C_i, \forall i$

• FALSE,  $P \notin C_i, \forall i$

## 2 解法敘述

### 2.1 The Algorithm of Shamos and Hoey

給定一  $n$  個點的集合  $S = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$

1. 根據  $x$  座標對這  $n$  個點排序

2. 給予新的座標

3. 將  $S$  分成兩個子集  $L = \{P_1, P_2, \dots, P_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$  和  $R = \{P_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}, P_{\lfloor n/2 \rfloor + 2}, \dots, P_n\}$

4. 分別對  $L$  和  $R$  中的點建構沃羅諾伊圖  $V(L)$  和  $V(R)$

- 分治線 (Dividing line) 使得  $L(R)$  中的每一點都會更靠近他們原本的那一側  $L(R)$ 。
- 時間複雜度:  $O(n)$ 。

**Lemma 1** 分治線由延伸至無窮的兩條射線和一些有限的線段組成。每一個元素 (一射線或一線段) 包含於  $V(L)$  中  $V(P_i)$  和  $V(R)$  中  $V(P_j)$  相交的部分, 其中  $P_i \in L, P_j \in R$  且會是  $P_i$  和  $P_j$  的垂直平分線。

**Lemma 2** 每兩條射線必定是凸包  $CH(S)$  連續兩點的垂直平分線, 其中一條位於  $L$ , 另一條位於  $R$ 。

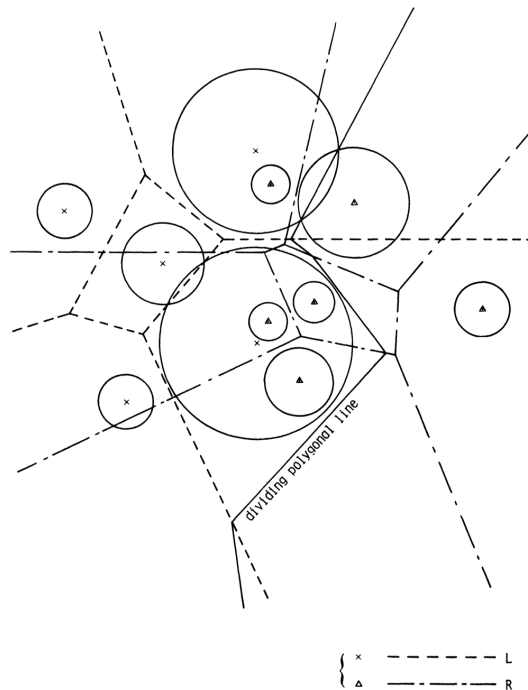
Lemma 1 告訴我們可以在  $O(n)$  內找到分治線。

Lemma 2 告訴我們可以在  $O(n)$  內在  $CH(S)$  找到所述射線, 同時可在  $O(n)$  內分別從  $CH(L)$  和  $CH(R)$  找到一條射線。

### 2.2 建構沃羅諾伊圖

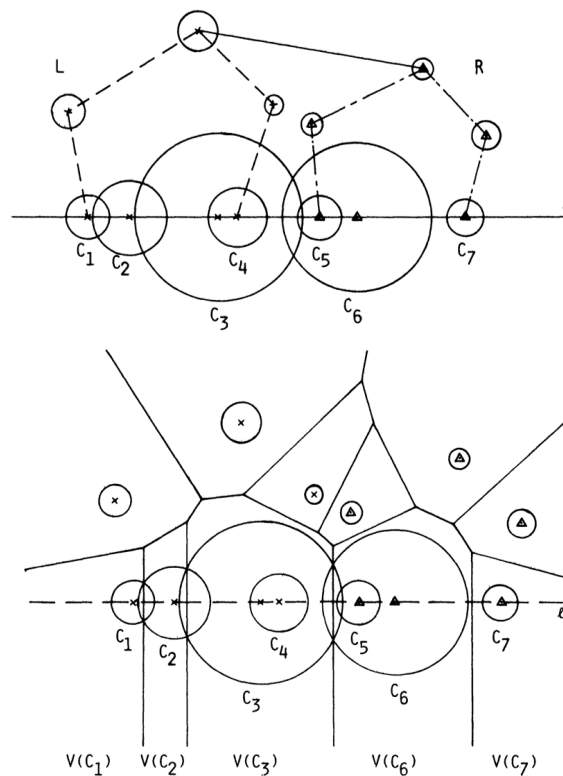
1. 將  $n$  個圓  $C_i(Q_i, r_i)$  分為兩子集

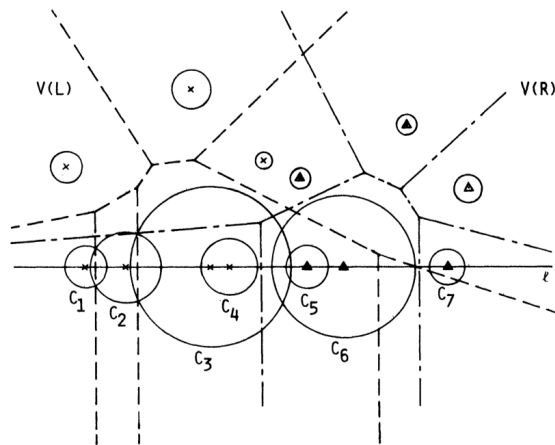
根據 2.1 Shamos 和 Hoey 所提出的演算法, 我們可以以得到兩個沃羅諾伊圖  $V(L)$  和  $V(R)$ 。



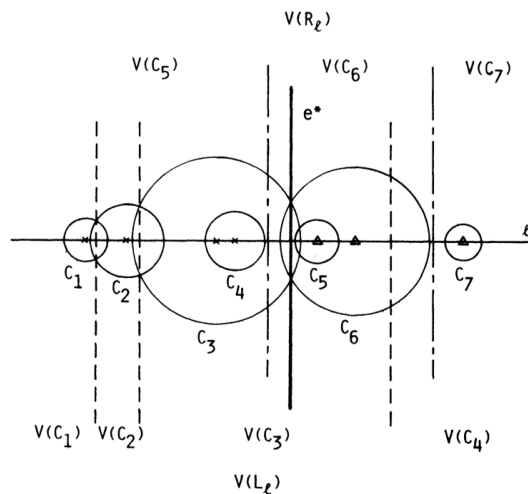
**Lemma 3** 分治線是單行的，由兩條射線和幾條有限線段組成。*Laguerre* 幾何中的巨觀下，多邊型左邊（右邊）的每一點與  $L(R)$  中的某個圓比  $R(L)$  中的任何圓更接近。

2. 在  $O(n)$  內找到分治線  
利用沃羅諾伊邊皆為直線的性質，便可以順時針方向掃描在  $O(n)$  內找到分治線。
3. 在  $O(n)$  內找到射線  
凸包邊緣可能退化至一直線，而有些情況會變得不成立。





由於在  $V(L_l)$  和  $V(R_l)$  中所有沃羅諾伊邊都與直線  $l$ ，所以我們可以在  $O(n)$  內合併  $V(L_l)$  和  $V(R_l)$  來得到  $V(L_l \cap R_l)$ 。由於在沃羅諾伊圖中區域數量的複雜度為  $O(n)$ ，因此可以在  $O(n)$  內找到分治線。



### 2.3 延伸應用

有了上述的演算法，以下兩個問題也能夠在  $O(n \log n)$  的時間內被以類似的方式求解出來：

- *Finding the contour of the union of given  $n$  circles*  
可被運用在數據分析。
- *Connected components of given  $n$  circles*  
可被運用在圖片處理及電腦視覺。

在這裡我們就不特別詳加敘述此兩問題，因為解法都是建立在沃羅諾伊圖的建構上。

### 3 閱讀心得

這次的報告，圖例多了不少，我自認為自己空間觀念薄弱，所以在思考這種跟幾何有關的問題時，總會花上比別人更多的時間。但從此篇東大所著作的論文中，仍然得到滿多收穫的。

沃羅諾伊圖在幾何、晶體學、建築學、地理學、氣象學、資訊系統等許多領域都有廣泛的應用。沃羅諾伊圖在繪製地理資料時，能夠將地圖切成許多分塊，每一塊都有專屬最方便的站點。走在路上，如果想要找間便利商店，我們會打開電子地圖搜尋商店，然後挑一間看起來最近的商店朝著他走去。看似簡單的動作由電腦來做卻不容易；最簡單的做法，是先將所有的便利商店列出來，逐一用當前位置算距離，再取出距離最短的一個。

舉例來說，最近台灣空氣汙染嚴重，比如當我們只關心 50 公里內的空氣汙染指數，那麼我們便以每個可能產生汙染的地點（台中發電廠、通霄發電廠、大潭發電廠等）為圓心建立許多 50 公里的圓，取沃羅諾伊圖的交集。

維諾圖在各個領域的應用還有很多，高效率的演算法都能使得我們在尋找交集求解時，省下大量的時間！