

پروژه ی پایانی ریاضیات مهندسی

سوال ۱

یکی از کاربردهای جبر خطی، حل مساله ی مارکوف (فرایند های تصادفی) میباشد. فرض کنید طبق یک مدل سازی تقریبی، وضعیت هوای هر روز یک منطقه، به وضعیت هوای روز قبلش و جدول احتمال گذر زیر وابسته باشد:

فردا	امروز		
	آفتابی	ابری	بارانی
آفتابی	0.4	0.3	0.1
ابری	0.4	0.3	0.6
بارانی	0.2	0.4	0.3

اگر امروز هوا در وضعیت A (آفتابی، ابری یا بارانی) باشد، میخواهیم وضعیت هوای n روز بعد را به دست آوریم.

برای این کار، یک ماتریس 3×1 برای مشخص کردن وضعیت هوای امروز و یک ماتریس 3×3 به عنوان ماتریس احتمال گذر در نظر میگیریم.

فرض کنید امروز هوا ابری بوده باشد، وضعیت هوای فردا به صورت زیر محاسبه میشود:

$$State \times P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} = D_1$$

و وضعیت هوا در روز n ام به صورت زیر:

$$D_n = D_{n-1} P$$

الف) تابعی بنویسید که n را در ورودی بگیرد وضعیت هوا را برای n روز بعد محاسبه کند.

ب) جدول احتمال وضعیت هوای هر روز را مستقل از وضعیت هوای روز قبل آن به دست آورید.

پ) حالت کلی تری را در نظر بگیرید که در آن احتمال وقوع یک رویداد با یک ماتریس وضعیت $m \times 1$ و یک ماتریس احتمال گذر $m \times m$ مدل میشود. تابعی بنویسید این دو ماتریس و n را در ورودی گرفته و ماتریس احتمال نهایی را بعد از n تغییر در خروجی محاسبه کند.

همانطور که در کلاس ذکر شد ، SVD (Singular Value Decomposition) یکی از روش های معمول فشرده سازی تصاویر از طریق تقریب تصویر ورودی است.

تابعی بنویسید که آدرس یک تصویر و مرتبه ی تقریب را در ورودی گرفته و تصویر تقریب زده شده را در خروجی تولید کند.

نمونه های تولید شده :

Original Image
size : 299KB



rank 20 approximation
size : 59KB



rank 50 approximation
size : 74KB



rank 100 approximation
size : 90KB



پیاده سازی را همانند نمونه برای یک تصویر دلخواه با حداقل ۵ مرتبه تقریب مختلف نشان دهید.

برای هر تصویر تقریب زده شده ، ضریب فشرده سازی (حجم فشرده سازی شده تقسیم بر حجم اولیه) را گزارش کنید. نمودار حدودی ضریب فشرده سازی بر حسب مرتبه تقریب استفاده شده به دست آورید (این نمودار حتما باید به کمک متلب رسم شود)

رابطه ی mean square error

$$\frac{1}{m \times n} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} (x_{ij} - y_{ij})^2$$

تفاوت کیفیت تصاویر

تقریب زده شده را با تصاویر اولیه نشان میدهد. نمودار حدودی mean square error را بر حسب مرتبه تقریب استفاده شده به دست آورید (این نمودار حتما باید به کمک متلب رسم شود)

پیاده سازی GUI مناسب برای این سوال نمره امتیازی دارد.

يکي از کاربردهاي svd حذف نویز سیگنال هاست. همانطور که در کلاس اشاره شد اگر تجزیه svd را به صورت زیر باشد :

$$A = USV^T = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T$$

مولفه های مربوط به i های بزرگ مولفه های نویزی هستند و با حذف آنها کاهش نویز در تصویر خواهیم داشت. برای دو تصویر ضمیمه شده (تصویر دریاچه و کشتی سائز تصاویر 512*512 است)

ابتدا به تصویر نویز نویز گوسی با میانگین 0 و انحراف از معیار 20 اضافه نماییم. سپس برای هر یک از دو تصویر داده شده، در تصویر اصلی، تصویر نویزی و تصویر حذف نویز شده را رسم نماییم.

برای حذف نویز یکبار برش مقادیر منفرد روی 500 و یکبار برش مقادیر منفرد را روی 475 در نظر بگیرید (یعنی در فرمول بالا حد بالایی سیگما یکبار 500 و بار دیگر 475 باشد $r=500$ یا $r=475$) و در جدولی mean squared error بین تصویر اصلی و تصویر نویزی و همچنین mean squared error بین تصویر اصلی و تصویر حذف نویز شده را گزارش نمایید و نتایج را تحلیل کنید.

راهنمایی:

خواندن تصویر: دستور خواندن تصویر $X = \text{imread}(\text{'address'})$ است که بعد از خواندن تصویر، باید متغیر X با دستور $X = \text{double}(X)$ به double تبدیل شود.

تولید نویز: یکی از نویزهای معمول برای تصاویر نویز گوسی است. دستور تولید نویز گوسی در matlab به صورت

اضافه نمودن نویز: نویز با تصویر اصلی جمع شود با دستور $y = X + n$ که در آن X تصویر اصلی و y تصویر نویزی است $n = \text{normrnd}(m, \text{sigma}, N, M)$ است که در آن m میانگین، sigma انحراف از معیار و n^*m سائز ماتریس نویز ایجاد شده است.

نویز گوسی با میانگین 0 و انحراف معیار 20 و سائز 512*512 با دستور $n = \text{normrnd}(0, 20, 512, 512)$ تولید میشود.

اضافه نمودن نویز : نویز باید با تصویر اصلی جمع شود . اگر n نویز تولید شده و y تصویر اصلی باشد ، $y+n$ تصویر نویزی را به ما میدهد.

سوال ۳ (امتیازی)

هدف این پروژه ، پیاده سازی face recognition با استفاده از الگوریتم SVD است. بدین منظور مقاله ی ضمیمه شده را مطالعه نموده و پروژه را پیاده سازی کنید.

انتخاب تصاویر و نحوه پیاده سازی بر عهده خودتان است.

نکات پیاده سازی

تمامی سوالات باید در متلب پیاده سازی شوند.
برای سوال ۲ و سوال ۳ ، حتما باید گزارشی کامل از نحوه پیاده سازی و کارکرد SVD در یک فایل PDF گردآوری شده و به پروژه ضمیمه شود.
تمامی فایل های تولید شده را در یک فایل زیپ گردآوری کنید و در مدل آپلود کنید.
