



دانشگاه صنعتی شریف  
دانشکده مهندسی مکانیک

عنوان:

## تمرینات سری هشتم

**modeling and simulation of a DC motor - PID controller design**

نگارش

محمدسعید صافی زاده

استاد راهنما

دکتر بهزادی پور

دی ماه ۱۴۰۳

## فهرست مطالب

۳	۱ صورت سوالات
۳	۱.۱ سوال اول . . . . .
۳	۲.۱ سوال دوم . . . . .
۳	۳.۱ سوال سوم . . . . .
۳	۴.۱ سوال چهارم . . . . .
۳	۲ پاسخ سوال اول
۵	۳ پاسخ سوال دوم
۵	۱.۳ روش اول - لاگرانژ . . . . .
۶	۲.۳ روش دوم . . . . .
۷	۴ پاسخ سوال سوم
۱۰	۵ سوال چهارم

## ۱ صورت سوالات

مطلوب است ساخت مدلی از ربات تمرین پنجم شامل مفاصل اول تا سوم به همراه عملگرهای الکتریکی مربوطه. برای این منظور:

### ۱.۱ سوال اول

یک مدل از مکانیک ربات را با در نظر گرفتن سه لینک به صورت میله یکنواخت (با استفاده از قطعات پیشفرض) در Simscape بسازید. جرم میله ها را به ترتیب برای لینکهای ۱، ۲ و ۳ برابر چهار، چهار و دو کیلوگرم در نظر بگیرید. طول لینک سه را برابر ۳۰ سانتی متر در نظر بگیرید. (باقی ابعاد را مطابق تمرین پنجم در نظر بگیرید.)

### ۲.۱ سوال دوم

به کمک روابط ارائه شده برای موتور DC و جدول زیر مدلی از موتور مربوطه ساخته و به مفاصل ربات متصل نمائید (دقت کنید که تابع تبدیلی که برای تک مفصل بدست آوردیم به درد اینجا نمیخورد). ربات را در موقعیت اولیه معادل:

$$\theta_1 = 0, \theta_2 = 0, d = 0$$

قرار دهید و ولتاژ ۴۸ ولت را به هر سه موتور به مدت ۳ ثانیه اعمال کنید. زاویه هر مفصل را بر حسب زمان رسم کنید. (در همرفتگی لینکها اهمیتی ندارد.)

### ۳.۱ سوال سوم

برای هریک از مفاصل سه گانه ربات، یک کنترلر PID طراحی کنید که زمان نشست ربات حدود ۱ ثانیه و فراجهش آن کمتر از ۵ درصد باشد. برای این منظور تابع تبدیل حلقه بسته هر مفصل را بدست آورید و از روابط زیر برای تخمین ضرایب استفاده کنید. (البته نهایتاً ممکن است مجبور به تنظیم نهایی ضرایب با سعی و خطا باشید). کنترلر خود را برای بردن از موقعیت اولیه به

$$\theta_1 = 50, \theta_2 = 35, d = 15 \text{ cm}$$

تست کنید. منحنیهای زاویه مفاصل بر حسب زمان را رسم کنید. (طراحی تراژکتوری لازم نیست. مقادیر زاویهها را به صورت ورودی پله به کنترل کننده هر مفصل اعمال کنید.)

### ۴.۱ سوال چهارم

تراژکتوری طراحی شده در قسمت الف تکلیف ۵ را روی ربات پیاده کنید و خطای آر ام اس مسیر، نسبت به سوال ۳ را گزارش کنید. (موقعیت اولیه و پایانی مسیر را مختصات تکلیف ۵ در نظر بگیرید). (امتیازی ۱۰ درصد)

## ۲ پاسخ سوال اول

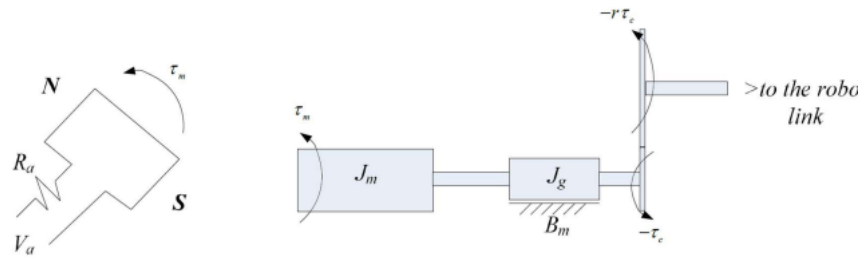
برای مدلسازی در محیط سیمولینک، از بلوک cylindrical solid استفاده می کنیم. در این بلوک با مشخص کردن جرم و یا مشخص کردن طول و شعاع می توانیم لینک استوانه ای بسازیم. من در اینجا با دادن چگالی ۷۸۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب برای لینک ها و داشتن طول آن ها مقادیر شعاع لینک های یک دو و سه را مشخص کردم که به صورت زیر محاسبه شده اند:

$$L = 35 \text{ cm} - m = 4 \text{ kg}, m = \rho V = \rho \pi r^2 L = 7800 \pi r^2 (0.35) = 4, r = 2.16 \text{ cm}$$

$$L = 20 \text{ cm} - m = 4 \text{ kg}, m = \rho V = \rho \pi r^2 L = 7800 \pi r^2 (0.2) = 4, r = 2.857 \text{ cm}$$

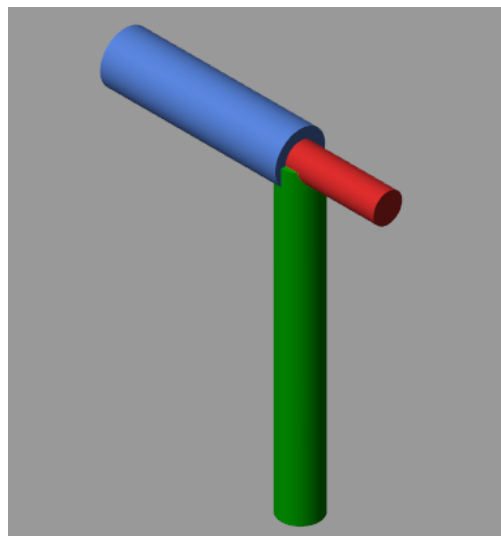
$$L = 30 \text{ cm} - m = 2 \text{ kg}, m = \rho V = \rho \pi r^2 L = 7800 \pi r^2 (0.3) = 2, r = 1.649 \text{ cm}$$

با ساختن این لینک ها مشابه با تمرین سری اول، به تعریف دستگاه های مختصات می پردازیم و مفصل های مورد نظر را وارد می کنیم (دو مفصل دورانی و یک مفصل انتقالی) و مشابه با آنچه که در تمرین اول توضیح داده شد؛ این ربات را مدل می کنیم که به صورت شکل ۲ در خواهد آمد. همانطور که مشاهده می شود، ربات در موقعیت تعیین شده اولیه قرار دارد. همچنین در هم رفتن لینک ها نیز مورد بحث نیست.



$V_a$	Armature voltage
$V_b$	Back EMF voltage
$R_a$	Armature resistance (50 Ohm)
$\tau_m$	The generated torque at the armature
$\tau_c$	The input torque to the gearbox (transmission)
$J_m$	Angular inertia of the armature ( $0.1 \text{ kgm}^2$ )
$J_g$	Angular inertia of the gears ( $0.05 \text{ kgm}^2$ )
$r$	Transmission ratio (50)
$B_m$	The viscous friction coefficient at the motor and transmission ( $0.01 \text{ Nms}$ )
$\theta_m$	Angular position of the motor
$\theta_l$	Angular position of the link
$i_a$	Current of the armature
$K$	The motor constant ( $7.5 \text{ Nm/Amp}$ )

شکل ۱: شکل مربوط به نحوه نمایش مفصل ربات و جدول داده ها



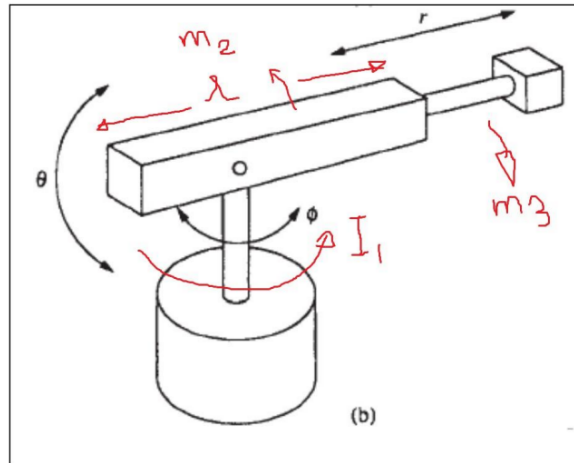
شکل ۲: ربات مدل سازی شده در موقعیت اولیه تعیین شده

## ۳ پاسخ سوال دوم

### ۱.۳ روش اول - لاگرانژ

در ابتدا ذکر این نکته الزامی است که این روش بسیار جامع می باشد و قصد داشتم که با این روش مسئله را حل کنم، اما به دلیل ارور های موقع اجرا، روش ساده تری را برگزیدم که در همین بخش و در روش دوم به توضیح آن پرداخته ام. این بخش هم صرفا به جهت دید بهتر نسبت به کاری که در آینده انجام خواهیم داد آورده ام.

با توجه به روش لاگرانژ، ابتدا انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل لینک ها را به دست می آوریم و سپس با استفاده از فرمول می توانیم مدل مربوطه به ربات را بدست آوریم. برای ربات نشان داده شده در شکل ۳ انرژی جنبشی و پتانسیل و لاگرانژ به صورت شکل ۴ خواهند شد.



شکل ۳: یک نمونه از ربات RRP

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( \frac{L}{2} \right)^2 \cos^2(\theta)^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_3 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 (L+r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_3 (L+\frac{r}{2})^2 \cos^2(\theta)^2 \dot{\phi}^2$$

$$V = m_2 g \frac{L}{2} \sin(\theta) + m_3 g (L + \frac{r}{2}) \sin(\theta)$$

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) = \tau$$

شکل ۴: لاگرانژ ربات نمونه RRP

با استفاده از این معادلات و فرم کلی لاگرانژ می توانیم گشتاور های موجود در مفاصل یک، دو و سه ربات را به دست آوریم. که این امر با کد زیر امکان پذیر خواهد بود :

```
syms t1(t) t2(t) d3(t)
m1 = 4;
m2 = 4;
```

```

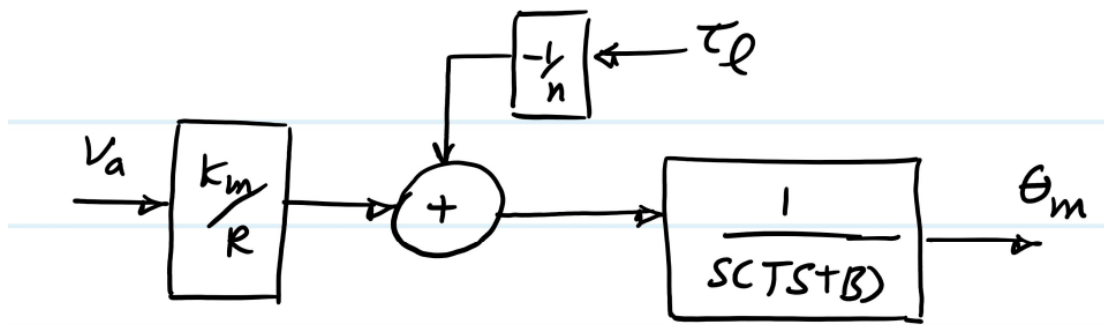
m3 = 2;
r1 = 0.0216;
l1 = 0.35;
l2 = 0.2;
l3 = 0.3;
g = 9.81;
I1 = 0.5*m1*r1^2;
I2 = 1/12*m2*l2^2;
T = 0.5*I1*diff(t1)^2 + 0.5*I2*diff(t2)^2 + 0.5*m2*(l2/2)^2*cos(t2)^2*diff(t1)^2 + 0.5*m
V = m2*g*l2/2*sin(t2) + m3*g*(l2+d3/2)*sin(t2);
L = T - V;
M1 = diff(diff(L,diff(t1,t)),t) - diff(L,t1);
M2 = diff(diff(L,diff(t2,t)),t) - diff(L,t2);
M3 = diff(diff(L,diff(d3,t)),t) - diff(L,d3);

```

در خروجی این کد، مقادیر  $M1, M2, M3$  که نمایانگر گشتاورها در مفاصل هستند به صورت پارامتری بدست می آیند و نهایتاً با استفاده از خروجی بلوک های مفاصل که شامل زاویه، مشتق زاویه و مشتق دوم زاویه هستند با جایگذاری در این عبارات پارامتری می توانیم مقادیر گشتاورهای مفاصل را در هر مرحله به دست آوریم که به دلیل خطا و دشواری کار راه حل دوم را انتخاب کردیم.

## ۲.۳ روش دوم

در این روش، از بلوک های مفاصل های مفاصل فیدبک تورک می گیریم. این فیدبکی که از مفاصل دریافت می کنیم، شامل کوپل های دینامیکی نیز می باشند، بنابراین به جای راه حل بالا می توانیم از تابع تبدیلی که برای تک مفصل در جزوه آمده است استفاده کنیم و در آن که ورودی تورک به عنوان اغتشاش است را از فیدبک خود مفاصل به آن وارد کنیم. این مدل سازی را می توانید در شکل ۵



شکل ۵: مدل سازی انجام شده برای موتور تک مفصل

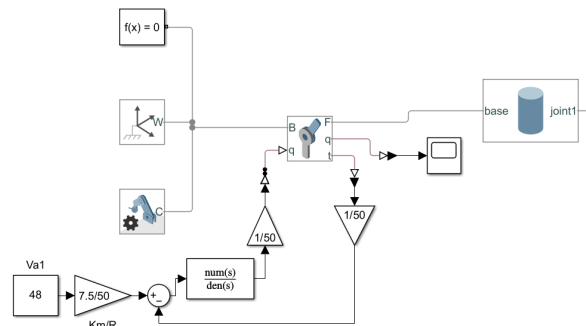
طبق این مدل ابتدا به محاسبه مقادیر آن می پردازیم:

$$J = J_m + J_g = 0.1 + 0.05 = 0.15 \text{ kgm}^2$$

$$B = B_m + \frac{K_m K_b}{R} = 0.01 + 7.5/50 = 1.135$$

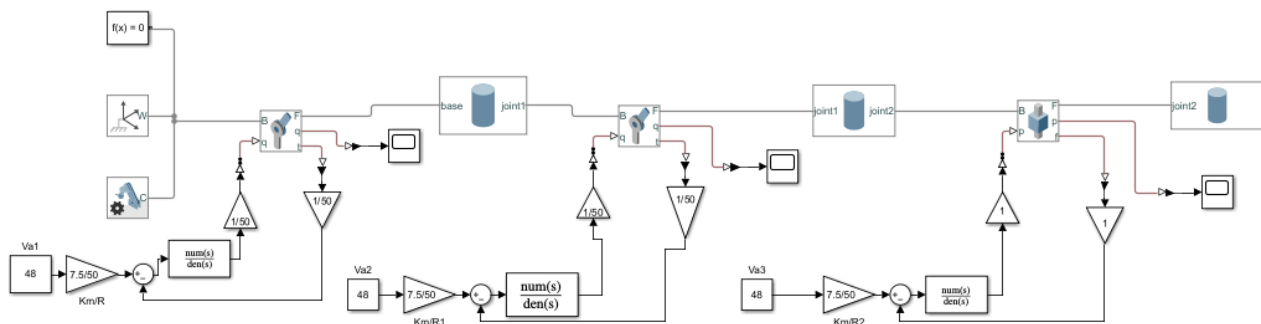
حالا این مدل را در محیط سیمولینک مطابق شکل ۶ پیاده سازی می کنیم.

در این شکل ابتدا یک فیدبک از تورک مفصل گرفته شده و در نسبت تبدیل ضرب شده است و این مقدار از حاصل ضرب ورودی ولتاژ در  $K_m/R$  کم شده است و نهایتاً در تابع تبدیل با ضرایب صورت یک و مخرب به ترتیب ۱۵.۰، ۱۳۵.۱ و ۰ می رود و به عنوان ورودی حرکت به



شکل ۶: مدل سازی انجام شده برای موتور تک مفصل اول

مفصل داده می شود. این مدل را برای دو مفصل دیگر اجرا می کنیم با این تفاوت که برای مفصل سوم دیگر نسبت تبدیل موتور را نداریم و مقدار آن برابر با یک می باشد. شکل کلی شبیه سازی شده در متلب در شکل ۷ نشان داده شده است.



شکل ۷: مدل سازی انجام شده برای همه مفصلات

## ۴ پاسخ سوال سوم

در این سوال به دنبال طراحی و یافتن ضرایب یک کنترل کننده PID هستیم. برای این کار می توانیم از روند ارائه شده در شکل ۱۱ استفاده کنیم به اسن صورت که با روابط موجود برای طراحی ضرایب کنترل کننده PD مقادیر  $K_p$  و  $K_d$  را بیابیم و متناسب با آن ها ضریب انتگرال گیر را نیز پیدا کنیم.

همچنین مدار حلقه بسته این کنترل کننده نیز به صورت شکل PID می باشد، که باید این مدل را در سیمولینک برای هر مفصل پیاده سازی کنیم. برای محاسبه ضرایب کنترل کننده PD داریم:

$$M_p < 0.05, \zeta > 0.69$$

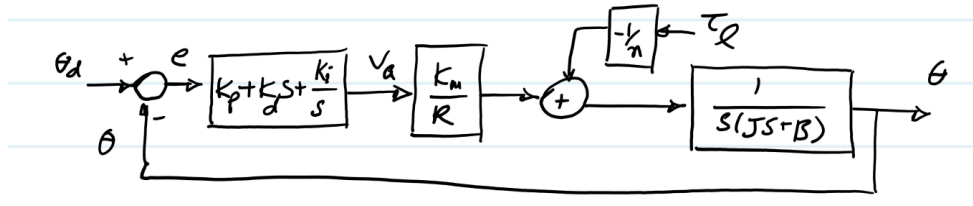
$$t_s = 1, \frac{4.6}{\zeta * \omega_n} = 0.69$$

$$K_d = \frac{9.2}{t_s} J - B = 9.2 * 0.15 - 1.135 = 0.245$$

$$K_p = \frac{J}{(\frac{t_s}{4.6} * \zeta)^2} = 6.6654$$

یک راه حل کاربردی این است که پیچ‌نژاد را برابر با  $PD$  (  $K_d, K_p$  ) تنظیم کنیم و سپس مقدار  $K_i$  را کمترین مقدار لازم برای دفع خطر از دست رفتن سیستم پس اثرات  $K_d$  در پیچ‌نژاد را با تنظیم جزئی  $K_d, K_i$  ( به سبب خطا ) به مداری ربات کنیم.

شکل ۸: روند کلی مسیر طراحی کنترل کننده PID



شکل ۹: مدار حلقه بسته برای کنترل کننده PID

شرط پایداری کنترل کننده PID نیز به صورت زیر می باشد:

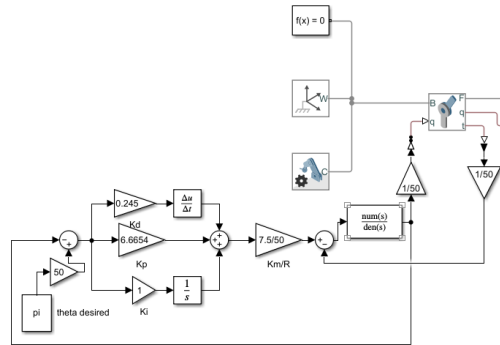
$$0 < K_i < \frac{K_p(B + K_d)}{J}$$

که باید این مورد را نیز بررسی کنیم. همچنین ذکر این نکته الزامی است که  $\theta_d$  استفاده شده در بالا برای خود موتور می باشد نه مفصل. بنابراین مقدار ورودی آن با از قبل از نسبت تبدیل مطابق با شکل ۱۰ کشیده شود. همانطور که در شکل ۱۰ مشاهده می کنید در سه شاخه ضرایب کنترل کننده را تاثیر داده ام و به آن ها مقدار اختلاف (ارور) مقادیر زاویه خواسته شده و موجود را می دهیم. در این جا ذکر این نکته الزامی است که برای مقدار خواسته شده باید نسبت تبدیل را لحاظ کنیم به همان دلیل که قبلاً هم توضیح داده شد و نهایتاً خروجی آن را به جای ولتاژ در سوال قبل به مدل می دهیم. کافی همین کار را برای دو مفصل دیگر تکرار کنیم. تا اینجا مدار کنترل کننده را شبیه سازی کردیم. حالا باید ضرایب را به گونه ای در بیاوریم که خواسته های مسئله برآورده شود. در این جا به سعی و خطا برای یافتن ضرایب کنترل کننده می پردازیم. با سعی و خطا و عوض کردن مقادیر  $K_d$  و  $K_p$  زمان نشست و فراجهش را تنظیم می کنیم و سپس خطای ماندگار را با استفاده از  $K_i$  تعیین می کنیم. با این کار ضرایب برای مفصل اول به صورت زیر در می آیند و همچنین نمودار زاویه مفصل بر حسب زمان به صورت شکل ۱۱ خواهد بود.

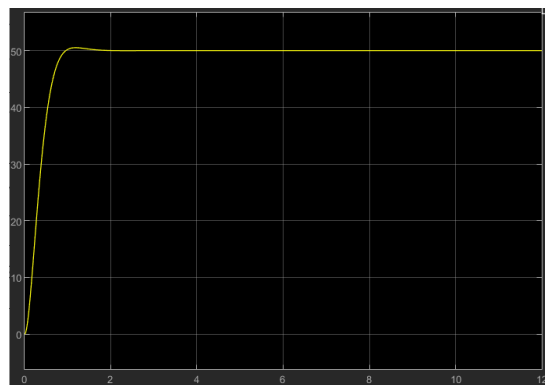
$$K_d = 0.2, K_p = 22, K_i = 0.01$$

برای مفصل دوم نیز به روش مشابه می توان ضرایب کنترل کننده را بدست آورد. شکل کلی محیط شبیه سازی شده در سیمولینک به شکل ۱۲ می باشد.

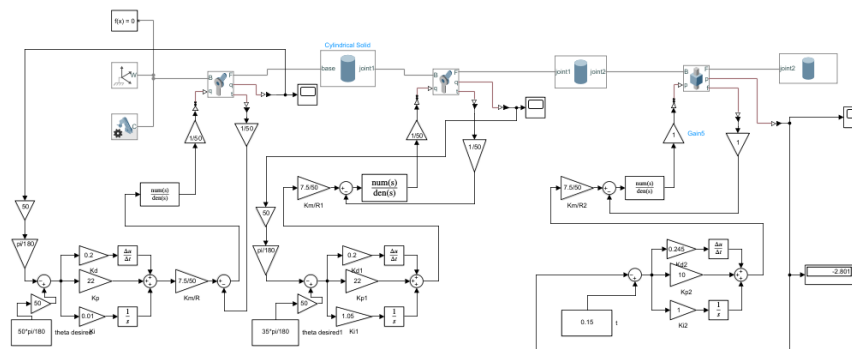




شکل ۱۰: نحوه شبیه سازی مدار حلقه بسته کنترل کننده PID برای مفصل اول



شکل ۱۱: نمودار زاویه مفصل اول بر حسب زمان



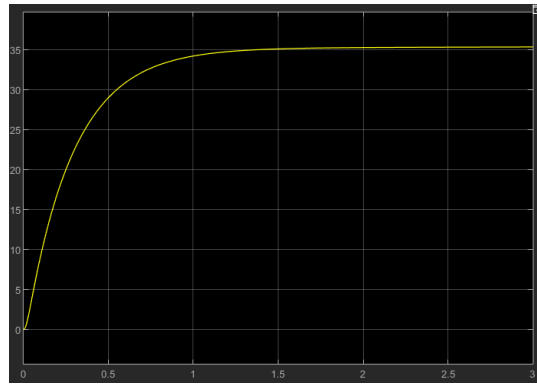
شکل ۱۲: ربات شبیه سازی شده در متلب

برای مفصل دوم نیز برای ضرایب مقادیر زیر گزینه های خوبی می باشند:

$$K_d = 50, K_p = 200, K_i = 5$$

که نمودار آن مطابق شکل ۱۳ می شود:

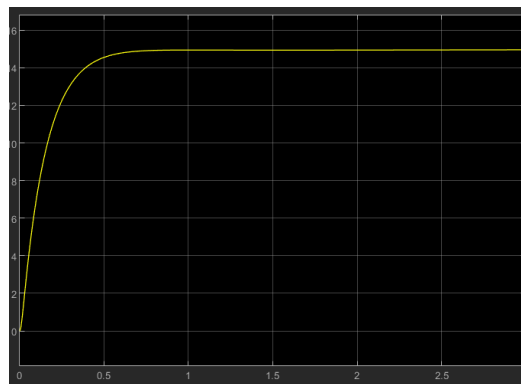
برای مفصل سوم هم نمودار زاویه بر حسب زمان به صورت شکل ۱۴ می باشد و ضرایب آن به صورت زیر می باشند. البته این ضرایب بهینه ترین



شکل ۱۳: نمودار زاویه برحسب زمان برای مفصل دوم

نیستند و شاید با ضرایب کوچک تری بتوان این کار را انجام داد، ولی برای هدف ما به خوبی کار می کنند.

$$K_d = 15, K_p = 100, K_i = 30$$



شکل ۱۴: نمودار زاویه برحسب زمان برای مفصل سوم

## ۵ سوال چهارم

با توجه به مدلی که ما ساختیم به راحتی می توانیم به آن ورودی زاویه مطلوب را اعمال کنیم. به منظور کافی است تراژکتوری ای را که در تمرین پنجم بدست آوردیم را در این جا به جای  $\theta_d$  وارد کنیم. که برای مفصل اول به صورت شکل ۱۵ می شود.

شکل کلی محیط شبیه سازی نیز به صورت شکل ۱۶ می باشد:

متأسفانه به دلایلی که متوجه نشدم، اجرای این کد در نیم ساعت حدود ۳۰ درصد بود، از این جهت، نتوانستم خروجی و خطا را ببایم و صرفاً روند را بیان کردم.

