دانشکده مهندسی مکانیک

گزارش تمرین ۱

درس رباتیک

# مثال هایی از کاربرد ماتریس همگن

نگارش :

محمدسعید صافی زاده

استاد:

دکتر بهزادی پور

فهرست مطالب

## ۱. صورت سوالات

### ۱.۱ سوال اول

کد ماتریس همگن برای انتقال به اندازه ی مشخص در راستای یک محور داده شده است.

```
function T=Trans (axis, distance)
%Homogenous transformation along "axis" for the amount of "distance"
axis=upper(axis);
if (axis == 'X')
T= [1 0 0 distance; 0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
end
if (axis == 'Y')
T= [1 0 0 0; 0 1 0 distance; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
end
if (axis =='Z')
T= [1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 distance; 0 0 0 1];
end
```

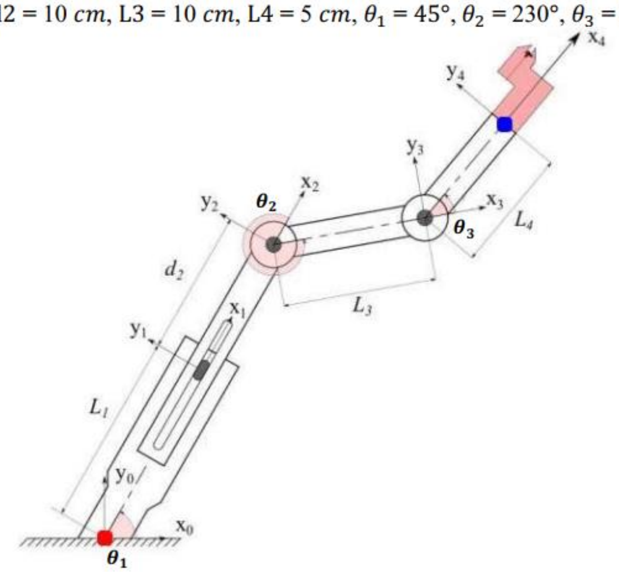
حال با توجه به این کد، ماتریس همگن برای دوران به اندازه ی یک زاویه مشخص را بنویسید.

$$function\ R = Rot(axis, angle)$$

### ۱.۲ سوال دوم

کد متلبی بنویسید که موقعیت فریم ۴ را نسبته به فریم ۱ بیان کند.

(L1 = 15 $cm$, d2 = 10 $cm$, L3 = 10 $cm$, L4 = 5 $cm$, $\theta_1 = 45°$, $\theta_2 = 230°$, $\theta_3 = 30°$)




تصویر ۱ شکل سوال دوم

### ۱.۳ سوال سوم

یک تابع برای تبدیل همگن یک دوران دلخواه به اندازه ی مشخص حول یک محور دلخواه $K = (k_x, k_y, k_z)$ بنویسید. سپس مقدار آن را به ازای k = (0.707, 0.5, 0.707) و زاویه ۶۰ درجه بدست آورید.

$$function\ R\_gen = Rot\_gen(axis, angle)$$

## ۲. پاسخ سوالات

### ۲.۱ سوال اول

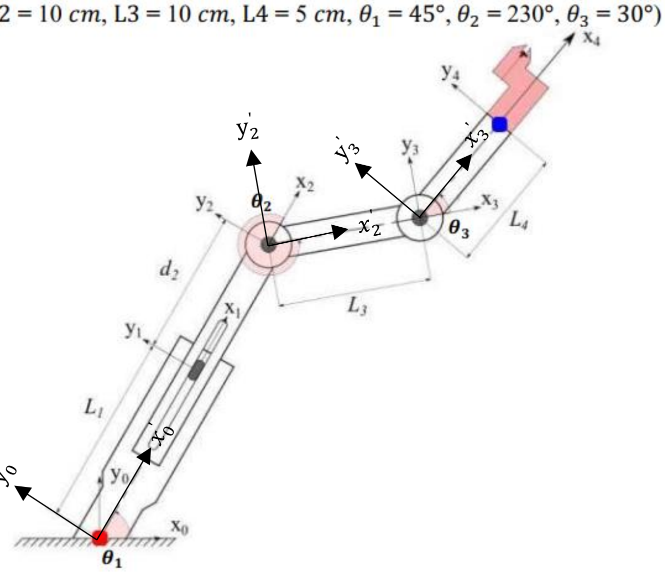
در این سوال از ما خواسته شده تا ماتریس های همگن برای دوران های استاندارد را به صورت کد پیاده سازی کنیم. ماتریس همگن را از قرار دادن ماتریس دوران حول هر یک از محور ها برای محور تعیین شده، سپس بردار صفر (به دلیل عدم وجود انتقال) و نهایتاً سطر آخر را مطابق با تعریف ماترس همگن بردار [0,0,0,1] قرار می دهیم. در این کد فرض شده که زاویه ورودی به درجه است. در صورتی که زاویه به رادیان باشد کامنت آن بخش از کد که کامنت شده است را بردارید.

```
function R=Rot(axis,angle)
    %Homogenous transfermation around an axis for the amount of "angle"
    % input for axis should be in this format -> 'axis'
    % angle is in degrees if you like to input angle in radians uncommect
    % the below code line
    %angle = 180*angle / pi; %converting rad to degree
    axis = upper(axis);
    if axis == 'X'
        R=[1 0           0           0;
           0 cosd(angle) -sind(angle) 0;
           0 sind(angle) cosd(angle)  0;
           0 0           0           1];
    end

    if axis == 'Y'
        R=[cosd(angle)  0 sind(angle) 0;
           0            1 0           0;
           -sind(angle) 0 cosd(angle) 0;
           0            0 0           1];
    end

    if axis == 'Z'
        R=[cosd(angle) -sind(angle) 0 0;
           sind(angle) cosd(angle)  0 0;
           0           0            1 0;
           0           0            0 1];
    end
end
```

## ۲.۲ سوال دوم

با توجه به قانون توالی ماتریس های همگن می‌توان از دستگاه مختصات صفر شروع کرد، ماتریس های همگن هر دو دستگاه را به دست آورد و نهایتاً در یک دیگر ضرب کرد. با ضرب ماتریس همگنِ حاصل از قسمت قبل در موقعیت نقطه مشخص شده در دستگاه ۴ بیان شده در همان دستگاه، موقعیت آن نقطه، بیان شده در دستگاه صفر بدست می آید. در این جا حرکت از یک دستگاه به دستگاه دیگر را با یک انتقال و دوران حول محور های استاندارد نمایش می‌دهیم. هم‌چنین برای انجام این دوران و انتقال ها از تابع های سوال اول استفاده می کنیم.

(L1 = 15 $cm$, d2 = 10 $cm$, L3 = 10 $cm$, L4 = 5 $cm$, $\theta_1 = 45°$, $\theta_2 = 230°$, $\theta_3 = 30°$)




*تصویر ۲ نمایش دستگاه مختصات های استفاده شده*

همانطور که در تصویر ۲ آمده است ابتدا دستگاه صفر را به اندازه ی $\theta_1$ حول $z_0$ دوران می دهیم تا به دستگاه صفر پرایم برسیم و با یک انتقال در راستای $x_0'$ به دستگاه $x_1$ می رسیم. تا اینجا $H_1^0$ را ساختیم. سپس دوباره با دوران حوا محور $z_2$ به دستگاه $z_2'$ می رسیم و با یک انتقال به دستگاه $z_3$ و مشابهاً همین کار را برای دستگاه $z_3$ انجام می دهیم.

```
clc
clear all
close all

L1 = 15;
d2 = 10;
L3 = 10;
L4 = 5;
theta1 = 45;
theta2 = 230;
theta3 = 30;

% Notations : H1_0 means homogenous transformation from 0 to 1
H1_0 = Rot('z',theta1) * Trans('x',L1); % it means that coordinate one can
% be expressed by a rotation about z and a direct transfer by distance L1
H2_0 = H1_0 * Trans('x',d2);
H3_0 = H2_0 * Rot('z', -1*(360 - theta2)) * Trans('x',L3);
H4_0 = H3_0 * Rot('z', theta3) * Trans('x',L4);

formatSpec = 'Homogenous Transformation is:\n ';
fprintf(formatSpec)
disp(H4_0)


p4_4 = [0;0;0;1];
P4_0 = (H4_0) * p4_4; %position of the point in coordinate 4 written in coordinate 0

x4_0 = P4_0(1);
y4_0 = P4_0(2);
z4_0 = P4_0(3);

formatSpec = 'X location of frame4 with respect to frame0 is %.3f cm\n';
fprintf(formatSpec,x4_0)

formatSpec = 'Y location of frame4 with respect to frame0 is %.3f cm\n';
fprintf(formatSpec,y4_0)

formatSpec = 'Z location of frame4 with respect to frame0 is %.3f cm\n';
fprintf(formatSpec,z4_0)
```

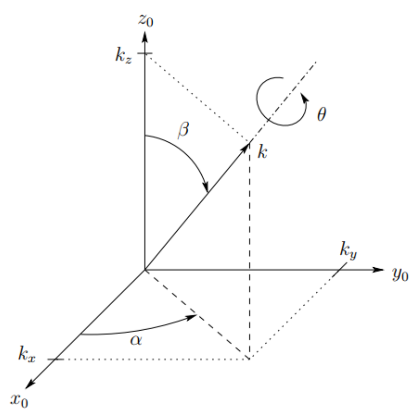
Output of the above code :

```
Homogenous Transformation is:
     0.5736    0.8192         0   21.4171
   -0.8192    0.5736         0    3.6200
         0         0    1.0000         0
         0         0         0    1.0000

X location of frame4 with respect to frame0 is 21.417 cm
Y location of frame4 with respect to frame0 is 3.620 cm
Z location of frame4 with respect to frame0 is 0.000 cm
```

## ۲.۳ سوال سوم

در این تمرین مشابه بخش ۲.۵.۳ کتاب عمل و از similarity transformation استفاده می کنیم. فرض می کنیم چرخشِ حول محور $Z_0$، بیان شده در دستگاهی که محور k در آن قرار دارد همان تابع تبدیلی است که دنبالش می گردیم. بنابراین عملگر خطی ما(A) $R_{z_0,\theta}$ است که می خواهیم با استفاده از similarity transformation آن را در دستگاهی که محورk قرار دارد بیان کنیم(B).رابطه بین A و B به صورت $R_{z,\theta} = R_1^{0^{-1}} R_{k,\theta} R_1^0$ که اگر از سمت راست در $R_1^{0^{-1}}$ و از سمت چپ در $R_1^0$ ضرب کنیم به عبارت زیر می‌رسیم. هم‌چنین ماتریس را می توانیم طبق دو دوران استاندارد بنویسیم که نهایتاً فرم جواب به صورت معادله (۱) در خواهد آمد.

$$
\begin{aligned}
R_{k,\theta} &= R_1^0 R_{z,\theta} R_1^{0^{-1}} \\
&= R_{z,\alpha} R_{y,\beta} R_{z,\theta} R_{y,-\beta} R_{z,-\alpha} \qquad (۱)
\end{aligned}
$$




تصویر ۳دوران حول یک محور دلخواه

هم چنین باید زوایای α و β را به مولفه های k در راستای x، y و z تجزیه کنیم. بنابراین برای زوایا مطابق شکل داریم:

$$sin(\alpha) = \frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \ (2)$$

$$cos(\alpha) = \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \ (3)$$

$$sin(\beta) = \frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} \ (4)$$

$$cos(\beta) = \frac{k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} \quad (5)$$

دو معادله اخیر (۴) و (۵) با فرض یکه نبودن بردار k نوشته شده اند. با جایگذاری زاویه های بدست آمده در رابطه ای (۱) که برای $R_{k,\theta}$ در بالا بدست آورده بودیم، ماتریس تبدیل $R_{k,\theta}$ را بر حسب $k_x, k_y, k_z, \theta$ می یابیم. نمونه پاسخ این ماتریس برای بردار k که یکه است به صورت زیر می باشد: (البته توجه شود که ما بردار k را یکه در نظر نگرفتیم و جواب کلی با این ماتریسی که در ادامه آمده است فرق دارد. )

$$R_{k,\theta} = \left[ \begin{array}{c|c|c} k_x^2 v_\theta + c_\theta & k_x k_y v_\theta - k_z s_\theta & k_x k_z v_\theta + k_y s_\theta \\ k_x k_y v_\theta + k_z s_\theta & k_y^2 v_\theta + c_\theta & k_y k_z v_\theta - k_x s_\theta \\ k_x k_z v_\theta - k_y s_\theta & k_y k_z v_\theta + k_x s_\theta & k_z^2 v_\theta + c_\theta \end{array} \right]$$

where $v_\theta = \text{ vers } \theta = 1 - c_\theta$.

این ماتریس همان ماتریس دوران حول محور k به اندازه $\theta$ می باشد.

نتیجه گیری : در واقع هر ماتریس دوران را می توان با یک دوران حول محور مناسب به اندازه زاویه مناسب به دست آورد. هم چنین برای نوشتن ماتریس همگن، می دانیم که سه درایه اول ستون چهارم صفر هستند زیرا حرکت انتقالی نداریم.

```
function R_gen=Rot_gen (axis, angle)
    k_x = axis(1);
    k_y = axis(2);
    k_z = axis(3);
    %{
    direct matix of R_gen when k is a unit vector
    R_gen = [k_x^2*(1-cosd(angle)+cosd(angle)) k_x*k_y*(1-cosd(angle))-k_z*sind(angle)
k_x*k_z*(1-cosd(angle))+k_y*sind(angle) 0;
             k_x*k_y*(1-cosd(angle))+k_z*sind(angle) k_y^2*(1-cosd(angle))+cosd(angle)
k_y*k_z*(1-cosd(angle))-k_x*sind(angle) 0;
             k_x*k_z*(1-cosd(angle))-k_y*sind(angle) k_y*k_z*(1-cosd(angle))+k_x*sind(angle)
k_z^2*(1-cosd(angle))+cosd(angle) 0;
             0 0 0 1];
    %}

    % sin alpha = k_y/sqrt(k_x^2 + k_y^2)
    % cos alpha = k_x/sqrt(k_x^2 + k_y^2)
    % so H_z,alpha is defined by
    H_z_alpha=[k_x/sqrt(k_x^2 + k_y^2) -1*k_y/sqrt(k_x^2 + k_y^2) 0 0;k_y/sqrt(k_x^2 + k_y^2)
k_x/sqrt(k_x^2 + k_y^2) 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1];

    % doing the same for beta
    % sin beta = sqrt(k_x^2 + k_y^2)/sqrt( k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)
    % cos beta = k_z/sqrt( k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)
    H_y_beta=[k_z/sqrt( k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) 0 sqrt(k_x^2 + k_y^2)/sqrt( k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)
0;0 1 0 0;-1*sqrt(k_x^2 + k_y^2)/sqrt( k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) 0 k_z/sqrt( k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)
0;0 0 0 1];

    % thus the homogeneous transformation for matchnig the coordinate of k to
    % the z one is
    H0_1 = H_z_alpha * H_y_beta;
    H0_1_inv = (H0_1)^-1;

    % homogenoues revolution around z axis for the defined anglie is
    H_z_theta = [cosd(angle) -sind(angle) 0 0;sind(angle) cosd(angle) 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1];

    % with regars to the report descriptions we can find H_k_theta by
    H_k_theta = H0_1 * H_z_theta * H0_1_inv;
    R_gen = H_k_theta;
```

مقدار این تبدیل همگن به ازای k = (0.707, 0.5, 0.707) و زاویه ۶۰ درجه ماتریس زیر می باشد.

```
Rot_gen([0.707, 0.5, 0.707], 60)
```

$$H_{k,\theta} = \begin{bmatrix} 0.7000 & -0.4063 & 0.5873 & 0 \\ 0.6891 & 0.6000 & -0.4063 & 0 \\ -0.1874 & 0.6891 & 0.7000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.000 \end{bmatrix}$$