Teorema Master

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) \quad , a, b \text{ cost.}$$

Driving function : $f(n)$

Watershed function : $w(n) = n^{\log_b a}$

Enunciato

Siano $a > 0$ e $b > 1$ costanti, $f(n)$ definita e non negativa su tutti i reali sufficientemente grandi

Sia $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

con $aT\left(\frac{n}{b}\right) = a'T\left(\left\lceil\frac{n}{b}\right\rceil\right) + a''T\left(\left\lfloor\frac{n}{b}\right\rfloor\right), \exists\, a', a'' > 0 : a' + a'' = a$

Allora :

1) Se $\exists$ una costante $\varepsilon > 0$:

$$f(n) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right) \Longrightarrow T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$$

2) Se $\exists$ una costante $K \geq 0$:

$$f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \log^K n\right) \Rightarrow T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \log^{K+1} n\right)$$

3) Se $\exists$ una costante $\varepsilon > 0$:

$f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$ e f soddisfa la condizione di regolarità, $\exists\, c < 1 : a f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c f(n) \Rightarrow T(n) = \Theta(f(n))$