Esame del 28.04.2024

Algoritmi e Laboratorio

Parte B

Esercizio 1. Si consideri l'equazione di ricorrenza

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{3}\right) + n. \tag{1}$$

A. Si risolva l'equazione (1) al variare del parametro reale $a \geq 1$, utilizzando il metodo Master.

B. Si stabilisca per quali valori di b la soluzione $T(n)$ all'equazione (1) soddisfa le seguenti condizioni

$$\text{(i.) } T(n) = \mathcal{O}(n) \qquad \text{(ii.) } T(n) = \Omega(n \log(n)) \qquad \text{(iii.) } T(n) = o\left(n^2 \log(n)\right).$$

C. Si disegni uno sketch dell'albero di ricorrenza associato all'equazione (1) per $a = 3$.

Esercizio 2. Si consideri il seguente problema computazionale.

> Matrix Chain Multiplication Problem
>
> **INPUT:** $A_1, A_2, \ldots, A_n$, matrici tali che il numero di colonne di A_i sia uguale al numero di righe di A_{i+1}, per $1 \leq i < n$.
>
> **GOAL:** trovare una parentesizzazione di $A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$ che minimizza il numero di moltiplicazioni scalari.

Si dimostri che Matrix Chain Multiplication Problem ha la proprietà di sottostruttura ottima.

Esercizio 2 bis. Sia $\star$ l'operazione si numeri natural definita da

$$a \star b := 2a + 3b.$$

L'operazione $\star$ non è associative, infatti, ad esempio, $(1 \star 5) \star 2 = 2(2 + 15) + 3 \cdot 2 = 40$ è diverso da $1 \star (5 \star 2) = 2 + 3(10 + 6) = 50$. Ha allora senso considerare il seguente problema di ottimizzazione computazionale.

MAX-$\star$-VALUE PROBLEM **INPUT:** $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$. **GOAL:** trovare una parentesizzazione di $a_1 \star a_2 \star \cdots \star a_n$ che ne massimizza il valore (cioè il risultato).

Si dimostri che MAX-$\star$-VALUE PROBLEM gode della proprietà di sottostruttura ottima.

Soluzioni

Esercizio 1. **A**. La funzione driving e la funzione watershed sono $f(n) = n$ e $w(n) = n^{\log_3 a}$, rispettivamente.
<u>**Caso** $1 \le a < 3$**:**</u> $\log_3 a < 1$ e quindi per $0 < \varepsilon < 1 - \log_3 a$ si ha che $f(n) = \Omega\left(n^{\log_3 a + \varepsilon}\right)$. Inoltre, è soddisfatta la condizione di regolarità; infatti, per $\frac{a}{3} \le c < 1$ si ha $\frac{a}{3}n < cn$, e per mostrare che un tale c esiste basta osservare che $\frac{a}{3} < 1$. Allora, per il Teorema Master, $T(n) = \Theta(n)$.
<u>**Caso** $a = 3$**:**</u> $\log_3 a = 1$ e quindi per $k = 0$ si ha che $f(n) = \Theta(n) = \Theta\left(n^{\log_3 a} \log^k n\right)$. Allora, per il Teorema Master, $T(n) = \Theta(n \log n)$.
<u>**Caso** $a > 3$**:**</u> $\log_3 a > 1$ e quindi per $0 < \varepsilon < \log_3 a - 1$ si ha che $f(n) = \mathcal{O}\left(n^{\log_3 a - \varepsilon}\right)$. Allora, per il Teorema Master, $T(n) = \Theta(n^{\log_3 a})$.

B. (i) $T(n) = \mathcal{O}(n)$ si verifica solo per $1 \le a < 3$, poiché entrambi gli ordini di grandezza $\Theta(n \log(n))$ e $\Theta(n^{\log_3 a})$ sono inferiori o uguali a n.
(ii) Per $a \ge 3$, si ha $T(n) = \Omega(n \log n)$, poiché entrambi gli ordini di grandezza $\Theta(n \log n)$ e $\Theta(n^{\log_3 a})$ sono superiori o uguali a $n \log n$.
(iii) $T(n) = o(n^2)$ per $1 \le a < 9$. Infatti, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\log_3 a}}{n^2} = 0$ per $a < 9$. Per $a = 3$, si ha $\lim_{n\to\infty} \frac{n \log n}{n^2} = 0$, e per $1 \le a < 3$, si ha $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = 0$.

C. La radice ha costo n. Ogni nodo ha 3 figli. All'i-esimo livello dell'albero ci sono 3^i nodi, ciascuno di costo $\Theta(\frac{n}{3^i})$. L'altezza dell'albero è $h = \log_3 n$ e ci sono $3^h = 3^{\log_3 n} = n$ foglie.

Esercizio 2. Siano $1 \le i < j \le n$. Consideriamo il problema di parentesizzare $A_i \cdot A_{i+1} \cdots A_j$. Data una parentesizzazione $\mathcal{P}$, definiamo

$$\text{costo}(\mathcal{P}) := \text{ numero di multiplicazioni scalari previste da } \mathcal{P}.$$

Sia $\mathcal{P}^{\min}$ una parentesizzazione ottima di $A_i \cdot A_{i+1} \cdots A_j$, ovvero tale che $\text{costo}(\mathcal{P}^{\min}) \le \text{costo}(\mathcal{P})$ per ogni parentesizzazione di $A_i \cdot A_{i+1} \cdots A_j$. Supponiamo, senza perdere generalità, che $\mathcal{P}^{\min}(A_i \cdot A_{i+1} \cdots A_j) = (\mathcal{P}^1(A_i \cdots A_k))(\mathcal{P}^2(A_{k+1} \cdots A_j))$. Allora, $\text{costo}(\mathcal{P}^{\min}) = \text{costo}(\mathcal{P}^1) + \text{costo}(\mathcal{P}^2) + h$, dove h è il numero di moltiplicazioni scalari necessarie per moltiplicare la matrice risultante da $A_i \cdots A_k$ per quella risultante da $A_{k+1} \cdots A_j$, ovvero il numero di righe di A_i per il numero di colonne di A_k per il numero di colonne di A_j (si osservi che questo numero non dipende da $\mathcal{P}^1$, nè $\mathcal{P}^2$).

Per dimostrare che Matrix Chain Multiplication Problem ha la proprietà di sottostruttura ottima supponiamo per assurdo che la restrizione di $\mathcal{P}^{\min}$ a uno dei due sottoproblemi, ad esempio ad $A_i \cdots A_k$, sia non ottima e facciamo vedere che questo implica una contraddizione.

Sia allora $\tilde{\mathcal{P}}^1$ una parentesizzazione di $A_i \cdot A_{i+1} \cdots A_k$ tale che $\text{costo}(\tilde{\mathcal{P}}^1) < \text{costo}(\mathcal{P}^1)$. Possiamo definire una nuova parentesizzazione $\mathcal{P}^\star$ di $A_i \cdots A_j$ ponendo $\mathcal{P}^\star(A_i \cdots A_j) = (\tilde{\mathcal{P}}^1(A_i \cdots A_k))(\mathcal{P}^2(A_{k+1} \cdots A_j))$. Avremo che

$$\text{costo}(\mathcal{P}^\star) = \text{costo}(\tilde{\mathcal{P}}^1) + \text{costo}(\mathcal{P}^2) + h < \text{costo}(\mathcal{P}^1) + \text{costo}(\mathcal{P}^2) + h = \text{costo}(\mathcal{P}^{\min}),$$

che contraddice l'ipotesi per cui $\text{costo}(\mathcal{P}^{\min}) \leq \text{costo}(\mathcal{P})$ per ogni parentesizzazione di $A_i \cdot A_{i+1} \cdots A_j$.

Esercizio 2 bis. Siano $1 \leq i < j \leq n$. Consideriamo il problema di parentesizzare $a_i \star a_{i+1} \star \cdots \star a_j$. Sia $\mathcal{P}^{\max}$ una parentesizzazione ottima di $a_i \star a_{i+1} \star \cdots \star a_j$, ovvero tale che $\mathcal{P}^{\max}(a_i \star a_{i+1} \star \cdots \star a_j) \geq \mathcal{P}(a_i \star a_{i+1} \star \cdots \star a_j)$ per ogni parentesizzazione $\mathcal{P}$ di $a_i \star a_{i+1} \star \cdots \star a_j$. Supponiamo, senza perdere generalità, che $\mathcal{P}^{\max}(a_i \star a_{i+1} \star \cdots \star a_j) = \mathcal{P}^1(a_i \star \cdots \star a_k) \star \mathcal{P}^2(a_{k+1} \star \cdots \star a_j) = 2 \cdot \mathcal{P}^1(a_i \star \cdots \star a_k) + 3 \cdot \mathcal{P}^2(a_{k+1} \star \cdots \star a_j)$.

Per dimostrare che Max-$\star$-Value Problem ha la proprietà di sottostruttura ottima supponiamo per assurdo che la restrizione di $\mathcal{P}^{\max}$ a uno dei due sottoproblemi, ad esempio ad $a_i \star \cdots \star a_k$, sia non ottima e facciamo vedere che questo implica una contraddizione.

Sia allora $\tilde{\mathcal{P}}^1$ una parentesizzazione di $a_i \star \cdots \star a_k$ tale che $\tilde{\mathcal{P}}^1(a_i \star \cdots \star a_k) > \mathcal{P}^1(a_i \star \cdots \star a_k)$. Possiamo definire una nuova parentesizzazione $\mathcal{P}^\star$ di $a_i \star \cdots \star a_j$ ponendo $\mathcal{P}^\star(a_i \star \cdots \star a_j) = (\tilde{\mathcal{P}}^1(a_i \star \cdots \star a_k)) \star (\mathcal{P}^2(a_{k+1} \star \cdots \star a_j))$. Avremo che $\mathcal{P}^\star(a_i \cdots a_j) = 2 \cdot \tilde{\mathcal{P}}^1(a_i \star \cdots \star a_k) + 3 \cdot \mathcal{P}^2(a_{k+1} \star \cdots \star a_j) > 2 \cdot \mathcal{P}^1(a_i \star \cdots \star a_k) + 3 \cdot \mathcal{P}^2(a_{k+1} \star \cdots \star a_j) = \mathcal{P}^{\max}(a_i \star \cdots \star a_j)$, che contraddice l'ipotesi per cui $\mathcal{P}^{\max}(a_i \star a_{i+1} \star \cdots \star a_j) \geq \mathcal{P}(a_i \star a_{i+1} \star \cdots \star a_j)$ per ogni parentesizzazione $\mathcal{P}$ di $a_i \star a_{i+1} \star \cdots \star a_j$.