

“ALGORITMI”
CORSO DI STUDIO IN INFORMATICA (laurea triennale)
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2020/21

Sessione Straordinaria (sospensione attività didattiche) – 07 dicembre 2021

Si svolgano i seguenti esercizi, utilizzando due fogli separati (A e B) e argomentando adeguatamente le risposte.

ESERCIZIO 1 (Foglio A)

- (A) Si enuncino il Teorema Master e il suo Corollario.
- (B) Si definiscano le notazioni asintotiche $\Theta(f(n))$, $o(f(n))$, $\Omega(f(n))$ per una data funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.
- (C) Si risolva l'equazione di ricorrenza $T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + \Theta(n^3 \log^2 n)$ al variare del parametro reale $a > 1$.
- (D) Sia $T(n)$ la funzione di cui al punto precedente. Per quali valori di a si ha:
- (i) $T(n) = \Theta(n^4)$; (ii) $T(n) = \Omega(n^3 \log^4 n)$; (iii) $T(n) = o(n^3 \log^3 n)$?

ESERCIZIO 2 (Foglio A)

Sia T un testo di 6000 caratteri in un alfabeto con i simboli $a, b, c, d, e, f, g, h, i, h$, le cui frequenze siano rispettivamente 200, 200, 300, 300, 350, 350, 400, 900, 1000, 1500.

Dopo aver definito la nozione di *codice prefisso*, si determini il numero minimo di bit necessari per rappresentare il testo T utilizzando un codice prefisso ottimo, illustrando l'algoritmo utilizzato (anche mediante pseudo-codice). Qual è il risparmio percentuale rispetto ad una codifica minimale di T con un codice a lunghezza fissa?

ESERCIZIO 3 (Foglio B)

Si supponga di operare su di un albero ROSSO-NERO, inizialmente vuoto, inserendo le seguenti chiavi nell'ordine dato: $\langle 18, 13, 15, 11, 17, 8, 5, 3, 2, 1 \rangle$. Si disegni la struttura dell'albero dopo ciascuna delle operazioni di inserimento, indicando sia la chiave che il colore di ciascun nodo dell'albero. Si fornisca anche, per **ciascun albero**, la sequenza delle chiavi ottenuta da una visita POST-ORDER.

ESERCIZIO 4 (Foglio B)

Siano dati un MIN-HEAP H_1 , e un MAX-HEAP, H_2 , e si supponga che H_1 contenga 10 elementi mentre H_2 sia vuoto. Si travasino tutti gli elementi da H_1 in H_2 utilizzando le procedure EXTRACT-MIN (su H_1) e INSERT (su H_2). Tutti gli elementi dovranno essere inseriti in H_2 subito dopo la loro estrazione da H_1 . Si fornisca la configurazione degli array associati agli heap H_1 e H_2 assumendo che la configurazione iniziale di H_1 sia descritta dall'array $[2, 17, 4, 21, 23, 5, 6, 32, 41, 27]$. Per ogni operazione si indichi anche il numero chiamate alla procedura HEAPIFY eseguite.

ESERCIZIO 5 (Foglio B)

Sia dato il grafo aciclico, direzionato e pesato $G = (V, E)$, con

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad \text{ed} \quad E = \{(0, 1), (0, 2), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4)\}.$$

La funzione peso w è così definita:

$$w(0, 1) = 1, \quad w(0, 2) = 3, \quad w(0, 4) = 6, \quad w(1, 2) = 1, \quad w(1, 3) = 2, \quad w(2, 4) = 2, \quad w(3, 4) = 1.$$

Si vogliono calcolare le distanze di cammino minimo dal nodo sorgente 0. A tal fine si esegua prima la procedura DFS sul grafo G per calcolarne l'ordinamento topologico (si forniscano i valori di inizio e fine visita ottenuti dalla procedura DFS) e successivamente si applichi l'algoritmo DAG-SHORTEST-PATH, fornendo la configurazione dell'array delle stime di cammino minimo dopo ogni Relax eseguita dall'algoritmo.