Tabelle hash con concatenazione

Dimostrazione che una ricerca senza successo ha mediamente costo $O(1+\alpha)$

Dim: Calcoliamo $h(k) = j$ → tempo costante

Bisogna esaminare n_j elementi della lista
avremo $\mathbb{E}[n_j] = \alpha \Rightarrow \Theta(1+\alpha)$
↳ numero atteso di elementi in n_j

Dimostrazione ricerca con successo

Sia x_i l'elemento ricercato e $k_i = x_i.key$

Il numero di elementi esaminati è di 1 + il numero di elementi che precedono x_i ovvero quelli aggiunti successivamente

Per ogni slot $q \in \{0, \dots, m-1\}$ della tabella
$\forall \underbrace{k_i, k_j \in K}_{}$ con $k_i \neq k_j$
↳ chiavi della tabella

Definiamo la variabile indicatrice X_{ij}

$$X_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se la ricerca per } x_i,\ h(x_i) = q,\ h(x_j) = q \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$P_r[X_{ijq} = 1] = P_r[\underset{\text{cercato}}{x_i \text{ è l'elemento}}]\, P_r[h(x.i) = q]\, P_r[h(x.j) = q]$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{nm^2}$$

quindi avremo che il valore atteso sarà:

$$\mathbb{E}[X_{ijq}] = \underbrace{0 \cdot Pr[X_{ijq}=0]}_{\text{risulta } 0} + \underbrace{1 \cdot Pr[X_{ijq}=1]}_{\frac{1}{n m^2}}$$

$$\mathbb{E}[X_{ijq}] = \frac{1}{n m^2}$$

Definiamo un'altra variabile Y_J

$$Y_J = \begin{cases} 1 & \text{se } x_J \text{ precede } x_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$Y_J = \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{J-1} X_{ijq}$$

Definiamo la variabile $Z = \sum_{J=1}^{n} Y_J$ definisce tutti gli elementi che precedono x_i nella stessa lista

$$T(n) = 1 + \mathbb{E}[Z] = 1 + \mathbb{E}\left[\sum_{J=1}^{n} \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{J-1} \frac{1}{n m^2}\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{n m^2}\left(\underbrace{\sum_{q=0}^{m-1}}_{m} \sum_{J=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{J-1} 1}_{= J-1}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{n m^{\cancel{2}}} \cancel{m} \sum_{J=1}^{n} J-1 = 1 + \frac{1}{n m} \sum_{J=0}^{n-1} J$$

$$= 1 + \frac{1}{nm} \cdot \frac{m(m-1)}{2} = 1 + \frac{m-1}{2m}$$

$$= 1 + \frac{m}{2m} - \frac{1 \cdot m}{2m \cdot m} = 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2m} = \Theta(1+\alpha)$$

Tabelle Hash e indirizzamento aperto

Caso medio ricerca senza successo $= \frac{1}{1-\alpha}$

DIMOSTRAZIONE

$\forall i = 1, 2, \dots, m$ $\quad A_i$: slot occupato all' iesima prova

$\{X \geq i\} = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{m-1}$

$\downarrow$

numero di prove fatte in una ricerca senza successo

$$Pr[\{X \geq i\}] = Pr[A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{m-1}] = Pr[A_1] \cdot Pr[A_2 | A_1] \cdot \dots \cdot Pr[A_{i-1} | A_1 \cap \dots A_{i-2}] \leq \alpha^{i-1}$$

possiamo limitare questo risultato con una serie per ottenere il numero atteso

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \frac{1}{1-\alpha} \leftarrow \text{Serie geometrica}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} Pr[X]$$

RICERCA CON SUCCESSO

L' elemento K che cerchiamo è l' elemento $i+1$ ed essere stato inserito con i fattore di carico al tempo di inserimento $\alpha = \frac{i}{m}$

Quindi il tempo atteso ... $\frac{1}{\dots} = \frac{m}{\dots}$

quindi il tempo atteso è dato da $\frac{1}{1-\frac{i}{m}} = \frac{m}{m-i}$

Facendo una media per tutte le chiavi avremo che il numero atteso è

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{m}{m-i} = \frac{m}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{m-i} = \frac{1}{\alpha}\sum_{k=m-n+1}^{m}\frac{1}{k}$$

questo si riconduce a:

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\int_{m-n}^{m}\frac{1}{x}\,dx \implies \frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{1-\alpha}$$