RICORRENZE

- EQUAZIONI O DISEQUAZIONI CHE DESCRIVONO IL VALORE DI UNA FUNZIONE IN TERMINI DEL SUO VALORE CON INPUT PIÙ PICCOLI

ES. $$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{SE } n=1 \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & \text{SE } n>1 \end{cases}$$

CON SOLUZIONE $T(n) = \Theta(n \lg n)$

- CONSIDEREREMO I SEGUENTI TRE METODI
  - METODO DI SOSTITUZIONE
  - METODO ITERATIVO O DELL'ALBERO DI RICORSIONE
  - METODO "MASTER" PER RICORRENZE DELLA FORMA

$$T(n) = aT(n/b) + f(n), \quad \text{CON } a>0,\ b>1$$

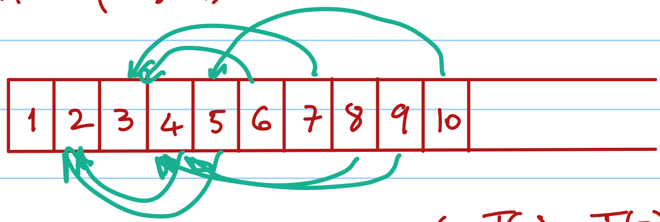
METODO DI SOSTITUZIONE

1. INDOVINARE UNA POSSIBILE SOLUZIONE!
2. VERIFICARE LA SOLUZIONE PER INDUZIONE

ESEMPIO: $T(n) = 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n$

SOLUZIONE PROPOSTA: $T(n) \leq c\, n \lg n \quad (n \geq 2)$

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n \\
&\leq 2c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\leq 2c\,\frac{n}{2} \lg \frac{n}{2} + n \\
&= c\,n \lg \frac{n}{2} + n \\
&= c\,n \lg n - cn + n \\
&\leq c\,n \lg n \qquad c \geq 1
\end{aligned}$$



PURCHE':

$c \geq \max\left(1, \frac{T(2)}{2}, \frac{T(3)}{3\lg 3}\right)$

- $c \geq 1$
- $T(2) \leq c \cdot 2 \lg 2 = 2c$
  $\Longrightarrow c \geq T(2)/2$
- $T(3) \leq c \cdot 3 \cdot \lg 3 = 3c \lg 3$
  $\Longrightarrow c \geq T(3)/3\lg 3$

ES. DETERMINARE UN LIMITE SUPERIORE PER $T(n)$, OVE

$$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$$

VERIFICHIAMO CHE $T(n) = O(n \lg n)$, CIOE'

$T(n) \leq c\, n \lg n$ PER QUALCHE $c>0$ E PER n SUFFICIENTEMENTE GRANDE

SUPPONIAMO CHE $T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq c \lfloor n/2 \rfloor \lg(\lfloor n/2 \rfloor)$

ALLORA:

$$\begin{aligned}
T(n) &\leq 2c\lfloor n/2 \rfloor \lg(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\leq c\,n \lg\left(\frac{n}{2}\right) + n \\
&= c\,n \lg n - c\,n \lg 2 + n \\
&= c\,n \lg n - c\,n + n \\
&\leq c\,n \lg n
\end{aligned}$$

PER $n \geqslant 2$, $c \geqslant \max\left(\frac{T(2)}{2}, \frac{T(3)}{3\lg 3}, 1\right)$

RAFFORZAMENTO DELL'IPOTESI INDUTTIVA

SI DIMOSTRI CHE LA RICORRENZA

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$$

HA SOLUZIONE $T(n) = O(n)$.

OCCORRE VERIFICARE CHE $T(n) \leq cn$, PER QUALCHE $c>0$, $\forall n \geq n_0$

SUPPONIAMO INDUTTIVAMENTE CHE $T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq c\lfloor n/2 \rfloor$, $T(\lceil n/2 \rceil) \leq c\lceil n/2 \rceil$.

ALLORA: $T(n) \leq c\lfloor n/2 \rfloor + c\lceil n/2 \rceil + 1 = cn + 1 \not\Rightarrow T(n) \leq cn$!

RAFFORZIAMO L'IPOTESI INDUTTIVA: $T(n) \leq cn - b$, CON $b \geq 0$.

SI HA:

$$T(n) \leq \left(c\lfloor n/2 \rfloor - b\right) + \left(c\lceil n/2 \rceil - b\right) + 1 = cn - 2b + 1 \leq cn - b$$

PER $b \geq 1$, $c \geq T(1) + b$, $n \geq 1$.

ATTENZIONE AGLI ERRORI!

DATA $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$, CERCHIAMO DI DIMOSTRARE CHE $T(n) = O(n)$ (FALSO!)

SUPPONIAMO PER INDUZIONE CHE $T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq c \lfloor n/2 \rfloor$.

ALLORA

$$T(n) \leq 2c \lfloor n/2 \rfloor + n \leq cn + n = (c+1)n = O(n)$$

ERRORE!

OCCORREREBBE INFATTI DIMOSTRARE CHE $T(n) \leq cn$, CON LA MEDESIMA COSTANTE c.

CAMBIAMENTO DI VARIABILI

$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \lg n$$

$$\Rightarrow \quad T(n) = 2T(n^{\frac{1}{2}}) + \lg n$$

$$\Rightarrow \quad T(2^{\lg n}) = 2T(2^{\lg n/2}) + \lg n$$

PONIAMO $S(m) = T(2^m)$.

$$\Rightarrow \quad S(\lg n) = 2S\left(\frac{\lg n}{2}\right) + \lg n$$

SI CONSIDERI LA RICORRENZA: $S(m) = 2S\left(\frac{m}{2}\right) + m$

ESSA HA SOLUZIONE $S(m) = \Theta(m \lg m)$, DA CUI

$$S(\lg n) = \Theta(\lg n \lg\lg n).$$

PERTANTO $T(n) = T(2^{\lg n}) = S(\lg n) = \Theta(\lg n \lg\lg n)$,

ESERCIZI

- RISOLVERE LE SEGUENTI EQUAZIONI DI RICORRENZA:

- $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(1)$
- $T(n) = 2 \cdot T(\sqrt{n}) + O(1)$
- $T(n) = 4 \cdot T(\sqrt{n}) + O(1)$

METODO ITERATIVO

- CONSISTE NELL'ESPANDERE LA RICORRENZA SINO AD ESPRIMERE LA FUNZIONE IN TERMINI DI n E DELLE CONDIZIONI INIZIALI

ES. $T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + n$

$$T(n) = n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor)$$
$$= n + 3\left(\lfloor n/4 \rfloor + 3T\left(\lfloor \tfrac{n}{4^2} \rfloor\right)\right)$$
$$= n + 3\left(\lfloor n/4 \rfloor + 3\left(\lfloor \tfrac{n}{4^2} \rfloor + 3T\left(\lfloor \tfrac{n}{4^3} \rfloor\right)\right)\right)$$
$$= n + 3\lfloor \tfrac{n}{4} \rfloor + 3^2\lfloor \tfrac{n}{4^2} \rfloor + 3^3 T\left(\lfloor \tfrac{n}{4^3} \rfloor\right)$$

...

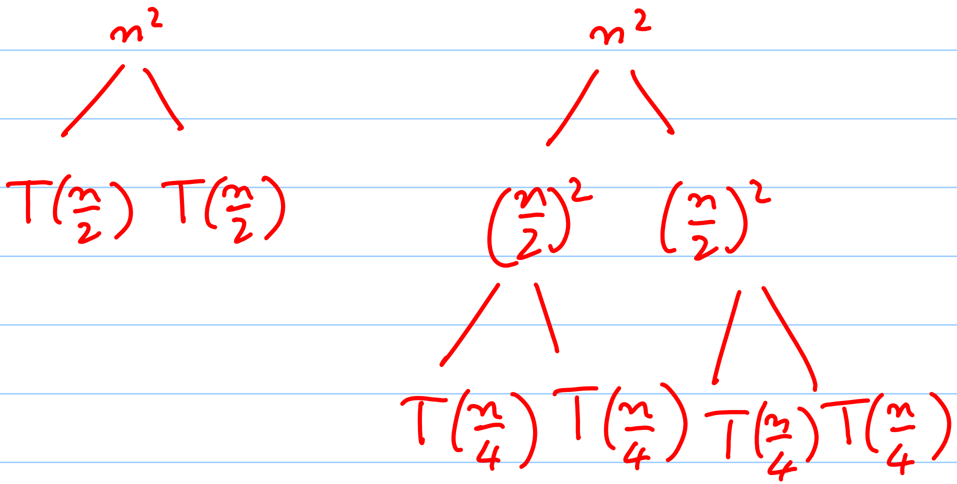
$$\leq n + \frac{3}{4}n + \left(\frac{3}{4}\right)^2 n + \left(\frac{3}{4}\right)^3 n + \dots + 3^{\log_4 n}\Theta(1)$$
$$\leq n \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^i + \Theta\left(n^{\log_4 3}\right)$$
$$= 4n + \Theta\left(n^{\log_4 3}\right) = O(n)$$

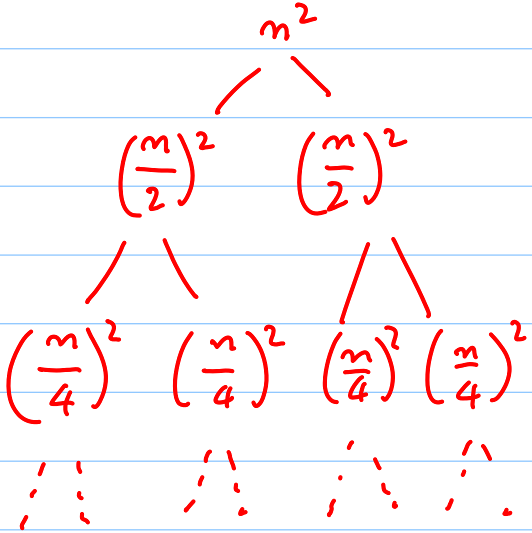
ALBERI DI RICORSIONE

- SONO PARTICOLARMENTE UTILI NELL'APPLICAZIONE DEL METODO ITERATIVO

$$T(n) = 2T(n/2) + n^2 = \Omega(n^2)$$

$T(n)$





$$n^2$$

$$\frac{1}{2}n^2$$

$$\frac{1}{4}n^2$$

$$\frac{1}{8}n^2$$

$$\vdots$$

$\lg n$

$$n^2 \sum_{i=0}^{\lg n} \frac{1}{2^i} = \Theta(n^2)$$

$\boxed{\text{SIN QUI}}$

Es.

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n$$

$$T\left(\overset{2n/3}{\bullet}\right) = \overset{2n/3}{\bullet} + T\left(\frac{1}{3}\overset{2n/3}{\bullet}\right) + T\left(\frac{2}{3}\overset{2n/3}{\bullet}\right)$$

$T(n)$

n

$T\left(\frac{n}{3}\right) \quad T\left(\frac{2n}{3}\right)$

n

$\frac{n}{3} \quad \frac{2n}{3}$

$T\left(\frac{n}{9}\right) \quad T\left(\frac{2n}{9}\right) \quad T\left(\frac{2n}{9}\right) \quad T\left(\frac{4n}{9}\right)$

$\lfloor \log_3 n \rfloor < \lfloor \log_{3/2} n \rfloor$

$n \longrightarrow n$

$\frac{n}{3} \quad \frac{2n}{3} \longrightarrow n$

$\lfloor \log_3 n \rfloor$

$\frac{n}{9} \quad \frac{2n}{9} \quad \frac{2n}{9} \quad \frac{4n}{9} \longrightarrow n$

$\log_{3/2} n$

$$n \log_{3/2} n = \Theta(n \log n)$$

$$n \log_3 n \le T(n) \le n \log_{3/2} n = n \cdot \log_3 n \cdot \log_{3/2} 3$$
$$< 2.71 \cdot n \log_3 n$$

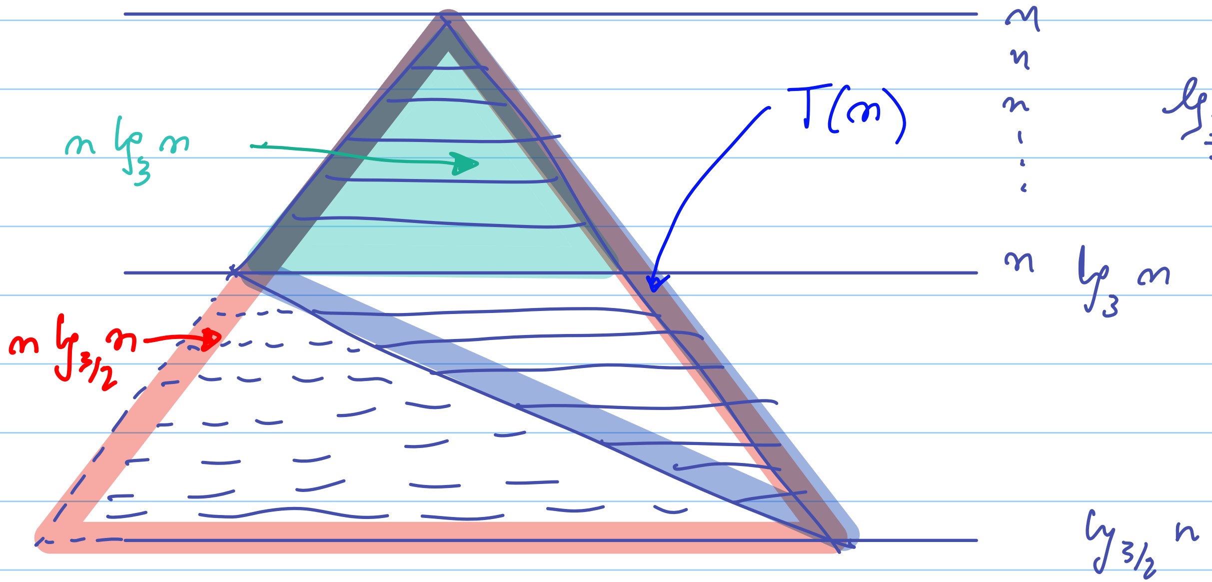
ESERCIZI

4.3-1

Show that the solution of $T(n) = T(n-1) + n$ is $O(n^2)$.

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(n \log_3 n)$$
$$= \Theta(n \log n)$$

- RISOLVERE L'EQUAZIONE $T(n) = T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1$



$$\log_{3/2} 3 = \frac{\log 3}{\log 3/2} \simeq 2.71$$

RICORRENZE DELLA FORMA $T(n) = a\,T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

TEOREMA "MASTER": SIANO $a > 0$, $b > 1$ COSTANTI E SIA $f(n)$ UNA FUNZIONE ASSEGNATA.

SIA INOLTRE $T(n)$ TALE CHE $T(n) = a\,T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$,

1. SE $f(n) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ PER QUALCHE $\varepsilon > 0$,
   ALLORA $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

   $\Theta(f(n) \cdot \lg n)$

2. SE $f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$, ALLORA $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \lg n\right)$

3. SE $f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$ PER QUALCHE $\varepsilon > 0$ E SE

   CONDIZIONE DI REGOLARITA'

   $a\,f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c\,f(n)$ PER QUALCHE $c < 1$ E PER VALORI DI n SUFFICIENTEMENTE GRANDI,

   ALLORA $T(n) = \Theta(f(n))$,

GENERALIZZAZIONE

IL CASO 2 PUÒ ESSERE GENERALIZZATO:

2'. SE $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \lg^k n)$, CON $k \geq 0$,

ALLORA $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \lg^{k+1} n) = \Theta(f(n) \cdot \lg n)$

$n^{0} \stackrel{?}{=} O(n^{0-\varepsilon})$ $n^{0} \stackrel{?}{=} \Theta(n^{0})$ $n^{0} \stackrel{?}{=} \Omega(n^{0+\varepsilon})$

ESEMPI

- $T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$

$a = 9$, $b = 3$, $n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = n^2$

$f(n) = n = O\left(n^{\log_3 9 - \varepsilon}\right) \quad (\forall\, \varepsilon \leq 1) \xRightarrow{\text{CASO 1}} T(n) = \Theta(n^2)$

$a = 1$, $b = \frac{3}{2}$, $\log_{3/2} 1 = 0$

- $T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1$

$a = 1$, $b = \frac{3}{2}$, $n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0$

$f(n) = 1 = \Theta(n^0) \xRightarrow{\text{CASO 2}} T(n) = \boxed{\Theta(\lg n)}$

$\stackrel{?}{=} O(n^{\quad -\varepsilon}) \qquad \stackrel{?}{=} \Theta(n^{\quad}) \qquad \stackrel{?}{=} \Omega(n^{\quad +\varepsilon})$

- $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n \lg n$

$a=3$, $b=4$, $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3}$

$f(n) = n \lg n = \Omega\left(n^{\log_4 3 + \varepsilon}\right)$ $(\forall\ \varepsilon \leq 1 - \log_4 3)$

INOLTRE: $a f\left(\frac{n}{b}\right) = 3 \cdot \frac{n}{4} \lg \frac{n}{4} \leq \frac{3}{4} n \lg n$ $\left(c = \frac{3}{4}\right)$

$= \frac{3}{4} f(n)$

CASO 3 $\Longrightarrow$ $T(n) = \Theta(n \lg n)$

$f\left(\frac{n}{4}\right) = \frac{n}{4} \cdot \lg \frac{n}{4}$

- $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \lg n$

$a=2$, $b=2$, $n^{\log_2 2} = n^1$

$f(n) = n \lg n = \Theta(n \cdot \lg n)$ $\overset{\text{CASO 2'}}{\Longrightarrow}$ $T(n) = \Theta(n \lg^2 n)$

$(\forall \varepsilon)$ $0 < \varepsilon \leq \lg_2 7 - 2$

$n^2 \overset{?}{=} O(n^{\log_2 7 - \varepsilon})$ $n^2 \overset{?}{=} \Theta(n^{\log_2 7})$ $n^2 \overset{?}{=} \Omega(n^{\log_2 7 + \varepsilon})$

RISOLVERE LE SEGUENTI RICORRENZE:

- $T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2)$
- $T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2)$

a. $T(n) = 2T(n/4) + 1$.

b. $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$.

c. $T(n) = 2T(n/4) + n$.

d. $T(n) = 2T(n/4) + n^2$.

e. $T(n) = 2T(n/4) + n^3$.

COROLLARIO: SIANO $a > 0$, $b > 1$, $k \geq 0$, $h \geq 0$ COSTANTI, SIA INOLTRE $T(n)$ TALE CHE $T(n) = a\,T\left(\frac{n}{b}\right) + n^k (\lg n)^h$.

$$T(n) = \begin{cases} \Theta\left(n^{\log_b a}\right) & \text{SE } \log_b a > k \\ \Theta\left(n^k (\lg n)^{h+1}\right) & \text{SE } \log_b a = k \\ \Theta\left(n^k (\lg n)^h\right) & \text{SE } 0 \leq \log_b a < k \end{cases}$$

DIM. - SE $\log_b a > k$, ALLORA $n^k (\lg n)^h = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ PER QUALCHE $\varepsilon > 0$, E QUINDI $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$,

- SE $\log_b a = k$, ALLORA $n^k (\lg n)^h = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot (\lg n)^h\right)$ E QUINDI $T(n) = \Theta\left(n^k (\lg n)^{h+1}\right)$.

%

- INFINE, SE $0 \le \log_b a < k$, ALLORA $n^k (\lg n)^h = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$ PER QUALCHE $\varepsilon > 0$.

INOLTRE VALE LA CONDIZIONE DI REGOLARITA'. INFATTI:

$$a\left(\frac{n}{b}\right)^k \left(\lg \frac{n}{b}\right)^h < a \frac{n^k}{b^k} (\lg n)^h$$

$$= \frac{a}{b^k} n^k (\lg n)^h$$

$$\le c\, n^k (\lg n)^h$$

(PER OGNI COSTANTE c TALE CHE $\frac{a}{b^k} \le c < 1$; TALI COSTANTI ESISTONO DATO CHE $\log_b a < k \to a < b^k \to \frac{a}{b^k} < 1$)

PERTANTO IN QUESTO CASO SI HA $T(n) = \Theta\left(n^k (\lg n)^h\right)$. ■

ESERCIZIO

Si enuncino il Teorema Master ed il suo Corollorio, quindi si risolva la seguente equazione di ricorrenza al variare del parametro $\alpha \geq 1$:

$$T(n) = \alpha \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \log^2 n \,. \qquad (*)$$

Per quali valori di α si ha: (a) $T(n) = \mathcal{O}(n^3)$; (b) $T(n) = \Omega(n^2 \log^3 n)$; (c) $T(n) = \Omega(n^2 \log^4 n)$?

- PER COMINCIARE, RISOLVIAMO L'EQUAZIONE DI RICORRENZA PARAMETRICA $(*)$.

$$\lg \alpha \gtreqless 2 \iff \alpha \gtreqless 4$$

- APPLICANDO DIRETTAMENTE IL COROLLARIO, SI HA:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta\left(n^{\lg \alpha}\right) & \text{SE } \lg \alpha > 2 \iff \alpha > 4 \\ \Theta\left(n^2 (\lg n)^3\right) & \text{SE } \lg \alpha = 2 \iff \alpha = 4 \\ \Theta\left(n^2 (\lg n)^2\right) & \text{SE } 0 \leq \lg \alpha < 2 \iff 1 \leq \alpha < 4 \end{cases}$$

$$T(n) = \alpha \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \log^2 n \,.$$

POICHE'

$$\lg \alpha > 2 \longleftrightarrow \alpha > 4$$

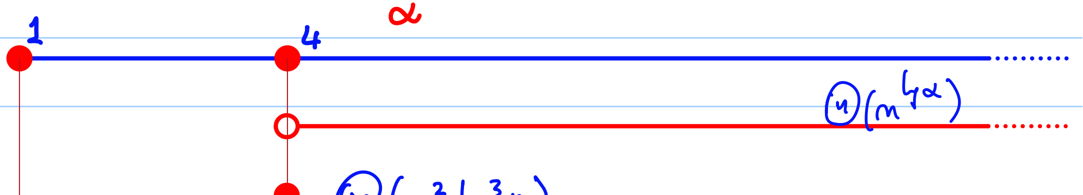
$$\lg \alpha = 2 \longleftrightarrow \alpha = 4$$

$$0 \leq \lg \alpha < 2 \longleftrightarrow 1 \leq \alpha < 4$$

LA SOLUZIONE TROVATA PUÒ ESSERE RISCRITTA COSÌ:

8

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\lg \alpha}) & \text{SE } \alpha > 4 \\ \Theta(n^2 (\lg n)^3) & \text{SE } \alpha = 4 \\ \Theta(n^2 (\lg n)^2) & \text{SE } 1 \leq \alpha < 4 \end{cases}$$



$\Theta(n^2 \lg^2 n)$ $\Theta(n^2 \lg^2 n)$

RISPONDIAMO ADESSO AI QUESITI (a), (b) E (c)

(a) Per quali valori di α si ha: $T(n) = \mathcal{O}(n^3)$?

<u>CASO</u> $\alpha > 4$

SI HA $n^{\lg \alpha} = \mathcal{O}(n^3) \longleftrightarrow \lg \alpha \leq 3 \longleftrightarrow \alpha \leq 8$

$\Rightarrow$ PER $\boxed{4 < \alpha \leq 8}$ SI HA $T(n) = \mathcal{O}(n^3)$

<u>CASO</u> $\alpha = 4$

SI HA $n^2 (\lg n)^3 = \mathcal{O}(n^3)$

$\Rightarrow$ PER $\boxed{\alpha = 4}$ SI HA $T(n) = \mathcal{O}(n^3)$

<u>CASO</u> $1 \leq \alpha < 4$

SI HA $n^2 (\lg n)^2 = \mathcal{O}(n^3)$ $\Rightarrow$ PER $\boxed{1 \leq \alpha < 4}$ SI HA $T(n) = \mathcal{O}(n^3)$

PERTANTO LA SOLUZIONE E': $\boxed{1 \leq \alpha \leq 8}$

(b) Per quali valori di α si ha: $T(n) = \Omega(n^2 \log^3 n)$?

CASO $\alpha > 4$

SI HA $n^{\lg \alpha} = \Omega(n^2 \lg^3 n) \longleftrightarrow \lg \alpha > 2 \longleftrightarrow \alpha > 4$

$\Rightarrow$ PER $\boxed{\alpha > 4}$ SI HA $T(n) = \Omega(n^2 \lg^3 n)$

CASO $\alpha = 4$

SI HA $n^2 (\lg n)^3 = \Omega(n^2 \lg^3 n)$

$\Rightarrow$ PER $\boxed{\alpha = 4}$ SI HA $T(n) = \Omega(n^2 \lg^3 n)$

CASO $1 \leq \alpha < 4$

SI HA $n^2 (\lg n)^2 \neq \Omega(n^2 \lg^3 n)$

PERTANTO LA SOLUZIONE E': $\boxed{\alpha \geq 4}$

(c) Per quali valori di α si ha: $T(n) = \Omega(n^2 \log^4 n)$?

CASO $\alpha > 4$

SI HA $n^{\lg \alpha} = \Omega(n^2 \lg^4 n) \iff \lg \alpha > 2 \iff \alpha > 4$

$\Rightarrow$ PER $\boxed{\alpha > 4}$ SI HA $T(n) = \Omega(n^2 \lg^4 n)$

CASO $\alpha = 4$

SI HA $n^2 (\lg n)^3 \neq \Omega(n^2 \lg^4 n)$

CASO $1 \leq \alpha < 4$

SI HA $n^2 (\lg n)^2 \neq \Omega(n^2 \lg^4 n)$

PERTANTO LA SOLUZIONE E': $\boxed{\alpha > 4}$ ■

METODO DI AKRA-BAZZI (CASO PARTICOLARE)

SIA $T(n) = g(n) + \sum_{i=1}^{k} a_i T\left(\frac{n}{b_i} + h_i(n)\right)$, PER $n \geq n_0$,

DOVE

- $a_i > 0$, $b_i > 1$ COSTANTI $(i = 1, 2, \ldots, k)$
- $|g(n)| = \Theta(n^c)$
- $|h_i(n)| = O(n/(\lg n)^2)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$

$\log_b a$

SIA INOLTRE p TALE CHE $\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i^p} = 1$.

$p = \log_{\vec{b}} \vec{a}$

ALLORA:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^p) & \text{SE} \quad c < p \\ \Theta(n^p \lg n) & \text{SE} \quad c = p \\ \Theta(n^c) & \text{SE} \quad c > p \end{cases}$$

PONIAMO $\vec{a} := (a_1, \ldots, a_k)$, $\vec{b} := (b_1, \ldots, b_k)$

$$\log_{\vec b} \vec a := p \in \mathbb{R}^+ \text{ TALE CHE } \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i^p} = 1$$

ESEMPI

- $T(n) = n^2 + \frac{7}{4} T\left(\left\lfloor \frac{1}{2} n \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{3}{4} n \right\rceil\right)$ $(n \geq 3)$

$\frac{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x = 1$ HA SOLUZIONE $x = 2$

DUNQUE: $p = 2$, $c = 2$ $\longrightarrow$ $T(n) = \Theta(n^2 \log n)$

$$-\ T(n) = T\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + T\left(\frac{7n}{10} + 2\right) + \Theta(n)$$

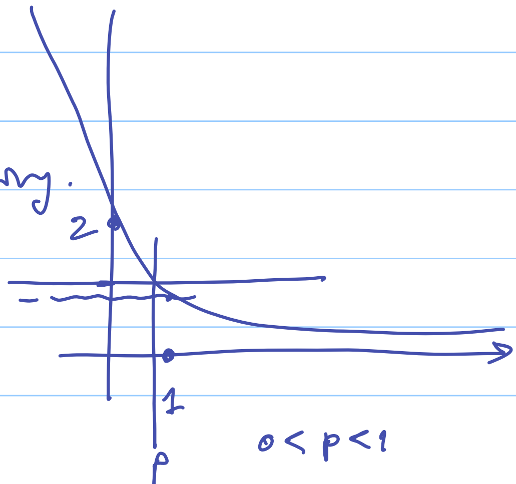
$$\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{7}{10}\right)^x = 1 \qquad x = 1 \longrightarrow \frac{1}{5} + \frac{7}{10} = \frac{2+7}{10} = \frac{9}{10} < 1$$

QUINDI LA SOLUZIONE p DI $\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{7}{10}\right)^x = 1$ E' < 1.

PERTANTO $T(n) = \Theta(n)$.

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x \downarrow \qquad \left(\frac{7}{10}\right)^x \downarrow$$

decreasing.



$0 < p < 1$