DIMOSTRAZIONE E DIFFERENZA TRA KNAPSACK (0,1) E FRACTIONAL KNAPSACK

KNAPSACK (0,1) GODE DELLA SOTTOSTRUTTURA OTTIMA

Sie $(x_1^*, \dots, x_n^*) \in \{0,1\}^n$ une soluzione ottime el probleme, allore:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* w_i \leq W \quad e \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^* v_i \text{ è messimo}$$

Consideriamo il sottoprobleme in cui dobbiamo trovare un valore ottimo per:

$\{x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n\}$ Allore se

$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} x_i^* w_i \leq W - x_j^* w_j$ non fosse ottime esisterebbe une soluzione tale che:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} x'_i w_i \leq W - x_j^* w_j \quad e \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} x'_i v_i > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} x_i^* v_i$$

Ma allore considerando il probleme iniziale si andrebbe a creare un assurdo contraddicendo l'ipotesi che $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ è une soluzione ottime

KNAPSACK GODE DELLA SOTTOSTRUTTURA OTTIMA

FRACTIONAL KNAPSACK a differenza di KNAPSACK (0,1) gode sia delle sottostrutture ottime sia delle proprietà di scelta greedy

Possiamo calcolare il valore per unità di peso

$$K_i = \frac{v_i}{w_i} \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Possiamo prendere a ogni scelta la frazione più grande possibile del K_i più grande possibile

Supponiamo: $K_1 \geq K_2 \geq \dots \geq K_n$

$S_1 = \quad W = q_1 + W_2$

$S_2 = \quad W_2 = q_2 + W_3$

e così via fino $S_n = \quad W_n = q_n + W_{n+1}$

quindi:

$$x_i = \frac{q_i}{w_i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$0 \leq q_i \leq w_i$

L'algoritmo impiega per ordinare e fare la scelta $O(n \log n)$

DIMOSTRIAMO LA PROPRIETÀ DI SCELTA GREEDY

Sia S_m un sottoproblema con limite di peso W_m

Supponiamo $K_m \geq \dots \geq K_n$

Consideriamo la soluzione ottima $\{q_m, \dots, q_n\}$

$\{x_m, \ldots, x_n\}$

Se K_m fa parte della soluzione ottima abbiamo finito

Supponiamo che non faccia parte della soluzione

Allora: $\sum_{i=m+1}^{n} q_i \leq W_m$ e $\sum_{i=m+1}^{n} q_i \cdot K_i$ è massimo

posso sostituire K_{m+1} con K_m

$$\sum_{i=m}^{n} q_i^* K_i = q_m^* K_m + 0 + \sum_{i=m+2}^{n} q_i K_i > \sum_{i=m+1}^{n} q_i K_i$$

ne deriva una contraddizione

Quindi la scelta greedy fa necessariamente parte della soluzione ottima