

NOTAZIONI ASINTOTICHE

- USEREMO LE SEGUENTI NOTAZIONI ASINTOTICHE PER CARATTERIZZARE IL TASSO DI CRESCITA DEL TEMPO DI ESECUZIONE DI UN DATO ALGORITMO

- SIA $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, OVE $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\Theta(g(n)) = \{f(n) : \text{ESISTONO } c_1, c_2 > 0, n_0 \in \mathbb{N} \text{ TALI CHE}$
 $0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \text{ PER OGNI } n \geq n_0\}$

$O(g(n)) = \{f(n) : \text{ESISTE } c > 0, n_0 \in \mathbb{N} \text{ TALE CHE}$
 $0 \leq f(n) \leq c g(n), \text{ PER OGNI } n \geq n_0\}$

$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \text{ESISTE } c > 0, n_0 \in \mathbb{N} \text{ TALE CHE}$
 $0 \leq c g(n) \leq f(n), \text{ PER OGNI } n \geq n_0\}$

- SCRIVIAMO $f(n) = \Theta(g(n))$, $f(n) = O(g(n))$, $f(n) = \Omega(g(n))$
PER INTENDERE, RISPETTIVAMENTE ,

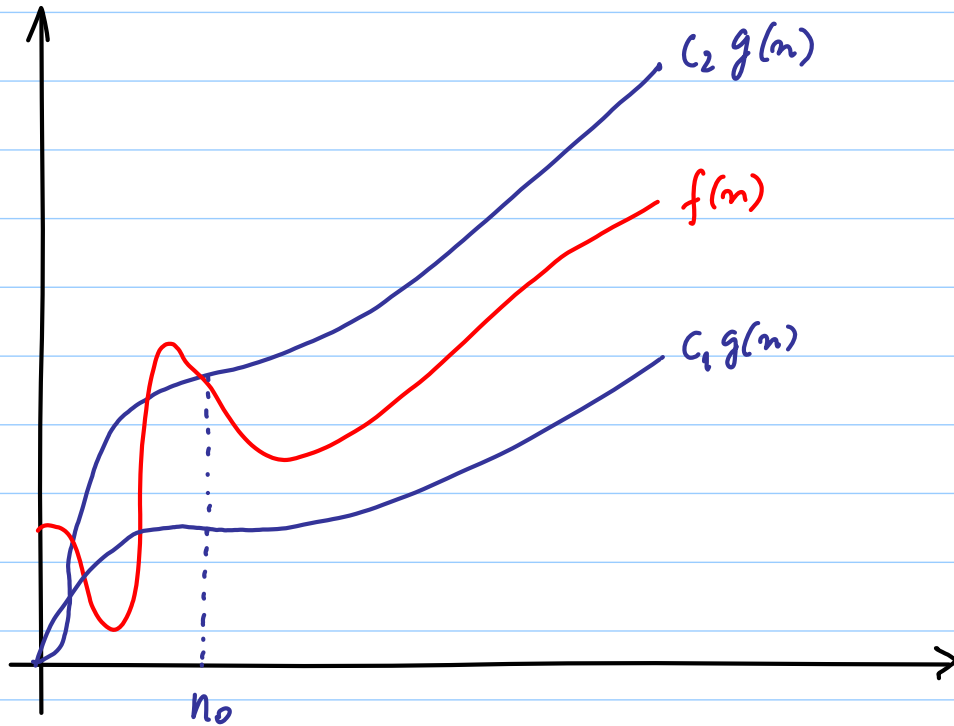
$$f(n) \in \Theta(g(n)) , f(n) \in O(g(n)) , f(n) \in \Omega(g(n))$$

- SE $f(n) = \Theta(g(n))$, ALLORA $g(n)$ E' UN LIMITE
ASINTOTICAMENTE STRETTO PER $f(n)$

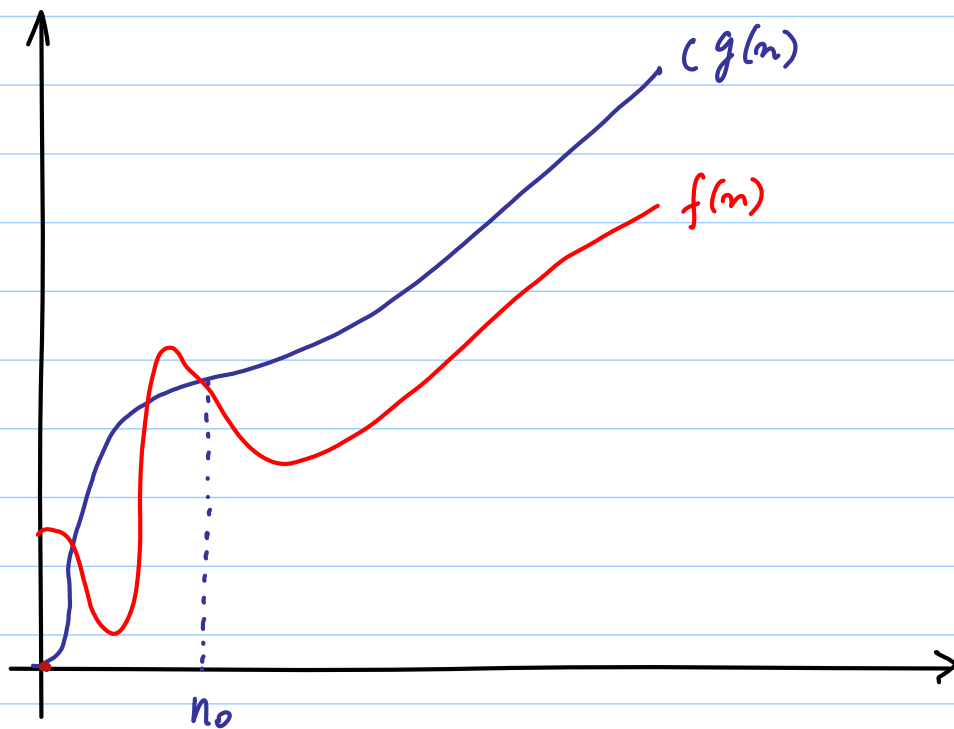
- SE $f(n) = O(g(n))$, ALLORA $g(n)$ E' UN LIMITE
ASINTOTICO SUPERIORE PER $f(n)$

- SE $f(n) = \Omega(g(n))$, ALLORA $g(n)$ E' UN LIMITE
ASINTOTICO INFERIORE PER $f(n)$

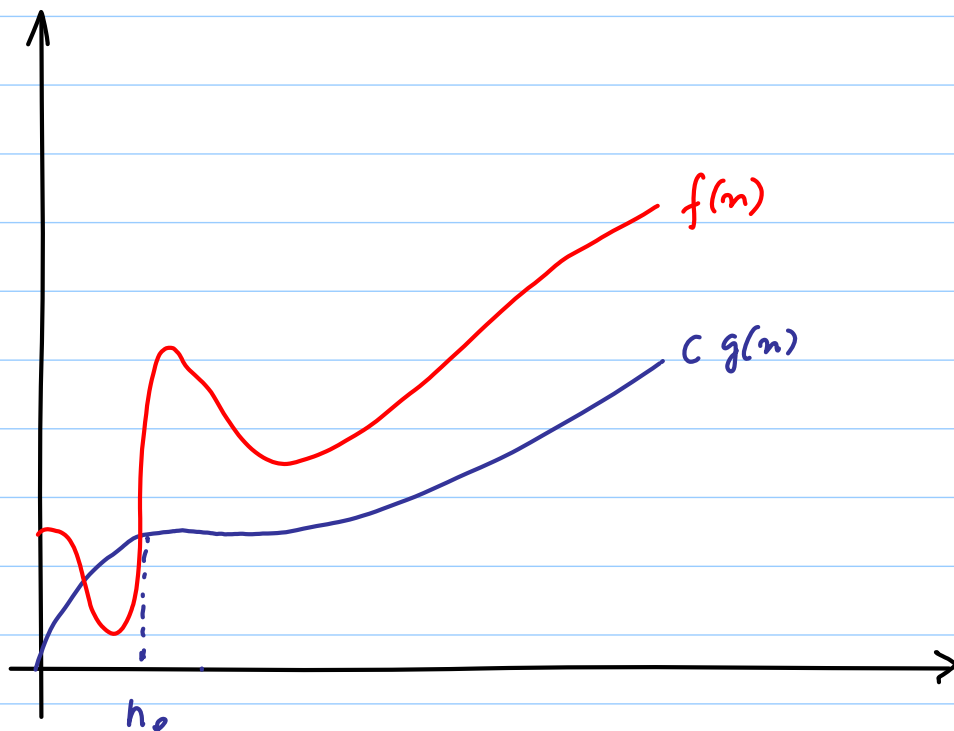
RAPPRESENTAZIONI GRAFICHE



$$f(n) = \oplus (g(n))$$



$$f(n) = O(g(n))$$



$$f(n) = \Omega(g(n))$$

ES. $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$

OCCORRE DETERMINARE $c_1, c_2 > 0$ ED $n_0 \in \mathbb{N}$ TALI CHE

$$c_1 n^2 \leq \frac{1}{2} n^2 - 3n \leq c_2 n^2, \text{ PER OGNI } n \geq n_0$$

OVVIAMENTE

$$\frac{1}{2} n^2 - 3n \leq \frac{1}{2} n^2, \text{ PER OGNI } n \geq 0.$$

PER QUANTO RIGUARDA LA DISEGUAGLIANZA $c_1 n^2 \leq \frac{1}{2} n^2 - 3n$,

PER $n \geq 1$ ESSA È EQUIVALENTE A $c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n}$.

OSSERVIAMO CHE LA FUNZIONE $\frac{1}{2} - \frac{3}{n}$ È CRESCENTE
E CHE VALE

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{n} > 0 \iff \frac{1}{2} > \frac{3}{n} \iff n > 6 \iff n \geq 7.$$

PERTANTO, PER OGNI $n \geq 7$ SI HA

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{n} \geq \frac{1}{2} - \frac{3}{7} = \frac{1}{14}$$

È QUINDI

$$\frac{1}{14} n^2 \leq \frac{1}{2} n^2 - 3n.$$

IN CONCLUSIONE ABBIAMO

$$\frac{1}{14} n^2 \leq \frac{1}{2} n^2 - 3n \leq \frac{1}{2} n^2, \text{ PER OGNI } n \geq 7,$$

DA CUI $\frac{1}{2} n^2 - 3n = \Theta(n^2)$.

Es. $6h^3 \neq O(n^2)$

- SE FOSSE $6h^3 = O(n^2)$, ALLORA ESISTEREBBANO $C_2 > 0$
ED $n_0 \in \mathbb{N}$ TALI CHE $6h^3 \leq C_2 n^2$, PER $n \geq n_0$
- DIVIDENDO PER n^2 , $6h \leq C_2$, PER $n \geq n_0$, ASSURDO.
- ALLA STESSA MANIERA, SI VERIFICA CHE $6h^3 \neq O(n^2)$

LEMMA SIANO $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \in g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^+$.

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a > 0 \quad \Rightarrow \quad f(n) = \Theta(g(n))$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \wedge f(n) \neq \Omega(g(n))$$

$$(c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty \quad \Rightarrow \quad f(n) = \Omega(g(n)) \wedge f(n) \neq \mathcal{O}(g(n))$$

DIM (a) SIA $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a > 0 \in$ SIA $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$.

ESISTE $n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE, $\forall n \geq n_0$,

$$\left| \frac{f(n)}{g(n)} - a \right| < \frac{a}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{a}{2} < \frac{f(n)}{g(n)} - a < \frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a}{2} < \frac{f(n)}{g(n)} < \frac{3}{2}a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{2}g(n) < f(n) < \frac{3}{2}ag(n)$$

DA CUI $f(n) = \Theta(g(n))$.

LEMMA SIANO $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0^+$ E $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^+$ TAL
 ESISTA IL $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$.

ALLORA:

$$(a) \quad f(n) = \Theta(g(n)) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \in \mathbb{R}^+$$

$$(b) \quad f(n) = O(g(n)) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \in \mathbb{R}_0^+$$

$$(c) \quad f(n) = \Omega(g(n)) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0.$$

DIM. (a) SIA $f(n) = \Theta(g(n))$. ALLORA

$$(\exists c_1, c_2 > 0, m_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq m_0) \quad c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

$$\xrightarrow{n \geq m_0} 0 < c_1 \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq c_2 \xrightarrow{n \geq m_0} c_1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leq c_2.$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \in \mathbb{R}^+.$$

VICEVERSA, SIA $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a \in \mathbb{R}^+$ E SIA $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$.

ESISTE $m_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE $(\forall n \geq m_0) \left| \frac{f(n)}{g(n)} - a \right| < \frac{a}{2}$.

QUINDI, $\forall n \geq m_0$,

$$-\frac{a}{2} < \frac{f(n)}{g(n)} - a < \frac{a}{2} \iff \frac{a}{2} < \frac{f(n)}{g(n)} < \frac{3}{2}a$$

$$\iff \frac{a}{2} g(n) < f(n) < \frac{3}{2} a g(n)$$

DA CUI $f(n) = \Theta(g(n))$.

(c) SIA $f(n) = \Omega(g(n))$. ALLORA

$$(\exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) \quad c g(n) \leq f(n)$$

$$\xrightarrow{n \geq n_0} \quad c \leq \frac{f(n)}{g(n)} \quad \xrightarrow{n \geq n_0} \quad c \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}.$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0.$$

VICEVERSA, SIA $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$.

SE $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a > 0$, PER $\varepsilon = \frac{a}{2}$ SI HA:

ESISTE $n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE $(\forall n \geq n_0) \left| \frac{f(n)}{g(n)} - a \right| < \frac{a}{2}$

QUINDI, $\forall n \geq n_0$,

$$-\frac{a}{2} < \frac{f(n)}{g(n)} - a \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}a < \frac{f(n)}{g(n)}$$

$$\longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}g(n) < f(n)$$

DA CUI $f(n) = \Omega(g(n))$. ■

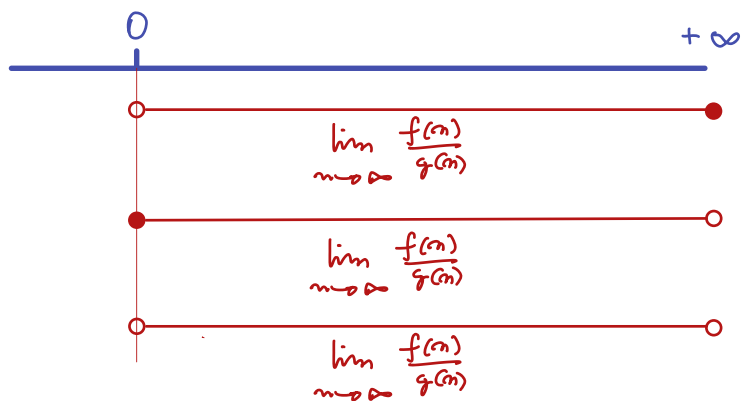
COROLLARIO SIANO $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0^+$ E $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^+$ TAL
 ESISTA IL $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$.

ALLORA:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \in \mathbb{R}^+ \iff f(n) = \Theta(g(n))$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \iff f(n) = O(g(n)) \wedge f(n) \neq \Omega(g(n))$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty \iff f(n) = \Omega(g(n)) \wedge f(n) \neq O(g(n))$$



$$f(n) = \Omega(g(n))$$

$$f(n) = O(g(n))$$

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

$$f(n) \neq \Omega(g(n))$$

$$\boxed{\begin{matrix} c > 0 \\ c \cdot g(n) \leq f(n) \end{matrix}}$$

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

$$n \geq n_0$$

$$\cancel{0 < c \leq \frac{f(n)}{g(n)}}$$

$$\lim \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

$$\cancel{-\frac{f(n)}{g(n)} < \varepsilon}$$

$$f(n) = \frac{n^2}{2} - 3n$$

$$g(n) = n^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{2} - 3n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{n} \right) = \left(\frac{1}{2} \right) > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\frac{n^2}{2} - 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\textcircled{1}}{\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{n} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 > 0$$

$\nearrow 1$
 $\searrow \frac{1}{2}$

$$\frac{n^2}{2} - 3n = \textcircled{1} (n^2)$$

$$n^2 = \textcircled{2} \left(\frac{n^2}{2} - 3n \right) =$$

f luccio 38 @ gmail. com

ES. SIA $P(n) = \sum_{i=0}^d a_i n^i$ UN POLINOMIO DI GRADO d , CON $a_d > 0$

ALLORA $P(n) = \Theta(n^d)$.

INOLTRE $P(n) = O(n^\alpha)$, PER OGNI $\alpha \geq d$,

$P(n) = \Omega(n^\beta)$, PER OGNI $0 \leq \beta \leq d$

PER IL COROLLARIO PRECEDENTE E' SUFFICIENTE OSSERVARE CHE

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^d} = a_d > 0$$

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^\alpha} = 0 \geq 0, \text{ PER OGNI } \alpha \geq d$$

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^\beta} > 0, \text{ PER OGNI } 0 \leq \beta \leq d$$

CON LEGGERO ABUSO DI NOTAZIONE, SCRIVEREMO

$\Theta(1)$ AL POSTO DI $\Theta(n^0)$.

PER OGNI COSTANTE $c > 0$ SI HA: $c = \Theta(1)$

PROPRIETÀ

- $\Theta(g(n)) \subseteq O(g(n))$
- $\Theta(g(n)) \subseteq \Omega(g(n))$
- $\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

NOTAZIONE $o(g(n))$

$$o(g(n)) = \left\{ f(n) : \text{PER OGNI } c > 0 \text{ ESISTE } n_0 > 0 \text{ TALE CHE} \right. \\ \left. 0 \leq f(n) < c g(n), \text{ PER OGNI } n \geq n_0 \right\} \\ \subseteq O(g(n))$$

- SI OSSERVA CHE $n^2 \neq o(n^2)$

$$g(n) \neq o(g(n))$$

PROPRIETA'

PER $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^+$ SI HA:

$$f(n) = o(g(n)) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

NOTAZIONE $\omega(g(n))$

$$\omega(g(n)) = \left\{ f(n) : \text{PER OGNI } c > 0 \text{ ESISTE } n_0 > 0 \text{ TALE CHE} \right. \\ \left. 0 \leq c g(n) < f(n), \text{ PER OGNI } n \geq n_0 \right\}$$

- SI OSSERVA CHE $n^2 \notin \omega(n^2)$

PROPRIETÀ'

PER $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^+$ SI HA:

$$f(n) = \omega(g(n)) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$$

FIN QUI (A-L) 12/10/2021

ALTRO USO DELLE NOTAZIONI ASINTOTICHE

- $h(n) = k(n) + \mathcal{O}(g(n))$ SIGNIFICA

ESISTE $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ TALE CHE $h(n) = k(n) + f(n)$

- $h(n) + \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(k(n))$ SIGNIFICA

PER OGNI $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, $h(n) + f(n) = \mathcal{O}(k(n))$

ESEMPI

$$n^2 + 3n = n^2 + \mathcal{O}(n)$$

$$3n^2 + \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n^2)$$

RELAZIONI TRA LE VARIE NOTAZIONI

TRANSITIVITA'

$$f(n) = O(g(n)) \wedge g(n) = O(h(n)) \Rightarrow f(n) = O(h(n))$$

(ANCHE PER Ω, o, ω)

RIFLESSIVITA'

$$f(n) = O(f(n))$$

$$f(n) = \Omega(f(n))$$

$$f(n) = \Omega(f(n))$$

ANTI RIFLESSIVITA'

$$f(n) \neq o(f(n))$$

$$f(n) \neq \omega(f(n))$$

$$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = +\infty \Leftrightarrow g(n) = \omega(f(n))$$

SIMMETRIA

$$f(n) = \Theta(g(n)) \iff g(n) = \Theta(f(n))$$

SIMMETRIA TRASPOSTA

$$f(n) = O(g(n)) \iff g(n) = \Omega(f(n))$$

$$f(n) = o(g(n)) \iff g(n) = \omega(f(n))$$

- SI OSSERVI L'ANALOGIA TRA IL CONFRONTO ASINTOTICO DI DUE FUNZIONI f, g E IL CONFRONTO DI DUE NUMERI REALI a, b

$$0 \leq 1 + \sin n \leq 2$$

$$f(n) = O(g(n)) \quad \approx \quad a \leq b$$

$$f(n) = \Omega(g(n)) \quad \approx \quad a \geq b$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \quad \approx \quad a = b$$

$$f(n) = o(g(n)) \quad \approx \quad a < b$$

$$f(n) = \omega(g(n)) \quad \approx \quad a > b$$

- TUTTAVIA LA PROPRIETA' DI TRICOTOMIA NON E' VALIDA PER IL CONFRONTO ASINTOTICO :

$$f(n) = n$$

$$g(n) = n^{1 + \sin n}$$

$f(n)$ E $g(n)$ NON SONO

ASINTOTICAMENTE CONFRONTABILI

NOTAZIONI STANDARD E FUNZIONI COM

$$\lfloor x \rfloor = (\text{massimo intero} \leq x) \quad (\text{floor})$$

$$\lceil x \rceil = (\text{minimo intero} \geq x) \quad (\text{ceiling})$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x+1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall a, b \in \mathbb{N}^+$$

$$b \gg 10^{10000000000}$$

$$a = 1 + \varepsilon$$

$$\left\lceil \left\lceil \frac{n}{a} \right\rceil / b \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{ab} \right\rceil, \quad \left\lfloor \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor / b \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor$$

- $f(n)$ E' POLINOMIALMENTE LIMITATA SE

$$f(n) = O(n^k) \text{ , PER QUALCHE } k \geq 0$$

ESPOENZIALI

- POICHE' $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$, $\forall b \forall a > 1$

SI HA CHE $n^b = o(a^n)$

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$

- $e^x \geq 1 + x$

- $|x| \leq 1 \Rightarrow 1 + x \leq e^x \leq 1 + x + x^2$

- $e^x = 1 + x + O(x^2)$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

LOGARITMI

$$\lg n := \log_2 n \quad (\text{LOGARITMO BINARIO})$$

$$\ln n := \log_e n \quad (\text{LOGARITMO NATURALE})$$

$$|x| < 1 \Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$x > -1 \Rightarrow \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

- $f(n)$ E' POLYLOGARITMICAMENTE LIMITATA SE $f(n) = O(\lg^k n)$
PER QUALCHE k

$$- a > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg^b n}{n^a} = 0 \quad \text{E DUNQUE} \quad \lg^b n = o(n^a)$$

$$- \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} ; \quad \log_b a = \frac{1}{\log_a b} ; \quad a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

FATTORIALI

FORMULA DI APPROSSIMAZIONE DI STIRLING:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

- $n! = o(n^n)$
- $n! = \omega(2^n)$
- $\lg(n!) = \Theta(n \lg n)$
- $n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\alpha_n}$, con $\frac{1}{12n+1} < \alpha_n < \frac{1}{12n}$

SOMMATORIE

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} = \mathcal{O}(n^2)$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \mathcal{O}(n^3)$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \mathcal{O}(n^4)$$

$$\sum_{i=0}^n x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

$$|x| < 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$

$$H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \ln n + \mathcal{O}(1)$$