DIMOSTRAZIONE DI CORRETTEZZA DI DIJKSTRA

- L'algoritmo funziona solo in grafi che non presentano pesi negativi sugli archi
- Il tempo computazionale risulta inferiore a Bellman-Ford

L'algoritmo di Dijkstra eseguito su un grafo orientato $G=(V,E)$ su una funzione di peso $w: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ e su un vertice sorgente $s \in V$, termina con $u.d = \delta(s,u) \quad \forall\, u \in V$

DIMOSTRAZIONE

All'inizio di ogni iterazione del ciclo while si ha che

$v.d = \delta(s,v) \quad \forall\, v \in S$ l'algoritmo termina quando

$S = V$

La dimostrazione avviene per induzione sul numero di iterazioni

Ci sono due casi base:

- $|S| = 0 \iff S = \emptyset$ vero banalmente

- $|S| = 1 \iff S = \{s\} \iff s.d = 0 = \delta(s,s)$

IPOTESI INDUTTIVA

$|S| \geq 1$, $v.d = \delta(s,v)$ $\forall v \in S$

PASSO INDUTTIVO:

L'algoritmo adesso estrae il vertice $u \in V \setminus S$ e dobbiamo mostrare che $u.d = \delta(s,u)$

- Se non ci sono cammini da s a u allora $\delta(s,u) = \infty = d.u$

- Se esiste un cammino da s a u, allora sia y il primo vertice di un cammino minimo da s a u tale che $y \notin S$ e sia x il predecessore di y su tale cammino ($x \in S$)

Siccome y appare prima di u lungo il cammino e i pesi non sono negativi si avrà:

$$\delta(s,y) \leq \delta(s,u)$$

poichè EXTRACT-MIN restituisce u in virtù del fatto che $u.d$ è minimo tra tutti $v.d$ per $v \in Q = V \setminus S$ quindi $u.d \leq y.d$ inoltre dalla proprietà del limite superiore avremo $\delta(s,u) \leq u.d$

Per x vale l'ipotesi induttiva, $x.d = \delta(s,x)$
Durante le iterazioni precedenti (x,y) è stato

rilassato e per la proprietà di convergenza $y.d = \delta(s,y)$

Così abbiamo che:

$$\delta(s,y) \leq \delta(s,u) \leq u.d \leq y.d = \delta(s,y)$$

$\Rightarrow$ $u.d = \delta(s,u)$ e non cambierà più