

Altezza nera R-B-three

L'altezza minima di un albero rosso-nero con n nodi interni è al più $2 \log(n+1)$

DIMOSTRAZIONE

Iniziamo dimostrando che un nodo x qualsiasi ha $2^{bh(x)} - 1$ nodi interni nel suo sottoalbero

CASO BASE

Se $h = 0$ allora x è una foglia $2^0 - 1 = 0$ nodi interni

PASSO INDUTTIVO

Per un x con $bh(x) > 0$ x ha 2 figli
ogni figlio ha un'altezza nera uguale a $bh(x)$ o $bh(x) - 1$
e dipende dal colore poiché l'altezza dei figli sarà
 $\leq bh(x)$ ovvero per ipotesi induttive che i figli avranno:
 $2(2^{bh(x)-1} - 1)$ nodi interni = $2^{bh(x)} - 2$ nodi interni

Per concludere consideriamo che per le proprietà 4 almeno metà dei nodi in un cammino di conseguenza l'altezza nera della radice sarà almeno $h/2$ quindi avremo che:

$$n \geq 2^{h/2} - 1 \quad \Rightarrow \quad 2^{h/2} \leq n + 1 \quad \text{prendiamo il log.}$$

$$\frac{h}{2} \leq \log(n+1)$$

$$h \leq 2 \log(n+1)$$