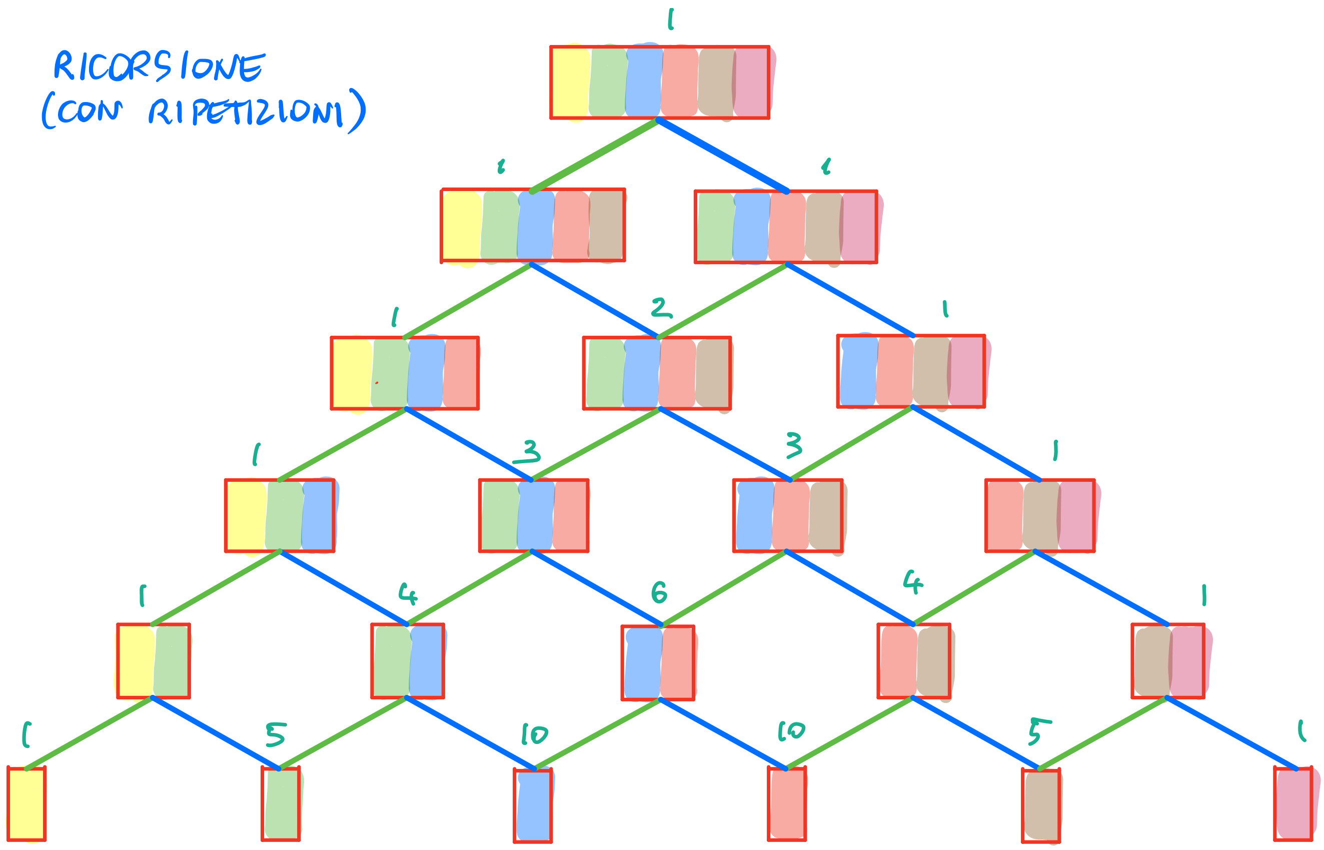
ELEMENTI DELLA PROGRAMMAZIONE DINAMICA

- CARATTERIZZAZIONE DELLA STRUTTURA DI UNA SOLUZIONE OTTIMA (SOTTOSTRUTTURA OTTIMA)

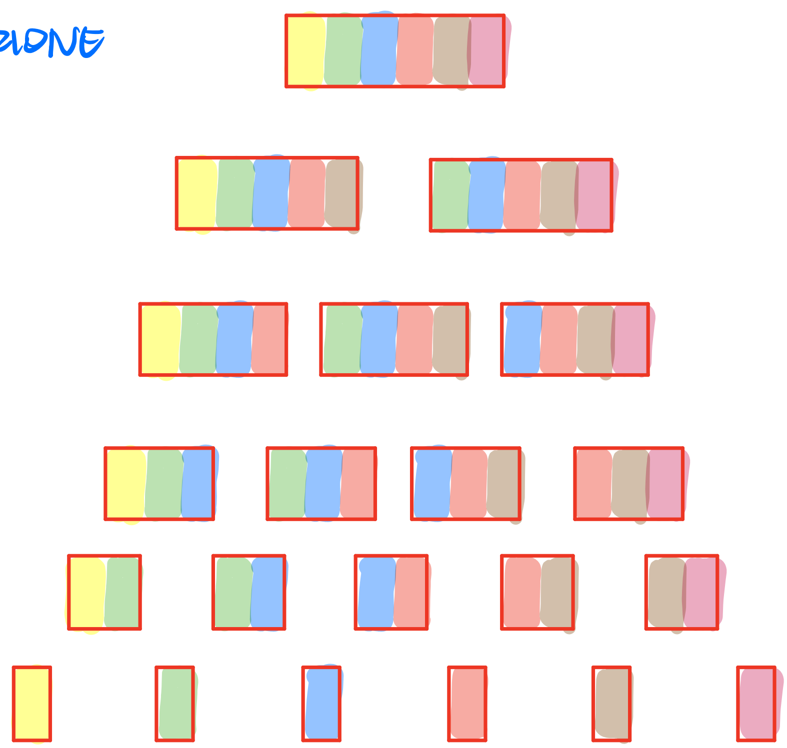
(SCHEMA TIPICO)

1. SI DIMOSTRA CHE UNA SOLUZIONE CONSISTE NEL FARE UNA SCELTA, CHE LASCIA UNO O PIÙ SOTTOPROBLEMI DA RISOLVERE
2. SI SUPPONE TEMPORANEAMENTE DI CONOSCERE TALE SCELTA
3. FATTA LA SCELTA, SI DETERMINANO I SOTTOPROBLEMI DA CONSIDERARE E LO SPAZIO PIÙ PICCOLO DI SOTTOPROBLEMI RISULTANTE
4. SI DIMOSTRA CHE LE SOLUZIONI DEI SOTTOPROBLEMI ALL'INTERNO DI UNA SOLUZIONE OTTIMA SONO OTTIME (TECNICA CUT-PASTE)

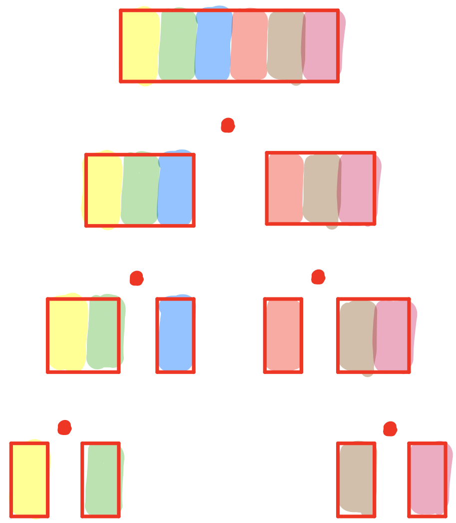
RICORSIONE
(CON RIPETIZIONI)



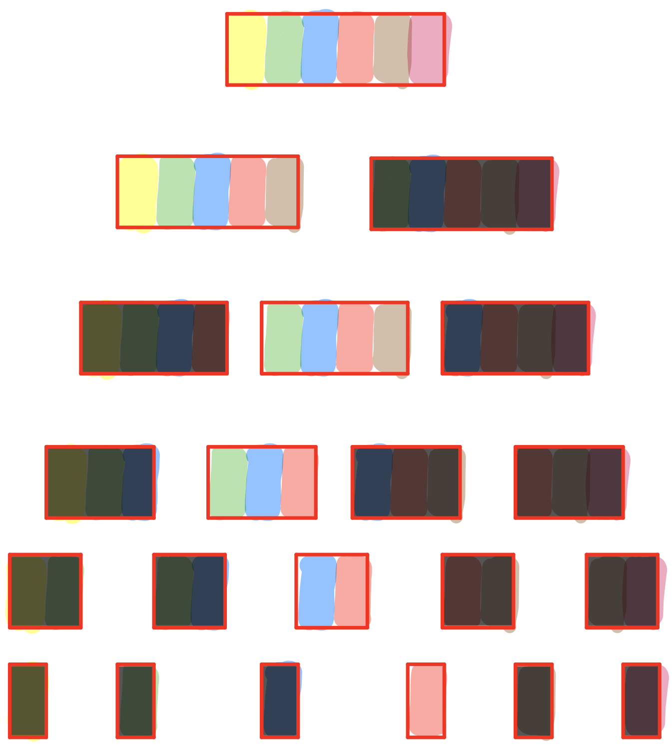
PROGRAMMAZIONE
DINAMICA



SOLUZIONE
(CON ORACOLO)



?



LA SOTTOSTRUTTURA OTTIMA VARIA IN FUNZIONE DEL TIPO DI PROBLEMA IN DUE MODI:

- NUMERO n_1 DI SOTTOPROBLEMI UTILIZZATI IN UNA SOLUZIONE OTTIMA

  ES. CATENE DI MONTAGGIO $\longrightarrow$ $n_1 = 1$

  SEQUENZE DI MATRICI $\longrightarrow$ $n_1 = 2$

- NUMERO n_2 DI SCELTE PER DETERMINARE QUALI SOTTOPROBLEMI UTILIZZARE

  ES. CATENE DI MONTAGGIO $\longrightarrow$ $n_2 = 2$

  SEQUENZE DI MATRICI $\longrightarrow$ $n_2 = \ell - 1$

  (ℓ E' LA LUNGHEZZA DELLA SEQUENZA)

GENERALMENTE, LA COMPLESSITÀ DI UN ALGORITMO DI PROGRAMMAZIONE DINAMICA DIPENDE DA <u>DUE</u> FATTORI:

- DIMENSIONE DELLO SPAZIO DEI SOTTOPROBLEMI
- NUMERO DI SCELTE DA CONSIDERARE PER OGNI SOTTOPROBLEMA

<u>ES.</u> * CATENE DI MONTAGGIO $\longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} DIM(SPAZIO\_SOTTOPROBLEMI) = \Theta(n) \\ n_2 = 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow O(n)$$

* SEQUENZE DI MATRICI $\longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} DIM(SPAZIO\_SOTTOPROBLEMI) = \Theta(n^2) \\ n_2 = O(n) \end{array}\right] \rightsquigarrow O(n^3)$$

LA PROGRAMMAZIONE DINAMICA USA LA SOTTOSTRUTTURA OTTIMA SECONDO UNO SCHEMA BOTTOM-UP, CIOE'

- <u>PRIMA</u>: VENGONO TROVATE LE SOLUZIONI OTTIME DEI SOTTO PROBLEMI

- <u>DOPO</u>: VIENE TROVATA UNA SOLUZIONE OTTIMA DEL PROBLEMA.

  DI SOLITO IL COSTO DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA E' PARI AI COSTI PER RISOLVERE I SOTTOPROBLEMI <u>PIÙ</u> UN COSTO DIRETTAMENTE IMPUTABILE ALLA SCELTA STESSA

BISOGNA STARE ATTENTI A NON ASSUMERE L'ESISTENZA DELLA SOTTOSTRUTTURA OTTIMA ANCHE QUANDO NON E' POSSIBILE FARLO!

ESEMPIO SIA $G=(V,E)$ UN GRAFO ORIENTATO E SIANO $u, v \in V$

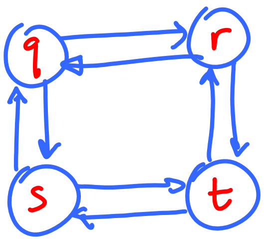
PROBLEMA 1 TROVARE UN CAMMINO DA u A v IN G FORMATO DAL MINOR NUMERO DI ARCHI (TALE CAMMINO, OVVIAMENTE, SARA' SEMPLICE)

PROBLEMA 2 TROVARE UN CAMMINO SEMPLICE DA u A v IN G FORMATO DAL MAGGIOR NUMERO DI ARCHI

- IL PROBLEMA 1 PRESENTA UNA SOTTOSTRUTTURA OTTIMA

- IL PROBLEMA 2 NON PRESENTA UNA SOTTOSTRUTTURA OTTIMA

INFATTI, SI CONSIDERI IL GRAFO



* IL CAMMINO $q \to r \to t$ E' UN CAMMINO SEMPLICE MASSIMO DA q A t

* MA $q \to r$ NON E' UN CAMMINO SEMPLICE MASSIMO DA q A r

INFATTI $q \to s \to t \to r$ E' UN CAMMINO SEMPLICE DA q A r PIU' LUNGO DEL CAMMINO $q \to r$!

- RIPETIZIONE DEI SOTTOPROBLEMI

- LO SPAZIO DEI SOTTOPROBLEMI DEVE ESSERE "PICCOLO", NEL SENSO CHE UN ALGORITMO RICORSIVO RISOLVE RIPETUTAMENTE GLI STESSI PROBLEMI

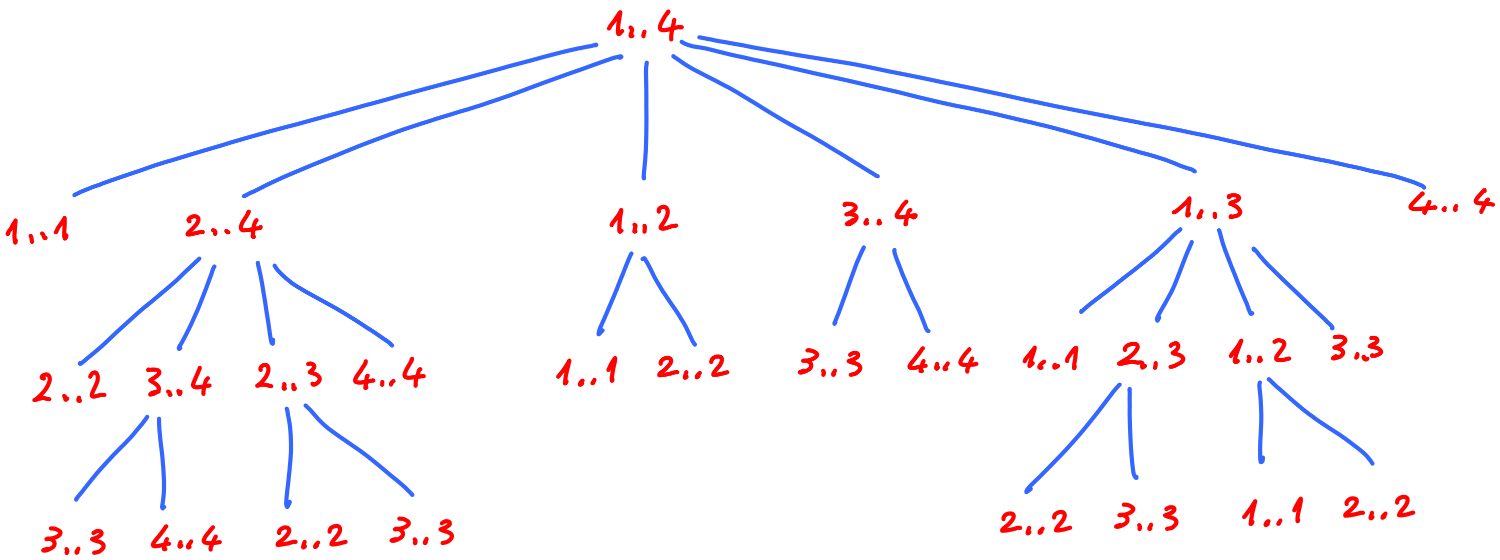
- GLI ALGORITMI DI PROGRAMMAZIONE DINAMICA SFRUTTANO I SOTTOPROBLEMI RIPETUTI RISOLVENDO CIASCUN SOTTOPROBLEMA UNA SOLA VOLTA, MEMORIZZANDO LA SOLUZIONE IN UNA TABELLA

ES. SOLUZIONE RICORSIVA AL PROBLEMA DELLA MOLTIPLICAZIONE DI UNA SEQUENZA DI MATRICI:

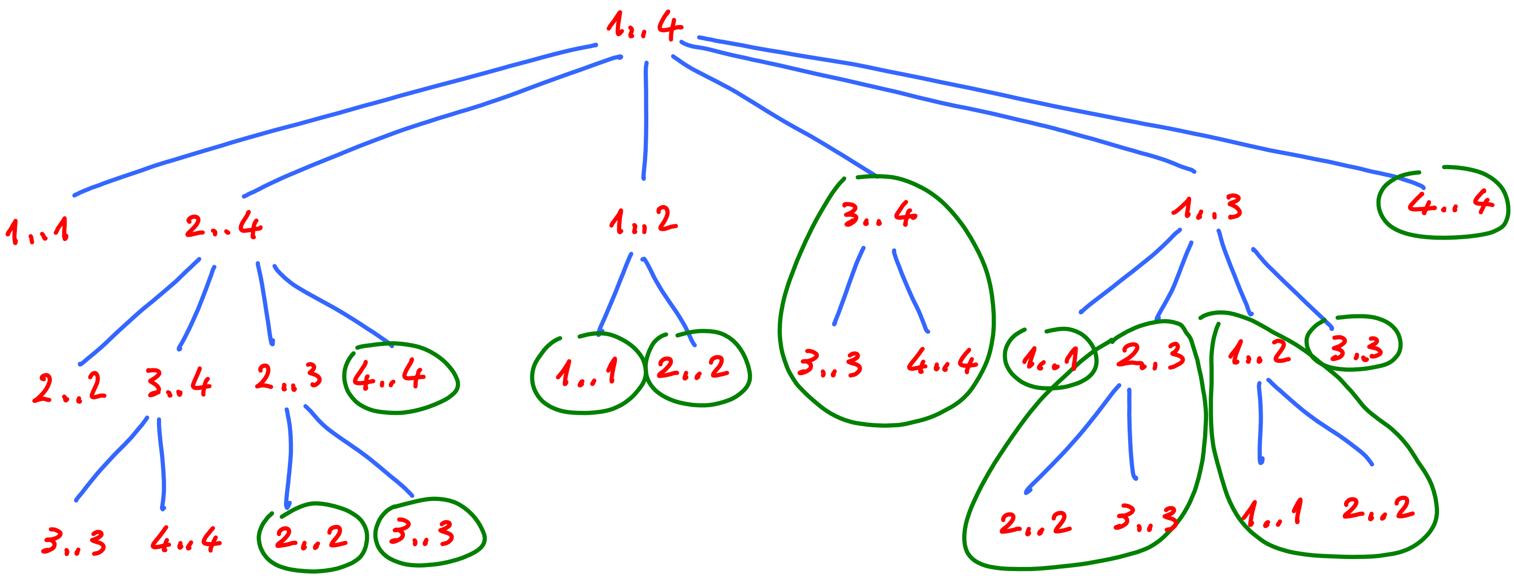
$$m[i,j] = \begin{cases} 0 & i=j \\ \min\limits_{i \le k < j} \left(m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1} p_k p_j \right) & i<j \end{cases}$$

```
RECURSIVE_MATRIX_CHAIN (p, i, j)
if i = j then
    return 0
m[i,j] := +∞
for k := i to j-1 do
    q := RECURSIVE_MATRIX_CHAIN (p, i, k)
         + RECURSIVE_MATRIX_CHAIN (p, k+1, j) + p_{i-1} p_k p_j
    if q < m[i,j] then
        m[i,j] := q
return m[i,j]
```

ALBERO DI RICORSIONE DI RECURSIVE_MATRIX_CHAIN (p, 1, 4)



ALBERO DI RICORSIONE DI RECURSIVE_MATRIX_CHAIN (p, 1, 4)



SOTTOPROBLEMI RIPETUTI

COMPLESSITA' DI RECURSIVE_MATRIX_CHAIN

- SIA $T(n)$ IL TEMPO IMPIEGATO DA RECURSIVE_MATRIX_CHAIN SU UN'ISTANZA DI DIMENSIONE n
- VERIFICHIAMO CHE $T(n) = \Omega(2^n)$. SI HA:

$$T(1) \geq 1$$

$$T(n) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(T(k) + T(n-k) + 1 \right), \quad \text{PER } n > 1$$

QUINDI: $$T(n) \geq 2 \sum_{k=1}^{n-1} T(k) + n$$

DIMOSTRIAMO PER INDUZIONE CHE $T(n) \geq 2^{n-1}$.

- $T(1) \geq 1 = 2^0 = 2^{1-1}$
- $$T(n+1) \geq 2 \sum_{k=1}^{n} T(k) + n + 1 \geq 2 \sum_{k=0}^{n-1} 2^k + n + 1$$

$$\geq 2(2^n - 1) + n + 1 = 2^{n+1} - 2 + n + 1$$

$$= 2^{n+1} + n - 1 \geq 2^n$$

[redacted]

```
MEMOIZED_MATRIX_CHAIN (p)
   n := length[p] - 1
   for i := 1 to n do
        for j := 1 to n do
             m[i,j] := +∞
 return LOOKUP_CHAIN (p, 1, n)
```

```
LOOKUP_CHAIN (p, i, j)
if m[i,j] < +∞ then return m[i,j]
if i = j then m[i,j] := 0
  else for k := i to j-1 do
            q := LOOKUP_CHAIN (p, i, k)
                 + LOOKUP_CHAIN (p, k+1, j)
                 + p_{i-1} p_k p_j
            if q < m[i,j] then
                 m[i,j] := q
return m[i,j]
```