“ALGORITMI”

CORSO DI STUDIO IN INFORMATICA (laurea triennale)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA

ANNO ACCADEMICO 2020/21

Terza sessione di esami – Primo appello – 8 settembre 2021

Si svolgano i seguenti esercizi, argomentando adeguatamente le risposte.

ESERCIZIO 1

(A) Si enuncino il Teorema Master e il suo Corollario.

(B) Si definiscano le notazioni asintotiche $\Omega(f(n))$, $\mathcal{O}(f(n))$, $\omega(f(n))$ per una data funzione $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

(C) Si risolva l'equazione di ricorrenza $T(n) = 64 \cdot T\left(\frac{n}{c}\right) + \Theta\left(n^3 \log^2 n\right)$ al variare del parametro reale $c > 1$.

(D) Sia $T(n)$ la funzione di cui al punto precedente. Per quali valori di a si ha:

(i) $T(n) = \Omega(n^6 \log n)$; (ii) $T(n) = \mathcal{O}(n^3 \log n)$; (iii) $T(n) = \Omega(n^3 \log^4 n)$?

ESERCIZIO 2

Sia T un testo di 1700 caratteri in un alfabeto con i simboli $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, le cui frequenze siano rispettivamente

50, 50, 100, 100, 100, 150, 300, 300, 550.

Dopo aver definito la nozione di *codice prefisso*, si determini il numero minimo di bit necessari per rappresentare il testo T utilizzando un codice prefisso ottimo, illustrando l'algoritmo utilizzato (anche mediante pseudo-codice).
Qual è il risparmio percentuale rispetto ad una codifica minimale di T con un codice a lunghezza fissa?

ESERCIZIO 3

Si supponga di operare su di un MIN-HEAP, inizialmente vuoto, rappresentato da un array A. Nello specifico si inseriscano le seguenti chiavi, nell'ordine dato: $\langle 20, 24, 16, 2, 5, 8, 10, 9, 7, 4, 11, 1, 3 \rangle$. Si fornisca la configurazione dell'array A alla fine di ciascuna delle operazioni di inserimento.
Si indichi anche quante operazioni di swap tra caratteri vengono effettuate per ciascuna delle operazioni di inserimento.

ESERCIZIO 4

Sia dato il grafo direzionato e pesato $G = (V, E)$, con

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4\} \qquad \text{ed} \qquad E = \{(1,0), (2,0), (3,0), (3,1), (4,1), (4,2), (4,3)\}.$$

La funzione peso w è così definita:

$$w(1,0) = 2, \quad w(2,0) = 6, \quad w(3,0) = 7, \quad w(3,1) = 3, \quad w(4,1) = 4, \quad w(4,2) = 1, \quad w(4,3) = 5.$$

Si supponga di eseguire l'algoritmo di BELLMAN-FORD sul grafo G con sorgente 4.
Si fornisca la configurazione dell'array relativo alle stime di cammino minimo ottenuta alla fine di ciascuna iterazione del ciclo principale dell'algoritmo.

ESERCIZIO 5

Si supponga di operare su di un albero ROSSO-NERO, inizialmente voto, inserendo le seguenti chiavi nell'ordine dato:

$$\langle 4, 6, 7, 8, 10, 12, 11, 5, 9, 13 \rangle.$$

Si disegni la struttura dell'albero dopo ciascuna delle operazioni di inserimento, indicando sia la chiave che il colore di ciascun nodo dell'albero.
Si fornisca anche, per ciascun albero, la sequenza delle chiavi ottenuta da una visita post-order.