Esame del 06.09.2024

Algoritmi e Laboratorio

Parte B

Esercizio 1. Si consideri l'equazione di ricorrenza

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta\left(\log(n)\right). \tag{1}$$

A. Si risolva l'equazione (1) utilizzando il metodo preferito tra quelli studiati.

B. Si stabilisca quali tra le sequenti condizioni sono soddisfatte dalla soluzione $T(n)$ all'equazione (1) trovata al punto precedente:

(a.) $T(n) = \mathcal{O}\left(\log^2(n)\right)$ (b.) $T(n) = \mathcal{O}\left(\log^3(n)\right)$

(c.) $T(n) = o\left(\log^2(n)\right)$ (d.) $T(n) = o\left(\log^3(n)\right)$.

C. Si disegni uno sketch dell'albero di ricorrenza associato all'equazione (1), indicando il costo del livello i-esimo, l'altezza dell'albero e il numero di foglie.

Esercizio 2. Si consideri una tabella hash a indirizzamento aperto con m slot (o celle o caselle) in cui sono memorizzate n chiavi, con $n < m$.

A. Qual è il valore atteso del tempo computazionale necessario a una ricerca senza successo nella tabella?

B. Si dimostri formalmente la correttezza della risposta alla domanda precedente.

Soluzioni

Esercizio 1. **A**. La funzione driving e la funzione watershed sono $f(n) = \Theta\left(\log(n)\right)$ e $w(n) = n^{\log_2 1} = n^0 = 1$, rispettivamente. Perciò, $f(n) = \Theta\left(1 \cdot \log(n)\right) = \Theta\left(n^{\log_2 1} \cdot \log^k(n)\right)$, per $k = 1$. Applicando il Teorema Master otteniamo la soluzione $T(n) = \Theta\left(\log^2(n)\right)$.

B. $T(n) = \Theta\left(\log^2(n)\right)$ vuol dire che esistono $c_1, c_2 > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tali che $c_1 \log^2(n) \leq T(n) \leq c_2 \log^2(n)$. La notazione big-$\mathcal{O}$ si usa per i limiti superiori (ovvero $T(n) = \mathcal{O}(f(n))$ se esiste $c > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che $T(n) \leq cf(n)$) quindi **(a.) e (b.) sono vere**. La notazione little-o si usa per i limiti superiori non precisi (ovvero $T(n) = o(f(n))$ se per ogni $c > 0$ esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che $T(n) < cf(n)$) quindi **(c.) è falsa mentre (d.) è vera**.

C. La radice ha costo $c\log(n)$. Ogni nodo ha 1 figlio. All'i-esimo livello dell'albero c'è un nodo di costo $c\log(\frac{n}{2^i})$. L'altezza dell'albero è $h = \log_2 n$ e c'è un'unica foglia.

Esercizio 2. **A**. Il valore atteso del tempo computazionale è $\mathcal{O}\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$, dove $\alpha = \frac{n}{m}$ è il fattore di carico.

B. Il valore atteso per il tempo computazionale in una ricerca senza successo è il numero atteso di prove fatte, ovvero $T(n) = \mathbb{E}[X]$ dove $X =$ numero di prove. Si ha $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}[X \geq 1]$. Per $i \in \{1, \ldots, m\}$ definiamo l'evento

$$A_i = \text{"la } i\text{-esima prova avviene e il corrispondente slot è occupato.}$$

Allora, $\{X \geq 1\} = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{i-1}$ e

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[X \geq 1] &= \mathbf{P}[A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{i-1}] = \mathbf{P}[A_1] \cdot \mathbf{P}[A_2 \mid A_1] \cdots \mathbf{P}[A_{i-1} \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{i-2}] \\ &= \frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m-1} \cdots \frac{n-(i-2)}{m-(i-2)} \leq \alpha^{i-1},\end{aligned}$$

da cui deriva che $\mathbb{E}[X] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \frac{1}{1-\alpha}$, essendo $\alpha = \frac{n}{m} < 1$.