Lemma 13.1
L'altezza massima di un albero rosso-nero con n nodi interni è $2\lg(n+1)$.

Dimostrazione Iniziamo dimostrando che il sottoalbero con radice in un nodo x qualsiasi contiene almeno $2^{\mathrm{bh}(x)} - 1$ nodi interni. Proveremo questa asserzione per induzione sull'altezza di x. Se l'altezza di x è 0, allora x deve essere una foglia ($T.nil$) e il sottoalbero con radice in x contiene realmente almeno $2^{\mathrm{bh}(x)} - 1 = 2^0 - 1 = 0$ nodi interni. Per il passo induttivo, consideriamo un nodo x che ha un'altezza positiva ed è quindi un nodo interno con due figli. Ogni figlio ha un'altezza nera pari a $\mathrm{bh}(x)$ o $\mathrm{bh}(x) - 1$, a seconda se il suo colore è, rispettivamente, rosso o nero. Poiché l'altezza di un figlio di x è minore dell'altezza di x, possiamo applicare l'ipotesi induttiva per concludere che ogni figlio ha almeno $2^{\mathrm{bh}(x)-1} - 1$ nodi interni. Quindi, il sottoalbero con radice in x contiene almeno $(2^{\mathrm{bh}(x)-1} - 1) + (2^{\mathrm{bh}(x)-1} - 1) + 1 = 2^{\mathrm{bh}(x)} - 1$ nodi interni; questo dimostra l'asserzione.

Per completare la dimostrazione del lemma, indichiamo con h l'altezza dell'albero. Per la proprietà 4, almeno metà dei nodi in qualsiasi cammino semplice dalla radice a una foglia (esclusa la radice) deve essere nera. Di conseguenza, l'altezza nera della radice deve essere almeno $h/2$; quindi, abbiamo

$$n \geq 2^{h/2} - 1$$

Spostando 1 nel lato sinistro e prendendo i logaritmi di entrambi i lati, otteniamo $\lg(n+1) \geq h/2$ ovvero $h \leq 2\lg(n+1)$. ■