

PROBLEMA DELLA SELEZIONE DELLE ATTIVITA' CON PESI

SISTEMA DI ATTIVITA' CON PESO (S, s, f, w)

- $S = \{1, \dots, n\}$
- $s: S \rightarrow \mathbb{R}^+$
- $f: S \rightarrow \mathbb{R}^+$

TALI CHE $s_i < f_i$ PER $i \in S$

- $w: S \rightarrow \mathbb{R}$ (FUNZIONE PESO O VALORE)

IL PROBLEMA DELLA SELEZIONE DELLE ATTIVITA' CON PESI

CONSISTE NEL DETERMINARE UN SOTTOINSIEME $A \subseteq S$
DI ATTIVITA' MUTUAMENTE COMPATIBILI TALE CHE

IL PESO DI A DEFINITO DA $w(A) := \sum_{i \in A} w(i)$

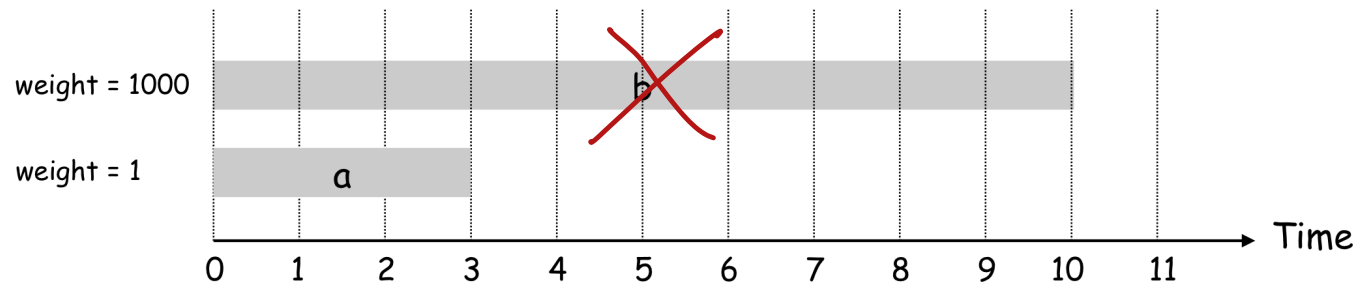
SI A MASSIMO

$$\bar{w} = \max_{A \subseteq S} w(A)$$

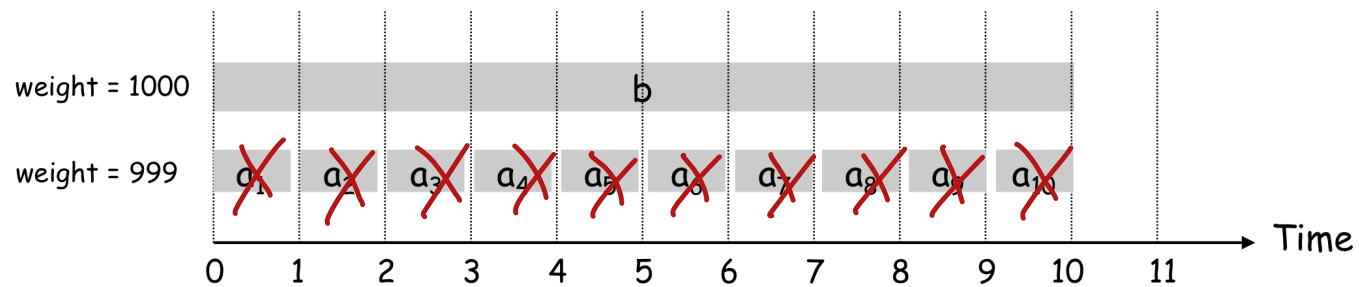
- SE $\pi(i) = 1$, PER OGNI $i \in S$, SI OTTIENE IL PROBLEMA DELLA SELEZIONE DELLE ATTIVITA' (SENZA PESI)
- SE $\pi(i) = f_i - s_i$, PER OGNI $i \in S$, SI OTTIENE LA VARIANTE DEL PROBLEMA DELLA SELEZIONE DELLE ATTIVITA' IN CUI SI INTENDE MASSIMIZZARE IL TEMPO COMPLESSIVO DELL'IMPIEGO DELLA RISORSA.
- SUPPORREMO CHE VALGA $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n$

PER IL PROBLEMA DELLA SELEZIONE DELLE ATTIVITA' CON PESI
L'APPROCCIO GREEDY IN GENERALE NON VALE

Es.



Scelta greedy: attività che termina per prima ... FAIL!



Scelta greedy: attività di peso massimo ... FAIL!

DATO UN SISTEMA DI ATTIVITA' (S, s, f) ,
 OVE $S = \{1, \dots, n\}$ E $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n$, E'
 UTILE CALCOLARE LA FUNZIONE

$$p: S \rightarrow S \cup \{0\}$$

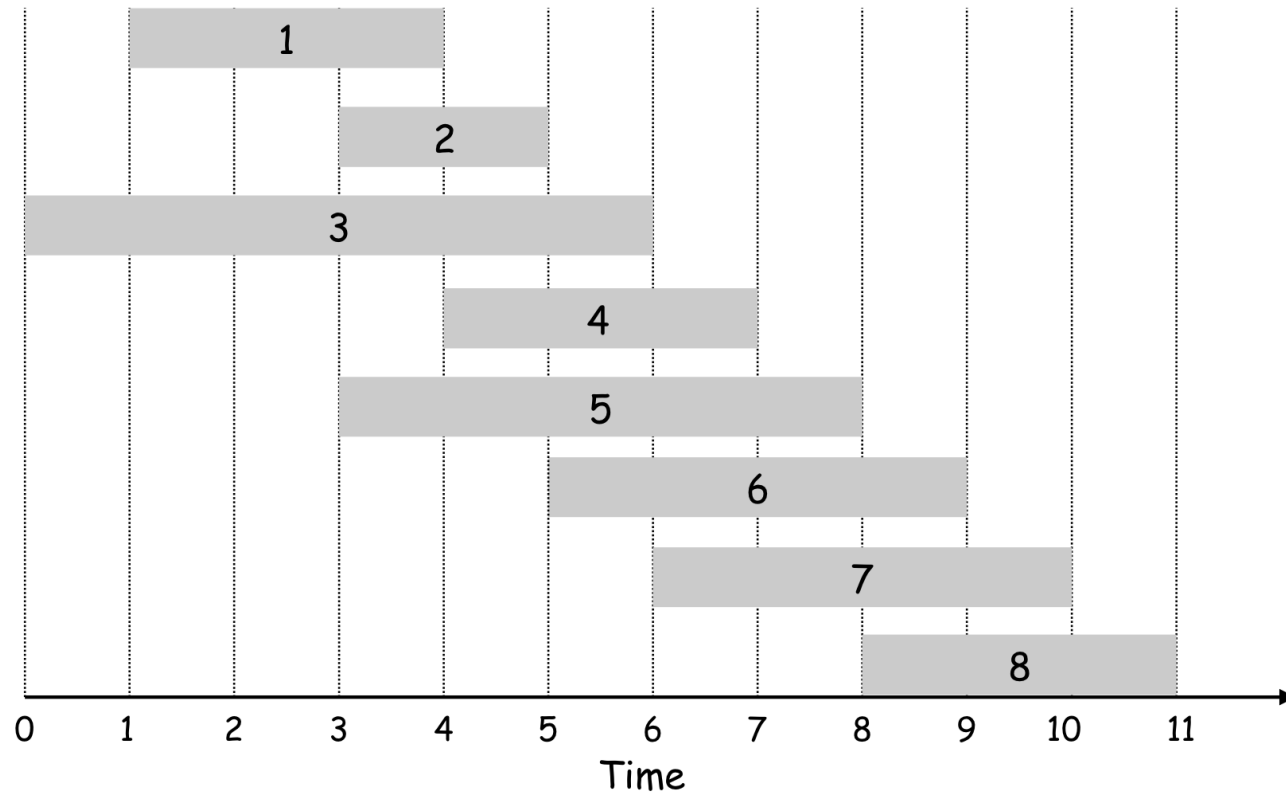
DEFINITA DA

$$p(j) := \begin{cases} 0 & \text{SE NON C'E' ALCUNA ATTIVITA' } a_i \\ & \text{COMPATIBILE CON } a_j \text{ E TALE CHE } f_i \leq s_j \\ \max \{i \mid i < j \text{ \& } a_i \text{ E } a_j \text{ SONO COMPATIBILI} \} & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

PER OGNI $j \in S$.

- LA FUNZIONE p PUO' ESSERE CALCOLATA IN
 TEMPO $O(n \log n)$

Ex: $p(8) = 5$, $p(7) = 3$, $p(2) = 0$.



j	p(j)
0	-
1	0
2	0
3	0
4	1
5	0
6	2
7	3
8	5

SOLUZIONE MEDIANTE PROGRAMMAZIONE DINAMICA

$\text{OPT}(j) :=$ VALORE DI UNA SOLUZIONE OTTIMA AL
SOTTOPROBLEMA $\{1, 2, \dots, j\}$

SOTTOSTRUTTURA OTTIMA

SIA A UNA SOLUZIONE OTTIMA AL SOTTOPROBLEMA $\{1, \dots, j\}$

CASO $j \in A$: $A \setminus \{j\}$ E' UNA SOLUZIONE OTTIMA
AL SOTTOPROBLEMA $\{1, \dots, p(j)\}$

CASO $j \notin A$: A E' UNA SOLUZIONE OTTIMA
AL SOTTOPROBLEMA $\{1, \dots, j-1\}$

PERTANTO $OPT(j)$ PUO' ESSERE DEFINITO RICORSIVAMENTE
COME SEQUE:

$$OPT(j) = \begin{cases} 0 & \text{SE } j=0 \\ \max (w(j) + OPT(p(j)), OPT(j-1)) & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

SOLUZIONE RICORSIVA

COMPUTE- $OPT(j)$

if $j=0$ then
 return 0

else

return $\max (w(j) + \text{COMPUTE-}OPT(p(j)),$
 $\text{COMPUTE-}OPT(j-1))$

SOLUZIONE BOTTOM-UP (PROGRAMMAZIONE DINAMICA)

$OPT[0] := 0$

for $j := 1$ to n do

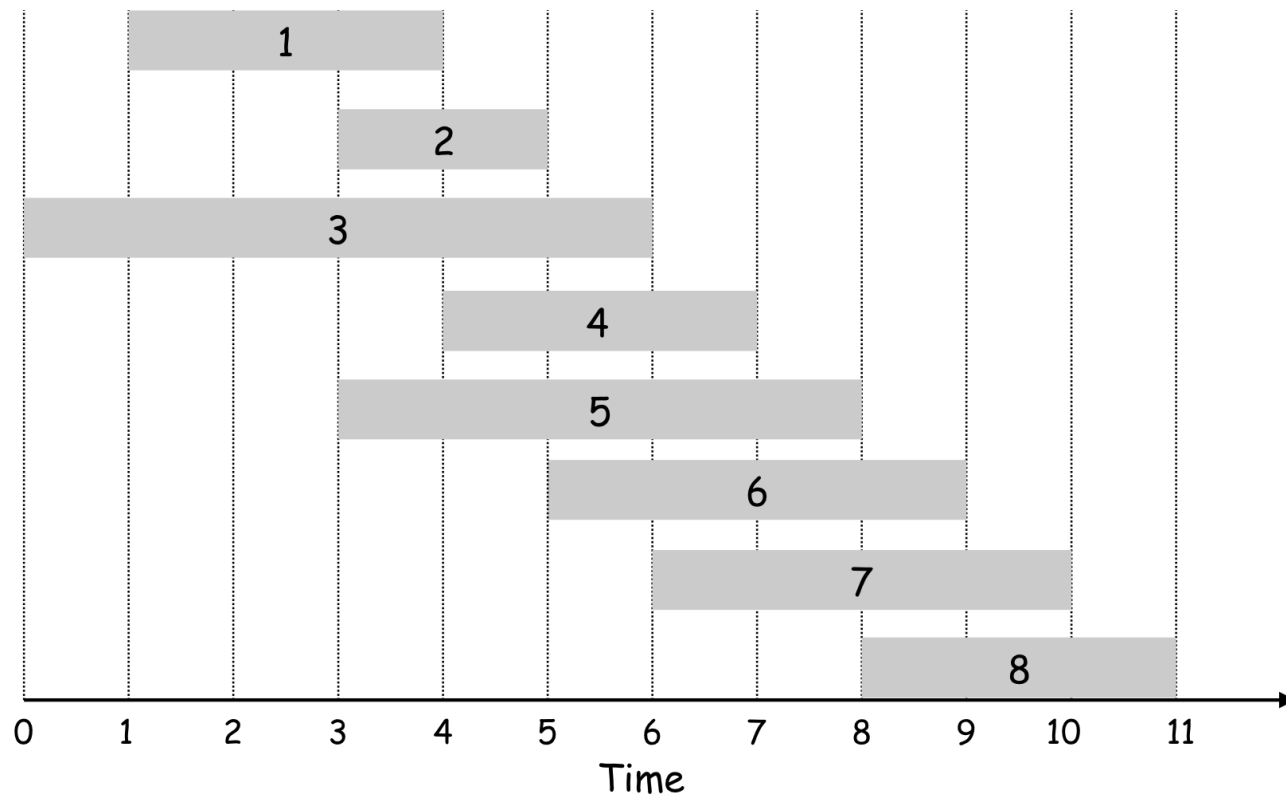
$OPT[j] := \max(w(j) + OPT[p(j)], OPT[j-1])$

return $OPT[n]$

COMPLESSITÀ: $O(n)$

PREPROCESSING: $O(n \log n)$

ordinamento delle attività
+ calcolo della funzione p



j	w(j)	p(j)	opt[j]
0	-	-	0
1	3	0	3
2	2	0	3
3	6	0	6
4	3	1	6
5	5	0	6
6	4	2	7
7	4	3	10
8	3	5	10

COSTRUZIONE DI UNA SOLUZIONE OTTIMA

FIND-SOLUTION(j)

if $j=0$ then

return

else if $w(j) + \text{OPT}[p(j)] > \text{OPT}[j-1]$ then

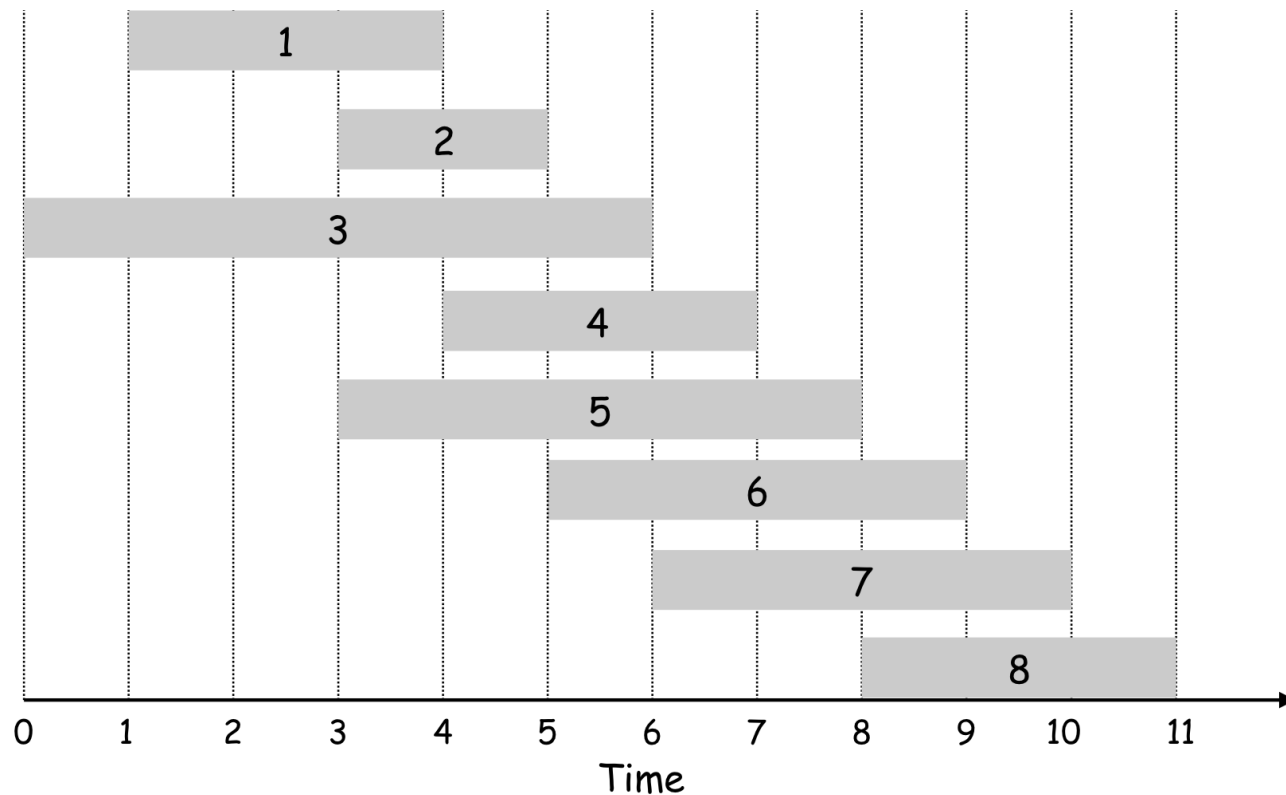
print j

FIND-SOLUTION($p(j)$)

else

FIND-SOLUTION($j-1$)

COMPLESSITA': $O(m)$



j	w(j)	p(j)	opt[j]
0	-	-	0
1	3	0	3
2	2	0	3
3	6	0	6
4	3	1	6
5	5	0	6
6	4	2	7
7	4	3	10
8	3	5	10

$$w(j) + \text{OPT}[p(j)] > \text{OPT}[j-1]$$

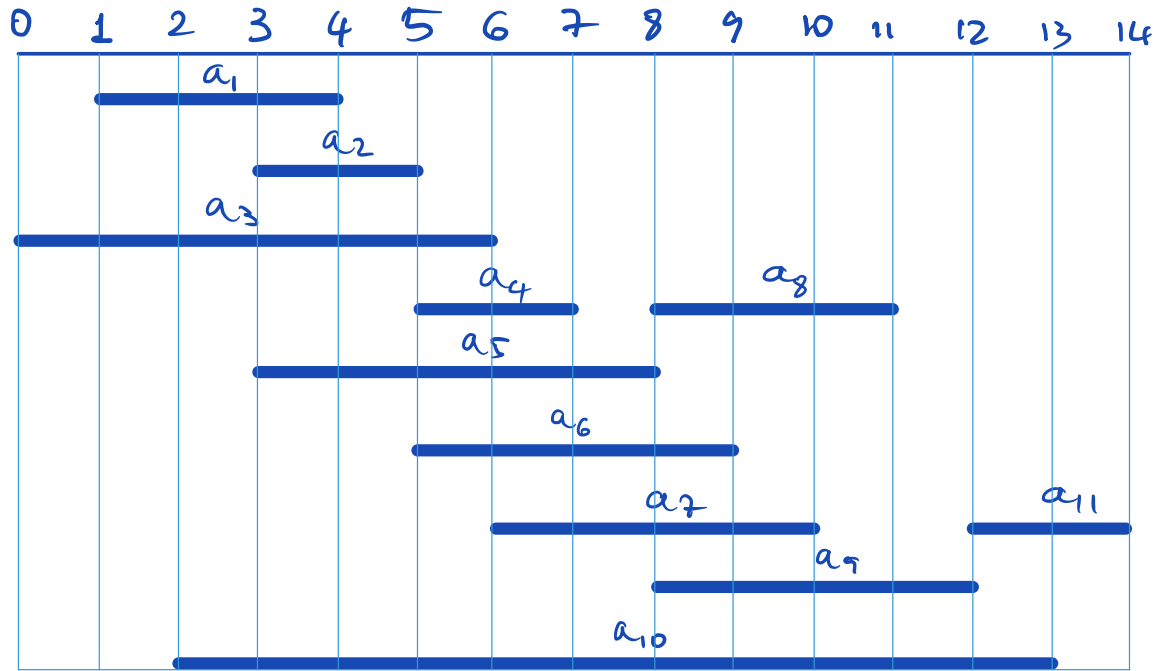
$$\overset{3}{w(8)} + \overset{6}{\text{OPT}[p(8)]} \not> \overset{10}{\text{OPT}[7]}$$

$$\overset{4}{w(7)} + \overset{6}{\text{OPT}[p(7)]} > \overset{7}{\text{OPT}[6]} \rightarrow \text{PRINT } 7$$

$$w(3) + \text{OPT}[p(3)] > \text{OPT}[2] \rightarrow \text{PRINT } 3$$

$$j=0$$

$A = \{3, 7\}$ E' UNA SOLUZIONE OTTIMA



$$w(11) + OPT(p(11)) > OPT(10) \rightarrow \text{PRINT } 11$$

$$w(9) + OPT(p(9)) \not> OPT(8)$$

$$w(8) + OPT(p(8)) \not> OPT(7)$$

$$w(7) + OPT(p(7)) > OPT(6) \rightarrow \text{PRINT } 7$$

j	w(j)	p(j)	OPT(j)
0	0	0	0
1	3	0	3
2	2	0	3
3	6	0	6
4	2	2	6
5	5	0	6
6	4	2	7
7	4	3	10
8	3	5	10
9	4	5	10
10	11	0	11
11	2	9	12



$$w^6(3) + \text{OPT}^0(p(3)) > \text{OPT}^3(2) \rightarrow \text{PRINT } 3$$

$p(3) = \emptyset$ STOP

$$A = \{3, 7, 11\}$$

È UNA SOLUZIONE OTTIMA
PER IL SISTEMA (S, s, f, w)