“ALGORITMI”

CORSO DI STUDIO IN INFORMATICA (laurea triennale)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA

ANNO ACCADEMICO 2020/21

Prima Sessione – Secondo Appello – 9 febbraio 2021

Si svolgano i seguenti esercizi, argomentando adeguatamente le risposte.

ESERCIZIO 1

(A) Si enuncino il Teorema Master e il suo Corollario.

(B) Si definiscano le notazioni asintotiche $o(f(n))$, $\omega(f(n))$, $\Omega(f(n))$, per una data funzione $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

(C) Si risolva l'equazione di ricorrenza $T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{5}\right) + \Theta\left(n^2 \log^2 n\right)$ al variare del parametro reale $a \geqslant 1$.

(D) Sia $T(n)$ la funzione di cui al punto precedente. Per quali valori del parametro $a \geqslant 1$ si ha:
(i) $T(n) = o(n^2 \log^3 n)$; (ii) $T(n) = \omega(n^2 \log^3 n)$; (iii) $T(n) = \Omega(n^3 \log^2 n)$?

ESERCIZIO 2

Sia T un testo di 3300 caratteri in un alfabeto con i simboli $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, le cui frequenze siano rispettivamente
100, 100, 200, 200, 200, 300, 600, 600, 1000.
Dopo aver definito la nozione di *codice prefisso*, si determini il numero minimo di bit necessari per rappresentare il testo T utilizzando un codice prefisso ottimo, illustrando l'algoritmo utilizzato (anche mediante pseudo-codice).
Qual è il risparmio percentuale rispetto ad una codifica minimale di T con un codice a lunghezza fissa?

ESERCIZIO 3

Sia data la sequenza di 6 matrici definita dal vettore delle dimensioni $\langle 3, 4, 2, 3, 5, 2, 3\rangle$. Si supponga di eseguire l'algoritmo di programmazione dinamica per il calcolo della parentesizzazione ottima di una sequenza di matrici. Si fornisca il costo ottimale della moltiplicazione della sequenza fornita in input, la matrice ottenuta alla fine dell'esecuzione dell'algoritmo e la relativa parentesizzazione ottima.

ESERCIZIO 4

Sia dato il grafo orientato e pesato $G = (V, E)$, con $V = \{1, 2, 3, 4\}$ e $E = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 3)\}$, ove la funzione peso $w\colon E \to \mathbb{R}$ sia così definita: $w(1, 3) = 5$, $w(1, 4) = 1$, $w(2, 1) = 2$, $w(3, 1) = 4$, $w(3, 2) = 1$, $w(4, 3) = 2$. Si supponga di eseguire sul grafo G l'algoritmo Fast-All-Pairs-Shorest-Path. Fornire la configurazione della matrice ottenuta alla fine di ognuna delle iterazioni del ciclo principale dell'algoritmo.

ESERCIZIO 5

Sia dato l'array $A = [5, 6, 3, 2, 1, 4]$ contenente 6 elementi. Si supponga di eseguire l'algoritmo HeapSort sull'array A. Si fornisca la configurazione dell'array alla fine di ciascuna delle iterazioni del ciclo principale dell'algoritmo.