Floyd-Warshall

Estendiamo il problema dei cammini minimi fra tutte le coppie considerando i nodi interni al cammino

Usiamo l'insieme V_m che contiene i nodi che vanno da 1 a n

es:

V_0 $\{\emptyset\}$

V_1 $\{v_1\}$

V_2 $\{v_1, v_2, v_3\}$

Definiamo m il numero dei nodi interni ammissibili in un cammino minimo

$$m = 0 \longrightarrow D^0 \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ \omega(i,j) & \text{se } \exists (i,j) \in E \\ +\infty & \text{se } \nexists (i,j) \in E \end{cases}$$

Se $m > 0$ devo considerare se è conveniente passare per v oppure no

$$D^m[i,j] = \{ \min(D^{m-1}[i,j], D^{m-1}[i,k] + D^{m-1}[k,j] \}$$

FLOYD-WARSHALL usa la programmazione dinamica e considera i nodi intermedi

$$D^m[i,j] = \begin{cases} \omega(i,j) & \text{se } m = 0 \\ \min(D^{m-1}[i,j], D^{m-1}[i,k] + D^{m-1}[k,j]) & \text{se } m > 0 \end{cases}$$

FLOYD-WARSHALL (W)

```
    n ← W.rows
    D^0 ← W
//  if (i, j) ∈ E
//      π^0[i, j] ← i
//  else
//      π^0[i, j] ← NULL
    FOR k ← 1 TO n DO
      D^k ← NEW MATRIX (n × n)
      FOR i ← 1 TO n DO
        FOR j ← 1 TO n DO
          D^k[i, j] ← D^(k-1)[i, j]
          IF ( D^k[i, j] > D^(k-1)[i, k] + D^(k-1)[k, j] )
            D^k[i, j] ← D^(k-1)[i, k] + D^(k-1)[k, j]
            π^k[i, j] ← π^(k-1)[k, j]
  RETURN D^n
```