

Lemme de l'étoile

Feuille de travaux dirigés n°5

On rappelle l'énoncé du lemme de l'étoile :

Lemme : Si L est un langage rationnel, alors il existe un entier n tel que, pour tout mot w de L tel que $|w| \geq n$, w peut être factorisé en $w = xyz$ de telle sorte que

1. pour tout $i \geq 0$, $xy^iz \in L$
2. $|y| > 0$
3. $|xy| \leq n$

1. En utilisant le lemme de l'étoile dire (et prouver ...) si les langages suivants sont rationnels :

a) L_1 , l'ensemble des nombres premiers écrits en unaire.

b) $L_2 = \{0^m 1^n 0^{m+n} : m \geq 1 \text{ et } n \geq 1\}$.

c) $L_3 = \{a^i b^m c^m : i \geq 1, m \geq 1\}$.

2. Soient $L_1 = \{a^{2i} b^j c^j : i \geq 1, j \geq 0\}$ et $L_2 = b^* c^*$ et soit $L = L_1 \cup L_2$.

a) Montrer que L satisfait les conditions du lemme de l'étoile.

b) Montrer que L n'est pas rationnel.

c) Conclusion.

3. Soient $L_1 = \{a^i : i \text{ est un carré}\}$ et $L_2 = \{w \in (a + b + c)^* : |w|_a + |w|_b \text{ est un carré}\}$.

a) Montrer en utilisant le lemme de pompage que L_1 n'est pas rationnel.

b) Montrer en utilisant des propriétés de clôture que L_2 n'est pas rationnel.

4. Optionnel Les conjugués

Soit Σ un alphabet fini. Deux mots $w, w' \in \Sigma^*$ sont conjugués s'il existe deux mots $u, v \in \Sigma^*$ tels que $w = uv$ et $w' = vu$. Dans la suite, on note $C(w)$ l'ensemble des conjugués du mot $w \in \Sigma^*$. De même, pour un langage $L \subset \Sigma^*$, on note $C(L) = \bigcup_{w \in L} C(w)$ l'ensemble des conjugués des mots de L .

a) Donner $C(aabaab)$.

b) Donner $C(a^n b^n | n > 0)$.

c) Montrer que si L est un langage rationnel alors $C(L)$ l'est aussi, en adaptant l'automate fini qui reconnaît L .

d) Donner un exemple de votre construction.