Automates finis et expressions rationnelles

Corrigé partiel de la feuille de travaux dirigés n^{o}2

1. a)

L'intérêt d'utiliser la méthode du théorème de Kleene est d'avoir une approche programmable. La première impression est que l'automate non-déterministe obtenu est très grand mais finalement on peut compter et pour une expression rationnelle E on a 2 $\times$ lettres(E) + epsilons(E) + opérateurs(E) états dans l'automate obtenu (les seules opérateurs qui comptes sont "+" et "*" et les concaténations ne comptent pas).
On construit l'automate au fur et à mesure. Dans un premier temps on construit l'automate pour a et b :

FIGURE 1 – Automates pour a et pour b

Ensuite on les combine pour obtenir $(a + b)$:

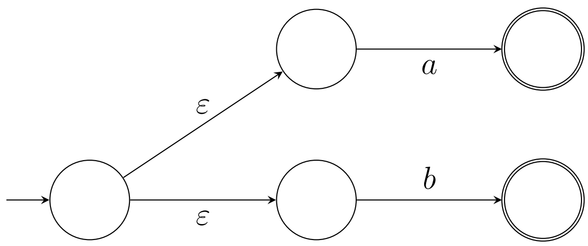


FIGURE 2 – Automate pour $a + b$

Ensuite on construit l'automate pour $(a + b)^*$:

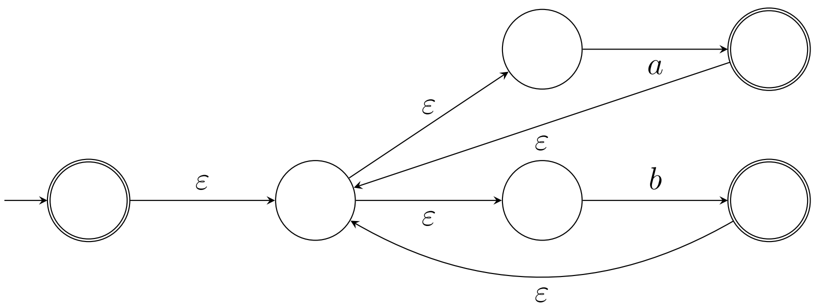


FIGURE 3 – Automate pour $(a + b)^*$

On combine ces automates pour obtenir :

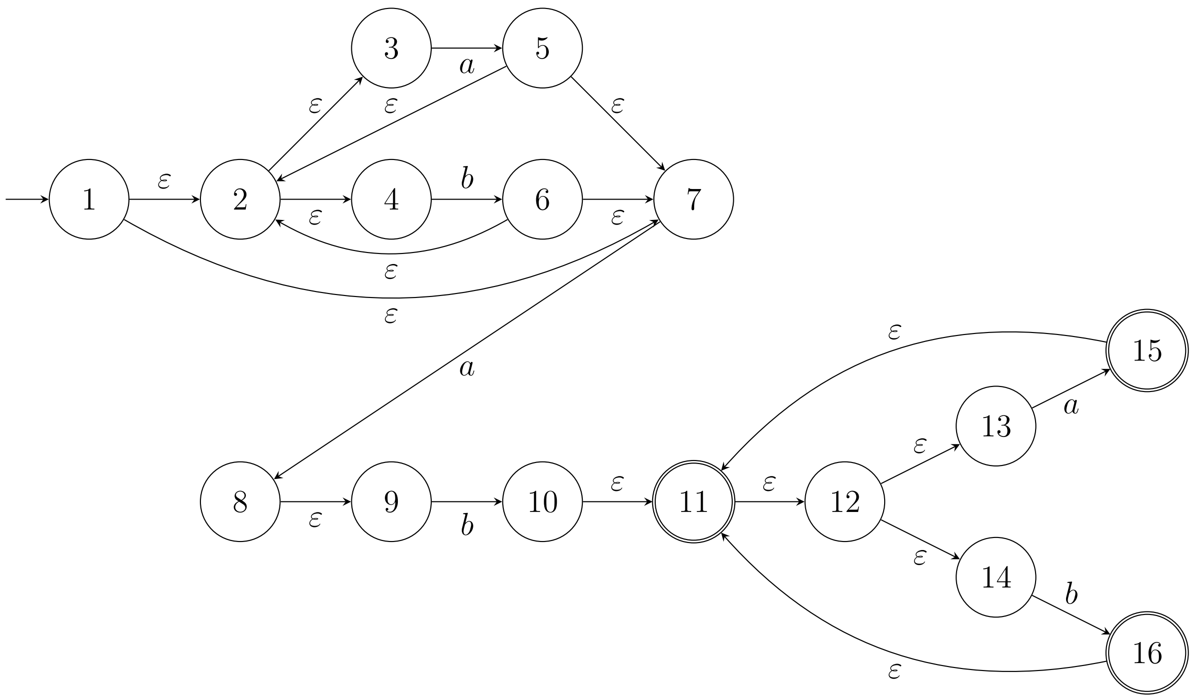
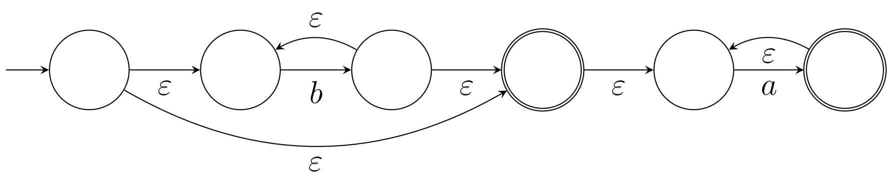


FIGURE 4 – Automate pour $(a+b)^*ab(a+b)^*$

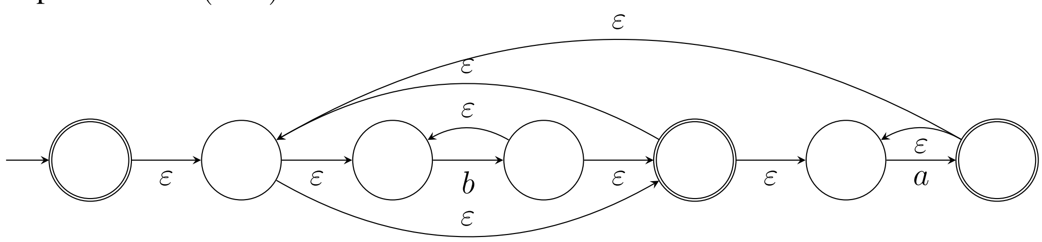
δ	ε	a	b
$\rightarrow 1$	$2,7$		
2	$3,4$		
3		5	
4			6
5	$2,7$		
6	$2,7$		
7		8	
8	9		
9			10
10	11		
$\leftarrow 11$	12		
12	$13,14$		
13		15	
14			16
$\leftarrow 15$	12		
$\leftarrow 16$	12		

b) Comme dans la question précédente on construit l'automate non-déterministe. On construit l'automate au fur et à mesure.
Dans un premier temps on construit l'automate pour b^* et a^* :

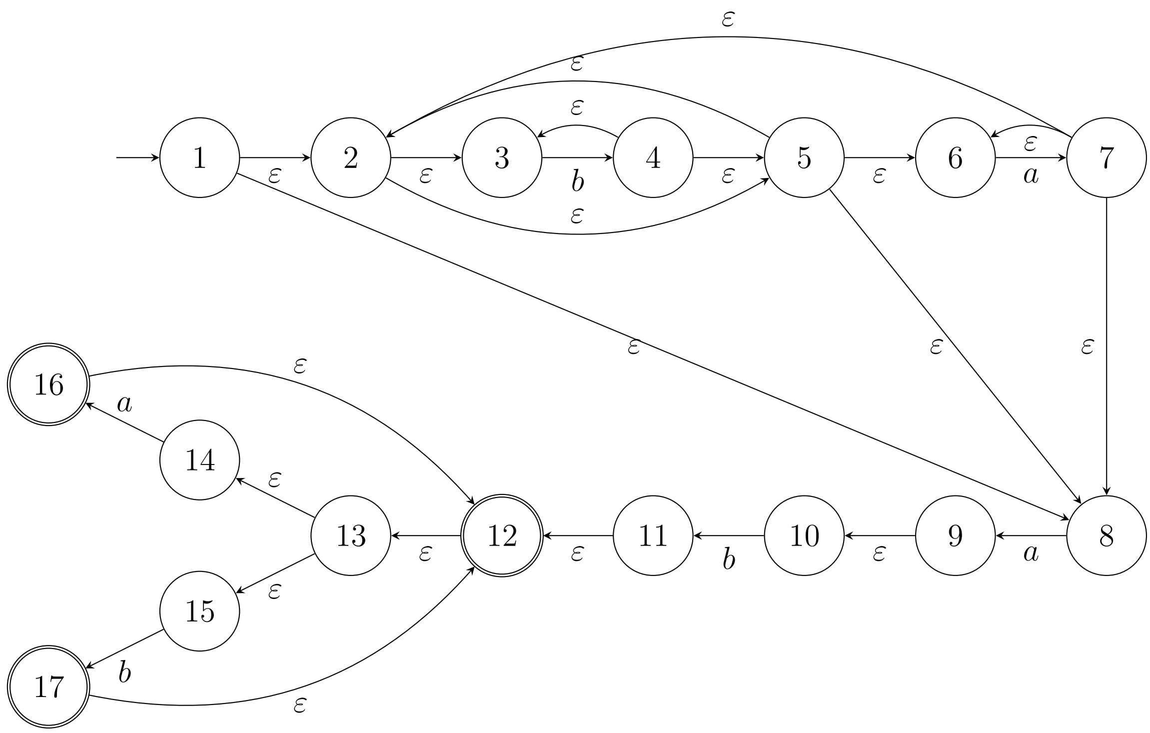
Ensuite on les combine pour obtenir b^*a^* :



On le transforme pour obtenir $(b^*a^*)^*$:



On obtient l'automate non-déterministe :



δ	ε	a	b
$\rightarrow 1$	$2,8$		
2	$3,5$		
3			4
4	$3,5$		
5	$2,6,8$		
6		7	
7	$2,6,8$		
8		9	
9	10		
10			11
11	12		
$\leftarrow 12$	13		
13	$14,15$		
14		16	
15			17
$\leftarrow 16$	13		
$\leftarrow 17$	13		

2. a) On calcule d'abord la fermeture par des ε-transitions :

δ	$\varepsilon - fermeture$
1	$1,2,3,4,7$
2	$2,3,4$
3	3
4	4
5	$2,3,4,5,7$
6	$2,3,4,6,7$
7	7
8	$8,9$
9	9
10	$10,11,12,13,14$
11	$11,12,13,14$
12	$12,13,14$
13	13
14	14
15	$12,13,14,15$
16	$12,13,14,16$

Ensuite on déterminise

δ	a	$fermeture$	b	$fermeture$
$1,2,3,4,7$	$5,8$	$2,3,4,5,7,8,9$	6	$2,3,4,6,7$
$2,3,4,5,7,8,9$	$5,8$	$2,3,4,5,7,8,9$	$6,10$	$2,3,4,6,7,10,11,12,13,14$
$2,3,4,6,7$	$5,8$	$2,3,4,5,7,8,9$	6	$2,3,4,6,7$
$2,3,4,6,7,10,11,12,13,14$	$5,8,15$	$2,3,4,5,7,8,9,12,13,14,15$	$6,16$	$2,3,4,6,7,12,13,14,16$
$2,3,4,5,7,8,9,12,13,14,15$	$5,8,15$	$2,3,4,5,7,8,9,12,13,14,15$	$6,10,16$	$2,3,4,6,7,10,11,12,13,14,16$
$2,3,4,6,7,12,13,14,16$	$5,8,15$	$2,3,4,5,7,8,9,12,13,14,15$	$6,16$	$2,3,4,6,7,12,13,14,16$
$2,3,4,6,7,10,11,12,13,14,16$	$5,8,15$	$2,3,4,5,7,8,9,12,13,14,15$	$6,16$	$2,3,4,6,7,12,13,14,16$

Il suffit de rénuméroter et marquer les états spéciaux (initial et d'acceptation) pour obtenir l'automate résultat :

δ	a	b
$\rightarrow 1$	2	3
2	2	4
3	2	3
$\leftarrow 4$	5	6
$\leftarrow 5$	5	7
$\leftarrow 6$	5	6
$\leftarrow 7$	5	6

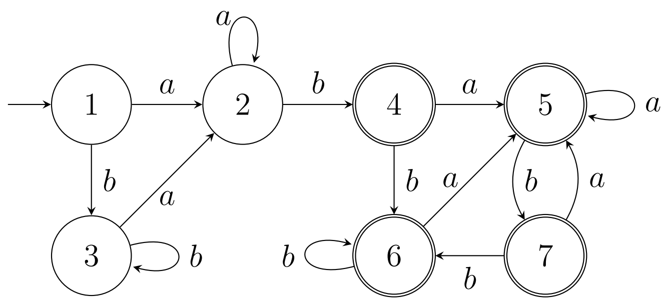


FIGURE 5 – Automate déterministe pour $(a+b)^*ab(a+b)^*$

b)

On calcule d'abord la fermeture par des ε-transitions :

δ	$\varepsilon - fermeture$
1	$1, 2, 3, 5, 6, 8$
2	$2, 3, 5, 6, 8$
3	3
4	$3, 4, 5, 6, 8$
5	$5, 6, 8$
6	6
7	$2, 3, 5, 6, 7, 8$
8	8
9	$9, 10$
10	10
11	$11, 12, 13, 14, 15$
12	$12, 13, 14, 15$
13	$13, 14, 15$
14	14
15	15
16	$13, 14, 15, 16$
17	$13, 14, 15, 17$

Ensuite on déterminise

δ	a	$fermeture$	b	$fermeture$
$1, 2, 3, 5, 6, 8$	$7, 9$	$2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10$	4	$3, 4, 5, 6, 8$
$2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10$	$7, 9$	$2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10$	$4, 11$	$3, 4, 5, 6, 8, 11, 12, 13, 14, 15$
$3, 4, 5, 6, 8$	$7, 9$	$2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10$	4	$3, 4, 5, 6, 8$
$3, 4, 5, 6, 8, 11, 12, 13, 14, 15$	$7, 9, 16$	$2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16$	$4, 17$	$3, 4, 5, 6, 8, 13, 14, 15, 17$
$2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16$	$7, 9, 16$	$2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16$	$4, 11, 17$	$3, 4, 5, 6, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 17$
$3, 4, 5, 6, 8, 13, 14, 15, 17$	$7, 9, 16$	$2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16$	$4, 17$	$3, 4, 5, 6, 8, 13, 14, 15, 17$
$3, 4, 5, 6, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 17$	$7, 9, 16$	$2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16$	$4, 17$	$3, 4, 5, 6, 8, 13, 14, 15, 17$

Il suffit de rénuméroter et marquer les états spéciaux (initial et d'acceptation) pour obtenir l'automate résultat :

δ	a	b
$\rightarrow 1$	2	3
2	2	4
3	2	3
$\leftarrow 4$	5	6
$\leftarrow 5$	5	7
$\leftarrow 6$	5	6
$\leftarrow 7$	5	6

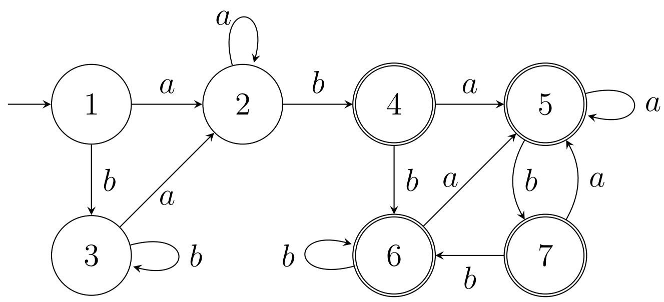


FIGURE 6 – Automate déterministe pour $(b^*a^*)^*ab(a+b)^*$

On remarque qu'on vient d'obtenir le même automate qu'en a). Ceci ne doit pas être forcément le cas (car ces automates ne sont pas minimaux) et ceci malgré le fait qu'il s'agit bien de deux expressions rationnelles différentes pour le même langage. Il s'agit du langage des mots admettant ab comme facteur, pour lequel on peut facilement construire un automate déterministe à 3 états.

3.

Le tableau des $r_{i,j}^k$ se présente ainsi :

k	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$r_{1,1}^k$	ε			
$r_{1,2}^k$	0	0	$0(00)^\star$	$0(00)^\star + 0^\star 1((0+1)0^\star 1)^\star (0+1)(00)^\star$
$r_{1,3}^k$	1	1	$0^\star 1$	$0^\star 1((0+1)0^\star 1)^\star$
$r_{2,1}^k$	0			
$r_{2,2}^k$	ε	$\varepsilon + 00$		
$r_{2,3}^k$	1	$1+01$		
$r_{3,1}^k$	$\varnothing$			
$r_{3,2}^k$	Σ	Σ	$(0+1)(00)^\star$	
$r_{3,3}^k$	ε	ε	$\varepsilon + (0+1)0^\star 1$	

Ce qui permet de conclure que l'expression rationnelle cherchée est :

$$L(A) = r_{12}^3 + r_{13}^3 = 0(00)^\star + 0^\star 1((0+1)0^\star 1)^\star (0+1)(00)^\star + 0^\star 1((0+1)0^\star 1)^\star$$