Automates à piles & grammaires

Corrigé partiel de la feuille de travaux dirigés n^{o}9

1. $G = [V, T, P, S]$, avec
$V = \{S,\ Z_{0,0},\ Z_{0,1},\ X_{0,0},\ X_{0,1},\ Z_{1,0},\ Z_{1,1},\ X_{1,0},\ X_{1,1}\}$,
$T = \{0, 1\}$, et P contenant les règles :

- Pour l'axiome
  $S \to Z_{0,0} \mid Z_{0,1}$
- A partir de la transition 1
  $Z_{0,0} \to\ 1X_{0,0}Z_{0,0} \mid 1X_{0,1}Z_{1,0}$
  $Z_{0,1} \to\ 1X_{0,0}Z_{0,1} \mid 1X_{0,1}Z_{1,1}$
- A partir de la transition 2
  $X_{0,0} \to\ 1X_{0,0}X_{0,0} \mid 1X_{0,1}X_{1,0}$
  $X_{0,1} \to\ 1X_{0,0}X_{0,1} \mid 1X_{0,1}X_{1,1}$
- A partir de la transition 3
  $X_{0,0} \to\ 0X_{1,0}$
  $X_{0,1} \to\ 0X_{1,1}$
- A partir de la transition 4
  $Z_{0,0} \to \varepsilon$
- A partir de la transition 5
  $X_{1,1} \to 1$
- A partir de la transition 6
  $Z_{1,0} \to 0Z_{0,0}$
  $Z_{1,1} \to\ 0Z_{0,1}$

En notant $A = Z_{0,0}$; $B = Z_{0,1}$; $C = X_{0,0}$; $D = X_{0,1}$; $E = Z_{1,0}$; $F = Z_{1,1}$; $G = X_{1,0}$; $H = X_{1,1}$ nous obtenons :

$N = \{S, A, B, C, D, E, F, H\}$,
$T = \{0, 1\}$,
S

$$P \left\{ \begin{array}{l} S \to A \mid B \\ A \to 1CA \mid 1DE \mid \varepsilon \\ B \to 1CB \mid 1DF \\ C \to 0G \mid 1CC \mid 1DG \\ D \to 0H \mid 1CD \mid 1DH \\ E \to 0A \\ F \to 0B \\ H \to 1 \end{array} \right.$$

Les variables productives sont : $\{A, H, S, D, E\}$, ce qui permet de supprimer B, C, F, G et nous obtenons :

$N = \{S, A, D, E, H\}$,
$T = \{0, 1\}$,
S

$$P \begin{cases} S \to A \\ A \to 1DE \mid \varepsilon \\ D \to 0H \mid 1DH \\ E \to 0A \\ H \to 1 \end{cases}$$

Tous les variables sont accessibles. On peut supprimer A (renommage) et substituer H et E pour obtenir :
$N = \{S, D\}$,
$T = \{0, 1\}$,
S

$$P \begin{cases} S \to 1D0S \mid \varepsilon \\ D \to 01 \mid 1D1 \end{cases}$$

Comme D engendre $L_D = \{1^k 0 1^{k+1} \mid k \geq 0\}$, ainsi $1D0$ engendre $L_{1D0} = \{1^{k+1} 0 1^{k+1} 0 \mid k \geq 0\}$. Ainsi, S engendre $L^\star_{1D0}$.

2. Un automate à pile du TD précédent était : $M = [\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{1, 2, +, =\}, \{Z, X, Y\}, q_0, \emptyset, Z, \delta]$

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_0	1	Z	q_0	YZ
q_0	2	Z	q_0	YXZ
q_0	$+$	Y	q_0	X
q_0	1	X	q_0	YX
q_0	2	X	q_0	YXX
q_0	$=$	Y	q_1	X

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_1	1	X	q_3	$-$
q_3	ε	X	q_1	Y
q_1	2	X	q_2	$-$
q_2	ε	X	q_3	$-$
q_1	$+$	Y	q_1	X
q_3	ε	Z	q_3	$-$

Quelle est la grammaire qui correspond à cet automate à pile ?
$G = [V, T, P, S]$, avec $V = \{S, Z_{i,j}, X_{i,j}, Y_{i,j} \mid i, j \in \{0, 1, 2, 3\}\}$, $T = \{1, 2, =, +\}$ et P :

- Pour l'axiome : $S \to Z_{0,i}$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 1 : $Z_{0,i} \to 1Y_{0,j}Z_{j,i}$ pour $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 2 : $Z_{0,i} \to 2Y_{0,j}X_{j,k}Z_{k,i}$ pour $i, j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 3 : $Y_{0,i} \to +X_{0,i}$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 4 : $X_{0,i} \to 1Y_{0,j}X_{j,i}$ pour $i, j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 5 : $X_{0,i} \to 2Y_{0,j}X_{j,k}X_{k,i}$ pour $i, j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 6 : $Y_{0,i} \to = X_{1,i}$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 7 : $X_{1,3} \to 1$
- A partir de la transition 8 : $X_{3,i} \to Y_{1,i}$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 9 : $X_{1,2} \to 2$
- A partir de la transition 10 : $X_{2,3} \to \varepsilon$
- A partir de la transition 11 : $Y_{1,i} \to +X_{1,i}$pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$
- A partir de la transition 12 : $Z_{3,3} \to \varepsilon$

Les variables productives sont : $\{S, X_{0,2}, X_{0,3}, X_{1,2}, X_{1,3}, X_{2,3}, X_{3,2}, X_{3,3}, Y_{0,2}, Y_{0,3}, Y_{1,2}, Y_{1,3}, Z_{0,3}, Z_{3,3}\}$:

Et ainsi on obtient la grammaire :
$V = \{S, X_{0,2}, X_{0,3}, X_{1,2}, X_{1,3}, X_{2,3}, X_{3,2}, X_{3,3}, Y_{0,2}, Y_{0,3}, Y_{1,2}, Y_{1,3}, Z_{0,3}, Z_{3,3}\}$,
$T = \{1, 2, +, =\}$,
S

$$P \left\{ \begin{array}{l} S \to Z_{0,3} \\ Z_{0,3} \to 1Y_{0,3}Z_{3,3} \mid 2Y_{0,2}X_{2,3}Z_{3,3} \mid 2Y_{0,3}X_{3,3}Z_{3,3} \\ Y_{0,2} \to +X_{0,2} \mid = X_{1,2} \\ Y_{0,3} \to +X_{0,3} \mid = X_{1,3} \\ X_{0,2} \to 1Y_{0,3}X_{3,2} \mid 2Y_{0,2}X_{2,3}X_{3,2} \mid 2Y_{0,3}X_{3,3}X_{3,2} \\ X_{0,3} \to 1Y_{0,2}X_{2,3} \mid 1Y_{0,3}X_{3,3} \mid 2Y_{0,2}X_{2,3}X_{3,3} \mid 2Y_{0,3}X_{3,2}X_{2,3} \mid 2Y_{0,3}X_{3,3}X_{3,3} \\ X_{1,3} \to 1 \\ X_{3,2} \to Y_{1,2} \\ X_{3,3} \to Y_{1,3} \\ X_{1,2} \to 2 \\ X_{2,3} \to \varepsilon \\ Y_{1,2} \to +X_{1,2} \\ Y_{1,3} \to +X_{1,3} \\ Z_{3,3} \to \varepsilon \end{array} \right.$$

Toutes les variables sont accessibles. Après suppression des ε-productions, des renommages et quelques substitutions :

$$V = \{S, X_{0,2}, X_{0,3}, X_{3,2}, X_{3,3}, Y_{0,2}, Y_{0,3}\},$$
$$T = \{1, 2, +, =\},$$
$$S$$
$$P \left\{ \begin{array}{l} S \to\ 1Y_{0,3} \mid 2Y_{0,2} \mid 2Y_{0,3}X_{3,3} \\ Y_{0,2} \to\ +X_{0,2} \mid\ = 2 \\ Y_{0,3} \to\ +X_{0,3} \mid\ = 1 \\ X_{0,2} \to\ 1Y_{0,3}X_{3,2} \mid 2Y_{0,2}X_{3,2} \mid 2Y_{0,3}X_{3,3}X_{3,2} \\ X_{0,3} \to\ 1Y_{0,2} \mid 1Y_{0,3}X_{3,3} \mid 2Y_{0,2}X_{3,3} \mid 2Y_{0,3}X_{3,2} \mid 2Y_{0,3}X_{3,3}X_{3,3} \\ X_{3,2} \to\ +2 \\ X_{3,3} \to\ +1 \end{array} \right.$$

Après le renommage des variables $A = Y_{0,2}$, $B = Y_{0,3}$, $C = X_{0,2}$, $D = X_{0,3}$, $E = X_{3,2}$, $F = X_{3,3}$ nous obtenons :

$$V = \{S, A, B, C, D, E, F\},$$
$$T = \{1, 2, +, =\},$$
$$S$$
$$P \left\{ \begin{array}{ll} S \to\ 1B \mid 2A \mid 2BF & A \to\ +C \mid\ = 2 \\ B \to\ +D \mid\ = 1 & C \to\ 1BE \mid 2AE \mid 2BFE \\ D \to\ 1A \mid 1BF \mid 2AF \mid 2BFF \mid 2BE & E \to\ +2 \\ F \to\ +1 & \end{array} \right.$$

On peut remarquer que cela se simplifie en

$$V = \{S, A, B, C, D\},$$
$$T = \{1, 2, +, =\},$$
$$S$$
$$P \left\{ \begin{array}{ll} S \to\ 1B \mid 2A \mid 2B+1 & A \to\ +C \mid\ = 2 \\ B \to\ +D \mid\ = 1 & C \to\ S+2 \\ D \to\ 1A \mid S+1 \mid 2B+2 & \end{array} \right.$$

Et en simplifiant encore

$$V = \{S, D\},$$
$$T = \{1, 2, +, =\},$$
$$S$$
$$P \left\{ \begin{array}{l} S \to\ 1=1 \mid 2=2 \mid 2=1+1 \mid 2+S+2 \mid 1+D \mid 2+D+1 \\ D \to\ S+1 \mid 1+S+2 \mid 1=2 \mid 2+D+2 \mid 2=1+2 \end{array} \right.$$

3. Un autre automate à pile du TD précédent était : $M = [\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{1, 2, +, =\}, \{Z, X, Y\}, q_0, \emptyset, Z, \delta]$

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_0	1	Z	q_0	YZ
q_0	2	Z	q_0	YXZ
q_0	$+$	Y	q_0	X
q_0	1	X	q_0	YX
q_0	2	X	q_0	YXX
q_0	$=$	Y	q_1	X

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_1	1	X	q_3	$-$
q_3	ε	X	q_1	Y
q_1	2	X	q_2	$-$
q_2	ε	X	q_3	$-$
q_1	$+$	Y	q_1	X
q_3	ε	Z	q_3	$-$

Quelle est la grammaire qui correspond à cet automate à pile ?
$G = [V, T, P, S]$, avec
$V = \{S, Z_{i,j}, X_{i,j}, Y_{i,j}\}$
$T = \{1, 2, +, =\}$ et P :
S

- Pour l'axiome : $S \to Z_{0,i}$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$
- A partir de la transition 1 : $Z_{0,i} \to 1Y_{0,j}Z_{j,i}$ pour $i, j \in \{0, 1, 2\}$
- A partir de la transition 2 : $Z_{0,i} \to 2Y_{0,j}X_{j,k}Z_{k,i}$ pour $i, j, k \in \{0, 1, 2\}$
- A partir de la transition 3 : $Y_{0,i} \to +X_{0,i}$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$
- A partir de la transition 4 : $X_{0,i} \to 1Y_{0,j}X_{j,i}$ pour $i, j, k \in \{0, 1, 2\}$
- A partir de la transition 5 : $X_{0,i} \to 2Y_{0,j}X_{j,k}X_{k,i}$ pour $i, j, k \in \{0, 1, 2\}$
- A partir de la transition 6 : $Y_{0,1} \to =$
- A partir de la transition 7 : $X_{1,i} \to 1X_{2,i}$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$
- A partir de la transition 8 : $X_{1,2} \to 2$
- A partir de la transition 9 : $X_{2,1} \to +$
- A partir de la transition 10 : $X_{2,2} \to \varepsilon$

Les variables productives sont : $\{S, X_{0,1}, X_{0,2}, X_{1,1}, X_{1,2}, X_{2,1}, Y_{0,1}, Y_{0,2}, Z_{0,2}, Z_{2,2}\}$:
On obtient la grammaire :
$V = \{S, X_{0,1}, X_{0,2}, X_{1,1}, X_{1,2}, X_{2,1}, Y_{0,1}, Y_{0,2}, Z_{0,2}, Z_{2,2}\}$,
$T = \{1, 2, +, =\}$,
S

$$P \left\{ \begin{array}{l} S \to Z_{0,2} \\ Z_{0,2} \to 1Y_{0,2}Z_{2,2} \mid 2Y_{0,1}X_{1,2}Z_{2,2} \\ Y_{0,1} \to +X_{0,1} \mid = \\ Y_{0,2} \to +X_{0,2} \\ X_{0,1} \to 1Y_{0,1}X_{1,1} \mid 1Y_{0,2}X_{2,1} \mid 2Y_{0,2}X_{2,1}X_{1,1} \mid 2Y_{0,1}X_{1,1}X_{1,1} \mid 2Y_{0,1}X_{1,2}X_{2,1} \\ X_{0,2} \to 1Y_{0,1}X_{1,2} \mid 2Y_{0,2}X_{2,1}X_{1,2} \mid 2Y_{0,1}X_{1,1}X_{1,2} \\ X_{1,1} \to 1X_{2,1} \\ X_{1,2} \to 2 \\ X_{2,1} \to + \\ Z_{2,2} \to \varepsilon \end{array} \right.$$

Toutes les variables sont accessibles. Après suppression des ε-productions, des renommages et quelques substitutions :
$V = \{S, X_{0,1}, X_{0,2}, Y_{0,1}\}$,
$T = \{1, 2, +, =\}$,
S

$$P \left\{ \begin{array}{l} S \to 1 + X_{0,2} \mid 2Y_{0,1}2 \\ Y_{0,1} \to +X_{0,1} \mid = \\ X_{0,1} \to 1Y_{0,1}1+ \mid 1 + X_{0,2}+ \mid 2 + Y_{0,2} + 1+ \mid 2 + 1 + 1+ \mid 2 = 2+ \\ X_{0,2} \to 1Y_{0,1}2 \mid 2 + X_{0,2} + 2 \mid 2Y_{0,1}1 + 2 \end{array} \right.$$

Après le renommage $A = x_{0,1}$, $B = X_{0,2}$, $C = Y_{0,1}$ nous obtenons :

$V = \{S, A, B, C\}$,
$T = \{1, 2, +, =\}$,
S

$$P \begin{cases} S \rightarrow \ 1 + B \mid 2C2 \\ A \rightarrow \ 1C1+ \ \mid 1 + B + \ \mid 2 + B + 1 + \ \mid 2 = 1 + 1 + \ \mid 2 = 2+ \\ B \rightarrow \ 1C2 \mid 2 + B + 2 \mid 2C1 + 2 \\ C \rightarrow \ +A \mid \ = \end{cases}$$

On peut remarquer que cela se simplifie en
$V = \{S, B, C\}$,
$T = \{1, 2, +, =\}$,
S

$$P \begin{cases} S \rightarrow \ 1 + B \mid 2C2 \\ B \rightarrow \ 1C2 \mid 2 + B + 2 \mid 2C1 + 2 \\ C \rightarrow \ +1C1+ \ \mid \ +1 + B + \ \mid \ +2 + B + 1 + \ \mid \ +2 = 1 + 1 + \ \mid \ +2 = 2 + \ \mid \ = \end{cases}$$

Cette grammaire est moins élégante que celle obtenue dans l'exercice précédent, mais reste assez facile à expliquer.
Il faudrait prouver qu'elle est équivalente à celle du l'exercice précédent, mais on ne peut pas décider si deux grammaires engendrent le même langage, car nous ne disposons pas de mécanisme pour vérifier l'équivalence de deux grammaires. La preuve serait donc "*ad-hoc*".