Cours 1. Probabilités discrètes

La théorie des probabilités s'intéresse à l'études des évènements aléatoires. En partant de l'hypothèse que certains évènements élémentaires apparaissent de manière imprévisible mais que leur fréquence moyenne d'apparition est connue, on peut alors calculer des probabilités pour des évènements beaucoup plus complexes.

> *Si on considère un lancement de dé équilibré, on fera par exemple l'hypothèse qu'on a la même chance d'obtenir chaque face du dé. À partir de cette hypothèse, on pourra calculer la chance d'obtenir un nombre pair, ou combien de fois en moyenne faut-il lancer le dé pour obtenir un 6.*
> *Bien évidemment, il existe une différence fondamentale entre le modèle mathématique et la réalité. Dans cet exemple, le résultat obtenu en lançant le dé dépend de nombreux paramètres dont la vitesse et l'orientation du dé au moment de son lancer. D'une manière générale, l'existence même du hasard est une question métaphysique.*

A. Univers fini ou dénombrable

A.1. Loi de probabilité

Une **loi de probabilité** $\mathbb{P}$ sur un ensemble fini ou dénombrable Ω est une fonction de Ω dans $[0,1]$ vérifiant :

$$1 = \sum_{e\in\Omega} \mathbb{P}(e)$$

Tout sous-ensemble de Ω est appelé un **évènement**. Un singleton de Ω est appelé un **évènement élémentaire**.
L'ensemble vide $\{\}$ est l'**évènement impossible**. La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le compose :

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{e\in E} \mathbb{P}(e)$$

Pour tout évènement E, on appelle $\overline{E}$ l'**évènement contraire** de E. C'est l'ensemble complémentaire de E dans Ω.

$$\mathbb{P}(\overline{E}) = 1 - \mathbb{P}(E)$$

A.2. Union et Intersection

L'évènement **«A et B»** est l'intersection des évènement A et B. C'est l'évènement qui représente l'apparition en même temps des évènement A et B.
L'évènement **«A ou B»** est l'union des évènement A et B. C'est l'évènement qui représente l'apparition d'un des deux (au moins) évènements A et/ou B.

$$\mathbb{P}(A \text{ ou } B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \text{ et } B)$$

Deux évènements dont l'intersection est vide sont appelés **disjoints**.

A.3. Loi uniforme

Une loi uniforme sur un ensemble fini est une fonction constante qui associe la même valeur à tous les évènements élémentaires. Soit $|\Omega|$ le nombre d'éléments de Ω, alors :

$$\forall e \in \Omega \quad \mathbb{P}(e) = \frac{1}{|\Omega|}$$

On notera qu'il n'existe pas de loi uniforme sur un ensemble dénombrable infini.

A.4. Probabilités conditionnelles

On appelle **probabilité de A sachant B** :

$$\mathbb{P}_B(A) = \begin{cases} \dfrac{\mathbb{P}(A \text{ et } B)}{\mathbb{P}(B)} & (\mathbb{P}(B) > 0) \\ \mathbb{P}(A) & (\mathbb{P}(B) = 0) \end{cases}$$

$\mathbb{P}_B$ est une loi de probabilité sur B. On en déduit la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Deux évènements sont **indépendants** si et seulement si :

$$\mathbb{P}(A \text{ et } B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Les propositions suivantes sont équivalentes :
- A et B sont indépendants
- $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.

A.5. Exemple

Considérons l'expérience suivante : on effectue un tirage d'un dé équilibré à 6 faces.
Loi de probabilité uniforme sur $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$\forall e \in \Omega \quad \mathbb{P}(e) = \frac{1}{6}$$

- A=Tirer un nombre pair = $\{2,4,6\}$ est un évènement
- B=Tirer 3 = $\{3\}$ est un évènement élémentaire
- C=Tirer un nombre impair = $\{1,3,5\}$ est l'évènement complémentaire de A
- A et B sont disjoints
- D=Tirer un multiple de 3 = $\{3,6\}$ est indépendant de A.

$\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}$	$\mathbb{P}(B)=\frac{1}{6}$	$\mathbb{P}(C)=\frac{1}{2}$	$\mathbb{P}(D)=\frac{1}{3}$
$\mathbb{P}_A(A)=1$	$\mathbb{P}_A(B)=0$	$\mathbb{P}_A(C)=0$	$\mathbb{P}_A(D)=\frac{1}{3}$
$\mathbb{P}_B(A)=0$	$\mathbb{P}_B(B)=1$	$\mathbb{P}_B(C)=1$	$\mathbb{P}_B(D)=1$
$\mathbb{P}_C(A)=0$	$\mathbb{P}_C(B)=\frac{1}{3}$	$\mathbb{P}_C(C)=1$	$\mathbb{P}_C(D)=\frac{1}{3}$
$\mathbb{P}_D(A)=\frac{1}{2}$	$\mathbb{P}_D(B)=\frac{1}{2}$	$\mathbb{P}_D(C)=\frac{1}{2}$	$\mathbb{P}_D(D)=1$

B. Variable aléatoire

Une variable aléatoire est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ (on peut considérer des espaces plus complexes que $\mathbb{R}$).
On définit alors les évènements $(X = x)$ par l'ensemble $\{e \in \Omega \mid X(e) = x\}$

> *La plupart du temps on considérera simplement la fonction identité, et la variable aléatoire représentera alors le résultat d'une expérience.*
> *Ainsi* $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\{x\})$

Deux variables aléatoire X et Y sont **indépendantes** ssi pour tout x et pour tout y les deux évènements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants.

B.1. Répartition

La **fonction de répartition** F d'une variable aléatoire X est définie par :

$$F(i) = \mathbb{P}(X \leq i) = \sum_{x \leq i} \mathbb{P}(X = x)$$

C'est un fonction croissante de 0 à 1. On peut alors définir la probabilité d'un intervalle par :

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

B.2. Espérance

L'**espérance** de X est définie par :

$$E(X) = \sum_{e \in \Omega} X(e) \times \mathbb{P}(e)$$

Une définition équivalente est :

$$E(X) = \sum_{i \in I} i \times \mathbb{P}(X = i)$$

avec I l'ensemble des valeurs prises par X.

> *Intuitivement, l'espérance est la limite que l'on obtiendra en faisant la moyenne des résultats d'un grand nombre de répétitions indépendantes de l'expérience.*

Pour toute fonction f on peut alors calculer l'espérance de $f(X)$ par :

$$E(f(X)) = \sum f(i) \times \mathbb{P}(X = i)$$

Comme la somme est commutative et assiociative on a :

$$E(aX + b) = a.E(X) + b \quad (a \text{ et } b \text{ constante})$$
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

De plus, si X et Y sont des variables indépendantes on a :

$$E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)$$

Sur un ensemble fini, l'espérance est toujours bien définie, mais ce n'est pas forcément le cas sur un ensemble infini : l'espérance peut être infinie (la somme converge vers l'infini) ou même non définie (somme divergente). Si l'espérance est infinie, cela signifie que la moyenne des résultats en répétant l'expérience tendra vers l'infini. Si l'espérance n'est pas définie, cela signifie que l'on ne peut pas prédire comment évoluera la moyenne des résultats.

> *On utilisera préférentiellement le mot **moyenne** pour désigner la moyenne calculée des résultats de tirages déjà effectués.*

B.3. Variance

La **variance** de X est définie par :

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

La variance est donc l'espérance des carrés des écarts à l'espérance. Il est donc facile de prouver que :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

C'est cette formule que l'on utilisera le plus souvent pour calculer la variance qui a également les propriétés suivantes :

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

De plus si X et Y sont des variables indépendantes on a :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

> *La variance permet de mesurer la variabilité d'une variable aléatoire. Si la variable prend toujours la même valeur avec probabilité 1, il est facile de voir que la variance sera nulle. Si au contraire la variable peut prendre des valeurs très différentes, la variance sera grande.*

L'**écart-type** (noté σ) est la racine carré de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

> *L'écart-type est parfois préféré à la variance, car il est de même dimension que X : on utilise les mêmes unités.*
> *Par exemple si X est une longueur en mètres, $E(X)$ et $\sigma(X)$ seront aussi des longueurs en mètres, alors que $V(X)$ sera une surface en m^2.*

Sur un ensemble fini, la variance est toujours définie. Sur un ensemble infini, il est possible d'avoir une variance infinie. Si la variance est finie, alors l'espérance est finie, mais l'inverse n'est pas vraie. Une variance infinie signifie que la moyenne des résultats de l'expérience répétée tend vers l'espérance (si elle existe !), mais avec une convergence particulière (très lente).

C. Lois

Outre la loi uniforme, il existe de nombreuses lois de probabilité que l'on retrouve régulièrement dans certaines expériences. Nous étudierons ici trois lois classiques.

C.1. Loi binomiale

Soit une expérience qui réussit avec un probabilité p et qui échoue avec une probabilité $(1 - p)$. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de réussite de n expériences identiques et indépendantes. X suit alors la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:

$$\mathbb{P}(X = i) = \tbinom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}$$
$$E = np \qquad V = np(1 - p)$$

C.2. Loi de Poisson

La loi de poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ permet de modéliser différentes expériences. C'est l'approximation d'une binomiale lorsque n est grand et p petit et que l'on connait l'espérance de l'expérience ($\lambda = np$) mais pas forcément n et p.

$$\mathbb{P}(X = i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$$
$$E = \lambda \qquad V = \lambda$$

On utilise la loi de poisson pour compter le nombre d'occurence d'un phénomène dont la moyenne d'apparition est proportionnelle au temps d'attente.

> *Si je sais qu'en moyenne trois clients appellent la ligne téléphonique toutes les minutes, alors le nombre de clients qui appellent en une minute suivra une loi de poisson $\mathcal{P}(3)$, et le nombre qui client qui appellent en 5 minutes suivra une loi de poisson $\mathcal{P}(15)$.*

C.3. Loi géométrique

Soit une expérience qui réussit avec un probabilité p et qui échoue avec une probabilité $(1-p)$. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'expériences à réaliser pour obtenir une réussite (on répète l'expérience jusqu'à obtenir une réussite et on compte le nombre d'essais effectués).

$$\mathbb{P}(X=i)=(1-p)^{i-1}p$$

$$E=\frac{1}{p}\qquad V=\frac{1-p}{p^2}$$