IT2

TD 23/04/2020

Algorithme CYK

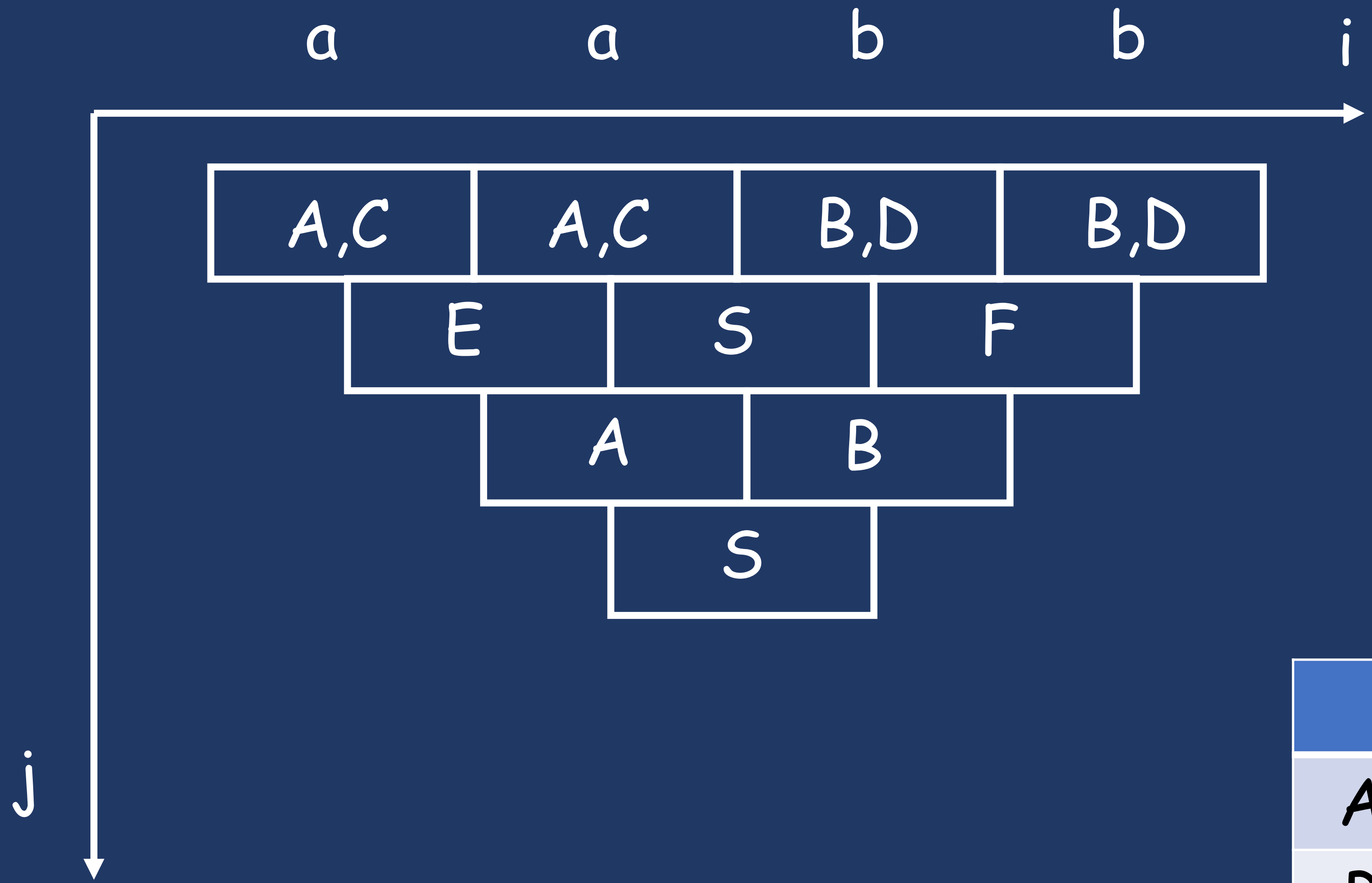
Appliquer l'algorithme CYK au langage des mots, contenant autant de a que de b, vu en semaine 6 :

$S \to aB \mid bA$

$A \to a \mid aS \mid bAA$

$B \to b \mid bS \mid aBB$

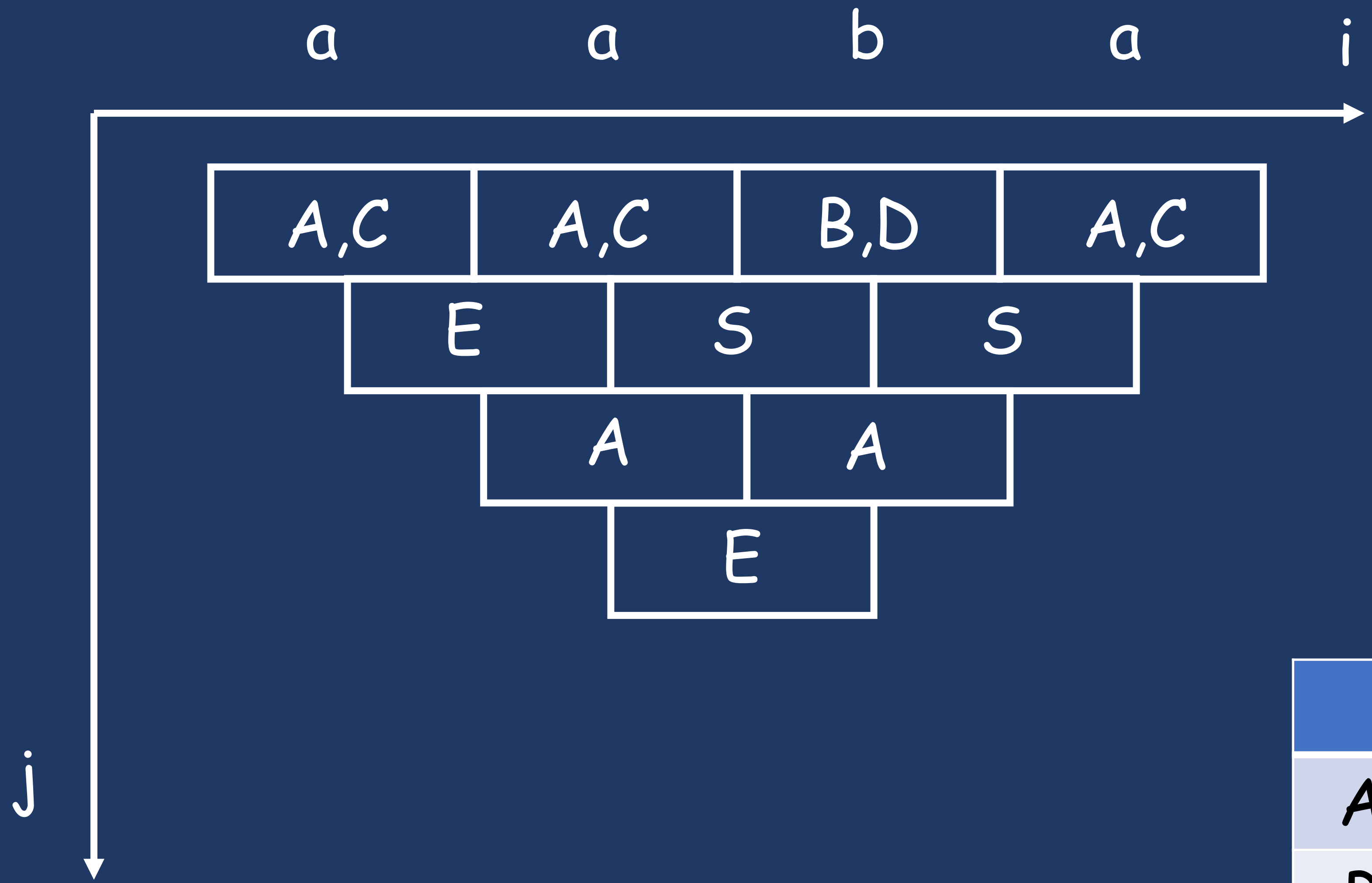
Pour décider si les mots aabb et aaba appartiennent au langage.



$S \rightarrow CB \mid DA$
$A \rightarrow CS \mid DE \mid a$
$B \rightarrow DS \mid CF \mid b$
$C \rightarrow a$
$D \rightarrow b$
$E \rightarrow AA$
$F \rightarrow BB$

	A	B	E	F	S
A	E				
B		F			
C		S		B	A
D	S		A		B

Donc aabb $\in$ L



$S \rightarrow CB \mid DA$

$A \rightarrow CS \mid DE \mid a$

$B \rightarrow DS \mid CF \mid b$

$C \rightarrow a$

$D \rightarrow b$

$E \rightarrow AA$

$F \rightarrow BB$

	A	B	E	F	S
A	E				
B		F			
C		S		B	A
D	S		A		B

Donc aaba $\notin$ L

Lemme de la pompe

Les langages suivants sont-ils algébriques ? Justifiez vos réponses

a) $L_1 = \{a^i b^j c^k : i < j < k\}$
b) $L_2 = \{a^i b^j : j = i^2\}$
c) $L_3 = \{a^n b^n c^m : n \leq m \leq 2n\}$
d) $L_5 = \bar{L}_1 \cap a^\star b^\star c^\star$
e) $L_6 = \{ww^{-1}w : w \in (a+b)^\star\}$
f) $L_7 = \{w \in (a+b+c)^\star : |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$

a) $L_1 = \{a^i b^j c^k : i < j < k\}$

Supposons L_1 algébrique. Soit $z=a^n b^{n+1} c^{n+2}$.

- z se factorise en z=uvwxy.

Comme $|vwx| \leq n$, vwx ne peut pas contenir des a et des c à la fois.

(De même vx)

Si vx contient des a alors dans uv^3wx^3y nous n'avons pas $i<k$.

Sinon, si vx contient des b alors dans uwy nous n'avons pas $i<j$.

Sinon, alors vx contient que des c et dans uwy nous n'avons pas $i<k$.

b) $L_2 = \{a^i b^j : j = i^2\}$

Supposons L_2 algébrique. Soit $z=a^n b^{n^2}$.

- z se factorise en z=uvwxy.

Soient k le nombre de a dans vx et m le nombre de b.

Comme uwy doit être dans L_2 nous avons $(n-k)^2=n^2-m$, donc

$$k^2-2kn+m=0.$$

Comme uv^2wx^2y doit être dans L_2 nous avons $(n+k)^2=n^2+m$, donc

$$k^2+2kn-m=0.$$

Ainsi $k^2=0$ donc $k=0$, ce qui implique $m=0$.

c) $L_3 = \{a^n b^n c^m : n \leq m \leq 2n\}$

Supposons L_3 algébrique. Soit $z=a^nb^nc^n$.

- z se factorise en z=uvwxy.

Comme $|vwx| \leq n$, vwx ne peut pas contenir des a et des c à la fois.

(Donc vx)

- Si vx contient des a alors dans uv^2wx^2y nous avons plus de a que c.
- Sinon, si vx contient des b alors dans uwy nous avons plus de a que b.
- Sinon, alors vx contient que des c et dans uwy nous avons plus de a que c.

d) $L_5 = \bar{L_1} \cap a^\star b^\star c^\star$

Nous avons $L_5 = \{a^i b^j c^k \mid i \geq j \text{ ou } j \geq k\}$.

Ainsi $L_5 = \{a^i b^j \mid i \geq j\}\, c^* \cup a^* \{b^j c^k \mid j \geq k\}$

Ce qui est algébrique.

e) $L_6 = \{ww^{-1}w : w \in (a+b)^\star\}$

Supposons L_6 algébrique. Soit R=a*b*a*b*.

Soit $L = L_6 \cap R = \{a^i b^{2j} a^{2i} b^j \mid i,j \geq 0\}$.

Pour L on peut utiliser le lemme de la pompe. Soit n du lemme.

Soit $z = a^n b^{2n} a^{2n} b^n$ et considérons une factorisation z = uvwxy.

Notons z=ABCD avec $A=a^n$, $B=b^{2n}$, $C=a^{2n}$, $D=b^n$.

Si vx contient au moins un a, vx ne peut pas intersecter à la fois A et C, ainsi uwy n'est pas dans L.

Sinon, vx contient au moins un b, vx ne peut pas intersecter à la fois B et D, ainsi uwy n'est pas dans L.

Ainsi L n'est pas algébrique et donc L_6 n'est pas algébrique.

f) $L_7 = \{w \in (a+b+c)^\star : |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$

Supposons L_7 algébrique. Soit $R=a^*b^*c^*$.

Soit $L = L_7 \cap R = \{a^ib^ic^i \mid i \geq 0\}$.

Nous avons déjà vu que ce langage n'est pas algébrique, donc L_7 n'est pas algébrique.