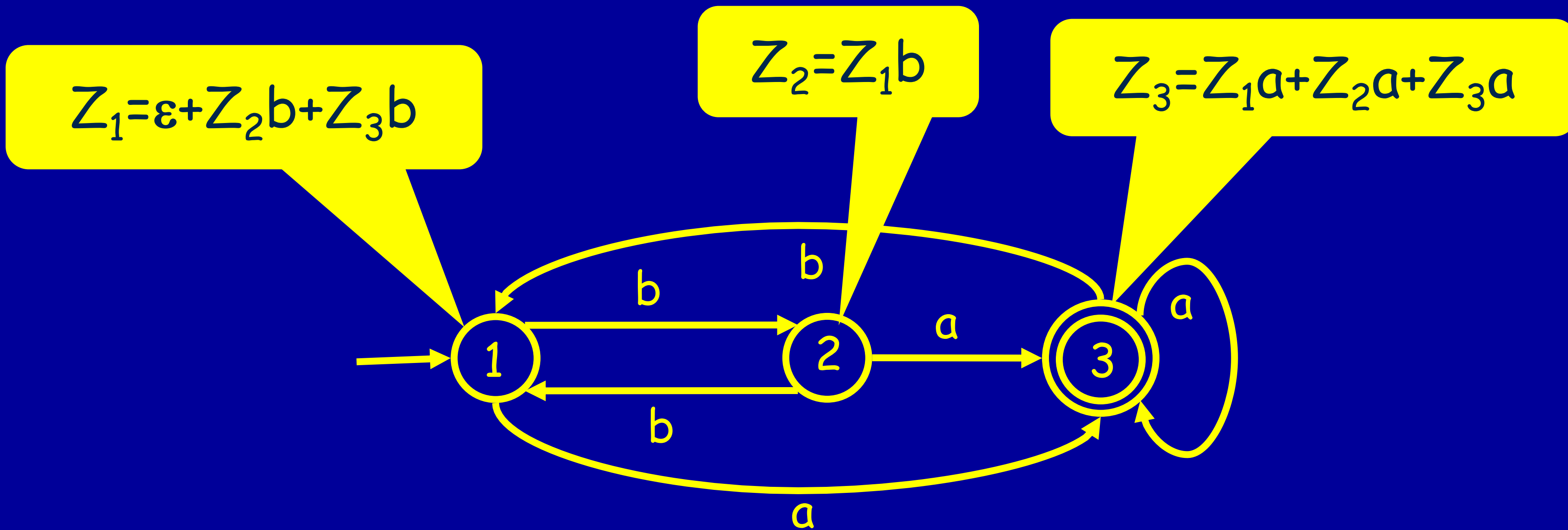
Systèmes d'équations linéaires

Méthode de résolution

- Ramener le calcul d'une ER décrivant le langage reconnu à la résolution d'un système d'équations linéaires (à droite) dont les inconnues sont des langages.

Exemple



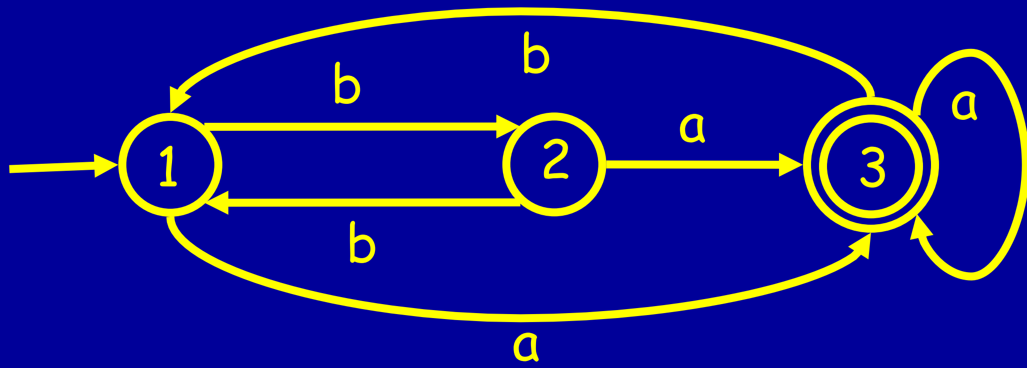
Z_i ={étiquettes des chemins reliant 1 à *i*}

$Z_i = \{w \in \Sigma^* : \delta(init, w)=i\}$

On prend en compte tous les **arcs entrants**

On cherche à résoudre pour les Z_i: $i \in T$

Exemple



$$\begin{cases} Z_1 = \varepsilon + Z_2 b + Z_3 b \\ Z_2 = Z_1 b \\ Z_3 = Z_1 a + Z_2 a + Z_3 a \end{cases}$$

Z_i ={étiquettes des chemins reliant 1 à *i*}

$Z_i = \{w \in \Sigma^* : \delta(init, w)=i\}$

On prend en compte tous les **arcs entrants**

On cherche à résoudre pour les Z_i: $i \in T$

Résolution

- On cherche une ER pour Z_3 i.e. les étiquettes qui conduisent de l'état initial à l'état terminal
- Il faut savoir résoudre

$$Z=ZA+B$$

pour A et B des langages

$$\begin{cases} Z_1 = \varepsilon+Z_2b+Z_3b \\ Z_2 = Z_1b \\ Z_3 = Z_1a+Z_2a+Z_3a \end{cases}$$

Ceci correspond à une résolution «classique» :

$$Z(1-A)=B$$

d'où

$$Z=B \; . \; 1/(1-A) = B \; . \; A^*$$

Résolution de Z=ZA+B

- Le langage BA* est une solution de Z=ZA+B
- X=BA* est la plus petite solution. Alors,

  $BA^* = BA^*.A + B = BA^+ + B = B.(A^+ + \varepsilon) = BA^*$

- Si X solution de Z=ZA+B, alors $BA^* \subseteq X$ (plus petite solution); induction sur i: $BA^i \subseteq X$
  - $i=0$, $BA^0 = B \subseteq X$ car $X = XA + B$
  - Vrai pour $i \leq n$.

    vérifions $BA^{n+1} \subseteq X$: $BA^{n+1} = (BA^n)A \subseteq (X).A \subseteq XA + B = X$

$\varepsilon \notin A \Rightarrow BA^*$ unique solution

- Si $\varepsilon \notin A$, BA^* unique solution de $Z=ZA+B$
- Supposons la non unicité de la solution et soit X une solution autre que BA^*.
  Soit $w \in X \backslash BA^*$ (BA^* est la plus petite solution) t.q. w est de longueur minimale.
  X solution $\Rightarrow$ $w=v.u$ pour $v \in X$ et $u \in A$

  (car $w \notin BA^* \Rightarrow w \notin B$)

  $v \notin BA^*$ (sinon $w \in BA^*$) donc $v \in X \backslash BA^*$
  $|v|=|w|-|u|<|w|$, **contradiction**.

$\varepsilon \notin A \Rightarrow BA^*$ unique solution

Si $\varepsilon \in A$, alors pour tout $C \subseteq \Sigma^*$, une autre solution est

$$X = BA^* + CA^*$$

- $XA+B = (BA^*+CA^*)A+B = BA^+ + CA^+ + B = BA^* + CA^+ = X$ (car $\varepsilon \in A \Rightarrow A^+ = A^*$)

Exemple (suite)

$$\begin{cases} Z_1 = \varepsilon + Z_2 b + Z_3 b \\ Z_2 = Z_1 b \\ Z_3 = Z_1 a + Z_2 a + Z_3 a \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_1 = \varepsilon + Z_1 bb + Z_3 b \\ Z_3 = Z_1 a + Z_1 ba + Z_3 a \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_1 = (\varepsilon + Z_3 b)(bb)^* \\ Z_3 = Z_1(a+ba) + Z_3 a \end{cases}$$

$$\{ Z_3 = (\varepsilon + Z_3 b)(bb)^* (a+ba) + Z_3 a$$

$$\{ Z_3 = Z_3(b(bb)^*(a+ba)+a)+(bb)^*(a+ba)$$

$$\{ Z_3 = (bb)^*(a+ba)(b(bb)^*(a+ba)+a)^*$$

Exemple (revisité autrement)

$$\begin{cases} Z_1 = \varepsilon + Z_2 b + Z_3 b \\ Z_2 = Z_1 b \\ Z_3 = Z_1 a + Z_2 a + Z_3 a \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_2 = b + Z_2 bb + Z_3 bb \\ Z_3 = a + Z_2 ba + Z_3 ba + ba + Z_2 bba + Z_3 bba + Z_3 a \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_2 = (b + Z_3 bb)(bb)^* \\ Z_3 = a + ba + Z_2 (ba + bba) + Z_3 (a + ba + bba) \end{cases}$$

$$\{\, Z_3 = a + ba + (b + Z_3 bb)(bb)^*(ba + bba) + Z_3 (a + ba + bba)$$

$$\{\, Z_3 = Z_3((bb)^+(ba + bba) + a + ba + bba) + b(bb)^*(ba + bba) + ba + a$$

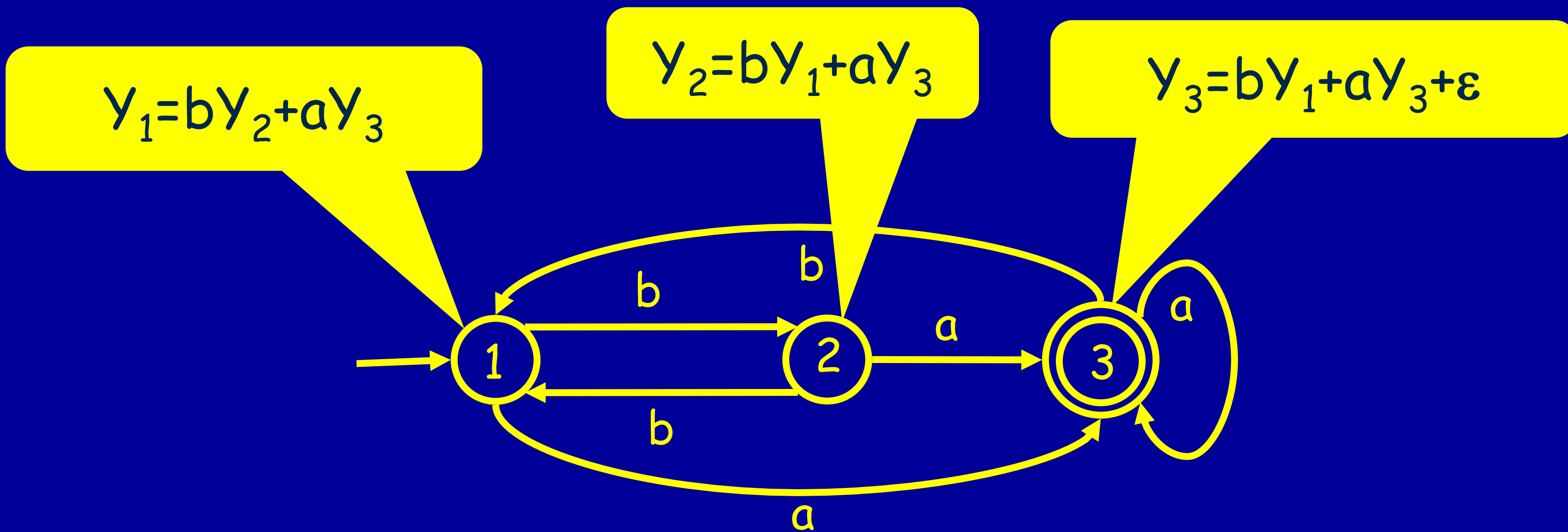
$$\{\, Z_3 = Z_3 b^* a + b^* a$$

$$\{\, Z_3 = b^* a\, (b^* a)^* = (b^* a)^+$$

Méthode de résolution (bis)

- Ramener le calcul d'une ER décrivant le langage reconnu à la résolution d'un système d'équations linéaires (à gauche) dont les inconnues sont des langages.

Exemple



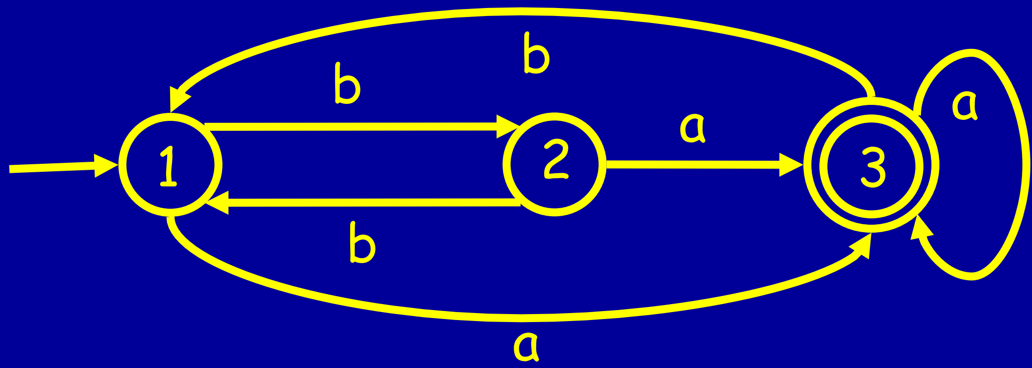
Y_i ={étiquettes des chemins reliant i à un état d'acceptation}

$Y_i = \{w \in \Sigma^* : \delta(i, w) \in F\}$

On prend en compte tous les **arcs sortants**

On cherche à résoudre pour l'état initial C

Exemple



$$\begin{cases} Y_1 = bY_2 + aY_3 \\ Y_2 = bY_1 + aY_3 \\ Y_3 = bY_1 + aY_3 + \varepsilon \end{cases}$$

Y_i ={étiquettes des chemins reliant i à un état d'acceptation}

$Y_i = \{w \in \Sigma^* : \delta(i, w) \in F\}$

On prend en compte tous les **arcs sortants**

On cherche à résoudre pour l'état initial *C*

Résolution

- On cherche une ER pour Y_1 i.e. les étiquettes qui conduisent de l'état initial à l'état terminal
- Il faut savoir résoudre

$$Y=AY+B$$

pour A et B des langages

$$\begin{cases} Y_1 = bY_2+aY_3 \\ Y_2 = bY_1+aY_3 \\ Y_3 = bY_1+aY_3+\varepsilon \end{cases}$$

Résolution de $Y=AY+B$

Comme dans le cas des systèmes d'équations gauches, nous avons :

- Le langage A^*B est une solution de $Y=AY+B$
- $X=A^*B$ est la plus petite solution.
- Si $\varepsilon \notin A$, A^*B unique solution de $Y=AY+B$

Exemple (suite)

$$\begin{cases} Y_1 = bY_2+aY_3 \\ Y_2 = bY_1+aY_3 \\ Y_3 = bY_1+aY_3+\varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = bbY_1+baY_3+aY_3 \\ Y_3 = bY_1+aY_3+\varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = bbY_1+(ba+a)Y_3 \\ Y_3 = a^*(bY_1+\varepsilon) \end{cases}$$

$$\{\ Y_1 = bbY_1+(ba+a)a^*(bY_1+\varepsilon)$$

$$\{\ Y_1 = (bb+(ba+a)a^*b)Y_1+(ba+a)a^*$$

$$\{\ Y_1 = (bb+(ba+a)a^*b)^*(ba+a)a^*$$

Exemple (revisité)

$$\begin{cases} Y_1 = bY_2+aY_3 \\ Y_2 = bY_1+aY_3 \\ Y_3 = bY_1+aY_3+\varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = bY_2+aY_3 \\ Y_2 = bY_1+aY_3 \\ Y_3 = a^*(bY_1+\varepsilon) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = bY_2+a^+(bY_1+\varepsilon) \\ Y_2 = bY_1+a^+(bY_1+\varepsilon) \end{cases}$$

$$\{\, Y_1 = bbY_1+(b+\varepsilon)a^+(bY_1+\varepsilon)$$

$$\{\, Y_1 = (bb+(b+\varepsilon)a^+b)Y_1+(b+\varepsilon)a^+$$

$$\{\, Y_1 = (bb+(b+\varepsilon)a^+b)^*(b+\varepsilon)a^+$$

Comparaison des méthodes

- **Les trois méthodes donnent respectivement :**

$$(b^*a)^+$$

$$(bb)^*(a+ba)(b(bb)^*(a+ba)+a)^*$$

$$(bb+(ba+a)a^*b)^*(ba+a)a^*$$

$$(bb+(b+\varepsilon)a+b)^*(b+\varepsilon)a+$$

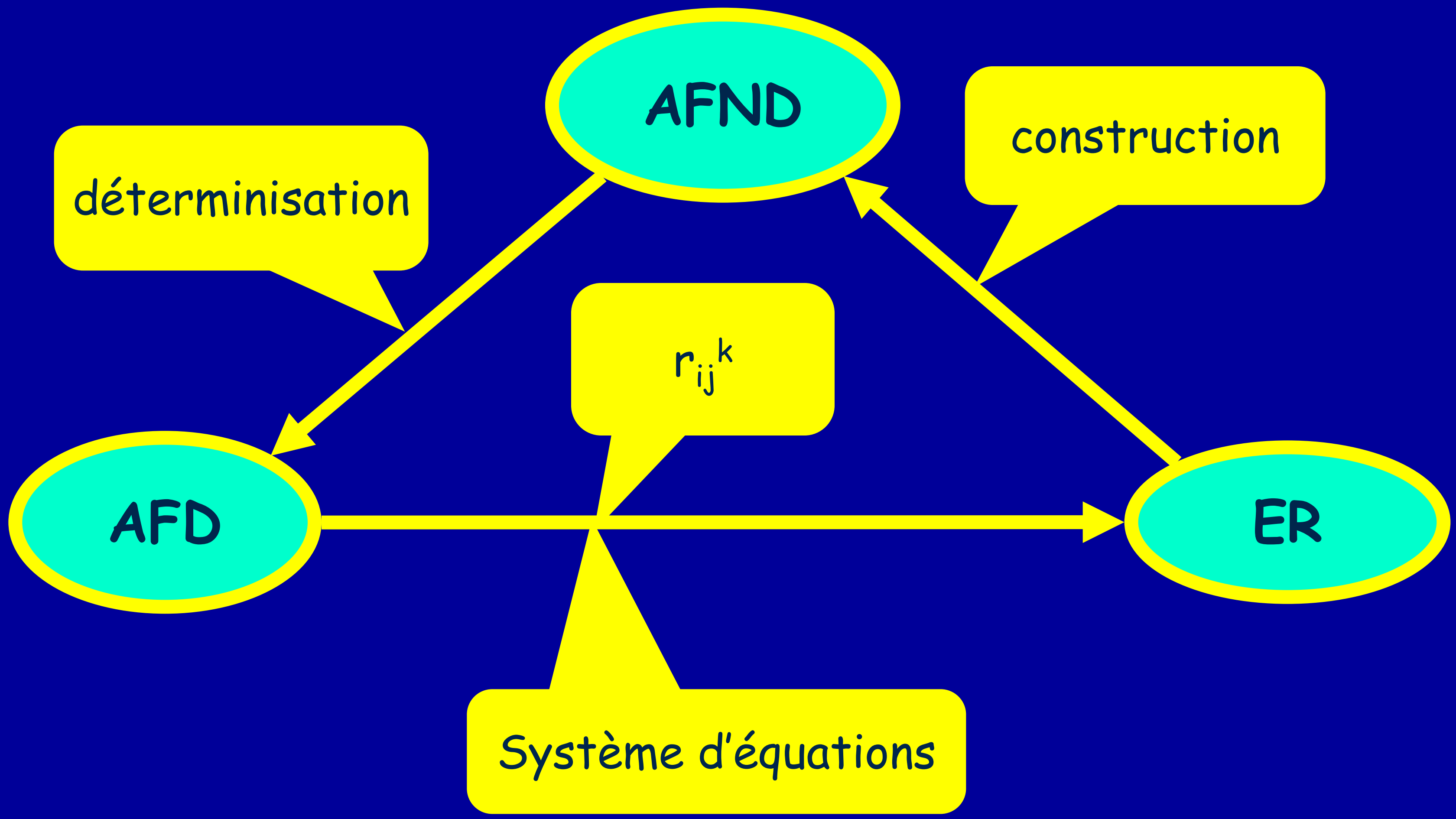
A-t-on fait une erreur de résolution ?

Les deux expressions rationnelles sont-elles identiques ?

A-t-on unicité de l'expression rationnelle décrivant un langage?

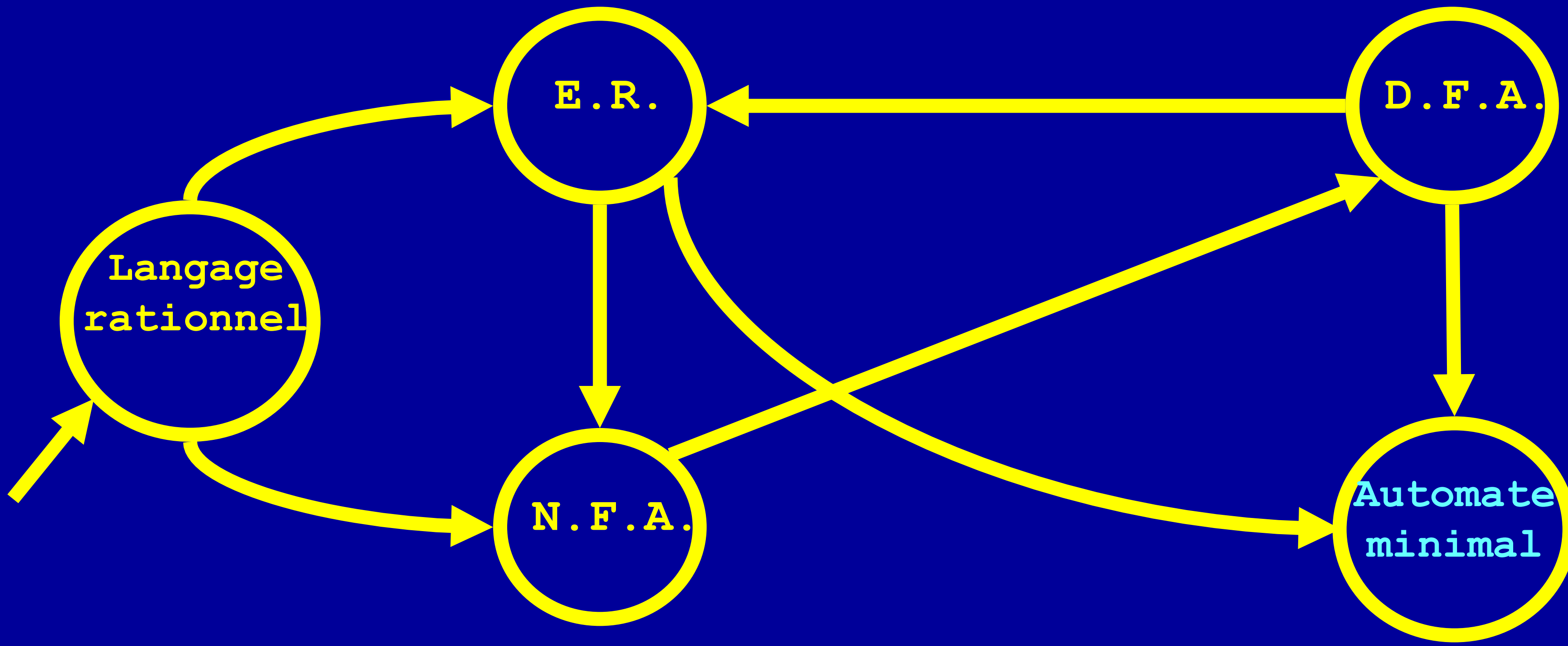
Les prochains cours vont répondre à ces questions.

Ce qu'on a vu


AFND
construction
déterminisation
r_{ij}^k
AFD
ER
Système d'équations

Automate minimal

Un méta-automate...



Théorème : Tout langage rationnel est reconnu par un unique automate déterministe minimal*.

* la minimalité porte sur **le nombre d'états** de l'automate

Automate réduit & minimal

- un automate déterministe A est réduit si pour tout couple d'états distincts p et q de A, p et q ne sont pas équivalents
- un automate (déterministe) réduit A est minimal s'il n'existe pas d'automate reconnaissant le même langage avec moins d'états.

Langage associé à un état

- soit un AFD $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$,
  on appelle langage associé à q de Q et on note $L_q(A)$ le langage :

$$L_q(A) = \{ w \in \Sigma^*, \delta^*(q,w) \in F \}$$

- $L_q(A)$ est le langage reconnu par un automate dont l'état initial serait q et qui aurait F comme ensemble d'états finals.

$$L(A) = L_{q_0}(A)$$

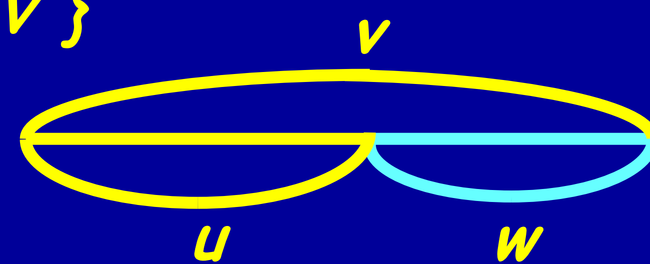
Problème 1

- Donnée : une expression rationnelle E
- Problème : construire un AFD minimal qui reconnaisse le langage décrit par E
- Idée : *les quotients gauches ...*

Quotients gauches

- obtenir les suffixes d'un mot
- Pour deux **mots** $u, v \in \Sigma^*$,

$$u^{-1}v = \{w \in \Sigma^* \mid u.w = v\}$$



- Pour deux **langages** $X, Y \subseteq \Sigma^*$,

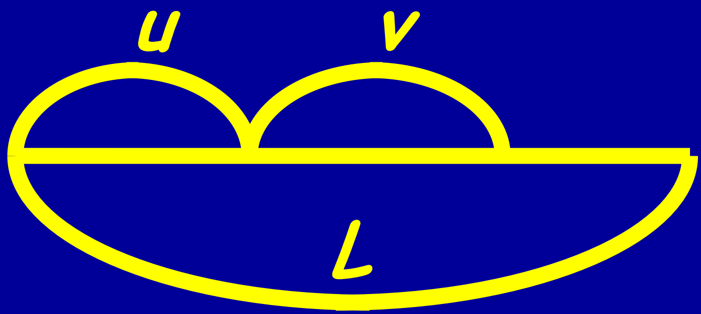
$$X^{-1}Y = \bigcup_{x \in X} \bigcup_{y \in Y} x^{-1}y$$

- On va utiliser le quotient d'un langage L par un mot u :

$$u^{-1}L = \{w \in \Sigma^* \mid u.w \in L\}$$

Propriétés

- $\varepsilon^{-1}L = L, \forall L \subseteq \Sigma^*$
- $a^{-1}\varnothing = a^{-1}\varepsilon = \varnothing$
- $a^{-1}a = \varepsilon$
- $a^{-1}b = \varnothing$ pour $a \neq b$



- $(u.v)^{-1} L = v^{-1}(u^{-1}L)$, $\forall L \subseteq \Sigma^*$
- $a^{-1}(X+Y) = a^{-1}X + a^{-1}Y$
- $a^{-1}X^* = (a^{-1}X).\ X^*$
- $a^{-1}(X.Y) = (a^{-1}X)\ .Y + (X \cap \{\varepsilon\})\ a^{-1}Y$

Fondement de la minimisation

Théorème : si L est un langage rationnel, alors l'ensemble de ses quotients gauches

$$Q(L) = \{u^{-1}L \mid u \in \Sigma^*\} \text{ est fini.}$$

Proposition : soit $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ un AFD complet et dont tous les états sont accessibles, on a :

$$Q(L) = \{ L_q(A), q \in Q \}$$

Fondement de la minimisation

Le cardinal de l'ensemble des résiduels est borné par celui du nombre d'états.

- Pour $L \subseteq \Sigma^*$, on définit $A(L) = \big(Q(L), \Sigma, \delta, \{L\}, F(L)\big)$, l'**automate minimal*** de L où
  - $F(L) = \{ u^{-1}L \mid \{\varepsilon\} \in u^{-1}L\}$
  - $\delta(Y, a) = a^{-1}Y$ pour $Y \in Q(L)$, $a \in \Sigma$

* La minimalité sera justifiée plus tard …

$Q(L) = \{L_q(A) \mid q \in Q\}$

- $Q(L) \subseteq \{L_q(A) \mid q \in Q\}$

  Soit $u \in \Sigma^*$ et $q = \delta(i,u)$.

  - q existe toujours (A complet et tous ses états sont accessibles).

$$u.w \in L \Leftrightarrow w \in u^{-1}L \Leftrightarrow w \in Q(L) \Leftrightarrow \delta(i,u.w) \in F$$

$$\Leftrightarrow \delta(q,w) \in F \Leftrightarrow w \in L_q(A)$$

Donc $u^{-1}L \subseteq L_q(A)$

$Q(L) = \{L_q(A) \mid q \in Q\}$

- $\{L_q(A) \mid q \in Q\} \subseteq Q(L)$

  Soit $q \in Q$ et $u \in \Sigma^*$ tels que $\delta(i,u) = q$.

  $u \in \Sigma^*$ existe toujours (A complet et tous ses états accessibles).

$$L_q(A) \subseteq u^{-1}L$$

Tout ce qui est reconnu en partant de q correspond aux suffixes de mots de L.

Exemple : $Q(\Sigma^*ab\Sigma^*)$

$a^{-1}(X+Y)= a^{-1}X+ a^{-1}Y$
$a^{-1}X^*=(a^{-1}X).\ X^*$
$a^{-1}(X.Y)=(a^{-1}X)\ .Y+(X\cap\varepsilon)\ a^{-1}Y$

- $a^{-1}L = a^{-1}(\Sigma^*ab\ \Sigma^*)$

$= (a^{-1}\Sigma^*)\ ab\ \Sigma^* + a^{-1}(ab\ \Sigma^*)$

$= (a^{-1}\Sigma)\ \Sigma^*\ ab\ \Sigma^* + (a^{-1}a)b\ \Sigma^* + \emptyset$

$a^{-1}L = \Sigma^*\ ab\ \Sigma^* + b\ \Sigma^* = L + b\ \Sigma^*$ (nouveau)

- $b^{-1}L = b^{-1}(\Sigma^*ab\ \Sigma^*)$

$= (b^{-1}\Sigma^*)\ ab\ \Sigma^* + b^{-1}(ab\ \Sigma^*)$

$= (b^{-1}\Sigma)\ \Sigma^*\ ab\ \Sigma^* + (b^{-1}a)b\ \Sigma^* + \emptyset$

$b^{-1}L = \Sigma^*\ ab\ \Sigma^* = L$ (pas nouveau)

Exemple : $Q(\Sigma^* ab \Sigma^*)$

$a^{-1}(X+Y)= a^{-1}X+ a^{-1}Y$
$a^{-1}X^*=(a^{-1}X).\ X^*$
$a^{-1}(X.Y)=(a^{-1}X)\ .Y+(X\cap\varepsilon)\ a^{-1}Y$

- $a^{-1}(a^{-1}L) = a^{-1}(L + b\ \Sigma^*) =$

$= a^{-1}L + a^{-1}\ (b\ \Sigma^*) = L + b\ \Sigma^* + a^{-1}\ b\ \Sigma^* + \varnothing = a^{-1}L$

$a^{-1}(a^{-1}L) = a^{-1}L$ (pas nouveau)

- $b^{-1}(a^{-1}L) = b^{-1}(L + b\ \Sigma^*) =$

$= b^{-1}L + b^{-1}\ (b\ \Sigma^*) = L + \Sigma^* = \Sigma^*$

$b^{-1}(a^{-1}L) = \Sigma^*$ (nouveau)

- $a^{-1}(b^{-1}(a^{-1}L)) = a^{-1}(\Sigma^*) = \Sigma^*$
- $b^{-1}(b^{-1}(a^{-1}L)) = b^{-1}(\Sigma^*) = \Sigma^*$

$Q(\Sigma^*ab\Sigma^*)$

- $a^{-1}L = L + b\,\Sigma^*$
- $b^{-1}L = \Sigma^*\,ab\,\Sigma^* = L$
- $a^{-1}(a^{-1}L) = a^{-1}L$
- $b^{-1}(a^{-1}L) = \Sigma^*$
- $a^{-1}(b^{-1}(a^{-1}L)) = \Sigma^*$
- $b^{-1}(b^{-1}(a^{-1}L)) = \Sigma^*$

δ	a	b
$\rightarrow L$	$a^{-1}L$	L
$a^{-1}L$	$a^{-1}L$	Σ^*
$\leftarrow \Sigma^*$	Σ^*	Σ^*