Automates à piles & grammaires

Feuille de travaux dirigés n^{o}9

1. Donnez une grammaire algébrique pour engendrer le langage accepté par l'automate à pile M :

$$M = [Q = \{q_0, q_1\}, \Sigma = \{0, 1\}, \Gamma = \{X, Z\}, q_0, \varnothing, Z, \delta]$$

dont la fonction de transition est donnée par la table :

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_0	1	Z	q_0	XZ
q_0	1	X	q_0	XX
q_0	0	X	q_1	X
q_0	ε	Z	q_0	ε
q_1	1	X	q_1	ε
q_1	0	Z	q_0	Z

2. Sur l'alphabet $\Sigma = \{1, 2, +, =\}$, on considère l'ensemble des mots représentant une égalité numérique (vraie !). Par exemple :

- $1 + 1 = 2$
- $1 + 2 = 1 + 2$
- $1 + 2 + 1 = 2 + 2$

Dans le TD précédent, on a construit un automate à pile qui accepte ce langage. Retrouvez la grammaire à partir de cet l'automate à pile suivant : $M = [\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{1, 2, +, =\}, \{Z, X, Y\}, q_0, \emptyset, Z, \delta]$

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_0	1	Z	q_0	YZ
q_0	2	Z	q_0	YXZ
q_0	$+$	Y	q_0	X
q_0	1	X	q_0	YX
q_0	2	X	q_0	YXX
q_0	$=$	Y	q_1	X

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_1	1	X	q_3	$-$
q_3	ε	X	q_1	Y
q_1	2	X	q_2	$-$
q_2	ε	X	q_3	$-$
q_1	$+$	Y	q_1	X
q_3	ε	Z	q_3	$-$

3. Sur l'alphabet $\Sigma = \{1, 2, +, =\}$, on considère encore l'ensemble des mots représentant une égalité numérique (vraie !).

Dans le TD précédent, on a construit un deuxième automate à pile qui accepte ce langage. Retrouvez la grammaire à partir de ce deuxième automate à pile suivant : $M = [\{q_0, q_1, q_2\}, \{1, 2, +, =\}, \{Z, X, Y\}, q_0, \emptyset, Z, \delta]$

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_0	1	Z	q_0	YZ
q_0	2	Z	q_0	YXZ
q_0	$+$	Y	q_0	X
q_0	1	X	q_0	YX
q_0	2	X	q_0	YXX

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_0	$=$	Y	q_1	$-$
q_1	1	X	q_2	X
q_1	2	X	q_2	$-$
q_2	$+$	X	q_1	$-$
q_2	ε	Z	q_2	$-$

4. *Optionnel* Dans ce qui suit nous utiliserons l'alphabet ternaire $\Sigma = \{0, 1, 2\}$. Le but de cet exercice est de trouver une grammaire et un automate à pile simple pour le langage des écritures en base 3 des nombres pairs et dont les écritures en base 3 contiennent autant de 0 que de 1 (pour éviter tout malentendu, on considère qu'il n'y a pas de 0 en tête).

a) Construire un automate à pile ayant deux états qui reconnaît le langage

$$L = \{w \in \Sigma^{\star} t.q. |w|_0 = |w|_1 \ et \ w \notin 0\Sigma^{\star}\}$$

par état final.

b) Construire un automate fini, qui reconnaît les mots ternaires représentant des nombres pairs.

c) Construire l'automate, produit de l'automate à pile et de l'automate fini.

d) Transformer l'automate obtenu en un automate qui accepte par pile vide.

e) En utilisant l'algorithme du cours, construire la grammaire qui engendre le langage reconnu par l'automate à pile obtenu.

f) Nettoyer la grammaire ainsi obtenue.