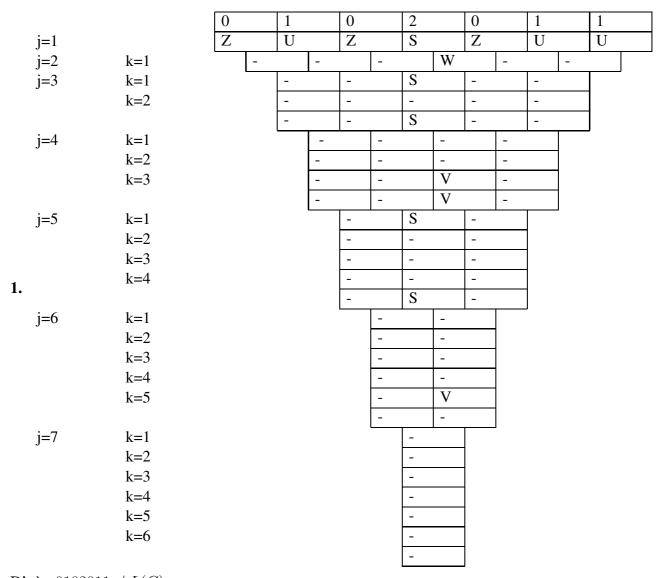
## Algorithme CYK & Lemme de la pompe

Corrigé partiel de la feuille de travaux dirigés nº10



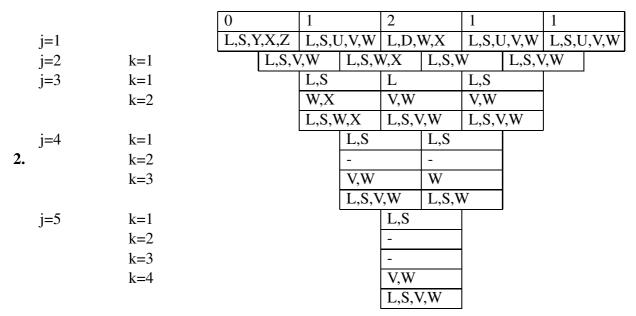
D'où :  $0102011 \notin L(G)$ .

**Remarque :** Ce résultat n'est pas surprenant; la grammaire engendre  $L(G) = \{w2w^{-1}|w\in(0+1)^*\}$ . Ainsi, les variables désignent :

- S les palindromes impairs sur  $\{0,1\}$  avec 2 comme séparateur de milieu. - Y les palindromes impairs sur  $\{0,1\}$  avec 2 comme séparateur de milieu, suivis d'un 1. - V les palindromes impairs sur  $\{0,1\}$  avec 2 comme séparateur de milieu, suivis d'un 0. - Z 0 (comme zéro).

- U 1 (comme un).

On peut vérifier ainsi les résultats du tableau de l'algorithme CYK.



D'où :  $01211 \in L(G)$ .

**Remarque :** La grammaire engendre le complémentaire du langage de l'exercice précédent.

Ainsi, les variables désignent :

- S les mots non palindromes impairs sur  $\{0,1\}$  avec 2 comme séparateur de milieu.
- Y les mots de S, suivis d'un 1. V les mots de S, suivis d'un 0.
- W mots quelconges, qui ne se terminent pas par un 0.
- X mots quelconqes, qui ne se terminent pas par un 1.
- L mots quelconges, non vides.
- Z 0 (comme zéro).
- U 1 (comme un).
- D 2 (comme deux).

On peut vérifier ainsi les résultats du tableau de l'algorithme CYK.

a) Supposons  $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i < j < k\}$  algébrique, donc il existe n du lemme. Soit  $z = a^n b^{n+1} c^{n+2}$ . Par le lemme z s'écrit sous la forme uvwxy. Soit p (resp. q et r) le nombre de a (resp. b et c) dans vx.

**Fait :** p = 0 ou r = 0 (à cause de la longueur de vwx).

On distingue les quatre cas suivants :

- $\begin{array}{l} \ q \neq 0, \ p = 0 : |uv^0wx^0y|_a = n \ \text{et} \ |uv^0wx^0y|_b \leq n \ \text{donc} \ uv^0wx^0y \not\in L_1. \\ \ q \neq 0, \ p \neq 0 : r = 0 \ \text{et} \ \text{donc} \ |uv^2wx^2y|_c = n + 2 \ \text{et} \ |uv^2wx^2y|_b \geq n + 2 \ \text{donc} \ uv^2wx^2y \not\in L_1. \\ \ q = 0, \ p \neq 0 : |uv^2wx^2y|_a \geq n + 1 \ \text{et} \ |uv^2wx^2y|_b = n + 1 \ \text{donc} \ uv^2wx^2y \not\in L_1. \\ \ q = 0, \ p = 0 : r \neq 0 \ (\text{sinon} \ vx = \varepsilon) \ \text{donc} \ |uv^0wx^0y|_c \leq n + 1 \ \text{et} \ |uv^0wx^0y|_b = n + 1 \ \text{donc} \end{array}$  $uv^0wx^0y \not\in L_1.$

Donc  $L_1$  n'est pas algébrique.

Autre preuve. Supposons  $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i < j < k\}$  algébrique, donc il existe n du lemme de l'étoile. Soit  $z = a^n b^{n+1} c^{n+2}$ . Par le lemme z s'écrit sous la forme uvwxy. Soit p (resp. q et r) le nombre de a (resp. b et c) dans vx.  $|uv^iwx^iy|_a = n + (i-1)p$ ,  $|uv^iwx^iy|_b = n + 1 + (i-1)q$  et  $|uv^iwx^iy|_c = n + 2 + (i-1)r$ . Pour i=0, on a  $p\geq q\geq r$  et, pour  $i=2,\,p\leq q\leq r$ . On a donc p=q=r. Mais on doit avoir p=0 ou q=0, sinon |vwx| > n + 3. Donc  $p = q = r = 0 \Rightarrow |vx| = 0$ , une contradiction.

**b)** Supposons  $L_2 = \{a^i b^j \mid j = i^2\}$  algébrique, donc il existe n du lemme de l'étoile. Soit  $z = a^n b^{n^2}$ . Par le lemme z s'écrit sous la forme uvwxy. Soit k (resp. l) le nombre de a (resp. b) dans vx. Comme on doit avoir  $uv^iwx^iy \in L_2$ , on doit avoir  $\forall i \geq 0: ((n-k)+ik)^2=(n^2-l)+il$ , ce qui implique  $\forall i \geq 0:$ 

 $2kn+(i-1)k^2=l$  ce qui est impossible. Donc  ${\cal L}_2$  n'est pas algébrique.

c) Supposons  $L_3 = \{a^k b^k c^l | k \le l \le 2k\}$  algébrique, donc il existe n du lemme de l'étoile. Soit  $z = a^n b^n c^n$ . Par le lemme z s'écrit sous la forme uvwxy. Soit p (resp. q et r) le nombre de a (resp. b et c) dans vx.

**Fait :** p = 0 ou r = 0 (à cause de la longueur de vwx).

- $\begin{array}{lll} & -r=0:|uv^2wx^2y|_a>n \text{ ou }|uv^2wx^2y|_b>n \text{ alors que }|uv^2wx^2y|_c=n \text{ donc }uv^2wx^2y\not\in L_3.\\ & -r\neq 0: \text{donc }p=0 \text{ et ainsi }|uv^0wx^0y|_a=n \text{ et }|uv^0wx^0y|_c< n \text{ donc }uv^0wx^0y\not\in L_3. \end{array}$

Donc  $L_1$  n'est pas algébrique.

- **d)**  $L_5 = \bar{L_1} \cap a^{\star}b^{\star}c^{\star}$ . On observe que  $L_5 = \{a^ib^jc^k \mid i \geq j \text{ ou } j \geq k\} = \{a^ib^j \mid i \geq j\}c^{\star} \cup a^{\star}\{b^jc^k \mid j \geq k\}$  ce qui prouve (c.f. propriétés de clôture) que ce langage **est algébrique** (l'intersection avec  $a^{\star}b^{\star}c^{\star}$  ne sert que pour le tri des lettres).
- e) Supposons  $L_6 = \{ww^{-1}w \mid w \in (a+b)^*\}$  algébrique. Soit R le langage rationnel  $a^*b^*a^*b^*$ . Soit  $L_6' =$  $L_6 \cap R$ , i.e. le langage  $\{a^ib^{2j}a^{2i}b^j \mid i \geq 0, j \geq 0\}$ . On montre donc que  $L_6'$  n'est pas algébrique. Supposons  $L_6'$  algébrique, donc il existe n du lemme de l'étoile. Soit  $z=a^nb^{2n}a^{2n}b^n$ . Par le lemme, z=uvwxy ou z = ABCD avec  $A = a^n B = b^{2n} C = a^{2n} D = b^n$ .
  - vx contient un a: comme  $|vwx| \le n$ , vwx ne peut pas intersecter à la fois A et C. Ainsi  $uv^0wx^0y \notin L_6'$ car on supprime au moins un a du coté A ou du coté C.
  - vx contient un b: comme  $|vwx| \le n$ , vwx ne peut pas intersecter à la fois B et D. Ainsi  $uv^0wx^0y \notin L_6'$ car on supprime au moins un b du coté B ou du coté D.

Donc  $L'_6$  n'est pas algébrique et  $L_6$  n'est pas algébrique.

**f**)  $L_7 = \{w \in (a+b+c)^* : |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$ . Soit  $R = a^*b^*c^*$  rationnel.  $L_7 \cap R = \{a^nb^nc^n : n \ge 0\}$  est non algébrique. Donc  $L_7$  n'est pas algébrique.