TD LFA

09/04/2020

1. Donnez une grammaire algébrique pour engendrer le langage accepté par l'automate à pile M :

$$M = [Q = \{q_0, q_1\}, \Sigma = \{0, 1\}, \Gamma = \{X, Z\}, q_0, \varnothing, Z, \delta]$$

dont la fonction de transition est donnée par la table :

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_0	1	Z	q_0	XZ
q_0	1	X	q_0	XX
q_0	0	X	q_1	X
q_0	ε	Z	q_0	ε
q_1	1	X	q_1	ε
q_1	0	Z	q_0	Z

1. $G = [V, T, P, S]$, avec
$V = \{S,\ Z_{0,0},\ Z_{0,1},\ X_{0,0},\ X_{0,1},\ Z_{1,0},\ Z_{1,1},\ X_{1,0},\ X_{1,1}\}$,
$T = \{0, 1\}$, et P contenant les règles :

- Pour l'axiome
  $S \to Z_{0,0} \mid Z_{0,1}$
- A partir de la transition 1
  $Z_{0,0} \to\ 1X_{0,0}Z_{0,0} \mid 1X_{0,1}Z_{1,0}$
  $Z_{0,1} \to\ 1X_{0,0}Z_{0,1} \mid 1X_{0,1}Z_{1,1}$
- A partir de la transition 2
  $X_{0,0} \to\ 1X_{0,0}X_{0,0} \mid 1X_{0,1}X_{1,0}$
  $X_{0,1} \to\ 1X_{0,0}X_{0,1} \mid 1X_{0,1}X_{1,1}$
- A partir de la transition 3
  $X_{0,0} \to\ 0X_{1,0}$
  $X_{0,1} \to\ 0X_{1,1}$
- A partir de la transition 4
  $Z_{0,0} \to \varepsilon$
- A partir de la transition 5
  $X_{1,1} \to 1$
- A partir de la transition 6
  $Z_{1,0} \to 0Z_{0,0}$
  $Z_{1,1} \to\ 0Z_{0,1}$

En notant $A = Z_{0,0}$; $B = Z_{0,1}$; $C = X_{0,0}$; $D = X_{0,1}$; $E = Z_{1,0}$; $F = Z_{1,1}$; $G = X_{1,0}$; $H = X_{1,1}$ nous obtenons :

$$
\begin{array}{l}
N = \{S, A, B, C, D, E, F, H\}, \\
T = \{0, 1\}, \\
S \\
P \left\{ \begin{array}{l}
S \to A \mid B \\
A \to 1CA \mid 1DE \mid \varepsilon \\
B \to 1CB \mid 1DF \\
C \to 0G \mid 1CC \mid 1DG \\
D \to 0H \mid 1CD \mid 1DH \\
E \to 0A \\
F \to 0B \\
H \to 1
\end{array} \right.
\end{array}
$$

Les variables productives sont : $\{A, H, S, D, E\}$, ce qui permet de supprimer B, C, F, G et nous obtenons :

$$
\begin{array}{l}
N = \{S, A, D, E, H\}, \\
T = \{0, 1\}, \\
S \\
P \left\{ \begin{array}{l}
S \rightarrow A \\
A \rightarrow 1DE \mid \varepsilon \\
D \rightarrow 0H \mid 1DH \\
E \rightarrow 0A \\
H \rightarrow 1
\end{array} \right.
\end{array}
$$

Tous les variables sont accessibles. On peut supprimer A (renommage) et substituer H et E pour obtenir :

$N = \{S, D\}$,

$T = \{0, 1\}$,

S

$$P \left\{ \begin{array}{l} S \to 1D0S \mid \varepsilon \\ D \to 01 \mid 1D1 \end{array} \right.$$

Comme D engendre $L_D = \{1^k01^{k+1} \mid k \geq 0\}$, ainsi $1D0$ engendre $L_{1D0} = \{1^{k+1}01^{k+1}0 \mid k \geq 0\}$. Ainsi, S engendre $L^\star_{1D0}$.

2. Sur l'alphabet $\Sigma = \{1, 2, +, =\}$, on considère l'ensemble des mots représentant une égalité numérique (vraie !). Par exemple :

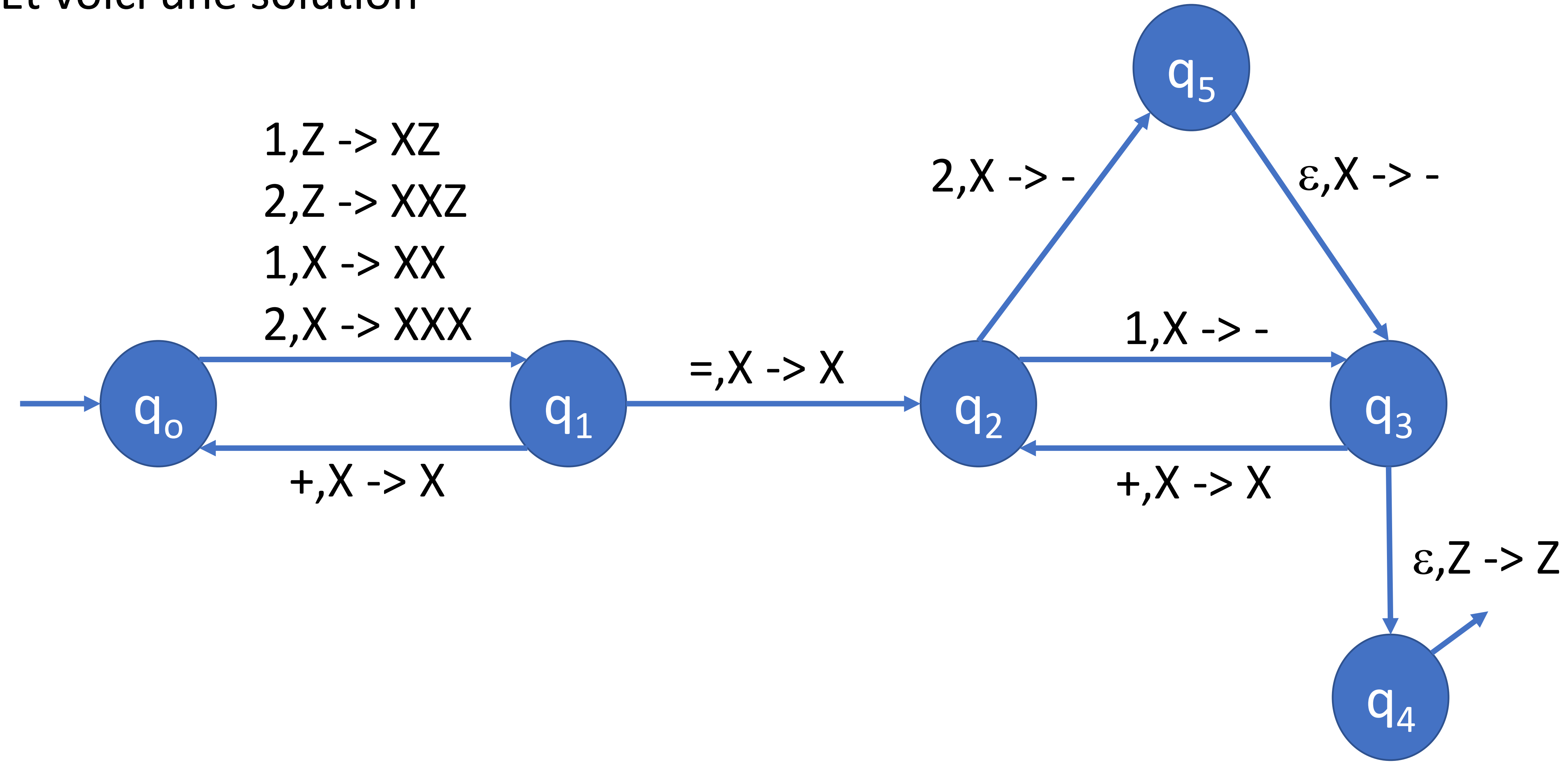
- $1 + 1 = 2$
- $1 + 2 = 1 + 2$
- $1 + 2 + 1 = 2 + 2$

Dans le TD précédent, on a construit un automate à pile qui accepte ce langage. Retrouvez la grammaire à partir de cet l'automate à pile suivant : $M = [\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{1, 2, +, =\}, \{Z, X, Y\}, q_0, \emptyset, Z, \delta]$

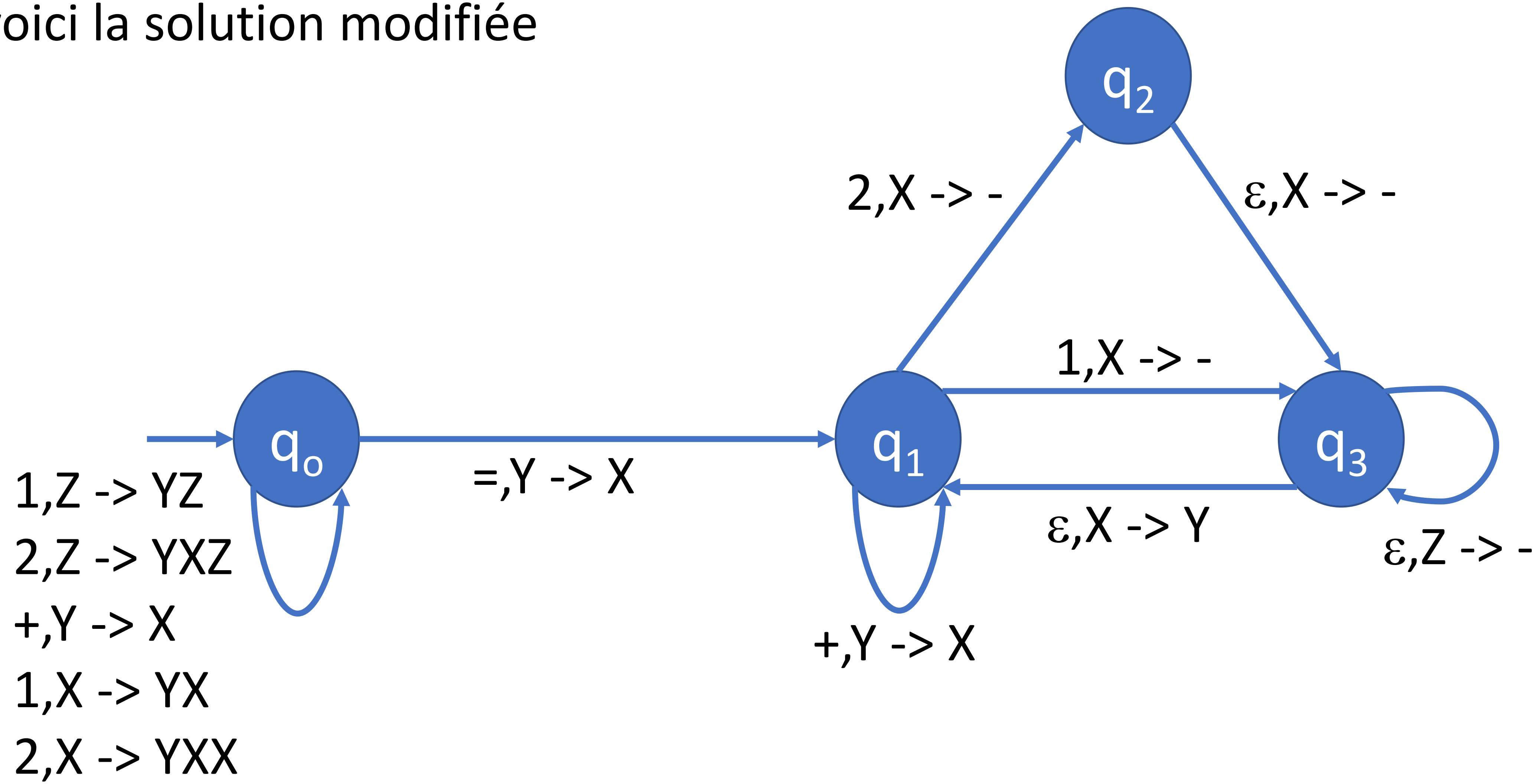
état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_0	1	Z	q_0	YZ
q_0	2	Z	q_0	YXZ
q_0	$+$	Y	q_0	X
q_0	1	X	q_0	YX
q_0	2	X	q_0	YXX
q_0	$=$	Y	q_1	X

état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q_1	1	X	q_3	$-$
q_3	ε	X	q_1	Y
q_1	2	X	q_2	$-$
q_2	ε	X	q_3	$-$
q_1	$+$	Y	q_1	X
q_3	ε	Z	q_3	$-$

Et voici une solution



Et voici la solution modifiée



état	lecture	pile	nouvel état	empiler
q0	1	Z	q0	YZ
q0	2	Z	q0	YXZ
q0	+	Y	q0	X
q0	1	X	q0	YX
q0	2	X	q0	YXX
q0	=	Y	q1	X
q1	1	X	q3	-
q3	ε	X	q1	Y
q1	2	X	q2	-
q2	ε	X	q3	-
q1	+	Y	q1	X
q3	ε	Z	q3	-

La grammaire qu'on peut déduire :

G = [V, T, P, S] avec

$V = \{S; Z,i,j; X,i,j; Y,i,j \mid i,j \in \{0, 1, 2, 3\}\}$ 49 variables !

$T = \{1, 2, =, +\}$

Et les … 184 règles …

Pour l'axiome :	S → Z,0,i	pour i ∈ {0, 1, 2, 3}
A partir de la transition 1 :	Z,0,i → 1 Y,0,j Z,j,i	pour i, j ∈ {0, 1, 2, 3}
A partir de la transition 2 :	Z,0,i → 2 Y,0,j X,j,k Z,k,i	pour i, j, k ∈ {0, 1, 2, 3}
A partir de la transition 3 :	Y,0,i → + X,0,i	pour i ∈ {0, 1, 2, 3}
A partir de la transition 4 :	X,0,i → 1 Y,0,j X,j,i	pour i, j ∈ {0, 1, 2, 3}
A partir de la transition 5 :	X,0,i → 2 Y,0,j X,j,k X,k,i	pour i, j, k ∈ {0, 1, 2, 3}
A partir de la transition 6 :	Y,0,i → = X,1,i	pour i ∈ {0, 1, 2, 3}
A partir de la transition 7 :	X,1,3 → 1	
A partir de la transition 8 :	X,3,i → Y,1,i	pour i ∈ {0, 1, 2, 3}
A partir de la transition 9 :	X,1,2 → 2	
A partir de la transition 10 :	X,2,3 → ε	
A partir de la transition 11 :	Y,1,i → + X,1,i	pour i ∈ {0, 1, 2, 3}
A partir de la transition 12 :	Z,3,3 → ε	

$S \to Z,0,i \quad i \in \{0, 1, 2, 3\}$

$Z,0,i \to 1\ Y,0,j\ Z,j,i \mid 2\ Y,0,j\ X,j,k\ Z,k,i \quad i, j,k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$Y,0,i \to +\ X,0,i \mid =\ X,1,i \quad i \in \{0, 1, 2, 3\}$

$X,0,i \to 1\ Y,0,j\ X,j,i \mid 2\ Y,0,j\ X,j,k\ X,k,i \quad i, j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$X,1,3 \to 1$

$X,3,i \to Y,1,i \quad i \in \{0, 1, 2, 3\}$

$X,1,2 \to 2$

$X,2,3 \to \varepsilon$

$Y,1,i \to +\ X,1,i \quad i \in \{0, 1, 2, 3\}$

$Z,3,3 \to \varepsilon$

On cherche les productives ! $P_0=\emptyset$.

S → Z,0,i

Z,0,i → 1 Y,0,j Z,j,i | 2 Y,0,j X,j,k Z,k,i

Y,0,i → + X,0,i | = X,1,i

X,0,i → 1 Y,0,j X,j,i | 2 Y,0,j X,j,k X,k,i

X,1,3 → 1 X,1,3

X,3,i → Y,1,i

X,1,2 → 2 X,1,2

X,2,3 → ε X,2,3

Y,1,i → + X,1,i

Z,3,3 → ε Z,3,3

P_1={X,1,2; X,1,3; X,2,3; Z,3,3}.

S → Z,0,i

Z,0,i → 1 Y,0,j Z,j,i | 2 Y,0,j X,j,k Z,k,i

Y,0,i → + X,0,i | = X,1,i Y,0,2 Y,0,3

X,0,i → 1 Y,0,j X,j,i | 2 Y,0,j X,j,k X,k,i

X,1,3 → 1

X,3,i → Y,1,i

X,1,2 → 2

X,2,3 → ε

Y,1,i → + X,1,i Y,1,2 Y,1,3

Z,3,3 → ε

P_2={X,1,2; X,1,3; X,2,3; Y,0,2; Y,0,3; Y,1,2; Y,1,3; Z,3,3}.

S → Z,0,i

Z,0,i → 1 Y,0,j Z,j,i | 2 Y,0,j X,j,k Z,k,i   Z,0,3

Y,0,i → + X,0,i | = X,1,i

X,0,i → 1 Y,0,j X,j,i | 2 Y,0,j X,j,k X,k,i   X,0,3

X,1,3 → 1

X,3,i → Y,1,i   X,3,2 X,3,3

X,1,2 → 2

X,2,3 → ε

Y,1,i → + X,1,i

Z,3,3 → ε

P_3={X,0,3; X,1,2; X,1,3; X,2,3; X,3,2; X,3,3; Y,0,2; Y,0,3; Y,1,2; Y,1,3; Z,0,3; Z,3,3}.

S → Z,0,i S

Z,0,i → 1 Y,0,j Z,j,i | 2 Y,0,j X,j,k Z,k,i

Y,0,i → + X,0,i | = X,1,i

X,0,i → 1 Y,0,j X,j,i | 2 Y,0,j X,j,k X,k,i X,0,2

X,1,3 → 1

X,3,i → Y,1,i

X,1,2 → 2

X,2,3 → ε

Y,1,i → + X,1,i

Z,3,3 → ε

P_4={S; X,0,2; X,0,3; X,1,2; X,1,3; X,2,3; X,3,2; X,3,3; Y,0,2; Y,0,3; Y,1,2; Y,1,3; Z,0,3; Z,3,3}.

S → Z,0,i

Z,0,i → 1 Y,0,j Z,j,i | 2 Y,0,j X,j,k Z,k,i

Y,0,i → + X,0,i | = X,1,i

X,0,i → 1 Y,0,j X,j,i | 2 Y,0,j X,j,k X,k,i

X,1,3 → 1

X,3,i → Y,1,i

X,1,2 → 2

X,2,3 → ε

Y,1,i → + X,1,i

Z,3,3 → ε

P_5={S; X,0,2; X,0,3; X,1,2; X,1,3; X,2,3; X,3,2; X,3,3; Y,0,2; Y,0,3; Y,1,2; Y,1,3; Z,0,3; Z,3,3} = P_4

On a donc seulement 14 variables productives.

On peut réécrire les règles qui restent !

S → Z,0,3

Z,0,3 → 1Y,0,3 Z,3,3 | 2Y,0,2 X,2,3 Z,3,3 | 2Y,0,3 X,3,3 Z,3,3

Y,0,2 → +X,0,2 | =X,1,2

Y,0,3 → +X,0,3 | =X,1,3

X,0,2 → 1Y,0,3 X,3,2 | 2Y,0,2 X,2,3 X,3,2 | 2Y,0,3 X,3,3 X,3,2

X,0,3 → 1Y,0,2 X,2,3 | 1Y,0,3 X,3,3 | 2Y,0,2 X,2,3 X,3,3 | 2Y,0,3 X,3,2 X,2,3 | 2Y,0,3 X,3,3 X,3,3

X,1,3 → 1

X,3,2 → Y,1,2

X,3,3 → Y,1,3

X,1,2 → 2

X,2,3 → ε

Y,1,2 → + X,1,2

Y,1,3 → + X,1,3

Z,3,3 → ε

- S → Z,0,3
- Z,0,3 → 1Y,0,3 Z,3,3 | 2Y,0,2 X,2,3 Z,3,3 | 2Y,0,3 X,3,3 Z,3,3
- Y,0,2 → +X,0,2 | =X,1,2
- Y,0,3 → +X,0,3 | =X,1,3
- X,0,2 → 1Y,0,3 X,3,2 | 2Y,0,2 X,2,3 X,3,2 | 2Y,0,3 X,3,3 X,3,2
- X,0,3 → 1Y,0,2 X,2,3 | 1Y,0,3 X,3,3 | 2Y,0,2 X,2,3 X,3,3 | 2Y,0,3 X,3,2 X,2,3 | 2Y,0,3 X,3,3 X,3,3
- X,1,3 → 1
- X,3,2 → Y,1,2
- X,3,3 → Y,1,3
- X,1,2 → 2
- X,2,3 → ε
- Y,1,2 → + X,1,2
- Y,1,3 → + X,1,3
- Z,3,3 → ε

Toutes les variables sont productives. Les seules variables effaçables sont X,2,3 et Z,3,3. Après suppression des effaçables On obtient :

S → Z,0,3

Z,0,3 → 1Y,0,3 | 2Y,0,2 | 2Y,0,3 X,3,3

Y,0,2 → +X,0,2 | =X,1,2

Y,0,3 → +X,0,3 | =X,1,3

X,0,2 → 1Y,0,3 X,3,2 | 2Y,0,2 X,3,2 | 2Y,0,3 X,3,3 X,3,2

X,0,3 → 1Y,0,2 | 1Y,0,3 X,3,3 | 2Y,0,2 X,3,3 | 2Y,0,3 X,3,2 | 2Y,0,3 X,3,3 X,3,3

X,1,3 → 1

X,3,2 → Y,1,2

X,3,3 → Y,1,3

X,1,2 → 2

Y,1,2 → + X,1,2

Y,1,3 → + X,1,3

On a trois renommages, qu'on supprime : (S→Z,0,3) ; (X,3,2 → Y,1,2) ; (X,3,3 → Y,1,3)

S → 1Y,0,3 | 2Y,0,2 | 2Y,0,3 Y,1,3

Y,0,2 → +X,0,2 | =X,1,2

Y,0,3 → +X,0,3 | =X,1,3

X,0,2 → 1Y,0,3 Y,1,2 | 2Y,0,2 Y,1,2 | 2Y,0,3 Y,1,3 Y,1,2

X,0,3 → 1Y,0,2 | 1Y,0,3 Y,1,3 | 2Y,0,2 Y,1,3 | 2Y,0,3 Y,1,2 | 2Y,0,3 Y,1,3 Y,1,3

X,1,3 → 1

X,1,2 → 2

Y,1,2 → + X,1,2

Y,1,3 → + X,1,3

On substitue les règles pour X,1,2 et X,1,3 :

S	→ 1 Y,0,3	| 2 Y,0,2	| 2 Y,0,3 Y,1,3			
Y,0,2	→ + X,0,2	| = 2				
Y,0,3	→ + X,0,3	| = 1				
X,0,2	→ 1 Y,0,3 Y,1,2	| 2 Y,0,2 Y,1,2	| 2 Y,0,3 Y,1,3 Y,1,2			
X,0,3	→ 1 Y,0,2	| 1 Y,0,3 Y,1,3	| 2 Y,0,2 Y,1,3	| 2 Y,0,3 Y,1,2	| 2 Y,0,3 Y,1,3 Y,1,3	
Y,1,2	→ + 2					
Y,1,3	→ + 1					

Pour rendre plus lisible, on renomme les variables restants :

A=Y,0,2 B=Y,0,3 C=X,0,2 D=X,0,3 E=Y,1,2 F=Y,1,3

et nous obtenons :

S → 1B **|** 2A **|** 2BF

A → +C **|** =2

B → +D **|** =1

C → 1BE **|** 2AE **|** 2BFE

D → 1A **|** 1BF **|** 2AF **|** 2BE **|** 2BFF

E → +2

F → +1

On remarque que C → SE et aussi D → 1A | 2BE | SF

Après substitution de C, E et F on obtient

S → 1B | 2A | 2B+1

A → +S+2 | =2

B → +D | =1

D → 1A | 2B+2 | S+1

On substitue A et B pour obtenir

S → 1+D | 1=1 | 2+S+2 | 2=2 | 2+D+1 |2=1+1

D → 1+S+2 | 1=2 | 2+D+2 | 2=1+2 | S+1

Ou après tri des règles

S → 1=1 | 2=2 | 1+D | 2=1+1 | 2+S+2 | 2+D+1

D → 1=2 | 2=1+2 | 1+S+2 | 2+D+2 | S+1

Bonne semaine de vacances

et

bonne santé !