Systèmes d'équations et quotients

Corrigé partiel de la feuille de travaux dirigés n^{o}3

1.

b) Le système d'équations de droite associé à l'automate est :

$$\begin{cases} Y_0 = 1Y_0 + 0Y_1 \\ Y_1 = \varepsilon + 0Y_2 + 1Y_3 \\ Y_2 = \varepsilon + 0Y_1 + 1Y_2 \\ Y_3 = 0Y_1 + 1Y_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_3 = 1^\star 0Y_1 \\ Y_0 = 1Y_0 + 0Y_1 \\ Y_1 = \varepsilon + 0Y_2 + 1^+0Y_1 \\ Y_2 = \varepsilon + 0Y_1 + 1Y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_2 = 1^\star(\varepsilon + 0Y_1) \\ Y_0 = 1^\star 0Y_1 \\ Y_1 = \varepsilon + 01^\star + 01^\star 0Y_1 + 1^+0Y_1 = (\varepsilon + 01^\star) + (01^\star 0 + 1^+0)Y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = (01^\star 0 + 1^+0)^\star(\varepsilon + 01^\star) \\ Y_0 = 1^\star 0Y_1 \end{cases}$$

D'où

$$L(B) = 1^\star 0(01^\star 0 + 1^+0)^\star(\varepsilon + 01^\star)$$

c) Le système d'équations de gauche associé à l'automate est :

$$\begin{cases} Z_0 = \varepsilon + Z_0 1 = 1^\star \\ Z_1 = Z_0 0 + Z_3 0 + Z_2 0 = 1^\star 0 + (Z_2 + Z_3)0 \\ Z_2 = Z_1 0 + Z_2 1 = Z_1 01^\star \\ Z_3 = Z_1 1 + Z_3 1 = Z_1 11^\star \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_1 = 1^\star 0 + (Z_1 01^\star + Z_1 11^\star)0 = 1^\star 0 + Z_1(01^\star 0 + 1^+0) \\ Z_2 = Z_1 01^\star \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_1 = 1^\star 0(01^\star 0 + 1^+0)^\star \\ Z_2 = 1^\star 0(01^\star 0 + 1^+0)^\star 01^\star \end{cases}$$

D'où

$$L(B) = \left(1^\star 0(01^\star 0 + 1^+0)^\star\right)(01^\star + \varepsilon)$$

On constate que les deux expressions rationnelles trouvées sont *presque* identiques (il suffit de mettre Z_1 en facteur dans $Z_1 + Z_2$ pour obtenir Y_0), mais en général ces expressions sont assez différentes.

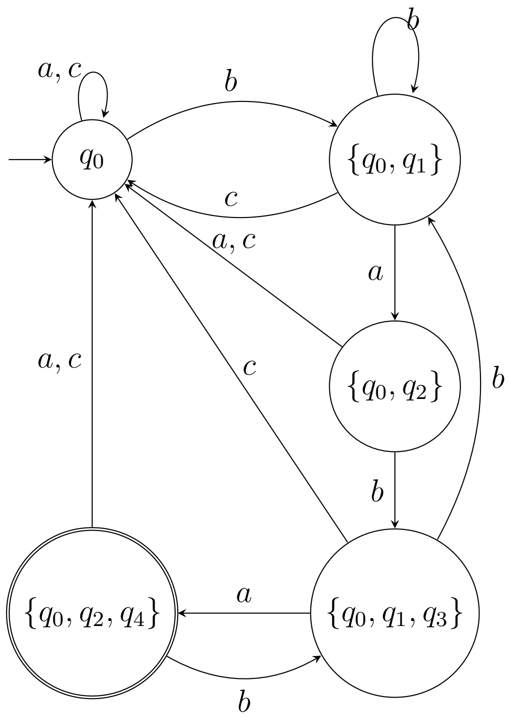
2.

a) Un automate non déterministe pour reconnaître L est

	a	b	c
$\rightarrow q_0$	q_0	$\{q_0, q_1\}$	q_0
q_1	q_2		
q_2		q_3	
q_3	q_4		
$\leftarrow q_4$			

b) La déterminisation de cet automate est donnée ci-dessous :

	a	b	c
$\rightarrow q_0$	q_0	$\{q_0, q_1\}$	q_0
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	q_0
$\{q_0, q_2\}$	q_0	$\{q_0, q_1, q_3\}$	q_0
$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_2, q_4\}$	$\{q_0, q_1\}$	q_0
$\leftarrow \{q_0, q_2, q_4\}$	q_0	$\{q_0, q_1, q_3\}$	q_0



c) Calcul de quotients gauches de $L = (a + b + c)^\star baba$:

$a^{-1}L = \quad L$
$b^{-1}L = \quad L + aba = M$
$c^{-1}L = \quad L$

On continue sur M :

$a^{-1}(L + aba) = \quad a^{-1}L + ba = L + ba = N$
$b^{-1}(L + aba) = \quad b^{-1}L + \emptyset = M$
$c^{-1}(L + aba) = \quad c^{-1}L + \emptyset = L$

On continue sur N :

$a^{-1}(L + ba) = \quad a^{-1}L + \emptyset = L$
$b^{-1}(L + ba) = \quad b^{-1}L + a = L + aba + a = O$
$c^{-1}(L + ba) = \quad c^{-1}L + \emptyset = L$

On continue sur O :

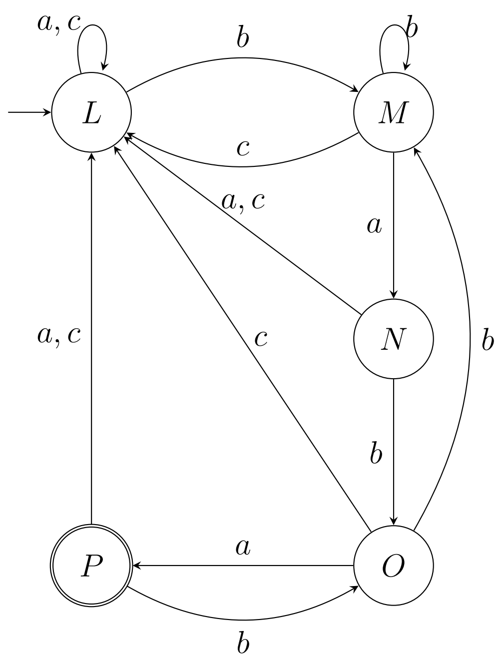
$a^{-1}(L + aba + a) = \quad a^{-1}L + ba + \varepsilon = L + ba + \varepsilon = P$
$b^{-1}(L + aba + a) = \quad b^{-1}L + \emptyset + \emptyset = M$
$c^{-1}(L + aba + a) = \quad c^{-1}L + \emptyset + \emptyset = L$

On termine par le calcul sur P :

$a^{-1}(L + ba + \varepsilon) = \quad L + \emptyset + \emptyset = L$
$b^{-1}(L + ba + \varepsilon) = \quad b^{-1}L + a + \emptyset = O$
$c^{-1}(L + ba + \varepsilon) = \quad L + \emptyset + \emptyset = L$

d) qui nous donne l'automate fini déterministe minimal suivant :

		a	b	c
$\to$	L	L	M	L
	M	N	M	L
	N	L	O	L
	O	P	M	L
$\leftarrow$	P	L	O	L



qui est celui que nous avions précédemment obtenu, à une renumérotation des états près.

3. a) - b) $iii)$ Un automate non-déterministe est :

δ	0	1
$\to 0$	0	$\{0,1\}$
1	2	2
2	3	3
$\leftarrow 3$	$-$	$-$

L'automate déterministe qu'on obtient est :

δ		0	1
$\rightarrow$	0	0	$\{0,1\}$
	$\{0,1\}$	$\{0,2\}$	$\{0,1,2\}$
	$\{0,2\}$	$\{0,3\}$	$\{0,1,3\}$
	$\{0,1,2\}$	$\{0,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,3\}$	0	$\{0,1\}$
$\leftarrow$	$\{0,1,3\}$	$\{0,2\}$	$\{0,1,2\}$
$\leftarrow$	$\{0,2,3\}$	$\{0,3\}$	$\{0,1,3\}$
$\leftarrow$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$

et en rénumérotant

δ		a	b
$\rightarrow$	0	0	1
	1	2	3
	2	4	5
	3	6	7
$\leftarrow$	4	0	1
$\leftarrow$	5	2	3
$\leftarrow$	6	4	5
$\leftarrow$	7	6	7

c) On peut remarquer qu'en suivant cette numérotation des états on obtient comme graphe des transitions un graphe bien connu - le graphe de *de Bruijn*. En effet, le successeur de l'état de numéro i par une transition étiquetée j (0 ou 1) est l'état numéro $2i + j \pmod{2^n}$. En fait cet automate un peu spécial est bien connu dans la littérature sous le nom d'automate universel. En effet, si nous considérons que le numéro de l'état n'est rien d'autre que la transformation de binaire en décimal de la suite des n derniers caractères lus, une transition consiste alors en un décalage obtenu par l'introduction d'une nouvelle lettre (ce qui justifie encore la formule $2i + j \pmod{2^n}$). Ainsi, dans le cas général nous aurons 2^n états.

d)iii) Le procédé de calcul de l'équivalence de Nérode se déroule ainsi :

$$\begin{array}{ll} \approx_0 & \{0,1,2,3\}\{4,5,6,7\} \\ \approx_1 & \{0,1\}\{2,3\}\{4,5\}\{6,7\} \\ \approx_2 & \{0\}\{1\}\{2\}\{3\}\{4\}\{5\}\{6\}\{7\} \end{array}$$

D'où la conclusion que notre automate était déjà minimal. On peut remarquer que c'est exactement la même chose qui se produira dans le cas général, avec $\sim_{n-1}$ comme équivalence de Nérode.

e) "Intuitivement" il faut mémoriser le mot composé des n dernières lettres lues dans le mot traité, soit 2^n possibilités donc 2^n états.

Plus précisément, supposons qu'un AFD $\mathcal{A}$, ayant strictement moins de 2^n états reconnaisse notre langage. Comme il y a 2^n mots de longueur n, il en existe (au moins) 2, m et m', tels que :

1) $m = u0v$ et $m' = u'1v'$ avec $|u| = |u'| = l$ (et donc $|v| = |v'|$! !)

2) m et m' mènent dans le même état q à partir de l'état initial dans $\mathcal{A}$.

Ceci conduit immédiatement à une contradiction. En effet, pour w un mot quelconque de longueur l, la lecture par l'automate de $m.w$ est la même que celle de $m'.w$. Or, d'après la définition du langage, $m'.w$ est un mot du langage alors que $m.w$ non.