Centre Universitaire d'Aflou C.U.A

Département de Mathématiques et Informatique M.I

Analyse 2

CHPITRE II : Intégrales définies

1. **Intégrale définie**
2. **Sommes de Darboux**
3. **Condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité.**
4. **Intégrabilité des fonctions continues et monotones .**
5. **Propriétés fondamentales de l'intégrale définies.**
6. **Estimation des intégrales et formules de la moyenne**
7. **Intégrales à borne supérieures variable et formule de Newoton.**
8. **Changement de variable et intégration par partie dans l'intégrale définie**

1. Intégrale définie

Définition 1.1 *Soit* $[a, b]$ *un intervalle de R. On appelle une subdivision de cet intervalle toute suite finie* $\tau = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ *vérifiant :*

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

Et nous appelons pas de la subdivision τ *désignons par* λ *le plus grands nombre* $\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1,2,\dots,n$, *i.e,* $\lambda = max\{\Delta x_i,\ i = 1,2,\dots,n\}$.

Exemple Soit $[a,b]$ un intervalle de R. Pour chaque $k \geq 2$, la suite $\tau_k = \left(x_0^{(k)}, x_1^{(k)}, \dots, x_k^{(k)}\right)$ avec $x_i^{(k)} = a + \frac{b-a}{k} i, (i = 0,1, \dots, k)$ est une subdivision de $[a,b]$ de pas $\lambda_k = \frac{b-a}{k}$.

. Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ et on considère une subdivision finie $\tau = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de pas λ, de cet intervalle.

Prenons un point arbitraire ξ_i dans chaque intervalle partiel $[x_{i-1}, x_i]$ et formons la somme

$$\sigma(f,\tau,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

Définition 1.2 La somme (1) s'appelle somme intégrale de f attachée à la subdivision τ de choix des points ξ_i $(i = 1,2, \dots, n)$

Définition 1.3 *La limite finie I (s'elle existe) de la somme intégrale (1) lorsque λ tend vers 0, s'appelle intégrale définie de la fonction f sur l'intervalle $[a,b]$ et se note $I = \int_a^b f(x)dx$. Ou*

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma(f,\tau,\lambda) = \int_a^b f(x)dx.$$

. La fonction f est dite intégrable sur l'intervalle $[a,b]$. Les nombres $a\, etb$ s'appellent bornes inferieure et supérieure d'intégration, la fonction f intégrant, la variable x, variable d'intégration.

. On peut donner aussi une définition de l'intégrale définie en terme :

De ε, δ:

On dit qu'un nombre I est l'intégrale définie d'une fonction f sur un intervalle $[a,b]$ si

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ telle que pour toute subdivision τ de l'intervalle $[a,b]$ de pas $\lambda < \delta$ on a :

$$|\sigma(f,\tau,\lambda) - I| < \varepsilon.$$

.le langage des suites :

On dit qu'un nombre I est l'intégrale définie d'une fonction f sur un intervalle $[a,b]$ si pour toute

Suite de subdivisions (τ_k) telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} \tau_k = 0$, la suite des sommes intégrales $\sigma(f,\tau_k,\lambda_k)$ la correspondante tend vers un même nombre I, lorsque $k \to +\infty$.

2. Sommes de Darboux

Soit f une fonction bornée sur un intervalle $[a,b]$ et on considère une subdivision finie $\tau = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de pas λ.

Désignons par $m_i \; et \; M_I$ l'infimium et le supremum respectifs de cette fonction sur $[x_{i-1}, x_i]$ i,e.,

$m_i = \inf\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\},\; M_i = \sup\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$

Formons les sommes suivantes :

$$S^+(f,\tau,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, M_i \qquad (2)$$

$$S^-(f,\tau,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) m_i \qquad (3)$$

Ces sommes s'appellent respectivement sommes supérieures et inferieures de Darboux de la fonction f attachées à la subdivision τ de l'intervalle $[a,b]$.

De la définition de l'infinum et supremum i s'ensuit que $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$ pour $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ d'où

$S^-(f,\tau,\lambda) \le \sigma(f,\tau,\lambda) \le S^+(f,\tau,\lambda).$

3. Condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité.

Théorème 1.3 *Pour qu'une fonction f bornée sur un intervalle $[a, b]$ soit intégrable sur cet intervalle il est nécessaire et suffisante que*

$$\lim_{\lambda\to 0} S^-(f, \tau, \lambda) = \lim_{\lambda\to 0} S^+(f, \tau, \lambda)$$

Ou encore :

$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0$ *telle que pour toute subdivision τ de l'intervalle $[a, b]$ de pas $\lambda < \delta$ on a :*

$$|S^+(f, \tau, \lambda) - S^-(f, \tau, \lambda)| < \varepsilon.$$

Corollaire 1.3 Si une fonction f bornée sur un intervalle $[a, b]$, verfiant

$$\lim_{\lambda\to 0} S^-(f, \tau, \lambda) = \lim_{\lambda\to 0} S^+(f, \tau, \lambda)$$

Alors on a

$$\lim_{\lambda\to 0} S^-(f, \tau, \lambda) = \lim_{\lambda\to 0} \sigma(f, \tau, \lambda) = \lim_{\lambda\to 0} S^+(f, \tau, \lambda) \qquad (4)$$

Preuve : En effet, pour toute subdivision τ de l'intervalle $[a, b]$ de pas λ, on a

$$S^-(f, \tau, \lambda) \leq \sigma(f, \tau, \lambda) \leq S^+(f, \tau, \lambda),$$

en faisant λ tendre vers 0, on obtient l'égalité (4).

4. **Intégrabilité des fonctions continues et monotones**.

Théorème 1.4 *Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ alors elle est intégrable sur cet intervalle.*

Preuve : On démontre que

$$\lim_{\lambda\to 0} S^-(f, \tau, \lambda) = \lim_{\lambda\to 0} S^+(f, \tau, \lambda)$$

Nous avons

$$S^+(f, \tau, \lambda) - S^-(f, \tau, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} M_i\, \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i$$

La fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors elle est uniformément continue sur cet intervalle donc :

$\forall \frac{\varepsilon}{b-a} > 0,\ \ \exists \delta > 0$ telle que pour tout $x, y \in [a, b]\ t.q\ |x-y| < \delta$ on a:

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Donc s'on considère $\tau = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ de pas $\lambda < \delta$, i.e., $\Delta x_i < \delta$ alors on a

$$|M_i - m_i| = M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}.\ \ i = 1,2, \ldots, n.$$

D'où

$$S^+(f, \tau, \lambda) - S^-(f, \tau, \lambda) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$

D'où d'après Théorème 3.1 la fonction est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$.

Corollaire 1.4 *Soit f une fonction continue sur un l'intervalle $[a, b]$. Nous avons*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} k\right)$$

Preuve : En effet, puisque f est continue sur un l'intervalle $[a, b]$ alors elle est intégrable sur cet intervalle et comme la suite $\tau_n = \left(a, a + \frac{(b-a)}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}, \ldots, a + \frac{n(b-a)}{n}\right)$ forme une subdivision de pas $\lambda_n = \frac{b-a}{n}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ alors on a

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \sigma(f, \tau_n, \lambda_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} k\right).$$

Théorème 4.2 : *Si f est une fonction monotone sur un intervalle $[a, b]$ alors elle est intégrable sur cet intervalle.*

Preuve : Pour toute subdivision $\tau = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de l'intervalle $[a, b]$ de pas $\lambda < \delta$ on a

$$S^+(f, \tau, \lambda) - S^-(f, \tau, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i.$$

On suppose que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[a,b]$, alors elle est croissante sur chaque intervalle partiel $[x_{i-1},x_i]$ donc on a $M_i = f(x_i)$ et $m_i = f(x_{i-1})$, d'où

$$S^+(f,\tau,\lambda) - S^-(f,\tau,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)\Delta x_i$$

$$\leq \lambda \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1}) = \lambda\big(f(b) - f(a)\big)$$

En faisant tendre vers 0 on obtient

$$\lim_{\lambda\to 0} S^-(f,\tau,\lambda) = \lim_{\lambda\to 0} S^+(f,\tau,\lambda),$$

et par suite l'intégrabilité de la fonction f.

5. Propriétés fondamentales de l'intégrale définies.

. L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ a été introduite dans le cas $a < b$. On admet par définition que $\int_a^a f(x)dx = 0$, cette formule étant considéré comme la généralisation naturelle de l'intégrale définie à un segment de longueur nulle.

. On admet par définition que

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Cette formule étant considéré comme la généralisation naturelle de la notion d'intégrale définie au cas où l'intervalle $[a,b]$ est parcouru de b vers a, dans ce cas les points de subdivision x_i de sont numérotés de b vers a.

Théorème 1.5 *Soit* $f\colon [a,b] \to R$ *une fonction intégrable sur* $[a,b]$. *Nous avons*

1. $\forall c \in [a, b]$, *on a :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (5)$$

2. $\forall d \in R$, *on a :*

$$\int_a^b df(x)dx = d\int_a^c f(x)dx. \qquad (6)$$

3. *Si* $g: [a, b] \to R$ *une fonction intégrable sur* $[a, b]$, *alors on a :*

$$\int_a^b f(x) \pm g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \qquad (7)$$

Preuve : 1) On admet l'intégrabilité de f sur les intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$. On considère une subdivision $\tau = (x_0, x_1, \dots, x_m, \dots, x_n)$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ de pas λ, de sorte que $x_m = c$. Alors nous avons

$$\sigma(f, \tau, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=m}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

En faisan λ tendre vers 0 on obtient l'égalité (5).

2) Pour toute subdivision $\tau = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ de pas λ on a

$$\sigma(df, \tau, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} df(\xi_i)\Delta x_i = d\sigma(f, \tau, \lambda)$$

En faisan λ tendre vers 0 on obtient l'égalité (6).

3) On admet que l'intégrabilité de f et g sur $[a, b]$ implique l'intégrabilité de $f \pm g$ sur $[a, b]$. Pour toute subdivision $\tau = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ de pas λ on a

$$\sigma(f \pm g, \tau, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(\xi_i) \pm g(\xi_i)\big)\Delta x_i = \sigma(f, \tau, \lambda) \pm \sigma(g, \tau, \lambda).$$

En faisan λ tendre vers 0 on obtient l'égalité (7).

6. Estimation des intégrales et formules de la moyenne

6.1 Estimations des intégrales

Théorème 1.1.6 : *Soit* $f, g: [a, b] \to R$ *deux fonctions intégrables sur* $[a, b]$. *Nous avons :*

1. *Si* $f(x) \geq 0$ *sur* $[a, b]$, *alors*
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \qquad (8)$$

2. *Si* $f(x) \leq g(x)$ *sur* $[a, b]$ *alors*
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \qquad (9)$$

3. *Nous avons*
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \qquad (10)$$

Preuve : Soit une subdivision $\tau = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ de pas λ, alors puisque $f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$ et $\Delta x_i > 0$ on a

$$\sigma(f, \tau, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0.$$

En faisan λ tendre vers 0 on obtient l'inégalité (8).

2) $f(x) \leq g(x)$ sur $[a, b]$ implique $g(x) - f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$. On applique l'estimation (8) et l'égalité (7) du Théorème 5.1 on obtient l'estimation (9).

3) Pour tout $x \in [a, b]$ nous avons $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. On applique l'estimation (9) sur cette double inégalité on obtient l'estimation (9).

Corollaire 1.1.6 : *Soit* $f, g: [a, b] \to R$ *deux fonctions intégrables sur* $[a, b]$. *Nous avons :*

1. *Si* $|f(x)| \leq k$ *sur* $[a, b]$, *alors on a :*
2.
$$\int_a^b f(x)dx \leq k(b-a) \tag{11}$$

3. *S'il existe* $m, M \in R$ *tel que* $m \leq f(x) \leq M$ *pour tout* $x \in [a, b]$ *alors on a :*

$$M(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq m(b-a) \tag{12}$$

Preuve : (Exercice)

6.2Formules de la moyenne

Théorème 1.2.6 : *Si* $f:[a, b] \to R$ *est une fonction continue sur l'intervalle* $[a, b]$ *alors il existe* $c \in [a, b]$ *telle que :*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Preuve : La fonction est continue sur alors il $m = inf\{f(x), x \in [a, b]\}$ et $M = sup\{f(x), x \in [a, b]\}$ tel que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$. Donc d'après l'estimation (12) on a

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Donc s'on pose $s = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ alors on a $s \in [m, M]$ ou encore s compris entre le infnimum et le supremum de la fonction continue f sur$[a, b]$. D'où $\exists c \in [a, b]$ tel que $s = f(c)$ et par suite nous avons : $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

7. Intégrales à borne supérieures variable et formule de Newton –Leibniz.

7.1 Intégrales à borne supérieures variable

Soit $f:[a,b]\to R$ est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ et considérons l'intégrale $\int_a^x f(t)dt \quad (a\le x\le b)$ ou la borne inferieure a est fixe et la borne supérieure x est variable. Cette intégrale est fonction de sa borne supérieure x, variable. Désignons cette fonction par $G(x)$, i,.e, posons :

$$G(x)=\int_a^x f(t)dt \quad (a\le x\le b) \tag{13}$$

Et appelons-la intégrale à borne supérieure variable.

Théorème 1.1.7 *La fonction donnée par* (13) *est dérivable sur* $[a,b]$ *et on a*

$$G'(x)=f(x).$$

Preuve : Soit $x\in[a,b]$ et donnons-lui un accroissement $\Delta x\neq 0$ tel que $x+\Delta x\in[a,b]$. Nous avons

$$G(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$
$$=G(x)+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\,.$$

D'où

$$G(x+\Delta x)-G(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

D'près la formule de la moyenne $\exists c_x\in[x+\Delta x,x]$ tel que $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=\Delta x f(c_x)$, et par suite on a

$$\frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x}=f(c_x),$$

Maintenant si $\Delta x\to 0$ alors $c_x\to x$, d'où

$$G'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x}=f(x).$$

7.1 Formule de Newton –Leibniz.

Soit $f:[a,b]\to R$ est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$. D'après Théorème 7.1.1 la fonction f admet une primitive sur l'intervalle $[a,b]$ et l'une d'elles est la fonction

$$\boldsymbol{G(x)} = \int_a^x f(t)dt.$$

Soit F une autre primitive de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ alors on a :

$$G(x) = F(x) + c, \qquad c \in R.$$

Pour $x = a$ on a $0 = G(a) = \int_a^a f(t)dt \ = F(a) + c$ donc $c = -F(a)$ et par suite on a

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Autrement dit que pour tout $x \in [a, b]$ on a $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

En faisant $x = b$ on obtient la formule fondamentale du calcul intégrale

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

appelée formule de Newton –Leibniz.

On convient de designer la déference $F(b) - F(a)$ comme suit $F(x)|_a^b$ ou $[F(x)]_a^b$

Exemple :

1. $\int_a^b sinxdx = cos(a) - cos(b)$.

2. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} dx = arctg(1) - arctg(-1) = \frac{\pi}{2}$.

8. Changement de variable et intégration par partie dans l'intégrale définie

Théorème 1.8 : Si $u, v: [a, b] \to \mathbb{R}$, deux fonctions 2 fois dérivables sur l'intervalle $[a, b]$ alors on a

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) .$$

Preuve : En effet, la fonction uv est dérivable sur $[a,b]$ donc pour tout $x \in [a,b]$ on a

$$\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x),$$

En appliquant la formule de Newton –Leibniz on obtient

$$\int_a^b \big(u(x)v(x)\big)' = \int_a^b (u'(x)v(x) + v'(x)u(x))dx = u(x)v(x)|_a^b$$

D'où $\int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b v'(x)u(x)dx = = u(x)v(x)|_a^b$.

Exemple : Calculer l'intégrale $\int_0^1 arctg(x)dx$

Posons $u(x) = arxtg(x)\ et\ v(x) = x$ nous avons

$$\int_0^1 u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_0^1 u'(x)v(x)$$

$$= \ xarctgx|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\ dx$$

$$= xarctgx|_0^1 - \frac{1}{2}xln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - ln\sqrt{2}.$$

Théorème 2.8 : Soit $f: [a,b] \to R$ une fonctions continue sur l'intervalle $[a,b]$ et soit $g: [c,d] \to [a,b]$ une fonction de classe C^1 sur $[c,d]$ (i.e, soit g dérivable sur $[c,d]$ et g' continue sur $[c,d]$) telle que $g(c) = a$ et $g(d) = b$. Nous avons

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f\big(g(t)\big)\, g'(t)dt.$$

Preuve : D'après la formule de Newton –Leibniz on a

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

où F est une primitive de f sur $[a,b]$. La fonction $t \to F(g(t))$ est dérivable sur $[c,d]$ et on a donc $F\big(g(t)\big)$ est une primitive de $f(g(t)g'(t)$ sur $[c,d]$, donc en vertu la formule de Newton –Leibniz :

$$\int_c^d f\big(g(t)\big)g'(t)dt' = F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big) = F(b) - F(a) = \int_a^{\mathrm{b}} f(x)dx.$$

Exemple : Calculer l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.

Considérons le changement de variable $x = sint$ $(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$. La fonction $x \to \sqrt{1-x^2}$ est continue sur l'intervalle $[0,1]$ on aussi la fonction $t \to sint$ dérivable sur $[0,\pi/2]$ et $(sint)' = cost$ continue sur $[0,\pi/2]$ et $sin0 = 0$ et $sin(\pi/2) = 1$ d'où d'après Théorème 8.1 on a :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(sint)^2}\,costdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cost)^2 dt = \pi/4\,.$$