TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta mechatroniky, informatiky
a mezioborových studií

Moderní metody zpracování signálů

Zpracování signálů na grafech

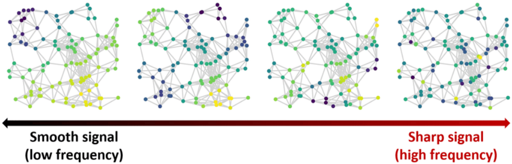
Zbyněk Koldovský

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
Modernizace didaktických metod a inovace výuky technických předmětů.

Idea

- Uvažujeme data z dynamických sítí (např. sociální sítě, finanční trh, dopravní sítě, energetické rozvody)
- Signál chápaný jako časová řada není vhodný, protože neodráží topologii sítě
- Tok dat je možné popisovat pomocí grafu, který modeluje závislosti v čase i prostoru



Otázky

- Jak grafový signál definovat? Jednosměrný nebo obousměrný? Vážený nebo nevážený?
- Lze zavést obdobu Fourierovy transformace? Frekvence grafového signálu?
- Jak definovat grafové lineární filtry? FIR? IIR?

Postup

- Cestou je zobecnění klasických časových řad na grafy
- Rozšíření ale není jediné možné, takže může existovat více teorií, transformací, atp.

Motivace: Kruhová časová řada jako graf

- Vrcholy grafu $\mathcal{E} = \{(2,1),(3,2),(4,3),\dots,(1,n)\}$ (kruhový posun v čase)
- Kruhový posun signálu o jednotku času:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(n) \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{Sx} = \begin{pmatrix} x(n) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(n-1) \end{pmatrix}$$

- Operátor časového (kruhového) posunu: **S** je cirkulární matice
- **S** má vlastní vektory odpovídající sloupcům matice DFT a její vlastní čísla odpovídají frekvencím DFT

Motivace: Barevný šum

- Nechť $h(t)$ je FIR délky L a $v(t)$ bílý šum

$$x(t) = \sum_{i=0}^{L-1} h(i)v(t-i)$$

- Operátor časového (kruhového) posunu: $\mathbf{S}_{1,:} = [h(0)\dots h(L-1)]$ je cirkulární matice
- Každou cirkulární matici lze diagonalizovat maticí DFT a její vlastní čísla odpovídají DFT přenosové funkce filtru $h(t)$
- $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{v} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H v$
- IDEA: Grafová Fourierova transformace a filtry můžou vycházet z operátoru posunu (který však možno definovat více způsoby) a z jeho vlastních čísel a vektorů (protože interpretace pro speciální případ časových řad nám dává jasný smysl)

Signál jako vážený (jedno)obousměrný graf

- Hodnoty signálu: vrcholy grafu $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$
- Závislosti hodnot: vrcholy grafu $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$
- Grafový signál: zobrazení $x : \mathcal{N} \mapsto \mathcal{R}$, které lze reprezenovat vektorem $\mathbf{x}$ velikosti $n \times 1$
- Adjacenční matice: $\mathbf{A}$ symetrická (předpokládáme obousměrný graf)

Operátor grafového posunu - GSO (graph shift operator)

- Obecně: matice $\mathbf{S} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ pro kterou platí, že $\mathbf{S}_{ij} \neq 0 \iff i = j$ nebo $(i, j) \in \mathcal{E}$
- GSO definujeme jako Laplaceovu matici: $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$, kde $\mathbf{D} = \mathtt{diag}(\mathbf{A1})$
- Totální variace signálu na grafu je

$$\mathrm{TV}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{x} = \sum_{i,j} a_{ij} (x(i) - x(j))^2,$$

  kde a_{ij} je ij-tý prvek adjacenční matice **A**.
- Je-li $\mathbf{u}_i$ i-tý (jednotkový) vlastní vektor **L** a λ_i odpovídající vlastní číslo, pak

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{L} \mathbf{u}_i = \lambda_i$$

  Takže $\mathrm{TV}(\mathbf{u}_i) = \lambda_i$. Je-li např. λ_i malé, $\mathbf{u}_i$ musí být hladký.

Grafová Fourierova transformace - GFT

- Rozklad $\mathbf{L} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H$, kde $\mathbf{U}$ jsou vlastní vektory a $\mathbf{\Lambda}$ má na diagonále vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tak, že $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$
- i-tý Fourierův koeficient grafu (frekvence) je definovaný

$$X_i = \mathbf{u}_i^T \mathbf{x}$$

- Grafová Fourierova transformace

$$X = \mathbf{U}^T \mathbf{x}$$

Grafový lineární filtr

- Charakterizovaný lineárním operátorem:

$$\mathcal{H}(\mathbf{L}) = \sum_{i=0}^{L-1} h(i)\mathbf{L}^i = \mathbf{U}\left(\sum_{i=0}^{L-1} h(i)\mathbf{\Lambda}^i\right)\mathbf{U}^T$$

- Výstup filtru:

$$\mathbf{y} = \mathcal{H}(\mathbf{L})\mathbf{x}$$

- Frekvenční odezva grafového filtru je

$$h(\mathbf{\Lambda}) = \sum_{i=0}^{L-1} h(i)\mathbf{\Lambda}^i$$

- Přenosová funkce grafového filtru je

$$h(\lambda) = \sum_{i=0}^{L-1} h(i)\lambda^i$$

Výstup grafového lineárního filtru

- Výstup filtru:

$$\mathbf{y} = \mathcal{H}(\mathbf{L})\mathbf{x}$$

- Přenosová funkce grafového filtru je

$$h(\lambda) = \sum_{i=0}^{L-1} h(i)\lambda^i$$

- i-tý Fourierův koeficient výstupního grafového signálu je

$$Y_i = h(\lambda_i)X_i$$