



TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI  
**Fakulta mechatroniky, informatiky  
a mezioborových studií**



# Moderní metody zpracování signálů

Optimální filtry ve smyslu kvadratické vzdálenosti

**Zbyněk Koldovský**



evropský  
sociální  
fond v ČR



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

Projekt ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050  
**Modernizace didaktických metod  
a inovace výuky technických  
předmětů.**

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# Část I

## Minimalizace kvadratické vzdálenosti

# Vstup, výstup, chyba

- $x[n]$  je vstupní, pro jednoduchost reálný, signál
- Signál zpracováváme FIR filtrem  $w$  délky  $L$ , výstup je

$$\begin{aligned} y[n] &= w[0]x[n] + w[1]x[n-1] + \dots + w[L-1]x[n-L] \\ &= \sum_{k=0}^{L-1} w[k]x[n-k]. \end{aligned}$$

- Vektorový zápis

$$y[n] = \mathbf{w}^T \mathbf{x}_n$$

kde

$$\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} x[n] \\ x[n-1] \\ \vdots \\ x[n-L+1] \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ \vdots \\ w[L-1] \end{bmatrix},$$

# Vstup, výstup, chyba

- Necht'  $d[n]$  je jiný signál, který chceme získat filtrováním signálu  $x[n]$ .
- Chyba rozdílu

$$\begin{aligned}e[n] &= d[n] - y[n] \\ &= d[n] - \mathbf{w}^T \mathbf{x}_n.\end{aligned}$$

- Filtr  $w$  můžeme hledat optimalizací nějakého kritéria, např. kvadratického

$$\begin{aligned}J_n(\mathbf{w}) &= e[n]^2 \\ &= (d[n] - \mathbf{w}^T \mathbf{x}_n)^2 = d[n]^2 - 2d[n]\mathbf{w}^T \mathbf{x}_n + \mathbf{w}^T \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \mathbf{w}.\end{aligned}$$

# Gradient $J_n(\mathbf{w})$

- Gradient  $J_n(\mathbf{w})$ , tj. vektor parciálních derivací podle jednotlivých složek  $\mathbf{w}$ , lze zapsat vektorově

$$\Delta J_n(\mathbf{w}) = -2\mathbf{x}_n d(n) + 2\mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \mathbf{w}.$$

- Zavedeme označení

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T$$

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{x}_n d[n],$$

- Gradient můžeme zapsat jako

$$\Delta J_n(\mathbf{w}) = -2\mathbf{p}_n + 2\mathbf{R}_n \mathbf{w}.$$

# Least Mean Square

- Položíme-li  $\Delta J_n(\mathbf{w})$  roven nule, dostáváme rovnici

$$\mathbf{R}_n \mathbf{w} = \mathbf{p}_n$$

- Matice  $\mathbf{R}_n$  má hodnotu 1, takže nemá inverzi.
- Definujeme nové kritérium zprůměrováním  $J_n(\mathbf{w})$  přes interval  $n = 1, \dots, N$

$$J_{\text{LMS}}(\mathbf{w}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N J_n(\mathbf{w}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e[n]^2.$$

- Gradient  $J_{\text{LMS}}(\mathbf{w})$  je průměr gradientů  $J_n(\mathbf{w})$

$$\Delta J_{\text{LMS}}(\mathbf{w}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Delta J_n(\mathbf{w})$$

# Least Mean Square

- Takže

$$\Delta J_{\text{LMS}}(\mathbf{w}) = -2\mathbf{p} + 2\mathbf{R}\mathbf{w}$$

kde

$$\mathbf{R} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{R}_n$$
$$\mathbf{p} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n d[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{p}_n.$$

- Matice  $\mathbf{R}$  již může mít inverzi (je-li interval  $n = 1, \dots, N$  dostatečně dlouhý). Proto

$$\mathbf{w}_{\text{LMS}} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}.$$

## Co jsou prvky $R$ ?

- Auto-kovariance  $x$

$$R_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x[n-i+1]x[n-j+1] = \hat{C}_{xx}[i-j]$$

- Platí tedy (až na koncové efekty)

$$R = \begin{pmatrix} \hat{C}_{xx}[0] & \hat{C}_{xx}[1] & \hat{C}_{xx}[2] & \dots & \hat{C}_{xx}[L-1] \\ \hat{C}_{xx}[1] & \hat{C}_{xx}[0] & \hat{C}_{xx}[1] & \dots & \hat{C}_{xx}[L-2] \\ \hat{C}_{xx}[2] & \hat{C}_{xx}[1] & \hat{C}_{xx}[0] & \dots & \hat{C}_{xx}[L-3] \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hat{C}_{xx}[L-1] & \hat{C}_{xx}[L-2] & \hat{C}_{xx}[L-3] & \dots & \hat{C}_{xx}[0] \end{pmatrix}$$



## Co jsou prvky $\mathbf{R}$ ?

- Matici  $\mathbf{R}$  lze též zapsat jako

$$\mathbf{R} = \frac{1}{N} \mathbf{X} \mathbf{X}^T$$

kde

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x[1] & x[2] & \dots & \dots & x[N] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x[1] & \dots & \dots & x[N-1] & x[N] & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & x[1] & \dots & x[N-L] & \dots & \dots & \dots & x[N] \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{R}$  je toeplitzovská (diagonálně konstantní), symetrická a pozitivně semidefinitní (má reálná nezáporná vlastní čísla).

# Co jsou prvky $\mathbf{p}$ ?

- Cross-kovariance

$$\mathbf{p}_j = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x[n-j+1]d[n]$$

- Lze zapsat

$$\mathbf{p} = \frac{1}{N} \mathbf{X} \mathbf{d}$$

kde

$$\mathbf{d} = [d[1], d[2], \dots, d[N]]^T$$

## Řešení soustavy $\mathbf{R}\mathbf{w}_{\text{LMS}} = \mathbf{p}$

- Řešení soustavy  $\mathbf{R}\mathbf{w}_{\text{LMS}} = \mathbf{p}$  vyžaduje  $\mathcal{O}(L^3)$  operací
- Levinson-Durbinův algoritmus využívá toeplitzovskou strukturu  $\mathbf{R}$  a počítá pomocí rekurze řešení pro všechny délky filtru  $1, \dots, L$  přičemž složitost je  $\mathcal{O}(L^2)$ .
- Rovněž paměťové nároky jsou řádově nižší, protože neukládáme do paměti celou matici  $\mathbf{R}$ , pouze jeden její řádek (sloupec).

## Příklad: vzájemné zpoždění signálů

- Předpoklad:  $d$  je zpožděný signál  $x$  plus neznámá změna (šum, filtr, ...)

$$d[n] = x[n - D] + \nu[n]$$

- Hledáme filtr takový, aby  $h * x$  byl co nejvíce podobný  $d[n]$ .
- Ideální výsledek:

$$h[n] = \delta[n - D]$$

Jinými slovy  $h$  zpozdí  $x$  o  $D$  vzorků.

## Část II

### Wienerův filtr

# Wienerův filtr

- Předpoklad:  $x$  a  $d$  jsou slabě stacionární (jejich auto-kovarianční funkce (a tedy spektrum) se v čase nemění).
- Kritérium definujeme jako

$$J(\mathbf{w}) = E[e[n]^2].$$

Díky stacionaritě je toto kritérium nezávislé na  $n$  (na čase).

- Gradient  $J(\mathbf{w})$  položíme roven nule, takže

$$\mathbf{w}_{\text{wiener}} = \arg \min_{\mathbf{w}} J(\mathbf{w}) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p},$$

kde

$$\mathbf{R} = E \left[ \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \right]$$

$$\mathbf{p} = E \left[ \mathbf{x}_n d[n] \right].$$

# LMS vs. Wienerův filtr

- Porovnejte definice **R** a **p** pro LMS a Wienerův filtr

$$\mathbf{R} = E \left[ \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \right] \quad \mathbf{R} = \frac{1}{N} \mathbf{X} \mathbf{X}^T$$

- Jsou-li  $\mathbf{x}$  a  $d$  stacionární, pak

$$\mathbf{w}_{\text{LMS}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathbf{w}_{\text{wiener}}$$

- Pokud signály nejsou stacionární, nelze nic obecně usoudit.