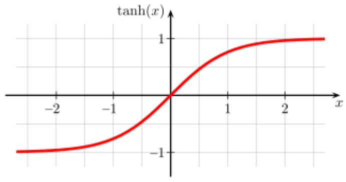
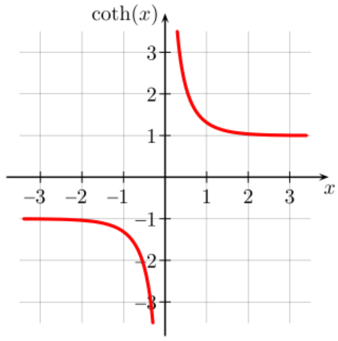
WIKIPEDIA

Tangens hyperbolicus und Kotangens hyperbolicus

Tangens hyperbolicus und **Kotangens hyperbolicus** sind Hyperbelfunktionen. Man nennt sie auch *Hyperbeltangens* oder *hyperbolischen* *Tangens* bzw. *Hyperbelkotangens* oder *hyperbolischen* *Kotangens*.



Graph des Tangens hyperbolicus



Graph des Kotangens hyperbolicus

Inhaltsverzeichnis

Schreibweisen

Tangens hyperbolicus: $y = \tanh\, x$
Kotangens hyperbolicus: $y = \coth\, x$

Definitionen

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$$
$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{2x} + 1}{\mathrm{e}^{2x} - 1} = 1 + \frac{2}{\mathrm{e}^{2x} - 1}$$

Hierbei bezeichnen $\sinh x$ und $\cosh x$ den Sinus hyperbolicus bzw. Kosinus hyperbolicus.

Eigenschaften

	Tangens hyperbolicus	Kotangens hyperbolicus
Definitionsbereich	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty \; ; x \neq 0$
Wertebereich	$-1 < f(x) < 1$	$-\infty < f(x) < -1 \; ; 1 < f(x) < +\infty$
Periodizität	keine	keine
Monotonie	streng monoton steigend	$x < 0$ streng monoton fallend $x > 0$ streng monoton fallend
Symmetrien	Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung	Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung
Asymptoten	$x \to +\infty$: $f(x) \to +1$ $x \to -\infty$: $f(x) \to -1$	$x \to +\infty$: $f(x) \to +1$ $x \to -\infty$: $f(x) \to -1$
Nullstellen	$x = 0$	keine
Sprungstellen	keine	keine
Polstellen	keine	$x = 0$
Extrema	keine	keine
Wendepunkte	$(0, 0)$	keine

Spezielle Werte

Der Kotangens hyperbolicus hat zwei Fixpunkte, d. h., es gibt zwei $u \in \mathbb{R}$, sodass

$$\coth u = u.$$

Sie liegen bei $u_{\pm} = \pm 1{,}19967864\ldots$ (Folge A085984 in OEIS)

Umkehrfunktionen

Der Tangens hyperbolicus ist eine Bijektion $\tanh\colon \mathbb{R} \to (-1, 1)$. Die Umkehrfunktion nennt man Areatangens hyperbolicus. Sie ist für Zahlen x aus dem Intervall $(-1, 1)$ definiert und nimmt als Wert alle reellen Zahlen an. Sie lässt sich durch den natürlichen Logarithmus ausdrücken:

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}.$$

Für die Umkehrung des Kotangens hyperbolicus gilt:

$$\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}$$

Ableitungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tanh x = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \coth x = 1 - \coth^2 x = -\frac{1}{\sinh^2 x} = -\operatorname{csch}^2 x$$

Die n-te Ableitung ist gegeben durch

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} \tanh z = \frac{2^{n+1} \mathrm{e}^{2z}}{(1 + \mathrm{e}^{2z})^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k A_{n,k} \, \mathrm{e}^{2kz}$$

mit den Euler-Zahlen $A_{n,k}$.

Additionstheorem

Es gilt das Additionstheorem

$$\tanh(\alpha+\beta)=\frac{\tanh\alpha+\tanh\beta}{1+\tanh\alpha\,\tanh\beta}$$

analog dazu:

$$\coth(\alpha+\beta)=\frac{1+\coth\alpha\,\coth\beta}{\coth\alpha+\coth\beta}$$

Integrale

Stammfunktionen der Hyperbelfunktionen

Die Ursprungsstammfunktion des Tangens Hyperbolicus ist der natürliche Logarithmus aus dem Cosinus Hyperbolicus. Für den Kotangens Hyperbolicus kann nur eine Stammfunktion mit einer Polstelle beim Wert $x = 0$ angegeben werden:

$$\int \tanh x\,\mathrm{d}x = \ln\cosh x + C$$
$$\int \coth x\,\mathrm{d}x = \ln|\sinh x| + C$$

Die Ursprungsstammfunktion des Tangens Hyperbolicus beschreibt im freien Fall eines Objektes den Zeit-Ort-Verlauf. Denn der Weg ist grundsätzlich das Integral der Geschwindigkeit bezüglich der Zeit. Durch Involvierung des Widerstandsbeiwertes ergibt sich diese Differentialgleichung, welche auf nachfolgende Weise gelöst wird:

$$a(t)=\frac{d}{dt}v(t)=g-\frac{c_W\,\rho_{\mathrm{Luft}}\,A}{2\,m_{\mathrm{Obj}}}\,v(t)^2$$
$$v(t)=\sqrt{\frac{2\,m_{\mathrm{Obj}}\,g}{c_W\,\rho_{\mathrm{Luft}}\,A}}\tanh\left(\sqrt{\frac{c_W\,\rho_{\mathrm{Luft}}\,A\,g}{2\,m_{\mathrm{Obj}}}}\,t\right)$$
$$s(t)=\int_0^t v(t')dt'=\frac{2\,m_{\mathrm{Obj}}}{c_W\,\rho_{\mathrm{Luft}}\,A}\ln\left[\cosh\left(\sqrt{\frac{c_W\,\rho_{\mathrm{Luft}}\,A\,g}{2\,m_{\mathrm{Obj}}}}\,t\right)\right]$$

Tangens Hyperbolicus Cardinalis

Wenn der *Tangens Hyperbolicus* durch die *Identische Funktion* geteilt wird, dann wird der *Tangens Hyperbolicus Cardinalis* beziehungsweise Kardinalhyperbeltangens $\tanh(x)/x$ gebildet. Das Integral von Null bis Unendlich von dieser Funktion divergiert ins Unendliche. Aber das Integral vom Quadrat des *Tangens Hyperbolicus Cardinalis* konvergiert und nimmt einen konkreten Wert an. Das Integral vom Kubus des *Tangens Hyperbolicus Cardinalis* konvergiert ebenso:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\tanh(x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{14}{\pi^2}\,\zeta(3)$$
$$\int_0^\infty \frac{1}{x^3}\tanh(x)^3\,\mathrm{d}x=\frac{186}{\pi^4}\,\zeta(5)-\frac{7}{\pi^2}\,\zeta(3)$$

Weitere Darstellungen

Reihenentwicklungen

$$\tanh x=\operatorname{sgn}x\left[1+\sum_{k=1}^\infty(-1)^k\,2\,\mathrm{e}^{-2k|x|}\right]$$
$$\tanh x=\sum_{k=0}^\infty\frac{8x}{(2k+1)^2\pi^2+4x^2}$$
$$\coth x=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^\infty\frac{2x}{k^2\pi^2+x^2}$$

Die Taylorreihe des Tangens hyperbolicus lautet:

$$\tanh x=\sum_{n=1}^\infty\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}\cdot B_{2n}\cdot x^{2n-1}=\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^{2n+1}}{\pi^{2n}}\cdot\lambda(2n)\cdot x^{2n-1}=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+\cdots$$

Hierbei steht B_n für die Bernoulli-Zahlen und λ(n) für die Dirichletsche Lambdafunktion. Der Konvergenzradius dieser Reihe ist π/2.

Die Taylorreihe der Differenz von Kotangens hyperbolicus und Kehrwertfunktion lautet:

$$\mathrm{L}(x) = \coth x - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{\pi^{2n}} \cdot \zeta(2n) \cdot x^{2n-1} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 + \frac{2}{945}x^5 - \frac{1}{4725}x^7 + \cdots$$

Diese Funktion wird Langevin-Funktion genannt.

Dabei steht ζ(n) für die Riemannsche Zetafunktion. Der Konvergenzradius dieser Reihe ist π.

Kettenbruchdarstellung

Johann Heinrich Lambert zeigte folgende Formel:

$$\tanh x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \ldots}}}$$

Numerische Berechnung

Grundsätzlich kann der Tangens hyperbolicus über die bekannte Formel

$$\tanh x = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$$

berechnet werden, wenn die Exponentialfunktion e^x zur Verfügung steht. Es gibt jedoch folgende Probleme:

- Große positive Operanden lösen einen Überlauf aus, obwohl das Endergebnis immer darstellbar ist
- Für Operanden nahe an 0 kommt es zu einer numerischen Auslöschung, womit das Ergebnis ungenau wird

Fall 1: x ist eine große positive Zahl mit $x > k \cdot \frac{\ln 10}{2}$:

$$\tanh x = +1,$$

wobei k die Anzahl der signifikanten Dezimalziffern des verwendeten Zahlentyps ist, was zum Beispiel beim 64-Bit-Gleitkommatyp *double* 16 ist.

Fall 2: x ist eine kleine negative Zahl mit $x < -k \cdot \frac{\ln 10}{2}$:

$$\tanh x = -1$$

Fall 3: x ist nahe an 0, z. B. für $-0{,}1 < x < +0{,}1$:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\mathrm{e}^x - \sinh x}$$

$\sinh x$ lässt sich hier über die Taylorreihe $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$ sehr genau berechnen.

Fall 4: Alle übrigen x:

$$\tanh x = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$$

Differentialgleichung

$\tanh$ löst folgende Differentialgleichungen:

$f' = 1 - f^2$ oder

$$\frac{1}{2}f'' = f^3 - f = f(f^2 - 1)$$

mit $f(0) = 0$ und $f'(\infty) = 0$

Komplexe Argumente

$$\tanh(x + i\,y) = \frac{\sinh(2x)}{\cosh(2x) + \cos(2y)} + i\,\frac{\sin(2y)}{\cosh(2x) + \cos(2y)}$$
$$\tanh(i\,y) = i\,\tan y$$
$$\coth(x + i\,y) = \frac{\sinh(2x)}{\cosh(2x) - \cos(2y)} + i\,\frac{-\sin(2y)}{\cosh(2x) - \cos(2y)}$$
$$\coth(i\,y) = -i\,\cot y$$

Anwendungen in der Physik

- Tangens und Kotangens hyperbolicus können benutzt werden, um die zeitliche Abhängigkeit der Geschwindigkeit beim Fall mit Luftwiderstand oder auch beim Wurf nach unten zu beschreiben, wenn für den Strömungswiderstand eine turbulente Strömung angesetzt wird (Newton-Reibung). Das Koordinatensystem werde so gelegt, dass die Ortsachse nach oben zeigt. Für die Geschwindigkeit gilt dann eine Differenzialgleichung der Form $\dot{v} = -g + kv^2$ mit der Schwerebeschleunigung g und einer Konstanten $k > 0$ mit der Einheit 1/m. Es gibt dann immer eine Grenzgeschwindigkeit $v_\mathrm{g} = -\sqrt{\frac{g}{k}} < 0$, die für $t \to \infty$ erreicht wird, und es gilt:
  - beim Fall oder Wurf nach unten mit einer Anfangsgeschwindigkeit kleiner der Grenzgeschwindigkeit:
    $v(t) = v_\mathrm{g} \cdot \tanh\left(\sqrt{gk}t + c\right)$ mit $c = \operatorname{artanh}\frac{v(0)}{v_\mathrm{g}} \geq 0$
  - beim Wurf nach unten mit einer Anfangsgeschwindigkeit größer der Grenzgeschwindigkeit:
    $v(t) = v_\mathrm{g} \cdot \coth\left(\sqrt{gk}t + c\right)$ mit $c = \operatorname{arcoth}\frac{v(0)}{v_\mathrm{g}} > 0$

- In der Speziellen Relativitätstheorie ist der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit *v* und Rapidität θ gegeben durch $v = c \cdot \tanh\theta$ mit der Lichtgeschwindigkeit *c*.

- Der Tangens hyperbolicus beschreibt ferner die thermische Besetzung eines Zwei-Zustands-Systems in der Quantenmechanik: Ist *n* die gesamte Besetzung der beiden Zustände und *E* ihr Energie-Unterschied, so ergibt sich für die Differenz der Besetzungszahlen $\delta n = n \cdot \tanh\frac{E}{2k_\mathrm{B}T}$, wobei k_B die Boltzmann-Konstante und *T* die absolute Temperatur ist.

- Wichtig für die Beschreibung der Magnetisierung eines Paramagneten ist die Brillouin-Funktion:

$$B_J(x) = \frac{1}{J}\left[\left(J + \frac{1}{2}\right)\coth\left(J\,x + \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\coth\frac{x}{2}\right]$$

- Der Kotangens hyperbolicus tritt auch in der Kosmologie auf: Die zeitliche Entwicklung des Hubble-Parameters in einem flachen Universum, das im Wesentlichen nur Materie und Dunkle Energie enthält (was ein gutes Modell für unser tatsächliches Universum ist), wird beschrieben durch $H(t) = H_g \coth\frac{t}{t_{ch}}$, wobei $t_{ch} = \frac{2}{3H_g}$ eine charakteristische Zeitskala ist und $H_g = \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}H_0$ der Grenzwert des Hubble-Parameters für $t \to \infty$ ist (H_0 ist dabei der heutige Wert des Hubble-Parameters, $\Omega_{\Lambda,0}$ der Dichteparameter für die Dunkle Energie). (Dieses Ergebnis ergibt sich leicht aus dem zeitlichen Verhalten des Skalenparameters, das aus den Friedmann-Gleichungen abgeleitet werden kann.) Bei der Zeitabhängigkeit des Dichteparameters der Dunklen Energie tritt dagegen der Tangens hyperbolicus auf: $\Omega_\Lambda(t) = \tanh^2(t/t_{ch})$.

Weblinks

- Eric W. Weisstein: *Hyperbolic Tangent.* (https://mathworld.wolfram.com/HyperbolicTangent.html) In: *MathWorld* (englisch).
- Eric W. Weisstein: *Hyperbolic Cotangent.* (https://mathworld.wolfram.com/HyperbolicCotangent.html) In: *MathWorld* (englisch).