

## IEL – protokol k projektu

Jakub Králík  
xkralij00

8.12.2024

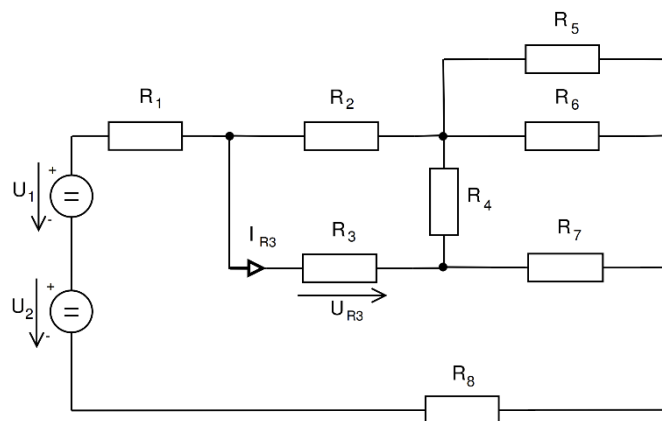
## Obsah

<b>1. Príklad 1.....</b>	<b>2</b>
1.1. Odpor a prúd celkového obvodu.....	2
1.2. Zjednodušíme zdroje a rezistory $R_5$ a $R_6$ .....	2
1.3. Pomocou úpravy na trojuholníkový tvar zjednodušíme rezistory $R_2$ , $R_3$ a $R_4$ .....	2
1.4. Zjednodušíme obvod na obvod s jedným rezistorom.....	3
1.5. Prúd a napätie na $R_3$ .....	3
<b>2. Príklad 2.....</b>	<b>4</b>
2.1. Zkratujeme zdroj – vypočítame vnútorný odpor $R_i$ .....	4
2.2. Určíme $U_i$ pomocou druhého Kirchhoffova zákona .....	4
2.3. Dopočítanie $U_{R4}$ a $I_{R4}$ .....	4
<b>3. Príklad 3.....</b>	<b>5</b>
3.1. Pomocou prvého Kirchhoffova zákona vytvoríme maticu .....	5
3.2. Pomocou Cramerovho pravidla zistíme $U_A$ , $U_B$ a $U_C$ .....	6
3.3. Zistíme $U_{R2}$ a prúd $I_{R2}$ .....	6
<b>4. Príklad 4.....</b>	<b>7</b>
4.1. Označíme smyčky a vytvoríme maticu .....	7
4.2. Pomocou Cramerovho pravidla vypočítame prúdy $I_A$ , $I_B$ a $I_C$ .....	8
4.3. Vypočítame hľadané hodnoty $UL1$ a $\phi L1$ .....	8
<b>5. Príklad 5.....</b>	<b>9</b>
5.1. Charakteristická rovnica .....	9
5.2. Očakávané riešenie .....	9
5.3. Derivujeme $iLt$ .....	9
5.4. Dosadíme do rovnice, ktorú sme si definovali.....	10
5.5. Integrujeme a zbavíme sa derivácie .....	10
5.6. Dosadíme počiatočnú podmienku do očakávaného riešenia.....	10
5.7. Analytické riešenie .....	10
5.8. Skúška .....	10
<b>6. Tabuľka výsledkov.....</b>	<b>11</b>

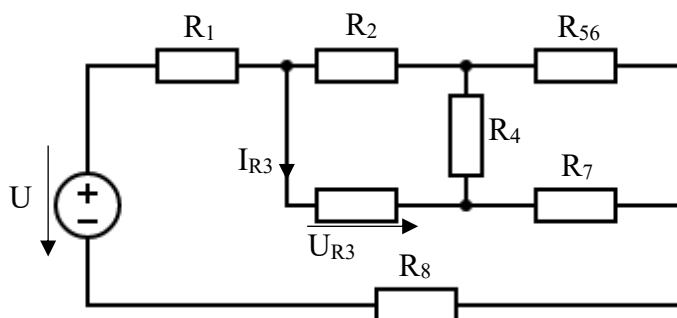
# Príklad 1

Stanovte napätí  $U_{R3}$  a prúd  $I_{R3}$ . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

sk.	$U_1$ [V]	$U_2$ [V]	$R_1$ [ $\Omega$ ]	$R_2$ [ $\Omega$ ]	$R_3$ [ $\Omega$ ]	$R_4$ [ $\Omega$ ]	$R_5$ [ $\Omega$ ]	$R_6$ [ $\Omega$ ]	$R_7$ [ $\Omega$ ]	$R_8$ [ $\Omega$ ]
G	130	60	380	420	330	440	450	650	410	275



## Odpor a prúd celkového obvodu

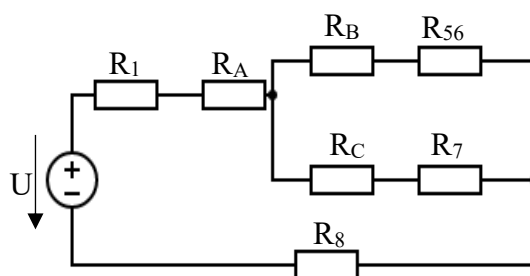


## Zjednodušíme zdroje a rezistory $R_5$ a $R_6$

$$U = U_1 + U_2 = 130 + 60 = 190 \text{ V}$$

$$R_{56} = \frac{R_5 * R_6}{R_5 + R_6} = \frac{450 * 650}{450 + 650} = \frac{2925}{11} \Omega$$

Pomocou úpravy na trojuholníkový tvar zjednodušíme rezistory  $R_2$ ,  $R_3$  a  $R_4$

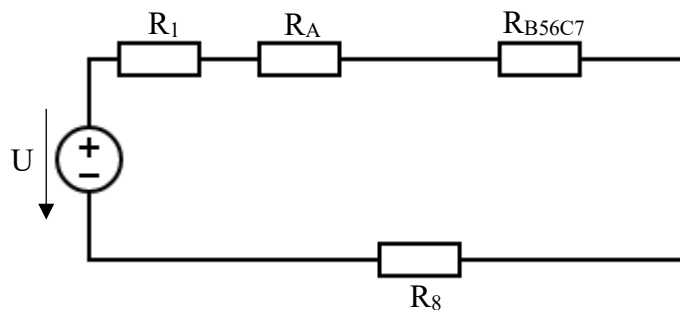


$$R_A = \frac{R_2 * R_3}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{420 * 330}{420 + 330 + 440} = \frac{1980}{17} \Omega$$

$$R_B = \frac{R_2 * R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{420 * 440}{420 + 330 + 440} = \frac{2640}{17} \Omega$$

$$R_C = \frac{R_3 * R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{330 * 440}{420 + 330 + 440} = \frac{14520}{119} \Omega$$

**Zjednodušíme obvod na obvod s jedným rezistorom**



$$R_{B56} = R_B + R_{56} = \frac{2640}{17} + \frac{2925}{11} = \frac{78765}{187} \Omega$$

$$R_{C7} = R_C + R_7 = \frac{14520}{119} + 410 = \frac{63310}{119} \Omega$$

$$R_{B56C7} = \frac{R_{B56} * R_{C7}}{R_{B56} + R_{C7}} = \frac{\frac{78765}{187} * \frac{63310}{119}}{\frac{78765}{187} + \frac{63310}{119}} = 235.0844 \Omega$$

$$R = R_1 + R_A + R_{B56C7} + R_8 = 380 + \frac{1980}{17} + 235.0844 + 275 = 1006.5550 \Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{190}{1006.555} = 0.1888 A$$

$$U = I * R = 0.188762 * 1006.555 = 189.9993 V$$

### **Prúd a napätie na R3**

$$U_{R1} = R_1 * I = 380 * 0.188762 = 71.7298 V$$

$$U_{RA} = R_A * I = \frac{1980}{17} * 0.188762 = 21.9853 V$$

$$U_{RB56C7} = R_{B56C7} * I = 235.0844 * 0.188762 = 44.3752 V$$

$$U_{R8} = R_8 * I = 275 * 0.188762 = 51.9097 V$$

$$U_{RC7} = U_{RB56C7}$$

$$I_{RC7} = \frac{U_{RC7}}{R_{C7}} = \frac{44.3752}{\frac{63310}{119}} = 0.0834 A$$

$$U_{R7} = R_7 * I_{RC7} = 410 * 0.0834 = 34.1978 V$$

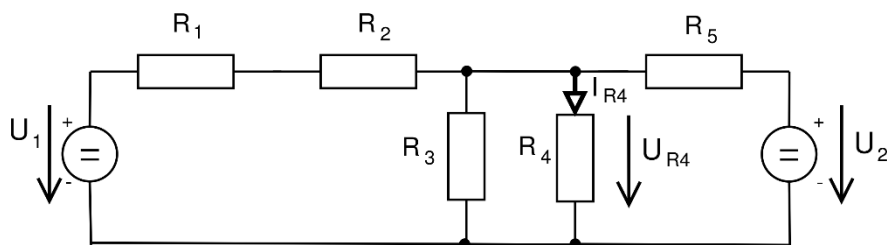
$$U_{R3} = U - U_{R8} - U_{R7} - U_{R1} = 190 - 51.9097 - 34.1978 - 71.7298 = \mathbf{32.1626 V}$$

$$I_{R3} = \frac{U_{R3}}{R_3} = \frac{32.1626}{330} = \mathbf{0.0975 A}$$

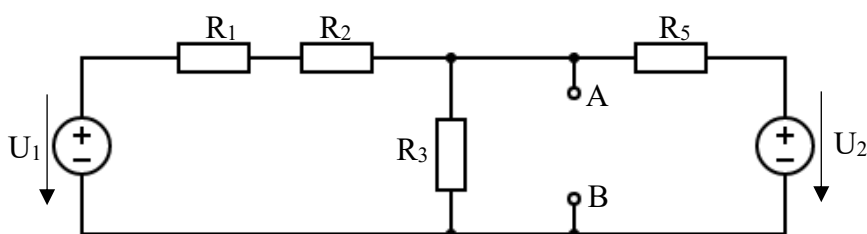
## Príklad 2

Stanovte napätí  $U_{R4}$  a prúd  $I_{R4}$ . Použite metodu Théveninovy vety.

sk.	$U_1$ [V]	$U_2$ [V]	$R_1$ [ $\Omega$ ]	$R_2$ [ $\Omega$ ]	$R_3$ [ $\Omega$ ]	$R_4$ [ $\Omega$ ]	$R_5$ [ $\Omega$ ]
F	130	180	350	600	195	650	80

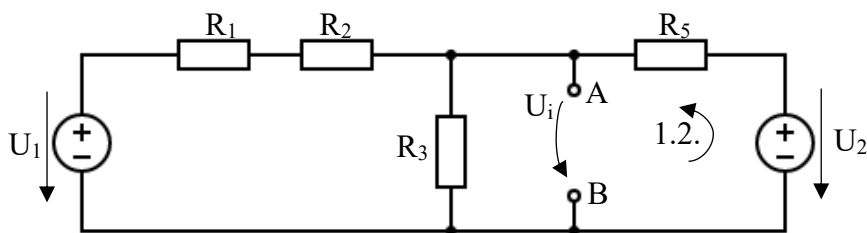


**Zkratujeme zdroj – vypočítame vnútorný odpor  $R_i$**



$$\begin{aligned}
 R_{12} &= R_1 + R_2 = 350 + 600 = 950 \, \Omega \\
 R_{123} &= \frac{R_{12} * R_3}{R_{12} + R_3} = \frac{950 * 195}{950 + 195} = 161.7904 \, \Omega \\
 R_i &= \frac{R_{123} * R_5}{R_{123} + R_5} = \frac{161.7904 * 80}{161.7904 + 80} = 53.5308 \, \Omega
 \end{aligned}$$

**Určíme  $U_i$  pomocou druhého Kirchhoffova zákona**



$$\begin{aligned}
 1. \quad & I_X * (R_5 + R_3) - U_2 = 0 \\
 2. \quad & I_X * R_5 - U_2 + U_i = 0 \\
 I_X &= \frac{U_2}{R_5 + R_3} = \frac{180}{80 + 195} = \frac{36}{55} \, A \\
 U_i &= U_2 - I_X * R_5 = 180 - \frac{36}{55} * 80 = 127.6364 \, V
 \end{aligned}$$

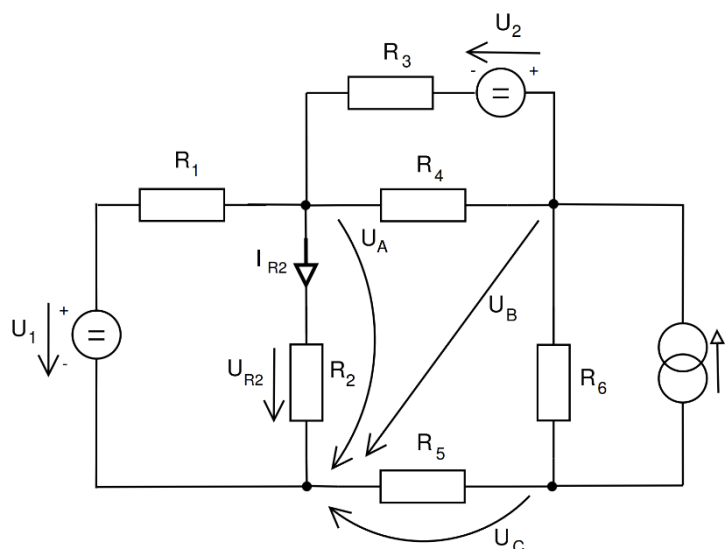
**Dopočítanie  $U_{R4}$  a  $I_{R4}$**

$$\begin{aligned}
 I_{R4} &= \frac{U_i}{R_i + R_4} = \frac{127.6364}{53.5308 + 650} = 0.1814 \, A \\
 U_{R4} &= R_4 * I_{R4} = 650 * 0.1814 = 117.9247 \, V
 \end{aligned}$$

## Príklad 3

Stanovte napětí  $U_{R2}$  a proud  $I_{R2}$ . Použijte metodu uzlových napětí ( $U_A$ ,  $U_B$ ,  $U_C$ ).

sk.	$U_1$ [V]	$U_2$ [V]	$I$ [A]	$R_1$ [ $\Omega$ ]	$R_2$ [ $\Omega$ ]	$R_3$ [ $\Omega$ ]	$R_4$ [ $\Omega$ ]	$R_5$ [ $\Omega$ ]	$R_6$ [ $\Omega$ ]
E	135	110	0.65	52	42	52	42	21	40



Pomocou prvého Kirchhoffova zákona vytvoríme maticu

$$A = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & 0 \\ \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & -\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6}\right) & \frac{1}{R_6} \\ 0 & \frac{1}{R_6} & -\left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{52} + \frac{1}{42} + \frac{1}{52} + \frac{1}{42}\right) & \frac{1}{52} + \frac{1}{42} & 0 \\ \frac{1}{52} + \frac{1}{42} & -\left(\frac{1}{52} + \frac{1}{42} + \frac{1}{40}\right) & \frac{1}{40} \\ 0 & \frac{1}{40} & -\left(\frac{1}{21} + \frac{1}{40}\right) \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} \frac{U_2}{R_3} - \frac{U_1}{R_1} \\ -I - \frac{U_2}{R_3} \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{110}{52} - \frac{135}{52} \\ -0.65 - \frac{110}{52} \\ 0.65 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix}$$

$$A * U = I$$

$$\begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{52} + \frac{1}{42} + \frac{1}{52} + \frac{1}{42}\right) & \frac{1}{52} + \frac{1}{42} & 0 \\ \frac{1}{52} + \frac{1}{42} & -\left(\frac{1}{52} + \frac{1}{42} + \frac{1}{40}\right) & \frac{1}{40} \\ 0 & \frac{1}{40} & -\left(\frac{1}{21} + \frac{1}{40}\right) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{110}{52} - \frac{135}{52} \\ -0.65 - \frac{110}{52} \\ 0.65 \end{pmatrix}$$

**Pomocou Cramerovho pravidla zistíme  $U_A$ ,  $U_B$  a  $U_C$**

$$U_A = 42.2738 \text{ V}$$

$$U_B = 73.3774 \text{ V}$$

$$U_C = 16.3102 \text{ V}$$

**Zistíme  $U_{R2}$  a prúd  $I_{R2}$**

$$U_{R2} = U_A = \mathbf{42.2738 \text{ V}}$$

$$I_{R2} = \frac{U_{R2}}{R_2} = \mathbf{1.0065 \text{ A}}$$

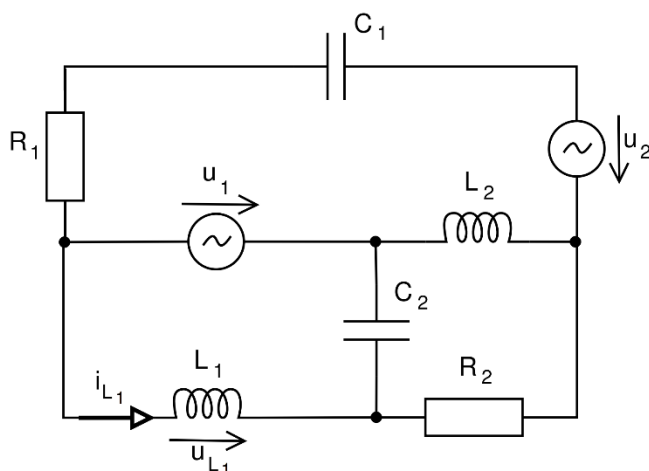
## Príklad 4

Pro napájecí napětí platí:  $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$ ,  $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$ .

Ve vztahu pro napětí  $u_{L_1} = U_{L_1} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{L_1})$  určte  $|U_{L_1}|$  a  $\varphi_{L_1}$ . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ( $t = \frac{\pi}{2\omega}$ ).

sk.	$U_1$ [V]	$U_2$ [V]	$R_1$ [ $\Omega$ ]	$R_2$ [ $\Omega$ ]	$L_1$ [mH]	$L_2$ [mH]	$C_1$ [ $\mu$ F]	$C_2$ [ $\mu$ F]	$f$ [Hz]
G	5	5	13	12	140	60	160	80	60



$$\omega = 2 * \pi * f = 2 * \pi * 60 = 120\pi \text{ rad s}^{-1}$$

$$Z_L = j * \omega * L$$

$$Z_{L_1} = j * 120\pi * 140 * 10^{-3} = j52.7788 \Omega$$

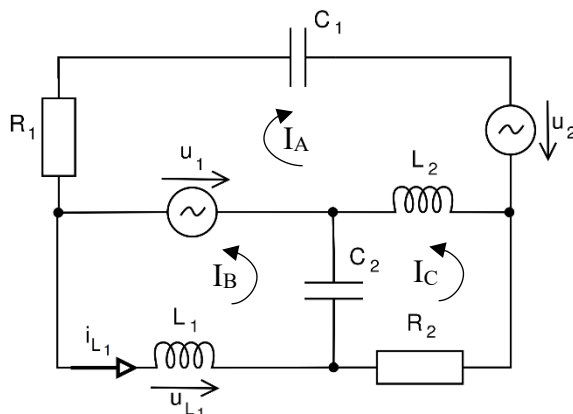
$$Z_{L_2} = j * 120\pi * 60 * 10^{-3} = j22.6195 \Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{j * \omega * C}$$

$$Z_{C_1} = \frac{1}{j * 120\pi * 160 * 10^{-6}} = -j16.5786 \Omega$$

$$Z_{C_2} = \frac{1}{j * 120\pi * 80 * 10^{-6}} = -j33.1573 \Omega$$

**Označíme smyčky a vytvoríme maticu**



$$A = \begin{pmatrix} R_1 + Z_{C_1} + Z_{L_2} & 0 & -Z_{L_2} \\ 0 & Z_{L_1} + Z_{C_2} & -Z_{C_2} \\ -Z_{L_2} & -Z_{C_2} & R_2 + Z_{L_2} + Z_{C_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13 - j16.5786 + j22.6195 & 0 & -j22.6195 \\ 0 & j52.7788 - j33.1573 & j33.1573 \\ -j22.6195 & j33.1573 & 12 + j22.6195 - j33.1573 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} U_1 - U_2 \\ U_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A * I = U$$

$$\begin{pmatrix} 13 - j16.5786 + j22.6195 & 0 & -j22.6195 \\ 0 & j52.7788 - j33.1573 & j33.1573 \\ -j22.6195 & j33.1573 & 12 + j22.6195 - j33.1573 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Pomocou Cramerovho pravidla vypočítame prúdy  $I_A$ ,  $I_B$  a  $I_C$**

$$I_A = 0.08546449564 - 0.115307341990j \text{ A}$$

$$I_B = 0.07341660101 - 0.119782078886j \text{ A}$$

$$I_C = -0.04344572713 - 0.079913030769j \text{ A}$$

**Vypočítame hľadané hodnoty  $|U_{L_1}|$  a  $\varphi_{L_1}$**

$$U_{L_1} = Z_{L_1} * I_B = 6.32194918 + 3.87483691j \text{ V}$$

$$|U_{L_1}| = \sqrt{\operatorname{Re}(U_{L_1})^2 + \operatorname{Im}(U_{L_1})^2} = \mathbf{7.4149 \text{ V}}$$

$$\varphi_{L_1} = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(U_{L_1})}{\operatorname{Re}(U_{L_1})}\right) = \mathbf{0.5499 \text{ rad} = 31.5049^\circ}$$

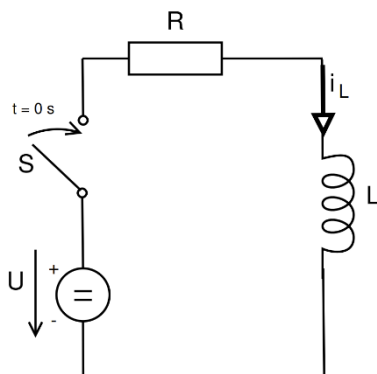


## Príklad 5

V obvode na obrázku nižšie v čase  $t = 0[s]$  sepne spínač S. Sestavte diferenciálnu rovnicu popisujúcu chovanie obvodu na obrázku, ďalej ju upravte dosadením hodnôt parametrov.

Vypočítajte analytické riešenie  $i_L = f(t)$ . Proved'te kontrolu výpočtu dosadením do sestavenej diferenciálnej rovnice.

sk.	$U [V]$	$L [H]$	$R [\Omega]$	$i_L(0) [A]$
F	25	10	50	8



$$i = i_L = i_R = \frac{u_R}{R}$$

$$u_R + u_L = U$$

$$i'_L = \frac{u_L}{L}$$

$$i_L(0) = 8 \text{ A (počiatočná podmienka)}$$

$$i'_L = \frac{(U - u_R)}{L}$$

$$i'_L = \frac{(U - R * i_L)}{L}$$

$$i'_L = \frac{U}{L} - \frac{R * i_L}{L}$$

$$L * i'_L + R * i = U$$

### Charakteristická rovnica

$$L\lambda + R = 0$$

$$\lambda = -\frac{R}{L}$$

$$\lambda = -5$$

### Očakávané riešenie

$$i_L(t) = K(t) * e^{\lambda * t} = K(t) * e^{-\frac{R * t}{L}} = K(t) * e^{-5 * t}$$

### Derivujeme $i_L(t)$

$$i'_L(t) = K'(t) * e^{-\frac{R * t}{L}} + K(t) * e^{-\frac{R * t}{L}} * \left(-\frac{R}{L}\right)$$

### Dosadíme do rovnice, ktorú sme si definovali

$$L * \left( K'(t) * e^{-\frac{R*t}{L}} + K(t) * e^{-\frac{R*t}{L}} * \left( -\frac{R}{L} \right) \right) + R * \left( K(t) * e^{-\frac{R*t}{L}} \right) = U$$

$$L * K'(t) * e^{-\frac{R*t}{L}} - R * K(t) * e^{-\frac{R*t}{L}} + R * K(t) * e^{-\frac{R*t}{L}} = U$$

$$L * K'(t) * e^{-\frac{R*t}{L}} = U$$

$$K'(t) * e^{-\frac{R*t}{L}} = \frac{U}{L} = 2.5$$

$$K'(t) = \frac{U}{L} * e^{\frac{R*t}{L}}$$

### Integrujeme a zbavíme sa derivácie

$$\int K'(t) = \int \frac{U}{L} * e^{\frac{R*t}{L}}$$

$$K(t) = \frac{U}{R} * e^{\frac{R*t}{L}} + C$$

$$K(t) = \frac{1}{2} * e^{-5*t} + C$$

### Dosadíme počiatočnú podmienku do očakávaného riešenia

$$i_L(t) = \left( \frac{1}{2} * e^{5*t} + C \right) * e^{-5*t}$$

$$i_L(0) = \left( \frac{1}{2} * e^{5*0} + C \right) * e^{-5*0}$$

$$i_L(0) = \frac{1}{2} + C$$

$$i_L(0) = 8$$

$$C = \frac{15}{2} = 7.5$$

### Analytické riešenie

$$i_L(t) = \left( \frac{1}{2} * e^{5*t} + \frac{15}{2} \right) * e^{-5*t}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{2} + \frac{15}{2} * e^{-5*t} = 0.5 + 7.5 * e^{-5*t}$$

### Skúška

$$i_L(t) = \frac{1}{2} + \frac{15}{2} * e^{-5*t}$$

$$i_L(0) = \frac{1}{2} + \frac{15}{2} * e^{-5*0}$$

$$8 = \frac{1}{2} + \frac{15}{2} * 1$$

$$8 = \frac{16}{2}$$

$$8 = 8$$

$$0 = 0$$

## Tabulka výsledkov

Príklad	Skupina	Výsledky
1	G	$U_{R_3} = 32.1626 \text{ V}$ $I_{R_3} = 0.0975 \text{ A}$
2	F	$U_{R_4} = 117.9247 \text{ V}$ $I_{R_4} = 0.1814 \text{ A}$
3	E	$U_{R_2} = 42.2738 \text{ V}$ $I_{R_2} = 1.0065 \text{ A}$
4	G	$ U_{L_1}  = 7.4149 \text{ V}$ $\varphi_{L_1} = 31.5049^\circ$
5	F	$i_L(t) = \frac{1}{2} + \frac{15}{2} * e^{-5*t}$