Universidade de Brasília

Perguntas para preparação ao exame de qualificação em Análise (Segunda Área)

Departamento de Matemática,
Universidade de Brasília

Brasília, Março de 2025

Sumário

Capítulo 1

Operadores lineares contínuos

Pergunta 1.
E' é Banach? Justifique.

Solução: Sim, pois $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, e $\mathcal{L}(E, F)$ é Banach sempre que F for. De fato:

Proposição (P.1.1). $L(E, F)$ é Banach sempre que F é Banach.

Demonstração: Seja $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E, F)$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$ sempre que $n, m \geq n_0$. Logo

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| \leq \varepsilon\|x\| \tag{2.1}$$

para todos $x \in E$ e $n, m \geq n_0$. Segue que para cada $x \in E$, a sequência $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em F, logo convergente pois F é Banach. Podemos então definir

$$T : E \longrightarrow F, \quad T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x).$$

A linearidade de T segue das propriedades dos limites. Fazendo $m \longrightarrow \infty$ em (2.1) obtemos

$$\|(T_n - T)(x)\| = \|T_n(x) - T(x)\| \leq \varepsilon\|x\| \tag{2.2}$$

para todos $x \in E$ e $n \geq n_0$. Em particular,

$$\|(T_n - T)(x)\| = \|T_{n_0}(x) - T(x)\| \leq \varepsilon\|x\|$$

para todo $x \in E$, o que nos garante que $(T - T_{n_0}) \in \mathcal{L}(E, F)$. Portanto $T = (T - T_{n_0}) + T_{n_0} \in \mathcal{L}(E, F)$. De (2.2) segue também que $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$, e assim segue que $T_n \longrightarrow T$ em $\mathcal{L}(E, F)$.

■

■

Pergunta 2.
O que é uma base de Schauder? Dê um exemplo de um sistema ortonormal completo para um espaço de dimensão infinita.

Solução: Seja E um espaço de Banach. Uma base de Schauder para E é um conjunto de vetores

$$\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$$

tal que todo vetor $x \in E$ pode ser escrito de maneira única como uma série infinita

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n,$$

para alguns escalares únicos $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

Definição (D.1.1). Seja H um espaço vetorial com produto interno. Dizemos que $S = \{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset H$ é um **sistema ortonormal** se $\langle e_\alpha, e_\beta\rangle = 0$ para todos $\alpha \neq \beta$ e $\|e_\lambda\| = 1$ para todo λ. Dizemos que um sistema ortonormal S é **completo** se não existir nenhum sistema ortonormal em H que contenha S propriamente.

Definição (D.1.2). Seja $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço $\ell^p(n)$ como sendo o espaço $\mathbb{R}^n$ dotado da norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \tag{1.1}$$

se $1 \leq p < \infty$, e

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|. \tag{1.2}$$

Em $\ell^2(n)$, a base canônica de $\mathbb{R}^n$ é um sistema ortonormal completo. Em ℓ^2, a base canônica

$$(e_n)_i = \begin{cases} 1, & \text{se } i = n, \\ 0, & \text{se } i \neq n, \end{cases}$$

é um sistema ortonormal completo. Se Ω é um aberto limitado, em $L^2(\Omega)$, as autofunções do operador Laplaciano, isto é, as soluções linearmente independentes do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobe } \partial\Omega, \end{cases}$$

formam um sistema ortonormal completo.

■

Pergunta 3.
Enuncie os teoremas de Banach-Steinhaus, da Aplicação Aberta e do Gráfico Fechado.

Solução:

Teorema (T.1.1) (Banach-Steinhauss/Princípio da limitação uniforme). *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_i)_{i\in I}$ uma família de operadores em $\mathcal{L}(E;F)$ satisfazendo a condição de que para cada $x \in E$ existe $C_x < \infty$ tal que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < C_x. \tag{1.3}$$

Então $\sup_{i\in I} \|T_i\| < \infty$.

Teorema (T.1.2) (Teorema da Aplicação Aberta). *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ linear, contínuo e sobrejetor. Então T é uma aplicação aberta. Em particular, todo operador linear contínuo e bijetor entre espaços de Banach é um isomorfismo.*

Teorema (T.1.3) (Teorema do Gráfico Fechado). *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se, $G(T)$ é fechado em $E \times F$.*

■

Pergunta 4.
Qual é o teorema principal que se usa na prova do Teorema de Banach-Steinhaus? Aplicação deste teorema.

Solução: O teorema principal usado é

Teorema (T.1.4) (Teorema de Baire). *Sejam (M, d) um espaço métrico completo e $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de subconjuntos fechados de M tais que*

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que F_{n_0} tem interior não-vazio.

Da Análise na Reta sabemos que o limite uniforme de funções contínuas definidas em um intervalo da reta tomando valores na reta é uma função contínua, enquanto que o limite pontual de funções contínuas pode não ser uma função contínua. Veremos abaixo que, na presença da linearidade, a convergência pontual é suficiente.

Corolário (C.1.1). *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathcal{L}(E;F)$ tal que $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é convergente em F para todo x em E. Se definirmos*

$$T : E \longrightarrow F, \quad T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x),$$

então T é um operador linear contínuo.

Demonstração: A linearidade de T segue das propriedades aritméticas dos limites. Por hipótese, para cada $x \in E$ a sequência $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é convergente, e portanto limitada. Assim $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n(x)\| < \infty$ para todo $x \in E$. Pelo Teorema 2.3.2 existe $c > 0$ tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \leq c$. Segue então que

$$\|T_n(x)\| \leq \|T_n\| \cdot \|x\| \leq c\|x\|$$

para todos $x \in E$ e $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \to \infty$ obtemos $\|T(x)\| \leq c\|x\|$ para todo $x \in E$, o que completa a demonstração de que T é contínuo.

■

■

Pergunta 5.
Qual é o teorema principal que se usa na prova do Teorema da Aplicação Aberta? Aplicação deste teorema.

Solução: O teorema principal usado é o Teorema de Baire, enunciado em **(T.1.4)**. Algumas aplicações muito úteis são as seguintes:

Corolário (C.1.2). *Sejam E, F espaços de Banach. Se $T : E \longrightarrow F$ é uma aplicação linear limitada bijetiva, então a aplicação linear $T^{-1} : F \longrightarrow E$ é contínua.*

Corolário (C.1.3). *Seja E um espaço de Banach. Se $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ são duas normas tais que existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|x\|_1 \leq C\|x\|_2 \quad \textit{para todo } x \in E,$$

então elas são normas equivalentes.

■

Pergunta 6.
Não podemos dispensar a hipótese da sobrejetividade no Teorema da Aplicação Aberta, por quê? Os espaços têm que ser Banach, por quê?

Solução: A sobrejetividade é necessária, pois toda aplicação linear aberta é sobrejetiva (dada uma bola aberta centrada na origem do domínio, a sua imagem por T contém uma bola centrada na origem do contra-domínio, donde a sobrejetividade segue facilmente por linearidade). O exemplo abaixo mostra que a hipótese dos espaços serem completos é essencial:

Exemplo (E.1.1). Por c_0 denotamos o conjunto de todas as sequências de escalares que convergem para zero, ou seja, fixado $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

$$c_0 = \left\{ (a_k)_{k=1}^{\infty} : a_k \in \mathbb{K} \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \text{ e } a_k \longrightarrow 0 \right\}.$$

É claro que c_0 é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências (operações coordenada a coordenada). É fácil comprovar que a expressão

$$\left\| (a_k)_{k=1}^{\infty} \right\|_{\infty} = \sup \left\{ |a_k| : k \in \mathbb{N} \right\}$$

torna c_0 um espaço normado. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em c_0. Digamos que $x_n = (a_n^k)_{k=1}^{\infty}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, a desigualdade

$$\left| a_n^j - a_m^j \right| \leq \sup \left\{ \left| a_n^k - a_m^k \right| : k \in \mathbb{N} \right\} = \left\| x_n - x_m \right\|_{\infty}$$

deixa claro que a sequência de escalares $(a_n^j)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$, logo convergente. Digamos $a_n^j \xrightarrow{n \to \infty} a_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Chamando $x = (a_j)_{j=1}^{\infty}$ não é difícil checar que $x \in c_0$ e que $x_n \longrightarrow x$ em c_0. Concluímos então que c_0 é um espaço de Banach.

Chame agora de c_{00} o subespaço de c_0 formado pelas sequências eventualmente nulas, isto é,

$$c_{00} = \left\{ (a_k)_{k=1}^{\infty} \in c_0 : \text{existe } k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_k = 0 \text{ para todo } k \geq k_0 \right\}.$$

Considere os seguintes vetores de c_{00}:

$$x_1 = (1, 0, 0, 0, \dots), \quad x_2 = \left(1, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots\right), \dots, \quad x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\right), \dots.$$

É claro que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em c_{00}. Tomando $x = \left(\frac{1}{k}\right)_{k=1}^{\infty} \in c_0$, de

$$\|x_n - x\|_{\infty} = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0,$$

concluímos que $x_n \longrightarrow x$ em c_0. Como $x \notin c_{00}$ segue que c_{00} é um subespaço não-fechado de c_0. Da proposição a seguir, segue que c_{00} é um espaço normado incompleto.

Proposição (P.1.2). *Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço vetorial de E. Então F é um espaço de Banach, com a norma induzida de E, se, e somente se, F é fechado em E.*

Demonstração: Suponha F Banach e tome $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em F tal que $x_n \longrightarrow x \in E$. Então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em F, e portanto convergente pois F é completo por hipótese. Existe então $y \in F$ tal que $x_n \longrightarrow y$. Da unicidade do limite temos $x = y \in F$, provando que F é fechado em E.

Reciprocamente, suponha F fechado em E e seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em F. Logo $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E, e portanto existe $x \in E$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Como F é fechado segue que $x \in F$, o que prova que F é completo.

■

Seja agora $T : c_{00} \longrightarrow c_{00}$ o operador linear dado por

$$T\Big((a_n)_{n=1}^{\infty}\Big) = \Big(a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots\Big).$$

T é evidentemente linear, bijetor e contínuo, mas o operador inverso T^{-1} não é contínuo, pois a imagem do conjunto limitado $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por T^{-1} é ilimitada.

■

Pergunta 7.
Qual é o teorema principal que se usa na prova do Teorema do Gráfico Fechado? Aplicação deste teorema.

Solução: O teorema principal usado é o Teorema da Aplicação Aberta.

A grande utilidade do Teorema do Gráfico Fechado reside na seguinte observação: para mostrar a continuidade de um operador $T : E \longrightarrow F$ (linear ou não) via definição, devemos provar que, para toda sequência convergente $x_n \longrightarrow x$ em E, é verdade que:

(a) $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é convergente em F, isto é, existe $y \in F$ tal que $T(x_n) \longrightarrow y$;

(b) $y = T(x)$.

Em geral, provar (a), isto é, provar que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge, é uma tarefa difícil, especialmente em dimensão infinita. O Teorema do Gráfico Fechado nos fornece, no caso em que T é linear e atua entre espaços de Banach, o item (a) gratuitamente, ou seja, podemos supor a convergência de $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$, restando apenas verificar (b). O exemplo a seguir ilustra o que acabamos de dizer:

Exemplo (E.1.2). Sejam E um espaço de Banach e $T : E \longrightarrow E'$ um operador linear *simétrico*, isto é, T é linear e

$$T(x)(y) = T(y)(x) \text{ para todos } x, y \in E.$$

Mostremos que T é contínuo. Em vista do Teorema do Gráfico Fechado, basta verificar que $G(T)$ é fechado. Para isto, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência convergindo para x em E e suponha que $T(x_n) \longrightarrow \varphi$ em E'. Fixado $y \in E$, tomando o limite quando $n \longrightarrow \infty$,

$$\varphi(y) \longleftarrow T(x_n)(y) = T(y)(x_n) \longrightarrow T(y)(x) = T(x)(y),$$

o que nos permite concluir que $T(x)(y) = \varphi(y)$. Como $y \in E$ foi escolhido arbitrariamente, segue que $\varphi = T(x)$, e portanto $G(T)$ é fechado.

■

Pergunta 8.
Os teoremas da Aplicação Aberta e do Gráfico Fechado são equivalentes? Justifique.

Solução: Sim, são equivalentes. Veja esse post no MSE e esse blog.

■

Capítulo 2

Teoremas de Hahn-Banach

Teorema (T.2.1) (Teorema de Hahn–Banach – caso real). *Sejam E um espaço vetorial sobre o corpo dos reais e $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz*

$$p(ax) = ap(x) \text{ para todo } a > 0 \text{ e todo } x \in E, \tag{2.1}$$

e

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \text{ para quaisquer } x, y \in E.$$

Sejam também G um subespaço vetorial de E e $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear tal que $\varphi(x) \leq p(x)$ para todo $x \in G$. Então existe um funcional linear $\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que estende φ, isto é $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ para todo $x \in G$, e que satisfaz $\tilde{\varphi}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Corolário (C.2.1) (Teorema de Hahn–Banach). *Seja G um subespaço de um espaço normado E sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e seja $\varphi : G \to \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $\tilde{\varphi} : E \to \mathbb{K}$ cuja restrição a G coincide com φ e $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Corolário (C.2.2). *Se $0 \neq x_0 \in E$, onde E é um e.v real, $\exists f_0 \in E'$ tal que $\langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$ e $\|f_0\| = \|x_0\|$.*

Demonstração: Ponha $G = \langle x_0 \rangle$ e defina g por $G \ni tx_0 \mapsto g(tx_0) = t\|x_0\|^2$. É fácil verificar que g é limitada e tem norma $= \|x_0\|$.

$\blacksquare$

Corolário (C.2.3). *Seja $x \in E$, onde E é um espaço vetorial normado sobre os reais. Então*

$$\|x\| = \sup_{0 \neq f \in E'} \frac{|\langle f, x \rangle|}{\|f\|}$$

Pergunta 9.
O Teorema de Hahn-Banach vale para espaços de Hilbert? Vale para espaços de dimensão finita? Sabe provar?

Solução: Sim, vale, pois por definição todo espaço de Hilbert (ou espaço de dimensão finita) é um espaço vetorial. Porém, nesses casos a prova é bem mais simples. De fato, se H é um espaço de Hilbert, basta usar o seguinte

Teorema (T.2.2) (Teorema da representação de Riesz). *Sejam H um espaço de Hilbert e $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe um único $y_0 \in H$ tal que*

$$\varphi(x) = \langle x, y_0 \rangle \text{ para todo } x \in H.$$

Além disso, $\|\varphi\| = \|y_0\|$.

Em espaços de dimensão finita veja esse post do MSE.

■

Pergunta 10.
A extensão do Teorema de Hahn-Banach é única? Quando é única? Exemplos de quando a extensão é única e quando não é.

Solução: Considere $g : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x_1, 0) = x_1$, onde A é o eixo x de $\mathbb{R}^2$, com $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $p(a, b) = |a| + 3|b|$. Claramente $g(x) \leq p(x)$ sejam quais forem $x \in A$, e evidentemente p é sublinear. Note também que as funções $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por $f_1(a, b) = a + b$ e $f_2(a, b) = a + 2b$ são ambas sublineares, estendem g e satisfazem $f_1(x) \leq p(x)$, $f_2(x) \leq p(x)$ para quaisquer $x \in \mathbb{R}^2$.

Quando o subespaço é denso, temos unicidade da extensão, como afirma a seguinte

Proposição (P.2.1). Seja $G \subset E$ um subespaço denso de um espaço vetorial normado E e $\varphi : G \to F$ um operador linear limitado, onde F é um espaço de Banach. Então existe uma única extensão linear e limitada de φ. Além disso, a norma de tal extensão coincide com a de φ.

Demonstração: Seja $x \in E \setminus G$. Como $\overline{G} = E$, existe uma sequência $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de G tal que $x_m \to x$. Definimos $\Psi : E \to \mathbb{R}$ por:

$$\Psi(a) = \begin{cases} \varphi(a), & \text{se } a \in G, \\ \lim\limits_{m\to\infty} \varphi(a_m), & \text{se } a \notin G, \text{ onde } \{a_m\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ é tal que } a_m \to a. \end{cases}$$

Precisamos mostrar que Ψ está bem definida (não depende da escolha da sequência e o limite existe), $\Psi \in G'$ e $\|\Psi\|_{E'} = \|\varphi\|_G$.

De fato, se $x \in E \setminus G$ e $x_m \to x$, $y_m \to x$ (onde $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ são sequências distintas), temos que

$$|\varphi(x_m) - \varphi(y_m)| \leq \|\varphi\|_6 \|x_m - y_m\| \quad \forall m, n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Como $\varphi \in G'$, $\|\varphi\|_G = M$ para algum $M \in \mathbb{R}$. E como $x_m \to x$, $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Por (2.2) temos então que $\{\varphi(x_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$ que é Banach, logo existe $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi(x_m)$.

Além disso, como:

$$\|\varphi(x_m) - \varphi(y_m)\|_{\mathbb{R}} \leq M \|x_m - y_m\|$$

segue que $\varphi(x_m) \to \varphi(y_m)$ sempre que $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = \lim\limits_{m\to\infty} y_m$. Logo Ψ está bem definida. Pelas propriedades do limite, Ψ é linear. Como $\|\varphi(x_m)\| \leq \|\varphi\| \|x_m\|$ e $\|\cdot\|_{\mathbb{R}}$ é contínua, segue que

$$\|\Psi(x)\| \leq \|\varphi\| \|x\| \quad \forall x \in E.$$

Logo Ψ é limitada e satisfaz $\|\Psi\| \leq \|\varphi\|$. Como a norma não pode diminuir ao estender (pois $\sup A \geq \sup B$ sempre que $A \geq B$ e A e B são limitados superiormente), temos também que $\|\Psi\| \geq \|\varphi\|$. Logo $\|\Psi\|_E = \|\varphi\|_G$, o que conclui a prova.

■

O seguinte resultado, que não demonstraremos mas é clássico, também está relacionado a esse contexto:

Proposição (P.2.2). Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos, com (Y, d_Y) completo. Seja $A \subseteq X$ um subconjunto de X. Dada $f : A \to Y$ uniformemente contínua, então f pode ser unicamente estendida a $\bar{A}$ mantendo a continuidade uniforme.

■

> **Pergunta 11.**
> Enuncie a primeira Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach. Dê uma ideia da prova. Sabe uma aplicação?

Solução:

Definição (D.2.1). Seja E um espaço vetorial e $A, B \subset E$ subconjuntos quaisquer.

Dizemos que o hiperplano $H = f^{-1}(\alpha)$ **separa** A **e** B **no sentido amplo** se $f(x) \leq \alpha$ para todo $x \in A$ e $f(x) \geq \alpha$ para todo $x \in B$.

Dizemos que o hiperplano $H = f^{-1}(\alpha)$ **separa** A **e** B **no sentido estrito** se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \leq \alpha - \varepsilon$ para todo $x \in A$ e $f(x) \geq \alpha + \varepsilon$ para todo $x \in B$.

Teorema (T.2.3) (Teorema de Hahn-Banach, primeira forma geométrica). *Seja E um espaço vetorial normado. Sejam $A, B \subset E$ conjuntos convexos não-vazios disjuntos, com A aberto. Então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido amplo.*

Teorema (T.2.4) (Primeira forma geométrica do Teorema de Hahn–Banach). *Sejam A e B subconjuntos convexos, não-vazios e disjuntos do espaço normado E. Se A é aberto, então existem um funcional $\varphi \in E'$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\varphi(x) < a \leq \varphi(y) \quad \text{para todos } x \in A \text{ e } y \in B.$$

Neste caso diz-se que o hiperplano fechado $[\varphi = a]$ separa A e B.

A ideia da prova é trabalhar com um funcional de Minkowski definido no conjunto (a ser demonstrado aberto, convexo e não vazio) $C = A - B = \{x - y \mid x \in A, y \in B\}$.

Como a primeira forma é usada para provar a segunda forma geométrica, uma aplicação é a segunda forma geométrica.

■

Pergunta 12.
Enuncie a segunda Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach. Dê uma ideia da prova. Sabe uma aplicação?

Solução:

Teorema (T.2.5) (Teorema de Hahn-Banach, segunda forma geométrica). *Seja E um espaço vetorial normado. Sejam $A, B \subset E$ conjuntos convexos não-vazios disjuntos, com A fechado e B compacto. Então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido estrito.*

Teorema (T.2.6) (Segunda forma geométrica do Teorema de Hahn–Banach). *Sejam A e B subconjuntos convexos, não-vazios e disjuntos do espaço normado E. Se A é fechado e B é compacto, então existem um funcional $\varphi \in E'$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\varphi(x) \leq a < b \leq \varphi(y) \quad \text{para todos } x \in A \text{ e } y \in B.$$

Para $c \in (a, b)$ diz-se que o hiperplano fechado $[\varphi = c]$ separa A e B estritamente.

Uma aplicação é a caracterização de fechados convexos sob as topologia forte e fraca. De fato, temos a seguinte

Proposição (P.2.3). *Seja E um espaço vetorial normado e $C \subset E$ um conjunto convexo. Então C é fechado na topologia fraca se e somente se C é fechado na topologia forte.*

Demonstração: Suponha que C é fortemente fechado. Seja $x_0 \notin C$. De acordo com o teorema de Hahn-Banach, segunda forma geométrica, existem $f \in E^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(y) < \alpha < f(x_0)$$

para todo $y \in C$ (de fato, basta tomar $A = C$ e $B = \{x_0\}$). Então $V = f^{-1}(\alpha, \infty)$ é uma vizinhança aberta fraca de x_0 que não intercepta C. Portanto $E \setminus C$ é fracamente aberto, logo C é fracamente fechado.

■

■

Pergunta 13.
Na Segunda Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach, se tirar a hipótese de compacto, mantendo a de ser fechado, o resultado ainda continua válido? Justifique.

Solução: Não. Basta considerar $A = \{0\} \times \mathbb{R}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1, x > 0\}$.

■

Capítulo 3

Topologias Fraca e Fraca*

Dado um conjunto de funções $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de um conjunto X para um espaço topológico Y, a topologia $\mathcal{T}$ *mais grosseira* (ou *menos fina*) para X é aquela com o número mínimo de abertos que tornam todas as funções f_λ contínuas. Ela é evidentemente a topologia que tem como sub-base a coleção $\{f_\lambda^{-1}(V) : V \text{ é aberto em } Y \text{ e } \lambda \in \Lambda\}$.

Definição (D.3.1). Seja E um espaço vetorial normado. **A topologia fraca** sobre E é a topologia menos fina tal que todos os funcionais lineares $f \in E^*$ são contínuos.

Proposição (P.3.1). *Seja $\tau \doteq \sigma\left(E, E'\right)$ a topologia fraca. Então:*

(a) Para cada $f \in E'$ a função $f\colon X \to \mathbb{R}$ é contínua com respeito a τ.

(b) τ é a menor topologia em X tal que vale (a).

(c) τ é a interseção de todas as topologias em X em relação às quais todas as $f \in E'$ são contínuas.

(d) Para cada $x \in X$, os conjuntos da forma $f_1^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(A_n)$ onde $n \in \mathbb{N}$, $f_i \in E'$ para cada $1 \leq i \leq n$, e A_j é vizinhança de $f_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$, constituem uma base de vizinhanças para x.

(e) Seja (x_λ) uma sequência em X. Então $x_n \to x$ em (X, τ) se, e somente se, $f(x_n) \to f(x)$ em $\mathbb{R}$ para qualquer $f \in E'$.

(f) Sejam Z um espaço topológico e $h\colon Z \to (X, \tau)$. Então h é contínua se, e somente se, $f \circ h\colon Z \to Y_i$ é contínua para qualquer $f \in E'$.

(g) τ é Hausdorff.

Proposição (P.3.2). Seja E um espaço normado. Então:

(a) Funcionais lineares contínuos são fracamente contínuos, isto é, para todo $\varphi \in E'$, $\varphi\colon (E, \sigma(E, E')) \to \mathbb{R}$ é contínuo.

(b) *Para cada* $x_0 \in E$, *os conjuntos da forma*

$$V_{J,\varepsilon} = \{x \in E \mid |\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)| < \varepsilon \text{ para todo } i \in J\},$$

onde J *é um conjunto finito,* $\varphi_i \in E'$ *para todo* $i \in J$ *e* $\varepsilon > 0$, *formam uma base de vizinhanças abertas de* x_0 *para a topologia fraca.*

(c) *Seja* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *uma sequência em* E. *Então* $x_n \rightharpoonup x$ *se, e somente se,* $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ *para todo* $\varphi \in E'$.

Solução: (a) é evidente. Para (b), seja U uma vizinhança de x_0 na topologia fraca. Pela Proposição **(P.3.1)** existem um conjunto finito J, funcionais $\varphi_j \in E'$ e abertos V_j em $\mathbb{R}$ contendo $\varphi_j(x_0)$, $j \in J$, tais que

$$\bigcap_{j \in J} \varphi_j^{-1}(V_j)$$

é um aberto da topologia fraca contendo x_0 e contido em U. Como J é finito e $\varphi_j(x_0) \in V_j$ para todo $j \in J$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(\varphi_j(x_0), \varepsilon) \subseteq V_j$$

para todo $j \in J$. Disso segue que

$$V_{J,\varepsilon} = \{x \in E \mid |\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)| < \varepsilon \text{ para todo } j \in J\}$$

$$= \bigcap_{j \in J} \varphi_j^{-1}(B(\varphi_j(x_0), \varepsilon)) \subseteq \bigcap_{j \in J} \varphi_j^{-1}(V_j) \subseteq U.$$

Para (c), suponhamos $x_n \rightharpoonup x$. Então $f(x_n) \to f(x)$ para todo $f \in E^*$ porque f é contínua na topologia fraca. Reciprocamente, suponha que $f(x_n) \to f(x)$ para todo $f \in E^*$. Para provar que $x_n \rightharpoonup x$, mostraremos que dada qualquer vizinhança aberta fraca U de x, temos $x_n \in U$ para todo n suficientemente grande.

De fato, seja

$$\bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(V_i) \subset U$$

um elemento-base da topologia fraca contendo x_0, com $V_1, \ldots, V_m$ abertos em $\mathbb{R}$. Para cada i, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i(x_n) \in V_i$ para todo $n > N_i$.

Tomando $N = \max\{N_1, \ldots, N_m\}$, segue que se $n > N$ então $f_i(x_n) \in V_i$ para todo i, logo

$$x_n \in \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(V_i) \subset U$$

para todo $n > N$.

■

Pergunta 14.
Dê uma aplicação do Teorema de Hahn-Banach no estudo das Topologias Fracas.

Solução: Veja a proposição **(P.2.3)**. O fato da topologia fraca ser Hausdorff também segue de Hahn-Banach:

Proposição (P.3.3). *Um espaço vetorial normado E sob a topologia fraca é um espaço de Hausdorff.*

Demonstração: Se $x, y \in E$ com $x \neq y$, pelo teorema de Hahn-Banach (veja o corolário **??**) existe $f \in E^*$ tal que $f(x-y) = \|x-y\|^2$. Em particular, $f(x) \neq f(y)$ e se $\alpha \in \mathbb{R}$ é tal que $f(x) < \alpha < f(y)$, então os abertos $f^{-1}(-\infty, \alpha)$ e $f^{-1}(\alpha, \infty)$ separam x e y.

■

Um dos corolários de Hahn-Banach garante também que sequências que convergem fracamente são limitadas:

Proposição (P.3.4). *Se $x_n \xrightarrow{w} x$ em E, então a sequência $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$ é limitada.*

Demonstração: Seja $\{x_n\}$ uma sequência fracamente convergente em X. Definamos $T_n \in X^{**}$ por $T_n(\ell) = \ell(x_n)$ para toda $\ell \in X^*$. Fixemos uma $\ell \in X^*$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a convergência de $\{\ell(x_n)\}$ garante que $\{T_n(\ell)\}$ é um conjunto limitado. Pelo Principio da Limitação Uniforme e pelo inserir corolario HB Depois, $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$, i.e. $\{x_n\}$ é limitada.

■

■

Pergunta 15.
Por que há a necessidade de se obtermos compactos no estudo das topologias fracas?

Solução: Uma topologia enfraquecida naturalmente tem mais compactos, e compacidade é muito importante em técnicas de existência e minimização (geralmente na forma de compacidade sequencial). Leia a seguir a tradução dessa resposta no MSE:

Muitos problemas importantes em matemática e física matemática podem ser formulados como problemas de minimização de algum funcional integral, ou seja, queremos encontrar

$$\bar{u} \in S \quad \text{tal que} \quad \bar{u} = \min\{I(u) : u \in S\},$$

onde

$$I(u) := \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx.$$

Aqui S é algum espaço de funções, por exemplo,

$$S = \{u \in W^{1,1} \mid u|_{\partial\Omega} = f\},$$

para algum $f \in W^{1,1}$ fixo, e Ω é um domínio limitado em um espaço euclidiano. O integrando L representa a característica do problema que queremos resolver. Por exemplo, L pode

representar a densidade de energia para o funcional de energia de Dirichlet ou a energia interna de um corpo elástico.

Um método para resolver isso é chamado de **Método Direto**. Suponha que o funcional I seja limitado inferiormente em S; podemos então escolher uma sequência minimizadora $(u_n)_n \subset S$ tal que

$$I(u_n) \to \inf_S I.$$

O problema de minimização é resolvido se pudermos estabelecer o seguinte:

(a). $(u_n)_n$ possui uma subsequência que converge (em um sentido apropriado) para um $u \in S$.

(b). $I(u) \leq \liminf_{n\to\infty} I(u_n)$.

O modo apropriado de convergência geralmente é a convergência fraca, já que a compacidade fraca é mais fácil de se estabelecer do que a compacidade forte. Aqui vemos que a compacidade é crucial para garantir que $(u_n)_n$ possua uma subsequência convergente.

Neste caso, queremos que o funcional I seja fracamente semicontínuo inferiormente para que a segunda condição seja satisfeita.

■

Pergunta 16.
Construa a Topologia Fraca. Dê exemplos de abertos dessa topologia. A Topologia Fraca tem menos funções contínuas que a topologia forte? Justifique.

Solução: A construção foi feita acima. Um aberto genérico é uma união de interseções finitas descritas anteriormente. Para que uma função $f : (E, \sigma(E, E')) \to Y$ seja contínua, é necessário que $f^{-1}(O)$ seja aberto em $\sigma(E, E')$ para todo aberto O em Y, o que é evidentemente mais difícil de acontecer ao retirarmos abertos de E, como fazemos quando enfraquecemos a topologia.

Observamos que um aberto na topologia fraca nunca é limitado, pois sempre contém uma reta, como veremos na demonstração do seguinte resultado:

Proposição (P.3.5). *Se E é um espaço vetorial normado com dimensão infinita, então a esfera unitária não é fechada na topologia fraca.*

De fato, o fecho fraco da esfera unitária é a bola unitária fechada.

Demonstração: Sejam

$$S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$$

a esfera unitária de E,

$$\overline{B_1(0)} = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$$

a bola unitária fechada e denote por $\overline{S}^W$ o fecho de S na topologia fraca. Queremos então provar que

$$\overline{S}^W = \overline{B_1(0)}.$$

Seja $x_0 \in B_1(0)$ e U é qualquer aberto fraco contendo x_0. Pela Proposição 5.4, U contém uma vizinhança aberta fraca de x_0 da forma

$$V = \{x \in E : |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon, \quad f_1, \dots, f_n \in E^*\}.$$

Como E possui dimensão infinita, existe $y_0 \in E$ tal que

$$f_i(y_0) = 0 \quad \text{para todo } i,$$

caso contrário a aplicação linear $T : E \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$Tx = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

seria injetiva, o que implicaria $\dim E \leq n$. (outra maneira de ver isso é invocar a proposição **(P.8.1)**: o núcleo de um funcional linear tem codimensão 1, logo a interseção de um número finito de núcleos de funcionais lineares em um espaço vetorial de dimensão infinita também tem dimensão infinita). Em particular, V contém a reta $t \mapsto x_0 + ty_0$, pois

$$f_i(x_0 + t_0 y_0) - f_i(x_0) = f_i(x_0 + t_0 y_0 - x_0) = t_0 f_i(y_0) = 0$$

para todo i. *(Assim, em um espaço vetorial normado de dimensão infinita, toda vizinhança aberta fraca de um ponto x_0 contém uma reta passando por x_0; na verdade, infinitas tais retas.)*

Considere agora a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(t) = \|x_0 + ty_0\|.$$

Esta função é contínua e satisfaz $\varphi(0) < 1$ e $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$, o que implica pelo teorema do valor intermediário que existe $t_0 > 0$ tal que $g(t_0) = 1$, isto é, $x_0 + t_0 y_0 \in S \cap V$. Concluímos que toda vizinhança aberta *fraca* de x_0 intercepta S, portanto $x_0 \in \overline{S}^W$.

Este argumento prova que $\overline{B_1(0)} = B_1(0) \cup S \subseteq \overline{S}^W$. Como $B_1(0)$ é fechado na topologia fraca pela proposição **(P.2.3)**, não existem pontos do fecho fraco de S fora de $B_1(0)$. Portanto vale a igualdade

$$\overline{S}^W = \overline{B_1(0)}.$$

■

■

Pergunta 17.
Continuidade forte implica em continuidade fraca? Vale a volta?

<u>**Solução:**</u> Na presença de linearidade, continuidade forte implica continuidade fraca. Com efeito, suponhamos $T : E \to F$ fortemente contínua. Para provar a continuidade fraca, pela proposição **(P.3.1)**,

basta provarmos que $g \circ T$ é contínua para cada $g \in F'$, o que segue imediatamente do fato de que $g \circ T \in E'$.

Na ausência de linearidade, continuidade forte não implica continuidade fraca. De fato, tomando a sequência $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^2$, é claro que (e_n) converge fracamente a 0 em ℓ^2, mas $|e_n|_2$ não converge a $|0|_2 = 0$.

A topologia da norma contém todos os abertos da topologia fraca (e em dimensão infinita, abertos que não são abertos fracos), portanto toda função $h : E \to F$ fracamente contínua (ou seja, considerando E com a topologia fraca) é fortemente contínua.

■

Pergunta 18.
Qual a relação entre as Topologias Fraca e Fraca*?

Solução:

Definição (D.3.2). Seja E um espaço vetorial normado e considere a imersão canônica $J : E \to E^{**}$. A **topologia fraca*** sobre o dual E^*, que denotaremos por $\sigma(E^*, E)$, é a topologia menos fina tal que todos os funcionais lineares na imagem $J(E)$ são contínuos.

Evidentemente, se E for um espaço reflexivo então a topologia fraca* coincide com a topologia fraca de E^*. Caso contrário, em geral a topologia fraca* de E^* é mais grosseira que a topologia fraca de E^*, que por sua vez é mais grosseira que a topologia forte de E^*.

Na verdade, pelos teoremas de Banach–Alaoglu–Bourbaki e Kakutani, as topologias fraca e fraca* no dual coincidem se, e somente se, o espaço for reflexivo!

■

Pergunta 19.
Exemplos de: (i) fraco que não é forte; (ii) fraco* que não é fraco; (iii) fraco* que não é forte.

Solução: A topologia da norma contém todos os abertos fracos, portanto não existe aberto fraco que não é forte. Por outro lado, pela demonstração da proposição **(P.3.5)**, qualquer aberto forte limitado não é um aberto fraco. Para exibirmos um aberto fraco* que não é aberto fraco basta exibirmos um fechado fraco* que não é fechado fraco. Isso é possível se e só se o espaço não for reflexivo. Nesse caso, tomando $\xi \notin J(E)$, o conjunto

$$F = \xi^{-1}(\{0\})$$

é evidentemente fechado fraco mas não é fechado fraco* devido ao seguinte resultado (Corollary 3.15. do Brezis)

Proposição (P.3.6). Seja H um hiperplano em E^* que é fechado fraco*. Então existem $0 \neq x_0 \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$H = \{f \in E^* \mid f(x_0) = \alpha\}$$

De fato, se F fosse fechado fraco*, existiriam $0 \neq x_0 \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$F = \ker(\xi) = \{f \in E^* \mid f(x_0) = \alpha\}$$

Uma vez que $\ker(\xi)$ é um subespaço, não podemos ter $\alpha \neq 0$. Segue que ξ e $J(x_0)$ possuem o mesmo núcleo, o que implica que $\xi \in J(E)$ pela proposição **(P.8.1)**.

Não existe aberto fraco* que não é aberto forte, pois a topologia da norma contém a topologia fraca, em particular contém a topologia fraco*. Porém, a bola unitária é um aberto forte que não é aberto fraco, portanto não é aberto fraco*, já que todo aberto fraco* é aberto fraco.

■

Pergunta 20.
Qual a relação entre separável e metrizável?

Solução: Temos os seguintes resultados:

Proposição (P.3.7). *Se E é separável então $(B_E, \sigma(E', E))$ é metrizável.*

Proposição (P.3.8). *Se E é separável então E' é separável na topologia fraca-estrela.*

Proposição (P.3.9). *Se E' é separável então $(B_E, \sigma(E, E'))$ é metrizável.*

Proposição (P.3.10). (a) *Se E é um espaço normado de dimensão infinita, então a topologia fraca em E não é metrizável.*

(b) *Se E é um espaço de Banach de dimensão infinita, então a topologia fraca-estrela em E' não é metrizável.*

■

Pergunta 21.
Por que $B_1(0)$ não é aberto na topologia fraca?

Solução: Como vimos na demonstração da proposição **(P.3.5)**, todo aberto fraco é ilimitado.

■

Pergunta 22.
Dê uma ideia da prova do seguinte resultado: todo fechado convexo forte é um fechado fraco.

Solução: A ideia é usar a segunda forma geométrica de Hahn-Banach para garantir a existência de vizinhanças fracas de cada $x_0 \in E \setminus C$, conforme vimos na demonstração da proposição **(P.2.3)**.

■

Pergunta 23.
Enuncie o Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki. Dê a ideia central da prova.

Solução:

Teorema (T.3.1) (Teorema de Banach–Alaoglu–Bourbaki). *Para todo espaço normado E, a bola $B_{E'}$ é compacta na topologia fraca-estrela $\sigma(E', E)$ de E'.*

A ideia central da prova consiste em identificar a bola com um produto de discos compactos e aplicar o teorema de Tychonoff,

■

Pergunta 24.
Enuncie o Teorema de Kakutani. Dê a ideia central da prova.

Solução:

Teorema (T.3.2) (Teorema de Kakutani). *Um espaço de Banach E é reflexivo se, e somente se, a bola unitária fechada B_E é compacta na topologia fraca $\sigma(E, E')$.*

A ideia na ida (assumindo E reflexivo) é usar o Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki e o fato de que em espaços reflexivos a injeção canônica é um homeomorfismo.

Na volta, a ideia é trabalhar com a imagem pela injeção canônica de B_E, considerando a topologia fraco-estrela no bidual. Como a topologia fraco-estrela é Hausdorff, tal imagem é fechada, e pelo teorema de Goldstine teremos então que $J_E(B_E) = B_{E''}$, o que por linearidade garante que E é reflexivo.

Teorema (T.3.3) (Teorema de Goldstine). *Sejam E um espaço de Banach e $J_E : E \to E''$ o mergulho canônico. Então $J_E(B_E)$ é denso em $B_{E''}$ na topologia fraca-estrela.*

■

Pergunta 25.
Defina espaços uniformemente convexos. Dê exemplos de espaços que são e não são uniformemente convexos. Dê uma aplicação.

Solução: Nossa intuição geométrica nos diz claramente que a bola unitária fechada do espaço euclidiano $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ é redonda, enquanto que as dos espaços $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ e $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ não são nada redondas; na verdade são quadradas. Esses dois últimos exemplos são extremos, pois suas esferas unitárias contêm segmentos de retas.

Para evitar que a esfera unitária fechada $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ de um espaço E contenha segmentos de reta, basta pedir que se $x, y \in B_E$, então o ponto médio do segmento que liga x a y esteja no interior da bola, isto é,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 \quad \text{sempre que} \quad \|x\| \leq 1 \quad \text{e} \quad \|y\| \leq 1.$$

Mas a esfera unitária de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, ou seja, a circunferência, satisfaz uma propriedade bem mais forte do que simplesmente não conter segmentos de reta. Fixe uma distância $\varepsilon > 0$ e tome dois pontos x e y quaisquer na circunferência que distem (pelo menos) ε entre si. Apelando novamente para a intuição geométrica, percebemos que, independentemente de onde se localizam os pontos x e y na circunferência, o ponto médio do segmento que os une permanece dentro da circunferência e, mais importante, a uma distância segura da circunferência. Ou seja, podemos variar os pontos x e y na circunferência, apenas mantendo-os a uma distância ε, que não há risco do ponto médio do intervalo que os une se aproximar perigosamente da circunferência. Os espaços normados que compartilham com os espaços euclidianos esse comportamento uniforme dos pontos da bola unitária são chamados de espaços uniformemente convexos.

Definição (D.3.3). Dizemos que um espaço normado E é *uniformemente convexo* ou, mais precisamente, que sua norma é *uniformemente convexa* se, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta \quad \text{sempre que} \quad x, y \in B_E \quad \text{e} \quad \|x - y\| \geq \varepsilon.$$

Como dois pontos de B_E distam no máximo 2 entre si, é suficiente mostrar a condição acima para $0 < \varepsilon \leq 2$.

Exemplo (E.3.1). Todo espaço de Hilbert H é uniformemente convexo. Com efeito, dados $x, y \in B_H$ e $0 < \varepsilon \leq 2$, da Lei do Paralelogramo, resulta que se $\|x - y\| \geq \varepsilon$ então

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 = \frac{\|x\|^2}{2} + \frac{\|y\|^2}{2} - \frac{\|x-y\|^2}{4} \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Basta então tomar $\delta = 1 - (1 - \varepsilon^2/4)^{\frac{1}{2}} > 0$.

Exemplo (E.3.2). Os espaços $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ e $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ não são uniformemente convexos. De fato, dado $0 < \varepsilon < 1$, basta tomar dois vetores que estão no mesmo segmento de reta da esfera unitária e distam ε um do outro. Completando com zero nas demais coordenadas, transformamos esses pares ordenados em sequências, o que prova que os espaços c_0, ℓ_1 e ℓ_∞ não são uniformemente convexos.

Exemplo (E.3.3). $L^p(\Omega)$ é uniformemente convexo para qualquer Ω aberto em $\mathbb{R}^n$ e $1 < p < \infty$.

Uma aplicação muito usada é a seguinte:

Proposição (P.3.11). *Sejam E um espaço de Banach uniformemente convexo e $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em E. Se $x_n \rightharpoonup x$ e $\|x_n\| \to \|x\|$, então $x_n \to x$.*

■

Capítulo 4

Espaços de Hilbert

CONSIDERAREMOS ESPAÇOS DE HILBERT SOMENTE SOBRE O CORPO DOS REAIS.

> **Pergunta 26.**
> Em espaços de Hilbert, qual a relação entre bases de Schauder e Hilbertianas? Em quais condições uma base de Schauder é uma base Hilbertiana? Uma base Hilbertiana é uma base de Schauder, por quê?

Solução: Uma base Hilbertiana é um sistema ortonormal completo, conforme definido em **(D.1.1)**.

Teorema (T.4.1). *Seja $S = \{x_i : i \in I\}$ um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert H. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) Para cada $x \in H$, $x = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle x_i$.

(b) S é um sistema ortonormal completo.

(c) $\overline{[S]} = H$.

(d) Para cada $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2$. (Identidade de Parseval)

(e) Para todos $x, y \in H$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle \langle y, x_i \rangle$.

Proposição (P.4.1). No caso separável, a representação do Teorema **(T.4.1)**(a) é única, isto é, se $x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n$, então $b_n = \langle x, x_n \rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema (T.4.2). *Um espaço de Hilbert H de dimensão infinita é separável se, e somente se, existe em H um sistema ortonormal completo enumerável.*

Combinando os resultados acima, concluímos que sistemas ortonormais completos em espaços de Hilbert separáveis são bases de Schauder. Multiplicando uma base de Hilbert por 2, por exemplo, temos uma base de Schauder que não é de Hilbert. Em espaços de Hilbert separáveis sempre podemos transformar uma base de Schauder em uma base de Hilbert pelo processo de Gram–Schmidt.

■

Pergunta 27.
Enuncie e dê uma ideia da prova do Teorema da Representação de Riesz.

Solução: A prova do teorema usa a seguinte propriedade dos espaços de Hilbert:

Teorema (T.4.3) (Decomposição ortogonal). *Sejam E um espaço com produto interno e M um subespaço completo de E. Então $E = M \oplus M^\perp$, isto é, cada $x \in E$ admite uma única representação na forma*

$$x = p + q \quad \text{com } p \in M \text{ e } q \in M^\perp.$$

Além disso,

$$\|x - p\| = dist(x, M).$$

O vetor p é chamado de projeção ortogonal de x sobre M.

Teorema (T.4.4) (Teorema da Representação de Riesz). *Sejam H um espaço de Hilbert e $\varphi : H \to \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo. Então existe um único $y_0 \in H$ tal que*

$$\varphi(x) = \langle x, y_0 \rangle \quad \text{para todo } x \in H.$$

Além disso, $\|\varphi\| = \|y_0\|$.

Demonstração: Se φ é o funcional identicamente nulo, basta tomar $y_0 = 0$. Consideremos agora o caso em que φ não é identicamente nulo. Nesse caso o núcleo de φ,

$$M := \{x \in H : \varphi(x) = 0\},$$

é um subespaço fechado próprio de H. Do teorema anterior sabemos que $M^\perp \neq \{0\}$, e então podemos escolher x_0 em $M^\perp$ de norma 1 (lembre-se que $M^\perp$ é subespaço vetorial). Provemos que $y_0 := \varphi(x_0)x_0$ é o vetor procurado. Dado $x \in H$,

$$x = \left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}x_0\right) + \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}x_0,$$

onde $\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}x_0\right) \in M$ e $\frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}x_0 \in M^\perp$. Como $y_0 \in M^\perp$ e $\|x_0\| = 1$,

$$\langle x, y_0 \rangle = \left\langle x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}x_0, y_0 \right\rangle + \left\langle \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}x_0, y_0 \right\rangle.$$

Como $\left\langle x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0, y_0 \right\rangle = 0$, temos

$$\langle x, y_0 \rangle = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} \langle x_0, \varphi(x_0) x_0 \rangle = \varphi(x).$$

Da desigualdade de Cauchy–Schwarz temos $\|\varphi\| \leq \|y_0\|$. A igualdade $|\varphi(x_0)| = \|y_0\|$ garante a desigualdade inversa e portanto $\|\varphi\| = \|y_0\|$. A unicidade é evidente.

■

■

Pergunta 28.
Dê uma aplicação do Teorema da Representação de Riesz em EDP.

Solução: Veja o capítulo 6.

■

Pergunta 29.
Enuncie e dê uma ideia da prova do Teorema de Lax-Milgram.

Solução:

Teorema (T.4.5) (Lax-Milgram). *Seja $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{B} : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear satisfazendo*

(i) existe $\alpha > 0$ tal que, para todo $u, v \in H$,

$$|\mathcal{B}[u, v]| \leq \alpha \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H.$$

(ii) existe $\beta > 0$ tal que,

$$\mathcal{B}[u, u] \geq \beta \|u\|^2, \quad \forall u \in H.$$

Então, dado um funcional linear contínuo $T : H \to \mathbb{R}$, existe um único $u_T \in H$ tal que

$$T(u) = \mathcal{B}[u_T, u], \quad \forall u \in H.$$

Demonstração: A ideia da prova é usar o teorema da representação de Riesz para representar B por um endomorfismo contínuo $A : H \to H$, e então reduzir o problema original a mostrar que A é bijetora.

Sendo $\varphi : H \to H^*$ o isomorfismo isométrico cuja existência é garantida pelo teorema da representação de Riesz, definimos a aplicação A por

$$u \mapsto A(u) = \varphi\Big(\mathcal{B}[u, \cdot]\Big).$$

Note que A é linear e contínua, pois $\mathcal{B}$ é bilinear e contínua. Além disso,

(a) A é injetora (consequência direta da coercividade de $\mathcal{B}$),

(b) $\mathrm{Im}(A)$ é *fechado*, pois $\beta|v| \leq |Av| \quad \forall v \in H$ (também consequência da coercividade de $\mathcal{B}$). Logo, se $y_n = A(v_n) \to y$, então v_n é de Cauchy em H e, pela completude de H, existe $v \in H$ tal que $v_n \to v$. Segue da continuidade de A que $y = A(v) \in \mathrm{Im}(A)$. Isso garante a sobrejetividade de A (note que a coercividade de $\mathcal{B}$ garante que $(\mathrm{Im}(A))^{\perp} = \{0\}$ - como estamos em espaços de Hilbert, isso é equivalente a $\mathrm{Im}(A) = H$).

Dado agora $T \in H^*$, basta aplicarmos o teorema da representação de Riesz para T e a sobrejetividade de A para concluir que existe $u_T \in H$ tal que $T(u) = \mathcal{B}[u_T, u]$, como desejado. A unicidade de u_T segue da coercividade de A.

■

■

Pergunta 30.
Dê um exemplo em que podemos aplicar o Teorema de Lax-Milgram mas não é possível aplicarmos o Teorema da representação de Riesz.

Solução: a ser preenchido

■

Pergunta 31.
Seja $\mathcal{B} : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear que satisfaz as hipóteses de Lax-Milgram (ou seja, é continua e coerciva) mas que também é simétrica. Nesse caso podemos simplesmente aplicar o Teorema da Representação de Riesz? Justifique.

Solução: Sim, podemos. $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ é um espaço de Hilbert com uma norma, digamos $\| \cdot \|_1$, que é induzida de $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$, ou seja,

$$\| \cdot \|_1(v) \doteq \sqrt{\langle v, v \rangle}, \ \forall v \in H.$$

Trivialmente $\mathcal{B}$ também define um produto interno em H. Agora, dado $T : H \to \mathbb{R}$ linear e contínuo com respeito a $\| \cdot \|_1$, ou seja, satisfazendo

$$|T(u)|_{\mathbb{R}} \leq C\|u\|_1, \text{ para qualquer } u \in H \text{ e alguma constante } C > 0;$$

a priori, poderia acontecer que T não fosse contínuo com respeito a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ definida por:

$$H \ni v \mapsto \|\cdot\|_{\mathcal{B}}(v) \doteq \sqrt{\mathcal{B}(v,v)}$$

Mas, na verdade, a continuidade e coercividade de $\mathcal{B}$ garantem que $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ e $\|\cdot\|_1$ são equivalentes, de forma que

$$T \text{ é contínuo com respeito a } \|\cdot\|_{\mathcal{B}} \iff T \text{ é contínuo com respeito a } \|\cdot\|_1.$$

Portanto, o Teorema da Representação de Riesz garante a existência de um único $u_T \in H$ tal que

$$T(u) = \mathcal{B}[u_T, u], \quad \forall u \in H.$$

$\blacksquare$

Capítulo 5

Teoria Espectral de Operadores Compactos e Autoadjuntos

Pergunta 32.
Enuncie a Alternativa de Fredholm.

Solução: a ser preenchido

■

Pergunta 33.
Qual é o espectro pontual do operador de Volterra? Sabe justificar?

Solução: a ser preenchido

■

Pergunta 34.
Quando o espectro pontual de um operador (distingua o espaço onde se encontra definido este operador) coincide com o conjunto de valores próprios?

Solução: a ser preenchido

■

Capítulo 6

Espaços de Sobolev

Pergunta 35.
Defina derivada fraca.

Solução: a ser preenchido

■

Pergunta 36.
Defina espaços de Sobolev.

Solução: a ser preenchido

■

Pergunta 37.
Justifique porque $W^{m,p}$ é reflexivo para $1 < p < \infty$.

Solução: a ser preenchido

■

Pergunta 38.
Enuncie o Teorema de Extensão e dê um (uma) exemplo (aplicação).

Solução: a ser preenchido

■

Pergunta 39.
Enuncie o Teorema do Traço e dê um (uma) exemplo (aplicação).

Solução: a ser preenchido

■

Pergunta 40.
O que se ganha quando se trabalha com o espaço H_0^1? Por que não trabalhar simplesmente com o espaço $\mathscr{C}_0^\infty$?

Solução: a ser preenchido

■

Pergunta 41.
Dada uma função $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, como estendê-la para o fecho?

Solução: a ser preenchido

■

Pergunta 42.
$W^{1,2}$ está imerso onde? E imerso compactamente onde?

Solução: a ser preenchido

■

Capítulo 7

Equações Lineares Elípticas de Segunda ordem

Pergunta 43.
Dê um exemplo de alguma EDP elíptica e resolva-a.

Solução: a ser preenchido

■

Pergunta 44.
Dê um exemplo de uma EDP elíptica que não tenha solução fraca.

Solução: a ser preenchido

■

Pergunta 45.
Dê um exemplo de uma EDP elíptica que não tenha solução clássica.

Solução: a ser preenchido

■

Pergunta 46.
Dê um exemplo de uma EDP elíptica que possui solução fraca mas não clássica.

Solução: a ser preenchido

■

Pergunta 47.
Considere a EDP a seguir, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado,

$$(P_{2\pi}) \quad \begin{cases} -\Delta u = 2\pi, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

$P_{2\pi}$ tem solução fraca? Caso tenha, a solução fraca é única? Quando $(P_{2\pi})$ tem solução clássica? O que pode ser dito sobre a regularidade interior de possíveis soluções fracas? E quanto à regularidade até a fronteira? O que pode ser dito sobre o sinal de soluções clássicas?

Solução: a ser preenchido

■

Pergunta 48.
Considere a EDP a seguir, em que $f \in L^2(\Omega)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado,

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u = g, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

(P) tem solução fraca? Caso tenha, a solução fraca é única? Qual restrição g deve ter para que (P) tenha solução clássica? Se $g > 0$ em $\partial\Omega$, o que podemos dizer com respeito ao sinal da solução fraca dessa EDP? O que pode ser dito sobre a regularidade interior de possíveis soluções fracas em termos da regularidade da f? E quanto à regularidade até a fronteira?

Solução: a ser preenchido

■

Pergunta 49.
Considere a EDP a seguir, em que $f \in L^2(\Omega)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado,

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Imponha condições sobre Ω e f a fim de fazer a formulação fraca. Defina solução fraca e use o Teorema da Representação de Riesz para garantir a existência de solução. Se tivermos somente $f \in C(\Omega)$, é possível conseguir soluções fracas ou clássicas? E se $f \in C\left(\overline{\Omega}\right)$? Quando for possível obter soluções fracas, qual é a melhor regularidade que conseguimos para tais soluções em termos da regularidade de f e de $\partial\Omega$?

Solução: a ser preenchido

■

Pergunta 50.
Considere a EDP a seguir, em que $f \in L^2(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado,

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

(P_λ) tem solução fraca para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$? Caso a resposta seja não, para quais λ o problema admite solução fraca? Tal solução é única? O que pode ser dito sobre a regularidade interior e até a fronteira de possíveis soluções fracas? Enuncie todos os teoremas usados para garantir a existência, unicidade e regularidade das soluções.

Solução: a ser preenchido

■

Pergunta 51.
Considere a EDP a seguir, em que $f \in L^2(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado,

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Imponha condições sobre Ω, f e λ a fim de fazer a formulação fraca. Defina solução fraca e use o Teorema de Lax-Milgram para garantir a existência de solução. Nesse caso poderia ser usado o Teorema da Representação de Riesz? Justifique. Se tivermos somente $f \in C(\Omega)$, é possível conseguir soluções fracas ou clássicas? E se $f \in C\left(\overline{\Omega}\right)$? Quando for possível obter soluções fracas, qual é a melhor regularidade que conseguimos para tais soluções em termos da regularidade de f e de $\partial\Omega$?

Solução: a ser preenchido

■

Pergunta 52.
Enuncie o Princípio do Máximo Fraco $(c \geq 0)$. Dê uma aplicação deste princípio.

Solução: a ser preenchido

■

Pergunta 53.
Dê uma ideia do *Bootstrapping* (Regularidade).

Solução: a ser preenchido

∎

Apêndice

Proposição (P.8.1). Seja $0 \neq f \in E'$. Então $\ker(f)$ tem codimensão 1.

Demonstração: Como $0 \neq f$ por hipotese, existe $v_0 \in E$ tal que $f(v_0) \neq 0$. Podemos então escrever

$$x = \left(x - \frac{f(x)}{f(v_0)} v_0\right) + \frac{f(x)}{f(v_0)} v_0$$

Evidentemente,

$$\left(x - \frac{f(x)}{f(v_0)} v_0\right) \in \ker(f).$$

■

Bibliografia

[1] **BOTELHO** livro do Botelho

[2] **RODNEY** notas de aula do Rodney

[3] **BREZIS** livro do Brezis