

Apresentação do exame de qualificação em Análise (Segunda Área)

Teorema. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, $f \in L^2(\Omega)$ e $\lambda \geq 0$. Então o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

possui uma única solução fraca em $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração: Primeiramente, note que a formulação fraca do problema é

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle + \lambda \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \lambda \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad (1)$$

Isso nos motiva a definir a seguinte forma bilinear:

$$B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \mapsto \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \lambda \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

de forma que é equivalente a encontrarmos $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B(u, \cdot) = \left(H_0^1(\Omega) \ni v \mapsto \int_{\Omega} f v \right) \doteq T_f$$

Uma vez que tivermos mostrado que

- $T_f \in (H_0^1(\Omega))^*$;

- B é contínua;

- B é coerciva,

o resultado desejado seguirá do Teorema de Lax-Milgram.

De fato, T_f é evidentemente linear, e dada $v \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$|T_f(v)| = \left| \int_{\Omega} f v \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \tilde{C} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Além disso,

- dadas $u, v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
|B(u, v)| &= |\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \lambda \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)}| \\
&\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \lambda \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq (1 + \lambda C^2) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2}$$

onde usamos as desigualdades de Holder e Poincaré. Isso mostra a continuidade de B .

- $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, vale:

$$\begin{aligned}
B(v, v) &= \langle \nabla v, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \lambda \langle v, v \rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\geq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\geq C \|v\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned} \tag{3}$$

onde usamos a desigualdade triangular e a desigualdade de Poincaré. Isso mostra a coercividade de B . ■

Questão 1. É possível melhorar a hipótese $\lambda \geq 0$ para $\lambda > \alpha$ para algum $\alpha < 0$?

Resposta: Sim! Seja

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega} |u|^2}$$

de forma que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \geq \lambda_1 \int_{\Omega} |u|^2 \Rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

e suponhamos $0 > \lambda > -\lambda_1$. Então (2) se torna

$$\begin{aligned}
|B(u, v)| &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} - \lambda \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\lambda}{\lambda_1} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&= \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

A hipótese $0 > \lambda$ garante em particular que $\lambda < \lambda_1$, e portanto também que $1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} > 0$, o que mostra que B é contínua.

A prova da coercividade dada em (3) precisa ser adaptada. Basta notarmos que para $v \in H_0^1(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned}
B(v, v) &= \langle \nabla v, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \lambda \langle v, v \rangle_{L^2(\Omega)} \\
&\geq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{\lambda_1} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \left(\frac{\lambda_1 + \lambda}{\lambda_1}\right) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2
\end{aligned}$$
■

Questão 2. É possível trocar a constante λ por alguma função $c(x)$? Se sim, quais hipóteses devem ser postas sobre $c(x)$?

Demonstração: Sim! Sim, desde que supomos que $c \in L^\infty(\Omega)$ e $\|c\|_{L^\infty(\Omega)} < \lambda_1$.

Nesse caso, a forma bilinear associada é:

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle + \int_{\Omega} c(x)uv$$

que satisfaz

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(1 + \frac{\|c\|_{L^\infty}}{\lambda_1}\right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Além de

$$\begin{aligned} B(u, u) &= \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} c(x)u^2 \\ &\geq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \frac{\|c\|_{L^\infty(\Omega)}}{\lambda_1} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &= \left(1 - \frac{\|c\|_{L^\infty(\Omega)}}{\lambda_1}\right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Poincaré e o fato de que

$$|c(x)| \leq \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ em particular } -\|c\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c(x) \leq \|c\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Segue da hipótese

$$\|c\|_{L^\infty(\Omega)} < \lambda_1$$

que $M \doteq 1 - \frac{\|c\|_{L^\infty(\Omega)}}{\lambda_1} > 0$, e portanto

$$|B(u, u)| > M \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

■

Questão 3. Para o problema original, o que pode ser dito no caso em que $\lambda \leq -\lambda_1$?

Resposta: Pelos resultados que acabamos de demonstrar, o operador solução $L = (-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ está bem definido, de forma que o nosso problema original é equivalente a encontrarmos

$$(\text{Id} - K)(u) = f,$$

onde $K = i \circ -\lambda L$ para alguma imersão compacta $i : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$. Se $\lambda = -\lambda_j$, é evidente que $\text{Id} - K$ não será injetivo e, em particular (pela alternativa de Fredholm), não será sobrejetivo. Nesse cenário, a existência de soluções fracas não é garantida (na verdade, é *garantido* que existem funções f para as quais o problema não admite nenhuma solução fraca). A unicidade também se perde, pois, quando o problema admite alguma solução, digamos u , então $u + c\varphi_j$ (onde φ_j é uma autofunção de $-\Delta$) também será uma solução seja qual for $c \in \mathbb{R}$.

Por fim, se $\lambda < -\lambda_1$ e $\lambda \notin \{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\text{Id} - K$ é injetivo e, portanto, sobrejetivo. Nesse caso, o problema admite exatamente uma solução fraca.

■