Apresentação do exame de qualificação em Análise (Segunda Área)

Teorema. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, $f \in L^2(\Omega)$ e $\lambda \geq 0$. Então o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

possui uma única solução fraca em $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração: Primeiramente, note que a formulação fraca do problema é

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle + \lambda \int_\Omega uv = \int_\Omega fv, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \lambda \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \tag{1}$$

Isso nos motiva a definir a seguinte forma bilinear:

$$B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$(u, v) \mapsto \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \lambda \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

de forma que é equivalente a encontrarmos $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B(u, \cdot) = \left(H_0^1(\Omega) \ni v \mapsto \int_\Omega fv \right) \doteq T_f$$

Uma vez que tivermos mostrado que

- $$T_f \in (H_0^1(\Omega))^*;$$
- $$B \text{ é contínua;}$$
- $$B \text{ é coerciva,}$$

o resultado desejado seguirá do Teorema de Lax-Milgram.

De fato, T_f é evidentemente linear, e dada $v \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$|T_f(v)| = \left| \int_\Omega fv \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \tilde{C} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Além disso,

- dadas $u, v \in H_0^1(\Omega)$,

$$
\begin{aligned}
|B(u,v)| &= \left|\langle \nabla u, \nabla v\rangle_{L^2(\Omega)} + \lambda \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)}\right| \\
&\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \lambda \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq (1+\lambda C^2)\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)},
\end{aligned}
\tag{2}
$$

onde usamos as desigualdades de Holder e Poincaré. Isso mostra a continuidade de B.

- $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, vale:

$$
\begin{aligned}
B(v,v) &= \langle \nabla v, \nabla v\rangle_{L^2(\Omega)} + \lambda \langle v, v\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\geq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\geq C\|v\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

onde usamos a desigualdade triangular e a desigualdade de Poincaré. Isso mostra a coercividade de B.

■

Questão 1. É possível melhorar a hipótese $\lambda \geq 0$ para $\lambda > \alpha$ para algum $\alpha < 0$?

Resposta: Sim! Seja

$$
\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega |u|^2}
$$

de forma que

$$
\int_\Omega |\nabla u|^2 \geq \lambda_1 \int_\Omega |u|^2 \Rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\lambda_1}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2
$$

e suponhamos $0 > \lambda > -\lambda_1$. Então (2) se torna

$$
\begin{aligned}
|B(u,v)| &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} - \lambda \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\lambda}{\lambda_1}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&= \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

A hipótese $0 > \lambda$ garante em particular que $\lambda < \lambda_1$, e portanto também que $1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_1} > 0$, o que mostra que B é contínua.

A prova da coercividade dada em (3) precisa ser adaptada. Basta notarmos que para $v \in H_0^1(\Omega)$, temos que

$$
\begin{aligned}
B(v,v) &= \langle \nabla v, \nabla v\rangle_{L^2(\Omega)} + \lambda \langle v, v\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&\geq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \left(\frac{\lambda_1 + \lambda}{\lambda_1}\right)\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2
\end{aligned}
$$

■

Questão 2. É possível trocar a constante λ por alguma função $c(x)$? Se sim, quais hipóteses devem ser postas sobre $c(x)$?

Demonstração: Sim! Sim, desde que supomos que $c \in L^\infty(\Omega)$ e $\|c\|_{L^\infty(\Omega)} < \lambda_1$.

Nesse caso, a forma bilinear associada é:

$$B(u,v) = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle + \int_\Omega c(x)uv$$

que satisfaz

$$\begin{aligned}|B(u,v)| &\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(1 + \frac{\|c\|_{L^\infty}}{\lambda_1}\right)\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$

Além de

$$\begin{aligned}B(u,u) &= \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega c(x)u^2 \\ &\geq \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \|c\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\|c\|_{L^\infty(\Omega)}}{\lambda_1}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\ &= \left(1 - \frac{\|c\|_{L^\infty(\Omega)}}{\lambda_1}\right)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Poincaré e o fato de que

$$|c(x)| \leq \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ em particular } -\|c\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c(x) \leq \|c\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Segue da hipótese

$$\|c\|_{L^\infty(\Omega)} < \lambda_1$$

que $M \doteq 1 - \dfrac{\|c\|_{L^\infty(\Omega)}}{\lambda_1} > 0$, e portanto

$$|B(u,u)| > M\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \; \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

∎

Questão 3. Para o problema original, o que pode ser dito no caso em que $\lambda \leq -\lambda_1$?

Resposta: Pelos resultados que acabamos de demonstrar, o operador solução $L = (-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ está bem definido, de forma que o nosso problema original é equivalente a encontrarmos

$$(\mathrm{Id} - K)(u) = f,$$

onde $K = i \circ -\lambda L$ para alguma imersão compacta $i : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$. Se $\lambda = -\lambda_j$, é evidente que $\mathrm{Id} - K$ não será injetivo e, em particular (pela alternativa de Fredholm), não será sobrejetivo. Nesse cenário, a existência de soluções fracas não é garantida (na verdade, é *garantido* que existem funções f para as quais o problema não admite nenhuma solução fraca). A unicidade também se perde, pois, quando o problema admite alguma solução, digamos u, então $u + c\varphi_j$ (onde φ_j é uma autofunção de $-\Delta$) também será uma solução seja qual for $c \in \mathbb{R}$.

Por fim, se $\lambda < -\lambda_1$ e $\lambda \notin \{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\mathrm{Id} - K$ é injetivo e, portanto, sobrejetivo. Nesse caso, o problema admite exatamente uma solução fraca.

$\blacksquare$